РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 21, № 2 2015

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

Том 21 № 2 2015

ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 21, № 2. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2015. 332 с.

ISSN 0134–4889

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

АНДРЕЙ ИЗМАЙЛОВИЧ СУББОТИН

(*К семидесятилетию со дня рождения*)

В феврале 2015 г. исполняется 70 лет со дня рождения академика Андрея Измайловича Субботина, выдающегося русского математика, специалиста в области теории оптимального управления и дифференциальных игр, создателя теории обобщенных минимаксных решений уравнений Гамильтона — Якоби.

А. И. Субботин родился 16 февраля 1945 г. в городе Кирове в семье военнослужащего. В 1962 г. он поступил на математико-механический факультет Уральского государственного университета, где и началась его научная деятельность.

В то время на факультете работали крупные ученые старшего поколения профессора — В. К. Иванов, П. Г. Конторович, С. Н. Шиманов. На факультете создавались новые кафедры и развивались новые научные направления, отвечающие потребностям времени. Так, в 1965 г. профессором Н. Н. Красовским была создана новая кафедра прикладной математики.

Научные приоритеты кафедры определялись, прежде всего, ее заведующим — Н. Н. Красовским и лежали в области теории устойчивости движения, качественной теории дифференциальных уравнений, в том числе дифференциальных уравнений с последействием, теории стабилизации и теории оптимального управления. Работы коллектива кафедры были хорошо известны и высоко оценивались в научных кругах. Эти работы составили солидную базу для новых исследований.

Следует сказать, что 1950-е–60-е гг. ознаменовались интенсивным развитием естественных и прикладных наук. В эти годы формируются основы математической теории оптимального управления: создаются такие мощные методы, как принцип максимума Л. С. Понтрягина и метод динамического программирования Р. Беллмана, влияние которых на выбор приоритетных направлений кафедры прикладной математики было весьма сильным. К этому времени на кафедре уже сложилось ясное понимание задач программного управления, управления по принципу обратной связи, стохастических задач управления и задач управления системами с запаздыванием. В том числе стало ясным понимание различных задач, приводящих к постановкам линейно-квадратичных игр.

На кафедре сформировался коллектив успешно работающих молодых ученых — в основном выпускников университета. В их числе — Э. Г. Альбрехт, А. Б. Куржанский, Ю. С. Осипов, В. Е. Третьяков, Г. С. Шелементьев. В ходе исследований возникали постановки новых задач, в решении которых могли попробовать свои силы и одаренные студенты. Несомненно, Субботин был одним из таких студентов. Его способности были замечены практически сразу, с первых дней учебы на математико-механическом факультете. Он выделялся среди студентов ясностью и быстротой мышления, умением говорить просто и понятно о сложных математических фактах и обладал редким даром проникать в суть предметов и явлений. Уже в первые годы учебы Андрей пользовался уважением преподавателей и студентов. Талантливый юноша был привлечен Э. Г. Альбрехтом, в ту пору преподавателем кафедры прикладной математики университета, к научной работе. Под его руководством А. И. Субботин писал курсовую работу, посвященную построению оптимальных управлений в квазилинейных системах. По результатам этой работы Андреем Измайловичем была опубликована первая научная статья “Об управлении движением квазилинейной системы” [1] в журнале “Дифференциальные уравнения”.

Тогда же Э. Г. Альбрехт предложил А. И. Субботину включиться в научно-исследовательскую работу кафедры прикладной математики.

В это время основные интересы кафедры концентрировались уже вокруг новых задач конфликтного управления и управления в условиях неопределенности, формализуемых как дифференциальные игры. В этой мало разработанной области проявилась не только способность Андрея Измайловича быстро воспринимать существо проблем, но и особый дар идти к их решению собственными новыми путями.

Теория дифференциальных игр возникла в результате математической идеализации новых задач техники, экономики, радиоэлектроники, биологии. В этих задачах наряду с управлением, воздействующим на управляемую систему, присутствуют факторы, которые вносят неопределенность в ее поведение. Очень часто бывает удобно трактовать эти факторы как помехи, действующие на систему. В реальных задачах известны только границы, в которых заключены эти помехи. Например, в задаче о посадке самолета при наличии ветровых помех, как правило, можно указать граничные значения для скоростей ветра; эти значения определяются специфическими условиями атмосферы. В некоторых задачах, таких, например, как дуэль двух самолетов, роль возмущений играют управляющие воздействия противника. При формализации подобных задач является важным предположение о характере информированности игроков относительно текущей игровой ситуации. Существуют несколько подходов к тому, какие предположения следует накладывать на характер информированности игроков. Остановимся подробнее на том подходе, который развивался в Свердловске Н. Н. Красовским и его сотрудниками. Н. Н. Красовскому представлялось вполне естественным при формализации дифференциальных игр ограничить информированность игроков знанием позиции (фазового состояния игроков), сложившейся к настоящему моменту. При такой формализации дифференциальных игр во главу ставилось понятие позиционного управления — управления по принципу обратной связи.

В середине 60-х годов Н. Н. Красовский сформулировал правило экстремального прицеливания, сыгравшее важную роль в формировании позиционного подхода в дифференциальных играх. Концепция позиционной дифференциальной игры и правило экстремального прицеливания были подробно изложены в работах и монографии Н. Н. Красовского “Игровые задачи о встрече движений”, опубликованной в 1970 г. Правило экстремального прицеливания реализует переход от задач программного управления к задаче позиционного управления в минимаксной постановке. Прямое сведение последней к чисто программным конструкциям не всегда правомерно, поэтому одной из центральных задач того времени стало выяснение условий, при которых это сведение возможно, — так называемых условий регулярности. Первые исследования А. И. Субботина в этом новом направлении — теории позиционных дифференциальных игр — были посвящены изучению дифференциальных игр при наличии условий регулярности [2–13]. Часть из них [4; 5; 8; 9; 11; 13] выполнены совместно с Н. Н. Красовским. В [2–4; 6–7; 10] была рассмотрена популярная в то время задача об игровой встрече линейных однотипных объектов, изучены вопросы построения оптимальных позиционных стратегий на основе правила экстремального прицеливания или его регуляризации. В [4] был предложен оригинальный подход к построению управления, обеспечивающего оптимальное уклонение в задаче об игровой встрече движений с геометрическими ограничениями на управления. Оптимальное управление определялось из условия невозрастания вдоль движений системы некоторого интеграла, играющего роль своеобразного функционала Ляпунова. В работах [8; 11; 12] были изучены нелинейные дифференциальные игры в предположении стабильности множеств программного поглощения. Здесь правило экстремального прицеливания формулировалось как правило прицеливания на стабильную систему множеств программного поглощения.

В 1969 г. Н. Н. Красовский предложил А. И. Субботину представить результаты совместных исследований в области позиционных дифференциальных игр на семинаре академика Л. С. Понтрягина, одного из создателей теории оптимального управления. Доклад, сделанный А. И. Субботиным, произвел на Льва Семеновича, по словам участников семинара, сильное впечатление. После доклада состоялась продолжительная беседа Л. С. Понтрягина с Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным. Высокая оценка им научных результатов, представленных в докладе, означала признание научного направления, складывающегося в теории дифференциальных игр. Андрей Измайлович тепло вспоминал об этой встрече. Для него эта встреча и высокая оценка знаменитого математика были важным моральным стимулом к дальнейшим исследованиям.

В 1969 г. А. И. Субботин защищает кандидатскую диссертацию "Задачи о встрече и уклонении в дифференциальных играх" [6], в которой были подведены итоги первого этапа его исследований в области теории позиционных дифференциальных игр. В том же году в составе группы сотрудников кафедры прикладной математики Уральского государственного университета он был переведен в Свердловское отделение математического института им. В. А. Стеклова (с 1971 г. — Институт математики и механики). Институт стал основным местом работы А. И. Субботина после окончания им университета.

В 1970-е г. А. И. Субботин продолжает исследования в области дифференциальных игр. Н. Н. Красовский привлекает его для разработки теоретических конструкций в позиционных дифференциальных играх при более общих предположениях, уже не требующих выполнения условий регулярности. Так, в их работах [11; 15–17], посвященных выявлению структуры дифференциальных игр, учтены наиболее существенные особенности прикладных задач динамики, в которых разрешающее управление строится по принципу обратной связи. При математической формализации этих задач было важно определить класс позиционных процедур управления, который неулучшаем с точки зрения достижения оптимального гарантированного результата и, кроме того, допускает физическую реализацию. В этом классе надлежало затем найти оптимальный закон управления, который весьма часто оказывался негладким (разрывным). Потребовалось разработать принципиально новый подход при определении движений, порожденных управлениями, действующими по принципу обратной связи. Были введены аппроксимационные стратегии и предложены аппроксимационные схемы, удобные для физической реализации и допускающие переход к математическим конструкциям, содержащим элементы идеализации [11; 15–17]. Формирование движений в соответствии с этими схемами основывается на использовании информации о фазовом состоянии управляемой системы в дискретные моменты времени. Это соответствует естественной логике применения цифровых вычислительных устройств в контуре обратной связи, что типично для многих задач управления техническими системами. При таком подходе отпадает необходимость налагать на управления, действующие по принципу обратной связи, ограничительное условие непрерывной зависимости от позиции. В рамках данного подхода Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным был рассмотрен широкий круг нелинейных дифференциальных игр при общих предположениях на управляемую систему. Так, в [15–17] для дифференциальных игр наведения, не удовлетворяющих так называемому условию седловой точки в маленькой игре (условие Р. Айзекса), был предложен класс обобщенных позиционных стратегий игроков и было доказано существование в этом классе стратегий, доставляющих ситуации равновесия для игроков-антагонистов.

При разработке теоретической базы позиционных дифференциальных игр в работе Андрея Измайловича Субботина и Нины Николаевны Субботиной [14] был установлен следующий принципиальный факт: при реализации непрерывных позиционных стратегий информация игроками используется, как правило, не лучшим образом, и достигаемый в этом классе результат может быть, как правило, улучшен в классе разрывных позиционных стратегий. Позже, в [18], ими было показано, что при использовании разрывных позиционных стратегий классическое определение движений через контингенции не позволяет обеспечить достижение наилучшего гарантированного результата и, следовательно, нужно формализовать движения неклассическим образом, с помощью ломаных Эйлера.

Так зарождалось новое направление в теории позиционных дифференциальных игр, ориентированное на решение задач в общей постановке. Центральным пунктом здесь является предложенный Н. Н. Красовским принцип конструирования стратегий, обеспечивающих в каждой позиции экстремальный сдвиг управляемой системы на стабильный мост, представляющий собой множество в пространстве позиций, ведущее к цели. Выбор управления в соответствии с этим принципом обеспечивает близость к мосту движений, начинающихся вблизи моста. Предложенный принцип формирования позиционных стратегий и движений, выводящий из класса непрерывных стратегий, кардинально отличается от подходов, применявшихся до этого в дифференциальных играх. В рамках конструкций, основанных на принципах экстремального сдвига на стабильный мост, Н. Н. Красовский и А. И. Субботин получили ряд важных теоретических результатов. Применение этих конструкций позволило им доказать ключевое для теории дифференциальных игр утверждение — теорему об альтернативе и тем самым установить существование равновесных решений в соответствующих классах позиционных стратегий игроков-антагонистов.

Направление исследований, которое объединяет экстремальное прицеливание и экстремальный сдвиг, было названо авторами экстремальным подходом.

В дополнение к исследованиям по дифференциальным играм, в которых характер информированности обоих игроков о состоянии системы — чисто позиционный, А. И. Субботиным с соавторами в работах [20; 21; 37; 40] был изучен ряд игровых задач управления при иных информационных предположениях. Общим для этих работ является то, что они группируются вокруг экстремального подхода.

В начале 70-х годов А. И. Субботин изучает также позиционные дифференциальные игры, в которых платой является полунепрерывный (сверху или снизу) функционал, вычисляемый на движениях управляемой системы [21]. В предположении, что игроки обладают полной памятью о фазовых состояниях системы, описаны конструкции, с помощью которых обосновывается существование оптимальных стратегий игроков.

Еще одну группу работ составляют исследования А. И. Субботина по дифференциальным играм с неполной информацией. Так, в работе [37] рассмотрена задача о приведении управляемой системы на целевое множество в предположении, что фазовые состояния измеряются неточно. В работе дано описание процедуры управления с поводырем на основе информационных областей, определяемых в форме параллелепипеда. Сформулированы условия разрешимости задач об управлении. В другой работе [40] А. И. Субботин изучает игровую задачу преследования в условиях неполной информации о преследуемой системе. Получены альтернативные условия разрешимости задачи.

К середине 70-х годов А. И. Субботин сформировался как ученый, был уже хорошо известен в нашей стране и за рубежом. В 1973 г. он защитил докторскую диссертацию "Экстремальные стратегии в дифференциальных играх" [25]. Диссертация содержит основные результаты, полученные А. И. Субботиным в рамках экстремального подхода. В ней рассмотрены различные игровые задачи динамики, для которых доказана теорема об альтернативе. Показано, что предлагаемая в рамках экстремального подхода формализация является полной в том смысле, что любой способ поведения игрока (даже при расширении его информационных возможностей) не может обеспечить ему результат лучше, чем результат, который гарантирован стратегией, оптимальной в рамках избранной формализации. В диссертации рассмотрены задачи как в предположении о наличии седловой точки в маленькой игре, так и без этого предположения. Во втором случае доказаны соответствующие альтернативные условия разрешимости в классах смешанных стратегий игроков. Также рассмотрены стохастические процедуры, аппроксимирующие смешанные стратегии, и доказана теорема об альтернативе для этих стохастических процедур.

В 1973 г. А. И. Субботин становится лауреатом Золотой медали АН СССР для молодых ученых. К этому времени он приобретает большой опыт в руководстве научной молодежью; руководит работой аспирантов и молодых научных сотрудников. В 1974 г. Андрей Измайлович был приглашен в качестве лектора на Международный конгресс математиков (Ванкувер, Канада) на секцию "Control Theory and Related Optimization Problems" с докладом "Управление в условиях конфликта и неопределенности" [29].

Наиболее существенные результаты исследований Н. Н. Красовского и А. И. Субботина составили монографию “Позиционные дифференциальные игры” [30], опубликованную в 1974 г. В книге было представлено подробное изложение концепции позиционных дифференциальных игр, предложенной Н. Н. Красовским, в частности экстремального подхода. Было дано описание основных прикладных задач, ставших источником возникновения теории; предложена строгая математическая модель позиционных дифференциальных игр, а также метод исследования этих игр, базирующийся на понятии стабильных мостов и функций. Понятия стабильных мостов и функций оказались удобным средством, позволяющим привлекать разнообразный математический аппарат для исследования игровых задач динамики. Была изучена общая структура оптимальных решений и проведен качественный анализ этих решений (корректность, устойчивость и т.д.). В целях регуляризации неустойчивых решений дифференциальных игр были сконструированы процедуры управления с поводырем. Была изучена связь предлагаемых позиционных конструкций с методом динамического программирования Р. Беллмана. Отличительной чертой теории позиционных игр, представленной в монографии, является ее конструктивный характер. Сотрудниками Н. Н. Красовского и А. И. Субботина на основе изложенной теории были разработаны вычислительные методы и алгоритмы решения задач управления с гарантированным результатом. Монография стала важной вехой в развитии математической теории управления; задачи и проблемы, сформулированные в ней, стимулировали поиск новых конструкций и путей решения игровых задач управления. Впоследствии, в 1988 г., существенно переработанное и дополненное новыми результатами исследование было издано за рубежом как монография “Game-Theoretical Control Problems” [67].

Отметим, что предложенный Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным в [27] и подробно описанный в монографии “Позиционные дифференциальные игры” способ формирования устойчивых по отношению к помехам разрешающих позиционных процедур — процедур управления с поводырем — вызвал серию публикаций [33–37; 46], в которых устанавливалось существование ситуации равновесия в различных дифференциальных играх в классах процедур управления с поводырем. Способ формирования управления в виде процедур управления с поводырем оказался наиболее удобным с точки зрения его реализации при моделировании на ЭВМ конкретных дифференциальных игр.

В середине 70-х годов в теории дифференциальных игр зарождается новое направление — унификация дифференциальных игр. Здесь прежде всего следует отметить исследования Н. Н. Красовского, в которых было дано определение унификационных моделей, изучены их свойства и указаны перспективы применения в различных классах дифференциальных игр. Суть унификации состоит в том, что ключевое в позиционных дифференциальных играх свойство стабильности может быть выражено в терминах векторов сопряженных переменных и гамильтониана управляемой системы. В дальнейшем исследования в этом направлении были продолжены в отделе динамических систем Института математики и механики УрО РАН. А. И. Субботин активно поддерживал эти исследования, хорошо понимая их важность: ставил задачи, указывал направления, в которых могла бы развиваться тематика унификации. Во многом благодаря его активному участию эта тематика продолжается в Институте: созданы более общие схемы унификации, разработаны алгоритмы и программы построения решений дифференциальных игр на основе этих схем.

Важное значение А. И. Субботин придавал вопросам, связанным с описанием центральной для теории дифференциальных игр функции — цены дифференциальной игры. В случае, когда эта функция дифференцируема, она является решением основного в теории дифференциальных игр уравнения Айзекса — Беллмана, представляющего собой уравнение в частных производных первого порядка. В случае, когда цена не является дифференцируемой функцией, стоял важный вопрос о нахождении тех соотношений, которые являются определяющими для этой функции и имеют инфинитезимальный характер. Этот вопрос, давно обсуждавшийся в научных кругах, привлек в конце 1970-х г. внимание А. И. Субботина и был изучен А. И. Субботиным и Н. Н. Субботиной сначала для игровых задач динамики, в которых цена игры есть кусочно-гладкая функция, а затем и для более общих задач. Статья [38] является одной из первых статей, посвященных выводу инфинитезимальных соотношений для кусочно-гладкой функции цены. В ней для игровых задач с терминальной платой было получено представление решения при помощи пары дифференциальных неравенств, позволяющее по-новому трактовать принцип оптимальности.

В работе А. И. Субботина "Обобщение основного уравнения теории дифференциальных игр" [42], опубликованной в "Докладах АН СССР" в 1980 г., были получены необходимые и достаточные условия, описывающие свойства стабильности негладкой функции цены при помощи пары дифференциальных неравенств для производных по направлениям. С этой работы началось построение теории обобщенных, минимаксных решений уравнений в частных производных. В [44; 50] этот подход был распространен на более общие классы дифференциальных игр. В [44] был введен в рассмотрение класс регулярных функций, включающий в себя кусочно-гладкие функции.

В [50] определяющие цену дифференциальной игры инфинитезимальные соотношения были получены в форме неравенств, в которых участвует пара семейств дифференциальных включений. Параллельно с этим были рассмотрены нелинейные дифференциальные игры с интегрально-терминальной платой [51]. Описанию функции цены при помощи пары дифференциальных неравенств посвящены также работы [39; 54]. Итоги исследований А. И. Субботиным свойств функции цены дифференциальных игр подведены в большой статье "Условия оптимальности гарантированного результата в игровых задачах управления" [61], помещенной в 1985 г. в сборнике трудов МИАН СССР, посвященном академику Л. С. Понтрягину к его 75-летию.

В тесной связи с упомянутыми исследованиями находятся работы [49; 52; 60], где рассматривается вопрос обоснования метода динамического программирования в задачах оптимального управления. В них исследуются необходимые и достаточные условия, которым удовлетворяет функция оптимального результата в задаче управления с интегрально-терминальной платой. Эти условия имеют вид обобщенного уравнения Беллмана, в котором вместо обычных производных используются производные по направлениям.

Отметим также исследования в [58] необходимых и достаточных условий для цены стохастической дифференциальной игры с частично вырожденным шумом.

Результаты исследования А. И. Субботина, посвященные изучению структуры позиционных дифференциальных игр и обобщению основного уравнения теории дифференциальных игр, отражены в первых трех главах монографии А. И. Субботина, А. Г. Ченцова "Оптимизация гарантии в задачах управления" [43], вышедшей в 1981 г.

Продолжением исследований [38; 42–44] по обобщению основного уравнения теории дифференциальных игр стали работы А. И. Субботина, Х. Г. Гусейнова и В. Н. Ушакова [56; 59], выполненные в первой половине 80-х годов. В этих работах предложено новое определение стабильного моста, представляющего собой множество Лебега функции цены дифференциальной игры. Определяющие стабильный мост соотношения выражены в терминах конусов Булигана для многозначных отображений, в которых аргумент — время, а значения — соответствующие сечения моста. В указанных соотношениях со стороны управляемой системы присутствуют лишь полупространства, определяемые гамильтонианом системы. В этих работах было достигнуто полезное сочетание унификационных (связанных с гамильтонианом) и инфинитезимальных конструкций. Данные конструкции были применены позже при исследовании уравнений Гамильтона — Якоби.

Обзор исследований А. И. Субботина, посвященных поиску обобщений основного уравнения теории дифференциальных игр, показывает, что он своевременно оценил целесообразность использования конструкций негладкого и выпуклого анализа и внес, в свою очередь, весомый вклад в разработку такого рода конструкций. Позже они были применены А. И. Субботиным при исследовании уравнений в частных производных первого порядка и более общих классов уравнений в частных производных.

В 1950–70-е гг. проблемой построения решений уравнений в частных производных первого порядка занимались многие известные отечественные и зарубежные математики. А. И. Субботин интересовался прежде всего проблемой построения решений уравнений Гамильтона — Якоби, поскольку к уравнениям этого типа относится основное уравнение теории дифференциальных игр. Среди исследователей, занимавшихся проблемой построения решений уравнений в частных производных первого порядка, ученый выделял С. Н. Кружкова, влияние которого сказалось на последующих исследованиях обобщенных решений уравнений в частных производных первого порядка. Андрей Измайлович внимательно следил за работами В.П. Маслова и его сотрудников, исследующих уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана методами идемпотентного анализа.

В середине 80-х годов научные интересы А. И. Субботина смещаются в сторону теории обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби общего вида. К этому времени в дифференциальных играх им был накоплен значительный опыт в исследовании функции цены игры, являющейся обобщенным решением основного уравнения теории дифференциальных игр. Этот опыт состоял в том, что, с одной стороны, был выделен необходимый набор инфинитезимальных конструкций для описания функции цены и ее свойств, с другой стороны, было установлено, что в определяющих цену соотношениях управляемая система может быть представлена исключительно своим гамильтонианом. Наконец, на основе инфинитезимальных и унификационных конструкций А. И. Субботин предложил понятие обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби — Беллмана — Айзекса, которое позволило ему рассмотреть функцию цены как такое решение и доказать существование и единственность функции цены при общих предположениях на управляемую систему.

Таким образом, в середине 80-х годов А. И. Субботин располагал необходимым набором средств для эффективного исследования уравнений Гамильтона — Якоби, на которые он распространяет свой подход к определению функции цены игры. Для этих уравнений им введено обобщенное (негладкое) решение. Обобщенное решение определяется с помощью пары дифференциальных неравенств, заменяющих уравнение Гамильтона — Якоби в точках недифференцируемости решений. В работах А. И. Субботина, А. М. Тарасьева [55; 57; 63] пара дифференциальных неравенств определяется через введенное авторами понятие сопряженных производных. Эти обобщенные решения А. И. Субботин назвал минимаксными, так как операции минимума и максимума являются характерными в их определении. Приоритетным в этом определении обобщенного решения является привлечение понятия инвариантности. Доказаны теоремы единственности и существования непрерывных минимаксных решений задач Коши для уравнения Гамильтона — Якоби. Доказательство единственности опирается на метод функций Ляпунова. Прототипом доказательства существования решения является схема доказательства теоремы об альтернативе из теории дифференциальных игр.

В первой половине 80-х годов были опубликованы статьи М. Дж. Крэндалла, П.-Л. Лионса и М. Дж. Крэндалла, Л. С. Эванса, в которых был предложен другой подход к определению обобщенных решений краевых задач для уравнений Гамильтона — Якоби общего вида. Понятие решения было введено путем замены уравнения парой дифференциальных неравенств для субградиентов и суперградиентов. Для доказательства теорем существования введенных таким путем решений был использован метод исчезающей вязкости; в связи с этим решения получили название вязкостных решений. Этот подход к исследованию уравнений Гамильтона — Якоби имеет в своей основе конструкции классического анализа и математической физики. Остановимся на сопоставлении понятий минимаксного и вязкостного решений.

Определения минимаксного и вязкостного решений отличаются по форме друг от друга, и эквивалентность их была неочевидна. Сначала эквивалентность этих определений была установлена через совпадение минимаксного и вязкостного решений уравнения Айзекса — Беллмана с функцией цены, соответствующей задаче оптимального гарантированного управления [42; 53; 56; 57; 63]. Затем было получено прямое доказательство эквивалентности минимаксных и вязкостных решений [81; 87]. В этом доказательстве А. И. Субботиным [81; 91] было использовано свойство субдифференциала негладкой функции, а следовательно, нормалей к ее множествам Лебега, близкое свойству инвариантных множеств, полученному В. Н. Ушаковым в [56].

Отметим, что минимаксный и вязкостный подходы удачно дополняют друг друга, привлекая к изучению проблемы обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби широкий набор средств из классического и негладкого анализа.

Исследованию минимаксных решений уравнений Гамильтона — Якоби посвящены также работы [68–73].

Итоги исследований по теории минимаксных решений уравнений Гамильтона — Якоби в 80-х гг. были подведены А. И. Субботиным в монографии "Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби" [74], опубликованной в 1991 г. Монография содержит подробное изложение минимаксного подхода в теории обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби. В ней, в частности, содержится обоснование перехода от уравнения Гамильтона — Якоби к дифференциальным неравенствам, доказаны теоремы существования, единственности и корректности минимаксных решений, изучены их свойства. Аппарат дифференциальных неравенств применен для решения задач теории дифференциальных игр и исследования различных вопросов теории оптимального управления и дифференциальных включений. Значительное внимание в монографии уделено сопоставлению минимаксных и вязкостных решений уравнений Гамильтона — Якоби и обоснованию их эквивалентности. Последняя глава монографии посвящена вопросам вычисления минимаксных решений: рассмотрена локальная аппроксимация обобщенных решений кусочно-линейными функциями, разработан вычислительный алгоритм такой аппроксимации. Исследования этой главы получили продолжение в работах [79; 82].

Андрей Измайлович уделял много внимания разработке методов вычисления минимаксных решений. По его инициативе в Институте математики и механики УрО РАН была начата разработка численных методов построения минимаксных решений на основе попятных пошаговых процедур. Существенный вклад в эту работу внесли научные группы, возглавляемые В. Н. Ушаковым и В. С. Пацко. При этом применялись различные формы реализации попятных процедур. Одни методы основаны на применении на каждом шаге итерации операций объединения и пересечения многогранников, другие, сеточные, методы — на применении операторов локального овыпуклення и локальной линеаризации. В свою очередь, в теории вязкостных решений М. Дж. Крэндаллом, П.-Л. Лионсом и П. Е. Соуганидисом были рассмотрены явные и неявные схемы приближенного вычисления решений с конечно-разностным оператором Лакса — Фридрихса, предложен общий метод обоснования сходимости и указаны оценки сходимости. Вычислительным аспектам построения решений уравнений Гамильтона — Якоби посвящены также работы И. Капуццо Дольчетта, С. Ошера, К.-У. Шу, М. Барди, М. Фальконе и др.

Для некоторых типов краевых задач в работах А. И. Субботина [91; 94] показана возможность построения минимаксных решений с помощью репрезентативных формул типа формулы Хопфа.

В середине 70-х годов А. Г. Ченцовым было установлено, что для широкого круга дифференциальных игр функция цены может быть представлена как предел итерационной последовательности функций программного максимина, отвечающих некоторой последовательности вспомогательных программных задач. Этот метод программных итераций был изложен в статьях А. Г. Ченцова, а также в монографии А. И. Субботина, А. Г. Ченцова "Оптимизация гарантий в задачах управления" [43]. В 1997 г. А. И. Субботин и А. Г. Ченцов применили метод итераций для построения минимаксных решений уравнений Гамильтона — Якоби в форме метода итераций в семействе надграфиков и подграфиков. Была обоснована сходимость последовательности множеств, получающихся в результате итераций, к минимаксному решению. Подробно результаты, полученные в этом направлении, опубликованы в работах [96; 104].

В настоящее время интерес к теории обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби не угасает: ведутся теоретические исследования и развиваются методы приближенных вычислений. По этой тематике проводятся научные симпозиумы, растет число публикаций. Она привлекает к себе внимание все новых групп исследователей в нашей стране и за рубежом.

В первой половине 90-х годов теория минимаксных решений получила дальнейшее развитие в работах А. И. Субботина, его сотрудников и учеников. Исследования уравнений Гамильтона — Якоби дополнили труды, посвященные проблеме построения обобщенных (минимаксных) решений уравнений в частных производных первого порядка [75–87]. Результаты этих исследований А. И. Субботина и новый уровень общности концепции минимаксного решения отражены в его монографии "Generalized Solutions of First-Order PDEs. The Dynamical Optimization Perspective" [91], вышедшей в 1995 г. В этой книге подробно представлена теория непрерывных и разрывных минимаксных решений уравнений в частных производных первого порядка. Понятие минимаксного решения вводится с помощью аксиоматики, очерчивающей круг унифицированных задач динамической оптимизации, порождаемых уравнением в частных производных первого порядка. В монографии содержатся результаты, относящиеся к вопросам существования и единственности минимаксного решения в краевых задачах Коши и Дирихле, подходы к численному моделированию, а также приложения к теории управления и дифференциальным играм. Отметим, что аксиоматическая форма понятия унификации расширила возможности исследования и конструирования обобщенных решений. Исследование минимаксных решений уравнений в частных производных первого порядка опирается на методы негладкого анализа, функции Ляпунова, динамическую оптимизацию теории дифференциальных игр. Во введении автор отмечает, что на уровне инфинитезимальных конструкций имеет место двойственность различных подходов к определению обобщенных решений уравнений в частных производных первого порядка, и концепция минимаксного решения, таким образом, родственна идеям упомянутой выше двойственности, преобразованию Лежандра и некоторым конструкциям динамической оптимизации, введенным в публикациях Ф. Кларка, У. Флеминга, Н. Н. Красовского, В. Ф. Кротова и Р. Т. Рокафеллара.

Из результатов, представленных в монографии и относящихся к теории дифференциальных игр, отметим построение субоптимальных стратегий. Конструкции субоптимальных стратегий — субоптимальных управлений по принципу обратной связи — были развиты А. И. Субботиным [88; 91; 92] в дополнение предложенных Н. Н. Красовским конструкций экстремального сдвига. Эти стратегии являются универсальными в том смысле, что они гарантируют решение, близкое к оптимальному, для любого начального положения из заданной ограниченной области. Конструкции субоптимальных стратегий подобны известному определению оптимальной стратегии в рамках классического метода динамического программирования в случае, когда цена дифференциальной игры является гладкой. Отличие состоит в том, что градиент функции цены (который может не существовать) заменяется квазиградиентом. Для определения квазиградиента используются аппроксимации обобщенных (минимаксных и вязкостных) решений основного уравнения теории дифференциальных игр. Эти аппроксимации типа регуляризаций Иосиды — Моро для выпуклых функций являются инфимальными конволюциями функции цены (обобщенного решения основного уравнения теории дифференциальных игр) и подходящих гладких штрафных функций.

В работе [88] рассмотрены субоптимальные стратегии в дифференциальных играх с фиксированным моментом окончания и функционалом типа Больца.

В статье [92] конструкции субоптимальных стратегий модифицированы для задачи оптимального быстродействия, в которой функция цены разрывна. Предложенная модификация состоит в замене градиента функции оптимального быстродействия ее квазиградиентом, который определен с помощью квадратичной инфимальной конволюции Иосиды — Моро.

В работе [98] рассмотрена модификация субоптимальной стратегии, которая базируется на квадратичной инфимальной конволюции супер решений (обобщенных верхних решений) уравнения Айзекса — Беллмана в задаче оптимального быстродействия. Стратегия конструируется с помощью прицеливания по проксимальным градиентам регуляризованных верхних решений. Показано, что любое супер решение можно использовать для построения такой позиционной стратегии и при этом гарантировать (с любой заданной точностью) попадание на целевое множество за время, не превосходящее значения супер решения. Эта конструкция обладает свойством “универсальности”, т. е. предлагаемая позиционная стратегия равномерно эффективна на компактном множестве начальных позиций.

Конструкции прицеливания по проксимальным градиентам регуляризации Иосиды — Моро для негладких функций Ляпунова оказались также эффективными при решении задач стабилизации асимптотически управляемых нелинейных систем с помощью позиционных (не зависящих от времени) управлений по принципу обратной связи. В статье [97] (совместно с Ф. Кларком и Ю. С. Ледяевым) приведена конструкция такой позиционной разрывной стратегии, итерационно переводящей траектории нелинейной автономной системы во все более малые и малые окрестности состояния равновесия. В этих исследованиях новым и существенным для теории стабилизации моментом было применение развитого в теории позиционных дифференциальных игр [30] понятия решения системы, управляемой разрывным позиционным управлением.

В работе [86] показано, что кусочно-гладкие минимаксные решения уравнений в частных производных первого порядка на каждом из подмногообразий гладкости являются классическими решениями некоторых уравнений в частных производных первого порядка, построенных по исходному уравнению.

К числу последних относятся исследования А. И. Субботиным уравнений с частными производными первого порядка, разрывных по фазовым переменным, в которых предложена и развита концепция многозначного решения (M-решения). Понятие M-решения впервые было введено в статье [95]. Эта работа продолжает исследования разрывных решений, теория которых была построена в работах [68; 77; 78; 83; 90; 91; 94]. Ситуация, когда не существует непрерывного минимаксного решения, является весьма распространенной в теории оптимального управления и дифференциальных игр. Так, например, она типична для краевой задачи для уравнения Айзекса — Беллмана, которая возникает при исследовании классической задачи оптимального быстродействия. В тех случаях, когда краевые задачи и задачи Коши для уравнений с частными производными первого порядка не удовлетворяют условиям, при которых непрерывные минимаксные решения существуют и единственны, введены понятия многозначных решений (гипо-решений, эпи-решений, M-решений). В статье [95] рассматривается краевая задача типа Дирихле для уравнений с частными производными первого порядка. В работе [101] в качестве иллюстрации применения понятия M-решения приведена задача Коши для уравнения Гамильтона — Якоби. В отличие от традиционных постановок здесь не требуется, чтобы непрерывный гамильтониан удовлетворял условию Липшица по фазовой переменной или его модификациям. В дальнейшем, в работах [100; 105], теория M-решений была развита для уравнений с частными производными первого порядка, разрывных по фазовым переменным. В этом случае доказана теорема существования, изучены свойства M-решений и возможность применения к их исследованию аппарата теории минимаксных решений и теории вязкостных решений. Метод программных итераций, разработанный ранее для непрерывных минимаксных решений, оказался эффективным при построении многозначных M-решений.

В заключение отметим, что свою научную работу А. И. Субботин успешно совмещал с исполнением должностных обязанностей. В 1983 г. А. И. Субботин стал, по предложению Н. Н. Красовского, заведующим отделом динамических систем Института математики и механики. Хотя А. И. Субботин по состоянию здоровья работал дома, он всегда был в курсе событий, происходящих не только в отделе, но и в Институте. Он внимательно следил за научными успехами своих сотрудников, многим из которых он формулировал научные темы, а затем и руководил ими. Это руководство состояло в том, что Андрей Измайлович регулярно встречался с сотрудником, обсуждал результаты его работы; затем оценивались итоги и намечался дальнейший план исследований. Он очень внимательно изучал работы, которые приносили ему сотрудники и ученики, а также работы, приходившие на рецензирование, в том числе диссертации и монографии. Нередко случалось, что при рецензировании Андрей Измайлович обнаруживал существенные ошибки — при этом он всегда пытался найти способы их исправить.

Андрей Измайлович Субботин был руководителем известного многим математикам научного семинара по теории оптимального управления и дифференциальных игр. На этом семинаре, проходящем регулярно по средам, выступали не только сотрудники отдела и аспиранты, но и гости: сотрудники Института, ученые из других городов России, а также зарубежные ученые. Часто на квартире у Андрея Измайловича собирались друзья и коллеги для обсуждения различных проблем. На этих встречах обсуждались направления будущих исследований, состояние дел в Институте математики и механики и в Университете, прикладная тематика Института, вопросы науки и математического образования.

Значимой компонентой в работе Андрея Измайловича как руководителя отдела динамических систем являлись прикладные исследования. Он вносил в прикладные модели математическую строгость, конструктивность в реализацию алгоритмов, стимулировал доведение компьютерных расчетов до реальных данных, вникал во все тонкости проводимых в отделе прикладных исследований вплоть до реализации алгоритмов в виде программных комплексов и приемки заказчиками, включая государственную приемку. Кроме того, Андрей Измайлович сам с увлечением осваивал работу на первых персональных компьютерах, которые только-только начали появляться в это время. Он сам программировал свои оригинальные алгоритмы по построению оптимальных стратегий управления и занимался визуализацией результатов моделирования, включая динамическую визуализацию.

Большое внимание А. И. Субботин уделял расширению международных связей отдела динамических систем. Он вел громадную переписку с ведущими учеными в области теории оптимального управления из университетов США, Германии, Италии, Франции, Канады, Австрии, Венгрии, Польши и других стран, а также международных организаций, таких как Международный институт прикладного системного анализа (IIASA, Лаксенбург, Австрия), Международная федерация по автоматическому управлению (IFAC), Международная федерация по обработке информации (IFIP). В основном эта переписка была посвящена обсуждению актуальных научных вопросов в области оптимального управления, дифференциальных игр и уравнений Гамильтона — Якоби. Значительную часть обсуждений занимали организационные проблемы по проведению международных научных конференций, рецензированию монографий и статей для зарубежных журналов высокого уровня. Важное значение Андрей Измайлович придавал возможностям международного научного финансирования и обмена, научным стажировкам и докладам. Значительное число сотрудников отдела включая молодых ученых были привлечены им к этой важной составляющей современной научной работы.

А. И. Субботин читал студентам математико-механического факультета спецкурсы по теории оптимального управления, дифференциальных игр и минимаксных решений уравнений в частных производных. Андрей Измайлович постоянно руководил аспирантами и активно работал с ними.

Итоги научно-исследовательской деятельности А. И. Субботина внушительны — более 100 статей и 5 монографий в области теории дифференциальных игр, уравнений Гамильтона — Якоби, оптимального управления. Его научные достижения получили широкое признание. Он — лауреат Ленинской премии 1976 г.; кавалер ордена Трудового Красного знамени в 1976 г. году; избран членом-корреспондентом Российской академии наук в 1991 г.; действительный член Российской академии наук в 1997 г.

К 70-летию выдающегося российского ученого, академика А. И. Субботина, Институт математики и механики УрО РАН им. Н. Н. Красовского и Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина провели с 1 по 3 апреля 2015 г. в Екатеринбурге Второй Международный семинар “Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби”. Тематика семинара охватывала разные разделы математической теории оптимального управления и связанных с ней областей, а также разделы современной теории уравнений Гамильтона — Якоби и ее многочисленные приложения. Работа семинара была организована в рамках трех секций: 1) “Уравнения Гамильтона — Якоби”; 2) “Прикладные задачи управления и численные методы”; 3) “Оптимальное управление и дифференциальные игры”. Также было представлено двенадцать пленарных докладов. Часть докладов с участием зарубежных ученых из США и Европейского союза была проведена в режиме видео конференции.

К началу семинара были изданы сборник тезисов докладов и научная программа конференции “Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби” (Тез. докл. II Междунар. семинара, посвящ. 70-летию со дня рождения акад. А. И. Субботина. Екатеринбург, Россия, 1–3 апреля 2015 г. / ИММ УрО РАН; УрФУ. Екатеринбург, 2015. 171 с.) Материалы конференции, в том числе видео отчет, представлены на сайте семинара http://cgs15.imm.uran.ru . Участники семинара оценили его работу как успешную и плодотворную.

А. М. Тарасьев, В. Н. Ушаков, А. Г. Ченцов, Н. Н. Субботина

Участники II международного семинара “Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби”, г. Екатеринбург, 1 апреля 2015 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Об управлении движением квазилинейной системы // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3, вып. 7. С. 1113–1118.
2. К задаче об игровой встрече движений // Прикл. математика и механика. 1967. Т. 31, вып. 5. С. 834–840.
3. Регуляризация одной задачи о встрече движений // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, вып. 5. С. 779–784.
4. Оптимальное уклонение в дифференциальной игре // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, вып. 12. С. 2159–2165 (совм. с Н.Н. Красовским).
5. Задача о сближении управляемых объектов // Прикл. математика и механика. 1968. Т. 32, вып. 4. С. 575–586 (совм. с Н.Н. Красовским).
6. Задачи о встрече и уклонении в дифференциальных играх: дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук / Урал. гос. ун-т им. А.М. Горького. Свердловск, 1969. 100 с.
7. Задачи о встрече и уклонении в дифференциальных играх: автореф. дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук / Урал. гос. ун-т им. А.М. Горького. Свердловск, 1969. 11 с.
8. Смешанное управление в дифференциальной игре // Докл. АН СССР. 1969. Т. 188, вып. 4. С. 745–747 (совм. с Н.Н. Красовским).
9. Об оптимальных стратегиях в линейной дифференциальной игре // Прикл. математика и механика. 1969. Т. 33, вып. 4. С. 698–704 (совм. с Н.Н. Красовским).
10. Регуляризация одной задачи преследования // Тр. Второй респ. конф. математиков Белоруссии / Белорус. гос. ун–т. Минск, 1969. С. 219–221 (совм. с В.Е. Третьяковым).
11. О структуре дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1970. Т. 190, вып. 3. С. 523–526 (совм. с Н.Н. Красовским).
12. Дифференц. игры с ограничениями на фазовые состояния // Докл. АН СССР. 1970. Т. 193, вып. 2. С. 294–297.
13. Дифференциальная игра наведения // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, вып. 4. С. 579–591 (совм. с Н.Н. Красовским).
14. О непрерывных стратегиях уклонения в игровых задачах о встрече движений // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34, вып. 5. С. 796–803 (совм. с Н.Н. Барабановой).
15. Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34, вып. 6. С. 1005–1022 (совм. с Н.Н. Красовским).
16. Экстремальные стратегии в дифференциальных играх // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196, вып. 2. С. 278–281 (совм. с Н.Н. Красовским).
17. О структуре игровых задач динамики // Прикл. математика и механика. 1971. Т. 35, вып. 1. С. 110–122 (совм. с Н.Н. Красовским).
18. О классах стратегий в дифференциальных играх уклонения от встречи // Прикл. математика и механика. 1971. Т. 35, вып. 3. С. 385–392 (совм. с Н.Н. Барабановой).
19. Регулярный случай в линейной дифференциальной игре // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1971. Т. 6. С. 8–12 (совм. с В.Д. Батухтиным).
20. Минимаксная дифференциальная игра // Докл. АН СССР. 1972. Т. 206, вып. 2. С. 277–280 (совм. с Н.Н. Красовским, В.Н. Ушаковым).
21. Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с полной памятью // Докл. АН СССР. 1972. Т. 206, вып. 3. С. 552–555.
22. Об условиях завершения игры преследования // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1972. Т. 1. С. 3–8 (совм. с В.Д. Батухтиным).
23. Позиционное и программное поглощение в дифференциальных играх // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36, вып. 4. С. 740–743.
24. О седловой точке позиционной дифференциальной игры // Тр. МИАН. 1972. Т. 128. С. 22–33 (совм. с Н.Н. Красовским).
25. Экстремальные стратегии в дифференциальных играх: дис. на соиск. учен. степени д-ра физ.-мат. наук / Урал. гос. ун-т им. А.М. Горького. Свердловск, 1973. 174 с.
26. Экстремальные стратегии в дифференциальных играх: автореф. дис. на соиск. учен. степени д-ра физ.-мат. наук / Урал. гос. ун-т им. А.М. Горького. Свердловск, 1973. 26 с.
27. Аппроксимация в дифференциальных играх // Прикл. математика и механика. 1973. Т. 37, вып. 2. С. 197–204 (совм. с Н.Н. Красовским).

28. Дифференц. игры с полной памятью // Экстрем. стратегии в позиц. дифференц. играх / ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1974. Вып. 8. С. 211–223.
29. Control under conditions of conflict and indeterminacy: A lecture delivered at the Intern. Congr. Maths: preprint. Vancouver, 1974. 7 p.
30. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука. 1974. 456 с (совм. с Н.Н. Красовским).
31. Дифференц. игры в смешанных стратегиях // Пробл. аналит. механики и теорий устойчивости и упр. М.: Наука, 1975. С. 11–18 (совм. с Н.Н. Красовским).
32. Управление в условиях конфликта и неопределенности // Intern. Congr. Maths (Vancouver, Canada, Aug 1974): proceedings. Montreal, 1975. Vol. 2. P. 361–366.
33. Стохастические стратегии в дифференциальных играх // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220, вып. 5. С. 1023–1026 (совм. с Н.Н. Красовским, В.Ф. Россохииным).
34. Альтернатива для дифференциальной игры сближения-уклонения при интегральных ограничениях на управления игроков // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39, вып. 3. С. 387–396 (совм. с В.Н. Ушаковым).
35. Альтернатива для дифференциальной игры сближения-уклонения при ограничениях на импульсы управлений игроков // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39, вып. 3. С. 397–406 (совм. с Н.Н. Субботиной).
36. Динамическая игра сближения-уклонения // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234, вып. 2. С. 323–326.
37. Игровая задача управления при неполной информации // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1977. Т. 5. С. 14–23 (совм. с Н.Н. Субботиной).
38. Необходимые и достаточные условия для кусочно-гладкой цены дифференциальной игры // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243, вып. 4. С. 862–865 (совм. с Н.Н. Субботиной).
39. Обобщенные потенциалы в дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания // Прикл. математика и механика. 1978. Т. 42, вып. 2. С. 195–201 (совм. с М. Байбазаровым).
40. Игровая задача преследования в условиях неполной фазовой информации о преследуемой системе // Дифференц. системы упр.: сб. ст. / ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1979. Вып. 26. С. 21–33 (совм. с А.А. Крекниным).
41. Игровые задачи о встрече с целевыми множествами // Прикл. математика и механика. 1979. Т. 43, вып. 2. С. 204–208 (совм. с М.С. Габриеляном).
42. Обобщение основного уравнения теории дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254, вып. 2. С. 293–297.
43. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с (совм. с А.Г. Ченцовым).
44. Необходимые и достаточные условия для негладкой цены дифференциальной игры // Задачи динамического упр. / ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1981. С. 73–81 (совм. с Н.Н. Субботиной).
45. Программный максимин и цена позиционной дифференциальной игры // Докл. АН СССР. 1981. Т. 257, вып. 6. С. 1305–1309 (совм. с В.Я. Джафаровым).
46. Некоторые задачи устойчивости и стабилизации в дифференциальных играх // Устойчивость движения. Аналит. механика. Упр. движением. М.: Наука, 1981. С. 238–251. (совм. с В.М. Решетовым, В.Н. Ушаковым).
47. On the isochronous and stroboscopic capture in differential games // J. Optim. Theory Appl. 1982. Vol. 37, no. 1. P. 115–119.
48. О характеристических свойствах функции цены линейной дифференциальной игры. Деп. в ВИНИТИ № 4320–82. Киров, 1982. 30 с. (совм. с В.Ф. Россохиным).
49. Функция оптимального результата в задаче управления // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266, вып. 2. С. 294–299 (совм. с Н.Н. Субботиной).
50. Свойства потенциала дифференциальной игры // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46, вып. 2. С. 204–211 (совм. с Н.Н. Субботиной).
51. Свойства дифференцируемости функции цены дифференциальной игры с интегрально-терминальной платой // Проблемы управления и теории информации. 1983. Т. 12, вып. 3. С. 153–166 (совм. с Н.Н. Субботиной).
52. К вопросу обоснования метода динамического программирования в задаче оптимального управления // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1983. Т. 2. С. 24–32 (совм. с Н.Н. Субботиной).
53. Generalization of the main equation of differential game theory // J. Optim. Theory Appl. 1984. Vol. 43, no. 1. P. 103–133.
54. Об одном определении цены дифференциальной игры // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, вып. 9. С. 1489–1495 (совм. с М. Байбазаровым).

55. Неравенства для сопряженных производных функции цены дифференциальной игры. Деп. в ВИНИТИ № 6345–84. Свердловск, 1984. 23 с. (совм. с А.М. Тарасьевым).
56. Derivatives for multivalued mappings with applications to game–theoretical problems of control // Problems Control Inform. Theory. 1985. Vol. 14, no. 3. P. 155–167 (совм. с Х.Г. Гусейновым, В.Н. Ушаковым).
57. Сопряженные производные функции цены дифференциальной игры // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283, вып. 3. С. 559–564 (совм. с А.М. Тарасьевым).
58. Stochastic and deterministic control. Differential inequalities // Problems Control Inform. Theory. 1985. Vol. 14, no. 6. P. 405–419 (совм. с Н.Н. Субботиной, В.Е. Третьяковым).
59. Производные стабильных мостов в дифференциальной игре сближения. Деп. в ВИНИТИ № 840–85. Свердловск, 1985. 62 с. (совм. с Х.Г. Гусейновым, В.Н. Ушаковым).
60. Производные по направлениям функции оптимального результата // Проблемы аналит. механики и упр. движением. М.: Наука, 1985. С. 131–136 (совм. с Н.Н. Субботиной).
61. Условия оптимальности гарантированного результата в игровых задачах управления // Тр. МИАН. 1985. Т. 167. С. 261–274.
62. Stochastic and deterministic control. Differential inequalities // Stochastic Optimization. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1986. P. 728–737. (Lect. Notes in Control and Inform. Sci.; vol. 81) (совм. с Н.Н. Субботиной, В.Е. Третьяковым).
63. Stability properties of the value function of a differential game and viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Problems Control Inform. Theory. 1986. Vol. 15, no. 6. P. 451–463 (совм. с А.М. Тарасьевым).
64. Об одной игровой задаче сближения для двух слабо управляемых объектов. Деп. в ВИНИТИ № 8976–В86. Свердловск, 1986. 25 с. (совм. с И. Розыевым, А.М. Тарасьевым).
65. К вопросу обоснования метода динамического программирования в теории дифференциальных игр // Дифференц. уравнения и применения: тр. 3 конф. (Руссе, 1985.) Ч. 1. Руссе, 1987. С. 409–412 (совм. с А.М. Тарасьевым, В.Н. Ушаковым).
66. Вычисление цены дифференциальной игры сближения простых движений на ограниченном промежутке времени // Упр. с гарант. результатом / ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1987. С. 71–76.
67. Game–theoretical control problems. New York etc.: Springer–Verlag, 1988. P. 517 (совм. с Н.Н. Красовским).
68. Полунепрерывные решения уравнений Гамильтона — Якоби // Прикл. математика и механика. 1988. Т. 52, вып. 2. С. 179–185 (совм. с И. Розыевым).
69. Аппроксимация гарантированного результата в игровых задачах управления // Позиционное упр. с гарант. результатом / ИММ УрО АН СССР. Свердловск, 1988. С. 92–100.
70. Кусочно–линейная функция цены дифференциальной игры с простыми движениями // Тр. МИАН. 1988. Т. 185. С. 242–251.
71. Минимаксные решения уравнений вида $\partial\varphi/\partial t + H(t, x, \varphi, D_x\varphi) = 0$. Деп. в ВИНИТИ № 7651–В89. Свердловск, 1989. 32 с. (совм. с Р.А. Адиатуллиной).
72. Кусочно–линейные функции, используемые для построения решений уравнения Гамильтона — Якоби. Деп. в ВИНИТИ № 5627–В90. Свердловск, 1990. 66 с. (совм. с Л.Г. Шагаловой).
73. Existence and uniqueness results for Hamilton–Jacobi equations // Nonlinear Analysis. 1991. Vol. 16, no. 7-8. P. 683–699.
74. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
75. Positional differential games: Theory, Applications, Related Topics // Intern. Conf. on Game Theory (Florence, June 1991): Abstr. Firenze, 1991. P. 15 (совм. с А.Ф. Клейменовым).
76. Об одном свойстве субдифференциала // Мат. сб. 1991. Т. 182, вып. 9. С. 1315–1330.
77. О разрывных решениях уравнения Гамильтона — Якоби // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, вып. 4. С. 727–729 (совм. с И. Розыевым).
78. Непрерывные и разрывные решения краевых задач для уравнений с частными производными первого порядка // Докл. РАН. 1992. Т. 323, вып. 1. С. 30–34.
79. Кусочно–линейные функции, определяемые структурными матрицами // Пробл. упр. с гарант. результатом / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 1992. С. 73–87 (совм. с Л.Г. Шагаловой).
80. Монотонные относительно предпорядка траектории дифференциальных включений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 1. С. 138–146.
81. Минимаксные решения уравнений вида $\partial\varphi/\partial t + H(t, x, \varphi, D_x\varphi) = 0$ // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, вып. 5. С. 799–806 (совм. с Р.А. Адиатуллиной).

82. Кусочно–линейное решение задачи Коши для уравнения Гамильтона — Якоби // Докл. РАН. 1992. Т. 325, вып. 5. С. 932–936 (совм. с Л.Г. Шагаловой).
83. Discontinuous solutions of a Dirichlet-type boundary value problem for the first-order partial differential equation // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1993. Vol. 8, no. 2. P. 145–164.
84. A theory of generalized solutions to first–order PDEs with an emphasis on differential games // Adv. in Nonlinear Dynamics and Control: A Report from Russia. Boston etc.: Birkhauser, 1993. P. 189–229. (Progress in Systems Control Theory; vol. 17.)
85. Generalized characteristics of first–order partial differential equations // Rapp. Montreal Univ. Montreal, 1993. № CRM-1848. 43 p.
86. Кусочно–гладкие решения уравнений с частными производными первого порядка // Докл. РАН. 1993. Т. 333, вып. 6. С. 705–707 (совм. с Н.Н. Субботиной).
87. Обобщенные характеристики уравнений Гамильтона — Якоби // Изв. РАН. Техническая кибернетика. 1993. Т. 1. С. 190–197 (совм. с А.М. Тарасьевым, В.Н. Ушаковым).
88. Стратегия минимаксного прицеливания в направлении квазиградиента // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 5–11 (совм. с Г.Г. Гарнышевой).
89. Universal feedback via proximal aiming in problems of control and differential games // Rapp. Montreal Univ. Montreal, 1994. № CRM-2386. 22 p. (совм. с Ф.Х. Кларком, Ю.С. Ледяевым).
90. Негладкие и разрывные решения уравнений с частными производными первого порядка // Изв. РАН. Техническая кибернетика. 1994. Т. 3. С. 163–172 (совм. с Н.Н. Субботиной).
91. Generalized solutions of first–order PDEs. The dynamical optimization perspective. Boston: Birkhauser, 1995. 312 p. (Systems & Control: Foundations & Appl.)
92. Субоптимальные универсальные стратегии в игровой задаче быстродействия // Прикл. математика и механика. 1995. Т. 59, вып. 5. С. 707–713 (совм. с Г.Г. Гарнышевой).
93. Generalized solutions of partial differential equations of the first order. The invariance of graphs relative to differential inclusions // J. Math. Sci. 1996. Vol. 78, no. 5. P. 594–611.
94. Минимаксные решения уравнений с частными производными первого порядка // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 2. С. 105–138.
95. М-решения уравнений с частными производными первого порядка и их применение в дифференциальной игре преследования // Век Радио: сб. науч. тр. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1996. С. 202–218.
96. Итерационная процедура построения минимаксных и вязкостных решений уравнений Гамильтона — Якоби // Докл. РАН. 1996. Т. 348, вып. 6. С. 736–739 (совм. с А.Г. Ченцовым).
97. Asymptotic controllability and feedback stabilization // Proc. Conf. on Inform. Sci. and Systems. Princeton. 1996. P. 1232–1237 (совм. с Ф.Х. Кларком, Ю.С. Ледяевым, Е.Д. Сонтагом).
98. The synthesis of universal feedback pursuit strategies in differential games // SIAM J. Control Optim. 1997. Vol. 35, no. 2. P. 552–561 (совм. с Ф.Х. Кларком, Ю.С. Ледяевым).
99. Asymptotic controllability implies feedback stabilization // IEEE Trans. Automat. Control. 1997. Vol. 42, no. 10. P. 1394–1407 (совм. с Ф.Х. Кларком, Ю.С. Ледяевым, Е.Д. Сонтагом).
100. Многозначные решения дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка // Мат. сб. 1998. Т. 189, вып. 6. С. 33–58 (совм. с А.С. Лахтиным).
101. Минимаксные и вязкостные решения разрывных уравнений с частными производными первого порядка // Докл. РАН. 1998. Т. 359, вып. 4. С. 452–455 (совм. с А.С. Лахтиным).
102. Обобщенные решения разрывных уравнений с частными производными первого порядка. Деп. в ВИНИТИ № 267–В98. Екатеринбург, 1998. 18 с. (совм. с А.С. Лахтиным).
103. Constructive theory of positional differential games and generalized solutions to Hamilton–Jacobi equations // Stochastic and Differential Games: Theory and Numer. Methods. Boston etc.: Birkhauser, 1999. P. 3–67. (Annals of the International Society of Dynamic Games; vol. 4.)
104. Итерационная процедура построения минимаксных и вязкостных решений уравнений Гамильтона — Якоби и ее обобщения // Тр. МИАН. 1999. Т. 224. С. 311–334 (совм. с А.Г. Ченцовым).
105. Минимаксные решения уравнений Гамильтона — Якоби // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. математика и ее прил. Темат. обзоры. М.: ВИНИТИ, 1999. Т. 64. С. 222–231.
106. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации / Ин-т компьютерных исследований. Пер. с англ. Н.Н. Субботиной. М.; Ижевск, 2003. 336 с.
107. Области супердостижимости // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. Вып. 34. С. 14–31.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.938, 519.624.3

АЛГОРИТМ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ КВАДРАТИЧНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ГРАММАТИКИ ХОМСКОГО[1] ДЛЯ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА[2]

А. А. Азамов, М. А. Бекимов

Обсуждаются одношаговые методы приближенного решения задачи Коши для динамических систем. Показывается, что в случае квадратичных систем можно предлагать алгоритм численного интегрирования высокой степени точности на основе формулы Тейлора. Дается явная оценка остаточного члена. Алгоритм основывается на порождающей грамматике Хомского для языка слагаемых формулы Тейлора.

Ключевые слова: динамическая система, квадратичная система уравнений, задача Коши, численное решение, формула Тейлора, остаточный член, оценка точности, алгоритм, КС-грамматика.

A. A. Azamov, M. A. Bekimov. An approximation algorithm for quadratic dynamic systems based on N. Chomsky's grammar for Taylor's formula.

Single-step methods for the approximate solution of the Cauchy problem for dynamic systems are discussed. It is shown that a numerical integration algorithm with a high degree of accuracy based on Taylor's formula can be proposed in the case of quadratic systems. An explicit estimate is given for the remainder term. The algorithm is based on N. Chomsky's generative grammar for the language of terms of Taylor's formula.

Keywords: dynamic system, quadratic system of equations, Cauchy problem, numerical solution, Taylor's formula, remainder term, error estimate, algorithm, context-free grammar.

В современной теории динамических систем многие результаты опираются на численное решение задачи Коши

$$dx/dt = f(x), \quad x(0) = x_0, \tag{0.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^d$ (см. [1;11–13]). Если оставить в стороне линейный случай, то наиболее простой, тем не менее, чрезвычайно важный класс динамических систем составляют квадратичные системы (см., например, [7], а также обзоры [10;17] по системам на плоскости), у которых компоненты f задаются в виде

$$f_i(x) = \sum_{j,k=1}^{d} a_i^{jk} x_j x_k + \sum_{j=1}^{d} b_i^j x_j + c_i, \tag{0.2}$$

где $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_d)$, все коэффициенты — константы. К этому классу относятся, например, модели Лотки — Вольтерры [14], системы Лоренца [1; 15] и Рёсслера [16]. Интерес к квадратичным системам обусловлен также 10-проблемой Гильберта [5].

При $d \geq 2$ система (0.2) за редкими исключениями не интегрируется. В связи с этим довольно часто ее свойства формулируются на основе численного решения. (Более того, в немалом количестве случаев строгое доказательство не предъявляется, поскольку авторы полагают достаточными выводы на основе численных экспериментов). Это обстоятельство обуславливает особое значение как удобства применяемого метода приближенного решения, так и порядка его точности. В большинстве случаев предпочитается одношаговый метод Рунге — Кутты, дающий численное решение с точностью h^N, $N = 2 \div 5$ (очень редко — порядка $N = 6$) на одном шаге [2; 8]. В принципе метод Рунге — Кутты применим для получения решения и с более высокой степенью точности, но на практике этого избегают, так как соответствующие формулы (уже для $N > 6$) становятся чрезмерно громоздкими.

[1]Noam Chomsky.

[2]Работа выполнена при поддержке ПФИ Республики Узбекистан (проект Ф4-ФА-Ф014).

В настоящей работе обсуждается схема приближенного решения задачи Коши для квадратичных систем, основанная на формуле Тейлора

$$x(t+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{(k)}(t)}{k!}h^k+R_{n+1}(t,\ h). \tag{0.3}$$

Формула (0.3) также не находит применения на практике, так как при $d\geq 2$ выражения $x^{(n)}$ через функцию f и ее производных являются еще более громоздкими по сравнению с методом Рунге — Кутты. Тем не менее оказывается, что в случае квадратичных систем ситуация резко упрощается. При этом для оценки остаточного члена удается вывести явную формулу, а для разложения Тейлора — предложить сравнительно простой алгоритм. Последний основан на том, что слагаемые в формуле для $x^{(n)}$ (которые здесь называются тейлоровыми слагаемыми) составляют язык над трехбуквенным алфавитом 0, 1, 2 с контекстно-свободной грамматикой Хомского [3; 9].

Предварительно разберем случай $d=1$. Хотя в этом случае уравнение (0.1) решается в явном виде, рассуждения по вычислению тейлоровых слагаемых непосредственно переносятся к выводу оценки остаточного члена в общем случае.

В рассматриваемом случае для каждого x величины $f(x)$, $f'(x)$ и $f''(x)$ являются числами, причем $f''(x)=\mathrm{const}$. В дальнейшем эти выражения будем называть факторами и сокращенно будем писать в виде $f,\ f',\ f''$ за исключением случаев, когда это может привести к недоразумению.

Пусть числа D_n^k, где $n\geq 1,\ \ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ ($[a]$ обозначает целую часть a), определены рекуррентными соотношениями

$$D_n^0=1,\quad D_{n+1}^k=(n-2k+1)D_n^{k-1}+(n+1)D_n^k. \tag{0.4}$$

Легко установить, что $D_n^1=2^{n-1}-n$; кроме того, $2^{n-k}\leq D_n^k\leq 2^{n+k}$ при $n\geq 4$.

Предложение. *Имеет место формула*

$$x^{(n)}(t)=\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}D_n^k{f''}^k{f'}^{n-2k-1}f^{k+1}. \tag{0.5}$$

Д о к а з ы в а е т с я аналогично формуле бинома Ньютона — индукцией по n на основе соотношений (0.4). При этом удобнее случаи четного и нечетного n рассматривать отдельно, так как при переходе от $x^{(n)}$ к $x^{(n+1)}$ в первом случае число тейлоровых слагаемых увеличивается на единицу, а во втором случае оно не меняется.

Для небольших значений n получим следующие формулы:

$$\dot{x}=f,\ \ \ddot{x}=f'f,\ \ x^{III}=f'^2f,\ \ x^{IV}=f'^3f+4f''f'f^2,\ \ x^V=f'^4f+11f''f'^2f^2+4f''^2f^3,\ \ldots. \tag{0.6}$$

Отметим, что в каждом слагаемом степени f и f' однозначно определяются через n и степень f''.

Пусть теперь $d\geq 2$. В этом случае f является вектором, f' — матрицей Якоби (т. е. тензором $\dfrac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$ ранга $(1,1)$), а f'' — вектором из квадратичных форм (т. е. тензором $\dfrac{\partial^2 f_i(x)}{\partial x^j\partial x^k}$ ранга $(1,2)$; [4; 6]). И в многомерном случае $f''=\mathrm{const}$. Однако на этот раз формула (0.5), вообще говоря, не имеет места. Например, выражение для x^{IV} будет иметь вид

$$x^{IV}=f'^3f+2f''f'ff+f''ff'f+f'f''ff,$$

а с учетом симметричности f'' по контравариантным индексам, т. е. соотношения $f''(u,v)=f''(v,u)$, — вид

$$x^{IV}=f'^3f+3f''f'ff+f'f''ff.$$

В общем случае $f''f'ff$ и $f'f''ff$ не обязательно совпадают. Например, для $f = (-y^2,\ x^2)$ окажется $f''f'ff = -4(x^3y^2,\ x^2y^3)$, $f'ff''f = -4(y^5,\ x^5)$.

Поэтому в формуле для $x^{(n)}$ тейлоровые слагаемые, содержащие фактор f''^k, не группируются в одночлены с коэффициентами D_n^k. Тем не менее схема доказательства предложения сохраняет силу для следующего утверждения.

Теорема 1. *Выражение для $x^{(n)}$ является суммой групп Δ_n^k тейлоровых слагаемых, $k = 0, 1, \ldots, [(n-1)/2]$. При этом группа Δ_n^k содержит D_n^k слагаемых, каждое из которых состоит из k, $n-2k-1$ и $k+1$ факторов f'',f',f соответственно.*

Пусть решение $x(t)$ задачи Коши $\dot{x}(t) = f(x)$, $x(0) = x_0$ существует на отрезке времени $[0,\ T]$ и удовлетворяет условию $x(t) \in K$, где T — заданное положительное число, K — заданное компактное множество в $\mathbb{R}^d$.

Положим

$$M_0 = \max_{x\in K} |f(x)|\,, \quad M_1 = \max_{x\in K} \left\|f'(x)\right\|, \quad M_2 = \left\|f''(x)\right\| = \text{const}$$

(нормы матрицы и квадратичной формы — евклидовы: $\|f'(x)\| = \max\limits_{|u|\le 1} |f'(x)u|\,,\ \|f''(x)\| = \max\limits_{|u|\le 1, |v|\le 1,} f''(x)[u,v]$). Поэтому (см. [6; гл. 1, неравенство (1.8.2)])

$$\left|f'u\right| \le M_1\,|u|\,, \quad \left|f''[u,\ v]\right| \le M_2\,|u|\,|v|\,.$$

Отсюда следует, что каждое тейлоровое слагаемое из группы Δ_n^k допускает по норме оценку величиной ${M_2}^k{M_1}^{n-2k-1}{M_0}^{k+1}$. Поэтому справедлива

Теорема 2. *Для остаточного члена формулы Тейлора для решения задачи Коши для квадратичных систем имеет место*

$$|R_{n+1}| \le \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\sum_k D_{n+1}^k M_0^k M_1^{n-2k} M_2^k, \quad k = 0,\, 1,\, \ldots,\, [(n-1)/2].$$

Как уже было отмечено выше, в случае $d \ge 2$ для производных $x^{(n)}$ не удается вывести такую компактную формулу, как (0.5). Чтобы преодолеть эту сложность, выясним строение тейлоровых слагаемых в группах Δ_n^k. При этом удобно перейти к формальному языку, заменяя факторы f, f' и f'' цифрами 0, 1, 2 соответственно. Тогда каждое тейлоровое слагаемое превращается в слово над трехбуквенным алфавитом $\{0,\ 1,\ 2\}$. Те слова, которые получаются из тейлоровых слагаемых после такой замены, чтобы отличить от слов вообще над алфавитом $\{0,\ 1,\ 2\}$, будем называть d-словами. Совокупность d-слов образует язык (в смысле Н. Хомского), который обозначим $\mathcal{T}$. (Обычно в язык включают и пустое слово Λ, не содержащее символов.) В дальнейшем длину, т. е. число символов слова σ, будем обозначать $|\sigma|$. Язык $\mathcal{T}$ имеет простую порождающую грамматику: из правил $\dfrac{d}{dt}f(x) = f'(x)f(x)$ и $\dfrac{d}{dt}f'(x)u = f''(x)[f(x),\ u]$, где $u \in \mathbb{R}^d$, вытекает, что $\mathcal{T}$ порождается двумя правилами

$$0 \to 10, \quad 1 \to 20, \tag{0.7}$$

начиная со слова 0. Правила (0.7) означают, что если в d-слове σ вместо 0 подставить 10 или вместо единицы — 20, то снова получим d-слово (длины $|\sigma|+1$). Таким образом, язык $\mathcal{T}$ имеет контекстно-свободную грамматику.

На языке $\mathcal{T}$ формулы (0.6) запишутся более наглядно в виде дерева:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & & \\
 & & & \downarrow & & & \\
 & & & 10 & & & \\
 & & \swarrow & & \searrow & & \\
 & 200 & & & & 110 & \\
\swarrow & & \searrow & & \swarrow & \downarrow & \searrow \\
2100 & & 2010 & & 2010 & 1200 & 1110
\end{array}\ .$$

Один из основных вопросов математической лингвистики — дать критерий принадлежности слова над данным алфавитом к рассматриваемому языку. В случае языка $\mathcal{T}$ он имеет простой ответ.

Теорема 3. *Слово σ над алфавитом $\{0,\ 1,\ 2\}$ принадлежит языку $\mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда*

a) *заканчивается цифрой* 0;

b) *число нулей на единицу больше числа цифр* 2;

c) *если занумеровать цифры* 2 *в порядке арабского письма* (*т. е. справа налево*), *то на правой стороне от j-й цифры* 2 *находится не менее $k+1$ цифр* 0.

Доказательство. То, что все d-слова обладают свойствами a) – c), непосредственно следует из правил (0.7). Проверим достаточность. Для слов длины 1 и 2 это очевидно. Пусть σ — слово над алфавитом $\{0,\ 1,\ 2\}$ длины $n,\ n \geq 3$, обладающее свойствами a) – c). Тогда оно должно иметь вид $\sigma = \rho\varepsilon 0_k$, где 0_k — слово из $k,\ k \geq 1$, $\varepsilon = 1$ или $\varepsilon = 2$, ρ — подслово длины $n-k-1$. В случае $\varepsilon = 1$ в слове σ подслово 10_k заменим на подслово 0_k, а в случае $\varepsilon = 2$ (тогда необходимо $k \geq 2$) подслово 20_k — на подслово 10_{k-1}. Полученное слово σ' имеет длину $n-1$ и для него по-прежнему свойства a) – c) имеют место. Поэтому оно принадлежит $\mathcal{T}$. Поскольку σ получится из σ' по одному из правил (0.7), то $\sigma \in \mathcal{T}$.

Можно построить несложную процедуру $Extract(n,\ \sigma; x)$, позволяющую вычислить значение соответствующего d-слова σ длины n тейлорового слагаемого в точке x. Например,

$$Extract(1,0;x) = f(x),\ Extract(2,10;x) = f'(x)\,f(x),$$

$$Extract(7,1202010;x) = f'(x)f''(x)\{f(x), f''(x)[f(x), f'(x)f(x)]\}.$$

Язык $\mathcal{T}$ применяем к приближенному вычислению $x(t+h)$, исходя из заданного значения $x(t)$ с ошибкой на одном шаге порядка h^{N+1}. С целью описания соответствующего алгоритма введем следующую операцию. Пусть L — некоторый список (массив) d-слов. Заменив каждое слово $\sigma \in L$ набором d-слов длины $|\sigma|+1$ путем применения правил (0.7) ко всем цифрам 0 и 2 в слове σ по одному разу, получим новый список, который обозначим DL.

Приняв $n = 0,\ L = \langle 0 \rangle,\ H = h,\ S = x(t)$, вычислим $\Sigma = \sum_{\sigma \in L} Extract(n,\ \sigma; x(t))$ и положим $S = x(t) + H\Sigma$. Затем перейдем к рассмотрению шага $n := n+1$. Если $n \geq N$, то вычисление завершается значением $x(t+h) = S$. В противном случае образуем список $L := DL$ и, положив $H := Hh/n$, перейдем к вычислению Σ и S. $\square$

Примечание. С языком $\mathcal{T}$ связан специальный фрактал в гильбертовом пространстве l_2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Аносов Д.В.** Лоренца аттрактор // Математическая энциклопедия / ред. И. М. Виноградов. М.: Советская энциклопедия, 1982. Т. 3. С. 451.
2. **Бахвалов Н.С.** Численные методы. М.: Наука, 1973. 632 с.
3. **Гладкий А.В.** Формальные грамматики и языки. М.: Наука, 1973. 368 с.
4. **Зорич В.А.** Математический анализ. Ч. 2. М.: Наука, 1984. 640 с.
5. **Ильяшенко Ю.С.** Избранные задачи теории динамических систем. М.: Изд-во МЦНМО, 2011. 124 с.
6. **Картан А.** Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971. 392 с.
7. **Artes J.C., Llibre J.** Quadratic Hamiltonian vector fields // J. Diff. Equations. 1994. Vol. 107. P. 80–95.
8. **Butcher J.C.** Numerical methods for ordinary differential equations. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons Ltd., 2008. 482 p.
9. **Chomsky N.** Three models for the description of language // IRE Transactions on Information Theory. 1956. Vol. 2. P. 113–124.

10. **Coppel W.A.** A survey of quadratic systems // J. Diff. Equations. 1966. Vol. 2. P. 293–304.
11. **Guckenheimer J.** Computational environments for exploring dynamical systems // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. 1991. Vol. 1, no. 2. P. 269–276.
12. **Guckenheimer J.** Numerical analysis of dynamical systems // Handbook of Dynamical Systems. Amsterdam, 2002. Vol. 2. P. 345–390.
13. **Guckenheimer J.** Phase portraits of planar vector fields: computer proofs // Experiment. Math. 1995. Vol. 4, no. 2. P. 153–165.
14. Lotka-Volterra and related systems / eds. Sh. Ahmad, I.M. Stamova. Berlin; Boston: Walter de Gruyter GmbH, 2013. 236 p.
15. **Pchelintsev A.N.** Numerical and physical modelling of the dynamics of Lorenz system // Numerical analysis and Applications. 2014. Vol. 7, no. 2. P. 159–167.
16. **Peitgen H.-O., Jurgens H., Saupe D.** Rössler attractor // Chaos and fractals: New frontiers of science. New York: Springer, 2004. P. 636–646.
17. **Reyn J.W.** A bibliography of the qualitative theory of quadratic systems of differential equations in the plane. Report. Delft: Delft University of Technology, 1987. 223 p.
URL: http://ta.twi.tudelft.nl/DV/Staff/Reyn/ .

Азамов Абдулла Азамович

Поступила 16.02.2015

д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики Национального университета Узбекистана имени М.Улугбека
e-mail: abdulla.azamov@gmail.com

Бекимов Мансур Адамбаевич
старший науч. сотрудник-соискатель
Институт математики Национального университета Узбекистана имени М.Улугбека
e-mail: mansu@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.977

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ В АБСТРАКТНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Л. А. Власенко, А. Г. Руткас, А. А. Чикрий

Изучается игровая задача сближения для системы, динамика которой описывается дифференциально-операторным уравнением в гильбертовом пространстве. Уравнение записывается в неявной форме с необратимым, вообще говоря, оператором при производной. Предполагается, что характеристический пучок операторов, отвечающий линейной части уравнения, удовлетворяет ограничению параболического типа в некоторой правой полуплоскости. С использованием метода разрешающих функционалов получены достаточные условия приведения динамического вектора системы на цилиндрическое терминальное множество. Рассматриваются приложения к системам, описываемым уравнениями в частных производных.

Ключевые слова: дифференциальная игра, параболическая система, эргодическая теорема, псевдорезольвента, производящий оператор полугруппы, многозначное отображение, разрешающий функционал, уравнения в частных производных.

L. A. Vlasenko, A. G. Rutkas, A. A. Chikrii. On a differential game in an abstract parabolic system.

We consider the game problem of approach for a system whose dynamics is described by a differential operator equation in a Hilbert space. The equation is written in an implicit form with generally non-invertible operator multiplying the derivative. It is assumed that the characteristic operator pencil corresponding to the linear part of the equation satisfies a constraint of parabolic type in a right half-plane. Using the method of resolving functionals, we obtain sufficient conditions for the approach of a dynamical vector of the system to a cylindrical terminal set. Applications to systems described by partial differential equations are considered.

Keywords: differential game, parabolic system, ergodic theorem, pseudoresolvent, generator of a semigroup, set-valued mapping, resolving functional, partial differential equation.

Введение

Фундаментальные методы исследования конфликтно-управляемых процессов, эволюция которых описывается дифференциальными уравнениями в конечномерных пространствах, разработаны в [1–3]. Важнейшая роль в становлении и развитии теории дифференциальных игр принадлежит А. И. Субботину [2; 4–7]. Он внес огромный вклад в разработку позиционного подхода в исследовании игровых задач, что привело к созданию эффективного метода — правила экстремального преследования. Ключевую роль в изучении структуры динамических игр играют теоремы об альтернативе, полученные им совместно с Н. Н. Красовским. Особого внимания заслуживает цикл работ А. И. Субботина, связанный с исследованием основного уравнения теории дифференциальных игр — уравнения Гамильтона — Якоби и его обобщенных решений [4–6], получивший дальнейшее развитие в [8].

В настоящей работе мы изучаем дифференциальные игры в распределенных системах, которые описываются уравнениями в частных производных и более общими дифференциально-операторными уравнениями в абстрактных гильбертовых пространствах. Проблемы, затронутые нами, примыкают к исследованиям [9–13]. В статье [9] используется первый прямой метод Л. С. Понтрягина, в [10; 11] изучается правило экстремального прицеливания Н. Н. Красовского, в статьях [12; 13] ход игры интегрально оценивается с помощью разрешающего функционала, который обобщает понятие разрешающей функции в конечномерном пространстве [14; 15] на бесконечномерную ситуацию. В данной работе мы показываем, как метод разрешающих функционалов применяется к дифференциальным играм в системах параболического типа, явным и неявным. Явные параболические системы можно описать с помощью дифференциальных уравнений в частных производных типа Ковалевской, разрешенных относительно производной по времени, как, например, в [11], неявные — с помощью уравнений, не принадлежащих типу Ковалевской, т.е. не разрешенных относительно производной по времени. Мы изучаем дифференциальную игру в системе, которая описывается дифференциальным уравнением параболического типа в абстрактной, вообще говоря, неявной форме — в виде неявного, в частном случае явного, дифференциально-операторного уравнения в гильбертовом пространстве. Решения уравнения понимаются в сильном смысле в отличие от слабых решений в [10; 11]. Для применения метода разрешающих функций или функционалов принципиальным является представление решения уравнения, допускающее аддитивное вхождение члена с начальными данными и блока управления [15]. Чтобы получить такое представление решения для неявного уравнения, которому отвечает пара операторов или их пучок, с применением эргодических теорем Хилле для псевдорезольвент [16, гл. VIII, разд. 4] осуществляются специальное разложение параболического пучка и отвечающее ему разложение пространства состояний.

1. Постановка задачи и предварительные результаты

Динамика системы описывается дифференциально-операторным уравнением

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[Ay(t)] + By(t) = K_1u(t) - K_2v(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{1.1}$$

с неограниченными операторами A, B и ограниченными операторами K_1, K_2. *Явное уравнение*

$$y'(t) + By(t) = K_1u(t) - K_2v(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{1.2}$$

есть частный случай *неявного уравнения* (1.1), в котором оператор A является единичным. Явная конфликтно-управляемая система (1.2) с ограниченными операторами K_1, K_2 и неограниченным оператором B таким, что $-B$ порождает сильно непрерывную полугруппу, была предметом исследования статьи [11]. В статье [9] рассматривалась явная систем с ограниченными операторами. Относительно уравнения (1.1) предполагаем: A, B — замкнутые линейные операторы, действующие из сепарабельного вещественного гильбертова пространства H_1, вообще говоря, в другое сепарабельное вещественное гильбертово пространство H_2 с областями определения D_A, D_B соответственно, $D = D_A \cap D_B \ne \{0\}$; K_1, K_2 — ограниченные линейные операторы из сепарабельных вещественных гильбертовых пространств U, V в пространство H_2; управления преследователя $u(t)$ и убегающего $v(t)$ суть измеримые вектор-функции, принимающие значения из областей управления U_0 и V_0, которые являются замкнутыми выпуклыми ограниченными множествами в пространствах U и V. Предполагается, что преследователю при выборе управления $u(t)$ в момент t становится известной вся предыстория управления убегающего $v_t(\cdot) = \{\, v(s) \colon s \in [0, t]\}$. Проблем с физической осуществимостью таких управлений, как будет показано далее, не возникает, так как на двух соседних участках используются различные контруправления, а предыстория управления убегающего необходима лишь для нахождения момента переключения [14; 15]. По существу, преследователь использует некоторую специальную квазистратегию [7]. В изучаемой системе, как и в работах [9;10], при управлениях преследователя и убегающего стоят операторы. Их наличие позволяет рассматривать управления $u(t)$ и $v(t)$, вообще говоря, в разных пространствах. С другой стороны, как показывает теорема 1, при соответствующих ограничениях на эти операторы мы можем для негладких управлений рассматривать сильные решения, удовлетворяющие уравнению почти всюду, а не только в слабом смысле, т.е. в смысле скалярного произведения (см. определение различных классов решений дифференциально-операторных уравнений в [17]). Слабые решения при изучении дифференциальных игр также называют движениями [10; 11].

Будем использовать следующие обозначения: $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ — пространство линейных ограниченных операторов из H_1 в H_2, $\mathcal{L}(H_1, H_1) = \mathcal{L}(H_1)$; $\mathrm{Ker}A$ — ядро оператора A; $\mathrm{Im}A$ — образ оператора A; E — единичный оператор в соответствующем пространстве;

$L_2(0,T;H_1)$ — пространство H_1-значных измеримых функций, интегрируемых с квадратом нормы на $[0,T]$; $W_2^1(0,T;H_1)$ — пространство Соболева H_1-значных функций, которые принадлежат $L_2(0,T;H_1)$ вместе со своими обобщенными производными. Функции из $W_2^1(0,T;H_1)$ будем считать непрерывными на $[0,T]$, изменив их, если это необходимо, на множестве меры нуль (теорема 1.1 [18, гл. 3]). Заметим, что в сепарабельном пространстве понятия сильной и слабой измеримости эквивалентны [19, гл. III, п. 3.5], и поэтому в дальнейшем мы употребляем термин измеримость.

Для неявного уравнения (1.1) рассматриваем начальное условие

$$Ay(0)=q. \tag{1.3}$$

Пусть $u(t)\in L_2(0,T;U)$, $v(t)\in L_2(0,T;V)$. *Решением начальной задачи* (1.1), (1.3) называется функция $y(t)\in L_2(0,T;H_1)$ такая, что $y(t)\in D$ для почти всех $t\in[0,T]$, $Ay(t)\in W_2^1(0,T;H_2)$, $y(t)$ почти всюду удовлетворяет уравнению (1.1) и выполнено начальное условие (1.3). Выясним условия разрешимости начальной задачи (1.1), (1.3) и опишем решения. *Целью игры в системе* (1.1), (1.3) является приведение *динамического вектора* $Ay(t)$ на терминальное множество M за конечное время (не превосходящее T) в классе допустимых управлений преследователя при любом допустимом управлении убегающего.

На динамику уравнения (1.1) существенное влияние оказывает поведение резольвенты пучка операторов $\lambda A+B$. Чтобы использовать пучок операторов и его резольвенту для комплексных значений спектрального параметра λ, как и в случае резольвенты одного оператора, перейдем к комплексным оболочкам $\widetilde{H}_1,\widetilde{H}_2$ вещественных пространств H_1,H_2 и комплексным расширениям $\widetilde{A},\widetilde{B}$ операторов A,B. Предположим, что в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda\ge C_1$ пучок операторов $\lambda\widetilde{A}+\widetilde{B}:\widetilde{D}=D_{\widetilde{A}}\cap D_{\widetilde{B}}\to\widetilde{H}_2$ имеет резольвенту $(\lambda\widetilde{A}+\widetilde{B})^{-1}\in\mathcal{L}(\widetilde{H}_2,\widetilde{H}_1)$ и *псевдорезольвента* $\widetilde{A}(\lambda\widetilde{A}+\widetilde{B})^{-1}\in\mathcal{L}(\widetilde{H}_2)$ удовлетворяет оценке

$$\|\widetilde{A}(\lambda\widetilde{A}+\widetilde{B})^{-1}\|\le\frac{C_2}{1+|\lambda|},\quad \mathrm{Re}\lambda\ge C_1,\quad C_2>0. \tag{1.4}$$

В случае единичного оператора A оценка (1.4) принимает вид

$$\|(\lambda E+\widetilde{B})^{-1}\|\le\frac{C_2}{1+|\lambda|},\quad \mathrm{Re}\lambda\ge C_1,\quad C_2>0. \tag{1.5}$$

Это есть ограничение на резольвенту оператора $-\widetilde{B}$, отвечающего абстрактному параболическому уравнению $y'(t)=-\widetilde{B}y(t)$ [20, гл. 1, § 3, п. 5]. Поэтому пучок $\lambda A+B$ операторов A,B в вещественных пространствах H_1,H_2 и соответствующее ему уравнение (1.1) будем называть параболическими, как и в случае комплексных пространств [21].

Свойства параболического пучка операторов в случае комплексных пространств устанавливаются и обосновываются с помощью обобщенных эргодических теорем Хилле для псевдорезольвент [16, гл. VIII, разд. 4]. Эти свойства можно найти в [21; 22], подробное изложение содержится в [23, п. 4.3.2]. Основным моментом рассуждений является построение двух пар взаимно дополнительных проекторов $\widetilde{P}_1,\widetilde{P}_2$ на линеале $\widetilde{D}$ и $\widetilde{Q}_1,\widetilde{Q}_2$ в пространстве $\widetilde{H}_2$ как слабых пределов псевдорезольвент:

$$\widetilde{P}_1x=\lim_{\substack{|\lambda|\to\infty\\ \mathrm{Re}\lambda\ge C_1}}(\lambda\widetilde{A}+\widetilde{B})^{-1}\widetilde{A}x,\quad x\in\widetilde{D};\quad \widetilde{Q}_1y=\lim_{\substack{|\lambda|\to\infty\\ \mathrm{Re}\lambda\ge C_1}}\widetilde{A}(\lambda\widetilde{A}+\widetilde{B})^{-1}y,\quad y\in\widetilde{H}_2,$$

$$\widetilde{P}_2=E_{\widetilde{H}_1}-\widetilde{P}_1,\quad \widetilde{Q}_2=E_{\widetilde{H}_2}-\widetilde{Q}_1.$$

Свойства параболического пучка операторов $\lambda A+B$ в случае вещественных пространств H_1,H_2 устанавливаются путем перехода к сужениям P_1,P_2,Q_1,Q_2 операторов $\widetilde{P}_1,\widetilde{P}_2,\widetilde{Q}_1,\widetilde{Q}_2$ на вещественные пространства, причем

$$P_1x=\lim_{s\to+\infty}(sA+B)^{-1}Ax,\quad x\in D;\quad Q_1y=\lim_{s\to+\infty}A(sA+B)^{-1}y,\quad y\in H_2. \tag{1.6}$$

Заметим, что $\widetilde{Q}_j \in \mathcal{L}(\widetilde{H}_2)$, $Q_j \in \mathcal{L}(H_2)$, $j = 1, 2$. С помощью соответствующих прямых разложений в комплексных пространствах нетрудно проверить, что имеют место прямые разложения линеала $D = D_A \cap D_B \neq \{0\}$ в прямую сумму линеалов $D_1 = P_1 D$, $D_2 = P_2 D$ и пространства H_2 в прямую сумму замкнутых подпространств $H_2^1 = Q_1 H_2$, $H_2^2 = Q_2 H_2$:

$$\begin{gathered} D = D_A \cap D_B = D_1 \dot{+} D_2, \quad H_2 = H_2^1 \dot{+} H_2^2 \\ D_2 = \mathrm{Ker} A \cap D, \quad H_2^2 = B D_2,\ H_2^1 = \overline{AD}, \quad D_1 = (sA + B)^{-1} H_2^1 \end{gathered} \tag{1.7}$$

— такие, что операторы A, B отображают D_j в H_2^j $(j = 1, 2)$, оператор A не вырождается на D_1, оператор B не вырождается на D_2. Черта означает замыкание.

Оператор

$$G = AP_1 + BP_2 = A + BP_2 = Q_1 A + Q_2 B = A + Q_2 B : D \to H_2, \quad D_G = D, \tag{1.8}$$

обладает свойствами, аналогичными свойствам своего комплексного расширения

$$\widetilde{G} = \widetilde{A} + \widetilde{B}\widetilde{P}_2 = \widetilde{A} + \widetilde{Q}_2 \widetilde{B} : \widetilde{D} \to \widetilde{H}_2, \quad D_{\widetilde{G}} = \widetilde{D}.$$

Оператор G отображает D_j в H_2^j $(j = 1, 2)$ и имеет обратный оператор G^{-1}, определенный на $AD \dot{+} H_2^2$, причем $G^{-1} Q_2 \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ и справедливы равенства

$$\begin{gathered} BG^{-1} Q_2 = Q_2, \quad Q_2 B G^{-1} h = Q_2 h, \quad A G^{-1} h = Q_1 h, \\ G^{-1} A d = P_1 d, \quad G^{-1} B P_2 d = P_2 d, \quad h \in AD \dot{+} H_2^2, \quad d \in D. \end{gathered} \tag{1.9}$$

Оператор

$$\widetilde{W} = -\widetilde{Q}_1 \widetilde{B} \widetilde{G}^{-1}, \quad D_{\widetilde{W}} = \widetilde{A}\widetilde{D} \dot{+} \widetilde{H}_2^2, \quad \widetilde{H}_2^2 = \widetilde{Q}_2 \widetilde{H}_2,$$

является комплексным расширением оператора

$$W = -Q_1 B G^{-1}, \quad D_W = AD \dot{+} H_2^2. \tag{1.10}$$

Для параболического пучка операторов $\lambda \widetilde{A} + \widetilde{B}$ оценка типа (1.4) выполнена в более широкой области Σ [21; 23]:

$$\|\widetilde{A}(\lambda \widetilde{A} + \widetilde{B})^{-1}\| \leq \frac{C_2'}{1 + |\lambda|}, \quad \lambda \in \Sigma = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Re}\lambda \geq C_1 - \beta \frac{1 + |\mathrm{Im}\lambda|}{C_2}\Big\}, \tag{1.11}$$

где $0 < \beta < 1$, $C_2' > 0$. Пусть $\widetilde{W}_1 = \widetilde{W}_{|_{\widetilde{H}_2^1}}$ — сужение оператора $\widetilde{W}$ на подпространство $\widetilde{H}_2^1 = \widetilde{Q}_1 \widetilde{H}_2$. В области Σ существует резольвента $R_{\widetilde{W}_1}(\lambda) = (\widetilde{W}_1 - \lambda E)^{-1}$ оператора $\widetilde{W}_1$:

$$R_{\widetilde{W}_1}(\lambda) y = -\widetilde{A}(\lambda \widetilde{A} + \widetilde{B})^{-1} y, \quad y \in \widetilde{H}_2^1, \quad \lambda \in \Sigma.$$

Поэтому в силу (1.11) справедливо неравенство

$$\|R_{\widetilde{W}_1}(\lambda)\| \leq \frac{C_2'}{1 + |\lambda|}, \quad \lambda \in \Sigma, \tag{1.12}$$

откуда следует, что $\widetilde{W}_1$ является секториальным оператором согласно [24, определение 1.3.1] и производящим оператором аналитической полугруппы $\widetilde{S}_1(t)$ в $\widetilde{H}_2^1$ [20, гл. 1, § 3, п. 5]. В [25, гл. 5, § 4] полугруппу $\widetilde{S}_1(t)$ с производящим оператором $\widetilde{W}_1$, резольвента которого удовлетворяет ограничению (1.12), называют параболической; для полугруппы $\widetilde{S}_1(t)$ справедливо представление

$$\widetilde{S}_1(t) y = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} e^{\lambda t} R_{\widetilde{W}_1}(\lambda) y \, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} e^{\lambda t} \widetilde{A}(\lambda \widetilde{A} + \widetilde{B})^{-1} y \, d\lambda, \quad y \in \widetilde{H}_2^1, \quad t > 0, \tag{1.13}$$

где Γ — контур, состоящий из двух лучей $\mathrm{Re}\lambda = C_1 + \varepsilon - \beta\dfrac{1+|\mathrm{Im}\lambda|}{C_2}$, $\varepsilon > 0$; контур Γ ориентирован так, что область $\mathbb{C}\setminus\Sigma$ при обходе контура остается слева.

Оператор $\widetilde{S}_1(t)$ является вещественным при всех $t \geq 0$, т. е. элементы из H_2^1 (вещественные элементы) переводит в H_2^1. Действительно, пусть J_1, J_2 — инволюции в пространствах $\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2$ соответственно, т. е. $J_1 h_1 = \bar{h}_1$, $J_2 h_2 = \bar{h}_2$, где $\bar{h}_1, \bar{h}_2$ — комплексные сопряженные для элементов $h_1 \in \widetilde{H}_1, h_2 \in \widetilde{H}_2$. Определение и свойства оператора инволюции можно найти в [26, гл. XIII, § 2]. Справедливы соотношения

$$J_2\widetilde{A}(\lambda\widetilde{A}+\widetilde{B})^{-1} = \widetilde{A}J_1(\lambda\widetilde{A}+\widetilde{B})^{-1} = \widetilde{A}(\bar{\lambda}\widetilde{A}+\widetilde{B})^{-1}J_2.$$

С помощью этих соотношений и представления (1.13) получаем

$$J_2\widetilde{S}_1(t)y = \widetilde{S}_1(t)J_2 y, \quad y \in \widetilde{H}_2^1, \quad t \geq 0.$$

Отсюда следует, что оператор $\widetilde{S}_1(t)$ является вещественным при всех $t \geq 0$.

При каждом $t \geq 0$ рассмотрим сужение $S_1(t)$ оператора $\widetilde{S}_1(t)$ на вещественное подпространство H_2^1. Семейство операторов $S_1(t)$ образует полугруппу класса C_0 в $\mathcal{L}(H_2^1)$ с производящим оператором $W_1 = W_{|_{H_2^1}}$. Семейство операторов

$$S(t) = S_1(t)Q_1 + Q_2$$

есть полугруппа класса C_0 в $\mathcal{L}(H_2)$ с производящим оператором W (1.10).

Теорема 1. *Пусть в полуплоскости* $\mathrm{Re}\lambda \geq C_1$ *пучок операторов* $\lambda\widetilde{A}+\widetilde{B} : \widetilde{D} = D_{\widetilde{A}} \cap D_{\widetilde{B}} \to \widetilde{H}_2$ *имеет резольвенту* $(\lambda\widetilde{A}+\widetilde{B})^{-1} \in \mathcal{L}(\widetilde{H}_2, \widetilde{H}_1)$ *и псевдорезольвента* $\widetilde{A}(\lambda\widetilde{A}+\widetilde{B})^{-1} \in \mathcal{L}(\widetilde{H}_2)$ *удовлетворяет оценке* (1.4)*, оператор* G^{-1} *ограничен на своей области определения,* $\mathrm{ImQ_1K_1} \subset \mathrm{AD}$*,* $\mathrm{ImQ_1K_2} \subset \mathrm{AD}$*,* $q \in AD$*,* $u(t) \in L_2(0,T;U)$*,* $v(t) \in L_2(0,T;V)$*. Тогда существует единственное решение* $y(t)$ *задачи* (1.1), (1.3) *и это решение допускает представление*

$$y(t) = G^{-1}\left[S(t)q + \int\limits_0^t S(t-\tau)Q_1[K_1u(\tau)-K_2v(\tau)]d\tau + Q_2[K_1u(t)-K_2v(t)]\right] \text{ п.в. } t \in [0,T]. \quad (1.14)$$

З а м е ч а н и е 1. Примеры операторов K_1, K_2, удовлетворяющих условиям теоремы 1, а также условиям теоремы 2 и следствию из нее приведены в разделе 3 статьи в приложениях.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Согласно разложениям (1.7) уравнение (1.1) распадается

$$z'(t) = Wz(t) + f(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.15)$$

$$z(t) = Ay(t), \quad f(t) = Q_1[K_1u(t) - K_2v(t)],$$

$$Q_2By(t) = Q_2[K_1u(t) - K_2v(t)], \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.16)$$

Из соотношения (1.16) заключаем, если функция $y(t) = P_1y(t) + P_2y(t)$ является решением задачи (1.1), (1.3) то $P_2y(t) = G^{-1}Q_2[K_1u(t) - K_2v(t)]$.

Уравнение (1.15) рассматриваем в пространстве H_2. Здесь W — производящий оператор полугруппы $S(t)$ класса C_0, $f(t) \in D_W$, $WK_1 = WQ_1K_1 \in \mathcal{L}(U, H_2)$, $WK_2 = WQ_1K_2 \in \mathcal{L}(V, H_2)$, $Wf(t) \in L_2(0,T;H_2)$. Отсюда следует, что для этого уравнения выполнены условия теоремы 2.9 из [17, гл. 4]. Поэтому существует единственное сильное решение $z(t)$ уравнения (1.15), удовлетворяющее начальному условию $z(0) = q$. Сильное решение почти всюду имеет производную, интегрируемую в смысле Бохнера, почти всюду удовлетворяет уравнению и определяется по формуле

$$z(t) = S(t)q + \int\limits_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Нетрудно видеть, что $z(t)$ принимает значения в AD и $z(t), z'(t) \in L_2(0,T;H_2)$. Учитывая четвертое равенство в (1.9), однозначно находим

$$P_1 y(t) = G^{-1}z(t) = G^{-1}\left[S(t)q + \int\limits_0^t S(t-\tau)Q_1[K_1u(\tau) - K_2v(\tau)]d\tau\right].$$

На этом доказательство теоремы завершается.

З а м е ч а н и е 2. Если $u(t) \in U_0$, $v(t) \in V_0$, то вместо условий $\mathrm{ImQ_1K_1} \subset \mathrm{AD}$, $\mathrm{ImQ_1K_2} \subset \mathrm{AD}$ достаточно потребовать, чтобы $Q_1K_1U_0 \subset AD$, $Q_1K_2V_0 \subset AD$.

2. Метод разрешающих функционалов в игровой задаче для параболической системы

Вернемся к изучению дифференциальной игры в системе (1.1), (1.3). Будем предполагать справедливость условий теоремы 1 с учетом замечания 2 относительно ограничений на операторы K_1, K_2. Пусть терминальное множество M, на которое должен быть переведен динамический вектор $Ay(t)$ системы (1.1), (1.3), имеет цилиндрический вид

$$M = M_0 + M_1, \tag{2.1}$$

где M_0 — замкнутое линейное подпространство в H_2^1, M_1 — выпуклое замкнутое ограниченное множество из ортогонального дополнения $M_0^\perp$ к M_0 в H_2^1. Из вида (1.14) решения $y(t)$ системы (1.1), (1.3) получаем представление для динамического вектора

$$Ay(t) = S(t)q + \int\limits_0^t S(t-\tau)Q_1[K_1u(\tau) - K_2v(\tau)]d\tau. \tag{2.2}$$

К исследованию дифференциальной игры в системе (1.1), (1.3) с цилиндрическим терминальным множеством M (2.1) применим метод разрешающих функционалов в гильбертовом пространстве [12; 13] и теорию многозначных отображений [27]. Обозначим через Π ортопроектор в H_2^1 на $M_0^\perp$, $\Pi \in \mathcal{L}(H_2^1)$. Рассмотрим многозначное отображение

$$\Omega(t,\tau,v) = \Pi S(t-\tau)Q_1[K_1U_0 - K_2v], \quad \Omega\, :\, \Delta\times V_0 \rightsquigarrow H_2^1, \quad \Delta = \{(t,\tau)\colon 0\le\tau\le t<\infty\}.$$

Очевидно, что это отображение имеет выпуклые ограниченные образы в H_2^1. Выпуклое замкнутое ограниченное множество U_0 в гильбертовом пространстве U является слабо компактным [19, разд. 2.9, 2.10]. Используя конкретный вид многозначного отображения $\Omega(t,\tau,v)$, устанавливаем замкнутость его образов в H_2^1.

Всюду в дальнейшем будем предполагать выполнение следующего условия.

У с л о в и е П о н т р я г и н а. Многозначное отображение

$$\Omega_0(t,\tau) = \bigcap_{v\in V_0}\Omega(t,\tau,v) = \Pi S(t-\tau)Q_1K_1U_0 \overset{*}{-} \Pi S(t-\tau)Q_1K_2V_0, \quad \Omega_0 : \Delta \rightsquigarrow H_2^1,$$

принимает непустые значения на множестве Δ. Здесь $\overset{*}{-}$ обозначает геометрическую разность множеств.

Придерживаемся схемы метода разрешающих функционалов из [12; 13]. Пусть $\gamma(t,\tau)$ — измеримый по $\tau\in[0,t]$ $(t\ge 0)$ селектор многозначного отображения $\Omega_0(t,\tau)$, существование которого следует из теоремы 8.2.2 о выпуклой оболочке и теоремы 8.1.3 измеримого выбора (см. [27]), и пусть

$$\xi(t) = \xi(t; q, \gamma) = \Pi S(t)q + \int_0^t \gamma(t, s)ds.$$

Многозначное отображение

$$\Lambda(t, \tau, v) = \bigl\{\widetilde{\alpha} \geq 0 \ : \ [\Omega(t, \tau, v) - \gamma(t, \tau)] \cap \widetilde{\alpha}[M_1 - \xi(t)] \neq \varnothing\bigr\}, \quad \Lambda \ : \ \Delta \times V_0 \rightsquigarrow \mathbb{R}^1, \tag{2.3}$$

имеет непустые и замкнутые образы. Если $\xi(t) \in M_1$, то $\Lambda(t, \tau, v) = [0, \infty)$. Если $\xi(t) \notin M_1$, то образы $\Lambda(t, \tau, v)$ ограничены и с использованием теоремы 8.2.8 об образе и теоремы 8.2.9 о прообразе (см. [27]) устанавливаем измеримость многозначного отображения $\Lambda(t, \tau, v)$ по $(\tau, v) \in [0, t] \times V_0$. Опорная функция многозначного отображения $\Lambda(t, \tau, v)$ (2.3) называется *разрешающим функционалом*

$$\alpha(t, \tau, v) = \sup\bigl\{\widetilde{\alpha} \geq 0 \ : \ \widetilde{\alpha} \in \Lambda(t, \tau, v), \ (t, \tau, v) \in \Delta \times V_0\bigr\}. \tag{2.4}$$

Если $\xi(t) \in M_1$, то $\alpha(t, \tau, v) = \infty$. Если $\xi(t) \notin M_1$, то разрешающий функционал ограничен; в силу компактности множества $\Lambda(t, \tau, v)$ (2.3) точная верхняя грань в (2.4) достигается; в силу теоремы об опорной функции (см. [27, теорема 8.2.14]) разрешающий функционал является измеримым по $(\tau, v) \in [0, t] \times V_0$.

Пусть V_* — множество измеримых вектор-функций $v(\tau) : [0, T] \to V_0 \subset V$. Если $v(\cdot) \in V_*$ и $\xi(t) \notin M_1$, то измеримыми являются многозначное отображение $\Lambda_{t,v}(\tau) = \Lambda(t, \tau, v(\tau)) : [0, t] \rightsquigarrow \mathbb{R}^1$ и его опорная функция $\alpha_{t,v}(\tau) = \alpha(t, \tau, v(\tau)) : [0, t] \to \mathbb{R}^1$. Введем множество

$$\Upsilon = \Upsilon(q, \gamma) = \bigl\{t \in [0, T] \ : \ \xi(t) \in M_1\bigr\} \cup \Bigl\{t \in [0, T] \ : \ \xi(t) \notin M_1 \wedge \inf_{v(\cdot) \in V_*} \int_0^t \alpha(t, \tau, v(\tau))d\tau \geq 1\Bigr\}. \tag{2.5}$$

Теорема 2. *Пусть для конфликтно-управляемой системы* (1.1), (1.3) *с терминальным множеством* M (2.1) *справедливо ограничение* (1.4), *оператор* G^{-1} *ограничен на своей области определения, выполнено условие Понтрягина, начальный вектор* q *в* (1.3) *и операторы* K_1, K_2 *в* (1.1) *удовлетворяют соотношениям* $q \in AD$, $Q_1K_1U_0 \subset AD$, $Q_1K_2V_0 \subset AD$ *и для некоторого измеримого по* $\tau \in [0, t]$ $(t \geq 0)$ *селектора* $\gamma(t, \tau) \in \Omega_0(t, \tau)$ *множество* Υ (2.5) *не является пустым. Тогда динамический вектор* $Ay(t)$ *системы* (1.1), (1.3) *может быть приведен на терминальное множество* M (2.1) *в момент* $T_0 \in \Upsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2 осуществляется по схеме доказательства соответствующих теорем из [12; 13]. Пусть $T_0 \in \Upsilon$. Рассмотрим многозначное отображение

$$\begin{gathered} U_1(\tau, v) = \bigl\{u \in U_0 \ : \ \Pi S(T_0 - \tau)Q_1[K_1u - K_2v] - \gamma(T_0, \tau) = 0\bigr\}, \\ U_1(\tau, v)\colon [0, T_0] \times V_0 \rightsquigarrow H_2^1, \end{gathered} \tag{2.6}$$

а если $\xi(T_0) \notin M_1$, то также рассмотрим многозначное отображение

$$\begin{gathered} U_2(\tau, v) = \Bigl\{u \in U_0 \ : \ \Pi S(T_0 - \tau)Q_1[K_1u - K_2v] - \gamma(T_0, \tau) \in \alpha(T_0, \tau, v)[M_1 - \xi(T_0)]\Bigr\}, \\ U_2(\tau, v)\colon [0, T_0] \times V_0 \rightsquigarrow H_2^1. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Пусть $v(\tau)$ — произвольная измеримая функция из $[0, T_0]$ в V_0. В силу теоремы о прообразе (см. [27, теорема 8.2.9]) многозначные отображения $U_1(\tau, v)$ (2.6), $U_2(\tau, v)$ (2.7), $U_1(\tau, v(\tau)) : \tau \in [0, t] \rightsquigarrow H_2^1$, $U_2(\tau, v(\tau)) : \tau \in [0, t] \rightsquigarrow H_2^1$ измеримы. В силу теоремы измеримого выбора (см. [27, теорема 8.1.3]) эти многозначные отображения имеют измеримые селекторы $u_1(\tau, v)$, $u_2(\tau, v)$,

$u_{1,v}(\tau)$, $u_{2,v}(\tau)$ соответственно. Заметим, если многозначное отображение $U_j(\tau,v)$ $(j=1,2)$ имеет суперпозиционно измеримый селектор $u_j(\tau,v)$ (см. определение в [28, п. 17.8]), функция $u_{j,v}(\tau)=u_j(\tau,v(\tau))$ является измеримым селектором многозначного отображения $U_j(\tau,v(\tau))$. Например, суперпозиционная измеримость имеет место, если $u_j(\tau,v)$ является отображением Каратеодори, т. е. непрерывным по v.

В случае $\xi(T_0)\in M_1$ управление преследователя $u(\tau)$ на промежутке $[0,T_0]$ положим равным измеримому селектору $u_{1,v}(\tau)$ многозначного отображения $U_1(\tau,v(\tau))$. При таком выборе управления преследователя динамический вектор $Ay(t)$ системы (1.1), (1.3) будет приведен на терминальное множество M (2.1) в момент T_0 при любых допустимых управлениях убегающего, так как $\Pi Ay(T_0)=\xi(T_0)\in M_1$.

Теперь рассмотрим случай $\xi(T_0)\notin M_1$. Как и в [12; 13], существует момент времени $t_*\in(0,T_0]$ такой, что

$$\int\limits_0^{t_*}\alpha(T_0,\tau,v(\tau))d\tau=1. \tag{2.8}$$

Управление преследователя $u(\tau)$ на промежутке $[0,t_*)$ положим равным измеримому селектору $u_{2,v}(\tau)$ многозначного отображения $U_2(\tau,v(\tau))$, а на промежутке $[t_*,T_0]$ — равным измеримому селектору $u_{1,v}(\tau)$ многозначного отображения $U_1(\tau,v(\tau))$. При таком выборе управления преследователя динамический вектор $Ay(t)$ системы (1.1), (1.3) будет приведен на терминальное множество M (2.1) в момент T_0 при любых допустимых управлениях убегающего. Действительно, с использованием (2.2), (2.6)–(2.8) получаем

$$\Pi Ay(T_0)=\xi(T_0)+\int\limits_0^{t_*}\big\{\Pi S(T_0-\tau)Q_1[K_1u_{2,v}(\tau)-K_2v(\tau)]-\gamma(T_0,\tau)\big\}d\tau,$$

$$\Pi Ay(T_0)\in\xi(T_0)+\int\limits_0^{t_*}\alpha(T_0,\tau,v(\tau))[M_1-\xi(T_0)]d\tau=\int\limits_0^{t_*}\alpha(T_0,\tau,v(\tau))M_1d\tau.$$

Здесь интеграл от многозначного отображения понимается в смысле Ауманна [27, разд. 8.6], т. е. как множество интегралов от интегрируемых селекторов отображения. В силу теоремы I.6.13 [29], где в качестве вероятностной меры на отрезке $[0,t_*]$ используется мера Лебега — Стилтьеса, порожденная абсолютно непрерывной, монотонно неубывающей и неотрицательной функцией $F(\tau)=\int_0^\tau\alpha(T_0,s,v(s))ds$, имеем $\Pi Ay(T_0)\in M_1$. Следовательно, $Ay(T_0)\in M$.

Теорема доказана.

Покажем, как выглядят условия теоремы 2 в случае динамической системы, описываемой явным параболическим уравнением (1.2) с начальным условием

$$y(0)=q. \tag{2.9}$$

Здесь $H_1=H_2=H_2^1=H$, операторы P_1,Q_1,G — единичные, операторы P_2,Q_2 — нулевые; оператор B имеет плотную область определения D_B, $\overline{D}_B=H$; оператор $-B$ является генератором полугруппы класса C_0; оператор $\widetilde{B}$ является секториальным. В формуле (2.1), определяющей терминальное множество M, M_0 — замкнутое линейное подпространство в H, M_1 — выпуклое замкнутое ограниченное множество из ортогонального дополнения $M_0^\perp$ к M_0 в H; Π — ортопроектор в H на $M_0^\perp$. Решение задачи Коши (1.2), (2.9) понимаем в сильном смысле, т. е. как удовлетворяющее уравнению почти всюду. Если $q\in D_B$, $\mathrm{Im}K_j\subset D_B$, $j=1,2$, $u(t)\in L_2(0,T;U)$, $v(t)\in L_2(0,T;V)$, то единственное решение задачи Коши (1.2), (2.9) допускает представление

$$y(t)=S(t)q+\int\limits_0^{t}S(t-\tau)[K_1u(\tau)-K_2v(\tau)]d\tau.$$

Сформулируем следствие из теоремы 2.

Следствие 1. *Пусть для конфликтно-управляемой системы* (1.2), (2.9) *с терминальным множеством* M (2.1) *оператор* $-\widetilde{B}$ *является секториальным, выполнено условие Понтрягина, начальный вектор* q *в* (2.9) *и операторы* K_1, K_2 *в* (1.2) *удовлетворяют соотношениям* $q \in D_B$, $K_1 U_0 \subset D_B$, $K_2 V_0 \subset D_B$ *и для некоторого измеримого по* $\tau \in [0,t]$ $(t \geq 0)$ *селектора* $\gamma(t,\tau) \in \Omega_0(t,\tau)$ *множество* Υ (2.5) *имеет непустое пересечение с отрезком* $[0,T]$. *Тогда траектория системы* (1.2), (2.9) *может быть приведена на терминальное множество* M (2.1) *в момент* $T_0 \in \Upsilon \cap [0,T]$.

Заметим, что оператор $-\widetilde{B}$ является секториальным тогда и только тогда, когда справедливо ограничение (1.5) на его резольвенту.

3. Приложения к уравнениям в частных производных

Ряд фактов теории уравнений в частных производных можно получить, исходя из общих положений теории дифференциально-операторных уравнений в абстрактных банаховых или гильбертовых пространствах. Рассмотрим приложения полученных выше абстрактных результатов теории дифференциальных игр в гильбертовых пространствах к конфликтно-управляемым процессам, описываемым уравнениями в частных производных.

3.1. Конфликтно-управляемый процесс теплопроводности

Распространение тепла в стационарной однородной среде с управляемыми распределенными тепловыми источниками и утечками в простейшем случае описывается одномерным уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial}{\partial t} y(t,x) = \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} y(t,x) + K(u(t,x) - v(t,x)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq \pi. \tag{3.1}$$

Для иллюстрации метода рассматриваем это уравнение на отрезке $0 \leq x \leq \pi$ с краевыми условиями Дирихле

$$y(t,0) = y(t,\pi) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3.2}$$

и начальным условием

$$y(0,x) = q(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \tag{3.3}$$

где $q(x) \in L_2(0,\pi)$; $K \in \mathcal{L}(L_2(0,\pi))$; $u(t,x)$ и $v(t,x)$ — управляющие воздействия преследователя и убегающего, $u(t,x), v(t,x) \in L_2([0,T] \times [0,\pi]) = L_2(0,T; L_2(0,\pi))$. Допустимые управления преследователя (источника) и убегающего (утечки) удовлетворяют ограничениям $u(t,\cdot) \in U_0$, $v(t,\cdot) \in V_0$, где U_0, V_0 — выпуклые замкнутые ограниченные множества в пространстве $L_2(0,\pi)$. В дальнейшем в качестве U_0, V_0 будем рассматривать замкнутые шары в $L_2(0,\pi)$ с центром в нуле и радиусом ϱ_1, ϱ_2 соответственно. *Цель игры в системе* (3.1)–(3.3) состоит в приведении состояния $y(t,x)$ в ноль за конечное время, не превосходящее T, в классе допустимых управлений преследователя при любом допустимом управлении убегающего.

Первыми работами по позиционным игровым задачам для линейных параболических систем, в частности для системы (3.1)–(3.3), являются фундаментальные работы Ю. С. Осипова [10; 11]. В этих работах правило экстремального прицеливания Н. Н. Красовского распространяется на распределенные системы для получения достаточных условий окончания игры. Базовым аппаратом в этой методике является аппарат опорных функций. Здесь для исследования игровой задачи в параболической системе мы применяем метод разрешающих функций [14; 15], в основе которого лежат обратные функционалы Минковского. Идейно этот метод примыкает к первому прямому методу Л. С. Понтрягина, управление преследователя строится на основе теорем измеримого выбора и не является позиционным, т. е. не создает проблем, связанных с последующим решением нелинейных уравнений динамики.

В вещественном пространстве $H = U = V = L_2(0,\pi)$ задача (3.1)–(3.3) записывается в абстрактной форме (1.2), (2.9) с оператором

$$Bw = -\frac{d^2w(x)}{dx^2}, \quad D_B = \{w(x) \in W_2^2(0,\pi),\ w(0) = w(\pi) = 0\}, \tag{3.4}$$

и операторами $K_1 = K_2 = K$. Через $W_2^m(0,\pi)$ обозначаем пространство Соболева функций, которые принадлежат $L_2(0,\pi)$ вместе со своими обобщенными производными до порядка m включительно. Придерживаясь подхода, принятого в [18] при исследовании распределенных управляемых систем, *решение* $y(t,x)$ *смешанной задачи* (3.1)–(3.3) будем понимать в смысле решения абстрактной задачи (1.2), (2.9), т. е. $y(t,x) \in D_B$ при почти всех $t \in [0,T]$, $y(t,\cdot) \in W_2^1(0,T; L_2(0,\pi))$ и соотношения (3.1)–(3.3) удовлетворяются при почти всех $t \in [0,T]$, $x \in [0,\pi]$. Как уже упоминалось во введении и в разд. 1, здесь мы решаем игровую задачу в более узком классе сильных решений системы (3.1)–(3.3), в отличие от движений (слабых решений) из работ Ю. С. Осипова [10;11]. Терминальное множество (2.1) есть $M = \{0\}$, $M_0^\perp = H$, $M_0 = \{0\}$, $M_1 = \{0\}$, $\Pi = E$.

Проверим выполнение условий следствия 1 для дифференциальной игры в системе (3.1)–(3.3). Пространство $\widetilde{H} = \widetilde{U} = \widetilde{V}$ есть комплексное пространство $L_2(0,\pi)$. Оператор $\widetilde{B}$ определяется тем же самым дифференциальным выражением, что и оператор B (3.4), с краевыми условиями Дирихле. Оператор $-\widetilde{B}$ является секториальным; его спектр состоит из простых собственных чисел $\lambda_k = -k^2$ с предельной точкой $-\infty$; для комплексных чисел $\lambda \neq \lambda_k$ существует резольвента

$$R_{-\widetilde{B}}(\lambda)w = (-\widetilde{B} - \lambda E)^{-1}w = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_k \sin kx}{\lambda + k^2}.$$

Через w_k мы обозначаем коэффициенты Фурье в разложении функции $w(x) \in L_2(0,\pi)$:

$$w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k \sin kx, \quad w_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} w(x) \sin kx dx, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Находим полугруппу с генератором $-B$:

$$S(t)w = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 t} w_k \sin kx.$$

Для простоты изложения рассматриваем случай самосопряженного оператора K. Справедливо ортогональное разложение: $H = \mathrm{Ker}K \oplus \overline{\mathrm{Im}K}$. Пусть Π_0 — оператор ортогонального проектирования в H на подпространство $H_0 = \overline{\mathrm{Im}K}$. Для оператора K введем блок $K_0 = \Pi_0 K \Pi_0 \in \mathcal{L}(H_0)$. Существуют обратный оператор K_0^{-1} с областью определения $D_{K_0^{-1}} = \mathrm{Im}K$. Предположим, что $\mathrm{Im}K \subset D_B$. Например, в качестве оператора K можно взять оператор B^{-1}, оператор S_T, ортопроектор Π_k на линейную оболочку $\sin kx$ и т. д. Если $\varrho_1 \geq \varrho_2$, то справедливо условие Понтрягина и $0 \in \Omega_0(t,\tau)$. Селектор $\gamma(t,\tau) \in \Omega_0(t,\tau)$ выберем тождественно равным нулю. Пусть в начальном условии (3.3) $q(x) \in D_B$ (3.4). Исключим тривиальный случай и предположим, что функция $q(x)$ отлична от нуля на некотором множестве из $[0,\pi]$ положительной меры. Находим $\xi(t) = S(t)q$. Относительно начальной функции $q(x)$ также предположим, что $S(\tau)q \in \mathrm{Im}K$ для всех $\tau \in [0,T]$.

Уточним вид многозначного отображения (2.3):

$$\Lambda(t,\tau,v) = \{\widetilde{\alpha} \geq 0\ :\ \widetilde{\alpha} K_0^{-1} S(\tau) q \in \Pi_0(U_0 + v)\}.$$

Вектор-функция $K_0^{-1}S(\tau)q$ от аргумента $\tau \in [0,T]$ со значениями в $L_2(0,\pi)$ измерима. Пусть $\varrho_1 > \varrho_2$. Разрешающий функционал (2.4) имеет следующий вид:

$$\alpha(t,\tau,v) = \frac{\langle K_0^{-1}S(\tau)q, \Pi_0 v\rangle + \sqrt{\langle K_0^{-1}S(\tau)q, \Pi_0 v\rangle^2 + \|K_0^{-1}S(\tau)q\|^2(\varrho_1^2 - \|\Pi_0 v\|^2)}}{\|K_0^{-1}S(\tau)q\|^2}. \tag{3.5}$$

Здесь и ниже норму $\|\cdot\|$ и скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ рассматриваем в пространстве $L_2(0,\pi)$.

Множество V_* — это множество функций $v(\tau,x) \in L_2([0,T]\times[0,\pi])$ таких, что $\|v(\tau,\cdot)\| \le \varrho_2$. Множество $\Upsilon(q,0)$ (2.5) есть

$$\Upsilon = \Upsilon(q,0) = \left\{ t \in [0,T] \ : \ \inf_{v\in V_*} \int_0^t \alpha(t,\tau,v(\tau))d\tau \ge 1 \right\}.$$

Точная нижняя грань достигается при $v(\tau,x) = v_*(\tau,x)$:

$$v_*(\tau,x) = -\varrho_2 \frac{K_0^{-1}S(\tau)q}{\|K_0^{-1}S(\tau)q\|}, \quad \alpha(t,\tau,v_*(\tau)) = \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\|K_0^{-1}S(\tau)q\|}.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{\|K_0^{-1}S(\tau)q\|} \le \frac{\|K\|}{\|S(\tau)q\|} \le \frac{\|K\|}{\|S(T)q\|}.$$

Имеем представление для множества Υ:

$$\Upsilon = \Upsilon(q,0) = \left\{ t \in [0,T] \ : \ \int_0^t \frac{d\tau}{\|K_0^{-1}S(\tau)q\|} \ge \frac{1}{\varrho_1 - \varrho_2} \right\}. \tag{3.6}$$

Понятно, что найдутся функции $q(x)$, удовлетворяющие указанным ранее ограничениям, для которых множество $\Upsilon(q,0)$ не является пустым. В дальнейшем будем предполагать, что для начальной функции в (3.3) выполнено это ограничение. Множество Υ (3.6) есть $\Upsilon = [T_0, T]$, где число T_0 определяется из равенства

$$\int_0^{T_0} \frac{d\tau}{\|K_0^{-1}S(\tau)q\|} = \frac{1}{\varrho_1 - \varrho_2}. \tag{3.7}$$

Таким образом, для игровой задачи в системе (3.1)–(3.3) выполнены условия следствия 1. Наименьшее время T_0 приведения траектории системы в ноль определяется из соотношения (3.7). Многозначные отображения (2.6), (2.7) представляют собой следующие выражения:

$$U_1(\tau,v) = \{u(x) \in U_0 \ : \ Ku = Kv\},$$

$$U_2(\tau,v) = \{u(x) \in U_0 \ : \ Ku = Kv - \alpha(T_0,\tau,v)S(\tau)q\}, \quad (\tau,v) \in [0,T_0]\times V_0.$$

Имеем суперпозиционно измеримые селекторы этих отображений

$$u_1(\tau,v) = \Pi_0 v \in U_1(\tau,v), \quad u_2(\tau,v) = \Pi_0 v - \alpha(T_0,\tau,v)K_0^{-1}S(\tau)q \in U_2(\tau,v), \quad (\tau,v) \in [0,T_0]\times V_0.$$

Для любого допустимого управления $v(\tau,x)$ строим управление

$$u(\tau,x) = \begin{cases} \Pi_0 v(\tau,x) - \alpha(T_0,\tau,v(\tau))K_0^{-1}S(\tau)q(x), \ (\tau,x) \in [0,t_*)\times[0,\pi], \\ \Pi_0 v(\tau,x), \ (\tau,x) \in [t_*,T_0]\times[0,\pi], \end{cases} \tag{3.8}$$

где t_* есть момент переключения с управления $u(\tau,x) = u_2(\tau,v(\tau))$ на управление $u(\tau,x) = u_1(\tau,v(\tau))$, который определяется с помощью соотношения (2.8).

Таким образом, мы получили следующий результат.

Утверждение 1. *Пусть для конфликтно-управляемой системы* (3.1)–(3.3) *выполняются следующие предположения: начальная функция* $q(x) \in W_2^2(0,\pi)$ *отлична от нуля на некотором множестве из* $[0,\pi]$ *положительной меры,* $q(0) = q(\pi) = 0$*; оператор* K *является самосопряженным,* $\mathrm{Im}K \subset D_B$*,* $S(\tau)q \in \mathrm{Im}K$ *для всех* $\tau \in [0,T]$*; области управления* U_0 *и* V_0 *суть замкнутые шары в* $L_2(0,\pi)$ *с центром в нуле и радиусов* ϱ_1 *и* ϱ_2*,* $\varrho_1 > \varrho_2$*; множество* $\Upsilon(q,0)$ (3.6) *не пусто. Тогда траектория системы* (3.1)–(3.3) *может быть приведена в ноль за наименьшее время* T_0*, где* T_0 *определено в* (3.7)*, при любом допустимом управлении* $v(t,x) \in V_0$ *и допустимом управлении* $u(t,x) \in U_0$ *вида* (3.8)*, где момент* t_* *переключения управления удовлетворяет соотношению* (2.8) *с разрешающим функционалом* $\alpha(t,\tau,v)$ (3.5).

3.2. Дифференциальная игра в системе не типа Ковалевской

Покажем, как полученные абстрактные результаты применяются к управлению системами, описываемыми дифференциальными уравнениями в частных производных, не принадлежащими типу Ковалевской. Исследуем конфликтно-управляемую систему, описываемую дифференциальным уравнением в частных производных

$$-\frac{\partial}{\partial t}\Big[\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} + y(t,x)\Big] + \frac{\partial^4 y(t,x)}{\partial x^4} = K(u(t,x) - v(t,x)), \quad 0 \le t \le T, \quad 0 \le x \le \pi, \tag{3.9}$$

с краевыми условиями

$$y(t,0) = y(t,\pi) = \frac{\partial^2 y(t,0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y(t,\pi)}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{3.10}$$

и начальным условием

$$-\Big(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y\Big)(0,x) = q(x), \quad 0 \le x \le \pi, \tag{3.11}$$

где $q(x) \in L_2(0,\pi)$, $u(t,x), v(t,x) \in L_2([0,T]\times[0,\pi])$, $K \in \mathcal{L}(L_2(0,\pi))$. Как отмечалось в [22], интерес к подобным уравнениям, а также уравнениям более общего вида, у которых порядок дифференциального оператора по пространственным переменным при дифференцировании по времени в два раза ниже порядка дифференциального оператора по пространственным переменным в слагаемом без дифференцирования по времени, вызван прикладными задачами. Например, при описании модели волн изгиба в стержне [30, гл. 2, § 8, п. 8.1] таким является уравнение для смещения. Как в первом приложении, рассмотренном выше, допустимые управления преследователя $u(t,x)$ и убегающего $v(t,x)$ удовлетворяют ограничениям $u(t,\cdot) \in U_0$, $v(t,\cdot) \in V_0$, где U_0, V_0 — замкнутые шары в $L_2(0,\pi)$ с центром в нуле и радиусом ϱ_1, ϱ_2 соответственно. *Цель игры в системе* (3.9)–(3.11) состоит в приведении динамического вектора $-\dfrac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} - y(t,x)$ в ноль за конечное время, не превосходящее T, в классе допустимых управлений преследователя при любом допустимом управлении убегающего.

В вещественном пространстве $H_1 = H_2 = U = V = L_2(0,\pi)$ задача (3.9)–(3.11) записывается в абстрактной форме (1.1), (1.3) с дифференциальными операторами

$$\begin{gathered} Aw = -\frac{d^2 w(x)}{dx^2} - w(x), \quad Bw = \frac{d^4 w(x)}{dx^4}, \\ D_A = \big\{w(x) \in W_2^2(0,\pi),\ w(0) = w(\pi) = 0\big\}, \\ D_B = \big\{w(x) \in W_2^4(0,\pi),\ w(0) = w(\pi) = w''(0) = w''(\pi) = 0\big\}, \end{gathered} \tag{3.12}$$

и операторами $K_1 = K_2 = K$. Оператор A является вырожденным: $\mathrm{Ker}A = \mathrm{Lin}\{\sin x\}$. *Решение смешанной задачи* (3.9)–(3.11) есть функция $y(t,x) \in D_B$ при почти всех $t \in [0,T]$ такая, что $y(t,\cdot) \in W_2^1(0,T; L_2(0,\pi))$ и соотношения (3.9)–(3.11) удовлетворяются при почти всех $t \in [0,T]$, $x \in [0,\pi]$.

Комплексная оболочка $\widetilde{H}_1 = \widetilde{H}_2 = \widetilde{U} = \widetilde{V}$ пространства $H_1 = H_2 = U = V$ есть комплексное пространство $L_2(0,\pi)$. Комплексные расширения $\widetilde{A}, \widetilde{B}$ операторов A, B определяются теми же самыми дифференциальными выражениями и краевыми условиями, что и операторы A, B (3.12), где $W_2^2(0,\pi), W_2^4(0,\pi)$ — комплексные пространства Соболева порядков $2, 4$. Пучок операторов $\lambda\widetilde{A} + \widetilde{B}$, определенный на $\widetilde{D} = D_{\widetilde{B}}$, имеет резольвенту

$$(\lambda\widetilde{A} + \widetilde{B})^{-1}w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_k \sin kx}{k^4 + \lambda(k^2-1)}, \quad \lambda \neq \frac{k^4}{1-k^2}, \quad k = 2, 3, \ldots$$

Псевдорезольвента $\widetilde{A}(\lambda\widetilde{A} + \widetilde{B})^{-1}$ удовлетворяет оценке (1.4) в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda \geq 0$.

Находим линеалы D_1, D_2 и подпространства H_2^1, H_2^2, отвечающие разложениям $D = D_B$ и $H_2 = L_2(0,\pi)$ (1.7):

$$D_1 = D_B \cap \mathrm{Ker}A^{\perp}, \quad D_2 = H_2^2 = \mathrm{Ker}A = \mathrm{Lin}\{\sin x\}, \quad H_2^1 = \mathrm{Ker}A^{\perp} = AD_A.$$

Операторы P_1, Q_1 (1.6) являются ортогональными проекторами; они проектируют на $D_B \cap \mathrm{Ker}A^{\perp}$, $\mathrm{Ker}A^{\perp}$ соответственно ортогонально $\mathrm{Ker}A$. Оператор G (1.8) допускает замкнутое расширение $\overline{G}$ на D_A, и существует ограниченный обратный $\overline{G}^{-1} \in \mathcal{L}(L_2(0,\pi))$:

$$\overline{G}^{-1}w = w_1 \sin x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{w_k \sin kx}{k^2-1}.$$

Сужение $\overline{G}^{-1}$ на $AD\dot{+}\mathrm{Lin}\{\sin x\} = D_A$ есть G^{-1}. Оператор W (1.10) порождает полугруппу S_τ класса C_0 в пространстве $\mathcal{L}(L_2(0,\pi))$:

$$S(\tau)w = w_1 \sin x + \sum_{k=2}^{\infty} e^{\alpha_k \tau} w_k \sin kx, \quad \alpha_k = \frac{k^4}{1-k^2}. \tag{3.13}$$

Утверждение 2. *Пусть для конфликтно-управляемой системы* (3.9)–(3.11) *выполняются следующие предположения: начальная функция* $q(x) \in W_2^2(0,\pi)$ *отлична от нуля на некотором множестве из* $[0,\pi]$ *положительной меры,* $q(0) = q(\pi) = 0$, $\int_0^\pi q(x)\sin x dx = 0$*; оператор* K *является самосопряженным,* $\mathrm{Im}K \subset D_A$, $S(\tau)q \in \mathrm{Im}K$ *для всех* $\tau \in [0,T]$, *где* $S(\tau)$ *— полугруппа* (3.13)*; области управления* U_0 *и* V_0 *суть замкнутые шары в* $L_2(0,\pi)$ *с центром в нуле и радиусом* ϱ_1 *и* ϱ_2, $\varrho_1 > \varrho_2$*; множество* $\Upsilon(q,0)$ (3.6) *не пусто. Тогда динамический вектор* $-\dfrac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} - y(t,x)$ *системы* (3.9)–(3.11) *может быть приведен в ноль за наименьшее время* T_0, *где* T_0 *определено в* (3.7), *при любом допустимом управлении* $v(t,x) \in V_0$ *и допустимом управлении* $u(t,x) \in U_0$ *вида* (3.8), *где момент* t_* *переключения управления удовлетворяет соотношению* (2.8) *с разрешающим функционалом* $\alpha(t,\tau,v)$ (3.5).

Доказательство. Проверим выполнение условий теоремы 2 для дифференциальной игры в системе (3.9)–(3.11) с терминальным множеством (2.1), где $M = \{0\}$, $M_0^{\perp} = H_2^1 = \mathrm{Ker}A^{\perp} = AD_A$, $M_0 = \{0\}$, $M_1 = \{0\}$, $\Pi = E$. Выше было установлено, что для системы (3.9)–(3.11) оценка (1.4) выполнена и оператор G^{-1} ограничен на своей области определения, совпадающей с D_A.

Если выполнены условия утверждения, то $q(x) \in D_A \cap \mathrm{Ker}A^{\perp} = AD$, $Q_1\mathrm{Im}K \subset AD$ и справедливо условие Понтрягина ($0 \in \Omega_0(t,\tau)$). В данном приложении в роли $S(\tau)$ выступает полугруппа (3.13). Проводя рассуждения, аналогичные тем, которые использовались при доказательстве утверждения 1, получаем, что разрешающий функционал (2.4) имеет вид (3.5), множество $\Upsilon(q,0)$ (2.5) принимает вид (3.6). Для начальных функций $q(x)$ с достаточно малой нормой $\Upsilon(q,0) \neq \varnothing$. В силу теоремы 2 игра в системе (3.9)–(3.11) может быть окончена в любой момент времени из множества $\Upsilon(q,0)$ (2.5). Наименьшее время окончания игры есть $\min\{t \in \Upsilon(q,0)\} = T_0$, где T_0 определено в (3.7). Из доказательства теоремы 2 следует, что для любого допустимого управления убегающего $v(\tau,x)$ управление преследователя $u(\tau,x)$ строится по формуле (3.8), где момент t_* переключения управления удовлетворяет соотношению (2.8) с разрешающим функционалом $\alpha(t,\tau,v)$ (3.5).

Утверждение доказано.

Если в системе (3.9)–(3.11) рассмотреть оператор $K = \Pi_k$ — ортопроектор на линейную оболочку $\sin kx$, $k > 1$, то $q(x) = q_k \sin kx$, K_0 — единичный оператор, разрешающий функционал $\alpha(t,\tau,v)$ (3.5) есть

$$\alpha(t,\tau,v) = \varrho_1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} v_k(\tau)\mathrm{sign} q_k, \quad v_k(\tau)\sin kx = \Pi_k v(\tau),$$

а множество $\Upsilon(q,0)$ (3.6) принимает вид

$$\Upsilon(q,0) = [\alpha_k^{-1} d_k, \infty) \cap [0,T], \quad d_k = \ln(\varrho_1 - \varrho_2) - \ln(\varrho_1 - \varrho_2 - \alpha_k\|q\|).$$

Если $\|q\| \le \alpha_k^{-1}(\varrho_1 - \varrho_2)(1 - e^{-\alpha_k T})$, то $\Upsilon(q,0) \ne \varnothing$. Находим наименьшее время окончания игры

$$T_0 = \alpha_k^{-1}\big[\ln(\varrho_1 - \varrho_2) - \ln(\varrho_1 - \varrho_2 - \alpha_k\|q\|)\big].$$

Для любого допустимого управления убегающего $v(\tau,x)$ управление преследователя $u(\tau,x)$ строится по формуле

$$u(\tau,x) = \begin{cases} v_k(\tau)\sin kx\Big[1 - e^{\alpha_k \tau}\Big(\varrho_1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} v_k(\tau)\mathrm{sign} q_k\Big)\Big], & (\tau,x) \in [0,t_*) \times [0,\pi], \\ v_k(\tau)\sin kx, & (\tau,x) \in [t_*,T_0] \times [0,\pi], \end{cases}$$

где момент t_* переключения управления определяется из соотношения

$$\varrho_1 t_* + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{sign} q_k \int\limits_0^{t_*} v_k(\tau)d\tau = 1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Isaacs R.** Differential Games. New York: John Wiley, 1965. 480 p.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 455 с.
3. **Понтрягин Л.С.** Избранные научные труды. М.: Наука, 1988. Т. 2. 576 с.
4. **Субботин А.И.** Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
5. **Subbotin A.I.** Generalized solutions of first order PDEs: The dynamic optimization perspective. Boston: Birkhauser, 1995. 312 p.
6. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации. Ижевск: Институт компьютер. исслед., 2003. 336 с.
7. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М: Наука, 1981. 288 с.
8. **Subbotina N.N.** The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equation and its applications in dynamic optimization // J. Math. Sci. 2006. Vol. 135, № 3. P. 2955–3091.
9. **Никольский М.С.** Об управлении при наличии противодействия // Вестн. Моск. ун-та. 1972. № 1. С. 67–72.
10. **Осипов Ю.С.** К теории дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223, № 6. С. 1314–1317.
11. **Осипов Ю.С.** Позиционное управление в параболических системах // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, № 2. С. 195–201.

12. **Власенко Л.А., Чикрий А.А.** Метод разрешающих функционалов для одной динамической игры в системе типа Соболева // Проблемы управления и информатики. 2014. № 4. С. 5–14.
13. **Власенко Л.А., Чикрий А.А.** Об одной дифференциальной игре в системе с распределенными параметрами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 71–80.
14. **Chikrii A.A.** Conflict-controlled processes. Boston; London; Dordrecht: Springer, 1997. 424 p.
15. **Чикрий А.А.** Об одном аналитическом методе в динамических играх сближения // Тр. МИАН. 2010. Т. 271. С. 76–92.
16. **Иосида К.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.
17. **Pazy A.** Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verlag, 1983. 279 p.
18. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 415 с.
19. **Хилле Э., Филлипс Р.** Функциональный анализ и полугруппы. М.: Иностр. лит., 1962. 830 с.
20. **Крейн С.Г.** Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.
21. **Власенко Л.А., Мышкис А.Д., Руткас А.Г.** Об одном классе дифференциальных уравнений параболического типа с импульсными воздействиями // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 2. С. 222–231.
22. **Власенко Л.А., Руткас А.Г.** Об одном классе импульсных функционально-дифференциальных уравнений с неатомарным разностным оператором // Мат. заметки. 2014. Т. 95, № 1. С. 37–49.
23. **Власенко Л.А.** Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. Днепропетровск: Системные технологии, 2006. 273 с.
24. **Хенри Д.** Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985. 367 с.
25. **Мизохата С.** Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977. 504 с.
26. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 744 с.
27. **Aubin J.-P., Frankowska H.** Set-valued analysis. Boston: Birkhäuser, 1990. 461 p.
28. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский. М.: Наука, 1966. 500 с.
29. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
30. **Бреховских Л.М., Гончаров В.В.** Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). М.: Наука, 1982. 336 с.

Власенко Лариса Андреевна
д-р тех. наук, профессор,
профессор Харьковского нац. университета им. В.Н. Каразина
e-mail: lara@rutrus.com

Поступила 24.01.15

Руткас Анатолий Георгиевич
д-р физ.-мат. наук, профессор,
зав. кафедрой Харьковского нац. университета им. В.Н. Каразина
e-mail: anatoly@rutrus.com

Чикрий Аркадий Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор,
член- корр. НАН Украины
зав. отделом Ин-та кибернетики им. В. М. Глушкова НАНУ
e-mail: chik@insyg.kiev.ua

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.977

ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ ГАРАНТИРУЮЩЕГО ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ[1]

Н. Л. Григоренко, Ю. А. Кондратьева, Л. Н. Лукьянова

Для линейной управляемой системы с ограничением на управление рассматривается задача терминального управления в целевую точку при принадлежности начальной точки процесса известному множеству и отсутствии информации о том, какая точка из множества является начальной. Приведены достаточные условия существования решения задачи в классе гарантирующих пакетов программ Ю.С. Осипова и А.В. Кряжимского. Приведены результаты расчета модельного примера.

Ключевые слова: управление, неполная информация, линейные системы, гарантирующие пакеты программ, программное управление.

N. L. Grigorenko, Yu. A. Kondrat'eva, L. N. Luk'yanova. The problem of finding a guaranteeing program control for a linear system with incomplete information.

For a linear control system with constrained control, the problem of terminal control to a target point is considered. The starting point of the process belongs to a known set, but there is no information on which point of the set is the starting point. Sufficient conditions are given for the existence of a solution of the problem in the class of Yu.S. Osipov and A.V. Kryazhimskii's guaranteeing program packages. Calculation results are presented for a model example.

Keywords: control, incomplete information, linear systems, guaranteeing program packages, program control.

Введение

В настоящей работе рассматривается задача терминального управления линейной управляемой системой с ограничением на управление при принадлежности начальной точки процесса известному множеству и отсутствии информации о том, какая точка из множества является начальной. Функция наблюдения задачи зависит от фазовых координат. Ее значение отлично от нулевого только в окрестности целевой точки. Приведены достаточные условия существования решения такой задачи в классе гарантирующих пакетов программ Ю. С. Осипова и А. В. Кряжимского [1–3]. Метод пакетов программ восходит к технике неупреждающих стратегий (квазистратегий) из теории диффенциальных игр [4–6], в его основе — утверждение об эквивалентности задач гарантирующего управления, поставленных в классе позиционных стратегий и в классе пакетов программ, интерпретируемых как идеализированные процедуры управления. Пакет программ — это семейство программных управлений, параметризованное допустимыми начальными состояниями и обладающее свойством неупреждаемости по отношению к реализациям неполного сигнала о наблюдаемых состояниях [1].

Предлагаемые в работе конструкции пакетов программ предполагают выполнение теоремы существования решения задачи управляемости линейных управляемых систем с ограниченным управлением [7–9].

Способы построения таких управлений для конкретных классов моделей, при общих условиях на начальные и конечные значения траекторий, опираются на методы теории оптимального управления, теории обратных задач динамики управляемых систем [6–11], параметрические методы построения ограниченных по норме управлений [12–17], методы нахождения гарантированного времени окончания процесса управления [12; 18–23].

[1]Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 14-11-00539).

Построенные в работе пакеты программ не обладают свойством единственности. Предлагаемые экстремальные задачи на конечном числе таких пакетов позволяют определить экстремальный пакет программ для заданного критерия качества.

1. Постановка задачи построения гарантирующего программного управления при неполной информации

Пусть движение вектора $x \in \mathbb{R}^n$ подчиняется системе уравнений

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) \in X_0 \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in P \subset \mathbb{R}^r, \quad t \in [0, \theta], \tag{1.1}$$

где X_0 — компактное множество, P — выпуклое компактное множество, $u(t)$ — параметр управления, A — $(n \times n)$-матрица, B — $(n \times r)$-матрица, θ — заданный момент времени, $\theta > 0$. Уравнение наблюдения имеет вид

$$y = C(x)x, \quad C(x) = \begin{cases} 0, & x \notin m + S_\ell(0), \\ E, & x \in m + S_\ell(0), \end{cases} \tag{1.2}$$

где $0, E$ — постоянные $(n \times n)$-матрицы, 0 — матрица с нулевыми элементами, E — единичная матрица, $S_\ell(0)$ — шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле радиуса ℓ, ℓ — положительная константа, $m \in \mathbb{R}^n$ — заданный вектор.

Целью процесса управления является приведение вектора $x(t)$ в множество $(m + S_\ell(0))$. Управления $u(t, y(t))$ — измеримые по Лебегу функции t со значением в множестве P.

При выборе управляющего параметра $u(t)$ доступна информация об управляемой системе (1.1), множествах X_0 и P, векторах m, $y(t) = C(x(t))x(t)$, константе ℓ.

З а д а ч а построения гарантирующего программного управления при неполной информации, оканчивающего процесс управления к моменту $T \le \theta$: Найти допустимое управление, для которого при неизвестной начальной позиции $x_0 \in X_0$ фазовый вектор системы (1.1) посещает множество $m + S_\ell(0)$ не позже момента времени $T \le \theta$.

2. Построение гарантирующего программного управления при неполной информации о начальной позиции

Решение задачи построения гарантирующего управления при неполной информации будем конструировать в классе пакетов программ [1; 2].

Обозначим $Y(t, t_1) = e^{(t-t_1)A}m + \int_t^{t_1} e^{(t-s)A}[-BP]ds$ — множество управляемости системы (1.1) на отрезке времени $[t, t_1]$ для конечного состояния m; (h_1, h_2) — скалярное произведение векторов h_1, h_2; $c(P, \psi)$ — опорную функцию множества P [7].

Пусть τ — длина отрезка времени $[t, t_1]$, т. е. $\tau = t_1 - t$. Тогда множество управляемости $Y(t, t_1)$ зависит только от длины отрезка τ и имеет вид

$$Y(t, t_1) = e^{-\tau A}m + \int_0^\tau e^{-sA}[-BP]ds,$$

а его опорная функция задается формулой

$$c(Y(t, t_1), \psi) = (m, e^{-\tau A^*}\psi) + \int_0^\tau c(P, -B^* e^{-sA^*}\psi)ds.$$

Определим функцию $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ соотношением [7]:

$$\varphi(\psi, \tau; z_0, m) = (m, e^{-\tau A^*}\psi) + (z_0, -\psi) + \int\limits_0^\tau c(P, -B^* e^{-sA^*}\psi) ds.$$

Предположение 1. *Для любого $z_0 \in E^n$ существует момент времени $\tau(z_0) \geq 0$ такой, что справедливо условие*

$$\varphi_0(\tau(z_0), z_0, m) = \min_{\psi \in S} \varphi(\psi, \tau(z_0); z_0, m) \geq 0, \tag{2.3}$$

где S — сфера в $\mathbb{R}^n$ радиуса единица с центром в начале координат.

Неравенство (2.3) является необходимым и достаточным условием управляемости системы (1) с ограничением на управление в виде компакта P из точки z_0 в целевую точку m (см. [7]). При его выполнении для любой начальной точки z_0 существует допустимое программное управление $u(t, y(t),\ z_0,\ m,\ \tau(z_0)) = \bar{u}$, переводящее траекторию $x(t, \bar{u}, z_0, m, \tau(z_0)) = \bar{x}(t)$ системы (1) из начальной точки z_0 в конечную точку m за время $\tau(z_0)$.

2.1. Алгоритм построения гарантирующего программного управления. Случай конечного множества начальных позиций

Предположение 2. *Множество $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ состоит из конечного числа точек $x_{01}, \ldots, x_{0N}$, N — натуральное число.*

Обозначим $i_1, i_2, \ldots, i_N$ — перестановку из N натуральных чисел $1, \ldots, N$.

О п р е д е л е н и е 1. Для задачи управления с неопределенностью по N начальным условиям (1.1), (1.2) задан пакет программ $\prod_{i_1, i_2, \ldots, i_N}$, если определены:

1) N положительных чисел $0 = T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots \leq T_N = T$;

2) правило формирования начальной позиции $x_{k-1 i_k}(T_{k-1})$ системы (1.1) и управляющей функции для k-го отрезка $[T_{k-1}, T_k], k = 1, \ldots, N$:

$$u_{1i_1}(t) = u_{1i_1}(t, y(t)), \quad t \in [0, T_1], \quad u_{ki_k}(t) = u_{ki_k}\big(t, u_{1i_1}(\cdot), \ldots, u_{(k-1)i_{k-1}}(\cdot), y(t)\big),$$

$$t \in [T_{k-1}, T_k], \quad k = 2, \ldots, N,$$

где $u_{ji_j}(\cdot)$ — измеримые по Лебегу функции, определенные на отрезке $[T_{j-1}, T_j], j = 1, \ldots, N$, $u_{ji_j}(t) \in P$.

О п р е д е л е н и е 2. Пакет $\prod_{i_1, i_2, \ldots, i_N}$ называется гарантирующим в задаче управления (1.1), (1.2) на множество $m + S_\ell(0)$ с неизвестной начальной позицией из множества X_0 к моменту времени T, если при таком управлении для траектории системы выполнено условие $x(t^*) \in m + S_\ell(0),\ t^* \leq T$.

Перейдем к описанию пакета программ $\prod_{i_1, i_2, \ldots, i_N}$ для задачи (1.1), (1.2). На каждом из N отрезков определения пакет $\prod_{i_1, i_2, \ldots, i_N}$ содержит информацию о временном отрезке, начальной позиции системы (1.1) и управляющей функции на этом временном отрезке. Начальная позиция системы (1.1) на k-м отрезке рассчитывается по начальным позициям и управлениям предыдущих $k - 1$ отрезков.

На первом отрезке пакета (активный индекс пакета i_1) для начального значения x_{0i_1} и конечного значения x_1 согласно предположению 1 существуют гарантированное время T_{1i_1} и управление $u(t, y(t), x_{0i_1}, x_1, T_{1i_1}) = \bar{u}_{1i_1}(t)$, при котором траектория системы (1.1)

$$x(t, \bar{u}_{1i_1}, x_{0i_1}, T_{1i_1}) = \bar{x}_{1i_1}(t)$$

удовлетворяет условию

$$\bar{x}_{1i_1}(T_{1i_1}) = m.$$

Положим в качестве первого отрезка пакета отрезок $[0, T_{1i_1}]$ начальной позиции первого отрезка x_{0i_1} управляющей функции $\bar{u}_{1i_1}(t)$.

На втором отрезке пакета (активный индекс пакета i_2) начальная позиция отрезка: решение системы (1.1) с начальным условием x_{0i_2} при управлении $u_{1i_1}(t),\ t \in [0, T_{i_1}]$ в момент $T_{i_1}: x_{i2}(T_{i_1})$. Для этой точки как для начальной в силу предположения 1 существуют момент времени T_{2i_2} и управление $u(t, y(t), \bar{x}_{1i_2}, m, T_{2i_2}) = \bar{u}_{2i_2}(t)$, определенное на интервале $[T_{1i_1}, T_{2i_2}]$, при котором траектория системы (1.1)

$$x(t, \bar{u}_{2i_2}, \bar{x}_{1i_2}, T_{2i_2}) = \bar{x}_{2i_2}(t)$$

удовлетворяет условию

$$\bar{x}_{2i_2}(T_{2i_2}) = m.$$

Положим в качестве второго отрезка пакета интервал $[T_{1i_1}, T_{2i_2}]$ начальной позиции $\bar{x}_{1i_2}(T_{1i_1})$ управляющей функции $\bar{u}_{2i_2}(t)$.

На третьем интервале пакета (активный индекс пакета i_3) начальная позиция отрезка: решение системы (1.1) с начальным условием x_{0i_3} при управлениях $u_{1i_1}(t),\ t \in [0, T_{1i_1}],\ u_{2i_2}(t)$, $t \in [T_{1i_1}, T_{2i_2}]$, в момент $T_{2i_2}: x_{2i_3}(T_{2i_2})$. Для этой точки как для начальной в силу предположения 1 существуют отрезок $[T_{2i_2}, T_{3i_3}]$ и управление $u(t, y(t), \bar{x}_{2i_3}, m, T_{3i_3}) = \bar{u}_{3i_3}(t)$, при котором траектория системы (1.1)

$$x(t, \bar{u}_{3i_3}, \bar{x}_{2i_2}, T_{3i_2}) = \bar{x}_{3i_3}(t)$$

удовлетворяет условию

$$\bar{x}_{3i_3}(T_{3i_3}) = m.$$

Положим в качестве третьего отрезка пакета интервал $[T_{2i_2}, T_{3i_3}]$ начальной позиции $\bar{x}_{2i_3}(T_{2i_2})$ управляющей функции $\bar{u}_{3i_3}(t)$.

На k-м интервале $4 \le k \le N$ (активный индекс пакета i_k), начальная позиция отрезка: решение системы (1.1) с начальным условием x_{0i_k} при управлениях $u_{1i_1}(t),\ t \in [0, T_{1i_1}],\ u_{2i_2}(t)$, $t \in [T_{1i_1}, T_{2i_2}], \ldots, u_{k-1i_{k-1}}(t),\ t \in [T_{k-2i_{k-2}}, T_{k-1i_{k-1}}]$, в момент $T_{k-1i_{k-1}}: x_{k-1i_k}(T_{k-1i_{k-1}})$. Для этого вектора как начальной позиции в силу предположения 1 существуют отрезок $[T_{k-1i_{k-1}}, T_{ki_k}]$ и управление $u(t, y(t), \bar{x}_{k-1i_k}, T_{ki_k}) = \bar{u}_{ki_k}(t)$, при котором траектория системы (1.1)

$$x(t, \bar{u}_{k-1i_k}, \bar{x}_{k-1i_k}, T_{ki_k}) = \bar{x}_{ki_k}(t)$$

удовлетворяет условию

$$\bar{x}_{ki_k}(T_{ki_k}) = m.$$

Положим в качестве k–го отрезка интервал $[T_{k-1i_{k-1}}, T_{ki_k}]$ начальной позиции $\bar{x}_{ki_k}(T_{k-1i_{k-1}})$ управляющей функции $\bar{u}_{ki_k}(t)$.

Таким образом, пакет $\prod_{i_1, i_2, \ldots, i_N}$ сформирован. Таких пакетов $N!$. В обозначениях определения 1 для пакета $\prod_{i_1, i_2, \ldots, i_N}$ имеем: $T_1 = T_{1i_1},\ T_2 = T_{2i_2},\ \ldots, T = T_{Ni_N}$. Управляющими функциями пакета на интервалах являются

$$u_{1i_1}(t),\quad t \in [0, T_{1i_1}],\quad u_{2i_2}(t),\quad t \in [T_{1i_1}, T_{2i_2}],\quad \ldots,\quad u_{Ni_N}(t),\quad t \in [T_{N-1i_{N-1}}, T_{Ni_N}].$$

Утверждение 1. *Если для системы* (1.1) *выполнены предположения* 1 *и* 2, *то в задаче управления с неполной информацией и функцией наблюдения* (1.2) *существует управление в форме гарантирующего пакета программ* $\prod_{i_1, i_2, \ldots, i_N}$ *при* $l = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применение управления в виде пакета $\prod_{i_1,i_2,\dots,i_N}$ гарантирует, что траектория системы (1.1) с начальным условием x_{0i_1} попадает в x_1 не позже чем в конце первого отрезка времени. Применение управления в виде пакета $\prod_{i_1,i_2,\dots,i_N}$ гарантирует, что траектория системы (1.1) с начальным условием x_{0i_2} попадает в x_1 не позже чем в конце второго отрезка времени. Применение управления в виде пакета $\prod_{i_1,i_2,\dots,i_N}$ гарантирует, что траектория системы (1.1) с начальным условием x_{0i_k} попадает в m не позже чем в конце k-го отрезка времени, $k \leq N$. Таким образом, пакет $\prod_{i_1,i_2,\dots,i_N}$ является гарантирующим. $\square$

Среди $N!$ гарантирующих пакетов отметим пакеты с экстремальными свойствами:

а) пакет с минимальным гарантированным временем окончания процесса управления:

$$\{i_1, i_2, \dots, i_N\} = \operatorname{argmin}_{\{i_1,i_2,\dots,i_N\}} T_{\prod_{i_1,i_2,\dots,i_N}}, \tag{2.1}$$

где $T_{\prod_{i_1,i_2,\dots,i_N}}$ — суммарное время интервалов пакета;

б) пакет соответствующий экстремальной задаче на минимум квадратичного функционала:

$$\{i_1, i_2, \dots, i_N\} = \operatorname{argmin}_{\{i_1,i_2,\dots,i_N\}} \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{T_{k-1}}^{T_k} \|\bar{u}_{ki_k}(t)\|^2 dt;$$

в) пакет соответствующий экстремальной задаче с интегральным функционалом общего вида:

$$\{i_1, i_2, \dots, i_N\} = \operatorname{argmin}_{\{i_1,i_2,\dots,i_N\}} \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{T_{k-1}}^{T_k} G(x(t), \bar{u}_{ki_k}(t)) dt,$$

где $G(x, u)$ — скалярная функция, непрерывная по x, u, Пример расчета гарантированного пакета с экстремальным свойством (2.1) приведен в разд. 3.

2.2. Построение гарантирующего программного управления при неполной информации о начальной позиции. Случай компактного множества начальных позиций

Пусть X_0 — компактное множество, $x_1, \dots, x_N$ — центры n-мерных кубов со стороной ε, объединение которых содержит множество X_0, M_0 — множество векторов $x_1, \dots, x_N$.

Пусть $\prod_{i_1,i_2,\dots,i_N}$ — пакет программ, построенный по N точкам множества M_0, и T_i — границы отрезков пакета. Для решений уравнения (1.1) имеет место оценка (см. [18, с. 57])

$$\|x(t,\ x_{00}) - x(t,\ x_{01})\| \leq \|x_{00} - x_{01}\| e^{Lt}, \tag{2.2}$$

где L — положительная константа, вычисляемая по параметрам процесса (1.1). Константа L далее используется в изложении.

Утверждение 2. *Если для системы* (1.1) *выполнено предположение* 1 *и* X_0 *— компактное множество, то в задаче управления с неполной информацией и функцией наблюдения* (1.2) *пакет программ* $\prod_{i_1,i_2,\dots,i_N}$, *построенный для системы (1.1) и конечного множества начальных векторов* M_0, *обеспечивает условие* $x(t^*) \in m + S_\ell(0),\ t^* \leq T$, *при*

$$\ell \geq \varepsilon/\sqrt{2}\ e^{LT}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть множество X_0 является компактным и $x_1, \dots,\ x_N$ — центры n-мерных кубов со стороной ε, объединение которых содержит множество X_0.

Применяя к конечному числу узлов сетки итерационный процесс построения управления из подразд. 2.1 и учитывая (2.2), получаем, что пакет $\prod_{i_1,i_2,\dots,i_N}$ является гарантирующим на первом отрезке для точек $\|x_{00} - x_{01}\| \le \varepsilon/\sqrt{2}$, если $l(T_1) \ge \varepsilon/\sqrt{2}\, e^{LT_1}$. Аналогично можно показать, что пакет $\prod_{i_1,i_2,\ldots,i_N}$ является гарантирующим на k — ом интервале $1 \le k \le N$, если $l \ge l(T_k) = \varepsilon/\sqrt{2}\, e^{LT_k}$. □

З а м е ч а н и е. Зависимость между параметрами ε и N определяется геометрией множества X_0.

3. Построение гарантирующего программного управления при неполной информации о начальной позиции для системы второго порядка

Пусть движение вектора $x \in \mathbb{R}^2$ подчиняется следующему уравнению:

$$\ddot{x} = u, \quad \|u(t)\| \le \rho, \tag{3.1}$$

ρ — положительный параметр. Множество начальных значений и конечная позиция имеет вид

$$\begin{gathered} X_0 = \{x(0) = x_{0i},\ \dot{x}(0) = \dot{x}_{0i},\ i = 1, \ldots, 3\}, \\ x(T) = m_1 = (m_{11}, m_{12}), \quad \dot{x}(T) = m_2 = (m_{21}, m_{22}). \end{gathered} \tag{3.2}$$

Для системы (3.1) выполнение предположения 1 может быть доказано непосредственной проверкой соотношения (2.3) [7]. Приведем другое доказательство выполнения предположения 1 для системы (3.1), содержащее явный вид управления, решающего задачу управляемости для краевых условий и способ вычисления гарантированного времени окончания процесса.

Зададим эталонную траекторию и выпишем ее производные по времени t (см. [14]):

$$x(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3, \quad \dot{x} = C_1 + 2C_2 t + 3C_3 t^2, \quad \ddot{x} = 2C_2 + 6C_3 t, \tag{3.3}$$

где $C_i \in \mathbb{R}^2,\ i = 0, 1, 2, 3$. Из условий на начальное и конечное положение (3.2) находим $C_0 = x(0),\ C_1 = \dot{x}(0)$. Векторы C_2, C_3 являются решением системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcl} C_2 T^2 + C_3 T^3 & = & x(T) - x(0) - \dot{x}(0)T = B_1, \\ 2C_2 T + 3C_3 T^2 & = & \dot{x}(T) - \dot{x}(0) = A_1, \end{array} \right.$$

откуда получаем

$$\begin{array}{rcl} C_2(T) = \dfrac{3B_1 - A_1 T}{T^2} & = & \dfrac{1}{T^2}\big(3x(T) - 3x(0) - 2T\dot{x}(0) - T\dot{x}(T)\big), \\ C_3(T) = \dfrac{A_1 T - 2B_1}{T^3} & = & \dfrac{1}{T^3}\big(T\dot{x}(T) + T\dot{x}(0) - 2x(T) + 2x(0)\big). \end{array} \tag{3.4}$$

Таким образом, векторы $C_i,\ i = 0, \ldots, 3$, в соотношении (3.3) выражены через граничные условия (3.2) и параметр T. Управление u может быть выражено из системы (1.1) через фазовые переменные и имеет вид

$$u = \ddot{x}. \tag{3.5}$$

Подставив в выражение (3.5) соотношения (3.3), получаем программное управление, переводящее систему (1.1) из начального положения $(x_{0i}, \dot{x}_{0i})$ в конечное положение $(x(T),\ \dot{x}(T))$:

$$u(t, T) = 2C_2(T) + 6C_3(T)t. \tag{3.6}$$

Перейдем к нахождению параметра T, при котором управление (3.6) допустимо.

Утверждение 3. *Справедливо соотношение* $\max_{t \in [0,T]} \|u(t, T)\| \to_{T \to \infty} 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из соотношений (3.6) и (3.4). □

Утверждение 4. *Для управляющей функции* (3.6) *условие* $\|u(t)\| \le \rho,\ t \in [0, T_1]$, *выполнено при величине* $T_1 \ge T$, *где* T *— наименьшее положительное* T, *удовлетворяющее условиям*

$$4\|C_2(T)\|^2 - \rho^2 \le 0, \quad 4\|C_2(T)\|^2 + 24(C_2(T), C_3(T))T + 36\|C_3(T)\|^2T^2 - \rho^2 \le 0.$$

Доказательство. Согласно (3.6)

$$\|u(t)\|^2 - \rho^2 = 4\|C_2(T)\|^2 + 24(C_2(T), C_3(T))t + 36\|C_3(T)\|^2t^2 - \rho^2 = \Phi(t, T).$$

Из свойств квадратичной функции при положительном коэффициенте при старшей степени имеем: при выполнении неравенств $\Phi(0, T) \le 0,\ \Phi(T, T) \le 0$ для $t \in [0, T]$ функция $\Phi(t, T) \le 0$. Утверждение 4 доказано. □

Утверждение 4 используется далее при расчете временных отрезков гарантированного пакета программ.

Приведем результаты численных расчетов управления, траектории и гарантированного времени окончания процесса управления для следующих параметров управляемого процесса (3.1):

$$\rho = 15, x(T) = (50, 70),\ \dot{x}(T) = (-1, 2),$$

$$x_{01} = (-10, -20), \quad x_{02} = (-20, -10),\ x_{03} = (-30, 10), \tag{3.7}$$

$$\dot{x}_{01} = (4, -6), \quad \dot{x}_{02} = (-10, -7), \quad \dot{x}_{03} = (-14, 9). \tag{3.8}$$

Пакет программ $\prod_{123}$ имеет три временных отрезка $[0, T_1] = [0, 6.97],\ [T_1, T_2] = [6.97, 15.94]$, $[T_2, T_3] = [15.94, 29.58]$. При его применении гарантированное время посещения фазовым вектором системы (3.1) целевой точки не более 29.58. Программные управления на интервале $[0, T_1]$:

$$u_1(t) = 2\begin{pmatrix} 2.7 \\ 6.99 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} -0.29 \\ -0.614 \end{pmatrix}t,$$

на интервале $[T_1, T_2]$:

$$u_2(t) = 2\begin{pmatrix} 7.46 \\ -0.56 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} -0.497 \\ 0.046 \end{pmatrix}t,$$

на интервале $[T_2, T_3]$:

$$u_3(t) = 2\begin{pmatrix} 1.996 \\ -7.22 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} -0.09 \\ 0.324 \end{pmatrix}t.$$

Графики двумерных, параметрически заданных функций $u_i(t),\ i = 1, 2, 3$, приведены на рис. 1–3. Пунктиром выделен круг радиуса $\rho = 15$ — граница области управления. Направление движения двумерного вектора $u(t)$ при $t \in [T_{i-1}, T_i],\ i = 1, 2, 3$, можно восстановить из приведенного выше явного вида параметрических функций $u_1(t), \dots, u_3(t)$.

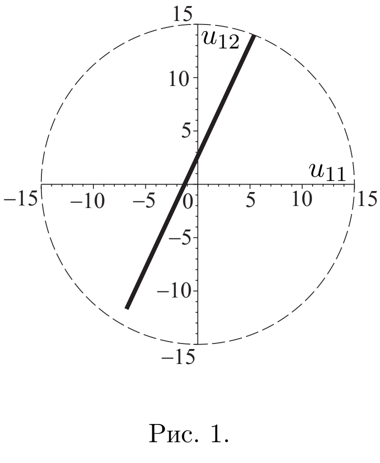


Рис. 1.

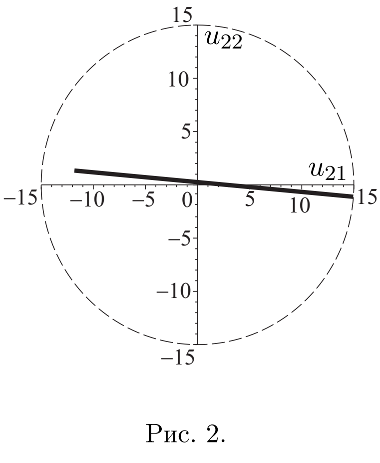


Рис. 2.

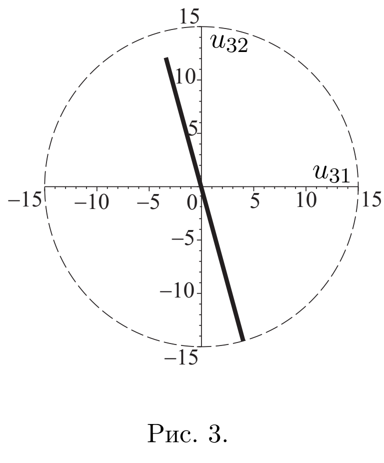


Рис. 3.

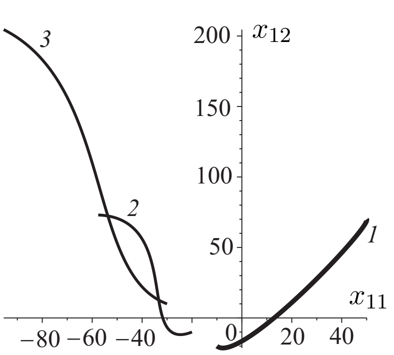


Рис. 4.

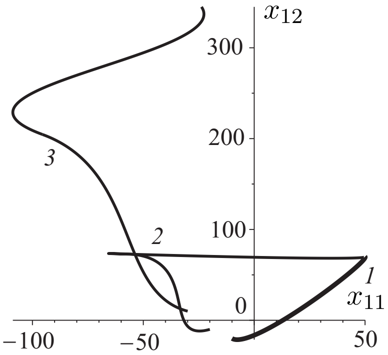


Рис. 5.

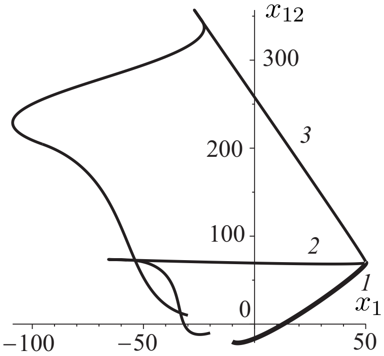


Рис. 6.

Графики траекторий, реализуемых при применении пакета $\prod_{123}$ на интервале $[0, T_1]$, приведены на рис. 4, на интервале $[0, T_2]$ — на рис. 5, на интервале $[0, T_3]$ — на рис. 6. На рис. 4–6 оси координат x_{11}, x_{12} — компоненты двумерного вектора x (3.1).

Гарантированное время окончания процесса управления для других пакетов $\prod_{i_1,i_2,i_3}$:

$$T_{1,2,3} = 29.58, \quad T_{1,3,2} = 33.87, \quad T_{2,1,3} = 34.51, \quad T_{2,3,1} = 36.24, \quad T_{3,1,2} = 33.55, \quad T_{3,2,1} = 29.69.$$

Таким образом, для краевых условий (3.7), (3.8) наименьшее гарантированное время окончания процесса управления соответствует пакету $\prod_{1,2,3}$.

Заключение

Построенное в подразд. 2.1 управление в форме пакета программ обладает свойствами универсальной стратегии (в терминологии работ [4;5;15;16]) по отношению к неопределенности в выборе ε сети множества X_0, фигурирующей в п.2.2.

Авторы благодарны А. В. Кряжимскому за постановку задачи, обсуждение работы и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Осипов Ю.С.** Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61, вып. 4 (370). С. 25–76.
2. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** Идеализированные пакеты программ и задачи позиционного управления с неполной информацией // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 139–157.
3. **Кряжимский А.В., Стрелковский Н.В.** Задача гарантированного позиционного наведения линейной управляемой системы к заданному моменту времени при неполной информации. Программный критерий разрешимости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 168–177.
4. **Krasovskii N.N., Subbotin A.I.** Game-theoretical control problems. New York: Springer-Verlag, 1987. 517 p.
5. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимзация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 285 с.
6. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2011. 291 с.
7. **Благодатских В.И.** Введение в оптимальное управление. М.: Высшая школа, 2001. 239 с.
8. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 574 с.
9. **Никольский М.С.** Об одной задаче осуществления заданного движения. Гибкие системы // Докл. РАН. 1996. Т. 350, № 6. С. 739–741.
10. **Понтрягин Л.С.** Избранные труды. М.: МАКС Пресс, 2004. 552 с.

11. **Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р.** Об аппроксимации нелинейных конфликтно управляемых систем нейтрального типа // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 204–217.
12. **Гусев М.И.** Внутренние аппроксимации множеств достижимости управляемых систем с фазовыми ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. С. 73–88.
13. **Максимов В.И.** Об одном алгоритме управления линейной системой при измерении части координат фазового вектора // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 218–230.
14. **Батенко А.П.** Системы терминального управления. М.: Радио и связь, 1984. 161 с.
15. **Субботина Н.Н.** Универсальные оптимальные стратегии в позиционных дифференциальных играх // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 11. С. 1890–1896.
16. **Субботина Н.Н.** Некоторые достаточные условия существования универсальных стратегий // Исследование задач минимаксного управления: сб. науч. тр. / УНЦ АН СССР. Свердловск, 1985. С. 72–81.
17. **Куржанский А.Б., Филиппова Т.Ф.** Об описании пучка выживающих траекторий управляемой системы // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 8. С. 1305–1315.
18. **Демидович Б.П.** Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
19. **Крутько П.Д.** Обратные задачи динамики управляемых систем. Линейные модели. М.: Наука, 1987. 304 с.
20. **Ушаков В.Н., Лавров Н.Г., Ушаков А.В.** Конструирование решений в задаче о сближении стационарной управляемой системы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 277–286.
21. **Благодатских А.И., Петров Н.Н.** Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Удмурт. ун-т, 2009. 266 с.
22. **Григоренко Н.Л.** Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 197 с.
23. **Чикрий А.А.** Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 373 с.

Григоренко Николай Леонтьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: grigor@cs.msu.su

Поступила 01.03.2015

Кондратьева Юлия Андреевна
аспирант
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: kond.yulia@gmail.com

Лукьянова Лиля Николаевна
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: lln@cs.msu.su

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.977.1

О ЗАДАЧЕ ДОСТИЖИМОСТИ ПРИ ФАЗОВЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ С КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ[1]

М. И. Гусев

Рассматривается задача приближенного построения множеств достижимости нелинейной управляемой системы с фазовыми ограничениями, которые представимы в виде множества решений конечной системы нелинейных неравенств. Каждое из неравенств задано гладкой функцией, но пересечение их множеств решений имеет, вообще говоря, негладкую границу. Исследуется процедура снятия фазовых ограничений, основанная на введении вспомогательной управляемой системы без ограничений, правая часть которой зависит от малого параметра. Ранее были получены результаты о сходимости множеств достижимости вспомогательной управляемой системы в хаусдорфовой метрике к множеству достижимости исходной системы при стремлении малого параметра к нулю для фазовых ограничений, имеющих гладкую границу. В данной статье эти результаты обобщены на рассматриваемый класс систем с кусочно-гладкой границей фазовых ограничений.

Ключевые слова: множество достижимости, фазовые ограничения, функция штрафа, аппроксимация, метрика Хаусдорфа.

M. I. Gusev. On the attainability problem under state constraints with piecewise smooth boundary.

The paper is devoted to the problem of approximating reachable sets for a nonlinear control system with state constraints given as a solution set of a finite system of nonlinear inequalities. Each of these inequalities is given as a level set of a smooth function, but their intersection may have nonsmooth boundary. We study a procedure of eliminating the state constraints based on the introduction of an auxiliary system without constraints such that the right-hand sides of its equations depend on a small parameter. For state constraints with smooth boundary, it was shown earlier that the reachable set of the original system can be approximated in the Hausdorff metric by the reachable sets of the auxiliary control system as the small parameter tends to zero. In the present paper, these results are extended to the considered class of systems with piecewise smooth boundary of the state constraints.

Keywords: reachable set, state constraints, penalty function, approximation, Hausdorff metric.

1. Введение

Множества достижимости и разрешимости, трубки траекторий и их аналоги используются при решении различных задач управления в условиях неопределенности и дифференциальных играх (см. [1–5]). В данной работе рассматривается способ описания множеств достижимости и трубок траекторий управляемой системы с фазовыми ограничениями. Вопросам приближенного построения множеств достижимости, в том числе для систем с фазовыми ограничениями, посвящены многие работы [5–12]. Метод снятия фазовых ограничений при построении множеств достижимости для дифференциальных включений был предложен в работах [13; 14]. В данных работах трубки траекторий и множества достижимости дифференциального включения с выпуклым фазовым ограничением аппроксимировались решениями семейства дифференциальных включений без фазовых ограничений, правая часть которых линейно зависит от матричного параметра. В работах [15; 16] было предложено сужать множество скоростей исходной системы вблизи границы ограничений. Правая часть аппроксимирующей вспомогательной системы при этом зависит от скалярного параметра штрафа, ее траектории не пересекают границу ограничений и множество достижимости аппроксимирующей системы приближает множество достижимости системы с фазовыми ограничениями изнутри. Предложенный

[1]Работа выполнена при поддержке программы президиума УрО РАН (проект 15-16-1-8) и Программы поддержки ведущих научных школ (НШ-2692.2014.1).

метод можно рассматривать в качестве аналога метода барьерных функций в задачах оптимизации. Его применение ограничено требованием выполнения условия внутренней точки (inward pointing condition)(см., например, [17–19]): в любой граничной точке фазовых ограничений, достижимой из начального состояния, должен существовать вектор скорости управляемой системы, направленный строго внутрь ограничений. Обоснование сходимости множеств достижимости опирается на теоремы об аппроксимации траекторий управляемой системы траекториями, удовлетворяющими фазовым ограничениям [17–21]. Указанные теоремы используются при исследовании свойств функции цены и в приложениях теории обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби [22; 23] в задачах оптимального управления.

В работе [24] вспомогательная аппроксимирующая система получена путем иной модификации множества скоростей исходной системы. В правую часть уравнений системы здесь добавляется корректирующее слагаемое, направляющее вектор скорости внутрь множества ограничений при пересечении его границы. Правая часть вспомогательной системы зависит от малого параметра, определяющего область действия корректирующей добавки. Область достижимости этой системы, построенная без учета фазовых ограничений, содержит множество достижимости исходной системы с фазовыми ограничениями. При стремлении малого параметра к нулю имеет место сходимость множеств достижимости в хаусдорфовой метрике к множеству достижимости исходной системы. Данная работа продолжает статью [24], где рассматривались фазовые ограничения с гладкой границей. Здесь мы рассматриваем кусочно-гладкие выпуклые ограничения. В отличие от фазовых ограничений с гладкой границей в кусочно-гладком случае для получения оценок точности аппроксимации приходится накладывать более жесткие ограничения на правую часть управляемой системы. Условие внутренней точки по сравнению с [24] здесь несколько ослаблено за счет овыпукления множества скоростей системы.

2. Определения и постановка задачи

Рассматривается управляемая система

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad t_0 \le t \le \theta, \quad x(t_0) = x^0, \tag{2.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u(t) \in U$ п.в. $t \in [t_0, \theta]$ — управление. Множество U — компакт в $\mathbb{R}^r$, в качестве управлений рассматриваются измеримые по Лебегу функции $u : [t_0, \theta] \to U$.

Далее используются следующие обозначения. Для вещественной матрицы A через $A^\top$ мы обозначаем транспонированную матрицу, 0 — нулевой вектор подходящей размерности либо число ноль. Для $x, y \in \mathbb{R}^n$ $(x, y) = x^\top y$ — скалярное произведение векторов, $\|x\| = (x, x)^{1/2}$ — евклидова норма, $B_r(\bar{x})$: $B_r(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x - \bar{x}\| \le r\}$ — шар радиуса $r > 0$ с центром в точке $\bar{x}$. Для $S \subset \mathbb{R}^n$ символами ∂S, $\mathrm{int} S$, $\mathrm{cl} S$, $\mathrm{co} S$ обозначаются соответственно граница, внутренность замыкание и выпуклая оболочка S, $\nabla g(x)$ — градиент функции $g(x)$ в точке x, $h(A, B)$ — хаусдорфово расстояние между множествами $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $\mathtt{conv}(\mathbb{R}^n)$ — семейство выпуклых компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$. Для множества управлений мы используем обозначение $\mathcal{U} = \{u(\cdot) \in L_\infty[t_0, \theta] : u(t) \in U \ \text{ п.в. } t \in [t_0, \theta]\}$.

Далее считаем, что правая часть системы (2.1) удовлетворяет условиям предположения 1.

Предположение 1. *Отображение $f(x, u) : \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет следующим условиям*:

1) *$f(x, u)$ непрерывно по (x, u) и локально липшицево по x равномерно по $u \in U$*;

2) *условие подлинейного роста*: *существует $C > 0$ такое, что*

$$\|f(x, u)\| \le C(1 + \|x\|), \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times U.$$

При указанных условиях множество траекторий системы (2.1), отвечающих заданному начальному условию $x(t_0) = x^0$, ограничено. Обозначим через B_R шар $B_R(\bar{x})$, который содержит все траектории системы. Система (2.1) представима в виде эквивалентного дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(x), \quad x(t_0) = x^0,$$

где $F(x) := f(x, U)$ — множество скоростей системы (2.1) для данного $x \in \mathbb{R}^n$. Многозначное отображение $F : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ компактнозначно и локально липшицево в метрике Хаусдорфа. Решениями дифференциального включения являются абсолютно непрерывные функции $x : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие условию $\dot{x}(t) \in F(x(t))$ для почти всех t.

Фазовые ограничения имеют вид

$$x(t) \in S, \quad t \in [t_0, \theta], \tag{2.2}$$

где S — замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$, содержащее вектор x^0. Далее мы рассматриваем в качестве S множество, заданное в следующем виде:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \colon g_i(x) \le 0,\ i = 1, \dots k\},$$

где $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — выпуклые, непрерывно дифференцируемые функции, градиенты которых локально липшицевы.

Обозначим через $x(t, u(\cdot), x^0)$ решение системы (2.1) с начальным условием $x(t_0) = x^0$. Множеством (областью) достижимости системы (2.1) с фазовым ограничением (2.2) в момент времени θ называется множество

$$G_0(\theta) = \big\{x \in \mathbb{R}^n \colon \exists u(\cdot) \in \mathcal{U},\ x = x(\theta, u(\cdot), x^0),\ x(t, u(\cdot), x^0) \in S,\ t_0 \le t \le \theta\big\},$$

$G_0(\theta)$ — множество всех точек, в которые можно перевести систему (2.1) в момент времени θ из начального состояния x^0 при ограничениях (2.2). В данной работе рассматривается задача приближенного построения $G_0(\theta)$. Исходная управляемая система заменяется семейством управляемых систем без фазовых ограничений, зависящих от параметра штрафа ε,

$$\dot{x}(t) = f_\varepsilon(x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x^0, \tag{2.3}$$

множества достижимости которых, построенные без учета фазовых ограничений, аппроксимируют $G_0(\theta)$ при $\varepsilon \to 0$.

3. Аппроксимация множеств достижимости

В дальнейших построениях используется следующее условие внутренней точки (inward-pointing condition) (см. [17–20]).

Предположение 2. *Для каждого $x \in \partial S \cap B_R$*

$$\mathrm{co}F(x) \cap \mathrm{int}T_S(x) \neq \varnothing. \tag{3.1}$$

Здесь $T_S(x)$ — касательный конус к множеству S в точке x, который определяется следующим образом:

$$T_S(x) = \big\{d \in \mathbb{R}^n : \lim_{\xi \to +0} \xi^{-1} d(x + \xi d, S) = 0\big\},$$

$d(x, S)$ — расстояние от x до множества S:

$$d(x, S) = \min_{y \in S} \|x - y\|.$$

Данное условие обеспечивают непустоту множества достижимости $G_0(\theta)$.

Определим функцию $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$:

$$g(x)=\max_{1\le i\le k} g_i(x), \tag{3.2}$$

функция $g(x)$ выпукла и, очевидно, $S=\{x\in\mathbb{R}^n: g(x)\le 0\}$.

Для $x\in\mathbb{R}^n$ положим

$$I(x)=\{i\in\{1,\dots k\}\colon g_i(x)=g(x)\},$$

$I(x)$ — это множество тех номеров i, на которых достигается максимум в (3.2). Далее будем считать выполненным следующее условие.

Предположение 3. *В точках $x\in\partial S\cap B_R$ градиенты $\nabla g_i(x)$, $i\in I(x)$, положительно линейно независимы.* [2]

При выполнении данного предположения условие (3.1) можно записать в эквивалентной форме (см. [24]):

$$\max_{\lambda\in\Lambda(x)}\min_{f\in\operatorname{co}F(x)}\Big(\sum_{i=1}^k\lambda_i\nabla g_i(x),f\Big)<0\quad\forall x\in\{x\in\mathbb{R}^n\colon g(x)=0\}\cap B_R, \tag{3.3}$$

где

$$\Lambda(x)=\Big\{\lambda\in\mathbb{R}^k\colon \lambda_i\ge 0,\ \sum_{i=1}^k\lambda_i=1;\ \lambda_i=0 \text{ при } i\notin I(x)\Big\}.$$

Применяя теорему о минимаксе и меняя в (3.3) местами минимум и максимум, получим

$$\min_{f\in\operatorname{co}F(x)}\max_{\lambda\in\Lambda(x)}\Big(\sum_{i=1}^k\lambda_i\nabla g_i(x),f\Big)<0.$$

Учитывая, что

$$\max_{\lambda\in\Lambda(x)}\Big(\sum_{i=1}^k\lambda_i\nabla g_i(x),f\Big)=\max_{i\in I(x)}(\nabla g_i(x),f),$$

получаем, что неравенство (3.3) эквивалентно условию

$$\min_{f\in\operatorname{co}F(x)}\max_{i\in I(x)}\big(\nabla g_i(x),f\big)<0\quad\forall x\in\{x\in\mathbb{R}^n\colon g(x)=0\}\cap B_R.$$

Утверждение. *Если выполнено условие* (3.3)*, то существуют $\sigma>0$, $\rho>0$ такие, что неравенство*

$$\min_{f\in\operatorname{co}F(x)}\max_{i\in I(x)}(\nabla g_i(x),f)<-\rho, \tag{3.4}$$

справедливо для всех точек множества

$$S_R^\sigma=\{x\colon 0\le g(x)\le\sigma\}\cap B_R.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, от противного, что для любых $\sigma>0,\rho>0$ найдется вектор $x^{\sigma,\rho}\in B_R$ такой, что

$$\min_{f\in\operatorname{co}F(x^{\sigma,\rho})}\max_{i\in I(x^{\sigma,\rho})}(\nabla g_i(x^{\sigma,\rho}),f)\ge-\rho,\quad 0\le g(x^{\sigma,\rho})\le\sigma. \tag{3.5}$$

[2]Векторы $a^i\in\mathbb{R}^n$, $i=1,\dots,m$, называются положительно линейно независимыми, если для любых $\alpha_i\ge 0$, $i=1,\dots,m$, из равенства $\sum_{i=1}^m\alpha_i a^i=0$ следует, что $\alpha_i=0$, $i=1,\dots,m$.

Выберем последовательности положительных чисел σ_m, ρ_m, $\sigma_m \to 0, \rho_m \to 0$ при $m \to \infty$, и обозначим $x^m = x^{\sigma_m,\rho_m}$. Последовательность $x^m \in B_R$ содержит сходящуюся подпоследовательность; не ограничивая общности можно считать, что $x^m \to \bar{x} \in B_R$. Из непрерывности $g(x)$ следует, что $g(\bar{x}) = 0$. Выберем $f^m \in \mathrm{co}F(x^m)$, доставляющее минимум в левой части неравенства (3.5) при $\sigma = \sigma_m, \rho = \rho_m, x^{\sigma,\rho} = x^m$. Последовательность f^m ограничена и удовлетворяет неравенству

$$\max_{i\in I(x^m)}(\nabla g_i(x^m), f^m) \geq -\rho^m;$$

не ограничивая общности будем считать, что $f^m \to \bar{f} \in \mathrm{co}F(\bar{x})$. Пусть $i \notin I(\bar{x})$, тогда $g_i(\bar{x}) < g(\bar{x})$. В силу непрерывности функций $g_i(x), g(x)$ для достаточно больших m имеем $g_i(x^m) < g(x^m)$, что эквивалентно условию $i \notin I(x^m)$. Следовательно, $I(x^m) \subset I(\bar{x})$ и значит

$$\max_{i\in I(\bar{x})}(\nabla g_i(x^m), f^m) \geq \max_{i\in I(x^m)}(\nabla g_i(x^m), f^m) \geq -\rho^m.$$

Функция $\Psi(x, f) = \max_{i\in I(\bar{x})}(\nabla g_i(x), f)$ непрерывна. Поэтому, переходя в последнем неравенстве к пределу при $m \to \infty$, получим

$$\max_{i\in I(\bar{x})}(\nabla g_i(\bar{x}), \bar{f}) \geq 0, \quad \bar{x} \in \mathrm{co}F(\bar{x}), \quad g(\bar{x}) = 0,$$

что противоречит условию (3.5). □

Далее мы будем использовать следующее усиление условия (3.4).

Предположение 4. *Существуют $\sigma > 0, \rho > 0$ и липшицева функция $\bar{f}(x)$, определенная на множестве S_R^σ, такие, что*

$$\max_{i\in I(x)}(\nabla g_i(x), \bar{f}(x)) < -\rho, \quad \bar{f}(x) \in \mathrm{co}F(x) \quad \forall x \in S_R^\sigma.$$

Считая последнее предположение выполненным, правую часть $f_\varepsilon(x, u)$ управляемой системы (2.3) определим на множестве $\{x \in \mathbb{R}^n \colon g(x) \leq \sigma\} \cap B_R$ следующим образом. Выберем $0 < \varepsilon < \sigma$. Пусть $h_\varepsilon(\tau) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция такая, что $0 \leq h_\varepsilon(\tau) \leq 1$, $h_\varepsilon(\tau) = 1$ при $\tau < 0$, $h_\varepsilon(\tau) = 0$ при $\tau > \varepsilon$. Положим

$$f_\varepsilon(x, u) = \begin{cases} h_\varepsilon(g(x))f(x, u) + (1 - h_\varepsilon(g(x)))\bar{f}(x) & \text{при} \quad g(x) > 0, \\ f(x, u) & \text{при} \quad g(x) \leq 0. \end{cases}$$

В качестве $h_\varepsilon(\tau)$ можно взять линейно-квадратичную функцию, определяемую следующими соотношениями:

$$h_\varepsilon(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \tau < 0, \\ 1 - \dfrac{2\tau^2}{\varepsilon^2} & \text{при} \quad 0 \leq \tau \leq \varepsilon/2, \\ \dfrac{2(\tau - \varepsilon)^2}{\varepsilon^2} & \text{при} \quad \varepsilon/2 \leq \tau \leq \varepsilon, \\ 0 & \text{при} \quad \tau > \varepsilon. \end{cases}$$

Теорема 1. *Пусть $f(x, u)$ и ограничения задачи удовлетворяют предположениям* 1, 3, 4. *Тогда*

1) *при $0 < \varepsilon < \sigma$ отображение $f_\varepsilon(x, u)$ непрерывно на $\{x \in \mathbb{R}^n \colon g(x) \leq \sigma\} \cap B_R \times U$ и липшицево по x равномерно по $u \in U$;*

2) *для любого $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ решение $x_\varepsilon(t)$ системы (2.3) с начальным условием $x_\varepsilon(t_0) = x^0$ продолжимо на $[t_0, \theta]$ и удовлетворяет неравенству*

$$g(x_\varepsilon(t)) \leq \varepsilon, \quad t \in [t_0, \theta].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первая часть доказательства почти дословно повторяет доказательство теоремы 1 из [24]. Фиксируем $\varepsilon > 0$. На множестве $S_1 \times U$, где $S_1 = \{x : g(x) \le 0\} \cap B_R$, функция $f_\varepsilon(x, u)$ совпадает с $f(x, u)$, поэтому непрерывна. При $(x, u) \in S_2 \times U$, $S_2 = \{x : 0 \le g(x) \le \sigma\} \cap B_R$, $f_\varepsilon(x, u)$ непрерывна как суперпозиция непрерывных функций. Те x, где $g(x) = 0$, принадлежат каждому из множеств S_1, S_2, поэтому непрерывность $f_\varepsilon(x, u)$ в них вытекает из непрерывности на этих множествах. Для доказательства условия Липшица для $f_\varepsilon(x, u)$, заметим, что существуют константы $L_1, L_2 > 0$, не зависящие от u, такие, что $\forall i = 1, 2$

$$|f_\varepsilon(x, u) - f_\varepsilon(y, u)| \le L_i \|x - y\| \quad \forall x, y \in S_i,\ \forall u \in U.$$

Для $x, y \in S_1$ неравенство следует из предположения 1. На $S_2 \times U$ $f_\varepsilon(x, u)$ есть суперпозиция липшицевых по x функций (выпуклая на $\mathbb{R}^n$ функция является липшицевой на любом ограниченном множестве). Возьмем $x \in S_1$, $y \in S_2$, соединим x, y отрезком прямой. В концах отрезка функция g принимает значения разных знаков, поэтому на отрезке найдется точка z, в которой $g(x) = 0$. Учитывая, что $z \in S_i, i = 1, 2$, получим

$$|f_\varepsilon(x, u) - f_\varepsilon(y, u)| \le |f_\varepsilon(x, u) - f_\varepsilon(z, u)| + |f_\varepsilon(z, u) - f_\varepsilon(y, u)|$$

$$\le L_1\|x - z\| + L_2\|y - z\| \le \max\{L_1, L_2\}(\|x - z\| + \|y - z\|) = \max\{L_1, L_2\}\|x - y\| \quad \forall u \in U.$$

Рассмотрим решение $x_\varepsilon(t)$ системы (2.3), отвечающее управлению $u(\cdot) \in \mathcal{U}$. Так как $f_\varepsilon(x, u)$ является выпуклой комбинацией векторов $f(x, u)$ и $f(x, \bar{u}(x))$, принадлежащих выпуклому множеству $\mathrm{co}F(x)$, то для почти всех t имеет место включение $\dot{x}_\varepsilon(t) \in \mathrm{co}F(x_\varepsilon(t))$. Докажем, что эта траектория не покидает множества $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \le \sigma\} \cap B_R$, на котором определена правая часть системы (2.3) — $f_\varepsilon(x, u)$. Поскольку решение $x_\varepsilon(t)$ дифференциального включения $\dot{x}_\varepsilon(t) \in \mathrm{co}F(x_\varepsilon(t))$ может сколь угодно точно в равномерной метрике быть аппроксимировано решениями включения $\dot{x}(t) \in F(x(t))$ [25], то $x_\varepsilon(t) \in B_R$ для всех значений t, для которых определено решение. Пусть γ^* — максимальное из чисел γ, не превосходящих θ таких, что решение $x_\varepsilon(t)$ определено на отрезке $[t_0, \gamma]$. Докажем выполнение неравенства $g(x_\varepsilon(t)) \le \varepsilon$ во всех точках $[t_0, \gamma^*]$. Допустим от противного, что $g(x_\varepsilon(t^*)) > \varepsilon$ для некоторого $t^* \in [t_0, \gamma^*]$. Пусть

$$t_* = \max\{t : t \in [t_0, t^*], g(x_\varepsilon(t)) = \varepsilon\}.$$

Функция $g(x_\varepsilon(t))$ липшицева, и значит дифференцируема почти всюду. Оценим величину $\dfrac{d}{dt} g(x_\varepsilon(t))$ в тех точках $t \in [t_*, t^*]$, где существуют данная производная и производная $\dot{x}_\varepsilon(t)$. Обозначим $\Delta x_\varepsilon(t) = x_\varepsilon(t + \delta t) - x_\varepsilon(t)$, тогда

$$g_i(x_\varepsilon(t + \delta t)) - g_i(x_\varepsilon(t)) = (\nabla g_i(x_\varepsilon(t)), \Delta x_\varepsilon(t)) + o_i(\Delta x_\varepsilon(t)), \quad i = 1, \ldots, k, \tag{3.6}$$

где $o_i(\eta)/\eta \to 0$ при $\eta \to 0$. Подставляя в равенство (3.6) $\Delta x_\varepsilon(t) = \dot{x}_\varepsilon(t)\Delta t + o(\Delta t)$ $(o(\Delta t)/\Delta t \to 0,\ \Delta t \to 0)$, получим

$$g_i(x_\varepsilon(t + \Delta t)) - g_i(x_\varepsilon(t)) = (\nabla g_i(x_\varepsilon(t)), \dot{x}_\varepsilon(t))\Delta t + \alpha_i(\Delta t), \quad i = 1, \ldots, k, \tag{3.7}$$

где

$$\alpha_i(\Delta t) = \nabla g_i(x_\varepsilon(t), o(\Delta t)) + o_i(\dot{x}_\varepsilon(t)\Delta t + o(\Delta t)).$$

Очевидно, $\alpha_i(\Delta t)/\Delta t \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

При $i \in I(x_\varepsilon(t))$ имеем $g_i(x_\varepsilon(t)) = g(x_\varepsilon(t))$. Если $i \notin I(x_\varepsilon(t))$, то $g_i(x_\varepsilon(t)) < g(x_\varepsilon(t))$, следовательно, в силу непрерывности $g(x), g_i(x), x_\varepsilon(t)$ для достаточно малых Δt будем иметь $g_i(x_\varepsilon(t + \Delta t)) < g(x_\varepsilon(t + \Delta t))$. Таким образом, $g(x_\varepsilon(t + \Delta t)) = \max_{i \in I(x_\varepsilon(t))} g_i(x_\varepsilon(t + \Delta t))$. С учетом сказанного, переходя в обеих частях равенства (3.7) к максимуму по $i \in I(x_\varepsilon(t))$, получим

$$g(x_\varepsilon(t + \Delta t)) - g(x_\varepsilon(t)) \le \Delta t \max_{i \in I(x_\varepsilon(t))} (\nabla g_i(x_\varepsilon(t)), \dot{x}_\varepsilon(t)) + \max_{i \in I(x_\varepsilon(t))} \alpha_i(\Delta t).$$

В пределе при $\Delta t \to 0$ из последнего неравенства получим

$$\frac{d}{dt} g(x_\varepsilon(t)) \le \max_{i \in I(x_\varepsilon(t))} (\nabla g_i(x_\varepsilon(t)), \dot{x}_\varepsilon(t)).$$

Так как на промежутке $[t_*, t^*]$ $g(x_\varepsilon(t)) \ge \varepsilon$, то $h_\varepsilon g(x_\varepsilon(t)) = 0$ и, следовательно,

$$\dot{x}_\varepsilon(t) = f_\varepsilon(x_\varepsilon(t), u(t)) = \bar{f}(x_\varepsilon(t)).$$

Из определения $\bar{f}(x)$ получаем, что $\dfrac{d}{dt} g(x_\varepsilon(t)) \le -\rho < 0$ для почти всех $t \in [t_*, t^*]$, откуда имеем $g(x_\varepsilon(t_*)) > g(x_\varepsilon(t^*))$ в противоречие с предположением. Теорема доказана.

Лемма 1. *Пусть S — множество в $\mathbb{R}^n$, заданное системой неравенств $S = \{x \in \mathbb{R}^n \colon g_i(x) \le 0,\ i = 1, \dots, m\}$, функции $g_i(x),\ i = 1, \dots, m$, выпуклы и удовлетворяют условию Слейтера*:

$$\exists \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad g_i(\bar{x}) < 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Пусть D — ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$. Существует константа $M > 0$ такая, что

$$d(x^*, S) \le M \max\Big\{ \max_{i=1,\dots,m} g_i(x^*), 0 \Big\}\ \forall x^* \in D. \tag{3.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $g(x) = \max_{i=1,\dots,m} g_i(x)$, функция $g(x)$ выпукла и $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \le 0,\ i = 1, \dots, m\}$. Обозначим $h = -g(\bar{x}) > 0$. Возьмем произвольную точку $x^* \notin S$, соединим $\bar{x}$ отрезком прямой с x^*. Точки отрезка, соединяющего $\bar{x}$ и x^*, имеют вид $x(\lambda) = x^* + \lambda(\bar{x} - x^*)$, $0 \le \lambda \le 1$. Так как $g(x(0)) > 0$ и $g(x(1)) < 0$, на отрезке $[0, 1]$ найдется λ такое, что $g(x(\lambda)) = 0$. Из выпуклости $g(x)$ следует, что

$$0 = g(x(\lambda)) \le \lambda g(\bar{x}) + (1 - \lambda) g(x^*) = -\lambda h + (1 - \lambda) g(x^*),$$

откуда получим

$$\lambda \le \frac{g(x^*)}{h + g(x^*)} \le \frac{g(x^*)}{h}.$$

Из равенства $x(\lambda) - x^* = \lambda(\bar{x} - x^*)$ имеем $\lambda = \|x(\lambda) - x^*\| / \|\bar{x} - x^*\|$.

В итоге, учитывая включение $x(\lambda) \in S$, приходим к неравенству

$$d(x^*, S) \le \|x(\lambda) - x^*\| \le \frac{g(x^*)}{h} \|\bar{x} - x^*\| \le M g(x^*)$$

при $M = \max_{x^* \in D} \|\bar{x} - x^*\| / h$, которое завершает доказательство для $x^* \notin S$. Для $x^* \in S$ неравенство очевидно. □

Лемма 2. *Пусть $S = \{x \in \mathbb{R}^n \colon g(x) \le 0,\ i = 1, \dots, m\}$, где функции $g_i(x),\ i = 1, \dots, m$, — выпуклые непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию предположения* 3. *Тогда существуют $M > 0$ такое, что неравенство* (3.8) *справедливо для всех $x \in B_R$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, выбираем любую точку $x \in \partial S$. По условию градиенты $\nabla g_i(x)$, $i \in I(x)$, положительно линейно независимы. Тогда найдется $h \in \mathbb{R}^n$ такой, что $(\nabla g_i(x), h) < 0$, $i \in I(x)$ (см. [26]). Положим $\bar{x} = x + \xi h$, при малых положительных ξ будем иметь $g_i(\bar{x}) < 0$, $i = 1, \dots, k$, т. е. будет выполнено условие Слейтера. Далее применяем лемму 1. □

Теорема 2. *Пусть $f(x, u)$ и ограничения задачи удовлетворяют предположениям* 1, 3, 4. *Тогда для каждого $0 < \varepsilon < \sigma$ имеет место включение $G_0(\theta) \subset G_\varepsilon(\theta)$. Существует константа $L > 0$ такая, что*

$$h(G_0(\theta), G_\varepsilon(\theta)) \le L\varepsilon. \tag{3.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Траектории вспомогательной системы (2.3) суть траектории дифференциального включения

$$\dot{x}(t) \in \mathtt{co}F(x(t)), \quad x(t_0) = x^0,$$

где $F(x) = f(x, U)$ — компактнозначное, локально липшицево многозначное отображение. Фиксируем $\varepsilon_0 = \sigma/2$ и будем далее рассматривать $\varepsilon < \varepsilon_0$. Для любого $\delta > 0$ и для любой траектории $x_\varepsilon(t)$ системы (2.3) найдется траектория $\bar{x}_\varepsilon(t)$ дифференциального включения

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)) \tag{3.10}$$

(управляемой системы (2.1)) такая, что (см. [25])

$$\max_{t\in[t_0,t_1]} \|\bar{x}_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(t)\| \le \delta.$$

Можно выбрать δ настолько малым, чтобы

$$\max_{t\in[t_0,t_1]} g(\bar{x}_\varepsilon(t)) < 3\frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу [21, теорема 1] существует константа $K > 0$ такая, что для любой траектории $\bar{x}_\varepsilon(t)$ включения (3.10) существует траектория $\hat{x}(t)$ включения (3.10), удовлетворяющая фазовым ограничениям $\hat{x}(t) \in S$ и неравенству

$$\max_{t\in[t_0,t_1]} \|\bar{x}_\varepsilon(t) - \hat{x}(t)\| \le K \max_{t\in[t_0,t_1]} (d(\bar{x}_\varepsilon(t)), S). \tag{3.11}$$

По леммам 1, 2 существует $M > 0$ такое, что

$$d(\bar{x}_\varepsilon(t), S) \le M \max\big\{ \max_{i=1,\ldots,m} g_i(\bar{x}_\varepsilon(t)), 0\big\} \le \frac{3M\varepsilon}{2},$$

следовательно, неравенство (3.11) можно записать в виде

$$\max_{t\in[t_0,t_1]} \|\bar{x}_\varepsilon(t)) - \hat{x}(t))\| \le \frac{3KM\varepsilon}{2}.$$

Так как при $g(x) \le 0$ имеет место равенство $f_\varepsilon(x, u) = f(x, u)$ $\forall u \in U$, то $G_0(\theta) \subset G_\varepsilon(\theta)$. Для $\hat{x}(\theta) \in G_0(\theta)$, $x_\varepsilon(\theta) \in G_\varepsilon(\theta)$ имеем

$$\|\hat{x}(\theta) - x_\varepsilon(\theta)\| \le \delta + \frac{3KM\varepsilon}{2}.$$

Поскольку δ можно выбрать сколь угодно малым, то отсюда получаем (3.9) при $L = \dfrac{3KM}{2}$. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 455 с.
2. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
3. **Черноусько Ф.Л.** Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988. 319 с.
4. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
5. **Kurzhanski A.B., Valyi I.** Ellipsoidal calculus for estimation and control. SCFA. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p.

6. **Лотов А. В.** Численный метод построения множеств достижимости для линейных управляемых систем с фазовыми ограничениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1975. Т. 15, № 1. С. 67–78.
7. **Матвийчук А.Р., Ушаков В.Н.** О построении разрешающих управлений в задачах управления с фазовыми ограничениями // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006. № 1. С. 5–20.
8. **Kurzhanski A.B., Mitchell I.M., Varaiya P.** Optimization techniques for state-constrained control and obstacle problems // J. Optim. Theory Appl. 2006. Vol. 128, no. 3. P. 499–521.
9. **Baier R., Chahma I. A., Lempio F.** Stability and convergence of Euler's method for state-constrained differential inclusions // SIAM J. Optim. 2007. Vol. 18, no. 3. P. 1004–1026.
10. **Bonneuil N.** Computing reachable sets as capture-viability kernels in reverse time // Appl. Math. 2012. Vol. 3, no. 11. P. 1593–1597. DOI: 10.4236/am.2012.311219.
11. **Костоусова Е.К.** Внешнее и внутреннее оценивание областей достижимости при помощи параллелотопов // Вычислительные технологии. 1998. Т. 3, № 2. С. 11–20.
12. **Гусев М.И.** Внешние оценки множеств достижимости нелинейных управляемых систем // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 39–51.
13. **Куржанский А.Б., Филиппова Т.Ф.** Об описании множества выживающих траекторий дифференциального включения // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 1. С. 38–41.
14. **Куржанский А.Б., Филиппова Т.Ф.** Об описании пучка выживающих траекторий управляемой системы // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 8. С. 1303–1315.
15. **Гусев М.И.** О методе штрафных функций в задаче построения множеств достижимости управляемых систем с фазовыми ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 1. С. 81–86.
16. **Гусев М.И.** Внутренние аппроксимации множеств достижимости управляемых систем с фазовыми ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. С. 73–88.
17. **Forcellini F., Rampazzo F.** On non-convex differential inclusions whose state is constrained in the closure of an open set // J. Differential Integral Equations. 1999. Vol. 12, no. 4. P. 471–497.
18. **Frankowska H., Vinter R.B.** Existence of neighboring feasible trajectories: Applications to dynamic programming for state-constrained optimal control problems // J. Optim. Theory Appl. 2000. Vol. 104, no. 1. P. 21–40.
19. **Stern R.J.** Characterization of the state constrained minimal time function // SIAM J. Control Optim. 2004. Vol. 43, no. 2. P. 697–707.
20. **Bettiol P., Frankowska H., Vinter R.B.** L^{∞} estimates on trajectories confined to a closed subset // J. Differential Equations. 2012. Vol. 252, no. 2. P. 1912–1933.
21. **Bressan A., Facchi G.** Trajectories of differential inclusions with State Constraints // J. Differential Equations. 2011. Vol. 250, no. 2. P. 2267–2281.
22. **Субботин А.И.**Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
23. **Lions P. L., Souganidis P. E.** Differential games, optimal control and directional derivatives of viscosity solutions of Bellman's and Isaacs's equations // SIAM J. Control Optim. 1985. Vol. 23, no. 4. C. 566–583.
24. **Гусев М.И.** О снятии фазовых ограничений при построении множеств достижимости // Тр. Ин-та математики и механики УРО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 106–115.
25. **Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.** Теория экстремальных задач. М: Наука, 1974. 480 с.
26. Линейные неравенства и смежные вопросы / ред. Г.У. Кун, А.У. Таккер. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 469 с.

Гусев Михаил Иванович

д-р физ.-мат. наук

зав. отделом

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

профессор

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: gmi@imm.uran.ru.

Поступила 09.03.2015

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.977

АППРОКСИМАЦИЯ МНОЖЕСТВА ТРАЕКТОРИЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЕМОЙ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ УРЫСОНА

Н. Гусейин, А. Гусейин, Х. Г. Гусейнов

Рассматривается аппроксимация множества траекторий управляемой системы, описываемой интегральным уравнением Урысона. Замкнутый шар пространства $L_p([a,b];\mathbb{R}^m)$ $(p>1)$ с радиусом r и центром в начале координат выбирается в качестве множества допустимых управлений. Множество допустимых управлений заменяется множеством управляющих функций, которое состоит из конечного числа управлений и порождает конечное число траекторий. Получена оценка точности для хаусдорфова расстояния между множеством траекторий и множеством, состоящим из конечного числа траекторий.

Ключевые слова: интегральное уравнение Урысона, управляемая система, интегральное ограничение, множество траекторий, аппроксимация.

N. Huseyin, A. Huseyin, Kh. G. Guseinov. Approximation of the set of trajectories of a control system described by the Urysohn integral equation.

The approximation of the set of trajectories of a control system described by the Urysohn integral equation is considered. The closed ball of the space $L_p([a,b];\mathbb{R}^m)$ $(p>1)$ of radius r centered at the origin is chosen as the set of admissible controls. This set is replaced by a set of control functions, which consists of a finite number of controls and generates a finite number of trajectories. An accuracy estimate is obtained for the Hausdorff distance between the set of trajectories and the set consisting of a finite number of trajectories.

Keywords: Urysohn integral equation, control system, integral constraint, set of trajectories, approximation.

Введение

Интегральные уравнения возникают в разных задачах современной физики, механики, экономики, биологии и медицины (см., например, [1–12] и ссылки в них). Некоторые процессы, описываемые интегральными уравнениями, имеют внешние воздействия, которые характеризуются как управляющие воздействия. Многие управляющие воздействия имеют ограниченные запасы, и они, как правило, заканчиваются при потреблении. К таким управляющим воздействиям можно отнести управления, которые базируются на некоторых запасах энергии, топлива, капитала или же продуктов питания. Эти управляющие функции обычно характеризуются интегральными ограничениями на управляющие функции (см., например, [13–23]).

Управляемые системы, описываемые интегральными уравнениями, изучаются в работах [1; 3; 4; 7; 8]. В статьях [7; 15; 16] рассматривается аппроксимация множества траекторий управляемой системы, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением и интегральным уравнением типа Вольтерра, где функции управления имеют интегральное ограничение.

В данной работе изучается множество траекторий управляемой системы, описываемой интегральным уравнением типа Урысона с интегральным ограничением на функции управления. Предполагается, что уравнение является нелинейным по вектору состояния, аффинным по вектору управления. Замкнутый шар пространства $L_p([a,b];\mathbb{R}^m)$ $(p>1)$ с радиусом r и центром в начале координат выбирается в качестве множества допустимых управлений.

Шаг за шагом множество допустимых управлений упрощается, и в конце оно заменяется множеством, которое содержит конечное число управляющих функций и порождает конечное число траекторий. Получена оценка точности для хаусдорфова расстояния между множеством траекторий системы и множеством, состоящим из конечного числа траекторий.

1. Уравнение системы и основные условия

Рассмотрим управляемую систему, которая описывается интегральным уравнением Урысона

$$x(\xi) = f\left(\xi, x\left(\xi\right)\right) + \lambda \int\limits_a^b \left[K_1\left(\xi, s, x\left(s\right)\right) + K_2\left(\xi, s, x\left(s\right)\right) u\left(s\right)\right] ds, \tag{1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^m$ — вектор управления, $\xi \in [a, b]$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$.

Пусть $p > 1$ и $r > 0$ — заданные числа,

$$U_{p,r} = \left\{u(\cdot) \in L_p\big([a, b]; \mathbb{R}^m\big) \colon \left\|u(\cdot)\right\|_p \le r\right\},$$

где $L_p\big([a, b]; \mathbb{R}^m\big)$ является пространством измеримых по Лебегу функций $u(\cdot) \colon [a, b] \to \mathbb{R}^m$ таких, что $\left\|u(\cdot)\right\|_p < +\infty$, $\left\|u(\cdot)\right\|_p = \Big(\int_a^b \left\|u(s)\right\|^p ds\Big)^{\frac{1}{p}}$, $\|\cdot\|$ означает евклидову норму.

$U_{p,r}$ называется *множеством допустимых управлений*, а каждая функция $u(\cdot) \in U_{p,r}$ — *допустимым управлением*. В силу неравенства Гельдера для любой $u(\cdot) \in U_{p,r}$ выполняется неравенство

$$\int\limits_a^b \left\|u(s)\right\| ds \le (b - a)^{\frac{p-1}{p}}\, r. \tag{1.2}$$

Предполагается, что функции $f(\cdot)$, $K_1(\cdot)$, $K_2(\cdot)$ и число $\lambda \in \mathbb{R}^1$, заданные в уравнении (1.1), удовлетворяют следующим условиям:

A. Функции $f(\cdot) \colon [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $K_1(\cdot) \colon [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $K_2(\cdot) \colon [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times m}$ непрерывны по совокупности аргументов.

B. Существуют постоянные Липшица $l_0 \in [0, 1)$, $l_1 \ge 0$ и $l_2 \ge 0$ такие, что

$$\left\|f(\xi, x_1) - f(\xi, x_2)\right\| \le l_0 \left\|x_1 - x_2\right\|$$

при всех $(\xi, x_1) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$, $(\xi, x_2) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$ и

$$\left\|K_1(\xi, s, x_1) - K_1(\xi, s, x_2)\right\| \le l_1 \left\|x_1 - x_2\right\|, \quad \left\|K_2(\xi, s, x_1) - K_2(\xi, s, x_2)\right\| \le l_2 \left\|x_1 - x_2\right\|$$

при любых $(\xi, s, x_1) \in [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R}^n$, $(\xi, s, x_2) \in [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R}^n$.

C. Выполняется неравенство $0 \le \lambda\big[l_1\,(b - a) + l_2\,(b - a)^{\frac{p-1}{p}}\, r\big] < 1 - l_0$.

Обозначим

$$l(\lambda) = l_0 + \lambda\big[l_1\,(b - a) + l_2\,(b - a)^{\frac{p-1}{p}}\, r\big]. \tag{1.3}$$

Из условия C и неравенства (1.2) следует, что для любой $u(\cdot) \in U_{p,r}$ выполняется следующее уравнение:

$$\frac{\lambda}{1 - l_0} \int\limits_a^b \left(l_1 + l_2 \left\|u(s)\right\|\right) ds \le \frac{\lambda}{1 - l_0}\big[l_1(b - a) + l_2\,(b - a)^{\frac{p-1}{p}}\, r\big] = \frac{l(\lambda) - l_0}{1 - l_0} < 1. \tag{1.4}$$

Приведем определение траекторий системы (1.1), порожденных допустимым управлением $u(\cdot) \in U_{p,r}$. Непрерывная функция $x(\cdot) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая уравнению (1.1) при всех $\xi \in [a,b]$, называется траекторией системы (1.1), порожденной допустимым управлением $u(\cdot) \in U_{p,r}$. Совокупность траекторий (1.1), порожденных всеми допустимыми управлениями $u(\cdot) \in U_{p,r}$, обозначим символом $\mathbf{X}_{p,r}$.

Отметим, что условия $A - C$ гарантируют, что каждое допустимое управление $u(\cdot) \in U_{p,r}$ порождает единственную траекторию $x(\cdot)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ системы (1.1). Теперь сформулируем некоторые вспомогательные утверждения, которые будут использоваться в дальнейших исследованиях.

Утверждение 1. *Пусть* $v(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}$ *и* $r(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}$ *— непрерывные функции,* $\psi(\cdot) : [a,b] \to [0,+\infty)$ *— интегрируемая по Лебегу функция,* $\int_a^b \psi(s)ds < 1$ *и*

$$v(\xi) \le r(\xi) + \int\limits_a^b \psi(s)v(s)ds \tag{1.5}$$

для всех $\xi \in [a,b]$. *Тогда*

$$v(\xi) \le r(\xi) + \frac{\int\limits_a^b r(s)\psi(s)ds}{1 - \int\limits_a^b \psi(s)ds} \tag{1.6}$$

при всех $\xi \in [a,b]$.

Более того, если $r(\xi) = r_0$ *для всех* $\xi \in [a,b]$ *и* $\int_a^b \psi(s)ds \le a_0 < 1$, *то из* (1.5) *следует, что*

$$v(\xi) \le \frac{r_0}{1 - a_0} \tag{1.7}$$

при любых $\xi \in [a,b]$.

Доказательство. Так как $\psi(\xi) \ge 0$ для всех $\xi \in [a,b]$, то из (1.5) имеем, что

$$\psi(\xi)v(\xi) \le r(\xi)\psi(\xi) + \psi(\xi)\int\limits_a^b \psi(s)v(s)ds \tag{1.8}$$

при всех $\xi \in [a,b]$. Проинтегрировав неравенство (1.8) на отрезке $[a,b]$, получаем, что

$$\int\limits_a^b \psi(s)v(s)ds \le \int\limits_a^b r(s)\psi(s)ds + \int\limits_a^b \psi(s)ds \int\limits_a^b \psi(s)v(s)ds. \tag{1.9}$$

Поскольку $\int_a^b \psi(s)ds < 1$, то из (1.9) вытекает справедливость неравенства (1.6). Наконец, справедливость неравенства (1.7) сразу следует из (1.6).

Утверждение 2. *Множество траекторий* $\mathbf{X}_{p,r}$ *является ограниченным подмножеством пространства* $C([a,b];\mathbb{R}^n)$, *т. е. существует* $r_* > 0$ *такое, что* $\|x(\cdot)\|_C \le r_*$ *для всех* $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,r}$.

Здесь $C([a,b];\mathbb{R}^n)$ *является пространством непрерывных функций* $x(\cdot)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *с нормой* $\|x(\cdot)\|_C = \max\{\,\|x(\xi)\| : \xi \in [a,b]\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия B следует, что

$$\|f(\xi,x)\| \le c_0 + l_0\|x\|, \quad \|K_1(\xi,s,x)\| \le c_1 + l_1\|x\|, \quad \|K_2(\xi,s,x)\| \le c_2 + l_2\|x\| \tag{1.10}$$

при всех $(\xi,x) \in [a,b]\times\mathbb{R}^n$ и $(\xi,s,x) \in [a,b]\times[a,b]\times\mathbb{R}^n$, где

$$c_0 = \max\{\|f(\xi,0)\| : \xi\in[a,b]\}, \quad c_1 = \max\{\|K_1(\xi,s,0)\| : (\xi,s)\in[a,b]\times[a,b]\},$$
$$c_2 = \max\{\|K_2(\xi,s,0)\| : (\xi,s)\in[a,b]\times[a,b]\},$$

а постоянные l_0, l_1 и l_2 определены в условии B.

Пусть $x(\cdot)\in\mathbf{X}_{p,r}$ — произвольная траектория системы (1.1), порожденная функцией управления $u(\cdot)\in U_{p,r}$. Тогда из (1.2) и (1.10) получаем, что

$$\|x(\xi)\| \le c_0 + l_0\|x(\xi)\| + \lambda\int_a^b [c_1 + l_1\|x(s)\|]\,ds + \lambda\int_a^b [c_2 + l_2\|x(s)\|]\,\|u(s)\|\,ds$$
$$\le c_0 + l_0\|x(\xi)\| + \lambda c_1(b-a) + \lambda c_2(b-a)^{\frac{p-1}{p}}r + \lambda\int_a^b [l_1 + l_2\|u(s)\|]\,\|x(s)\|\,ds.$$

Так как $l_0\in[0,1)$, то из последнего неравенста вытекает, что

$$\|x(\xi)\| \le \frac{c_0 + \lambda c_1(b-a) + \lambda c_2(b-a)^{\frac{p-1}{p}}r}{1-l_0} + \frac{\lambda}{1-l_0}\int_a^b [l_1 + l_2\|u(s)\|]\,\|x(s)\|\,ds. \tag{1.11}$$

Из (1.3), (1.4), (1.11) и утверждения 1 следует, что

$$\|x(\xi)\| \le \frac{c_0 + \lambda c_1(b-a) + \lambda c_2(b-a)^{\frac{p-1}{p}}r}{1-l_0}\,\frac{1}{1-\dfrac{\lambda\big[l_1(b-a) + l_2(b-a)^{\frac{p-1}{p}}r\big]}{1-l_0}}$$
$$= \frac{c_0 + \lambda c_1(b-a) + \lambda c_2(b-a)^{\frac{p-1}{p}}r}{1-l_0}\,\frac{1}{1-\dfrac{l(\lambda)-l_0}{1-l_0}}$$
$$= \frac{c_0 + \lambda c_1(b-a) + \lambda c_2(b-a)^{\frac{p-1}{p}}r}{1-l(\lambda)}. \tag{1.12}$$

Поскольку $\xi\in[a,b]$ является произвольно выбранной, то, обозначив

$$r_* = \frac{c_0 + \lambda c_1(b-a) + \lambda c_2(b-a)^{\frac{p-1}{p}}r}{1-l(\lambda)},$$

из неравенства (1.12) получим доказательство утверждения.

Введем обозначения

$$B_n(r_*) = \{x\in\mathbb{R}^n :\ \|x\| \le r_*\},$$

$$B_C = \{x(\cdot)\in C([a,b];\mathbb{R}^n) :\ \|x(\cdot)\|_C \le 1\}, \tag{1.13}$$

$$D_1 = [a,b]\times B_n(r_*), \quad D_2 = [a,b]\times[a,b]\times B_n(r_*),$$

$$M_2 = \max\left\{\, \|K_2(\xi,s,x)\| : (\xi,s,x)\in D_2 \right\}, \tag{1.14}$$

$$\omega_0(\Delta) = \max\Big\{\, \|f(\xi_2,x)-f(\xi_1,x)\| : \ |\xi_2-\xi_1|\le\Delta,\ (\xi_1,x)\in D_1,\ (\xi_2,x)\in D_1 \Big\},$$

$$\omega_1(\Delta) = \max\Big\{ \big\|K_1(\xi_2,s_2,x_2)-K_1(\xi_1,s_1,x_1)\big\| : \ |\xi_2-\xi_1|\le\Delta,\ |s_2-s_1|\le\Delta,$$
$$\|x_2-x_1\|\le\Delta,\ (\xi_1,s_1,x_1)\in D_2,\ (\xi_2,s_2,x_2)\in D_2 \Big\},$$

$$\omega_2(\Delta) = \max\Big\{\, \|K_2(\xi_2,s_2,x_2)-K_2(\xi_1,s_1,x_1)\| : \ |\xi_2-\xi_1|\le\Delta,\ |s_2-s_1|\le\Delta,$$
$$\|x_2-x_1\|\le\Delta,\ (\xi_1,s_1,x_1)\in D_2,\ (\xi_2,s_2,x_2)\in D_2 \Big\}, \tag{1.15}$$

$$\varphi(\Delta) = \frac{1}{1-l_0}\Big\{\omega_0(\Delta)+\lambda(b-a)\omega_1(\Delta)+\lambda\omega_2(\Delta)\,(b-a)^{\frac{p-1}{p}}\,r\Big\}, \tag{1.16}$$

где r_* определена в утверждении 2. Очевидно, что функция $\varphi(\cdot):(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ является неубывающей и $\varphi(\Delta)\to 0^+$ при $\Delta\to 0^+$. Не нарушая общности, будем полагать, что

$$\varphi(\Delta)\ge\Delta \tag{1.17}$$

при всех $\Delta>0$.

Утверждение 3. *Для любых* $x(\cdot)\in\mathbf{X}_{p,r}$, $\xi_1\in[a,b]$, $\xi_2\in[a,b]$ *справедливо неравенство*

$$\|x(\xi_2)-x(\xi_1)\|\le\varphi\left(|\xi_2-\xi_1|\right),$$

где $\varphi(\cdot)$ *определена равенством* (1.16).

Доказательство утверждения 3 следует из условий $\mathbf{A}-\mathbf{C}$.

Так как $\varphi(\Delta)\to 0^+$ при $\Delta\to 0^+$, то из утверждения 3 получаем, что множество траекторий $\mathbf{X}_{p,r}$ является семейством равностепенно непрерывных функций. Тогда в силу утверждения 2 и теоремы Арцела — Асколи имеем, что множество траекторий $\mathbf{X}_{p,r}$ является предкомпактным подмножеством пространства $C\left([a,b];\mathbb{R}^n\right)$. Далее, используя слабую компактность множества допустимых управлений $U_{p,r}$ в пространстве $L_p\left([a,b];\mathbb{R}^m\right)$ и аффинность правой части уравнения (1.1) относительно u, можно доказать, что множество траекторий $\mathbf{X}_{p,r}$ является замкнутым в пространстве $C\left([a,b];\mathbb{R}^n\right)$. Наконец, из предкомпактности и замкнутости следует компактность множества траекторий $\mathbf{X}_{p,r}$ в пространстве $C\left([a,b];\mathbb{R}^n\right)$. Итак, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4. *Множество траекторий* $\mathbf{X}_{p,r}$ *является компактным подмножеством пространства* $C\left([a,b];\mathbb{R}^n\right)$.

Положим

$$L_* = \frac{\lambda M_2}{1-l(\lambda)}, \tag{1.18}$$

где $l(\lambda)$ определена соотношением (1.3), а M_2 — соотношением (1.14).

Утверждение 5. *Пусть* $x_1(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,r}$ *и* $x_2(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,r}$ *являются траекториями системы* (1.1)*, порожденными соответственно допустимыми управлениями* $u_1(\cdot) \in U_{p,r}$ *и* $u_2(\cdot) \in U_{p,r}$*. Тогда*

$$\|x_1(\xi) - x_2(\xi)\| \leq L_* \int_a^b \|u_1(s) - u_2(s)\|\, ds$$

для всех $\xi \in [a, b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $x_1(\cdot)$ и $x_2(\cdot)$ являются траекториями системы (1.1), порожденными соответственно допустимыми управлениями $u_1(\cdot) \in U_{p,r}$ и $u_2(\cdot) \in U_{p,r}$, то из условия B вытекает, что

$$\|x_1(\xi) - x_2(\xi)\| \leq \|f(\xi, x_1(\xi)) - f(\xi, x_2(\xi))\| + \lambda \int_a^b \|K_1(\xi, s, x_1(s)) - K_1(\xi, s, x_2(s))\|\, ds$$

$$+ \lambda \int_a^b \|K_2(\xi, s, x_1(s))\|\, \|u_1(s) - u_2(s)\|\, ds + \lambda \int_a^b \|K_2(\xi, s, x_1(s)) - K_2(\xi, s, x_2(s))\|\, \|u_2(s)\|\, ds$$

$$\leq l_0 \|x_1(\xi) - x_2(\xi)\| + \lambda \int_a^b (l_1 + l_2 \|u_2(s)\|)\, \|x_1(s) - x_2(s)\|\, ds$$

$$+ \lambda \int_a^b \|K_2(\xi, s, x_1(s))\|\, \|u_1(s) - u_2(s)\|\, ds \tag{1.19}$$

при всех $\xi \in [a, b]$.

Поскольку $x_1(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,r}$, то согласно утверждению 2 справедливо $\|x_1(\cdot)\|_C \leq r_*$. Тогда из (1.14) получаем, что

$$\|K_2(\xi, s, x_1(s))\| \leq M_2 \tag{1.20}$$

для всех $\xi \in [a, b]$ и $s \in [a, b]$. Так как $l_0 \in [0, 1)$, то из неравенств (1.19) и (1.20) имеем, что

$$\|x_1(\xi) - x_2(\xi)\| \leq \frac{\lambda M_2}{1 - l_0} \int_a^b \|u_1(s) - u_2(s)\|\, ds$$

$$+ \frac{\lambda}{1 - l_0} \int_a^b [l_1 + l_2 \|u_2(s)\|]\, \|x_1(s) - x_2(s)\|\, ds \tag{1.21}$$

при любых $\xi \in [a, b]$. Поскольку $u_2(\cdot) \in U_{p,r}$, то из (1.4), (1.18), (1.21) и утверждения 1 вытекает, что

$$\|x_1(\xi) - x_2(\xi)\| \leq \frac{\dfrac{\lambda M_2}{1 - l_0}}{1 - \dfrac{l(\lambda) - l_0}{1 - l_0}} \int_a^b \|u_1(s) - u_2(s)\|\, ds$$

$$= \frac{\lambda M_2}{1 - l(\lambda)} \int_a^b \|u_1(s) - u_2(s)\|\, ds = L_* \int_a^b \|u_1(s) - u_2(s)\|\, ds$$

для всех $\xi \in [a, b]$.

2. Геометрическое ограничение

Пусть $\beta > 0$ — заданное число. Положим

$$U_{p,r}^{\beta} = \left\{ u(\cdot) \in U_{p,r} : \|u(\xi)\| \leq \beta \text{ для всех } \xi \in [a,b] \right\}.$$

Множество траекторий системы (1.1), порожденных функциями управления $u(\cdot) \in U_{p,r}^{\beta}$, обозначим символом $\mathbf{X}_{p,r}^{\beta}$ и положим

$$c_* = 2L_* r^p, \tag{2.1}$$

где L_* определено соотношением (1.18).

Хаусдорфово расстояние между множествами $G \subset C([a,b];\mathbb{R}^n)$ и $W \subset C([a,b];\mathbb{R}^n)$ обозначим символом $h_C(G,W)$. Следующее утверждение характеризует хаусдорфово расстояние между множествами $\mathbf{X}_{p,r}$ и $\mathbf{X}_{p,r}^{\beta}$.

Утверждение 6. *Для любого $\beta > 0$ выполняется неравенство*

$$h_C\left(\mathbf{X}_{p,r}, \mathbf{X}_{p,r}^{\beta}\right) \leq \frac{c_*}{\beta^{p-1}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольную траекторию $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,r}$, порожденную функцией управления $u(\cdot) \in U_{p,r}$. Определим новую функцию управления $u_*(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, полагая

$$u_*(\xi) = \begin{cases} u(\xi)\ , & \text{если } \|u(\xi)\| \leq \beta, \\ \beta \dfrac{u(\xi)}{\|u(\xi)\|}\ , & \text{если } \|u(\xi)\| > \beta, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $\xi \in [a,b]$.

Нетрудно установить, что $u_*(\cdot) \in U_{p,r}^{\beta}$. Пусть $x_*(\cdot)$ — траектория системы (1.1), порожденная функцией управления $u_*(\cdot) \in U_{p,r}^{\beta}$. Тогда $x_*(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,r}^{\beta}$ и согласно утверждению 5 имеем, что

$$\|x(\xi) - x_*(\xi)\| \leq L_* \int_a^b \|u(s) - u_*(s)\|\, ds \tag{2.3}$$

при любых $\xi \in [a,b]$. Полагая $\Omega = \{s \in [a,b] \colon \|u(s)\| > \beta\}$, из (2.2) и (2.3) получаем, что выполняется неравенство

$$\|x(\xi) - x_*(\xi)\| \leq L_* \int_{\Omega} \|u(s) - u_*(s)\|\, ds \tag{2.4}$$

при всех $\xi \in [a,b]$.

Из определения множества Ω и включения $u(\cdot) \in U_{p,r}$ вытекает, что

$$r^p \geq \int_a^b \|u(s)\|^p ds \geq \int_{\Omega} \|u(s)\|^p ds \geq \int_{\Omega} \beta^p ds \geq \beta^p \mu(\Omega)\ ,$$

где $\mu(\Omega)$ означает меру Лебега множества Ω, и, следовательно,

$$\mu(\Omega) \leq \frac{r^p}{\beta^p}\,. \tag{2.5}$$

Из включений $u(\cdot) \in U_{p,r}$, $u_*(\cdot) \in U_{p,r}$, неравенства Гельдера и (2.5) следует, что

$$\int\limits_{\Omega} \|u(s) - u_*(s)\| \, ds \le \int\limits_{\Omega} \|u(s)\| \, ds + \int\limits_{\Omega} \|u_*(s)\| \, ds \le 2\mu(\Omega)^{\frac{p-1}{p}} r \le 2\frac{r^p}{\beta^{p-1}}. \tag{2.6}$$

Из соотношений (2.1), (2.4) и (2.6) получаем, что

$$\|x(\xi) - x_*(\xi)\| \le 2L_* \frac{r^p}{\beta^{p-1}} = \frac{c_*}{\beta^{p-1}}$$

при всех $\xi \in [a,b]$, и поэтому

$$\|x(\cdot) - x_*(\cdot)\|_C \le \frac{c_*}{\beta^{p-1}}\,. \tag{2.7}$$

Таким образом, для произвольно выбранной $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,r}$ существует $x_*(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,r}^{\beta}$ такая, что выполняется неравенство (2.7). Это означает, что

$$\mathbf{X}_{p,r} \subset \mathbf{X}_{p,r}^{\beta} + \frac{c_*}{\beta^{p-1}} B_C, \tag{2.8}$$

где B_C определено равенством (1.13).

Поскольку $\mathbf{X}_{p,r}^{\beta} \subset \mathbf{X}_{p,r}$, то включение (2.8) завершает доказательство.

3. Кусочно-постоянные функции управления

Пусть $\Gamma = \{a = \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N = b\}$ является равномерным разбиением замкнутого интервала $[a,b]$, $\xi_{i+1} - \xi_i = \dfrac{b-a}{N} = \Delta$, $i = 0,1,\ldots,N-1$. Полагая

$$U_{p,r}^{\beta,\Gamma} = \left\{u(\cdot) \in U_{p,r}^{\beta} \colon u(\xi) = u_i \text{ для всех } \xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}),\ i = 0,1,\ldots,N-1\right\},$$

определим новое множество управляющих функций.

Множество траекторий системы (1.1), порожденных функциями управления $u(\cdot) \in U_{p,r}^{\beta,\Gamma}$, обозначим символом $\mathbf{X}_{p,r}^{\beta,\Gamma}$. Далее, положим

$$\chi(\Delta) = \frac{2\lambda(b-a)^{\frac{p-1}{p}} r}{1 - l(\lambda)} \omega_2(\varphi(\Delta)), \tag{3.1}$$

где $\omega_2(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$ определены соответственно соотношениями (1.15) и (1.16).

Утверждение 7. *Для любых $\beta > 0$ и равномерного разбиения Γ отрезка $[a,b]$ выполняется неравенство*

$$h_C\left(\mathbf{X}_{p,r}^{\beta}, \mathbf{X}_{p,r}^{\beta,\Gamma}\right) \le \chi(\Delta),$$

где Δ является диаметром разбиения Γ.

Доказательство. Выберем произвольную траекторию $x_*(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,r}^{\beta}$, порожденную функцией управления $u_*(\cdot) \in U_{p,r}^{\beta}$. Теперь определим новую функцию управления $u^*(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, полагая

$$u^*(\xi) = \frac{1}{\Delta} \int\limits_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} u_*(s) ds, \quad \xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}), \quad i = 0,1,\ldots,N-1. \tag{3.2}$$

Можно показать, что $u^*(\cdot) \in U_{p,r}^{\beta,\Gamma}$. Пусть $x^*(\cdot)$ является траекторией системы (1.1), порожденной функцией управления $u^*(\cdot)$. Тогда $x^*(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,r}^{\beta,\Gamma}$, и в силу условия B имеем, что

$$\|x_*(\xi) - x^*(\xi)\| \le \frac{\lambda}{1-l_0} \int\limits_a^b [l_1 + l_2 \|u_*(s)\|] \, \|x_*(s) - x^*(s)\| \, ds$$

$$+ \frac{\lambda}{1-l_0} \sum_{i=0}^{N-1} \left\| \int\limits_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} K_2(\xi, s, x^*(s)) \, [u_*(s) - u^*(s)] \, ds \right\| \tag{3.3}$$

при любых $\xi \in [a,b]$.

Имея в виду соотношения (3.2), получаем справедливость равенства

$$\int\limits_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} u^*(s) ds = \int\limits_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} u_*(s) ds,$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} K_2(\xi, s, x^*(s)) \, [u_*(s) - u^*(s)] \, ds$$

$$= \int\limits_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} [K_2(\xi, s, x^*(s)) - K_2(\xi, \xi_i, x^*(\xi_i))] \, [u_*(s) - u^*(s)] \, ds \tag{3.4}$$

при всех $i = 0, 1, \ldots, N-1$.

Согласно (1.17) и утверждению 3 имеем, что для всех $s \in [\xi_i, \xi_{i+1}]$ выполняется неравенство

$$|s - \xi_i| \le \varphi(\Delta), \quad \|x^*(s) - x^*(\xi_i)\| \le \varphi(\Delta).$$

Тогда из (1.15) вытекает, что

$$\|K_2(\xi, s, x^*(s)) - K_2(\xi, \xi_i, x^*(\xi_i))\| \le \omega_2(\varphi(\Delta)) \tag{3.5}$$

при любых $s \in [\xi_i, \xi_{i+1}]$ и $i = 0, 1, \ldots, N-1$.

Из соотношений (3.4) и (3.5) следует, что

$$\left\| \int\limits_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} K_2(\xi, s, x^*(s)) \, [u_*(s) - u^*(s)] \, ds \right\| \le \omega_2(\varphi(\Delta)) \int\limits_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \|u_*(s) - u^*(s)\| \, ds \tag{3.6}$$

при всех $i = 0, 1, \ldots, N-1$.

Так как $u^*(\cdot) \in U_{p,r}^{\beta}$ и $u^*(\cdot) \in U_{p,r}^{\beta,\Gamma}$, то из (1.2), (3.3) и (3.6) получаем, что

$$\|x_*(\xi) - x^*(\xi)\| \le \frac{\lambda}{1-l_0} \int\limits_a^b [l_1 + l_2 \|u_*(s)\|] \, \|x_*(s) - x^*(s)\| \, ds$$

$$+ \frac{\lambda}{1-l_0} \omega_2(\varphi(\Delta)) \int\limits_a^b \|u_*(s) - u^*(s)\| \, ds$$

$$\le \frac{\lambda}{1-l_0} \int\limits_a^b [l_1 + l_2 \|u_*(s)\|] \, \|x_*(s) - x^*(s)\| \, ds + \frac{2\lambda}{1-l_0} \omega_2(\varphi(\Delta)) (b-a)^{\frac{p-1}{p}} r \tag{3.7}$$

для всех $\xi \in [a,b]$.

Далее, из (1.4), (3.1), (3.7) и утверждения 1 заключаем, что

$$\|x_*(\xi) - x^*(\xi)\| \leq \frac{\dfrac{2\lambda\omega_2(\varphi(\Delta))(b-a)^{\frac{p-1}{p}}r}{1-l_0}}{1-\dfrac{l(\lambda)-l_0}{1-l_0}} = \frac{2\lambda\omega_2(\varphi(\Delta))(b-a)^{\frac{p-1}{p}}r}{1-l(\lambda)} = \chi(\Delta)$$

при любых $\xi \in [a,b]$ и, следовательно,

$$\|x_*(\cdot) - x^*(\cdot)\|_C \leq \chi(\Delta). \tag{3.8}$$

Итак, для произвольно выбранной траектории $x_*(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,r}^{\beta}$ существует $x^*(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,r}^{\beta,\Gamma}$ такая, что выполняется неравенство (3.8). Это означает, что

$$\mathbf{X}_{p,r}^{\beta} \subset \mathbf{X}_{p,r}^{\beta,\Gamma} + \chi(\Delta)B_C. \tag{3.9}$$

Поскольку $\mathbf{X}_{p,r}^{\beta,\Gamma} \subset \mathbf{X}_{p,r}^{\beta}$, то из включения (3.9) получаем доказательство утверждения.

4. Функции управления с нормами в равномерном разбиении

Пусть $\Gamma_* = \{0 = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_q = \beta\}$ является равномерным разбиением отрезка $[0,\beta]$, $\alpha_{j+1} - \alpha_j = \dfrac{\beta}{q} = \Delta_*$, $j = 0,1,\ldots,q-1$. Обозначим

$$U_{p,r}^{\beta,\Gamma,\Gamma_*} = \left\{u(\cdot) \in U_{p,r}^{\beta,\Gamma} : \|u(\xi)\| = \alpha_{j_i} \text{ для всех } \xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}),\ i = 0,1,\ldots,N-1\right\}.$$

Множество траекторий системы (1.1), порожденных функциями управления $u(\cdot) \in U_{p,r}^{\beta,\Gamma,\Gamma_*}$, обозначим символом $\mathbf{X}_{p,r}^{\beta,\Gamma,\Gamma_*}$, и пусть

$$\theta\left(\Delta_*\right) = L_*(b-a)\Delta_*, \tag{4.1}$$

где L_* определено соотношением (1.18).

Следующее утверждение характеризует хаусдорфово расстояние между множествами траекторий $\mathbf{X}_{p,r}^{\beta,\Gamma}$ и $\mathbf{X}_{p,r}^{\beta,\Gamma,\Gamma_*}$.

Утверждение 8. *Для любых $\beta > 0$, равномерного разбиения Γ отрезка $[a,b]$ и равномерного разбиения Γ_* отрезка $[0,\beta]$ выполняется неравенство*

$$h_C\left(\mathbf{X}_{p,r}^{\beta,\Gamma}, \mathbf{X}_{p,r}^{\beta,\Gamma,\Gamma_*}\right) \leq \theta(\Delta_*),$$

где Δ_* является диаметром разбиения Γ_*.

Доказательство. Возьмем произвольную траекторию $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,r}^{\beta,\Gamma}$, порожденную функцией управления $u(\cdot) \in U_{p,r}^{\beta,\Gamma}$. Согласно определению множества управлений $U_{p,r}^{\beta,\Gamma}$ имеем, что

$$u(\xi) = u_i, \quad \xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}), \quad i = 0,1,\ldots,N-1,$$

$$\|u_i\| \leq \beta, \quad i = 0,1,\ldots,N-1, \quad \Delta \cdot \sum_{i=0}^{N-1} \|u_i\|^p \leq r^p.$$

Если $\|u_i\| < \beta$ для любых $i = 0,1,\ldots,N-1$, то существуют $\alpha_{j_i} \in \Gamma_*$ такие, что

$$\|u_i\| \in \left[\alpha_{j_i}, \alpha_{j_i+1}\right). \tag{4.2}$$

Определим новую функцию управления $u_*(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, полагая для $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$,

$$u_*(\xi) = \begin{cases} \dfrac{u_i}{\|u_i\|}\alpha_{j_i} & , \text{ если } 0 < \|u_i\| < \beta, \\ u_i & , \text{ если } \|u_i\| = 0 \text{ или } \|u_i\| = \beta, \end{cases} \tag{4.3}$$

где $\alpha_{j_i} \in \Gamma_*$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, определены соотношением (4.2). Если $\xi = b$, то принимаем, что $u_*(b) = u_*(\xi_{N-1})$. Нетрудно проверить, что $u_*(\cdot) \in U_{p,r}^{\beta,\Gamma,\Gamma_*}$ и

$$\|u(\xi) - u_*(\xi)\| \le \Delta_* \tag{4.4}$$

при любых $\xi \in [a,b]$.

Пусть $x_*(\cdot)$ является траекторией системы (1.1), порожденной функцией управления $u_*(\cdot) \in U_{p,r}^{\beta,\Gamma,\Gamma_*}$, которая определена соотношением (4.3). Тогда $x_*(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,r}^{\beta,\Gamma,\Gamma_*}$, и из (4.1), (4.4) и утверждения 5 следует, что

$$\|x(\xi) - x_*(\xi)\| \le L_*\,(b-a)\,\Delta_* = \theta(\Delta_*)$$

для всех $\xi \in [a,b]$. Из последнего неравенства вытекает, что

$$\|x(\cdot) - x_*(\cdot)\|_C \le \theta\,(\Delta_*)\,. \tag{4.5}$$

Итак, окончательно получаем, что для каждой $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,r}^{\beta,\Gamma}$ существует $x_*(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,r}^{\beta,\Gamma,\Gamma_*}$ такая, что выполняется неравенство (4.5), и, следовательно, справедливо включение

$$\mathbf{X}_{p,r}^{\beta,\Gamma} \subset \mathbf{X}_{p,r}^{\beta,\Gamma,\Gamma_*} + \theta\,(\Delta_*)\,B_C. \tag{4.6}$$

Так как $\mathbf{X}_{p,r}^{\beta,\Gamma,\Gamma_*} \subset \mathbf{X}_{p,r}^{\beta,\Gamma}$, то включение (4.6) завершает доказательство.

5. Конечное число траекторий

Пусть $S = \{x \in \mathbb{R}^m \colon \|x\| = 1\}$, $\sigma > 0$ и $S_\sigma = \{s_1, s_2, \ldots, s_L\}$ является конечной σ-сетью на S. Определим новое множество функций управления, полагая

$$\begin{aligned} U_{p,r}^{\beta,\Gamma,\Gamma_*,\sigma} \quad = \quad & \Big\{u(\cdot) \in U_{p,r}^{\beta,\Gamma,\Gamma_*} \colon u(\xi) = \alpha_{j_i} s_{l_i} \text{ для всех } \xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}), \\ & \alpha_{j_i} \in \Gamma^*,\ s_{l_i} \in S_\sigma,\ i = 0, 1, \ldots N-1\Big\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что множество $U_{p,r}^{\beta,\Gamma,\Gamma_*,\sigma}$ состоит из конечного числа управляющих функций. Отметим, что множество $U_{p,r}^{\beta,\Gamma,\Gamma_*,\sigma}$ можно переопределить как

$$\begin{aligned} U_{p,r}^{\beta,\Gamma,\Gamma_*,\sigma} \quad = \quad & \Big\{u(\cdot) \in L_p\,([a,b]\,; \mathbb{R}^m) : u(\xi) = \alpha_{j_i} s_{l_i} \text{ для всех } \xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}), \\ & \alpha_{j_i} \in \Gamma_*,\quad s_{l_i} \in S_\sigma,\quad i = 0, 1, \ldots, N-1,\ \Delta \cdot \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_{j_i}^p \le r^p\Big\}. \end{aligned}$$

Множество траекторий системы (1.1), порожденных функциями управления $u(\cdot) \in U_{p,r}^{\beta,\Gamma,\Gamma_*,\sigma}$, обозначим символом $\mathbf{X}_{p,r}^{\beta,\Gamma,\Gamma_*,\sigma}$. Очевидно, что множество $\mathbf{X}_{p,r}^{\beta,\Gamma,\Gamma_*,\sigma}$ состоит из конечного числа траекторий. Положим

$$\kappa(\beta,\sigma) = L_*(b-a)\beta\sigma. \tag{5.1}$$

Утверждение 9. *Для любых $\beta > 0$, равномерного разбиения Γ отрезка $[a,b]$, равномерного разбиения Γ_* отрезка $[0,\beta]$ и $\sigma > 0$ выполняется неравенство*

$$h_C\left(\mathbf{X}_{p,r}^{\beta,\Gamma,\Gamma_*}, \mathbf{X}_{p,r}^{\beta,\Gamma,\Gamma_*,\sigma}\right) \le \kappa(\beta,\sigma).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольную траекторию $x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,r}^{\beta,\Gamma,\Gamma_*}$, порожденную функцией управления $u(\cdot) \in U_{p,r}^{\beta,\Gamma,\Gamma_*}$. Из включения $u(\cdot) \in U_{p,r}^{\beta,\Gamma,\Gamma_*}$ следует, что

$$\|u(\xi)\| = \alpha_{j_i} \text{ для всех } \xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}), \quad \alpha_{j_i} \in \Gamma_*, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{5.2}$$

и числа $\alpha_{j_i} \in \Gamma_*$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, удовлетворяют неравенствам

$$\Delta \cdot \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_{j_i}^p \leq r^p, \quad 0 \leq \alpha_{j_i} \leq \beta \;\text{ для всех } i = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{5.3}$$

Из (5.2) вытекает, что существуют $b_i \in S$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, такие, что

$$u(\xi) = \alpha_{j_i} b_i \tag{5.4}$$

для всех $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$. Поскольку $b_i \in S$, S_σ является σ-сетью на S, то для каждого $b_i \in S$ можно найти $s_{l_i} \in S_\sigma$ такой, что выполняется неравенство

$$\|b_i - s_{l_i}\| \leq \sigma, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{5.5}$$

Определим новую функцию управления $\tilde{u}(\cdot) : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, где

$$\tilde{u}(\xi) = \alpha_{j_i} s_{l_i} \text{ для всех } \xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}), \quad i = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{5.6}$$

Из (5.3), (5.4), (5.5) и (5.6) следует, что $\tilde{u}(\cdot) \in U_{p,r}^{\beta,\Gamma,\Gamma_*,\sigma}$ и

$$\|u(\xi) - \tilde{u}(\xi)\| = \alpha_{j_i} \|b_i - s_{l_i}\| \leq \beta\sigma$$

при всех $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$. Из последнего неравенства вытекает, что

$$\|u(\xi) - \tilde{u}(\xi)\| \leq \beta\sigma \tag{5.7}$$

при любых $\xi \in [a, b)$.

Пусть $\tilde{x}(\cdot)$ является траекторией системы (1.1), порожденной функцией управления $\tilde{u}(\cdot) \in U_{p,r}^{\beta,\Gamma,\Gamma_*,\sigma}$, которая определена равенством (5.6). Тогда $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,r}^{\beta,\Gamma,\Gamma_*,\sigma}$, и, учитывая (5.1), (5.7) и утверждение 5, имеем, что

$$\|x(\xi) - \tilde{x}(\xi)\| \leq L_*(b-a)\beta\sigma = \kappa(\beta, \sigma)$$

при всех $\xi \in [a, b]$. Отсюда получаем, что

$$\|x(\cdot) - \tilde{x}(\cdot)\|_C \leq \kappa(\beta, \sigma). \tag{5.8}$$

Итак, установили, что для каждой $x(\cdot) \in \mathbf{X}_p^{\beta,\Gamma,\Gamma_*}$ существует $\tilde{x}(\cdot) \in \mathbf{X}_p^{\beta,\Gamma,\Gamma_*,\sigma}$ такая, что неравенство (5.8) выполняется. Это означает, что справедливо включение

$$\mathbf{X}_{p,r}^{\beta,\Gamma,\Gamma_*} \subset \mathbf{X}_{p,r}^{\beta,\Gamma,\Gamma_*,\sigma} + \kappa(\beta, \sigma) B_C. \tag{5.9}$$

Наконец, из включений $\mathbf{X}_{p,r}^{\beta,\Gamma,\Gamma_*,\sigma} \subset \mathbf{X}_{p,r}^{\beta,\Gamma,\Gamma_*}$ и (5.9) получаем справедливость утверждения.

6. Основная оценка

Из утверждений 6–9 вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. *Для любых* $\beta > 0$, *равномерного разбиения* Γ *отрезка* $[a,b]$, *равномерного разбиения* Γ_* *отрезка* $[0,\beta]$ *и* $\sigma > 0$ *выполняется неравенство*

$$h_C\left(\mathbf{X}_{p,r}, \mathbf{X}_{p,r}^{\beta,\Gamma,\Gamma_*,\sigma}\right) \leq \frac{c_*}{\beta^{p-1}} + \chi(\Delta) + \theta(\Delta_*) + \kappa(\beta,\sigma).$$

Здесь Δ *является диаметром разбиения* Γ, *а* Δ_* — *диаметром разбиения* Γ_*; c_*, $\chi(\Delta)$, $\theta(\Delta_*)$ *и* $\kappa(\beta,\sigma)$ *определены соответственно соотношениями* (2.1), (3.1), (4.1) *и* (5.1).

Из теоремы 1 вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 2. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют* $\beta(\varepsilon) > 0$, $\delta(\varepsilon) > 0$, $\delta_*(\varepsilon) > 0$ *и* $\sigma_*(\varepsilon,\beta(\varepsilon)) > 0$ *такие, что для всех* $\Delta \in (0,\delta(\varepsilon))$, $\Delta_* \in (0,\delta_*(\varepsilon))$, $\sigma \in (0,\sigma_*(\varepsilon,\beta(\varepsilon)))$ *справедливо неравенство*

$$h_C\left(\mathbf{X}_{p,r}, \mathbf{X}_{p,r}^{\beta(\varepsilon),\Gamma,\Gamma_*,\sigma}\right) < \varepsilon,$$

где Δ *является диаметром разбиения* Γ, *а* Δ_* — *диаметром разбиения* Γ_*.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Angell T.S., George R.K, Sharma J.P.** Controllability of Urysohn integral inclusions of Volterra type // Electron. J. Diff. Eq. 2010. No. 79. P. 1–12.
2. **Appell J., Kalitvin A.S., Zabreiko P.P.** Boundary value problems for integro-differential equations of Barbashin type // J. Integr. Equ. Appl. 1994. Vol. 6, no. 1. P. 1–30.
3. **Balder E.J.** On existence problems for the optimal control of certain nonlinear integral equations of Urysohn type // J. Optim. Theory Appl. 1984. Vol. 42, no. 3. P. 447–465.
4. **Bennati M.L.** An existence theorem for optimal controls of systems defined by Urysohn integral equations // Ann. Mat. Pura Appl. 1979. Vol. 121, no. 4. P. 187–197.
5. **Brauer F.** On a nonlinear integral equation for population growth problems // SIAM J. Math. Anal. 1975. Vol. 6. P. 312–317.
6. **Browder F.E.** Nonlinear functional analysis and nonlinear integral equations of Hammerstein and Urysohn type // Contributions to nonlinear functional analysis: Proc. Sympos. New York: Acad. Press, 1971. P. 425–500.
7. **Huseyin A.** On the approximation of the set of trajectories of control system described by a Volterra integral equation // Nonlin. Anal. Model. Contr. 2014. Vol. 19, no. 2. P. 199–208.
8. **Huseyin A., Huseyin N.** Precompactness of the set of trajectories of the controllable system described by a nonlinear Volterra integral equation // Math. Model. Anal. 2012. Vol. 17, no. 5. P. 686–695.
9. **Красносельский М.А., Крейн С.Г.** О принципе усреднения в нелинейной механике // Успехи мат. наук. 1955. Т. 10, вып. 10 (65). С. 147–152.
10. **Polyanin A.D., Manzhirov A.V.** Handbook of integral equations. Boca Raton: CRC Press, 1998. 787 p.
11. **Урысон П.С.** Об одном типе нелинейных интегральных уравнений // Мат. сб. 1923. Т. 31, № 2. С. 236–255.
12. **Vainikko G., Zolk I.** Fast spline quasicollocation solvers of integral equations // Math. Model. Anal. 2007. Vol. 12, no. 4. P. 515–538.
13. **Chentsov A.G.** Approximative realization of integral constraints and generalized constructions in the class of vector finitely additive measures // Proc. Steklov Inst. Math. 2002. Suppl. 2. P. S10–S60.
14. **Conti R.** Problemi di Controllo e di Controllo Ottimale. Torino: UTET, 1974. 239 p.
15. **Guseinov Kh.G., Neznakhin A.A., Ushakov V.N.** Approximate construction of reachable sets of control systems with integral constraints on the controls // J. Appl. Math. Mech. 1999. Vol. 63, no. 4. P. 557–567.
16. **Guseinov Kh.G.** Approximation of the attainable sets of the nonlinear control systems with integral constraint on controls // Nonlinear Anal. 2009. Vol. 71, no. 1-2. P. 622–645.

17. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением: Линейные системы. М.: Наука, 1968. 476 с.
18. **Красовский Н.Н., Субботин А.И., Ушаков В.Н.** Минимаксная дифференциальная игра // Докл. АН СССР. 1972. Т. 206, № 2. С. 277–280.
19. **Subbotina N.N., Subbotin A.I.** Alternative for the encounter-evasion differential game with constraints on the momenta of the players controls // J. Appl. Math. Mech. 1975. Vol. 39, no. 3. P. 376–385.
20. **Subbotin A.I., Ushakov V.N.** Alternative for an encounter-evasion differential game with integral constraints on the players controls // J. Appl. Math. Mech. 1975. Vol. 39, no. 3. P. 367–375.
21. **Ushakov V.N.** Extremal strategies in differential games with integral constraints // J. Appl. Math. Mech. 1972. Vol. 36, no. 1. P. 12–19.
22. **Ухоботов В.И.** Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями. Челябинск: Изд-во ЧелГУ, 2005. 124 с.
23. **Vdovina O.I., Sesekin A.N.** Numerical construction of attainability domains for systems with impulse control // Proc. Steklov Inst. Math. 2005. Suppl. 1. P. S246–S255.

Поступила 10.12.2014

Гусейин Несир
д-р философии
исследователь
Университет Джумхурийет, Турция
e-mail: nesirhuseyin@gmail.com

Гусейин Анар
д-р философии
исследователь
Университет Джумхурийет, Турция
e-mail: huseyin2718@gmail.com

Гусейнов Халик Гаракиши оглы
д-р физ.-мат. наук, профессор
исследователь
Университет Анадолу, Турция
e-mail: kguseynov@anadolu.edu.tr

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.977.5

ПОЗИЦИОННЫЕ УСИЛЕНИЯ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ[1]

В. А. Дыхта

Получены нелокальные необходимые условия оптимальности, эффективно усиливающие классический принцип максимума Понтрягина, его модифицированную версию Кашкоч — Лоясиевича, а также позиционный принцип минимума, сформулированный ранее автором. Усиление позиционного принципа минимума (а значит, и понтрягинского) достигается путем использования двух типов позиционных управлений, совместимых с исследуемой траекторией, т. е. генерирующих ее в качестве решения типа Каратеодори. В каждом из вариантов усиленный позиционный принцип минимума утверждает, что для оптимальности исследуемого процесса необходимо, чтобы его траектория была оптимальной в некотором семействе вариационных задач, порожденных котраекториями исходного и совместимых управлений.

С использованием основной конструкции позиционного принципа минимума — возмущения решения сопряженной системы — доказана точная формула приращения функционала; из нее получены варианты достаточных условий сильного и глобального минимума для экстремалей Понтрягина. Эти условия гораздо мягче известных аналогов, требующих выпуклости функционала и нижнего гамильтониана задачи по фазовой переменной.

Все рассмотрения относятся к нелинейной, гладкой задаче Майера со свободным правым концом траекторий, утверждения иллюстрированы примерами.

Ключевые слова: принцип максимума, экстремаль, котраектория, необходимые и достаточные условия, позиционные управления.

V. A. Dykhta. Positional strengthenings of the maximum principle and sufficient optimality conditions.

We derive nonlocal necessary optimality conditions, which efficiently strengthen the classical Pontryagin maximum principle and its modification obtained by B. Kaśkosz and S. Łojasiewicz as well as our previous result of a similar kind named the “feedback minimum principle.” The strengthening of the feedback minimum principle (and, hence, of the Pontryagin principle) is owing to the employment of two types of feedback controls “compatible” with a reference trajectory (i.e., producing this trajectory as a Carathéodory solution). In each of the versions, the strengthened feedback minimum principle states that the optimality of a reference process implies the optimality of its trajectory in a certain family of variational problems generated by adjoint trajectories of the original and compatible controls.

The basic construction of the feedback minimum principle — a perturbation of a solution to the adjoint system — is employed to prove an exact formula for the increment of the cost functional. We use this formula to obtain sufficient conditions for the strong and global minimum of Pontryagin’s extremals. These conditions are much milder than their known analogs, which require the convexity in the state variable of the functional and of the lower Hamiltonian.

Our study is focused on a nonlinear smooth Mayer problem with free terminal states. All assertions are illustrated by examples.

Keywords: maximum principle, extremal, adjoint trajectory, necessary and sufficient conditions, feedback controls.

Введение

В работе получены необходимые и достаточные условия оптимальности для следующей задачи терминального управления (задачи (P)):

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0, \tag{0.1}$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1], \tag{0.2}$$

[1]Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 14-01-00699), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-5007.2014.9) и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН (проект 17.1).

$$J[x, u] = l(x(t_1)) \to \min .$$

Задача (P) рассматривается на множестве Σ допустимых пар функций $(x(\cdot), u(\cdot))$ с липшицевыми траекториями $x(\cdot)$ и измеримыми ограниченными управлениями $u(\cdot)$, удовлетворяющих почти всюду на фиксированном отрезке времени T управляемой системе (0.1), (0.2). Далее используются краткие обозначения $\sigma := (x, u) \in \Sigma\,, \mathcal{U} := L_\infty(T, U)$; все соотношения, содержащие измеримые (по Лебегу) функции времени, считаются выполненными почти всюду по $t \in T$, через $\overline{\sigma} = (\overline{x}, \overline{u})$ обозначается допустимая пара функций, исследуемая на оптимальность.

Задача (P) будет исследоваться при следующих основных предположениях:

$(H1)$ множество $U \in \mathbb{R}^m$ компактно;

$(H2)$ вектор-функция $f(t, x, u)$ непрерывна вместе с производной $f_x(t, x, u)$ на $T \times \mathbb{R}^n \times U$;

$(H3)$ выполняется условие сублинейного роста

$$|f(t, x, u)| \le c(1 + |x|) \quad \text{на} \quad T \times \mathbb{R}^n \times U \quad (c > 0)\,;$$

$(H4)$ функция $l(x)$ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}^n$.

Предположения $(H1)$–$(H3)$ обеспечивают относительную компактность в $C(T, \mathbb{R}^n)$ множества всех траекторий управляемой системы и применимость классического принципа максимума Понтрягина [1] (далее ПМ).

Основной целью работы является усиление позиционного принципа минимума для гладкой задачи (P) — необходимого условия оптимальности с позиционными управлениями потенциального спуска по функционалу, усиливающего (в свою очередь) ПМ.

Этот результат доказан в [2] (см. также [3; 4]) при дополнительном предположении $l(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$ с использованием идеи Н. Н. Красовского [5] об оценке сверху качества синтеза с помощью решений неравенства Гамильтона — Якоби для u-стабильных (иначе — слабо убывающих) функций; привлечены были и более поздние работы [6–9], связанные с развитием этой идеи.

В данной статье усиленные варианты позиционного ПМ (теоремы 1, 2) доказываются элементарным, прямым способом, без какой-либо апеляции к неравенству Гамильтона — Якоби и без предположения $l(x) \in C^2$. Конечно, когда доказываемый базовый результат известен, становятся возможными “прямые” доказательства, скрывающие его происхождение.

Опишем теперь, как получаются усиления позиционного, а следовательно, и классического ПМ.

Давно замечено (см., например, [10]), что в оптимальном управлении одна и та же траектория может генерироваться различными управлениями — как программными, так и позиционными. Назовем такие управления *совместимыми* с данной траекторией, а в интересующем нас случае — с $\overline{x}$. Если пара $(\overline{x}, \overline{u})$ оптимальна, то и каждое совместимое управление в паре с $\overline{x}$ тоже обладает этим свойством; поэтому оно должно удовлетворять как классическому, так и позиционному ПМ со своей котраекторией $\psi(t)$, вообще говоря, отличной от котраектории $\overline{\psi}(t)$ пары $\overline{\sigma}$. Тем самым образуется некоторое множество $\Psi(\overline{x})$ таких котраекторий, с каждой из которых должно выполняться экстремальное условие позиционного ПМ — траектория $\overline{x}$ должна быть оптимальной в так называемой ψ-присоединенной вариационной задаче. Этот довольно естественный путь “размножения” котраекторий приводит к теореме 1. Отметим, что в описанной ситуации на паре $\overline{\sigma}$ не может достигаться строгий сильный минимум; это ведет к определенным затруднениям в достаточных условиях оптимальности.

В разд. 2 рассмотрено другое усиление позиционного ПМ, связанное с серией работ [11–16] по так называемому принципу максимума Кашкоч — Лоясиевича. Здесь также используются совместимые с $\overline{x}$ позиционные управления, но другого типа — измеримо-липшицевые; они названы нами L-совместимыми. Их уже не может быть “много” в силу ограничения по аналитическим свойствам, но зато каждое L-совместимое управление дает “размножение” котраекторий как решений сопряженного дифференциального включения Кларка [17]. Вариационное использование таких котраекторий по образцу позиционного ПМ приводит к теореме 2, усиливающей необходимые условия из [11–16] для рассматриваемой задачи (P) даже при ослаблении предположения гладкости функции f по x до локального условия Липшица. (В цитируемых статьях исследовались и негладкие задачи с терминальными ограничениями.)

Помимо совместимых позиционных управлений, которые обозначаются далее через $w(t,x)$ и точно определяются в ходе изложения, в статье используются позиционные управления $v(t,x)$, которые выступают в роли управлений потенциального спуска или позиционно проварьированных исследуемых программных управлений (не только $\overline{u}$, но и совместимых с $\overline{x}$). Для такого управления $v(t,x)$, т.е. однозначной функции на $T\times\mathbb{R}^n$ со значениями в U, через $\mathcal{X}^0(v)$ обозначается пучок решений Каратеодори системы (0.1) при $u=v(t,x)$, а через $\mathcal{X}^k(v)$ — пучок конструктивных движений Красовского — Субботина [5;6] (предел соответствующих ломаных Эйлера). Объединение указанных пучков обозначается через $\mathcal{X}(v)$.

В разд. 4 получены достаточные условия оптимальности, основанные на точной формуле приращения функционала с использованием ключевой конструкции позиционного ПМ — возмущения котраектории градиентом целевой функции $l(x)$. Характеристика этим условиям дана в аннотации; не менее важно, что результаты этого раздела указывают способ доказательства новых достаточных условий оптимальности в рамках конструкций ПМ для задач с терминальными ограничениями.

1. Позиционный принцип минимума с совместимыми управлениями

Рассмотрим усиление классического и позиционного ПМ путем “размножения” котраекторий позиционными управлениями, генерирующими исследуемую траекторию в качестве решения Каратеодори. В конце раздела будет пояснено, почему мы ограничиваемся этим случаем.

О п р е д е л е н и е 1. Позиционное управление $w: T\times\mathbb{R}^n\to U$ назовем *совместимым с траекторией* $\overline{x}$, если:

а) $f(t,\overline{x}(t),w(t,\overline{x}(t)))=f(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))$ на T;

б) суперпозиция $u^c(t):=w(t,\overline{x}(t))$ является допустимым программным управлением.

Множество всех управлений, совместимых с $\overline{x}$, обозначим через $\mathcal{W}(\overline{x})$ (эпитет “позиционный” для краткости часто опускается).

В этом определении важно, что управление u^c не обязано совпадать с $\overline{u}$; поэтому совместимые с $\overline{x}$ позиционные управления порождают множество $\Sigma(\overline{x})$ допустимых пар вида $(\overline{x},u^c)$, равнозначных по функционалу с $(\overline{x},\overline{u})$ в силу условия а). Конечно, может оказаться, что $\Sigma(\overline{x})=\{\overline{\sigma}\}$, а в противном случае $\overline{\sigma}$ не может быть точкой строгого, сильного и глобального минимума. Отметим также, что программные управления трактуются как частный случай позиционных.

Введем функцию Понтрягина $H(t,x,\psi,u)=\psi\cdot f(t,x,u)$ и сопряженную систему

$$\dot{\psi}=-H_x(t,x,\psi,u),\quad \psi(t_1)=l_x(x(t_1)). \tag{1.1}$$

Отметим, что граничное условие в ней соответствует условию минимума функции H по управлению в ПМ. Для любой пары $\sigma=(\overline{x},u^c)\in\Sigma(\overline{x})$ можно найти ее котраекторию $\psi=\psi(\cdot)$ как соответствующее решение системы (1.1) и сформировать множество всех таких котраекторий $\Psi(\overline{x})$. Заметим, что формально $\overline{\sigma}\in\Sigma(\overline{x})$, и соответствующую $\overline{\sigma}$ котраекторию обозначим через $\overline{\psi}$ (тогда $\overline{\psi}\in\Psi(\overline{x})$).

Теперь для любой $\psi\in\Psi(\overline{x})$ определим вектор-функцию

$$p^{\psi}(t,x)=\psi(t)+l_x(x)-l_x(\overline{x}(t)) \tag{1.2}$$

и компактнозначное, полунепрерывное сверху многозначное отображение

$$U_{\psi}(t,x)=\operatorname{Arg}\min_{u\in U}p^{\psi}(t,x)\cdot f(t,x,u). \tag{1.3}$$

Пусть $\mathcal{V}_\psi$ — множество всех его селекторов, трактуемых как позиционные управления сравнения с $\overline{u}$. Таким образом, если $v(t,x) \in \mathcal{V}_\psi$, то выполняется *условие позиционного минимума функции* H

$$H(t,x,p(t,x),v(t,x)) = \min_{u\in U} H(t,x,p(t,x),u) \quad \text{на} \quad T\times\mathbb{R}^n\,.$$

Напомним, что дифференциальное включение

$$\dot{x} \in cof(t,x,U), \quad x(t_0)=x_0, \tag{1.4}$$

называется овыпуклением исходной системы (0.1), (0.2) и при условиях $(H1)$–$(H3)$ равномерно сходящиеся последовательности $\{x^i(\cdot)\}$ траекторий системы (0.1), (0.2) имеют пределом решение включения (1.4).

Теорема 1. *Для оптимальности* $\overline{\sigma} = (\overline{x},\overline{u})$ *и любой пары* $\sigma \in \Sigma(\overline{x})$ *в задаче* (P) *необходимо, чтобы при любом выборе* $\psi \in \Psi(\overline{x})$ *траектория* $\overline{x}$ *была оптимальной в следующей задаче*:

$$l(x(t_1)) \to \min\,, \quad x(\cdot) \in \bigcup_{v\in\mathcal{V}_\psi} \mathcal{X}(v)\,. \tag{1.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольно $\psi \in \Psi(\overline{x})$, а вместе с ней и соответствующую пару $\sigma = (\overline{x},u^c) \in \Sigma(\overline{x})$. Покажем сначала, что траектория $\overline{x}$ допустима в задаче (1.5). Поскольку пара $(\overline{x},u^c)$ оптимальна в задаче (P), то она удовлетворяет ПМ с выбранной котраекторией ψ. Поэтому выполняется включение $u^c(t) \in U_\psi(t,\overline{x}(t))$ на T, причем $p^\psi(t,\overline{x}(t)) = \psi(t)\ \ \forall t \in T$. Положим теперь

$$\overline{v}(t,x) = \begin{cases} u^c(t),\ (t,x) \in \operatorname{graph}\overline{x}(\cdot), \\ u(t,x) \in U_\psi(t,x)\ \text{ произвольно вне } \operatorname{graph}\overline{x}(\cdot). \end{cases}$$

Легко видеть, что $\overline{v}(t,x)$ — селектор отображения (1.3), для которого траектория $\overline{x}$ является решением Каратеодори. Тем самым допустимость $\overline{x}$ в задаче (1.5) установлена.

Далее допустим противное: для выбранной ψ существуют селектор $v(t,x)$ отображения (1.3) и решение $x \in \mathcal{X}(v)$ такое, что утверждение теоремы нарушено, т. е. $l(x(t_1)) < l(\overline{x}(t_1))$. Если $x(\cdot)$ — решение Каратеодори для v, то это сразу ведет к противоречию с оптимальностью процессов из $\Sigma(\overline{x})$. Если же $x(\cdot)$ — конструктивное движение, то из предположений $(H1)-(H3)$ следует, что $x(\cdot)$ — решение овыпукленной системы (1.4), так как $x(\cdot)$ является равномерным пределом некоторой последовательности ломаных Эйлера $\{x^i(\cdot)\}$. Но тогда в силу непрерывности функции $l(x)$ при достаточно больших i также будут выполняться строгие неравенства $l(x^i(t_1)) < l(\overline{x}(t_1))$. Это вновь противоречит условию теоремы. □

При $\psi \in \Psi(\overline{x})$ экстремальную задачу (1.5) будем называть ψ-присоединенной (к паре $\overline{\sigma}$ или множеству $\Sigma(\overline{x})$). Усиление позиционного принципа минимума, которое дается теоремой 1, состоит в том, что вместо одной $\overline{\psi}$-присоединенной задачи возникает семейство (по $\psi \in \Psi(\overline{x})$) присоединенных задач. В приложениях естественно начинать с основной $\overline{\psi}$-присоединенной задачи, переходя к другим в случае затруднений. При этом теорему 1 (как и собственно позиционный ПМ) следует трактовать не традиционно — как проверочный тест, а как метод решения рассматриваемой задачи путем итерационного спуска по функционалу. (Примеры на уровне базового результата см. в [2–4].)

П р и м е р 1 [10]. $\dot{x}_1 = u_1 - x_2,\ \dot{x}_2 = x_1(u_1+u_2),\ x_1(0) = x_2(0) = 0,\ |u_1| \le 1,\ u_2 \in [0,1],\ J = x_2(1) \to \min\,.$

Здесь $\overline{\sigma} = (\overline{x},\overline{u}) \equiv 0$ — особая экстремаль Понтрягина с котраекторией $\overline{\psi} \equiv (0,1)$ и соответствующим отображением

$$U_{\overline{\psi}}(x_1) = \begin{cases} \{(u_1=1,\ u_2=0)\}, & x_1>0, \\ \qquad\quad U, & x_1=0, \\ \{(u_1=1,\ u_2=1)\}, & x_1<0\,. \end{cases}$$

Испытания ряда элементарных селекторов этого отображения не привели к спуску по функционалу, а чрезмерная неопределенность в их выборе на прямой многозначности $x_1 = 0$ делала дальнейшие испытания малоперспективными. Следовательно, позиционный ПМ оказался не эффективным или, точнее, недостаточно алгоритмичным.

Теперь заметим, что все допустимые управления вида $u(t) = (0, u_2(t))$ тоже имеют траекторию $\overline{x} \equiv 0$ и, значит, образуют некоторое множество $\mathcal{W}(\overline{x})$ совместимых управлений. Для применения теоремы 1 ограничимся совместимыми управлениями $u^\alpha = (0, \alpha^2)$, где $\alpha \in [0, 1]$ (т. е. мы полагаем $u^c = u^\alpha$). Тогда котраектории пар $(\overline{x}, u^\alpha)$ будут таковы (индекс α опускаем):

$$\psi_1(t) = -\alpha \sin \alpha(t-1)\,, \quad \psi_2(t) = \cos \alpha(t-1)\,.$$

Поскольку функции переключения управлений u_1, u_2, необходимые для формирования отображения $U_\psi(t, x)$, оказались довольно сложными для анализа движения, мы еще раз огрубим поиск управлений спуска, положив $\alpha = 1$. После этого упрощения качественный анализ удается провести до конца и получить управление

$$u^*(t) = (u_1^*(t), u_2^*(t)) = \begin{cases} (-1, 1), & t \in [0, \tau), \\ (1, 1), & t \in (\tau, 0], \end{cases}$$

с оценкой момента переключения $\tau \approx \pi/6$. Как показали расчеты (проведенные А.И. Бениковым), оказалось, что $\tau \approx 0.66$, а $J[x^*, u^*] \approx -0.32825$, что существенно меньше $J[\overline{\sigma}] = 0$.

Тем самым усиленный позиционный ПМ не только “забраковал” экстремаль $\overline{\sigma}$ и все совместимые с $\overline{x}$ управления, но и позволил получить качественно лучшее управление.

В [10] неоптимальность $\overline{\sigma}$ установлена с помощью весьма тонких квадратичных условий оптимальности для особых и скользящих режимов (даже в задаче с терминальным ограничением $x_1(1) = 0$). Но эти условия, как и ряд других локальных критериев, которые могут “забраковать” $\overline{\sigma}$, не генерируют в процессе применения управлений спуска (конечно, без обращения к специальным итерационным методам). Именно свойство алгоритмичности выгодно отличает позиционный ПМ от известных необходимых условий.

Объясним теперь, почему в определении 1 мы ограничились случаем решений Каратеодори.

Если расширить определение 1, допустив и конструктивные движения, то суперпозиции $u(t) = w(\overline{x}(t))$ могут давать управления, не совместимые с $\overline{x}$. Тем самым возникает некоторое множество допустимых пар, которые с необходимостью должны быть “хуже” $\overline{\sigma}$ по значению функционала. Это наблюдение (которое не формулируется особым утверждением) иллюстрирует следующий пример.

П р и м е р 2. $\dot{x}_1 = u^3,\ \dot{x}_2 = -x_1 u,\ x_1(0) = x_2(0) = 0,\ |u| \le 1,\ J = x_2(1) \to \min\,.$

Пусть $\overline{\sigma} = (\overline{x}, \overline{u}) \equiv 0$; тогда $\overline{\sigma}$ — особая экстремаль с котраекторией $\overline{\psi} \equiv (0, 1)$. Применим позиционный ПМ, т. е. утверждение теоремы 1 при $\psi = \overline{\psi}$. Тогда $U_{\overline{\psi}}(x) \in -\operatorname{sign} x_1$ (при многозначной трактовке функции сигнум) и это отображение имеет, в частности, селекторы

$$v^1(x_1) = \begin{cases} -1, & x_1 > 0, \\ +1, & x_1 \le 0, \end{cases} \qquad v^2(x_1) = \begin{cases} -1, & x_1 \ge 0, \\ +1, & x_1 < 0\,. \end{cases}$$

Легко проверить, что $\overline{x} = 0$ — соответствующее им конструктивное движение, причем других траекторий отображение $U_{\overline{\psi}}$ не генерирует. Следовательно, позиционный ПМ не бракует $\overline{\sigma}$.

Заметим теперь, что $v^1(\overline{x}_1(t)) \equiv +1\,,\ v^2(\overline{x}_1(t)) \equiv -1$ — допустимые управления с $x_1^{1,2}(t) = \pm\, t$. Если положить $w^1 = v^1,\ w^2 = v^2$ в расширенной версии определения 1, то мы получаем допустимые пары σ^1, σ^2, для которых $J[\sigma^1] = J[\sigma^2] = -1/2 < 0 = J[\overline{\sigma}]$. Легко показать, что эти пары оптимальны.

Таким образом, обсуждаемое наблюдение бракует процесс $\overline{\sigma}$, но способом, совершенно отличным от теоремы 1. Его формализация требует введения обобщенных управлений с обратной связью, что выходит за рамки данной статьи.

2. Вариационный вариант принципа максимума Кашкоч — Лоясиевича

Усиление необходимых условий оптимальности (классического и позиционного ПМ) путем “размножения” котраекторий совместимыми управлениями в смысле определения 1 не является единственно возможным. Сейчас мы рассмотрим другой метод, который использует идею С. Лоясиевича (по утверждению из [14]) о совместимых управлениях и соответствующих котраекториях другого типа. Но реализация этой идеи будет отлична от работ по так называемому принципу максимума Кашкоч — Лоясиевича [11–16].

Для рассматриваемой задачи (P) нам достаточно будет следующего определения [16].

О п р е д е л е н и е 2. Позиционное управление $w : T\times\mathbb{R}^n \to U$ назовем *L-совместимым с траекторией $\overline{x}$*, если выполняется условие а) определения 1 и следующее условие:

б$'$) функция $\widehat{f}(t,x) = f(t,x,w(t,x))$ измерима по t, липшицева по x и ограничена на ограниченных множествах.

Для L-совместимого управления тоже может оказаться, что $w(t,\overline{x}(t)) \neq \overline{u}(t)$ на множестве положительной меры; однако теперь это не будет иметь значения, поскольку основным окажется условие б$'$). Оно позволяет рассматривать сопряженное включение Кларка [17]

$$\dot{\psi}(t) \in -\partial_{(x)} H(t,\overline{x}(t),\psi(t),w(t,\overline{x}(t))), \quad \psi(t_1) = l_x(\overline{x}(t_1))\,, \tag{2.1}$$

в котором символ “$\partial_{(x)}$” означает, что градиент Кларка находится с учетом зависимости w от x.

Принцип максимума Кашкоч — Лоясиевича для задачи (P) состоит в следующем утверждении.

У с л о в и е $M(\psi)$. *Если пара $(\overline{x},\overline{u})$ оптимальна, то для любого L-совместимого с $\overline{x}$ позиционного управления $w(t,x)$ существует решение ψ дифференциального включения* (2.1) *такое, что почти всюду на T*

$$H(t,\overline{x}(t),\psi(t),\overline{u}(t)) = \min_{u\in U} H(t,\overline{x}(t),\psi(t),u)\,.$$

Перейдем к формулировке вариационного аналога этого условия.

Обозначим через $\Psi_w(\overline{x})$ множество всех решений дифференциального включения (2.1), соответствующего L-совместимому управлению w. Для $\psi\in\Psi_w(\overline{x})$ сохраним введенные ранее обозначения $p^\psi, U_\psi, \mathcal{V}_\psi$ (см. (1.2), (1.3)).

Теорема 2. *Если пара $(\overline{x},\overline{u})$ оптимальна, то при любом выборе L-совместимого с $\overline{x}$ позиционного управления $\overline{w}(t,x)$ и любом $\psi\in\Psi_w(\overline{x})$ выполняется неравенство*

$$l(\overline{x}(t_1)) \le \min\left\{ l(x(t_1)) \mid x(\cdot) \in \bigcup_{v\in\mathcal{V}_\psi} \mathcal{X}(v)\right\}.$$

Более того, существует $\psi\in\Psi_w(\overline{x})$ такая, что траектория $\overline{x}$ оптимальна в ψ-присоединенной задаче.

Эта теорема не требует специального доказательства, так как оно дословно совпадает с доказательством теоремы 1, даже если заменить предположение гладкости функции f по x на условие Липшица. Это естественно, поскольку в условии $M(\psi)$ уже фигурирует негладкое сопряженное включение, а другие котраектории вообще не рассматриваются. Следовательно, теорема 2 усиливает ПМ Кашкоч — Лоясиевича, а значит и негладкий ПМ Кларка, для задач с негладкой динамикой.

С учетом этого замечания рассмотрим негладкий пример.

П р и м е р 3. $\dot{x}_1 = u_1, \dot{x}_2 = |x_1|u_1 - u_2, x(0) = (0,0), |u_1| \le 1, u_2 \in [-1,0], J = x_2(1) \to \min$.

Процесс $\overline{\sigma} = (\overline{x}, \overline{u}) \equiv 0$ удовлетворяет ПМ Кларка с котраекторией $\overline{\psi} \equiv (0,1)$. Заметим, что гладкое управление $w(x) = (0, \alpha x_1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, L-совместимо с $\overline{x}$ и включение (2.1) дает котраекторию $\psi^\alpha(t) = (1 - \exp\alpha(1-t), 1)$. Условие $M(\psi^\alpha)$ бракует процесс $\overline{\sigma}$ при всех $\alpha \neq 0$, но и только. Если же применить вариационное условие теоремы 2 с $\psi = \psi^\alpha$, то отображение U_{ψ^α} определится из задач $(\psi_1(t) + |x_1|)u_1 \to \min\limits_{|u_1| \leq 1}$, $-u_2 \to \min\limits_{u_2 \in [-1,0]}$. При $\alpha < 0$ оно не генерирует управлений спуска, но при $\alpha > 0$ получим управление $u^*(t) \equiv (-1, 0)$, для которого $J[\sigma^*] = -0.5 < 0 = J[\overline{\sigma}]$. Легко показать, что σ^* — оптимальный процесс. Значит, теорема 2 не просто бракует $\overline{\sigma}$, но позволяет решить задачу.

Отметим различие теорем 1, 2.

В теореме 1 семейство присоединенных задач фактически порождается множеством совместимых управлений (их может быть “достаточно много”); для каждого из них дополнительная (к $\overline{\psi}$) котраектория единственна. Напротив, в теореме 2 семейство присоединенных задач порождается множеством решений сопряженного включения (2.1) даже при одном L-совместимом управлении (трудно ожидать, что их может быть “много” — существование хотя бы одного в случае выпуклости множества $f(t,x,U)$ гарантируется специальной теоремой о селекторе С. Лоясиевича, которая цитируется в указанных выше работах).

3. Точная формула приращения функционала и общая схема позиционного спуска

Введем в рассмотрение расширенную функцию Понтрягина

$$H^e(t,x,\psi,u) = H(t,x,\psi,u) + \dot{\psi} \cdot x\,, \quad \dot{\psi} = -H_x(t,x,\psi,u)\,.$$

Если $\psi : T \to \mathbb{R}^n$ —любая липшицевая функция и вектор-функция $p(t,x) = p^\psi(t,x)$ определена равенством (1.2), то положим

$$H^e(t,x,p(t,x),u) = H(t,x,p(t,x),u) + p_t(t)\,, \tag{3.1}$$

$$p_t(t) := \frac{\partial}{\partial t} p(t,x) = \dot{\psi}(t) - \dot{l}_x(\overline{x}(t))\,, \tag{3.2}$$

в предположении, что полная производная $\dot{l}_x(\overline{x}(t))$ существует, измерима и ограничена на T.

Следующая лемма представляет самостоятельный интерес: она дает точную формулу приращения функционала в нелинейной задаче (P) с “почти произвольной” липшицевой функцией $\psi(\cdot)$ при весьма мягких предположениях на динамику системы (и без введения полей экстремалей).

Лемма. *Предположим, что в задаче (P) функция $f(t,x,u)$ непрерывна, множество U произвольно, а функция $l(x) \in C^{1+}$, т. е. дифференцируема и $l_x(x)$ удовлетворяет условию Липшица (локальному, если множество допустимых траекторий равномерно ограничено в $C(T,\mathbb{R}^n)$). Пусть $\psi : T \to \mathbb{R}^n$ — любая липшицевая функция, удовлетворяющая условию трансверсальности $\psi(t_1) = l_x(\overline{x}(t_1))$. Тогда справедлива точная формула приращения*

$$l(x(t_1)) - l(\overline{x}(t_1)) = \int\limits_T \left[H^e(t,x(t),p(t,x(t)),u(t)) - \overline{H}^e(t)\right] dt\,, \tag{3.3}$$

где $x(\cdot)$ — траектория любой допустимой пары (x,u), а $\overline{H}^e(t)$ означает результат вычисления функции (3.1) вдоль пары $(\overline{x},\overline{u})$, который зависит только от $\psi(t), x(t)$ (не зависит явно от значений программного управления, генерирующего траекторию $\overline{x}(\cdot)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала заметим, что из липшицевости функции $l_x(x)$ следует, что существует полная производная $\dot{l}_x(\overline{x}(t)) \in L_\infty(T,\mathbb{R}^n)$, так что функции $p_t(t)$ и H^e корректно определены. При этом интегрант в формуле (3.3) есть измеримая ограниченная функция при любой паре $(x,u) \in \Sigma$, поскольку непрерывна функция $f(t,x,u)$.

Последнее утверждение леммы вытекает из равенства

$$\overline{H}^e(t) = \psi(t)\,\dot{\overline{x}}(t) + \big[\dot{\psi}(t) - \dot{l}_x(\overline{x}(t))\big]\,\overline{x}(t)\,.$$

Далее, посредством перегруппировки слагаемых нетрудно убедиться, что справедливо представление

$$H^e(t,x,p(t,x),u) - \overline{H}^e(t) = \frac{d}{dt}\,[\psi(t)\,(x-\overline{x}(t))]$$
$$+\frac{d}{dt}\,[l(x) - l(\overline{x}(t))] - \frac{d}{dt}\,[l_x(\overline{x}(t))\,(x-\overline{x}(t))]\,. \tag{3.4}$$

Здесь операция d/dt (применительно к функциям от x) понимается как дифференцирование в силу управляемой системы. Если это выражение подставить в правую часть формулы (3.3), то интегрирование приведет к выражению слева в этой формуле. □

Доказательство этой леммы, как и теоремы 1, из разряда “прямых” — оно не раскрывает происхождения формулы (3.3). В действительности она была получена с помощью функции

$$\varphi^{\psi}(t,x) = l(x) - l(\overline{x}(t)) + (\psi(t) - l_x(\overline{x}(t)))\,(x-\overline{x}(t))\,, \tag{3.5}$$

которая использовалась для обоснования позиционного ПМ в случае $l(x)\in C^2$ [2]. Выражение (3.4) есть не что другое, как производная в силу системы $\dot{\varphi}^{\psi}(t,x)$, а поскольку $\varphi^{\psi}(t_0,x_0)=0$, $\varphi^{\psi}(t_1,x) = l(x) - l(\overline{x}(t_1))$, то (3.3) получается просто по формуле Ньютона — Лейбница. При этом φ-экстремальные позиционные управления описываются отображением $U_{\psi}(t,x)$ из (1.3).

Рассмотрим формулу приращения (3.3) под углом построения методов спуска по функционалу из базовой пары $\overline{\sigma}$. В соответствии с общей методикой при выбранной функции ψ с указанным в лемме граничным условием управление спуска естественно находить путем минимизации правой части равенства (3.3). Возможный вариант — это формирование множества позиционных управлений потенциального спуска $U_{\psi}(t,x)$ по формуле (1.3) с последующим испытанием его селекторов, т. е. фактически обращением к ψ-задаче. (Эпитет “присоединенной” здесь неуместен, так как $\overline{x}$ может не генерироваться управлениями из множества U_{ψ}.) На современной технике эта схема с испытаниями вполне реализуема, но возникает вопрос о произволе в выборе функций ψ: в сравнении с разд. 1, 2 он здесь беспределен — для тестирования $\overline{\sigma}$ можно брать любую ψ, но для методов нужен регулярный выбор.

Вариант такого регулярного выбора существует и основан на нестандартной двойственности [4]. Ее идея — это минимизация приращения функционала на тройках функций $(x(t),\psi(t),u(t))$, $t\in T$, связанных исходной и сопряженной системами. В [4] этот подход подробно разобран для задач, линейных по состоянию.

В следующем примере подходящая функция ψ предъявляется, на первый взгляд, “ с потолка”, а в действительности находится указанным способом, регулярным для задач, квадратичных по траекториям (система линейна по x, а функционал линейно-квадратичен).

П р и м е р 4. $\dot{x}_1 = u_2 + a x_1 u_1$, $\dot{x}_2 = 2x_1u_2 + x_1^2$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $|u_i|\le 1$, $i=1,2$, $J = x_2(1)\to\min$, где $a>0$ — параметр.

Здесь $\overline{\sigma} = (\overline{x},\overline{u}) \equiv 0$ — особая экстремаль Понтрягина с котраекторией $\overline{\psi}=0$. Гладкое позиционное управление $w(x) = (\alpha, cx_1)$ совместимо с $\overline{x}$ в смысле определений 1, 2 при всех $\alpha\in[-1,1]$ и $c\in\mathbb{R}$. Однако w не генерирует новых котраекторий и теоремы 1, 2 оказываются неэффективными для анализа $\overline{\sigma}$.

Но рассмотрим функцию

$$\psi_1(t) = \frac{2c}{A}(e^{-A(t-1)} - 1)\,, \quad \psi_2(t)\equiv 1\,,$$

где $A := \alpha a + c \ne 0$. Она удовлетворяет условиям леммы. Рассмотрим соответствующую ψ-задачу; для нее отображение U_{ψ} определяется из решений задач

$$\psi_1(t)x_1u_1\to\min\,,\quad |u_1|\le 1\,;\quad (\psi_1(t)+2x_1)u_2\to\min\,,\quad |u_2|\le 1\,.$$

Для определенности рассмотрим случай $A = \alpha a + c > 0$, $c < 0$ (тогда $\alpha > 0$). Поскольку $\psi_1(0) < 0, x_1(0) = 0$, то в правой полуокрестности точки $t_0 = 0$ выбираем $v_2(t,x) = u_2 = +1$ и как следствие (в силу первого уравнения динамики и экстремального выбора u_1) полагаем $v_1(t,x) = u_1 = 1$. Тогда на начальном интервале времени получаем траекторию

$$x_1(t) = \frac{1}{a}\,(e^{at} - 1) > 0\,.$$

Это движение происходит до обращения в нуль функции переключения $s(t) = \psi_1(t) + 2x_1(t)$. Поскольку $s(0) < 0$, $s(1) > 0$, то имеется единственный момент переключения $\tau \in (0,1)$ компоненты управления u_2 на значение -1; поскольку произведение $\psi_1(t)x_1(t)$ остается < 0, то u_1 не переключается. При $t > \tau$ смены управлений уже не происходит, и в результате мы получаем управление вида

$$u_1^* \equiv 1\,, \quad u_2^* = \begin{cases} +1, & t \in [0,\tau), \\ -1, & t \in [\tau, 1]\,, \end{cases}$$

определенного с точностью до выбора τ.

Элементарные численные расчеты с варьированием параметра a и момента τ показали, что начиная с $a = 0.6$ и $\tau \approx 0.45$ на управлении u^* функционал принимает отрицательные значения (порядка -0.03), меньшие, чем $J[\overline{\sigma}] = 0$. Поэтому улучшение управления на базе формулы приращения устанавливает неоптимальность экстремали $\overline{\sigma}$ по крайней мере при $a \geq 0.6$. Покажем, что эта оценка существенна и достаточно точна.

Действительно, если записать функционал J в интегральном виде и преобразовать с использованием равенства $u_2 = \dot{x}_1 - ax_1u_1$, то получим, что

$$J[x,u] = x_1^2(1) + \int\limits_{[0,1]} (1 - 2au_1(t))x_1^2(t)dt\,.$$

Отсюда ясно, что $\overline{\sigma}$ и вообще все процессы с $\overline{x}_1(t) \equiv 0$ оптимальны при $a \in [0, 1/2]$. Поэтому полученное условие спуска $a \geq 0.6$ близко к “порогу оптимальности” $\overline{\sigma}$ и, вероятно, может быть улучшено более тонкими расчетами.

4. Достаточные условия оптимальности

Рассмотрим вопрос о близости полученных выше необходимых условий оптимальности к достаточным. Поскольку теоремы 1, 2 формулируются в рамках конструкций принципа максимума Понтрягина (пусть и в несколько расширенной версии), то нас будут интересовать достаточные условия в форме классического ПМ и одновременно — достаточность позиционного ПМ. Эти условия будут получены для понтрягинских экстремалей на основе формулы приращения (3.3).

Заметим, что вопрос о достаточных условиях для экстремалей позиционного ПМ не ставится (они даже не определены и термин “экстремаль” понимается только в смысле Понтрягина). Причина состоит в том, что теория пока не располагает эффективными методами решения присоединенных задач из-за отсутствия условий Липшица и выпуклозначности отображений $U_\psi(t,x)$ из (1.3). Практически утверждения теорем 1, 2 используются в очень усеченном варианте — испытывается лишь некоторое множество “элементарных” селекторов этих отображений. В результате, если удается установить неоптимальность исследуемой пары $\overline{\sigma}$, то на выходе мы получаем допустимую пару $\sigma^* = (x^*, u^*)$ с меньшим значением функционала. И важно установить, является ли она оптимальной (еще до ее тестирования позиционным ПМ на следующей итерации решения задачи). Эта специфика позиционного ПМ заставляет получать достаточные условия не только для базовой пары $\overline{\sigma}$, но и для улучшенной пары σ^* в рамках одних и тех же конструкций. Это обстоятельство будет далее учтено.

Обратимся к достаточным условиям оптимальности. Будем пользоваться обозначениями разд. 1, связанными с совместимыми управлениями в смысле определения 1.

Обозначим через $\triangle^{\psi}[\sigma]$ функционал, равный правой части равенства (3.3), с уточненными обозначениями $p = p^{\psi}(t,x)$, $\quad \overline{H}^e(t) = \overline{H}^e(t,\psi(t))$. Кроме того, сузим произвол в выборе функций ψ и будем рассматривать $\triangle^{\psi}[\sigma]$ только при $\psi \in \Psi(\overline{x})$. Более того, не будем предполагать, что нам известно все множество $\mathcal{W}(\overline{x})$ совместимых управлений (что очень жестко), и выделим некоторое его подмножество $\mathcal{W}^0(\overline{x})$. Соответственно сузим множества рассматриваемых пар $\Sigma(\overline{x})$ и котраекторий $\Psi(\overline{x})$ до подмножеств $\Sigma^0(\overline{x})$ и $\Psi^0(\overline{x})$. Будем предполагать, что $\overline{\sigma}$ и все пары из $\Sigma^0(\overline{x})$ являются экстремалями Понтрягина, ибо в противном случае вопрос об оптимальности отпадает.

В качестве исходного пункта вывода достаточных условий принимается естественное условие

$$\exists\, \psi \in \Psi^0(\overline{x}) :\ \triangle^{\psi}[\sigma] \geq 0 \quad \forall\, \sigma \in \Sigma\,.$$

Но оно имеет характер вариационной задачи и обычно считается непроверяемым. Мы гарантируем его некоторыми конечномерными (поточечными) условиями, но ценой довольно существенного огрубления.

Чтобы несколько смягчить этот эффект, введем следующее определение.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть $E(t) : T \to \mathbb{R}^n$ — некоторое многозначное отображение, имеющее селектором $\overline{x}(t)$, т. е. $\overline{x}(t) \in E(t)\ \forall\, t \in T$. Будем говорить, что пара $\overline{\sigma}$ E-оптимальна в задаче (P), если она оптимальна на множестве всех допустимых пар Σ_E, траектории которых удовлетворяют включению $x(t) \in E(t)$ на T. Это понятие относится также ко всем парам $\sigma^e = (\overline{x}, u^e) \in \Sigma^0(\overline{x})$.

Поясним, что если $E(t)$ — некоторая трубка вдоль траектории $\overline{x}$, то E-оптимальность $\overline{\sigma}$ равносильна понятию сильного минимума на паре $\overline{\sigma}$. Если же $E(t)$ при всех t является внешней оценкой множества достижимости $\mathcal{R}(t)$ системы (0.1), (0.2), то E-оптимальность $\overline{\sigma}$ совпадает с глобальной оптимальностью этой пары в задаче (P), а $E(t)$ может трактоваться как априорная оценка фазовых состояний управляемой системы.

Далее предполагается, что отображение $E(t)$ априорно зафиксировано. (Как показывают примеры, на самом деле в приложениях $E(t)$ подбирается так, чтобы удовлетворить, если возможно, достаточным условиям.)

Определим нижний гамильтониан задачи (P), положив $h(t,x,\psi) = \min\limits_{u \in U} H(t,x,\psi,u)$, и по аналогии с равенствами (3.1), (3.2) введем его расширение $h^e(t,x,p^{\psi}(t,x))$. Тогда из формулы приращения (3.3) и определения функционала $\triangle^{\psi}[\sigma]$ получаем оценку

$$J[\sigma] - J[\overline{\sigma}] \;=\; \triangle^{\psi}[\sigma] \;\geq\; \int\limits_T \Big[h^e(t,x(t),p^{\psi}(t,x(t))) - \overline{H}^e(t,\psi(t))\Big]\,dt\,,$$

которая имеет место при любой $\psi \in \Psi^0(\overline{x})$ и всех $\sigma \in \Sigma$. Поэтому следующее условие достаточно для E-оптимальности $\overline{\sigma}$:

$$\begin{gathered} \exists\, \psi \in \Psi^0(\overline{x}) :\ \textit{для всех}\ (x,u) \in \Sigma_E \\ \overline{H}^e(t,\psi(t)) \leq h^e(t,x(t),p^{\psi}(t,x(t)))\ \ \textit{почти всюду на}\ T\,. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Поскольку в силу ПМ $\ H = h\ $ вдоль $\ \overline{\sigma}\ $ при любой $\ \psi \in \Psi^0(\overline{x})$, то $\ \overline{H}^e(t,\psi(t)) = \overline{h}^e(t,\psi(t))$. Поэтому достаточное условие (4.1) требует, чтобы при некоторой $\psi \in \Psi^0(\overline{x})$ расширенный гамильтониан имел поточечный минимум вдоль траектории $\overline{x}$ на множестве всех допустимых траекторий, проходящих по $E(t)$. Но это достаточное условие тоже имеет вариационный оттенок, и мы огрубим его до следующего условия.

У с л о в и е $Mh^e(\psi,\overline{x},E)$. Существуют котраектория $\psi \in \Psi^0(\overline{x})$ и отображение $E(t)$ из T в $\mathbb{R}^n$ такие, что почти всюду на T

$$h^e(t,\overline{x}(t),p^{\psi}(t,\overline{x}(t))) = \min_{x \in E(t)} h^e(t,x,p^{\psi}(t,x))\,. \tag{4.2}$$

Из приведенных рассуждений вытекает

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения* $(H1)$–$(H4)$ *и, кроме того,* $l(x) \in C^{1+}$. *Предположим, что* $\overline{\sigma}$ *и все допустимые пары* $\sigma \in \Sigma^0(\overline{x})$ *удовлетворяют принципу максимума и выполнено условие* $Mh^e(\psi, \overline{x}, E)$. *Тогда* $\overline{\sigma}$ *и пары из* $\Sigma^0(\overline{x})$ E*-оптимальны.*

Эти достаточные условия оптимальности для понтрягинских экстремалей с "чужими" котраекториями не имеют аналогов. Но даже в основном случае, когда в условии минимума (4.2) $\psi = \overline{\psi}$, они являются более гибкими, нежели альтернативные варианты.

Следствие 1. *Пусть выполнены предположения* $(H1)$–$(H4)$ *и, кроме того,* $l(x)$ *выпукла на* $\mathbb{R}^n$. *Тогда следующее условие достаточно для* E*-оптимальности всех пар* $\sigma \in \Sigma^0(\overline{x})$, *удовлетворяющих* ПМ:

$$\begin{cases} \text{существуют } \psi \in \Psi^0(\overline{x}) \text{ и отображение } E(t) \text{ такие, что} \\ h^e(t, \overline{x}(t), \psi(t)) = \min\limits_{x \in E(t)} h^e(t, x, \psi(t)) \ \text{ почти всюду на } T\,. \end{cases} \tag{4.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим задачу (P'), которая получается из (P) заменой функционала J на $I[\sigma] = \psi(t_1)\cdot(x(t_1) - \overline{x}(t_1))$. Из выпуклости $l(x)$ следует, что E-оптимальность пар $\sigma \in \Sigma^0(\overline{x})$ в задаче (P') влечет их оптимальность в задаче (P). Но в задаче (P') $p^\psi(t, x) = \psi(t)$ при любом $\psi \in \Psi^0(\overline{x})$, и поэтому достаточное условие минимума (4.2) сводится к (4.3). □

Если условие (4.3) выполняется при $\psi = \overline{\psi}$, а $E(t)$ — трубка вдоль траектории $\overline{x}$, то получим теорему 24.1 из [17], которая дает достаточные условия сильного минимума. Часто встречается вариант более жестких требований к достаточным условиям (см. [18] и обзор в [19]), которые предполагают вместо (4.3) условия: $\psi = \overline{\psi}$, $E(t)$ выпуклозначно и функция $x \longrightarrow h(t, x, \overline{\psi}(t))$ выпукла на $E(t)$ при всех $t \in T$. Все упомянутые варианты с одной котраекторией $\overline{\psi}$ легко выводятся из теоремы В.Ф. Кротова с линейной вспомогательной функцией [20], но теорему 3 и следствие 1 таким путем получить невозможно. Если же взять нелинейную функцию φ^ψ вида (3.5) при $\psi = \overline{\psi}$, то с ней теорема Кротова даст менее гибкие достаточные условия.

Обратимся к достаточным условиям оптимальности любого процесса $\sigma^* = (x^*, u^*)$, например наиболее глубокого спуска с $\overline{\sigma}$ в ходе применения теоремы 1.

Обозначим через $Mh^e(\psi, x^*, E^*)$ условие, которое получается из $Mh^e(\psi, \overline{x}, E)$ заменой $(\overline{x}, E)$ на (x^*, E^*), где $E^* : T \to \mathbb{R}^n$ — многозначное отображение, селектором которого является $x^*(t)$.

Следствие 2. *Условие* $Mh^e(\psi, x^*, E^*)$ *достаточно для* E^**-оптимальности пары* σ^*.

Для д о к а з а т е л ь с т в а достаточно заметить, что это условие гарантирует поточечный минимум интегранта в формуле приращения (3.3) вдоль траектории $x^*(t)$ на множестве $E^*(t)$. □

Это достаточное условие с "чужой" котраекторией использовано ниже в примерах 5, 6.

При сравнительном анализе теоремы 3 с альтернативными аналогами вне обзора остались достаточные условия в форме ПМ из [19] — самые гибкие из известных, причем для задач с концевыми ограничениями. Их содержательный смысл очень прост и для задачи (P_M) с терминальным ограничением $x(t_1) \in M \quad (x(t_0) = x_0$ фиксировано) состоит в следующем.

Фиксируем некоторое множество $\Psi^*(\overline{\sigma})$ котраекторий процесса $\overline{\sigma}$ без обычного условия трансверсальности, но таких, что линейные функционалы $\psi(t_1)\cdot x(t_1)$, $\psi \in \Psi^*(\overline{\sigma})$ имеют минимум (для ясности — глобальный) в точке $\overline{\sigma}$ на допустимом множестве Σ задачи (P). Тогда очевидно, что система линейных неравенств $\psi(t_1)\cdot x \geq \psi(t_1)\cdot\overline{x}(t_1)\,,\ \psi \in \Psi^*(\overline{\sigma})$ задает множество $Q[\Psi^*]$, аппроксимирующее сверху множество достижимости $\mathcal{R}(t_1)$ системы (0.1), (0.2) ($Q[\Psi^*]$ есть пересечение опорных полупространств к $\mathcal{R}(t_1)$ в точке $\overline{x}(t_1)$). Отсюда получается следующее достаточное условие оптимальности $\overline{\sigma}$ в задаче (P_M):

$$\begin{gathered} \text{существует множество } \ \Psi^*(\overline{\sigma}) : \overline{x}(t_1) \ \text{ — точка глобального минимума в задаче} \\ l(x) \to \min\,, \quad x \in M \bigcap Q[\Psi^*]\,. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Несмотря на почти очевидность, это условие (и другие, основанные на оценках фазового состояния системы) предпочтительнее достаточных условий, использующих модифицированные лагранжианы [21].

Применительно к задаче (P) теорема 3 и условие (4.4) независимы между собой (ни одно из них не выводится из другого). Но важно, что располагая достаточными условиями теоремы 3, можно существенно улучшить анонсированные условия из [19] для задачи (P_M), включив в формирование оценочного множества $Q[\Psi^*]$ нелинейные неравенства. Эти неравенства вида $\varphi(x) \geq \varphi(x(t_1))$ должны состоять из функций, гарантированно имеющих минимум на множестве Σ в точке $\overline{\sigma}$; для их отбора и расширения множества $\Psi^*(\overline{\sigma})$ и важна теорема 3.

5. Примеры

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие полученные результаты, и снабдим их короткими комментариями.

Пример 5 [16]. $\dot{x}_1 = x_2 u_1$, $\dot{x}_2 = -(x_1 + x_2)u_1 + x_2 + (t - \pi/2)u_2$, $x(0) = (0,0)$, $U = [0,1] \times [0,1]$, $J = x_2(\pi) \to \min$.

Возьмем экстремаль $\overline{\sigma}$, для которой $\overline{x} \equiv 0$, $\overline{u} \equiv (1,0)$, $\overline{\psi}(t) = -(\sin t, \cos t)$. Она является особой по компоненте управления u_1, ибо $H_{u_1} \equiv 0$. Применять к ней позиционный ПМ, т. е. теорему 1 при $\psi = \overline{\psi}$, бесперспективно: по явно неоптимальной компоненте $\overline{u}_2$ условие минимума функции H выполняется строго, а выбор управления спуска по компоненте u_1 слишком неопределен из-за особости.

Заметим, что все управления вида $u(t) = (u_1(t), 0) \in U$ совместимы с траекторией $\overline{x}$ в смысле любого определения. Применим теорему 1, ограничившись выбором совместимого управления $u^c \equiv (0,0)$ с котраекторией $\psi^c(t) = (0, \exp(t_1 - t))$ (так, чтобы $\overline{u}_2$ “забраковать”). Тогда очевидно, что u^c не удовлетворяет ПМ и, следовательно, $\overline{\sigma}$ и все процессы из $\Sigma(\overline{x})$ неоптимальны. (Такое заключение в отношении $\overline{\sigma}$ получено в [16], исходя из условия $M(\psi^c)$, но этим анализ примера и завершился.) Спуск по присоединенной ψ^c-задаче дал управление $u^*(t) = (0, \chi_{[0,\pi/2]})$, где χ_A — характеристическая функция множества A. Тогда

$$x_1^* \equiv 0\,, \quad x_2^*(t) = \begin{cases} (1-\pi/2)(e^t - 1) - t\,, & t \in [0, \pi/2], \\ (1-\pi/2)(e^{\pi/2} - 1)\,, & t \in [\pi/2, \pi], \end{cases}$$

$$J[x^*, u^*] = (1 - \pi/2) - e^{\pi/2} \approx -18.02 < 0 = J[\overline{\sigma}]\,,$$

т. е. спуск действительно реализовался.

Последующее тестирование пары σ^* позиционным ПМ (и двойственным [4]) не привело к “отсеву” σ^* как неоптимального процесса; при этом в ходе проверки использовалась котраектория ψ^c, совпавшая с ψ^* (все котраектории с $u_1 \equiv 0$ совпадают). Поскольку необходимые условия выполнены, то проверим достаточные условия. Так как целевая функция линейна, то применим следствие 1 с естественной заменой $\overline{\sigma}$ на σ^* с фиксированной котраекторией $\psi = \psi^*$ (ибо совместимых с x^* управлений нет). Тогда получим

$$H^e(t, x, \psi^*, u) = \psi_2^*(t)[-(x_1 + x_2)u_1 + (t - \pi/2)u_2]\,,$$

и теперь необходимо выбрать отображение $E^*(t)$, учитывая, что $\psi_2^*(t) > 0$, а $x_2^*(t) < 0$ на $(0, \pi)$. Очевидно, что выбор $E^* = \{x_1 + x_2 \leq 0\}$ согласуется с управлением u^* и подходит, так как тогда на E^*

$$h^e(t, x, \psi^*(t)) = \psi_2^*(t)(t - \pi/2)\chi_{[0,\pi/2]} = H^e|_{\sigma^*} \;\text{ на }\; T$$

не зависит от x и имеет формальный минимум вдоль $x^*(t)$. Следовательно, пара σ^* оптимальна при ограничении $x(t) \in E^*(t)$ и, в частности, на ней достигается сильный минимум функционала.

Этот пример демонстрирует не только эффект использования совместимых управлений в необходимых условиях и процедурах улучшения управления, но и естественность “вплетения” достаточных условий для наилучших процессов спуска (σ^*) в общую схему решения задач позиционными условиями оптимальности. Кроме того, в этом примере “не сработают” достаточные условия с требованием выпуклости нижнего гамильтониана по x, поскольку он, напротив, оказывается вогнутым, как и во всех билинейных задачах.

П р и м е р 6. $\dot{x}_1 = u,\ \dot{x}_2 = \dfrac{\pi}{2} u \cos \dfrac{\pi x_1}{2},\ x(0) = (0, 0),\ |u| \le 1,\ J = x_2^3(1) \to \min$.

Это модификация известного примера [22], в котором функционал был линеен ($x_2(1)$). Здесь имеется бесчисленное множество экстремалей и, если начать решение с экстремали $\overline{\sigma} = (\overline{x}, \overline{u}) \equiv 0$ с $\overline{\psi} \equiv 0$, то позиционный ПМ элементарно приводит к управлению спуска $u^* \equiv -1$. Тестируем пару σ^* достаточным условием $Mh^e(\overline{\psi}, x^*, E^*)$ с “чужой” котраекторией $\overline{\psi}$ при очевидном выборе $E^*(t) = \{|x_1| \le t\}$. Так как $p(t, x) = (0, 3x_2^3)$ при $\psi = \overline{\psi}$, то на $E^*(t)$

$$h^e(x, p(x)) = -3\frac{\pi}{2} x_1^2 \cos \frac{\pi x_1}{2} = H^e(x, p(x), u^*)$$

и имеет минимум вдоль траектории $x_1^*(t) = -t$. Следовательно, пара σ^* глобально оптимальна, так как все траектории системы проходят по $E^*(t)$.

В этом примере примечателен не только эффект “чужой” котраектории — к процессу σ^* неприменимы достаточные условия следствия 1, поскольку целевая функция l не выпукла. Более того, если взять линейный функционал $I = x_2(1)$, то вновь “не сработают” достаточные условия, требующие выпуклости гамильтониана по x, но следствие 1 окажется применимым даже с “чужой” котраекторией.

Следующий пример иллюстрирует ограниченную эффективность “конечномерных” достаточных условий в форме ПМ (с одной $\overline{\psi}$) в задачах с плохими свойствами управляемости системы. Сказывается огрубление, которое допускается при их выводе из-за отказа от условий вариационного типа (например (4.1)); часто оказывается эффективным использовать их неформально.

П р и м е р 7. $\dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = x_2 u_2 - x_1^2,\ x(0) = (0, 0),\ |u_1| \le 1,\ |u_2| \le 1,\ J = x_1^2(1) - x_2(1) \to \min$.

Нетрудно видеть, что на всех траекториях системы $x_2(t) \le 0$; поэтому все процессы с траекторией $\overline{x} \equiv 0$ оптимальны.

Но возьмем экстремальную пару $\overline{\sigma} = (\overline{x}, \overline{u})$ с котраекторией $\overline{\psi} \equiv (0, -1)$. Так как $l(x)$ выпукла, то достаточные условия теоремы 3 и следствия 1 с $\psi = \overline{\psi}$ совпадают, но “не срабатывают”: расширенный гамильтониан $h^e(x, \overline{\psi}) = -|x_2| + x_1^2$ не имеет минимума вдоль $\overline{x}(t) = 0$ даже при учете априорной оценки $E = \{x_2 \le 0\}$.

Теперь заметим, что все допустимые управления вида $u(t) = (0, u_2(t))$ совместимы с $\overline{x}$, и для простоты возьмем $u^\alpha \equiv (0, \alpha)$, где $\alpha \in [-1, 1]$. Тогда $\psi_1^\alpha \equiv 0$, $\psi_2^\alpha(t) = -\exp \alpha(1-t)$ и

$$H^e(t, x, \psi^\alpha, u) = e^{\alpha(t-1)}[x_2(u_2 - \alpha) + x_1^2]\,.$$

Отсюда ясно, что надо выбрать $\alpha = 1$, ибо тогда на множестве $E = \{x_2 \le 0\}$ $h(t, x, \psi^1)$ будет иметь минимум вдоль $\overline{x}$.

Тем самым вывод о глобальной оптимальности $\overline{\sigma}$ (неформально очевидной) получен, но отнюдь не элементарно — с привлечением идеи совместимых управлений и “размножения” котраекторий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961. 388 с.
2. **Дыхта В.А.** Вариационные условия оптимальности с позиционными управлениями спуска, усиливающие принцип максимума // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2014. Т. 8. С. 86–103.

3. **Дыхта В.А.** Слабо монотонные решения неравенства Гамильтона — Якоби и условия оптимальности с позиционными управлениями // Автоматика и телемеханика. 2014. № 5. С. 31–49.
4. **Дыхта В.А.** Нестандартная двойственность и нелокальные необходимые условия оптимальности в невыпуклых задачах оптимального управления // Автоматика и телемеханика. 2014. № 11. С. 19–37.
5. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 518 с.
6. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации / Ин-т компьютерных исследований. М.; Ижевск, 2003. 336 с.
7. **Кларк Ф., Ледяев Ю.С., Субботин А.И.** Универсальное позиционное управление и проксимальное прицеливание в задачах управления в условиях возмущения и дифференциальных играх // Тр. МИАН. 1999. Т. 224. С. 165–186.
8. Nonsmooth analysis and control theory / F.H. Clarke, Yu.S Ledyaev, R.J. Stern, P.R. Wolenski. N.Y.: Springer-Verlag, 1998. 276 p.
9. Qualitative properties of trajectories of control systems: a survey / F.H. Clarke, Yu.S Ledyaev, R.J. Stern, P.R. Wolenski // J. Dynam. Control Systems. 1995. Vol. 1, no. 1. P. 1–48.
10. **Warga J.** A second order condition that strengthens Pontryagin's maximum principle // J. Differential Equations. 1978. Vol. 28, no. 2. P. 284–307.
11. **Kaśkosz B., Łojasiewicz S.** A maximum principle for generalized control // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Appl. 1985. Vol. 9, no. 2. P. 109–130.
12. **Kaśkosz B.** Extremality, controllability, and abundant subsets of generalized control systems // J. Optimization Theory Appl. 1999. Vol. 101, no. 1. P. 73–108.
13. **Frankowska H., Kaśkosz B.** Linearization and boundary trajectories of nonsmooth control systems // Can. J. Math. 1988. Vol. XI, no. 3. P. 589–609.
14. **Sussmann H.J.** A strong version of the Lojasiewicz maximum principle // Optimal Control of Differential Equations / ed. N.H. Pavel. N.Y.: M. Dekker Inc., 1994. P. 293–309. (Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics.)
15. **Loewen P.D., Vinter R.B.** Pontryagin-type necessary conditions for differential inclusion problems // Systems & Control Lett. 1987. Vol. 9, no. 3. P. 263–265.
16. **Artstein Z.** Pontryagin maximum principle revisited with feedbacks // Eur. J. Control. 2011. Vol. 17, no. 1. P. 46–54.
17. **Clarke F.** Functional analysis, calculus of variations and optimal control. London: Springer-Verlag, 2013. 591 p. (Graduate Texts in Mathematics; vol. 264.)
18. **Никольский М.С.** О достаточности принципа максимума Понтрягина в некоторых оптимизационных задачах // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15: Вычисл. математика и кибернетика. 2005. № 1. С. 35–43.
19. **Антипина Н.В., Дыхта В.А.** Линейные функции Ляпунова — Кротова и достаточные оптимальности в форме принципа максимума // Изв. вузов. Математика. 2002. № 12. С. 11–22.
20. **Krotov V.F.** Global methods in optimal control theory. N.Y.: Marcel Dekker, 1996. 384 p. (Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics; vol. 195.)
21. **Дыхта В.А.** Анализ достаточных условий оптимальности с множеством функций типа Ляпунова // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, no. 5. С. 66–75.
22. **Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Принцип максимума в теории оптимального управления. М.: Едиториал УРСС, 2011. 272 с.

Дыхта Владимир Александрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделением
Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН
e-mail: dykhta@gmail.com

Поступила 16.02.15

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.977

К ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ НА МИНИМАКС ПОЗИЦИОННОГО ФУНКЦИОНАЛА ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА УПРАВЛЯЮЩИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ[1]

Д. В. Корнев, Н. Ю. Лукоянов

В рамках теоретико-игрового подхода рассматривается задача об управлении по принципу обратной связи движением линейной динамической системы на минимакс позиционного показателя качества в виде нормы отклонений движения в заданные моменты времени от заданных целевых точек. Воздействия управления стеснены как геометрическими, так и интегральными ограничениями. Дана процедура для приближенного вычисления оптимального гарантированного результата и построения закона управления, обеспечивающего этот результат. Процедура базируется на рекуррентной конструкции выпуклых сверху оболочек вспомогательных программных функций. Приводятся результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: минимаксное управление, дифференциальные игры, интегральные ограничения, нетерминальный показатель качества.

D. V. Kornev, N. Yu. Lukoyanov. On a minimax control problem for a positional functional under geometric and integral constraints on control actions.

Within the game-theoretical approach we consider a minimax feedback control problem for a linear dynamical system with a positional quality index in the form of the norm of motion deviations at given times from given target points. Control actions are subject to both geometric and integral constraints. A procedure for the approximate calculation of the optimal guaranteed result and for the construction of a control law that ensures the result is developed. The procedure is based on the recursive construction of upper convex hulls of auxiliary program functions. Results of numerical simulations are presented.

Keywords: minimax control, differential games, integral constraints, nonterminal payoff.

Введение

Рассматривается линейная динамическая система, подверженная воздействиям управления и помехи. Возможности управления стеснены геометрическими и интегрально-импульсными ограничениями. На помеху наложены только геометрические ограничения. В рамках теоретико-игрового подхода [1–3] исследуется задача об управлении по принципу обратной связи на минимакс нетерминального показателя качества — позиционного функционала в виде нормы, оценивающей совокупность отклонений движения системы в заданные моменты времени от заданных целевых точек. В силу геометрических ограничений на возможности управления здесь не возникает импульсных постановок и связанных с ними трудностей (см., например, [4–6]). Однако интегральные ограничения требуют дополнительной оптимизации по затратам ресурсов. В работе дана процедура для вычисления оптимального гарантированного результата управления, базирующаяся на рекуррентном построении выпуклых сверху оболочек подходящих вспомогательных функций. На ее основе методом экстремального сдвига [2; 3] построен закон управления, обеспечивающий результат не хуже оптимального гарантированного результата с наперед заданной точностью. Приведен иллюстрирующий пример.

Развиваемые конструкции выпуклых сверху оболочек идейно восходят к стохастическому программному синтезу [2; 7]. Они были разработаны для задач без интегральных ограничений (см., например, [3; 8–12]). Для задач с интегральными ограничениями подобные построения рассматривались в [13–15] для случая терминального показателя качества. В докладе [16] было намечено объединение конструкций из [11] и [14; 15] для решения задач управления с

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 15-11-10018.

интегральными ограничениями и нетерминальным показателем качества. Настоящая статья посвящена развитию и обоснованию результатов, анонсированных в [16].

1. Постановка задачи

Пусть движение динамической системы описывается уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t)v, \quad t_0 \leqslant t_* \leqslant t < \vartheta; \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^{n_u}, \quad v \in \mathbb{R}^{n_v}. \tag{1.1}$$

Здесь x — фазовый вектор; t — время; точка над символом обозначает производную по t; $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — непрерывные матрицы-функции; u — управляющее воздействие; v — воздействие помехи. Моменты времени t_0 и ϑ зафиксированы, t_* — момент начала процесса управления.

Допустимой реализацией управления считаем всякую измеримую (по Борелю) функцию $u\big[t_*[\cdot]\vartheta\big) = \big\{u(t) \in \mathbb{R}^{n_u},\ t_* \leqslant t < \vartheta\big\}$, которая одновременно удовлетворяет следующим геометрическому и интегральному ограничениям:

$$\|u(t)\|_u \leqslant \lambda_u, \quad t_* \leqslant t < \vartheta; \quad \int\limits_{t_*}^{\vartheta} \alpha(\tau)\|u(\tau)\|_u d\tau \leqslant \rho_*. \tag{1.2}$$

Реализацию $v\big[t_*[\cdot]\vartheta\big) = \big\{v(t) \in \mathbb{R}^{n_v},\ t_* \leqslant t < \vartheta\big\}$ помехи считаем допустимой, если она измерима и удовлетворяет только геометрическому ограничению

$$\|v(t)\|_v \leqslant \lambda_v, \quad t_* \leqslant t < \vartheta. \tag{1.3}$$

Здесь $\|\cdot\|_u$ и $\|\cdot\|_v$ — нормы в $\mathbb{R}^{n_u}$ и $\mathbb{R}^{n_v}$ соответственно; λ_u, λ_v — заданные постоянные; $\alpha(\tau)$ — скалярная, положительная, непрерывная на $[t_0, \vartheta]$ функция.

Дополнительно к фазовому вектору x системы (1.1) введем переменную ρ, изменение которой описывается уравнением

$$\dot{\rho} = -\alpha(t)\|u\|_u, \quad t_* \leqslant t < \vartheta, \quad \rho(t_*) = \rho_*. \tag{1.4}$$

Тогда интегральное ограничение из (1.2) можно переписать в виде фазового: $0 \leqslant \rho \leqslant \rho_*$.

Обозначим

$$\lambda_K = \max_{t \in [t_0, \vartheta]} \big[\|A(t)\| + \lambda_u\|B(t)\| + \lambda_v\|C(t)\|\big],$$

где

$$\|A(t)\| = \max_{\|x\|_E \leqslant 1} \|A(t)x\|_E, \quad \|B(t)\| = \max_{\|u\|_u \leqslant 1} \|B(t)u\|_E, \quad \|C(t)\| = \max_{\|v\|_v \leqslant 1} \|C(t)v\|_E.$$

Здесь и далее $\|\cdot\|_E$ — евклидова норма. В пространстве переменных (t, x, ρ) определим компактное множество K_χ возможных позиций рассматриваемой динамической системы:

$$K_\chi = \Big\{(t, x, \rho) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times [0, \rho_0 + \chi] \colon \|x\|_E \leqslant (1 + R_0 + \chi) \exp\big[(t - t_0)\lambda_K\big] - 1\Big\}, \tag{1.5}$$

где $\chi \geqslant 0$, $R_0 > 0$, $\rho_0 > 0$ — некоторые постоянные. Пусть $(t_*, x_*, \rho_*) \in K_\chi$, $t_* < \vartheta$. Под движением $x\big[t_*[\cdot]\vartheta\big]$, порожденным из позиции (t_*, x_*, ρ_*) допустимыми реализациями $u\big[t_*[\cdot]\vartheta\big)$ и $v\big[t_*[\cdot]\vartheta\big)$, понимаем абсолютно непрерывную функцию $\big\{x(t) \in \mathbb{R}^n,\ t_* \leqslant t \leqslant \vartheta,\ x(t_*) = x_*\big\}$, которая при почти всех $t_* \leqslant t \leqslant \vartheta$ вместе с $u = u(t)$ и $v = v(t)$ удовлетворяет уравнению (1.1). Заметим, что в согласии с (1.1)–(1.5) имеет место включение

$$\big(t, x(t), \rho(t)\big) \in K_\chi, \quad \rho(t) = \rho_* - \int\limits_{t_*}^{\vartheta} \alpha(\tau)\|u(\tau)\|_u d\tau, \quad t_* \leqslant t \leqslant \vartheta.$$

Пусть заданы моменты времени ϑ_i оценки качества движения $x\big[t_*[\cdot]\vartheta\big]$: $t_0 < \vartheta_i < \vartheta_{i+1} \leqslant \vartheta$, $i = 1, \ldots, N-1$, $\vartheta_N = \vartheta$, а также постоянные матрицы D_i размерности $d_i \times n$ $(1 \leqslant d_i \leqslant n)$, целевые векторы $c_i \in \mathbb{R}^n$ и нормы $\mu_i(l_i, \ldots, l_N)$, $(l_i, \ldots, l_N) \in \mathbb{R}^{d_i} \times \ldots \times \mathbb{R}^{d_N}$, $i = 1, \ldots, N$. Пусть существуют такие четные по μ нормы $\sigma_i(l_i, \mu)$, $(l_i, \mu) \in \mathbb{R}^{d_i} \times \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, N-1$, что

$$\mu_i(l_i, \ldots, l_N) = \sigma_i\big(l_i, \mu_{i+1}(l_{i+1}, \ldots, l_N)\big), \quad i = 1, \ldots, N-1. \tag{1.6}$$

Обозначим

$$h(t) = \min\{i = 1, \ldots, N \colon \vartheta_i \geqslant t\}, \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta. \tag{1.7}$$

Показатель качества, оценивающий движение $x\big[t_*[\cdot]\vartheta\big]$, имеет вид

$$\gamma\big(x\big[t_*[\cdot]\vartheta\big]\big) = \mu_{h(t_*)}\Big(D_{h(t_*)}\big(x(\vartheta_{h(t_*)}) - c_{h(t_*)}\big), \ldots, D_N\big(x(\vartheta_N) - c_N\big)\Big). \tag{1.8}$$

Отметим, что он является позиционным функционалом (см. [3, с. 43], а также [11]).

Задача управления — доставить показателю (1.8) как можно меньшее значение. Действия помехи неизвестны и, в частности, могут быть направлены на максимизацию этого показателя.

Дальнейшая формализация задачи следует теоретико-игровому подходу [1–3]. Под стратегией U управления понимаем произвольную функцию

$$U = \Big\{U(t, x, \rho, \varepsilon) \in \mathbb{R}^{n_u},\ \|U(t, x, \rho, \varepsilon)\|_u \leqslant \lambda_u,\ (t, x, \rho) \in K_0,\ \varepsilon > 0\Big\},$$

где ε — параметр точности [2, с. 68]. Законом $\mathcal{U}$ управления называем тройку $\big(U,\ \varepsilon,\ \Delta_\delta\big)$, где Δ_δ — разбиение отрезка времени $[t_*, \vartheta]$:

$$\Delta_\delta = \Big\{t_j \colon t_1 = t_*,\ 0 < t_{j+1} - t_j \leqslant \delta,\ j = 1, \ldots, k,\ t_{k+1} = \vartheta\Big\}. \tag{1.9}$$

Из заданной позиции $(t_*, x_*, \rho_*) \in K_0$ закон управления $\mathcal{U}$ в паре с допустимой реализацией $v\big[t_*[\cdot]\vartheta\big)$ помехи однозначно формирует движение $\big(x\big[t_*[\cdot]\vartheta\big], \rho\big[t_*[\cdot]\vartheta\big]\big)$ расширенной системы (1.1), (1.4) как решение пошаговых уравнений

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u_j(t) + C(t)v(t), \\ &\dot{\rho}(t) = -\alpha(t)\|u_j(t)\|_u, \end{aligned} \qquad t_j \leqslant t < t_{j+1},\ j = 1, \ldots, k, \tag{1.10}$$

при начальном условии $x(t_1) = x_*$, $\rho(t_1) = \rho_*$. Начальное состояние $\big(x(t_j), \rho(t_j)\big)$ для отрезка $t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}$ при $j > 1$ совпадает с конечным состоянием $\big(x(t_j), \rho(t_j)\big)$ для предыдущего отрезка $t_{j-1} \leqslant t \leqslant t_j$. Величина $u_j(t)$ назначается законом $\mathcal{U}$ по правилу

$$u_j(t) = \begin{cases} 0, \quad t_j \leqslant t < t_{j+1}, \quad \text{если } 0 \leqslant \rho(t_j) < \displaystyle\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \alpha(\tau)\|u_j^*\|_u d\tau, \\[2ex] u_j^*, \quad t_j \leqslant t < t_{j+1}, \quad \text{если } \rho(t_j) \geqslant \displaystyle\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \alpha(\tau)\|u_j^*\|_u d\tau, \end{cases} \tag{1.11}$$

где $u_j^* = U\big(t_j, x(t_j), \rho(t_j), \varepsilon\big)$. Гарантированный результат закона $\mathcal{U}$ управления для заданной позиции $(t_*, x_*, \rho_*) \in K_0$ определяется равенством

$$\Gamma(\mathcal{U}; t_*, x_*, \rho_*) = \sup_{v[t_*[\cdot]\vartheta)} \gamma\big(x\big[t_*[\cdot]\vartheta\big]\big),$$

где верхняя грань берется по всем допустимым реализациям $v\big[t_*[\cdot]\vartheta\big)$ помехи, а $\gamma\big(x\big[t_*[\cdot]\vartheta\big]\big)$ — значение показателя (1.8), реализовавшегося на движении $x\big[t_*[\cdot]\vartheta\big]$, порожденном согласно (1.10), (1.11) законом $\mathcal{U}$ в паре с $v\big[t_*[\cdot]\vartheta\big)$ из позиции (t_*, x_*, ρ_*).

Соответственно гарантированным результатом стратегии U называем величину

$$\Gamma(U;t_*,x_*,\rho_*)=\limsup_{\varepsilon\to0}\lim_{\delta\to0}\sup_{\Delta_\delta}\Gamma\big(\mathcal{U}=(U,\varepsilon,\Delta_\delta);t_*,x_*,\rho_*\big). \tag{1.12}$$

Тогда оптимальным гарантированным результатом управления будет

$$\Gamma_u(t_*,x_*,\rho_*)=\inf_U\Gamma(U;t_*,x_*,\rho_*), \tag{1.13}$$

а стратегия U_0 управления оптимальна, если $\Gamma(U_0;t_*,x_*,\rho_*)=\Gamma_u(t_*,x_*,\rho_*)$.

Для $\zeta>0$ закон $\mathcal{U}$ называем ζ-оптимальным, если $\Gamma(\mathcal{U};t_*,x_*,\rho_*)\leqslant\Gamma_u(t_*,x_*,\rho_*)+\zeta$.

Цель работы состоит в разработке методов для нахождения оптимального гарантированного результата $\Gamma_u(t_*,x_*,\rho_*)$ и построения ζ-оптимального закона управления.

При решении этой основной задачи ниже будем также рассматривать задачу о самой неблагоприятной помехе. Будем рассматривать стратегии помехи

$$V=\big\{V(t,x,\rho,\varepsilon)\in\mathbb{R}^{n_v},\ \|V(t,x,\rho,\varepsilon)\|_v\leqslant\lambda_v,\ (t,x,\rho)\in K_0,\ \varepsilon>0\big\}$$

и законы $\mathcal{V}=(V,\varepsilon,\Delta_\delta)$ формирования помехи. Из заданной позиции $(t_*,x_*,\rho_*)\in K_0$ закон $\mathcal{V}$ в паре с допустимой реализацией $u\big[t_*[\cdot]\vartheta\big)$ управления однозначно формирует движение $\big(x\big[t_*[\cdot]\vartheta\big],\rho\big[t_*[\cdot]\vartheta\big]\big)$ расширенной системы (1.1), (1.4) как решение пошаговых уравнений

$$\begin{aligned}&\dot x(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)+C(t)v_j^*,\\&\dot\rho(t)=-\alpha(t)\|u(t)\|_u,\end{aligned}\qquad t_j\leqslant t<t_{j+1},\quad j=1,\ldots,k,$$

при начальном условии $x(t_1)=x_*$, $\rho(t_1)=\rho_*$. Здесь $v_j^*=V\big(t_j,x(t_j),\rho(t_j),\varepsilon\big)$.

Соответственно определяем гарантированный результат закона $\mathcal{V}$:

$$\Gamma(\mathcal{V};t_*,x_*,\rho_*)=\inf_{u[t_*[\cdot]\vartheta)}\gamma\big(x\big[t_*[\cdot]\vartheta\big]\big),$$

гарантированный результат стратегии V:

$$\Gamma(V;t_*,x_*,\rho_*)=\liminf_{\varepsilon\to0}\lim_{\delta\to0}\inf_{\Delta_\delta}\Gamma\big(\mathcal{V}=(V,\varepsilon,\Delta_\delta);t_*,x_*,\rho_*\big), \tag{1.14}$$

оптимальный гарантированный результат помехи:

$$\Gamma_v(t_*,x_*,\rho_*)=\sup_V\Gamma(V;t_*,x_*,\rho_*), \tag{1.15}$$

и оптимальную стратегию V_0 помехи: $\Gamma(V_0;t_*,x_*,\rho_*)=\Gamma_v(t_*,x_*,\rho_*)$.

Заметим, что из определений величин $\Gamma_u(t_*,x_*,\rho_*)$ и $\Gamma_v(t_*,x_*,\rho_*)$ вытекает неравенство

$$\Gamma_u(t_*,x_*,\rho_*)\geqslant\Gamma_v(t_*,x_*,\rho_*),\quad (t_*,x_*,\rho_*)\in K_0. \tag{1.16}$$

2. Вспомогательная модель

Пусть $t_0\leqslant t_*<t^*\leqslant\vartheta$ и $\varrho_*\geqslant0$. Через $\mathscr{U}(t_*,t^*,\varrho_*)$ обозначим множество всех измеримых функций $u_*\big[t_*[\cdot]t^*\big)=\big\{u_*(t)\in\mathbb{R}^{n_u},\ t_*\leqslant t<t^*\big\}$, которые удовлетворяют условиям

$$\|u_*(t)\|_u\leqslant\lambda_u,\quad t_*\leqslant t<t^*,\quad \int\limits_{t_*}^{t^*}\alpha(\tau)\|u_*(\tau)\|_u d\tau\leqslant\varrho_*,$$

а через $\mathscr{V}(t_*, t^*)$ — множество измеримых функций $v_*\big[t_*[\cdot]t^*\big) = \big\{v_*(t) \in \mathbb{R}^{n_v},\ t_* \leqslant t < t^*\big\}$, удовлетворяющих условию

$$\|v_*(t)\|_v \leqslant \lambda_v, \quad t_* \leqslant t < t^*.$$

Наряду с исходной расширенной системой (1.1), (1.4) рассмотрим ее модель-копию:

$$\dot{w} = A(t)w + B(t)u_* + C(t)v_*, \quad \dot{\varrho} = -\alpha(t)\|u_*\|_u, \quad t_0 \leqslant t_* \leqslant t < \vartheta; \qquad (2.1)$$
$$w(t_*) = w_*, \quad \varrho(t_*) = \varrho_*.$$

В качестве множества возможных позиций (t, w, ϱ) модели (2.1) рассматриваем компакт K_2, определенный в (1.5). Соответственно допустимыми реализациями воздействий u_* и v_* считаем функции $u_*\big[t_*[\cdot]\vartheta\big) \in \mathscr{U}(t_*, \vartheta, \varrho_*)$ и $v_*\big[t_*[\cdot]\vartheta\big) \in \mathscr{V}(t_*, \vartheta)$. В последующих рассуждениях иногда будет удобно представить компоненту w фазового вектора (w, ϱ) модели (2.1) в виде суммы $w = w^{(1)} + w^{(2)}$, где изменение переменных $w^{(1)}$ и $w^{(2)}$ описывается уравнениями

$$\dot{w}^{(1)} = A(t)w^{(1)} + B(t)u_*, \quad \dot{w}^{(2)} = A(t)w^{(2)} + C(t)v_*. \qquad (2.2)$$

Пусть

$$p(t,s,r) \in \underset{\|u\|_u \leqslant \lambda_u}{\arg\min}\big[\langle s, B(t)u\rangle - r\alpha(t)\|u\|_u\big], \quad q(t,s) \in \underset{\|v\|_v \leqslant \lambda_v}{\arg\max}\langle s, C(t)v\rangle,$$
$$\eta(\varepsilon, t) = \big(\varepsilon + (t - t_0)\varepsilon\big)^{1/2} \exp\big[\lambda_A(t - t_0)\big], \quad \lambda_A = \max_{t \in [t_0, \vartheta]} \|A(t)\|, \qquad (2.3)$$
$$t \in [t_0, \vartheta], \quad s \in \mathbb{R}^n, \quad r \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0.$$

Лемма 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых $(t_*, x_*, \rho_*) \in K_2$, $(t_*, w_*, \varrho_*) \in K_2$, $t_* < \vartheta$, и $t^* \in (t_*, \vartheta]$, $t^* - t_* < \delta$, имеют место следующие утверждения.*

1. *Пусть $\rho_* \geqslant \eta(\varepsilon, t_*)$ и $\|(x_*, \rho_*) - (w_*, \varrho_*)\|_E \leqslant \eta(\varepsilon, t_*)$. Пусть $\big(x\big[t_*[\cdot]t^*\big], \rho\big[t_*[\cdot]t^*\big]\big)$ — движение системы (1.1), (1.4), порожденное из позиции (t_*, x_*, ρ_*) произвольной допустимой реализацией $v\big[t_*[\cdot]t^*\big)$ помехи и постоянной реализацией управления $u^{\mathrm{e}}\big[t_*[\cdot]t^*\big) = \big\{u^{\mathrm{e}} = p(t_*, x_* - w_*, \rho_* - \varrho_*),\ t_* \leqslant t < t^*\big\}$, а $\big(w\big[t_*[\cdot]t^*\big], \varrho\big[t_*[\cdot]t^*\big]\big)$ — движение модели (2.1), порожденное из позиции (t_*, w_*, ϱ_*) произвольной реализацией $u_*\big[t_*[\cdot]t^*\big) \in \mathscr{U}(t_*, t^*, \varrho_*)$ и постоянной реализацией $v_*^{\mathrm{e}}\big[t_*[\cdot]t^*\big) = \big\{v_*^{\mathrm{e}} = q(t_*, x_* - w_*),\ t_* \leqslant t < t^*\big\}$. Тогда*

$$\|\big(x(t^*), \rho(t^*)\big) - \big(w(t^*), \varrho(t^*)\big)\|_E \leqslant \eta(\varepsilon, t^*).$$

2. *Пусть $\rho_* < \eta(\varepsilon, t_*)$, $w_* = w_*^{(1)} + w_*^{(2)}$ и $\|x_* - w_*^{(2)}\|_E \leqslant \eta(\varepsilon, t_*)$. Пусть $\big(x\big[t_*[\cdot]t^*\big], \rho\big[t_*[\cdot]t^*\big]\big)$ — движение системы (1.1), (1.4), порожденное из позиции (t_*, x_*, ρ_*) произвольной допустимой реализацией $v\big[t_*[\cdot]t^*\big)$ помехи в паре с нулевой реализацией управления $u \equiv 0$, а $\big(w\big[t_*[\cdot]t^*\big], \varrho\big[t_*[\cdot]t^*\big]\big)$ — движение модели (2.1), порожденное из позиции (t_*, w_*, ϱ_*) произвольной реализацией $u_*\big[t_*[\cdot]t^*\big) \in \mathscr{U}(t_*, t^*, \varrho_*)$ и постоянной реализацией $v_*^{\mathrm{e}}\big[t_*[\cdot]t^*\big) = \big\{v_*^{\mathrm{e}} = q(t_*, x_* - w_*^{(2)}),\ t_* \leqslant t < t^*\big\}$. Тогда*

$$\|x(t^*) - w^{(2)}(t^*)\|_E \leqslant \eta(\varepsilon, t^*).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость леммы вытекает из результатов [2, лемма 25.3].

3. Величины $e_j^{\pm}$ и их свойства

Пусть для промежутка времени $[t_*, \vartheta]$ зафиксировано разбиение $\Delta_\delta = \{t_j\}_{j=1}^{k+1}$ вида (1.9), в которое включены все моменты ϑ_i оценки качества движения из показателя (1.8), т. е.

$$\vartheta_i \in \Delta_\delta, \quad i = h(t_*), \ldots, N. \qquad (3.1)$$

Для $t_* = \vartheta$ формально полагаем, что разбиение Δ_δ состоит из одной точки: $t_* = t_1 = t_{k+1} = \vartheta$.

Пусть $j = 1, \ldots, k$, $m \in \mathbb{R}^n$, $\varrho \geqslant 0$ и $\mathscr{U}_j(\varrho) = \mathscr{U}(t_j, t_{j+1}, \varrho)$, $\mathscr{V}_j = \mathscr{V}(t_j, t_{j+1})$. Положим

$$\Delta\psi_j(t_*, m, \varrho) = \min_{\mathscr{U}_j(\varrho)} \max_{\mathscr{V}_j} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \big\langle m, \Psi(\vartheta, \tau)(B(\tau)u(\tau) + C(\tau)v(\tau))\big\rangle d\tau,$$

где $\Psi(\vartheta, \tau)$ — матрица Коши для уравнения $\dot{x} = A(t)x$, символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение векторов, минимум и максимум берутся по функциям $u\big[t_j[\cdot]t_{j+1}\big) \in \mathscr{U}_j(\varrho)$ и $v\big[t_j[\cdot]t_{j+1}\big) \in \mathscr{V}_j$ соответственно и достигаются, так как множества $\mathscr{U}_j(\varrho)$ и $\mathscr{V}_j$ слабокомпактны в пространстве суммируемых с квадратом функций. Функции $\Delta\psi_j(t_*, m, \varrho)$, $j = 1, \ldots, k$, непрерывны по совокупности аргументов (m, ϱ), выпуклы и не возрастают по ϱ.

Попятно по шагам разбиения Δ_δ определим множества $G_j^{\pm}(t_*)$ векторов $m \in \mathbb{R}^n$ и скалярные функции $\varphi_j^{\pm}(t_*, m, \varrho)$, $m \in G_j^{\pm}(t_*)$, $\varrho \geqslant 0$, по следующим рекуррентным соотношениям.

При $j = k + 1$ имеем

$$G_{k+1}^{+}(t_*) = \{m \colon m = 0\}, \quad \varphi_{k+1}^{+}(t_*, m, \varrho) = 0,$$

$$G_{k+1}^{-}(t_*) = \big\{m \colon m = D_N^{\top} l,\ l \in \mathbb{R}^{d_N},\ \mu_N^*(l) \leqslant 1\big\}, \quad \varphi_{k+1}^{-}(t_*, m, \varrho) = -\langle m, c_N \rangle.$$

Если $1 \leqslant j \leqslant k$, тогда

$$G_j^{+}(t_*) = G_{j+1}^{-}(t_*), \quad \varphi_j^{+}(t_*, m, \varrho) = \operatorname*{conc}_{G_j^{+}(t_*)} \big[\psi_j(t_*, \cdot, \varrho)\big](m),$$

где

$$\psi_j(t_*, m, \varrho) = \min_{\varrho' \in R_j(t_*, \varrho)} [\Delta\psi_j(t_*, m, \varrho - \varrho') + \varphi_{j+1}^{-}(t_*, m, \varrho')], \quad m \in G_j^{+}(t_*), \quad \varrho \geqslant 0,$$

$$R_j(t_*, \varrho) = \left\{\varrho' \colon \max\left[0, \varrho - \lambda_u \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \alpha(\tau) d\tau\right] \leqslant \varrho' \leqslant \varrho\right\},$$

и, далее, когда t_j не совпадает ни с одним из моментов ϑ_i, т. е. $t_j < \vartheta_{h(t_j)}$,

$$G_j^{-}(t_*) = G_j^{+}(t_*), \quad \varphi_j^{-}(t_*, m, \varrho) = \varphi_j^{+}(t_*, m, \varrho),$$

иначе, когда $t_j = \vartheta_h$, $h = h(t_j)$,

$$\begin{gathered} G_j^{-}(t_*) = \Big\{m \colon m = \nu m_* + \Psi^{\top}(\vartheta_h, \vartheta) D_h^{\top} l,\ \nu \geqslant 0,\ l \in \mathbb{R}^{d_h},\ \sigma_h^*(l, \nu) \leqslant 1,\ m_* \in G_j^{+}(t_*)\Big\}, \\ \varphi_j^{-}(t_*, m, \varrho) = \max_{(\nu, l, m_*) | m} [\nu \varphi_j^{+}(t_*, m_*, \varrho) - \langle l, D_h c_h \rangle]. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Здесь $h(\cdot)$ — функция из (1.7); верхний индекс "$\top$" означает транспонирование; $\mu_N^*(\cdot)$ и $\sigma_h^*(\cdot)$ — нормы, сопряженные к $\mu_N(\cdot)$ и $\sigma_h(\cdot)$ из (1.6); при каждом фиксированном $\varrho \geqslant 0$ символ $\operatorname*{conc}_{G_j^{+}(t_*)} [\psi_j(t_*, \cdot, \varrho)](m)$ означает выпуклую сверху (вогнутую) оболочку функции $\psi_j(t_*, \cdot, \varrho) = \{\psi_j(t_*, m, \varrho),\ m \in G_j^{+}(t_*)\}$ на множестве $G_j^{+}(t_*)$, т. е. минимальную из вогнутых функций, мажорирующих $\psi_j(t_*, m, \varrho)$ при $m \in G_j^{+}(t_*)$; максимум в (3.2) вычисляется по всем таким тройкам (ν, l, m_*), что $\nu \geqslant 0$, $l \in \mathbb{R}^{d_h}$, $\sigma_h^*(l, \nu) \leqslant 1$, $m_* \in G_j^{+}(t_*)$ и при этом $\nu m_* + \Psi^{\top}(\vartheta_h, \vartheta) D_h^{\top} l = m$.

Можно проверить, что для любого $j = 1, \ldots, k+1$ множества $G_j^{\pm}(t_*)$ будут выпуклыми компактами в $\mathbb{R}^n$, содержащими $m = 0$, при этом $\varphi_j^{\pm}(t_*, 0, \varrho) \geqslant 0$, $\varrho \geqslant 0$. Кроме того, здесь и всюду далее полагаем, что функции $\varphi_j^{\pm}(t_*, m, \varrho)$ непрерывны по совокупности аргументов (m, ϱ), выпуклы и не возрастают по ϱ. Из результатов [17] следует, что это предположение, по крайней мере, выполнено, если единичные шары норм $\mu_i^*(\cdot)$, $i = 1, \ldots, N$, являются строго выпуклыми, либо многогранниками, либо, в общем случае, P-множествами [18]. Заметим также, что строгую выпуклость единичных шаров норм $\mu_i^*(\cdot)$ всегда можно обеспечить при помощи подходящей аппроксимации исходного показателя качества (1.8) (см. подробности в [17]). В этом случае дальнейшие рассуждения останутся неизменными, а полученный результат будет верен с точностью до погрешности указанной аппроксимации.

Рассмотрим величины

$$e_j^{\pm}(t_*, w, \varrho) = \max_{m \in G_j^{\pm}(t_*)} \big[\langle m, \Psi(\vartheta, t_j) w\rangle + \varphi_j^{\pm}(t_*, m, \varrho)\big], \quad w \in \mathbb{R}^n, \quad \varrho \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, k+1. \quad (3.3)$$

Заметим, что в силу отмеченных выше свойств функций $\varphi_j^{\pm}(t_*, m, \varrho)$, $m \in G_j^{\pm}(t_*)$, $\varrho \geqslant 0$, эти величины будут неотрицательны и непрерывны по совокупности переменных (w, ϱ).

Лемма 2. *Каковы бы ни были момент времени $t_* \in [t_0, \vartheta)$ и разбиение $\Delta_\delta = \{t_j\}_{j=1}^{k+1}$ вида* (1.9), (3.1)*, для любых $j = 1, \ldots, k$, $w \in \mathbb{R}^n$, $\varrho \geqslant 0$ и $h = h(t_j)$ имеем*

$$e_j^{-}(t_*, w, \varrho) = \begin{cases} e_j^{+}(t_*, w, \varrho), & \textit{если } t_j < \vartheta_h, \\ \sigma_h\big(D_h(w - c_h), e_j^{+}(t_*, w, \varrho)\big), & \textit{если } t_j = \vartheta_h. \end{cases} \quad (3.4)$$

Доказательство леммы повторяет обоснование аналогичного утверждения из [11].

Следующие две леммы доказываются по аналогии с теоремами 3 и 4 из [14].

Лемма 3. *Для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta^* > 0$ такое, что, каковы бы ни были момент времени $t_* \in [t_0, \vartheta)$, разбиение $\Delta_\delta = \{t_j\}_{j=1}^{k+1}$ вида* (1.9), (3.1)*, $\delta \leqslant \delta^*$, и позиция $(t_j, w_j, \varrho_j) \in K_2$, $j = 1, \ldots, k$, для всякой реализации $v_*\big[t_j(\cdot)t_{j+1}\big) \in \mathscr{V}_j$ найдется такая реализация $u_*\big[t_j(\cdot)t_{j+1}\big) \in \mathscr{U}_j(\varrho_j)$, что модель* (2.1) *из позиции (t_j, w_j, ϱ_j) под действием этих реализаций придет в такую позицию $\big(t_{j+1}, w(t_{j+1}), \varrho(t_{j+1})\big) \in K_2$, что*

$$e_j^{+}(t_*, w_j, \varrho_j) \geqslant e_{j+1}^{-}\big(t_*, w(t_{j+1}), \varrho(t_{j+1})\big) - \varepsilon(t_{j+1} - t_j).$$

Лемма 4. *Каковы бы ни были момент $t_* \in [t_0, \vartheta)$, разбиение $\Delta_\delta = \{t_j\}_{j=1}^{k+1}$ вида* (1.9), (3.1) *и позиция $(t_j, w_j, \varrho_j) \in K_2$, $j = 1, \ldots, k$, найдется реализация $v_*^0\big[t_j(\cdot)t_{j+1}\big) \in \mathscr{V}_j$ такая, что при всякой реализации $u_*\big[t_j(\cdot)t_{j+1}\big) \in \mathscr{U}_j(\varrho_j)$ модель* (2.1) *из позиции (t_j, w_j, ϱ_j) под действием этих реализаций придет в такую позицию $\big(t_{j+1}, w(t_{j+1}), \varrho(t_{j+1})\big) \in K_2$, что*

$$e_j^{+}(t_*, w_j, \varrho_j) \leqslant e_{j+1}^{-}\big(t_*, w(t_{j+1}), \varrho(t_{j+1})\big).$$

4. Оптимальный гарантированный результат

Пусть зафиксированы момент начала процесса управления $t_* < \vartheta$, разбиение $\Delta_\delta = \{t_j\}_{j=1}^{k+1}$ вида (1.9), (3.1) и на базе этого разбиения построены множества $G_j^{\pm}(t_*)$, функции $\varphi_j^{\pm}(t_*, m, \varrho)$, $m \in G_j^{\pm}(t_*)$, $\varrho \geqslant 0$, после чего в согласии с (3.3) определены величины $e_j^{\pm}(t_*, w, \varrho)$, $w \in \mathbb{R}^n$, $\varrho \geqslant 0$. Опираясь на систему величин $e_j^{+}(t_*, w, \varrho)$, $j = 1, \ldots, k$, определим стратегию управления $U_{\Delta_\delta}^{\mathrm{e}}$ так, чтобы при $t = t_j \in \Delta_\delta$ выполнялись соотношения

$$U_{\Delta_\delta}^{\mathrm{e}}(t_j, x, \rho, \varepsilon) = \begin{cases} 0, & \text{если } \rho < \eta(\varepsilon, t_j), \\ u_j^{\mathrm{e}}, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad (t_j, x, \rho) \in K_1, \ \varepsilon > 0, \quad (4.1)$$

где u_j^{e} находится из условия экстремального сдвига на сопутствующую точку (w_j, ϱ_j) [2; 14]:

$$u_j^{\mathrm{e}} = p(t_j, s_j, r_j), \quad s_j = x - w_j, \quad r_j = \rho - \varrho_j, \quad (w_j, \varrho_j) \in \operatorname*{arg\,min}_{\|(x,\rho)-(w,\varrho)\|_E \leqslant \eta(\varepsilon, t_j)} e_j^{+}(t_*, w, \varrho). \quad (4.2)$$

Здесь функции $\eta(\cdot)$ и $p(\cdot)$ определены по формулам из (2.3).

Лемма 5. *Для любого числа* $\zeta > 0$ *найдутся число* $\varepsilon^* > 0$ *и функция* $\delta^*(\varepsilon) > 0$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^*$, *такие, что, каковы бы ни были значение* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^*$, *позиция* $(t_*, x_*, \rho_*) \in K_1$, $t_* < \vartheta$, *расширенной системы* (1.1), (1.4), *разбиение* Δ_δ *вида* (1.9), (3.1), $\delta \leqslant \delta^*(\varepsilon)$, *и допустимая реализация* $v\big[t_*[\cdot]\vartheta\big)$ *помехи, закон* $\mathcal{U}^{\mathrm{e}} = (U^{\mathrm{e}}_{\Delta_\delta}, \varepsilon, \Delta_\delta)$ *управления гарантирует неравенства*

$$e_1^{\pm}(t_*, x_*, \rho_*) \geqslant \gamma^{\pm}\big(x\big[t_*[\cdot]\vartheta\big]\big) - \zeta, \tag{4.3}$$

где в соответствии с (1.7), (1.8)

$$\gamma^{+}\big(x\big[t_*[\cdot]\vartheta\big]\big) = \mu_{h(t_2)}\Big(D_{h(t_2)}\big(x(\vartheta_{h(t_2)}) - c_{h(t_2)}\big), \ldots, D_N\big(x(\vartheta_N) - c_N\big)\Big),$$
$$\gamma^{-}\big(x\big[t_*[\cdot]\vartheta\big]\big) = \mu_{h(t_1)}\Big(D_{h(t_1)}\big(x(\vartheta_{h(t_1)}) - c_{h(t_1)}\big), \ldots, D_N\big(x(\vartheta_N) - c_N\big)\Big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$\lambda_\Psi = \max_{t,\tau \in [t_0,\vartheta]} \|\Psi(t,\tau)\|_E, \quad \lambda_B = \max_{\tau \in [t_0,\vartheta]} \|B(\tau)\|, \quad \alpha_* = \min_{\tau \in [t_0,\vartheta]} \alpha(\tau), \quad L = \lambda_\Psi \lambda_B \alpha_*^{-1}. \tag{4.4}$$

Число $\varepsilon^* > 0$ выберем так, чтобы для любых $x_i, w_i \in \mathbb{R}^n$, $\|x_i - w_i\|_E \leqslant (1 + 2L)\eta(\varepsilon^*, \vartheta)$, $i = 1, \ldots, N$, выполнялось неравенство

$$\max_{i=1,\ldots,N} \Big|\mu_i\big(D_i(x_i - c_i), \ldots, D_N(x_N - c_N)\big) - \mu_i\big(D_i(w_i - c_i), \ldots, D_N(w_N - c_N)\big)\Big| \leqslant \frac{\zeta}{2}. \tag{4.5}$$

Здесь $\eta(\cdot)$ — функции из (2.3), $\mu_i(\cdot)$, $i = 1, \ldots, N$, — нормы из показателя качества (1.8).

Определим функцию $\delta^{(0)}(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon > 0$, исходя из условия

$$\alpha(\tau)\lambda_u \delta^{(0)}(\varepsilon) \leqslant \eta(\varepsilon, t_0), \quad t_0 \leqslant \tau \leqslant \vartheta. \tag{4.6}$$

Опираясь на лемму 1, определим функцию $\delta^{(1)}(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$. Далее, возьмем числа ζ_i, $i = 1, \ldots, N$: $\dfrac{\zeta}{2(\vartheta - t_0)} = \zeta_1 \geqslant \zeta_2 \geqslant \ldots \geqslant \zeta_N > 0$ так, чтобы для любых $i = 1, \ldots, N-1$, $l_i \in \mathbb{R}^{d_i}$ и $0 \leqslant \nu \leqslant \zeta_{i+1}(\vartheta - t_0)$ имело место неравенство

$$\sigma_i(l_i, e) \geqslant \sigma_i(l_i, e + \nu) - \zeta_i(\vartheta - \vartheta_i), \quad e \geqslant 0, \tag{4.7}$$

где $\sigma_i(\cdot)$, $i = 1, \ldots, N-1$, — нормы из условия (1.6). Задавшись в лемме 3 числом $\varepsilon = \zeta_N$, определим число $\delta^{(3)} > 0$. Положим

$$\delta^*(\varepsilon) = \min\{\delta^{(0)}(\varepsilon),\ \delta^{(1)}(\varepsilon),\ \delta^{(3)}\}, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon^*]. \tag{4.8}$$

Пусть зафиксированы значение $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, позиция $(t_*, x_*, \rho_*) \in K_1$ и разбиение $\Delta_\delta = \{t_j\}_{j=1}^{k+1}$ вида (1.9), (3.1), $\delta \leqslant \delta^*(\varepsilon)$. Рассмотрим движение $\Big(x\big[t_*[\cdot]\vartheta\big], \rho\big[t_*[\cdot]\vartheta\big]\Big)$ расширенной системы (1.1), (1.4), сформированное по схеме (1.10), (1.11) из позиции (t_*, x_*, ρ_*) законом $\mathcal{U}^{\mathrm{e}} = (U^{\mathrm{e}}_{\Delta_\delta}, \varepsilon, \Delta_\delta)$ управления в паре с некоторой допустимой реализацией $v\big[t_*[\cdot]\vartheta\big)$ помехи.

Обозначим $x_j = x(t_j)$, $\rho_j = \rho(t_j)$, $j = 1, \ldots, k+1$. Через j^* обозначим минимальный индекс $j = 1, \ldots, k$, для которого $\rho_j < \eta(\varepsilon, t_j)$. Если такого индекса нет, то полагаем $j^* = k + 1$.

Для каждого $j = 1, \ldots, k$ рассмотрим движение $\Big(w_{[j]}\big[t_j[\cdot]t_{j+1}\big], \varrho_{[j]}\big[t_j[\cdot]t_{j+1}\big]\Big)$ модели (2.1), порождаемое из сопутствующей позиции $\big(t_j, w_j, \varrho_j\big) \in K_2$ реализацией $v_*^{\mathrm{e}}\big[t_j[\cdot]t^{j+1}\big)$, определяемой по лемме 1, в которой полагаем $t_* = t_j$, $t^* = t_{j+1}$, $x_* = x_j$, $\rho_* = \rho_j$, $w_* = w_j$, $\varrho_* = \varrho_j$, и реализацией $u_*\big[t_j[\cdot]t_{j+1}\big)$, найденной по $v_*^{\mathrm{e}}\big[t_j[\cdot]t^{j+1}\big)$ в согласии с леммой 3. Сопутствующая позиция $\big(t_j, w_j, \varrho_j\big)$ каждый раз назначается по следующему правилу: если $1 \leqslant j \leqslant j^* - 1$, пара (w_j, ϱ_j) определяется из соотношений (4.2); если же $j^* \leqslant j \leqslant k$, то $(w_j, \varrho_j) = \big(w_{[j-1]}(t_j), \varrho_{[j-1]}(t_j)\big)$.

При этом для $j = j^*, \ldots, k$ полагаем, что $w_{[j]}(t) = w^{(1)}_{[j]}(t) + w^{(2)}_{[j]}(t)$, где изменение переменных $w^{(1)}_{[j]}(t)$ и $w^{(2)}_{[j]}(t)$, $t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}$, описывается уравнениями вида (2.2) при условиях

$$\begin{gathered} w^{(1)}_{[j^*]}(t_{j^*}) = 0,\ w^{(2)}_{[j^*]}(t_{j^*}) = w_{j^*}, \\ w^{(1)}_{[j]}(t_j) = w^{(1)}_{[j-1]}(t_j), \quad w^{(2)}_{[j]}(t_j) = w^{(2)}_{[j-1]}(t_j), \quad j = j^*+1, \ldots, k. \end{gathered} \tag{4.9}$$

Кроме того, в случае $j^* = 1$ полагаем $w_1 = x_1 = x_*$, $\varrho_1 = \rho_1 = \rho_*$.

Покажем, что для всех $j = 1, \ldots, k$ справедливо неравенство

$$\|x(t_{j+1}) - w_{[j]}(t_{j+1})\|_E \leqslant (1 + 2L)\eta(\varepsilon, \vartheta). \tag{4.10}$$

Для $j < j^*$ это неравенство вытекает из первого утверждения леммы 1, если учесть включение из (4.2), определяющее в этом случае сопутствующую позицию (t_j, w_j, ϱ_j), и условие (4.6) на выбор (4.8) функции $\delta^*(\varepsilon)$, обеспечивающее здесь неравенство $\rho(t_j) \geqslant \int_{t_j}^{t_{j+1}} \alpha(\tau)\|u^{\mathrm{e}}_j\|_u d\tau$.

Пусть $j \geqslant j^*$. Тогда в согласии с построениями выше и леммой 1 имеем

$$\|x(t_{j+1}) - w_{[j]}(t_{j+1})\|_E \leqslant \|x(t_{j+1}) - w^{(2)}_{[j]}(t_{j+1})\|_E + \|w^{(1)}_{[j]}(t_{j+1})\|_E \leqslant \eta(\varepsilon, \vartheta) + \|w^{(1)}_{[j]}(t_{j+1})\|_E. \tag{4.11}$$

Далее, учитывая соотношения (2.2), (4.4) и (4.9), выводим

$$\|w^{(1)}_{[j]}(t_{j+1})\|_E \leqslant \int\limits_{t_{j^*}}^{t_{j+1}} \|\Psi(t_{j+1}, \tau)B(\tau)u_*(\tau)\|_E d\tau \leqslant L \int\limits_{t_{j^*}}^{\vartheta} \alpha(\tau)\|u_*(\tau)\|_u d\tau \leqslant L\varrho_{j^*} \leqslant 2L\eta(\varepsilon, \vartheta). \tag{4.12}$$

Из оценок (4.11) и (4.12) заключаем, что неравенство (4.10) справедливо и для $j \geqslant j_*$.

Через $J(i)$, $i = h(t_1), \ldots, N$, обозначим такое $j = 1, \ldots, k+1$, что $t_j = \vartheta_i$. Положим

$$l^{(x)}_i = D_i\bigl(x(\vartheta_i) - c_i\bigr), \quad l^{(w)}_i = D_i\bigl(w_{[J(i)-1]}(\vartheta_i) - c_i\bigr).$$

Покажем, что для всех $j = 1, \ldots, k$ справедливо неравенство

$$e^+_j(t_*, w_j, \varrho_j) \geqslant \mu_h\bigl(l^{(w)}_h, \ldots, l^{(w)}_N\bigr) - \zeta_h(\vartheta - t_j), \quad h = h(t_{j+1}). \tag{4.13}$$

Будем рассуждать по индукции по убывающему индексу j. В силу леммы 3 имеем

$$e^-_{j+1}\bigl(t_*, w_{[j]}(t_{j+1}), \varrho_{[j]}(t_{j+1})\bigr) - e^+_j(t_*, w_j, \varrho_j) \leqslant \zeta_h(t_{j+1} - t_j), \quad h = h(t_{j+1}), \quad j = 1, \ldots, k. \tag{4.14}$$

При $j = k$, пользуясь неравенством (4.14) и определением (3.3) величины $e^-_{k+1}(\cdot)$, выводим

$$e^+_k(t_*, w_k, \varrho_k) \geqslant e^-_{k+1}\bigl(t_*, w_{[k]}(\vartheta), \varrho_{[k]}(\vartheta)\bigr) - \zeta_N(\vartheta - t_k) = \mu_N\bigl(l^{(w)}_N\bigr) - \zeta_N(\vartheta - t_k).$$

Далее предположим, что неравенство (4.13) выполняется при $j = s+1$, $s = 1, \ldots, k-1$, и докажем, что тогда оно справедливо для $j = s$.

В согласии с леммой 1 и определением сопутствующих позиций $\bigl(t_j, w_j, \varrho_j\bigr)$ имеем

$$e^+_{j+1}\bigl(t_*, w_{[j]}(t_{j+1}), \varrho_{[j]}(t_{j+1})\bigr) \geqslant e^+_{j+1}(t_*, w_{j+1}, \varrho_{j+1}), \quad j = 1, \ldots, k. \tag{4.15}$$

В случае $t_{s+1} \neq \vartheta_h$, $h = h(t_{s+1})$, учитывая сначала неравенство (4.14), затем равенство (3.4) и неравенство (4.15), в силу неравенства (4.13) для $j = s+1$ и справедливого в этом случае равенства $h(t_{s+1}) = h(t_{s+2}) = h$ получаем

$$\begin{gathered} e^+_s(t_*, w_s, \varrho_s) \geqslant e^-_{s+1}\bigl(t_*, w_{[s]}(t_{s+1}), \varrho_{[s]}(t_{s+1})\bigr) - \zeta_h(t_{s+1} - t_s) \\ \geqslant e^+_{s+1}(t_*, w_{s+1}, \varrho_{s+1}) - \zeta_h(t_{s+1} - t_s) \geqslant \mu_h\bigl(l^{(w)}_h, \ldots, l^{(w)}_N\bigr) - \zeta_h(\vartheta - t_s). \end{gathered}$$

Иначе, если $t_{s+1} = \vartheta_h$, имеем $h(t_{s+2}) - 1 = h(t_{s+1}) = h$, $J(h) = s+1$. Тогда, вновь используя сначала (4.14), а затем (3.4) и (4.15), учитывая далее монотонность нормы $\sigma_h(\cdot)$ по второму аргументу и неравенство (4.7), в согласии с (4.13) при $j = s+1$ и (1.6) заключаем

$$\begin{gathered} e_s^+(t_*, w_s, \varrho_s) \geqslant e_{s+1}^-\big(t_*, w_{[s]}(t_{s+1}), \varrho_{[s]}(t_{s+1})\big) - \zeta_h(t_{s+1} - t_s) \\ \geqslant \sigma_h\big(l_h^{(w)}, e_{s+1}^+(t_*, w_{s+1}, \varrho_{s+1})\big) - \zeta_h(t_{s+1} - t_s) \\ \geqslant \sigma_h\big(l_h^{(w)}, e_{s+1}^+(t_*, w_{s+1}, \varrho_{s+1}) + \zeta_{h+1}(\vartheta - t_{s+1})\big) - \zeta_h(\vartheta - t_s) \\ \geqslant \sigma_h\Big(l_h^{(w)}, \mu_{h+1}\big(l_{h+1}^{(w)}, \ldots, l_N^{(w)}\big)\Big) - \zeta_h(\vartheta - t_s) \geqslant \mu_h\big(l_h^{(w)}, \ldots, l_N^{(w)}\big) - \zeta_h(\vartheta - t_s). \end{gathered}$$

Итак, неравенство (4.13) доказано. Из него при $j = 1$, принимая во внимание определение сопутствующей позиции $\big(t_1, w_1, \varrho_1\big)$, выводим неравенство

$$e_1^+(t_*, x_*, \rho_*) \geqslant e_1^+(t_*, w_1, \varrho_1) \geqslant \mu_{h(t_2)}\big(l_{h(t_2)}^{(w)}, \ldots, l_N^{(w)}\big) - \zeta_{h(t_2)}(\vartheta - t_1). \tag{4.16}$$

Доказываемое неравенство (4.3) для $e_1^+(t_*, x_*, \rho_*)$ вытекает из (4.16), если учесть условие (4.5) выбора числа $\varepsilon^* > 0$ вместе с оценкой (4.10) и неравенство $\zeta_{h(t_2)}(\vartheta - t_0) \leqslant \zeta/2$.

Для доказательства неравенства (4.3) относительно $e_1^-(t_*, x_*, \rho_*)$ рассмотрим два случая: $t_1 \neq \vartheta_{h(t_1)}$ и $t_1 = \vartheta_{h(t_1)}$. Если $t_1 \neq \vartheta_{h(t_1)}$, то $h(t_1) = h(t_2)$ и из соотношений (3.4), (4.16), учитывая условие (4.5) с оценкой (4.10) и неравенство $\zeta_{h(t_1)}(\vartheta - t_0) \leqslant \zeta/2$, получаем

$$e_1^-(t_*, x_*, \rho_*) = e_1^+(t_*, x_*, \rho_*) \geqslant \mu_{h(t_1)}\big(l_{h(t_1)}^{(w)}, \ldots, l_N^{(w)}\big) - \zeta_{h(t_1)}(\vartheta - t_1) \geqslant \mu_{h(t_1)}\big(l_{h(t_1)}^{(x)}, \ldots, l_N^{(x)}\big) - \zeta.$$

Если же $t_1 = \vartheta_{h(t_1)}$, то $h(t_1) = h(t_2) - 1$, $J\big(h(t_1)\big) = 1$ и имеет место цепочка неравенств

$$\begin{gathered} e_1^-(t_*, x_*, \rho_*) = \sigma_{h(t_1)}\big(l_{h(t_1)}^{(x)}, e_1^+(t_*, x_*, \rho_*)\big) \\ \geqslant \sigma_{h(t_1)}\big(l_{h(t_1)}^{(x)}, e_1^+(t_*, x_*, \rho_*) + \zeta_{h(t_2)}(\vartheta - t_1)\big) - \zeta_{h(t_1)}(\vartheta - t_1) \\ \geqslant \sigma_{h(t_1)}\Big(l_{h(t_1)}^{(x)}, \mu_{h(t_2)}\big(l_{h(t_2)}^{(w)}, \ldots, l_N^{(w)}\big)\Big) - \frac{\zeta}{2} \\ \geqslant \mu_{h(t_1)}\Big(l_{h(t_1)}^{(x)}, l_{h(t_2)}^{(w)}, \ldots, l_N^{(w)}\Big) - \frac{\zeta}{2} \geqslant \mu_{h(t_1)}\Big(l_{h(t_1)}^{(x)}, l_{h(t_2)}^{(x)}, \ldots, l_N^{(x)}\Big) - \zeta. \end{gathered}$$

Здесь последовательно учтены равенство (3.4), условие (4.7) выбора величин ζ_i, $i = 1, \ldots, N$, неравенство (4.16) вместе с монотонностью нормы $\sigma_{h(t_1)}(\cdot)$ по второму аргументу, а также соотношение (1.6), условие (4.5) выбора числа $\varepsilon^* > 0$ и оценка (4.10). □

Наряду со стратегией $U_{\Delta_\delta}^{\mathrm{e}}$ управления (4.1) рассмотрим стратегию $V_{\Delta_\delta}^{\mathrm{e}}$ помехи, определяемую так, чтобы в точках t_j, $j = 1, \ldots, k$, разбиения Δ_δ выполнялись соотношения

$$V_{\Delta_\delta}^{\mathrm{e}}(t_j, x, \rho, \varepsilon) = q(t_j, w_j - x), \quad (w_j, \varrho_j) \in \mathop{\arg\max}_{\|(x,\rho)-(w,\varrho)\|_E \leqslant \eta(\varepsilon, t_j)} e_j^+(t_*, w, \varrho), \quad (t_j, x, \rho) \in K_1, \quad \varepsilon > 0, \tag{4.17}$$

где функции $\eta(\cdot)$ и $q(\cdot)$ определены согласно (2.3). Тогда по аналогии с леммой 5, опираясь на лемму 4 вместо леммы 3 и меняя в лемме 1 местами исходную расширенную систему (1.1), (1.4) и модель (2.1), можно доказать следующее утверждение.

Лемма 6. *Для любого числа $\zeta > 0$ найдутся число $\varepsilon^* > 0$ и функция $\delta^*(\varepsilon) > 0$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^*$, такие, что, каковы бы ни были значение $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^*$, позиция $(t_*, x_*, \rho_*) \in K_1$, $t_* < \vartheta$, расширенной системы* (1.1), (1.4), *разбиение Δ_δ вида* (1.9), (3.1), *$\delta \leqslant \delta^*(\varepsilon)$, и допустимая реализация $u\big[t_*[\cdot]\vartheta\big)$ управления, закон $\mathcal{V}^{\mathrm{e}} = (V_{\Delta_\delta}^{\mathrm{e}}, \varepsilon, \Delta_\delta)$ помехи гарантирует неравенства*

$$e_1^\pm(t_*, x_*, \rho_*) \leqslant \gamma^\pm\big(x\big[t_*[\cdot]\vartheta\big]\big) + \zeta.$$

Ниже, чтобы подчеркнуть, что величины $e_j^{\pm}(t_*, w, \varrho)$ из (3.3) построены на базе разбиения Δ_δ, используем обозначение $e_j^{\pm}(t_*, w, \varrho; \Delta_\delta)$.

Лемма 7. *Для любого числа $\xi > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что, каковы бы ни были позиция $(t_*, x_*, \rho_*) \in K_1$ и разбиения Δ_{δ_1}, Δ_{δ_2} вида* (1.9), (3.1), *$\delta_1, \delta_2 \leqslant \delta$, имеем*

$$|e_1^{\pm}(t_*, x_*, \rho_*; \Delta_{\delta_1}) - e_1^{\pm}(t_*, x_*, \rho_*; \Delta_{\delta_2})| \leqslant \xi.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $t_* < \vartheta$. Пользуясь леммами 5 и 6, по числу $\zeta = \xi/2$ определим числа $\varepsilon^{*(5)}$, $\varepsilon^{*(6)}$ и функции $\delta^{*(5)}(\cdot)$, $\delta^{*(5)}(\cdot)$. Положим $\varepsilon = \min\{\varepsilon^{*(5)}, \varepsilon^{*(6)}\}$, $\delta = \min\{\delta^{*(5)}(\varepsilon), \delta^{*(6)}(\varepsilon)\}$. Зафиксируем позицию $(t_*, x_*, \rho_*) \in K_1$, значения $\delta_1, \delta_2 < \delta$ и разбиения Δ_{δ_1}, Δ_{δ_2}. Рассмотрим движение $x^{(1)}\big[t_*[\cdot]\vartheta\big]$ расширенной системы (1.1), (1.4), порожденное из позиции (t_*, x_*, ρ_*) законом $\mathcal{U}_1^{\mathrm{e}} = (U^{\mathrm{e}}_{\Delta_{\delta_1}}, \varepsilon, \Delta_{\delta_1})$ из леммы 5 в паре с законом $\mathcal{V}_1^{\mathrm{e}} = (V^{\mathrm{e}}_{\Delta_{\delta_2}}, \varepsilon, \Delta_{\delta_2})$ из леммы 6. Имеем

$$e_1^{\pm}(t_*, x_*, \rho_*; \Delta_{\delta_2}) - \frac{\xi}{2} \leqslant \gamma^{\pm}\big(x^{(1)}\big[t_*[\cdot]\vartheta\big]\big) \leqslant e_1^{\pm}(t_*, x_*, \rho_*; \Delta_{\delta_1}) + \frac{\xi}{2}.$$

С другой стороны, рассматривая движение $x^{(2)}\big[t_*[\cdot]\vartheta\big]$, порожденное из позиции (t_*, x_*, ρ_*) законами $\mathcal{U}_2^{\mathrm{e}} = (U^{\mathrm{e}}_{\Delta_{\delta_2}}, \varepsilon, \Delta_{\delta_2})$ и $\mathcal{V}_2^{\mathrm{e}} = (V^{\mathrm{e}}_{\Delta_{\delta_1}}, \varepsilon, \Delta_{\delta_1})$, получаем

$$e_1^{\pm}(t_*, x_*, \rho_*; \Delta_{\delta_1}) - \frac{\xi}{2} \leqslant e_1^{\pm}(t_*, x_*, \rho_*; \Delta_{\delta_2}) + \frac{\xi}{2}. \qquad \square$$

Пусть $(t_*, x_*, \rho_*) \in K_1$. Рассмотрим последовательность разбиений Δ_{δ_k}, $\delta_k \to 0$ при $k \to \infty$. Из леммы 7 вытекает, что последовательности чисел $e_1^{\pm}(t_*, x_*, \rho_*; \Delta_{\delta_k})$, $k = 1, 2, \ldots$, сходятся:

$$\mathrm{e}^{\pm}(t_*, x_*, \rho_*) = \lim_{k \to \infty} e_1^{\pm}(t_*, x_*, \rho_*; \Delta_{\delta_k}), \tag{4.18}$$

причем указанные пределы являются равномерными по $(t_*, x_*, \rho_*) \in K_1$ и не зависят от выбора последовательности разбиений Δ_{δ_k}. Таким образом, имеет место

Лемма 8. *Для любого числа $\xi > 0$ существует число $\delta^* > 0$ такое, что, каковы бы ни были позиция $(t_*, x_*, \rho_*) \in K_1$ и разбиение Δ_δ вида* (1.9), (3.1), *$\delta \leqslant \delta^*$, имеем*

$$|\mathrm{e}^{\pm}(t_*, x_*, \rho_*) - e_1^{\pm}(t_*, x_*, \rho_*; \Delta_\delta)| \leqslant \xi.$$

Предельные величины (4.18) в определенном смысле наследуют свойства системы величин (3.3). Прежде всего, полагая в равенстве (3.4) $j = 1$ и переходя к пределу по измельчающимся разбиениям Δ_δ, получаем, что величины (4.18) связаны аналогичным соотношением. Далее, в силу лемм 3 и 4 приходим к следующим утверждениям.

Лемма 9. *Пусть $\varepsilon > 0$, $(t_*, w_*, \varrho_*) \in K_1$, $t_* < \vartheta$ и $t^* \in (t_*, \vartheta]$. Пусть интервал (t_*, t^*) не содержит моментов ϑ_i оценки качества движения из показателя* (1.8). *Тогда для всякой реализации $v_*\big[t_*[\cdot]t^*\big] \in \mathscr{V}(t_*, t^*)$ найдется такая реализация $u_*\big[t_*[\cdot]t^*\big] \in \mathscr{U}(t_*, t^*, \varrho_*)$, что модель* (2.1) *под действием этих реализаций перейдет из позиции (t_*, w_*, ϱ_*) в такую позицию $\big(t^*, w^* = w(t^*), \varrho^* = \varrho(t^*)\big) \in K_1$, для которой будет выполнено неравенство*

$$\mathrm{e}^{+}(t_*, w_*, \varrho_*) \geqslant \mathrm{e}^{-}(t^*, w^*, \varrho^*) - \varepsilon(t^* - t_*). \tag{4.19}$$

Доказательство. Из леммы 3 по числу ε найдем число δ^*. Рассмотрим произвольную последовательность чисел $\xi_k \downarrow 0$ при $k \to \infty$. Для каждого $k = 1, 2, \ldots$ по числу ξ_k, применяя лемму 8, найдем число δ_k^*. Пусть Δ_{δ_k} — разбиение отрезка $[t_*, \vartheta]$ вида (1.9), (3.1), где $\delta_k = \min\{\delta_k^*, \delta^*\}$. Пусть это разбиение содержит момент времени t^*. Индекс этого момента в разбиении Δ_{δ_k} обозначим $j(k)$, т. е. $t_{j(k)} = t^*$. Пусть $\Delta^*_{\delta_k} = \{t^*_s = t_{s+j(k)-1}\}_{s=1}^{k-j(k)+2}$ — разбиение отрезка $[t^*, \vartheta]$, порожденное точками разбиения Δ_{δ_k}. Тогда в согласии с леммой 8 имеем

$$|\mathrm{e}^+(t_*, w_*, \varrho_*) - e_1^+(t_*, w_*, \varrho_*; \Delta_{\delta_k})| \leqslant \xi_k, \quad |\mathrm{e}^-(t^*, w, \varrho) - e_1^-(t^*, w, \varrho; \Delta^*_{\delta_k})| \leqslant \xi_k, \quad (t^*, w, \varrho) \in K_1.$$

Кроме того, так как интервал (t_*, t^*) не содержит моментов ϑ_i оценки качества движения, в силу лемм 2 и 3 для реализации $v_*\big[t_*[\cdot]t^*\big) \in \mathscr{V}(t_*, t^*)$ при каждом k найдется такая реализация $u_*^{(k)}\big[t_*[\cdot]t^*\big) \in \mathscr{U}(t_*, t^*, \varrho_*)$, которая будет обеспечивать неравенство

$$e^-_{j(k)}(t_*, w^*_k, \varrho^*_k; \Delta_{\delta_k}) - e_1^+(t_*, w_*, \varrho_*; \Delta_{\delta_k}) = e_1^-(t^*, w^*_k, \varrho^*_k; \Delta^*_{\delta_k}) - e_1^+(t_*, w_*, \varrho_*; \Delta_{\delta_k}) \leqslant \varepsilon(t^* - t_*).$$

Рассмотрим множество $W = W(t^*, t_*, w_*, \varrho_*)$ — область достижимости в пространстве переменных (w, ϱ) к моменту t^* для движений модели (2.1), порожденных из позиции (t_*, w_*, ϱ_*) какой угодно реализацией из $\mathscr{U}(t_*, t^*, \varrho_*)$ в паре с реализацией $v_*\big[t_*[\cdot]t^*\big)$. Множество W компактно (см., например, [19, с. 349]). Поэтому, переходя, если потребуется, к подпоследовательности, можно считать, что последовательность $(w^*_k, \varrho^*_k) \in W$ сходится к $(w^*, \varrho^*) \in W$ при $k \to \infty$. Пусть $u_*\big[t_*[\cdot]t^*\big] \in \mathscr{U}(t_*, t^*, \varrho_*)$ — та реализация, которая вместе с $v_*\big[t_*[\cdot]t^*\big]$ из позиции (t_*, w_*, ϱ_*) приводит модель (2.1) в позицию (t^*, w^*, ϱ^*). Имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^+(t_*, w_*, \varrho_*) &\geqslant e_1^+(t_*, w_*, \varrho_*; \Delta_{\delta_k}) - \xi_k \geqslant e_1^-(t^*, w^*_k, \varrho^*_k; \Delta^*_{\delta_k}) - \varepsilon(t^* - t_*) - \xi_k \\ &\geqslant \mathrm{e}^-(t^*, w^*_k, \varrho^*_k) - \varepsilon(t^* - t_*) - 2\xi_k. \end{aligned}$$

В силу леммы 8 и непрерывности каждой из величин $e_1^-(t^*, w, \varrho; \Delta^*_{\delta_k})$ по совокупности переменных (w, ϱ) предельная величина $\mathrm{e}^-(t^*, w, \varrho)$ также непрерывна по (w, ϱ). Следовательно, переходя здесь к пределу при $k \to \infty$, получаем доказываемое неравенство (4.19). $\square$

Аналогично доказывается

Лемма 10. *Пусть* $(t_*, x_*, \rho_*) \in K_1$, $t_* < \vartheta$ *и* $t^* \in (t_*, \vartheta]$. *Пусть интервал* (t_*, t^*) *не содержит моментов* ϑ_i *оценки качества движения из показателя* (1.8). *Тогда для всякой реализации* $u_*\big[t_*[\cdot]t^*\big) \in \mathscr{U}(t_*, t^*, \varrho_*)$ *найдется такая реализация* $v_*\big[t_*[\cdot]t^*\big) \in \mathscr{V}(t_*, t^*)$, *что модель* (2.1) *под действием этих реализаций перейдет из позиции* (t_*, w_*, ϱ_*) *в такую позицию* $\big(t^*, w^* = w(t^*), \varrho^* = \varrho(t^*)\big) \in K_1$, *для которой будет выполнено неравенство*

$$\mathrm{e}^+(t_*, w_*, \varrho_*) \leqslant \mathrm{e}^-(t^*, w^*, \varrho^*).$$

Опираясь на предельную величину $\mathrm{e}^+(t_*, w, \varrho)$, определим стратегии U_0^{e} и V_0^{e} для управления и помехи соответственно, исходя из следующих соотношений:

$$U_0^{\mathrm{e}}(t, x, \rho, \varepsilon) = \begin{cases} 0, & \text{если } \rho < \eta(\varepsilon, t), \\ p(t, s_u, r_u), & \text{иначе,} \end{cases} \qquad V_0^{\mathrm{e}}(t, x, \rho, \varepsilon) = q(t, s_v), \qquad (t, x, \rho) \in K_0, \quad \varepsilon > 0,$$

где

$$s_u = x - w_u, \ r_u = \rho - \varrho_u, \quad (w_u, \varrho_u) \in \operatorname*{arg\,min}_{\|(x,\rho)-(w,\varrho)\|_E \leqslant \eta(\varepsilon,t)} \mathrm{e}^+(t, w, \varrho),$$
$$s_v = w_v - x, \quad (w_v, \varrho_v) \in \operatorname*{arg\,max}_{\|(x,\rho)-(w,\varrho)\|_E \leqslant \eta(\varepsilon,t)} \mathrm{e}^+(t, w, \varrho).$$

Здесь функции $\eta(\cdot)$, $p(\cdot)$ и $q(\cdot)$ определены в согласии с (2.3).

Следующие два утверждения доказываются аналогично леммам 5 и 6 с опорой на леммы 9 и 10 вместо лемм 3 и 4.

Лемма 11. *Для любого числа* $\zeta > 0$ *найдутся такие число* $\varepsilon^* > 0$ *и функция* $\delta^*(\varepsilon) > 0$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^*$, *что, каковы бы ни были значение* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^*$, *позиция* $(t_*, x_*, \rho_*) \in K_0$, $t_* < \vartheta$, *расширенной системы* (1.1), (1.4), *разбиение* Δ_δ *вида* (1.9), (3.1), $\delta \leqslant \delta^*(\varepsilon)$, *и допустимая реализация* $v\big[t_*[\cdot]\vartheta\big)$ *помехи, закон* $\mathcal{U}_0^{\mathrm{e}} = (U_0^{\mathrm{e}}, \varepsilon, \Delta_\delta)$ *управления гарантирует неравенство*

$$\mathrm{e}^-(t_*, x_*, \rho_*) \geqslant \gamma\big(x[t_*[\cdot]\vartheta]\big) - \zeta.$$

Лемма 12. *Для любого числа* $\zeta > 0$ *найдутся такие число* $\varepsilon^* > 0$ *и функция* $\delta^*(\varepsilon) > 0$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^*$, *что, каковы бы ни были значение* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^*$, *позиция* $(t_*, x_*, \rho_*) \in K_0$ *расширенной системы* (1.1), (1.4), *разбиение* Δ_δ *вида* (1.9), (3.1), $\delta \leqslant \delta^*(\varepsilon)$, *и допустимая реализация* $u\big[t_*[\cdot]\vartheta\big)$ *управления, закон* $\mathcal{V}_0^{\mathrm{e}} = (V_0^{\mathrm{e}}, \varepsilon, \Delta_\delta)$ *формирования помехи гарантирует неравенство*

$$\mathrm{e}^-(t_*, x_*, \rho_*) \leqslant \gamma\big(x[t_*[\cdot]\vartheta]\big) + \zeta.$$

Леммы 11 и 12 позволяют доказать следующее утверждение.

Теорема. *В рассматриваемой задаче управления* (1.1)–(1.8) *имеют место равенства*

$$\mathrm{e}^-(t_*, x_*, \rho_*) = \Gamma_u(t_*, x_*, \rho_*) = \Gamma_v(t_*, x_*, \rho_*), \quad (t_*, x_*, \rho_*) \in K_0.$$

Стратегии U_0^{e} *и* V_0^{e} *являются оптимальными.*

Доказательство. В силу леммы 11 по определению (1.12) величины гарантированного результата для стратегии U_0^{e} имеем $\mathrm{e}^-(t_*, x_*, \rho_*) \geqslant \Gamma(U_0^{\mathrm{e}}; t_*, x_*, \rho_*)$. В силу леммы 12 по определению (1.14) величины гарантированного результата для стратегии V_0^{e} получаем $\mathrm{e}^-(t_*, x_*, \rho_*) \leqslant \Gamma(V_0^{\mathrm{e}}; t_*, x_*, \rho_*)$. Учитывая эти неравенства и определения (1.13) и (1.15) оптимальных гарантированных результатов, выводим цепочку неравенств:

$$\Gamma_u(t_*, x_*, \rho_*) \leqslant \Gamma(U_0^{\mathrm{e}}; t_*, x_*, \rho_*) \leqslant \mathrm{e}^-(t_*, x_*, \rho_*) \leqslant \Gamma(V_0^{\mathrm{e}}; t_*, x_*, \rho_*) \leqslant \Gamma_v(t_*, x_*, \rho_*),$$

которая, если принять во внимание неравенство (1.16), обращается в цепочку равенств. □

Из теоремы и леммы 8 заключаем, что величина $e_1^-(t_*, x_*, \rho_*; \Delta_\delta)$ из системы величин (3.3) с измельчением разбиения Δ_δ приближает величину $\Gamma_u(t_*, x_*, \rho_*)$ оптимального гарантированного результата управления, причем равномерно относительно $(t_*, x_*, \rho_*) \in K_0$. Кроме того, по лемме 5 закон $\mathcal{U}^{\mathrm{e}} = (U_{\Delta_\delta}^{\mathrm{e}}, \varepsilon, \Delta_\delta)$ управления, построенный по этой системе величин в согласии с соотношениями (4.1) и (4.2), будет ζ-оптимальным.

5. Пример

Рассмотрим следующую динамическую систему:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + c(t)v(t),\ \dot{x}_2(t) = -0.5x_1(t) - 0.05x_2(t) + b(t)u(t), \quad 0 \leqslant t < 2$$

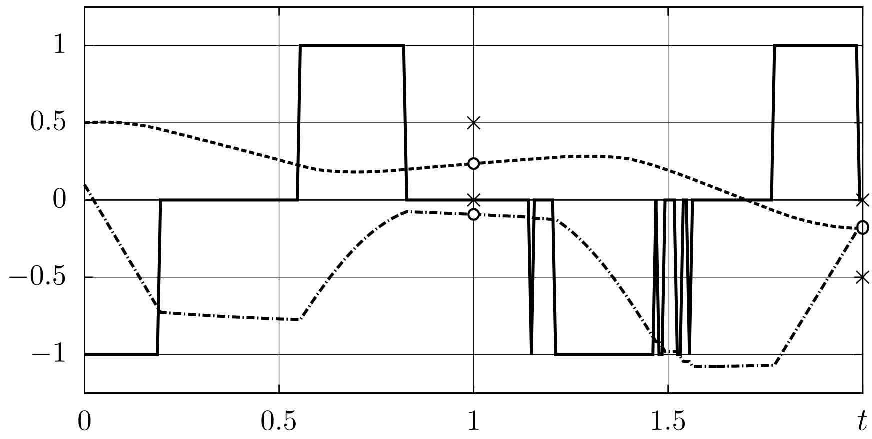
$$x_1(0) = 0.5,\ x_2(0) = 0.1, \quad |u(t)| \leqslant 1, \ \int\limits_0^2 |u(t)|dt \leqslant 1, \quad |v(t)| \leqslant 1, \tag{5.1}$$

$$b(t) = \begin{cases} 2 + 2\cos 2\pi(t - 0.5), & \text{если } t \in [0.5, 1.5], \\ 4 & \text{иначе,} \end{cases} \qquad c(t) = \begin{cases} 0.3, & \text{если } t \in [0.6, 1.4], \\ 0.1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть качество движения этой системы оценивается показателем

$$\gamma = \sqrt{|x_1(1)|^2 + |x_2(1) - 0.5|^2 + |x_1(2) + 0.5|^2 + |x_2(2)|^2}. \tag{5.2}$$

Задача (5.1), (5.2) решалась при помощи программной реализации описанных выше конструкций. Детали схожей реализации приведены, например, в [20]. Использовались равномерное разбиение Δ_δ отрезка времени управления $[0, 2]$ с диаметром $\delta = 0.01$ и значение $\varepsilon = 0.05$.



Реализации движения ($x_1(t)$ — пунктирная линия, $x_2(t)$ — штрихпунктирная линия) и управления ($u(t)$ — жирная линия) в случае совместного действия законов $\mathcal{U}^{\mathrm{e}}$ и $\mathcal{V}^{\mathrm{e}}$. Целевые точки обозначены крестиками. Кругляшками отмечены положения системы в моменты времени оценки движения.

Априорно посчитанное значение $e_1^- = e_1^-\big(0,(0.5,0.1),1\big)$, приближающее оптимальный гарантированный результат управления, составило 0.702.

В случае совместного действия закона $\mathcal{U}^{\mathrm{e}} = (U^{\mathrm{e}}_{\Delta_\delta}, \varepsilon, \Delta_\delta)$ управления, построенного в согласии с соотношениями (4.1), (4.2), и закона $\mathcal{V}^{\mathrm{e}} = (V^{\mathrm{e}}_{\Delta_\delta}, \varepsilon, \Delta_\delta)$ формирования помехи, определенного согласно (4.17), реализовалось следующее значение показателя качества (5.2):

$$\gamma = \sqrt{|0.235|^2 + |-0.093-0.5|^2 + |-0.184+0.5|^2 + |-0.170|^2} \approx 0.731 \approx e_1^- = 0.702.$$

Соответствующие реализации движения и управления изображены на рисунке.

В случае “жадного” закона управления, осуществляющего экстремальный сдвиг на очередную цель, пока есть ресурс, в паре с законом $\mathcal{V}^{\mathrm{e}}$ реализовалось значение

$$\gamma = \sqrt{|1.153|^2 + |-0.446-0.5|^2 + |1.440+0.5|^2 + |-0.248|^2} \approx 2.459 > e_1^- = 0.702.$$

В случае, когда воздействия помехи формировалась случайным образом, закон $\mathcal{U}^{\mathrm{e}}$ управления дал следующий результат:

$$\gamma = \sqrt{|0.055|^2 + |-0.025-0.5|^2 + |-0.445+0.5|^2 + |-0.110|^2} \approx 0.542 < e_1^- = 0.702.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М: Наука, 1985. 520 с.
3. **Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.** Control under lack of information. Berlin etc.: Birkhäuser, 1995. 322 p.
4. **Красовский Н.Н., Третьяков В.Е.** К задаче о преследовании в случае ограничений на импульсы управляющих сил // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 5. С. 587–599.
5. **Никольский М.С.** Прямой метод в линейных дифференциальных играх с общими интегральными ограничениями // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 6. С. 964–971.
6. **Субботина Н.Н., Субботин А.И.** Альтернатива для дифференциальной игры сближения-уклонения при ограничениях на импульсы управлений игроков // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39, вып. 3. С. 397–406.
7. **Красовский Н.Н., Третьяков В.Е.** Стохастический программный синтез для позиционной дифференциальной игры // Докл. АН СССР. 1981. Т. 259, №1. С. 24–27.

8. **Красовский А.Н.** Построение смешанных стратегий на основе стохастических программ // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51, вып. 2. С. 186–192.
9. **Красовский Н.Н., Решетова Т.Н.** О программном синтезе гарантированного управления // Проблемы управления и теория информации. 1988. Т. 17, № 6. С. 333–343.
10. **Красовский Н.Н., Лукоянов Н.Ю.** Задача конфликтного управления с наследственной информацией // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 6. С. 885–900.
11. **Лукоянов Н.Ю.** К вопросу вычисления цены дифференциальной игры для позиционного функционала // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, вып. 2. С. 188–198.
12. **Лукоянов Н.Ю.** О построении цены позиционной дифференциальной игры // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 1. С. 18–26.
13. **Локшин М.Д.** О дифференциальных играх с интегральными ограничениями на управляющие воздействия // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 11. С. 1952–1961.
14. **Лукоянов Н.Ю.** О задаче конфликтного управления при смешанных ограничениях на управляющие воздействия // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 9. С. 1473–1482.
15. **Лукоянов Н.Ю.** К задаче конфликтного управления при смешанных ограничениях // Прикл. математика и механика. 1995. Т. 59, вып. 6. С. 955–964.
16. **Корнев Д.В.** Об оптимизации гарантии при интегральных ограничениях на управляющие воздействия и нетерминальном показателе качества [Электрон. ресурс] // XII Всерос. совещание по проблемам управления — ВСПУ-2014 (Москва, 16–19 июня, 2014 г.): сб. докл. С. 2059–2070.
17. **Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю.** Об устойчивости одной процедуры решения задачи управления на минимакс позиционного функционала // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 68–82.
18. **Балашов М.В.** О P-свойстве выпуклых компактов // Мат. заметки. 2002. Т. 71, вып. 3. С. 323–333.
19. **Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 479 с.
20. **Корнев Д.В.** О численном решении позиционных дифференциальных игр с нетерминальной платой // Автоматика и телемеханика. 2012. № 11. С. 60–75.

Корнев Дмитрий Васильевич
Поступила 01.02.2015
гл. программист
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: d.v.kornev@gmail.com

Лукоянов Николай Юрьевич
д-р физ.-мат. наук
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: nyul@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.977

К ОБОСНОВАНИЮ МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РЕКОНСТРУКЦИИ ДИНАМИКИ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ[1]

Е. А. Крупенников

В данной работе описывается метод восстановления динамики и управлений для одного класса нелинейных управляемых систем по известным неточным замерам траектории движения. Предлагаемый метод опирается на принцип максимума Понтрягина и метод регуляризации Тихонова. Приводится его обоснование.

Ключевые слова: динамическая реконструкция, оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина.

E. A. Krupennikov. Validation of a solution method for the problem of reconstructing the dynamics of a macroeconomic system.

For a class of nonlinear control systems, we describe a method for the reconstruction of the dynamics and controls from known inaccurate measurements of state trajectories. The method is based on Pontryagin's maximum principle and Tikhonov's regularization method. A validation of the method is provided.

Keywords: dynamic reconstruction, optimal control, Pontryagin's maximum principle.

Введение

Задачи реконструкции динамики и управлений по истории неточных замеров траектории движения управляемых систем исследовались многими авторами. Наиболее близким к методу, обсуждаемому в данной работе, является подход, предложенный и развитый Ю. С. Осиповым и его учениками [1] и опирающийся на метод регуляризации Тихонова [2] и метод экстремального прицеливания Н. Н. Красовского [3].

В работе [4] предложен другой метод решения этой задачи, базирующийся на необходимых условиях оптимальности во вспомогательной задаче оптимального управления с интегральным функционалом регуляризованной невязки [5] и методе характеристик [6] для соответствующего уравнения Беллмана. В статье [4] предлагается в качестве решения задачи реконструкции использовать решение вспомогательной задачи оптимального управления со свободным правым концом и фазовым ограничением, состоящим в принадлежности правых концов фазовых траекторий множеству фазовых состояний, совместимых с точностью измерений.

В настоящей работе обсуждается одна из возможных модификаций этого метода. В отличие от [4] в данной статье вспомогательная задача оптимального управления имеет целевое множество, состоящее из финальной точки замеров, в которую нужно перевести фазовые траектории из произвольной начальной точки, минимизируя интегральный функционал регуляризованной невязки. При этом исследуется один нелинейный подкласс управляемых систем из [4]. Приводится теоретическое обоснование сходимости предложенного алгоритма решения задачи реконструкции.

Представлены также результаты численного решения задачи реконструкции динамики и управлений для модели макроэкономической системы.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14–01–00168).

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу реконструкции динамики и управлений системы вида

$$\begin{gathered} \dot{x}_i(t) = g_i(x(t))u_i(t), \\ x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0,T], \quad i = 1,\dots,n, \end{gathered} \tag{1.1}$$

где управления u_i удовлетворяют ограничениям

$$-\infty < \underline{U}_i \le u_i(t) \le \bar{U}_i < \infty, \quad i = 1,\dots,n. \tag{1.2}$$

Реконструкция производится при известной дискретной истории замеров $\{y_\delta(t_i) = y_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1,\dots,N,\ t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_N = T\}$ базовой траектории $x^*(t)$. Замеры определяют $x^*(t_i)$ с относительной точностью δ.

Предполагается, что для рассматриваемых входных данных задачи реконструкции выполняются следующие условия.

A1. Функции $g_i(x)$, $i = 1,\dots,n$, непрерывно дифференцируемы в $\mathbb{R}^n$.

A2. Существуют такое число $a > 0$ и такие константы $\underline{\omega}_i,\ \bar{\omega}_i,\ i = 1,\dots,n$, что при $t \in [0,T]$ имеет место оценка

$$0 < \underline{\omega}_i^2 < g_i(x)^2 < \bar{\omega}_i^2, \quad (t,x) \in \Psi = \{t \in [0,T],\ |x - x^*(t)| \le a\}.$$

Под задачей динамической реконструкции понимается построение управления $u(t) = u_\delta(t)$, удовлетворяющего ограничениям (1.2), такого, что оно и порождаемая им траектория $x(t) = x_\delta(t)$ системы (1.1) удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{gathered} \lim_{\delta\to 0} \|x_\delta(t) - x^*(t)\|_C = 0, \\ \lim_{\delta\to 0} \|u_\delta(t) - u^*(t)\|_{L_2} = 0, \end{gathered} \tag{1.3}$$

где символ $\|\cdot\|$ здесь и далее обозначает евклидову норму, а $u^*(t)$ — нормальное управление — измеримая функция, удовлетворяющая ограничениям (1.2) и порождающая $x^*(t)$ и при этом имеющая минимальную норму в L_2. Заметим, что при сделанных предположениях нормальное управление единственно в L_2 (см. [4]).

Введем функцию $y(t) = y_\delta(t)$, интерполирующую известные замеры. Вопрос выбора конкретного метода интерполяции в данной работе не рассматривается, но предполагается, что функции $y_\delta(t)$ должны быть непрерывно дифференцируемы, а их производные равномерно ограничены относительно точности измерений δ, причем существует такое $\delta_0,\ 0 < \delta_0 \le a$ (где a — константа из предположения **A2**), что

$$\begin{gathered} \left|\frac{dy_{\delta,i}(t)}{dt}\right| \le \bar{Y}, \quad \delta \in (0,\delta_0], \quad t \in [0,T], \quad i = 1,\dots,n, \\ \bar{Y} = 2 \max_{i=1,\dots,n} \{\bar{\omega}_i \max\{|\underline{U}_i|, |\bar{U}_i|\}\}. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Это ограничение взято из тех соображений, что согласно (1.1), (1.2) и предположениям **A1**, **A2** в области Ψ, построенной в предположении **A2**, скорости $\dot{x}_i^*(t)$ ограничены, и будет естественным рассматривать лишь те интерполяции, скорости $\dot{y}_i(t)$ которых ограничены.

Будем также считать, что

$$\lim_{\delta\to 0} \|y_\delta(t) - x^*(t)\|_C = 0. \tag{1.5}$$

2. Алгоритм решения задачи реконструкции

Предлагается следующий алгоритм решения поставленной задачи реконструкции.

Введем интегральный функционал невязки вида

$$I(x(t),u(t)) = \int_0^T \Big(-\frac{\|x(t)-y(t)\|^2}{2} + \frac{\alpha^2\|u(t)\|^2}{2}\Big)dt, \tag{2.1}$$

где α — малый регуляризирующий параметр.

Рассмотрим вспомогательную задачу оптимального управления о переводе траектории $x(\cdot)$ системы (1.1) из точки $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 < T$, в заданный конечный момент времени T на целевую точку $y(T)$ с условием минимизации функционала (2.1). Введем также дополнительное условие, ограничивающее скорость $\dot{x}(t)$ в конечной точке, — пусть

$$\|\dot{x}(T) - \dot{y}(T)\| \le \delta. \tag{2.2}$$

Выберем такие решения вспомогательной задачи оптимального управления, удовлетворяющие условию (2.2), для которых соответствующие им управления $u_i(t)$ не выходят на ограничения (1.2). Из выбранных таким образом решений выберем далее те, которые выходят в начальный момент времени $t_0 = 0$ из области

$$\{x \in \mathbb{R}^n \colon x_i \in [y_i(0) - \delta, y_i(0) + \delta],\ i = 1,\dots,n\}, \tag{2.3}$$

и будем искать среди них то, которое будет доставлять наименьшее значение функционалу (2.1). Полученную траекторию и порождающее ее управление будем считать решением задачи реконструкции. Заметим, что такое решение, вообще говоря, не единственно.

Рассмотрим теперь подробнее процесс построения решения вспомогательной задачи оптимального управления. Для решения вспомогательной задачи оптимального управления воспользуемся принципом максимума Понтрягина в гамильтоновой форме.

Определим гамильтониан для задачи (1.1), (1.2), (2.1) следующим образом:

$$H^\alpha(x,s,t) = \min_{\underline{U}_i \le u_i \le \bar{U}_i} \Big[\sum_{i=1,\dots,n} [g_i(x(t)) s_i u_i] - \frac{\|x(t)-y(t)\|^2}{2} + \frac{\alpha^2\|u\|^2}{2}\Big],$$

где $s \in \mathbb{R}^n$ — сопряженная переменная. Нетрудно проверить, что

$$H^\alpha(x,s,t) = \sum_{i=1,\dots,n} [g_i(x(t)) s_i u_{\alpha i}] - \frac{\|x(t)-y(t)\|^2}{2} + \frac{\alpha^2\|u_\alpha\|^2}{2},$$

где

$$u_{\alpha i} = \begin{cases} \underline{U}_i, & \text{если} \quad -\dfrac{s_i g_i(x(t))}{\alpha^2} < \underline{U}_i, \\ -\dfrac{s_i g_i(x(t))}{\alpha^2}, & \text{если} \quad -\dfrac{s_i g_i(x(t))}{\alpha^2} \in [\underline{U}_i, \bar{U}_i], \\ \bar{U}_i, & \text{если} \quad -\dfrac{s_i g_i(x(t))}{\alpha^2} > \bar{U}_i. \end{cases} \tag{2.4}$$

Характеристическая система уравнений для задачи (1.1), (1.2), (2.1) будет иметь вид

$$\begin{aligned} &\frac{dx_i(t)}{dt} = \frac{\partial H^\alpha(x(t),s(t),t)}{\partial s_i(t)} = g_i(x(t)) u_i^\alpha, \\ &\frac{ds_i(t)}{dt} = -\frac{\partial H^\alpha(x(t),s(t),t)}{\partial x_i(t)} = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial g_j(x(t))}{\partial x_i(t)} s_j(t) u_j^\alpha + x_i(t) - y_i(t), \\ &i = 1,\dots,n. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Согласно предложенному алгоритму построим в обратном времени пучок траекторий системы (2.5) со следующими краевыми условиями:

$$x_i(T) = y_i(T), \quad s_i(T) = \xi_{k,i}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.6}$$

Эти траектории совпадают с экстремалями и коэкстремалями принципа максимума Понтрягина [6]. В качестве векторов ξ_k берутся точки из компакта

$$S_\delta = \{s \in \mathbb{R}^n : s_i^- \le s_i \le s_i^+,\ i = 1, \dots, n\}, \tag{2.7}$$

где

$$\begin{gathered} s_i^- = -\frac{\dot y_i(T)\alpha^2}{g_i(y(T))^2} - \frac{\delta\alpha^2}{g_i(y(T))^2}, \\ s_i^+ = -\frac{\dot y_i(T)\alpha^2}{g_i(y(T))^2} + \frac{\delta\alpha^2}{g_i(y(T))^2}, \\ i = 1, \dots, n. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Границы s_i^- и s_i^+ выбраны таким образом, чтобы в конечный момент времени выполнялись условия (2.2).

В качестве замечания к алгоритму введем следующее предположение касательно управлений и траекторий системы (1.1).

А3. Графики фазовых характеристик $x_i(t),\ i = 1, \dots, n$, решений характеристической системы (2.5) с краевыми условиями (2.6)–(2.8) содержатся при $t \in [0, T]$ в некотором компакте Φ, и пусть существуют такие числа $b,\ 0 < b \le \delta_0$ (где δ_0 — из (1.4)) и $\delta_1 > 0$, что

$$\Phi \supset \Phi(\delta, \alpha)\ \forall\ \delta,\ \alpha,\ 0 < \delta \le \delta_1,\ 0 < \alpha \le b,$$

$$\Phi(\delta, \alpha) = \Big\{(t, x) \colon t \in [0, T],\ x = x_{\alpha,\delta}(t),\ x_{\alpha,\delta}(T) = y(T),\ \dot x_{\alpha,\delta}(T) \in B_\delta \dot y(T)\Big\},$$

где $x_{\alpha,\delta}(t)$ — решения системы (2.5) при конечных условиях (2.6)–(2.8) и фиксированных параметрах α и δ, $B_\delta z$ — шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса δ с центром в точке $z \in \mathbb{R}^n$.

Как отмечалось выше, для построения решения задачи реконструкции из пучка построенных характеристик (2.5)–(2.8) выберем те, для которых соответствующие управления $u_i(t)$ не выходят на ограничения (1.2). Из оставшихся характеристик выберем, наконец, такие, для которых фазовые компоненты $x(\cdot)$ в начальный момент времени попадают в область (2.3), и среди них выберем такую, которая вкупе с соответствующим ей управлением будет доставлять минимум функционалу (2.1). Если несколько характеристик и соответствующих им управлений минимизируют функционал невязки, выберем из них одну произвольным образом.

Покажем, что выбранные таким образом траектории и управления будут решать поставленную задачу реконструкции при определенных условиях согласования параметров $\delta > 0$ и $\alpha > 0$.

3. Доказательство сходимости алгоритма

Для упрощения описания используемых конструкций сразу рассмотрим ситуацию, когда замеры $y(t)$ и ограничения на управления (1.2) таковы, что при достаточно малых $\alpha > 0$, $\delta > 0$ для характеристик $x(\cdot)$ системы (2.5) при конечных условиях (2.6)–(2.8), в начальный момент времени попадающих в область (2.3), порождающие их управления $u_\alpha(\cdot)$ (2.4) не будут выходить на эти ограничения. Характеристическая система (2.5) в этом случае будет иметь упрощенный вид

$$\begin{aligned} &\frac{dx_i(t)}{dt} = -\frac{g_i^2(x(t))s_i(t)}{\alpha^2}, \\ &\frac{ds_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_j(x(t))}{\partial x_i(t)} \frac{s_j^2(t) g_j(x(t))}{\alpha^2} + x_i(t) - y_i(t), \\ &i = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{3.1}$$

с краевыми условиями (2.6)–(2.8).

Сначала докажем вспомогательную лемму.

Лемма. *Если при выполнении предположений* **A1**–**A3** *существует такая константа* $\infty > R > 0$*, что для любых* δ *и* α*,* $\delta < \alpha \leq b$ (*где* b — *константа из предположения* **A3**)*, для решений системы* (3.1) *с краевыми условиями* (2.6) *на отрезке* $[t_0, T]$*,* $t_0 \geq 0$*, выполняются неравенства*

$$|s_i(t)| \leq \alpha^2 R, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.2}$$

то существуют такая независимая от параметров δ *и* α *константа* $\bar{S}$ *и такие ограниченные функции* $\bar{\bar{x}}_i(t)\colon [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$*,* $\underline{\underline{x}}_i(t)\colon [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$*,* $\bar{\bar{s}}_i(t)\colon [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$*,* $\underline{\underline{s}}_i(t)\colon [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$*,* $i = 1, \ldots, n$*, что на этом отрезке имеют место следующие оценки для решений системы* (3.1)*:*

$$\begin{gathered}
\alpha^2 \underline{\underline{x}}_i(t) + y_i(t) \leq x_i(t) \leq \alpha^2 \bar{\bar{x}}_i(t) + y_i(t), \\
\alpha^3 \underline{\underline{s}}_i(t) - \alpha^2 \bar{S} \leq s_i(t) \leq \alpha^3 \bar{\bar{s}}_i(t) + \alpha^2 \bar{S}, \\
i = 1, \ldots, n.
\end{gathered} \tag{3.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из предположений **A1**–**A3** вытекает, что будет существовать непрерывное решение системы (3.1). Тогда можно разбить рассматриваемый временной промежуток $[t_0, T]$ на такие отрезки $[\tau_{i-1}, \tau_i]$, что на каждом интервале (τ_{i-1}, τ_i) каждая функция $s_i(t)$ будет знакоопределенна или равна нулю. Если какой-то из таких отрезков длиннее чем α, то такой отрезок разбивается на несколько отрезков, каждый из которых имеет длину не больше α.

Заметим, что для дифференцируемой функции может иметься не более чем счетное число точек сгущения нулей функции — таких точек t_s, что для любого $\epsilon > 0$ найдется хотя бы один отрезок $[\tau_{s-1}, \tau_s] \in (t_s - \epsilon, t_s + \epsilon)$ [7]. Рассмотрим последовательно точки сгущения, начиная с конца. Для первой такой точки в качестве рассматриваемого отрезка примем отрезок, являющийся объединением $\cup\{[\tau_{j-1}, \tau_j] \in [t_s - \alpha^3, t_s + \alpha^3]\}$. Для определенности будем называть построенные таким образом отрезки отрезками сгущения. Далее рассмотрим следующую точку сгущения, лежащую вне построенного отрезка сгущения, построив для нее соответствующий отрезок сгущения. Если он пересекается с предыдущим отрезком сгущения, то исключим из нового отрезка область взаимопересечения (за исключением краевой точки).

Таким образом, окончательное число рассматриваемых отрезков будет конечно при фиксированных параметрах α и δ:

$$\begin{gathered}
[0, T] = \cup\Big\{[\tau_{i-1}, \tau_i], \quad i = 1, \ldots, M, \quad M \in \mathbb{N}, \quad \tau_i - \tau_{i-1} \leq \alpha, \quad \tau_0 = t_0, \quad \tau_M = T, \\
\text{если } [\tau_{i-1}, \tau_i] \text{ не отрезок сгущения, то} \\
\text{либо } s_j(t) < 0, \text{ либо } s_j(t) > 0, \text{ либо } s_j(t) \equiv 0, \quad t \in (\tau_i, \tau_{i+1}), \quad j = 1, \ldots n\Big\}; \\
\text{если } [\tau_{i-1}, \tau_i] \text{ — отрезок сгущения, то } \tau_i - \tau_{i-1} \leq 2\alpha^3 = 2\epsilon.
\end{gathered} \tag{3.4}$$

Рассмотрим последний такой отрезок $[\tau_{M-1}, \tau_M]$. Рассмотрим случай, когда знаки функций $s_j(t)$ распределяются следующим образом:

$$s_j(t) < 0, \quad t \in (\tau_{M-1}, \tau_M), \quad j = 1, \ldots n. \tag{3.5}$$

Для начала заметим, что в силу предположений **A1**–**A3** существует такая константа $0 \leq R_g < \infty$, что

$$\Big|\frac{\partial g_j(x(t))}{\partial x_i(t)}\Big| \leq R_g, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.6}$$

В таком случае нелинейные составляющие в правой части системы (3.1) при условии (3.2) можно оценить следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_j(x(t))}{\partial x_i(t)} \frac{s_j^2(t) g_j(x(t))}{\alpha^2} \le \alpha^2 \bar{R}, \quad \text{где } \bar{R} = \sum_{j=1}^{n} R_g R^2 \bar{\omega}_i. \tag{3.7}$$

Введем в рассмотрение оценочную систему

$$\begin{gathered} \frac{d\bar{x}_i(t)}{dt} = -\frac{\bar{\omega}_{i,M} \bar{s}_i(t)}{\alpha^2}, \\ \frac{d\bar{s}_i(t)}{dt} = \alpha^2 \bar{R} + \bar{x}_i(t) - y_i(t), \\ i = 1, \ldots, n, \end{gathered} \tag{3.8}$$

с краевыми условиями

$$\bar{x}_i(T) = x_i(T), \quad \bar{s}_i(T) = s_i(T), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.9}$$

где

$$\bar{\omega}_{i,M} = \max_{t \in [\tau_{M-1}, \tau_M]} |g_i(x(t))|. \tag{3.10}$$

Покажем, что выполняются неравенства

$$x_i(t) - \bar{x}_i(t) > 0, \quad s_i(t) - \bar{s}_i(t) > 0, \quad t \in [\tau_{M-1}, \tau_M), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.11}$$

Для начала заметим, что в конечный момент времени в силу краевых условий (3.9), определения (3.10) и оценки (3.7) будут выполняться неравенства $\dot{\bar{x}}_i(T) > \dot{x}_i(T)$, $\dot{\bar{s}}_i(T) > \dot{s}_i(T)$, $i = 1, \ldots, n$:

$$\begin{gathered} \dot{\bar{x}}_i(T) = -\frac{\bar{\omega}_{i,M} \bar{s}_i(T)}{\alpha^2} \ge -\frac{g_i(x(T)) \bar{s}_i(T)}{\alpha^2} = -\frac{g_i(x(T)) s_i(T)}{\alpha^2} = \dot{x}_i(T), \\ \dot{\bar{s}}_i(T) = \alpha^2 \bar{R} + \bar{x}_i(T) - y_i(T) \ge \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_j(x(t))}{\partial x_i(t)} \frac{s_j^2(t) g_j(x(t))}{\alpha^2} + x_i(T) - y_i(T) = \dot{s}_i(T). \end{gathered} \tag{3.12}$$

Неравенства в выкладках (3.12) выполняются в силу того, что по нашему предположению о распределении знаков функций $s_i(t)$ (3.5) на рассматриваемом отрезке $s_i(T) \le 0$.

Отразим тот факт, что в силу (3.12), (3.9) и непрерывности функций $x_i(t)$, $\bar{x}_i(t)$, $s_i(t)$, $\bar{s}_i(t)$ существует $\tau' \in [\tau_{M-1}, \tau_M)$ такой, что

$$x_i(t) - \bar{x}_i(t) > 0, \quad t \in (\tau', T), \quad s_i(t) - \bar{s}_i(t) > 0, \quad t \in (\tau', T), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.13}$$

Далее проведем доказательство от противного. Предположим, что в некоторой точке отрезка $[\tau_{M-1}, \tau_M]$ нарушается вторая группа неравенств из (3.11). Тогда из (3.13) и непрерывности решений будет следовать, что найдутся такая точка $\tau \in [\tau_{M-1}, \tau']$ и такой индекс k, что

$$s_k(\tau) - \bar{s}_k(\tau) = 0, \tag{3.14}$$

$$s_k(t) - \bar{s}_k(t) > 0, \quad t \in (\tau, T). \tag{3.15}$$

Распишем выражение (3.14) с помощью интегралов и используя выражения производных из (3.1) и (3.8):

$$\begin{gathered} 0 = s_k(\tau) - \bar{s}_k(\tau) = \left(s_k(T) - \int_{\tau}^{T} \dot{s}_k(t) dt \right) - \left(\bar{s}_k(T) - \int_{\tau}^{T} \dot{\bar{s}}_k(t) dt \right) \\ = \int_{\tau}^{T} \bar{x}_k(t) - x_k(t) dt + \int_{\tau}^{T} -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_j(x(t))}{\partial x_k(t)} \frac{s_j^2(t) g_j(x(t))}{\alpha^2} - \alpha^2 \bar{R} dt. \end{gathered}$$

Согласно (3.7) второе слагаемое в последнем выражении $\Big(\int_{\tau}^{T} -\sum_{j=1}^{n}\dfrac{\partial g_j(x(t))}{\partial x_k(t)}\dfrac{s_j^2(t)g_j(x(t))}{\alpha^2} - \alpha^2\bar{R}dt\Big)$ будет отрицательным, а значит, первое слагаемое будет положительным. Распишем его подробнее:

$$0<\int\limits_{\tau}^{T}\bar{x}_k(t)-x_k(t)dt=\int\limits_{\tau}^{\tau'}\bar{x}_k(t)-x_k(t)dt+\int\limits_{\tau'}^{T}\bar{x}_k(t)-x_k(t)dt. \qquad (3.16)$$

Из (3.13) следует, что второе слагаемое в выражении (3.16) отрицательно. Из этого, в свою очередь, вытекает, что первое слагаемое должно быть положительным для выполнения неравенства (3.16). Для того чтобы интеграл был положительным, необходимо наличие такого множества точек ненулевой меры, что на них подынтегральное выражение положительно. Это означает, что $\exists\tau''\in[\tau,\tau']$ такое, что $\bar{x}_k(\tau'')-x_k(\tau'')>0$. Распишем это выражение по такому же принципу, как мы расписали (3.14):

$$\begin{aligned}0<\bar{x}_k(\tau'')-x_k(\tau'')&=(\bar{x}_k(T)-\int\limits_{\tau''}^{T}\dot{\bar{x}}_k(t)dt)-(x_k(T)-\int\limits_{\tau''}^{T}\dot{x}_k(t)dt)\\&=\int\limits_{\tau''}^{T}\frac{\bar{\omega}_{k,M}\bar{s}_k(t)}{\alpha^2}-\frac{g_k^2(x(t))s_k(t)}{\alpha^2}dt\\&=\int\limits_{\tau''}^{\tau'}\frac{\bar{\omega}_{k,M}\bar{s}_k(t)}{\alpha^2}-\frac{g_k^2(x(t))s_k(t)}{\alpha^2}dt+\int\limits_{\tau'}^{T}\frac{\bar{\omega}_{k,M}\bar{s}_k(t)}{\alpha^2}-\frac{g_k^2(x(t))s_k(t)}{\alpha^2}dt.\end{aligned}$$

Из определения (3.10) и (3.13) следует, что второе слагаемое в последнем выражении $\Big($интеграл $\int_{\tau'}^{T}\dfrac{\bar{\omega}_{k,M}\bar{s}_k(t)}{\alpha^2}-\dfrac{g_k^2(x(t))s_k(t)}{\alpha^2}dt\Big)$ отрицательно. Подобно тому, как это было проделано для выражения (3.16), можно показать, что в данном случае найдется такое $\tau'''\in[\tau'',\tau']$, что

$$\begin{gathered}\frac{\bar{\omega}_{k,M}\bar{s}_k(\tau''')}{\alpha^2}-\frac{g_k^2(x(\tau'''))s_k(\tau''')}{\alpha^2}>0,\\ \bar{s}_k(\tau''')>\frac{g_k^2(x(\tau'''))}{\bar{\omega}_{k,M}}s_k(\tau''')>s_k(\tau''').\end{gathered}$$

Последнее неравенство следует из отрицательности функции $s_k(t)$ на рассматриваемом промежутке времени и определения (3.10). Для пояснения схемы доказательства выпишем относительное расположение следующих точек:

$$\tau_{M-1}\le\tau\le\tau''\le\tau'''\le\tau'<\tau_M.$$

Итак, мы получили для некоторого $\tau'''\in[\tau,\tau']$, что $s_k(\tau''')-\bar{s}_k(\tau''')<0$, а это противоречит неравенству (3.15). Это означает, что вторая группа неравенств (3.11) не нарушается на рассматриваемом промежутке времени $[\tau_{M-1},T]$. Из этого факта и из определения (3.10) следует, что $\dot{\bar{x}}_i(t)>\dot{x}_i(t),\ t\in[\tau_{M-1},\tau_M]$. Но тогда в силу непрерывности функций $x_i(t)$ и $\bar{x}_i(t)$ и краевых условий (3.9) следует выполнение первой группы неравенств (3.11).

Таким образом, мы доказали неравенства (3.11).

Решения оценочной системы (3.8) для краевых условий, эквивалентных условиям (2.6), можно записать аналитически. Опустив за тривиальностью процесс их нахождения, можно сказать, что существуют такие функции $A_{i,1}(\cdot)\colon[0,T]\to R,\ A_{i,2}(\cdot)\colon[0,T]\to R$, что

$$\begin{aligned}|A_{i,1}(t)|&\le\frac{\bar{Y}}{1-\alpha^2},\quad t\in[0,T],\\|A_{i,2}(t)|&\le\frac{\bar{Y}}{1-\alpha^2},\quad t\in[0,T],\end{aligned}$$

где $\bar{Y}$ — константа из условия (1.4), и такие, что вышеупомянутые решения можно записать следующим образом:

$$\bar{x}_i(t) = -\bar{\omega}_{i,M}\frac{\xi_i + \dfrac{\alpha^2}{\bar{\omega}_{i,M}^2}\dot{y}(T) - \dfrac{\alpha^4}{\bar{\omega}_{i,M}^2}A_{i,2}(T)}{\alpha}\sin\Big(\frac{\bar{\omega}_{i,M}(t-T)}{\alpha}\Big)$$
$$+ (\alpha^2\bar{R} - \alpha^2 A_{i,1}(T))\cos\Big(\frac{\bar{\omega}_{i,M}(t-T)}{\alpha}\Big) - \alpha^2\bar{R} + y_i(t) + \alpha^2 A_{i,1}(t),$$

$$\bar{s}(t) = \Big(\xi_i + \frac{\alpha^2}{\bar{\omega}_{i,M}^2}\dot{y}(T) - \frac{\alpha^4}{\bar{\omega}_{i,M}^2}A_{i,2}(T)\Big)\cos\Big(\frac{\bar{\omega}_{i,M}(t-T)}{\alpha}\Big)$$
$$+ \frac{\alpha^3\bar{R} - \alpha^3 A_{i,1}(T)}{\bar{\omega}_{i,M}}\sin\Big(\frac{\bar{\omega}_{i,M}(t-T)}{\alpha}\Big) - \frac{\alpha^2}{\bar{\omega}_{i,M}^2}\dot{y}_i(t) + \frac{\alpha^4}{\bar{\omega}_{i,M}^2}A_{i,2}(t).$$

Из (3.6) следует

$$|\bar{\omega}_{i,M} - g_i(x(t))| \le \alpha R_g, \quad t \in [\tau_{j-1}, \tau_j], \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\Big|\xi_i + \frac{\alpha^2}{\bar{\omega}_{i,M}^2}\dot{y}(T)\Big| = \Big| - \frac{\alpha^2}{g_i^2(x(T))}\dot{y}(T) + \frac{\theta\delta\alpha^2}{g_i(x(T))^2} + \frac{\alpha^2}{\bar{\omega}_{i,M}^2}\dot{y}(T)\Big|$$

$$= \Big|\alpha^2\dot{y}(T)\frac{(\bar{\omega}_{i,M} - g_i(x(T)))(\bar{\omega}_{i,M} + g_i(x(T)))}{g_i^2(T)\bar{\omega}_{i,M}^2} + \frac{\theta\delta\alpha^2}{g_i(x(T))^2}\Big|$$

$$\le \Big|\alpha^2\dot{y}(T)\frac{\alpha R_g(|\bar{\omega}_{i,M}| + \bar{\omega}_i)|}{\underline{\omega}_i^2\bar{\omega}_{i,M}^2} + \frac{\theta\delta\alpha^2}{\bar{\omega}_i^2}\Big|,$$

где $\theta \in [0,1]$. При условии согласования параметров $\delta < \alpha$

$$\Big|\alpha^2\dot{y}(T)\frac{\alpha R_g(|\bar{\omega}_{i,M}| + \bar{\omega}_i)|}{\underline{\omega}_i^2\bar{\omega}_{i,M}^2} + \frac{\theta\delta\alpha^2}{\bar{\omega}_i^2}\Big| \le \alpha^3 R_{\xi,i,M},$$

где константа $R_{\xi,i,M} = \Big|\dot{y}(T)\dfrac{R_g(|\bar{\omega}_{i,M}| + \bar{\omega}_i)|}{\underline{\omega}_i^2\bar{\omega}_{i,M}^2} + \dfrac{1}{\bar{\omega}_i^2}\Big|$. Тогда в качестве функций $\bar{\bar{x}}_i(t)$ и $\bar{\bar{s}}_i(t)$ из (3.3) на отрезке времени $[\tau_{M-1}, \tau_M]$ можно принять функции

$$\bar{\bar{x}}_{M,i}(t) = \bar{\omega}_{i,M}\Big(R_{\xi,i,M} + \frac{\alpha}{\bar{\omega}_{i,M}^2}|A_{i,2}(T)|\Big)\sin\Big(\frac{\bar{\omega}_{i,M}(t-T)}{\alpha}\Big)$$
$$+ (\bar{R} + |A_{i,1}(T)|)\cos\Big(\frac{\bar{\omega}_{i,M}(t-T)}{\alpha}\Big) + \alpha^2\bar{R} + |A_{i,1}(t)|,$$

$$\bar{\bar{s}}_{M,i}(t) = \Big(R_{\xi,i,M} + \frac{\alpha}{\bar{\omega}_{i,M}^2}|A_{i,2}(T)|\Big)\cos\Big(\frac{\bar{\omega}_{i,M}(t-T)}{\alpha}\Big)$$
$$+ \frac{\bar{R} + |A_{i,1}(T)|}{\bar{\omega}_{i,M}}\sin\Big(\frac{\bar{\omega}_{i,M}(t-T)}{\alpha}\Big) + \frac{\alpha}{\bar{\omega}_{i,M}^2}A_{i,2}(t),$$

а в качестве константы $\bar{S}$:

$$\bar{S} = \frac{\bar{Y}}{\bar{\omega}_{i,M}^2} \ge \max_{t\in[\tau_{M-1},\tau_M]}\frac{\dot{y}_i(t)}{\bar{\omega}_{i,M}^2}. \tag{3.17}$$

Функции $\bar{\bar{x}}_{M,i}(t)$ и $\bar{\bar{s}}_{M,i}(t)$ можно ограничить следующими независимыми константами:

$$|\bar{\bar{x}}_{M,i}(t)| \le \check{X}, \quad |\bar{\bar{s}}_{M,i}(t)| \le \check{S}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\check{X} = \max_{i=1,\dots,n} \Big[\bar{\omega}_i(R_{\xi,i} + \frac{\alpha}{\bar{\omega}_i^2}\frac{\bar{Y}}{1-\alpha^2}) + \Big(\bar{R} + \frac{\bar{Y}}{1-\alpha^2}\Big) + \alpha^2\bar{R} + \frac{\bar{Y}}{1-\alpha^2}\Big],$$

$$\check{S} = \max_{i=1,\dots,n} \Bigg[\Big(R_{\xi,i} + \frac{\alpha}{\bar{\omega}_i^2}\frac{\bar{Y}}{1-\alpha^2}\Big) + \frac{\bar{R} + \dfrac{\bar{Y}}{1-\alpha^2}}{\bar{\omega}_i} + \frac{\alpha}{\bar{\omega}_i^2}\frac{\bar{Y}}{1-\alpha^2}\Bigg], \tag{3.18}$$

$$\text{где } R_{\xi,i} = \Big|\dot{y}(T)\frac{R_g(|\bar{\omega}_{i,M}| + \bar{\omega}_i)|}{\underline{\omega}_i^3} + \frac{1}{\bar{\omega}_i^2}\Big|.$$

Для получения оценки снизу рассматривается оценочная система

$$\frac{d\underline{x}_i(t)}{dt} = -\frac{\underline{\omega}_{i,M}^2\underline{s}_i(t)}{\alpha^2},$$

$$\frac{d\underline{s}_i(t)}{dt} = -\alpha^2\bar{R} + \underline{x}_i(t) - y_i(t), \quad i = 1,\dots,n,$$

с краевыми условиями

$$\underline{x}_i(T) = x_i(T), \quad \underline{s}_i(T) = s_i(T), \quad i = 1,\dots,n,$$

где

$$\underline{\omega}_{i,M} = \min_{t\in[\tau_{M-1},T]} |g_i(x(t))|.$$

Аналогично доказательству оценки (3.11) можно доказать, что

$$\underline{x}_i(t) < x_i(t), \quad \underline{s}_i(t) < s_i(t), \quad i = 1,\dots,n.$$

Аналогичным же способом строятся ограниченные функции $|\underline{x}_{M,i}(t)| \le \check{X}$ и $|\underline{s}_{M,i}(t)| \le \check{S}$. Если рассмотреть другие варианты распределения знаков функций $s_i(t)$ на отрезке $[\tau_{M-1},\tau_M]$, то доказательство будет практически таким же, за исключением знаков перед константами в системе (3.8) и ее решениях. Однако при построении функций $\bar{\bar{x}}_{M,i}(t)$ и $\bar{\bar{s}}_{M,i}(t)$ берутся модули констант поэтому функции получатся те же самые.

Если рассматриваемый отрезок $[\tau_{M-1},\tau_M]$ является отрезком сгущения, то из этого, в частности, будет следовать факт, что существуют такая точка сгущения $t_s \in (\tau_{M-1},\tau_M)$ и такой индекс j, что для любого ϵ найдется $t_{s2} \in B_\epsilon t_s,\ t_{s2} \ne t_s\colon s_j(t_{s2}) = 0$. Наличие такой точки сгущения возможно только в том случае, если одна из непрерывных функций $s_i(t)$ меняет знак с частотой, стремящейся к бесконечности в некоторой окрестности точки t_s, в соответствии с построением отрезков $[\tau_{i-1},\tau_i]$ (3.4).

Рассмотрим одну такую точку t_{s2} для $\epsilon = 2\alpha^3$. Заметим, что по построению $\tau_M - \tau_{M-1} \le 2\alpha^3$. В данном случае при $t \in [\tau_{M-1},\tau_M]$ из предположений **A3** и (1.4) вытекает, что существует такая константа $\bar{C}_{M,j} < \infty$, что выполняется оценка

$$|s_j(t)| \le s_j(t_{s2}) + 2\alpha^3 \max_{t\in[0,T]} |\dot{s}(t)| \le \alpha^3\bar{C}_{M,j},$$
$$\bar{C}_{M,j} = 2\big(\alpha^2\bar{R} + \max_{t\in[0,T]} x_j(t) + \bar{Y}\big). \tag{3.19}$$

Это означает, что в качестве функции $\bar{\bar{s}}_{M,j}(t)$ на этом отрезке можно взять постоянную функцию $\bar{\bar{s}}_{M,j}(t) \equiv \bar{C}_{M,j}$. Аналогичным образом для такого отрезка строится функция $\bar{\bar{X}}_{M,j}(t) \equiv \bar{K}_{M,j}$, где $\bar{K}_{M,j} = \bar{\omega}_i^2 C_{M,j}$.

Таким образом, мы доказали, что требуемые условия выполняются на отрезке $[\tau_{M-1},\tau_M]$. Однако из этого факта (3.3) следует, что краевые условия на предыдущем отрезке $[\tau_{M-2},\tau_{M-1}]$ будут удовлетворять следующим соотношениям (в том числе и в том случае, если отрезок $[\tau_{M-1},\tau_M]$ являлся отрезком сгущения (3.19)):

$$|x_i(\tau_{M-1}) - y_i(\tau_{M-1})| \le \alpha^2\bar{\bar{x}}_M(\tau_{M-1}),$$

$$\Big|s_i(\tau_{M-1}) - \frac{\alpha^2\dot{y}_i(T)}{g_i^2(\tau_{M-1})}\Big| \le \alpha^3\bar{\bar{s}}_M(\tau_{M-1}),$$
$$i = 1,\dots,n.$$

Итак, условия (2.7), (2.8) на конце рассматриваемого отрезка времени выполняются. Если же повторить доказательство с новыми краевыми условиями для $x_i(\tau_{M-1})$, то можно убедиться, что отступление от краевых условий $x_i(\tau_{M-1}) = y_i(\tau_{M-1})$ на величину порядка малости α^2 не повлияет на результат доказательства. Так, по индукции можно показать, что на всех отрезках $[\tau_{j-1}, \tau_j]$ можно построить соответствующие оценочные функции $\bar{\bar{x}}_{M,j}(t)$, $\bar{\bar{s}}_{M,j}(t)$, $\underline{\underline{x}}_{M,j}(t)$, $\underline{\underline{s}}_{M,j}(t)$. Таким образом, в качестве результирующих оценочных функций можно взять составные функции вида

$$\bar{\bar{x}}_i(t) = \begin{cases} \bar{\bar{x}}_{j,i}(t), & \text{если } [\tau_{j-1}, \tau_j] \text{ не отрезок сгущения,} \\ \bar{K}_{j,i}, & \text{если } [\tau_{j-1}, \tau_j] \text{ — отрезок сгущения,} \end{cases} \quad t \in [\tau_{j-1}, \tau_j]\}.$$

Лемма доказана. □

Теорема. *При выполнении условий* **A1**–**A3***, а также условия согласования параметров* $\delta < \alpha < b$ *характеристики* $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, *системы* (3.1) *с краевыми условиями* (2.6)–(2.8) *удовлетворяют условиям*

$$\lim_{\alpha \to 0} \|x_i(t) - y_i(t)\|_C = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{3.20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала покажем, что при $t \in [0, T]$ существует такая константа $\alpha_0 \le b$ (b из предположения **A3**), что при всех $\alpha \le \alpha_0$ выполняется условие

$$s_i(t) < \alpha^2 2\bar{S}, \quad \bar{S} \text{ из } (3.17). \tag{3.21}$$

Проведем доказательство от противного. Рассуждения для всех характеристик $x_i(t)$, $s_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, одинаковы.

Из краевых условий (2.6)–(2.8) и определения $\bar{S}$ (3.17) следует, что $s_i(T) < \alpha^2 2\bar{S}$ при $\alpha < \bar{S} g_i(T)^2$. Тогда в силу непрерывности функции $s_i(t)$ в качестве предположения от противного можно взять существование таких последовательностей $\alpha_j \to 0$ и $\tau_j \in [0, T)$, что

$$|s_i(\tau_j)| = 2\alpha_j^2 \bar{S}, \quad s_i(t) \le 2\alpha_j^2 \bar{S}, \quad t \in [\tau_i, T]. \tag{3.22}$$

Для определенности будем считать, что $s_i(\tau_j) = 2\alpha_j^2 \bar{S} > 0$. Случай отрицательного $s_i(\tau_j)$ доказывается аналогичным образом. В таком случае в силу леммы будет существовать такая функция $s_i'(t)\colon [\tau_j, T] \to [0, R_i]$, $0 \le R_i < \infty$, что при $t \in [\tau_j, T]$

$$s_i(t) \le \alpha_j^3 s_i'(t) + \alpha_j^2 \bar{S}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$s_i(t) \le \alpha_j^3 R_i + \alpha_j^2 \bar{S}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.23}$$

Из (3.22), (3.23) следует, что $2\alpha_j^2 \bar{S} \le \alpha_j^3 R_i + \alpha_j^2 \bar{S}$, $\bar{S} \le \alpha R_i$. Однако всегда можно подобрать достаточно малое α_j для того, чтобы это неравенство было неверно, и получить противоречие, что и требовалось доказать. Оценка снизу $s_i(t) > \alpha^2 2\bar{S}$, $t \in [0, T]$, доказывается аналогичным образом.

Таким образом, при $t \in [0, T]$ и достаточно малом $\alpha_0 \le \min\limits_{i=1,\ldots,n} \bar{S}/R_i$ выполняется условие (3.21). Тогда из леммы следует, что при $t \in [0, T]$ и достаточно малом b выполняются условия (3.3) при $R = 2\bar{S}$. Тогда из этих условий и оценки (3.18) справедлива оценка

$$-\alpha^2 \check{X} + y_i(t) \le x_i(t) \le \alpha^2 \check{X} + y_i(t). \tag{3.24}$$

В таком случае по теореме о промежуточной функции из оценки (3.24) и предположения (1.5) можно сделать вывод о сходимости (3.20). Теорема доказана. □

Осталось заметить, что из доказанной теоремы и предположения (1.5) следует выполнение первого условия требуемой сходимости (1.3). Выполнение же второго условия доказано в работе [4].

З а м е ч а н и е 1. Из утверждений леммы (3.3) можно сделать вывод о том, какими должны быть ограничения на управления (1.2) для того, чтобы управления, порождающие выбранные траектории характеристической системы (2.5), не выходили на ограничения при достаточно малых значениях α. Это можно сделать, используя оценки (1.4) и (3.18). Из (2.4) следует $u_i(t) = -\dfrac{g_i(x(t))s_i(t)}{\alpha^2}$. Тогда

$$\underline{U}_i = -\frac{\bar{Y}}{\underline{\omega}_i} - \alpha\bar{\omega}_i\breve{S}, \quad \bar{U}_i = \frac{\bar{Y}}{\underline{\omega}_i} + \alpha\omega_i\breve{S}.$$

4. Пример. Задача реконструкции для макроэкономической модели

Рассмотрим следующую управляемую систему, предложенную Э.Г. Альбрехтом [8] для описания процессов макроэкономики:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= \frac{\partial G(x_1(t),x_2(t))}{\partial x_1}u_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= \frac{\partial G(x_1(t),x_2(t))}{\partial x_2}u_2(t), \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $t \in [0,T]$, x_1 — производство, x_2 — затраты на производство, $G(x_1,x_2)$ — макроэкономический потенциал (прибыль), который задается формулой $G(x_1,x_2) = x_1x_2(a_0 + A_{i,1}x_1 + A_{i,2}x_2)$, константы a_0, $A_{i,1}$, $A_{i,2}$ — постоянные параметры, $u_1(t)$, $u_2(t)$ — управления, на которые наложены ограничения

$$u(t) \in \bar{U} = \{u = (u_1,u_2)\colon \underline{U}_1 \le u_1 \le \bar{U}_1,\ \underline{U}_2 \le u_2 \le \bar{U}_2\}, \quad t \in [0,T]. \tag{4.2}$$

Ставятся задачи реконструкции динамики и управлений этой модели по известной с точностью δ истории дискретных замеров $y_1(t_i) = x_1(t_i)$, $y_2(t_i) = x_2(t_i)$, $G(t_i)$, $i = 0, \ \ldots, N$, $t_0 = 0$, $t_N = T$, интерполируемой некоторыми гладкими функциями $y_1(t),\ y_2(t)$.

Задача реконструкции (4.1), (4.2) была численно решена для следующих входных данных.

В работе Э. Г. Альбрехта [8] приведена статистика работы промышленности Уральского региона в 1970–1985 гг., на основе которой построены функции $y_1(t),\ y_2(t)$, интерполирующие истории замеров $\{y_1(t_i) = x_1(t_i),\ i = 0,1,\ldots,15\}$, $\{y_2(t_i) = x_2(t_i),\ i = 0,1,\ldots,15\}$. Графики интерполяций $y_1(t),\ y_2(t)$ изображены на рис. 1, 2.

Ставятся задачи реконструкции динамики и управлений этой модели по известной истории замеров $\{y_1(t_i),\ y_2(t_i),\ G(t_i),\ i = 0,\ldots,N\}$, интерполируемой некоторыми гладкими функциями $y_1(t),\ y_2(t)$. Полагаем $\bar{U}_1 = \bar{U}_2 = 200,\ \underline{U}_1 = -\bar{U}_1,\ \underline{U}_2 = -\bar{U}_2$.

Решения $x(\cdot), s(\cdot)$ соответствующей характеристической системы (3.1) были построены численно. На рис. 3–6 приведены графики построенного при разных значениях параметра α пучка траекторий $x_1(t)$ и порождающих управлений $u_1(t)$. Для более наглядного масштабирования

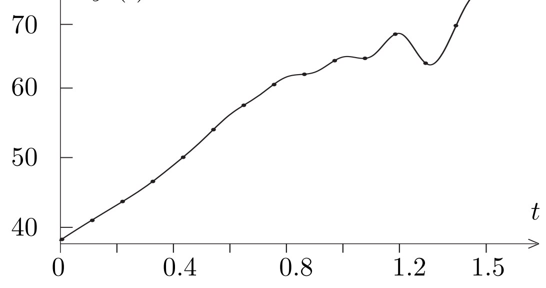


Рис. 1. График $y_1(t),\ t \in [0,1.5]$.

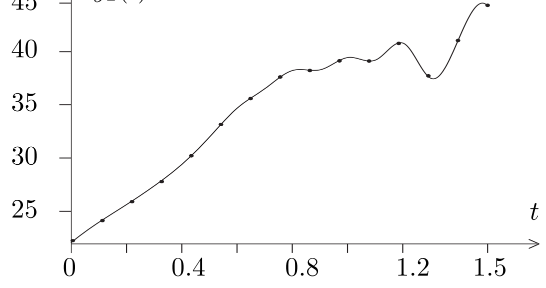


Рис. 2. График $y_2(t),\ t \in [0,1.5]$.

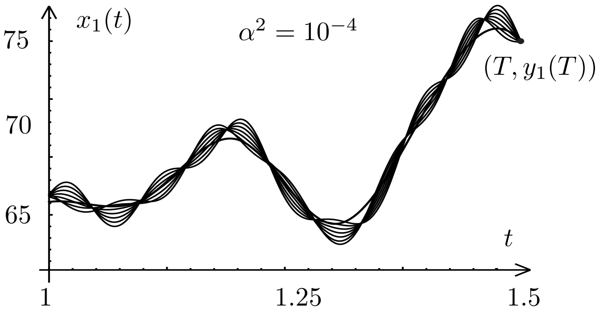


Рис. 3. График $x_1(t)$ при $\alpha^2 = 10^{-4}$, $t \in [1, 1.5]$.

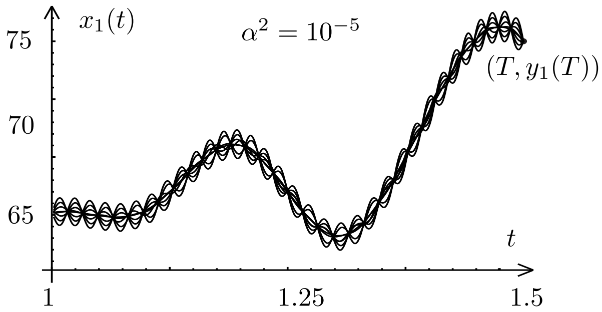


Рис. 4. График $x_1(t)$ при $\alpha^2 = 10^{-5}$, $t \in [1, 1.5]$.

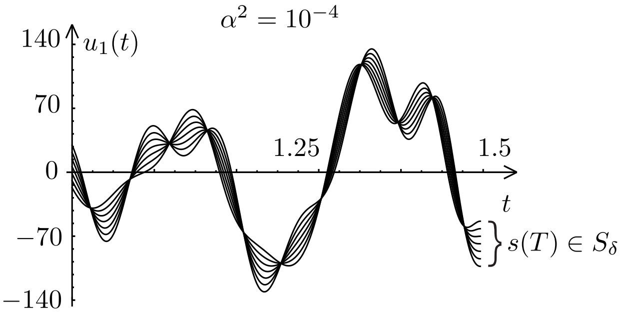


Рис. 5. График $u_1(t)$ при $\alpha^2 = 10^{-4}$, $t \in [1, 1.5]$.

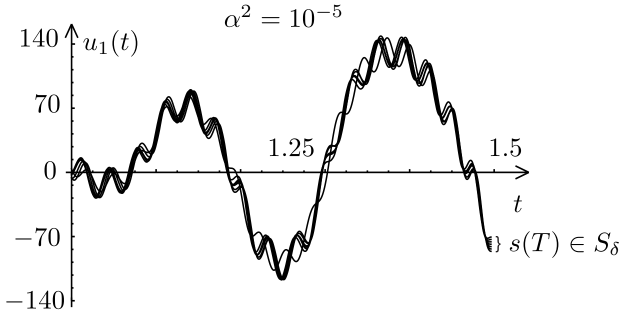


Рис. 6. График $u_1(t)$ при $\alpha^2 = 10^{-5}$, $t \in [1, 1.5]$.

графиков показан не весь отрезок времени $[0, T]$. В этих же целях при построении графиков условие согласования параметров $\delta < \alpha$ существенно ослаблено, так как в противном случае построенный пучок траекторий практически сливается на рисунке с интерполяцией замеров, в то время как соответствующие графики управлений также неотличимы друг от друга. Заметим, что графики траекторий $x_2(t)$ и управлений $u_2(t)$ имеют аналогичный вид.

З а м е ч а н и е 2. Теперь, для сравнения, попробуем получить решение этой задачи реконструкции путем сведения ее к задаче оптимального управления с минимизацией функционала

$$I(x(t), u(t)) = \int\limits_0^T \Big[\frac{(x_1(t) - y_1(t))^2}{2} + \frac{(x_2(t) - y_2(t))^2}{2} + \frac{\alpha^2 u_1(t)^2}{2} + \frac{\alpha^2 u_2(t)^2}{2}\Big] dt, \tag{4.3}$$

который отличается от функционала (2.1) знаком первых двух членов в подынтегральном выражении. Запишем характеристическую систему для этой задачи:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1(t)}{dt} &= -\frac{s_1(t)}{\alpha^2}\omega_{i,M}^2(x_1(t), x_2(t)),\\
\frac{dx_2(t)}{dt} &= -\frac{s_2(t)}{\alpha^2}\omega_{i,M}^2(x_1(t), x_2(t)),\\
\frac{ds_1(t)}{dt} &= -x_1(t) + \frac{s_1^2(t)}{\alpha^2}F_1(x_1(t), x_2(t)) + \frac{s_2^2(t)}{\alpha^2}F_2(x_1(t), x_2(t)) + y_1(t),\\
\frac{ds_2(t)}{dt} &= -x_2(t) + \frac{s_1^2(t)}{\alpha^2}F_3(x_1(t), x_2(t)) + \frac{s_2^2(t)}{\alpha^2}F_4(x_1(t), x_2(t)) + y_2(t).
\end{aligned}$$

Рассмотрим ее решение при краевых условиях (2.6)–(2.8). Нетрудно проверить, что по теореме о неустойчивости по первому приближению решения этой системы будут неустойчивы. Действительно, среди собственных чисел $\lambda_{1,2} = \pm 1/\alpha$ характеристической матрицы есть числа с положительной действительной частью, а значит, по теореме об устойчивости по первому приближению решения этой системы будут неустойчивы. Это сильно затрудняет построение численного решения задачи. Были предприняты попытки найти численно решения такой системы при условии использования в совокупности таких же вычислительных мощностей, как и при построении решений описанным выше алгоритмом, — и при любых краевых условиях и любых используемых методах построенное решение $x(t)$ расходилось достаточно быстро с интерполяцией замеров $y(t)$, плохо отслеживая функции $y_1(t)$, $y_2(t)$. Для построения решений задачи реконструкции в таком случае необходимо существенное уменьшение параметра α и уменьшение шага счета, что требует гораздо больше машинного времени.

5. Заключение

В данной работе предложено подробное обсуждение метода решения задач реконструкции динамики и управлений системы, предложенного в статье [4].

Была рассмотрена модификация этого метода, подразумевающая использование решения вспомогательной задачи оптимального управления на минимум функционала (2.1) при наличии целевого множества, в данном случае представляющего собой точку $(T, y(T))$.

Была доказана сходимость в пространстве непрерывных функций (1.3) траекторий $x(t)$, полученных с помощью предложенного метода, и базовой траектории $x^*(t)$ для определенного класса нелинейных задач (1.1), (1.2), **A1**–**A3**.

В качестве примера численного приложения предложенного алгоритма рассмотрена существенно нелинейная модель макроэкономики (4.1) и наглядно продемонстрирована сходимость (1.3) построенных аппроксимаций решения задачи реконструкции динамики и управлений для этой модели.

Также было замечено, что использование функционала вида (2.1) дает преимущество по сравнению с функционалом вида (4.3), которое заключается в устойчивости построенных решений относительно возмущений и погрешностей в исходных данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.** Основы метода динамической регуляризации. М: Изд-во МГУ, 1999. 237 с.
2. **Тихонов А.Н.** Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР. 1943. Т. 39, № 4. С. 195–198.
3. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
4. **Субботина Н.Н., Токманцев Т.Б.** Исследование устойчивости решения обратных задач динамики управляемых систем по отношению к возмущениям входных данных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 218–233.
5. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Наука, 1961. 393 с.
6. Метод характеристик для уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана / Н.Н. Субботина, Е.А. Колпакова, Т.Б. Токманцев, Л.Г. Шагалова. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2013. 244 с.
7. **Эванс Л.К., Гариепи К.Ф.** Теория меры и тонкие свойства функции. Новосибирск: Научная книга (ИДМИ), 2002. 207 с.
8. **Альбрехт Э.Г.** Методика построения и идентификации математических моделей макроэкономических процессов // Исследовано в России [Электрон. журн]. 2002. Vol. 5. С. 54–86. URL: http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/005.pdf . 218-233. 2014.

Крупенников Евгений Александрович
ведущий математик
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
аспирант
Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина
e-mail: krupennikov@imm.uran.ru

Поступила 17.03.2015

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.977

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА[1]

$\boxed{\text{А. В. Кряжимский}}$, А. М. Тарасьев

Работа посвящена исследованию задачи пропорционального развития в моделировании экономического роста. Рассматривается модель мультиуровневой оптимизации при построении сбалансированных пропорций для производственных факторов и инвестиций в условиях изменяющихся цен. На первом уровне изучаются модели с производственными функциями различного типа в рамках классического подхода статической оптимизации. Показывается, что все такие модели обладают свойством пропорциональности: при решении задач максимизации выпуска и минимизации затрат уровни производственных факторов прямо пропорциональны друг другу с коэффициентами пропорциональности, зависящими от цен и эластичности производственных функций. На втором уровне пропорциональные решения первого уровня передаются в модель экономического роста для решения задачи динамической оптимизации инвестиций в производственные факторы. Благодаря условиям пропорциональности и условию однородности первой степени для макроэкономических производственных функций исходная нелинейная динамика системы преобразуется в линейную систему дифференциальных уравнений, описывающих динамику производственных факторов. В этом преобразовании все особенности нелинейной модели переходят во временную зависимость коэффициента масштаба (совокупной производительности факторов производства) линейной модели, которая определяется пропорциями между ценами и коэффициентами эластичности производственных функций. Для задачи управления с линейной динамикой получены аналитические решения для траекторий оптимального развития в рамках принципа Понтрягина для постановок с конечным и бесконечным горизонтом. Показано, что решения задач управления для этих двух постановок имеют существенные различия: в задачах с конечным горизонтом оптимальная стратегия инвестирования обязательно имеет нулевой режим в финальной стадии, а задача с бесконечным горизонтом всегда обладает строго положительным решением. Замечательный результат предлагаемой модели состоит в конструктивных аналитических решениях для оптимальных инвестиций в производственные факторы, которые зависят от динамики цен и экономических параметров, таких как коэффициенты эластичности производственных функций, совокупная производительность факторов производства, коэффициенты амортизации. Это свойство служит предпосылкой для продуктивного слияния моделей оптимизации инвестиций в производственные факторы в рамках мультиуровневой конструкции и обеспечивает прочный базис для построения оптимальных траекторий экономического развития.

Ключевые слова: оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина, мультиуровневая оптимизация, пропорциональный экономический рост.

A. V. Kryazhimskiy, A. M. Tarasyev. Optimal control for proportional economic growth.

The research is focused on the question of proportional development in economic growth modeling. A multilevel dynamic optimization model is developed for the construction of balanced proportions for production factors and investments in a situation of changing prices. At the first level, models with production functions of different types are examined within the classical static optimization approach. It is shown that all these models possess the property of proportionality: in the solution of product maximization and cost minimization problems, production factor levels are directly proportional to each other with coefficients of proportionality depending on prices and elasticities of production functions. At the second level, proportional solutions of the first level are transferred to an economic growth model to solve the problem of dynamic optimization for the investments in production factors. Due to proportionality conditions and the homogeneity condition of degree 1 for the macroeconomic production functions, the original nonlinear dynamics is converted to a linear system of differential equations that describe the dynamics of production factors. In the conversion, all peculiarities of the nonlinear model are hidden in a time-dependent scale factor (total factor productivity) of the linear model, which is determined by proportions between prices and elasticity coefficients of the production functions. For a control problem with linear dynamics, analytic formulas are obtained for optimal development trajectories within the Pontryagin maximum principle for statements with finite and infinite horizons. It is shown that solutions of these two problems differ crucially from each other: in finite horizon problems the optimal investment strategy inevitably has the zero regime at the final stage, whereas the infinite horizon problem always has a strictly positive solution. A remarkable result of the proposed model consists in constructive analytical solutions for optimal investments in production factors, which depend on the price dynamics and other economic parameters such as elasticity coefficients of production functions, total factor productivity, and depreciation factors. This

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 15-11-10018.

feature serves as a background for the productive fusion of optimization models for investments in production factors in the framework of a multilevel structure and provides a solid basis for constructing optimal trajectories of economic development.

Keywords: optimal control, Pontryagin maximum principle, multilevel optimization, proportional economic growth.

Введение

Работа связана с построением и анализом модели пропорционального развития в рамках теории экономического роста. Предлагаемый подход увязывает элементы классических моделей [1–5] и идеи пропорциональности оптимальных решений статических микроэкономических и макроэкономических моделей [6] с конструкциями динамической оптимизации в принципе максимума Понтрягина [7] и его обобщениями для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом [8–11].

Модель реализует результаты исследований по оптимизации инвестиций в производственные факторы [12–21] и существенно дополняет и обновляет их применением конструкций мультиуровневой оптимизации.

Следует отметить, аналогичные подходы к исследованию моделей экономического роста на основе пропорциональных конструкций развивались в работе [22].

Основная идея работы заключается в построении модели экономического роста с конструкцией многоуровневой оптимизации.

На первом уровне рассматривается оптимизационная процедура для статической задачи при фиксации текущего временного периода. Здесь возможны две стандартные постановки: или задача минимизации затрат при фиксированном уровне выпуска, или двойственная к ней задача максимизации объемов выпуска при заданном уровне затрат. Показывается, что для моделей с классическими степенными производственными функциями Кобба — Дугласа, производственными функциями с постоянной эластичностью замещения и функциями типа “затраты-выпуск” [6] решения обеих поставленных задач статической оптимизации обладают свойствами пропорциональности: пропорции в оптимальных факторах производства определяются пропорциями между ценами и коэффициентами эластичности производственных функций.

На втором уровне исследуется задача оптимального управления в рамках теории экономического роста при выполнении условий пропорциональности. Для перехода к этой задаче решения первого уровня оптимизации подставляются в уравнения динамики производственных факторов. В таком переходе свойство однородности первой степени (свойство постоянной отдачи по масштабам производства), справедливое для производственной функции, в совокупности со свойствами пропорциональности производственных факторов генерируют линейную динамику факторов производства и затрат.

Ставится задача оптимального управления для интегральной функции полезности с логарифмическим потребительским индексом на траекториях полученной линейной системы, задающих динамику производственных факторов. Отметим, что использование логарифмического потребительского индекса является основополагающей конструкцией в теории эндогенного экономического роста [3; 6]. Функция полезности такого типа тесно связана также с понятием энтропии динамической системы.

Решение задачи оптимального управления строится в рамках принципа максимума Понтрягина [7] для конечного горизонта и его обобщений для постановок с бесконечным горизонтом [8]. Важное свойство решения заключается в том, что оно задается аналитическими формулами для широкого диапазона модельных параметров, включая программно зависящие от времени цены и коэффициенты эластичности. Отметим, что такая временная зависимость может иметь сложный характер и предусматривать тренды роста, переходные периоды, циклы и кризисы в модели.

Следует сказать, что аналитические решения для оптимального управления получаются для обеих задач — как с конечным горизонтом, так и с бесконечным горизонтом. Структура этих решений четко показывает, что в задаче с конечным горизонтом оптимальное управление всегда имеет нулевой режим инвестиций в финальной стадии. В отличие от этого случая решение задачи с бесконечным горизонтом для оптимальных инвестиций может не содержать нулевых значений на всем временном интервале.

Для первого и второго уровней оптимизации выполняется обратная процедура, в которой оптимальное решение второго уровня возвращается на первый уровень, где производится перераспределение инвестиций между факторами производства в соответствии с принципом пропорциональности.

На основе предлагаемого подхода строятся оптимальные аналитические решения на обоих уровнях оптимизации и соответствующие оптимальные уровни инвестиций генерируют систему дифференциальных уравнений для производственных факторов, схожую с репликаторной динамикой эволюционных игр [23; 24]. Следует подчеркнуть, что в упомянутом контексте полученные оптимальные решения могут быть проанализированы в рамках теории позиционных дифференциальных игр [25].

Отметим, что благодаря эффективной конструкции предлагаемая методология многоуровневой оптимизации может быть применена для эконометрической идентификации и прогностического моделирования оптимальных сценариев пропорционального роста в многоразмерных экономических системах.

Статья организована следующим образом.

Сначала формируется первый уровень оптимизации модели, на котором фиксируется временной период.

В первом разделе рассматривается задача минимизации затрат при заданном уровне выпуска для моделей с классическими производственным функциями: степенными функциями Кобба — Дугласа и функциями с постоянной эластичностью замещения. Доказывается, что решения этих задач обладают свойством пропорциональности — оптимальные затраты факторов должны быть пропорциональны с коэффициентами, зависящими от пропорций между ценами и коэффициентами эластичности.

Во втором разделе анализируется конструкция максимизации объемов выпуска, двойственная к задаче минимизации затрат. Устанавливается, что справедливы аналогичные пропорции оптимальных решений для постановок с производственными функциями Кобба — Дугласа и функциями с постоянной эластичностью замещения.

В третьем разделе условия пропорциональности естественным образом выводятся и для моделей с производственными функциями “затраты-выпуск”.

В четвертом разделе осуществляется установление связей между оптимальными объемами выпуска и затратами. Показывается, что при выполнении условия постоянной отдачи по масштабам производства (единичной эластичности производства) оптимальные объемы выпуска могут быть линейно выражены через затраты с коэффициентом масштаба, заданным пропорциями между ценами и коэффициентами эластичности. Это означает, что нелинейные зависимости в производственных функциях могут быть скрыты в структуре коэффициента масштаба и выражены через пропорции текущего периода.

В пятом разделе вводятся балансовые уравнения для потребления и инвестиций как в абсолютных, так и в относительных переменных. Эта конструкция завершает первый уровень оптимизации модели пропорционального экономического роста.

Далее делается переход ко второму уровню оптимизации, в котором временной период расфиксируется и становится основной переменной.

В шестом разделе задается динамика производственных факторов на основе системы дифференциальных уравнений, описывающих влияние инвестиций как управляющих параметров на экономическое развитие. Вводится также функция полезности для процесса экономического роста в виде интеграла на конечном или бесконечном горизонте от дисконтированного логарифмического индекса потребления, определенного на траекториях системы. Доказывается существование возможности так перераспределить инвестиции в текущем временном периоде, что поддерживаются пропорции оптимальных решений первого уровня модели по минимизации затрат или максимизации объемов выпуска. Следует отметить, что полученная система дифференциальных уравнений для динамики производственных факторов имеет характерные черты репликаторной динамики из теории эволюционных игр.

В седьмом разделе на втором уровне оптимизации модели ставится задача оптимального управления для интегрального логарифмического индекса потребления на траекториях линейной динамики затрат. Для этой задачи формулируется принцип максимума Понтрягина для обеих постановок с конечным горизонтом и бесконечным горизонтом.

Восьмой раздел посвящен анализу гамильтоновых систем, возникающих в принципе максимума Понтрягина, и построению оптимальных решений. Выводятся аналитические формулы для оптимального управления для задач с конечным горизонтом и бесконечным горизонтом. Приводятся достаточные условия оптимальности полученных решений, основанные на свойствах вогнутости максимизированного гамильтониана. Показывается, что структура оптимального управления в задаче с конечным горизонтом обязательно обладает нулевым режимом в терминальной фазе. Напротив, оптимальное управление в задаче с бесконечным горизонтом является, как правило, строго положительным на всем временном интервале. Этот результат показывает преимущества постановок задач оптимального управления с бесконечным горизонтом в моделях экономического роста по сравнению с задачами на конечном горизонте.

1. Пропорциональность в задаче минимизации затрат

В этом разделе исследуются задачи минимизации затрат первого уровня для моделей с производственными функциями различного типа. Показывается, что решения этих задач обладают свойством пропорциональности: затраты производственных факторов прямо пропорциональны друг другу с коэффициентами пропорциональности, зависящими от цен и коэффициентов эластичности производственных функций.

На первом уровне фиксируется временной период t, $t \in [t_0, T]$, $t_0 \leq T \leq +\infty$, и рассматриваются статические задачи оптимизации. Чтобы не делать выкладки громоздкими, символ времени t в них опускается, хотя при этом следует иметь в виду, что все параметры и переменные модели могут зависеть от времени.

1.1. Минимизация затрат для производственной функции Кобба — Дугласа

Рассмотрим модель экономики, снабженную производственной функцией Кобба — Дугласа

$$y = a \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}. \tag{1.1}$$

Здесь y есть объемы выпуска экономики, а символами $x_1, \ldots, x_n$ обозначены размеры затрат производственных факторов $1, \ldots, n$ соответственно. Параметр a, $a > 0$, выступает в роли коэффициента масштаба (общей продуктивности факторов). Для коэффициентов эластичности α_j производственной функции по факторам предполагается выполнение следующих условий:

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0, \quad \sum_{j=1}^{m} \alpha_j = \varepsilon.$$

Здесь параметр ε обозначает эластичность производства по масштабам затрат. В макроэкономических моделях, как правило, предполагается, что имеет место постоянная отдача по масштабам производства – свойство однородности первой степени для производственной функции, т.е. эластичность производства равна единице, $\varepsilon = 1$.

Введем цены производственных факторов. Символом p_j, $p_j > 0$, обозначим цену единицы производственного фактора j.

Рассмотрим задачу минимизации затрат при заданном объеме выпуска. Требуется найти оптимальные значения производственных факторов $x_1, \dots, x_n$, которые минимизируют общие затраты C:

$$\text{Minimize} \quad C = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

при ограничениях на заданный объем выпуска $y > 0$:

$$x_1, \dots, x_n \geq 0, \quad y = a \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}.$$

Здесь удобно перейти к логарифмическим ограничениям $\ln y = \ln a + \alpha_1 \ln x_1 + \ldots + a_n \ln x_n$.

Согласно методу множителей Лагранжа строится функция Лагранжа:

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n + \lambda(\ln y - \ln a - \alpha_1 \ln x_1 - \ldots - a_n \ln x_n).$$

Здесь параметр λ обозначает множитель Лагранжа, соответствующий логарифмическим ограничениям для производственной функции Кобба — Дугласа.

Необходимые условия оптимальности в задаче минимизации затрат влекут следующую систему соотношений:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = p_j - \lambda \frac{\alpha_j}{x_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

которые обеспечивают текущие пропорции между производственными факторами:

$$c_{ik} = \frac{x_i}{x_k} = \frac{\alpha_i p_k}{\alpha_k p_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, n. \tag{1.2}$$

Можно вывести значения функций спроса на производственные факторы в следующем виде:

$$x_j = \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \left(\frac{\alpha_j}{p_j}\right) \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{p_k}{\alpha_k}\right)^{\frac{\alpha_k}{\varepsilon}}, \quad j = 1, \dots, n.$$

В случае постоянной отдачи по масштабу, $\varepsilon = 1$, получаются следующие выражения для функций спроса:

$$x_j = \frac{y}{a} \left(\frac{\alpha_j}{p_j}\right) \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{p_k}{\alpha_k}\right)^{\alpha_k}, \quad j = 1, \dots, n.$$

1.2. Минимизация затрат для производственной функции CES

Рассмотрим модель, основанную на производственной функции с постоянной эластичностью замещения (CES):

$$y = e_0 \left(e_1 x_1^{-\beta} + \ldots + e_n x_n^{-\beta}\right)^{-\frac{h}{\beta}}. \tag{1.3}$$

Здесь параметр $e_0 > 0$ задает полную продуктивность факторов, параметры $e_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, являются коэффициентами распределения, параметр $h > 0$ определяет степень однородности производственной функции, параметр β, $\beta > -1$, является коэффициентом замещения. Эластичность производства определяется степенью однородности h, $\varepsilon = h$. Для постоянной отдачи по масштабам производства должно выполняться условие $h = 1$.

Проведем анализ задачи минимизации затрат для производственной функции CES. В этом случае функция Лагранжа имеет вид

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n + \lambda\Big(\ln y - \ln e_0 + \frac{h}{\beta} \ln\left(e_1 x_1^{-\beta} + \ldots + e_n x_n^{-\beta}\right)\Big).$$

Необходимые условия оптимальности для задачи минимизации затрат задаются соотношениями

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = p_j - \lambda \frac{h}{\beta} \frac{-\beta e_j x_j^{-(\beta+1)}}{(e_1 x_1^{-\beta} + \ldots + e_n x_n^{-\beta})} = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Эти условия генерируют пропорциональность для факторов производства

$$c_{ik} = \frac{x_i}{x_k} = \Big(\frac{e_i p_k}{e_k p_i}\Big)^{\frac{1}{(\beta+1)}}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{1.4}$$

Из этих условий выводятся функции спроса на производственные факторы для модели с производственной функцией CES:

$$x_j = \Big(\frac{y}{e_0}\Big)^{\frac{1}{h}} \Big(\frac{e_j}{p_j}\Big)^{\frac{1}{(\beta+1)}} \Big(e_1^{\frac{1}{(\beta+1)}} p_1^{\frac{\beta}{(\beta+1)}} + \ldots + e_n^{\frac{1}{(\beta+1)}} p_n^{\frac{\beta}{(\beta+1)}}\Big)^{\frac{1}{\beta}}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

При постоянной отдаче по масштабам производства, $h = 1$, получаются следующие соотношения для функции спроса:

$$x_j = \frac{y}{e_0} \Big(\frac{e_j}{p_j}\Big)^{\frac{1}{(\beta+1)}} \Big(e_1^{\frac{1}{(\beta+1)}} p_1^{\frac{\beta}{(\beta+1)}} + \ldots + e_n^{\frac{1}{(\beta+1)}} p_n^{\frac{\beta}{(\beta+1)}}\Big)^{\frac{1}{\beta}}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

1.3. Достаточные условия оптимальности пропорциональных решений

Для того чтобы установить достаточные условия оптимальности для полученных пропорциональных решений, следует вычислить матрицу вторых производных (матрицу Гессе) функции Лагранжа $L(x, \lambda)$ по переменным для производственных факторов x и проверить свойство положительной определенности.

Для модели с производственной функцией Кобба — Дугласа (1.1) имеем следующую матрицу вторых производных:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_j^2} = \frac{\lambda \alpha_j}{x_j^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_k} = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n, \quad k \neq j.$$

Очевидно, что для такой диагональной матрицы выполняется критерий Сильвестра и, следовательно, она положительно определена.

В модели с производственной функцией CES (1.3) матрица вторых производных имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial x_j^2} &= \frac{\lambda h e_j ((\beta+1) x_j^{-(\beta+2)} (\sum_{k \neq j} e_k x_k^{-\beta}) + e_j x_j^{-2(\beta+1)})}{(e_1 x_1^{-\beta} + \ldots + e_n x_n^{-\beta})^2} > 0, \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_k} &= -\frac{\lambda h \beta e_j x_j^{-(\beta+1)} e_k x_k^{-(\beta+1)}}{(e_1 x_1^{-\beta} + \ldots + e_n x_n^{-\beta})^2} < 0, \\ & \quad j = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n, \quad k \neq j. \end{aligned}$$

Для такой матрицы также можно проверить выполнение критерия Сильвестра и убедиться в ее положительной определенности. Например, в случае двух производственных факторов при $n = 2$ определитель матрицы вторых производных функции Лагранжа имеет положительный знак:

$$\Delta = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} - \Big(\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}\Big)^2 = \frac{\lambda^2 h^2 (\beta+1) e_1 e_2 x_1^{-(\beta+2)} x_2^{-(\beta+2)}}{(e_1 x_1^{-\beta} + e_2 x_2^{-\beta})^2} > 0,$$

и, следовательно, матрица вторых производных положительно определена.

Таким образом, для обеих классических производственных функций выполнены достаточные условия минимума для пропорциональных решений.

2. Пропорциональность в задаче максимизации объемов выпуска

Условия пропорциональности имеют место не только для задачи минимизации затрат, но и для двойственной задачи максимизации объемов выпуска.

2.1. Максимальные решения для производственной функции Кобба — Дугласа

В модели с производственной функцией Кобба — Дугласа ставится задача максимизации объемов выпуска

$$y = ax_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n} \quad \longrightarrow \quad \max$$

при ограничениях на затраты

$$p_1x_1 + \dots + p_nx_n = C. \tag{2.1}$$

Здесь параметр C, $C > 0$, обозначает общие затраты.

Функция Лагранжа в задаче максимизации выпуска имеет следующий вид:

$$L(x_1,\dots,x_n,\lambda) = ax_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n} + \lambda(C - p_1x_1 - \dots - p_nx_n).$$

Необходимые условия оптимальности в этом случае порождают систему уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = a\alpha_j x_j^{-1}x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n} - \lambda p_j = 0, \quad j = 1,\dots,n.$$

Множитель Лагранжа представляется соотношением $\lambda = \dfrac{\alpha_1}{p_1x_1}y = \dots = \dfrac{\alpha_n}{p_nx_n}y$.

Последние условия, в свою очередь, порождают свойства пропорциональности в задаче максимизации объемов выпуска

$$c_{ik} = \frac{x_i}{x_k} = \frac{\alpha_i p_k}{\alpha_k p_i}, \quad i = 1,\dots,n, \quad k = 1,\dots,n,$$

которые аналогичны свойствам пропорциональности в задаче минимизации затрат (1.2).

В этом случае получаются следующие оптимальные решения для функций спроса:

$$x_j = C\frac{\alpha_j}{p_j}, \quad j = 1,\dots,n.$$

Выводятся также значения оптимального выпуска через затраты:

$$y = aC\Big(\frac{\alpha_1}{p_1}\Big)^{\alpha_1}\dots\Big(\frac{\alpha_n}{p_n}\Big)^{\alpha_n} = ax_j\frac{p_j}{\alpha_j}\Big(\frac{\alpha_1}{p_1}\Big)^{\alpha_1}\dots\Big(\frac{\alpha_n}{p_n}\Big)^{\alpha_n}, \quad j = 1,\dots,n.$$

2.2. Максимальные решения для производственной функции CES

Рассмотрим задачу максимизации объемов выпуска для производственной функции CES:

$$y = e_0\big(e_1x_1^{-\beta} + \dots + e_nx_n^{-\beta}\big)^{-\frac{h}{\beta}} \quad \longrightarrow \quad \max$$

при ограничениях на затраты (2.1).

В этом случае функция Лагранжа имеет вид

$$L(x_1,\dots,x_n,\lambda) = e_0\big(e_1x_1^{-\beta} + \dots + e_nx_n^{-\beta}\big)^{-\frac{h}{\beta}} + \lambda(C - p_1x_1 - \dots - p_nx_n).$$

Необходимые условия оптимальности в задаче максимизации выпуска с производственной функцией CES задаются соотношениями

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = e_0\Big(-\frac{h}{\beta}\Big)\big(e_1x_1^{-\beta} + \ldots + e_nx_n^{-\beta}\big)^{-\frac{h}{\beta}-1}e_j(-\beta)x_j^{-(\beta+1)} - \lambda p_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Из этих соотношений вытекают условия пропорциональности для производственной функции CES в задаче максимизации выпуска

$$c_{ik} = \frac{x_i}{x_k} = \Big(\frac{e_ip_k}{e_kp_i}\Big)^{\frac{1}{(\beta+1)}}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, n,$$

которые полностью идентичны условиям пропорциональности в задаче минимизации затрат (1.4).

Для функций спроса на производственные факторы получаются следующие соотношения:

$$x_j = C\Big(\frac{e_j}{p_j}\Big)^{\frac{1}{(\beta+1)}}\Big(e_1^{\frac{1}{(\beta+1)}}p_1^{\frac{\beta}{(\beta+1)}} + \ldots + e_n^{\frac{1}{(\beta+1)}}p_n^{\frac{\beta}{(\beta+1)}}\Big)^{-1}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Для представления оптимального объема выпуска через заданные затраты получаем формулу

$$\begin{aligned} y &= e_0C^h\Big(e_1^{\frac{1}{(\beta+1)}}p_1^{\frac{\beta}{(\beta+1)}} + \ldots + e_n^{\frac{1}{(\beta+1)}}p_n^{\frac{\beta}{(\beta+1)}}\Big)^{-h\frac{(\beta+1)}{\beta}} \\ &= e_0x_j^h\Big(\frac{p_j}{e_j}\Big)^{\frac{h}{(\beta+1)}}\Big(e_1^{\frac{1}{(\beta+1)}}p_1^{\frac{\beta}{(\beta+1)}} + \ldots + e_n^{\frac{1}{(\beta+1)}}p_n^{\frac{\beta}{(\beta+1)}}\Big)^{\frac{h}{\beta}}, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Для случая постоянной отдачи по масштабам производства, $h = 1$, имеем следующие соотношения для оптимальных объемов выпуска:

$$\begin{aligned} y &= e_0C\Big(e_1^{\frac{1}{(\beta+1)}}p_1^{\frac{\beta}{(\beta+1)}} + \ldots + e_n^{\frac{1}{(\beta+1)}}p_n^{\frac{\beta}{(\beta+1)}}\Big)^{-\frac{(\beta+1)}{\beta}} \\ &= e_0x_j\Big(\frac{p_j}{e_j}\Big)^{\frac{1}{(\beta+1)}}\Big(e_1^{\frac{1}{(\beta+1)}}p_1^{\frac{\beta}{(\beta+1)}} + \ldots + e_n^{\frac{1}{(\beta+1)}}p_n^{\frac{\beta}{(\beta+1)}}\Big)^{\frac{1}{\beta}}, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

3. Пропорциональность для производственной функции “затраты-выпуск”

В этом разделе рассматривается случай, когда экономика описывается производственной функцией “затраты-выпуск”:

$$y(t) = \min\Big\{\frac{x_1(t)}{c_1}, \ldots, \frac{x_n(t)}{c_n}\Big\}. \tag{3.1}$$

Здесь параметры c_j, $c_j > 0$, задают коэффициенты продуктивности для производственных факторов x_j, $j = 1, \ldots, n$.

Для сбалансированного состояния экономики должны быть выполнены условия пропорциональности, которые реализуют минимум в определении производственной функции “затраты-выпуск”:

$$y = \frac{x_1}{c_1}, \ldots, \frac{x_n}{c_n}.$$

Последнее условие влечет пропорциональность производственных факторов:

$$c_{ik} = \frac{x_i}{x_k} = \frac{c_i}{c_k}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, n,$$

и задает сбалансированные уровни производственных факторов $x_j = yc_j, \quad j = 1, \ldots, n$.

Принимая во внимание ограничения на затраты (2.1), можно вывести следующее условие для оптимального уровня выпуска:

$$y = C\frac{1}{(p_1c_1 + \ldots + p_nc_n)}.$$

Таким образом, условия условия пропорциональности являются неотъемлемым свойством производственной функции “затраты-выпуск”.

4. Универсальная производственная функция

С этого раздела начнем переход ко второму уровню оптимизации и будем рассматривать динамический процесс, т. е. будем считать, что все параметры производственных функций, ценовые параметры для факторов производства и основные переменные, а именно объемы выпуска, затраты производственных факторов, уровни потребления и инвестиций могут зависеть от временного периода t, $t \in [t_0, T]$, $t_0 \leq T \leq +\infty$.

Суммируя выводы предыдущих разделов по условиям пропорциональности в задаче минимизации затрат и в задаче максимизации объемов выпуска, можно установить линейную зависимость оптимального продукта $y(t)$ от затрат $C(t)$ и назвать ее *универсальной* производственной функцией модели:

$$y(t) = A(t)C(t), \tag{4.1}$$

а также линейную зависимость стоимости факторов производства $p_j(t)x_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, от затрат $C(t)$:

$$p_j(t)x_j(t) = \gamma_j(t)C(t) \tag{4.2}$$

с весовыми коэффициентами $\gamma_j = \gamma_j(t)$, удовлетворяющими симплициальным соотношениям

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_j(t) = 1, \quad \gamma_j(t) \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{4.3}$$

Здесь новый коэффициент масштаба $A = A(t)$ и весовые коэффициенты $\gamma_j = \gamma_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, определяются типом производственной функции.

А именно для производственной функции Кобба — Дугласа (1.1) коэффициент масштаба A определяется соотношением для общей продуктивности факторов $a = a(t)$, значениями цен $p_j = p_j(t)$ и коэффициентов эластичности $\alpha_j = \alpha_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$:

$$A = A(t) = a(t)\Big(\frac{\alpha_1(t)}{p_1(t)}\Big)^{\alpha_1(t)} \ldots \Big(\frac{\alpha_n(t)}{p_n(t)}\Big)^{\alpha_n(t)}.$$

Весовые коэффициенты γ_j, $j = 1, \ldots, n$, для производственной функции Кобба — Дугласа задаются формулами

$$\gamma_j(t) = \alpha_j(t), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Для производственной функции CES (1.3) коэффициент масштаба $A = A(t)$ выражается следующим соотношением, включающим общую продуктивность факторов $e_0 = e_0(t)$, цены $p_j = p_j(t)$, коэффициент замещения $\beta = \beta(t)$ и коэффициенты распределения $e_j = e_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$:

$$A = A(t) = e_0(t)\left(e_1(t)^{\frac{1}{(\beta(t)+1)}}p_1(t)^{\frac{\beta(t)}{(\beta(t)+1)}} + \ldots + e_n(t)^{\frac{1}{(\beta(t)+1)}}p_n(t)^{\frac{\beta(t)}{(\beta(t)+1)}}\right)^{-\frac{(\beta(t)+1)}{\beta(t)}}.$$

Весовые коэффициенты γ_j, $j = 1, \ldots, n$, для производственной функции CES задаются соотношениями

$$\gamma_j(t) = e_j(t)^{\frac{1}{(\beta(t)+1)}}p_j(t)^{\frac{\beta(t)}{(\beta(t)+1)}}\left(e_1(t)^{\frac{1}{(\beta(t)+1)}}p_1(t)^{\frac{\beta(t)}{(\beta(t)+1)}} + \ldots + e_n(t)^{\frac{1}{(\beta(t)+1)}}p_n(t)^{\frac{\beta(t)}{(\beta(t)+1)}}\right)^{-1}.$$

В случае производственной функции "затраты-выпуск" (3.1) коэффициент масштаба $A = A(t)$ выражается через коэффициенты продуктивности $c_j = c_j(t)$ и цены $p_j = p_j(t)$ согласно формулам

$$A = A(t) = \frac{1}{(p_1(t)c_1(t) + \ldots + p_n(t)c_n(t))}.$$

Весовые коэффициенты γ_j, $j = 1, \ldots, n$, для производственной функции "затраты-выпуск" представляются соотношениями

$$\gamma_j(t) = \frac{p_j(t)c_j(t)}{(p_1(t)c_1(t) + \ldots + p_n(t)c_n(t))}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

5. Балансовые уравнения

Введем следующие обозначения для уровней инвестиций. Символом $I = I(t)$ обозначим общие инвестиции. Полагаем, что символы $I_j = I_j(t)$ означают уровни инвестиций в факторы производства $x_j = x_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$. Таким образом, имеем балансовое соотношение в инвестициях:

$$I(t) = I_1(t) + \ldots + I_n(t).$$

Вводя относительные уровни инвестиций по отношению к общему объема выпуска $y(t)$, получаем для них следующую связь:

$$s(t) = \frac{I(t)}{y(t)}, \quad s_j(t) = \frac{I_j(t)}{y(t)}, \quad s(t) = s_1(t) + \ldots + s_n(t),$$

$$0 \leq s(t) < 1, \quad 0 \leq s_j(t) \leq s(t), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Символом $Ç = Ç(t)$ обозначим абсолютный уровень потребления.

Принимая во внимание балансовое уравнение для инвестиций и потребления, получаем следующее соотношение: $y(t) = Ç(t) + I(t) = Ç(t) + I_1(t) + \ldots + I_n(t)$. Аналогично, переходя к относительной переменной для уровня потребления $c(t) = Ç(t)/y(t)$, выводим основные балансовые уравнения в виде

$$1 = c(t) + s(t) = c(t) + s_1(t) + \ldots + s_n(t). \tag{5.1}$$

6. Динамика модели и функция полезности

В этом разделе мы дадим описание динамики основных переменных модели.

6.1. Динамика факторов производства

При наличии информации о ценах $p_j = p_j(t)$ и уровнях инвестиций $I_j = I_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, можно пересчитать физические уровни затрат в производственные факторы:

$$\Delta x_j(t) = \frac{I_j(t)}{p_j(t)} = \frac{s_j(t)y(t)}{p_j(t)}. \tag{6.1}$$

Полагаем, что производственные факторы $x_j = x_j(t)$ подвержены эффекту амортизации с заданными коэффициентами $\delta_j = \delta_j(t)$.

Далее, учитывая инвестиции $\Delta x_j(t)$ в производственный фактор j в текущем периоде t как управляющие параметры, можно записать дифференциальные уравнения для динамики системы производственных факторов:

$$\dot{x}_j(t) = \Delta x_j(t) - \delta_j(t)x_j(t), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{6.2}$$

Принимая во внимание выражения (6.1) для затрат производственных факторов через объем выпуска $y(t)$, представим динамику (6.2) в следующем виде:

$$\dot{x}_j(t) = \frac{s_j(t)y(t)}{p_j(t)} - \delta_j(t)x_j(t), \quad j = 1, \ldots, n.$$

На основе соотношений для оптимального значения объемов выпуска (4.1) можно получить уравнения динамики производственных факторов, записанные через затраты $C(t)$:

$$\dot{x}_j(t) = \frac{s_j(t)A(t)C(t)}{p_j(t)} - \delta_j(t)x_j(t), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{6.3}$$

Можно получить также динамику производственных факторов в стандартной форме для задач оптимального управления, используя соотношение (4.2):

$$\dot{x}_j(t) = x_j(t)\Big(\frac{s_j(t)}{\gamma_j(t)}A(t) - \delta_j(t)\Big), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{6.4}$$

6.2. Динамика затрат

Уравнения динамики затрат $C(t)$ выводятся из динамики факторов производства (6.3):

$$\begin{aligned}\dot{C}(t) &= \dot{p}_1(t)x_1(t) + \ldots + \dot{p}_n(t)x_n(t) + p_1(t)\dot{x}_1(t) + \ldots + p_n(t)\dot{x}_n(t)\\ &= \Big(\frac{1}{p_1(t)}\dot{p}_1(t) - \delta_1(t)\Big)p_1(t)x_1(t) + \ldots + \Big(\frac{1}{p_n(t)}\dot{p}_n(t) - \delta_n(t)\Big)p_n(t)x_n(t) + s(t)y(t)\\ &= \Big(\frac{1}{p_1(t)}\dot{p}_1(t) - \delta_1(t)\Big)p_1(t)x_1(t) + \ldots + \Big(\frac{1}{p_n(t)}\dot{p}_n(t) - \delta_n(t)\Big)p_n(t)x_n(t) + s(t)A(t)C(t).\end{aligned} \tag{6.5}$$

Учитывая линейную зависимость стоимости факторов производства $p_j(t)x_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, от общих затрат $C(t)$ (4.2), получаем основное дифференциальное уравнение для динамики затрат:

$$\dot{C}(t) = C(t)\Big(s(t)A(t) + \sum_{j=1}^{n}\gamma_j(t)\Big(\frac{1}{p_j(t)}\dot{p}_j(t) - \delta_j(t)\Big)\Big).$$

Введем обозначения для темпов изменения (роста, падения) цен:

$$r_j(t) = \frac{1}{p_j(t)}\dot{p}_j(t), \quad j = 1, \ldots, n.$$

На основе весов $\gamma_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, заданных соотношениями (4.3), введем средний темп роста цен

$$r(t) = \sum_{j=1}^{n}\gamma_j(t)r_j(t),$$

а также определим среднее значение амортизации

$$\delta(t) = \sum_{j=1}^{n}\gamma_j(t)\delta_j(t).$$

Используя эти обозначения, получаем окончательные соотношения для динамики затрат:

$$\dot{C}(t) = C(t)\big(s(t)A(t) + (r(t) - \delta(t))\big). \tag{6.6}$$

Отметим, что единственное условие для существования решений динамики затрат (6.6), которое надо накладывать на динамику цен $p_j(t)$, коэффициентов амортизации $\delta_j(t)$ и весовых коэффициентов $\gamma_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, — это требование измеримой зависимости от времени t.

Покажем, что для заданных уровней общих инвестиций $s(t)$ динамика факторов производства (6.5) и динамика общих затрат (6.6) однозначным образом определяют структуру инвестиций в производственные факторы $s_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$. Если более точно, то будет справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. *Если уровень общих инвестиций $s(t)$ задан, то структура инвестиций в производственные факторы $s_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, необходимая для поддержания пропорций в динамике модели, пересчитывается согласно соотношениям*

$$s_j(t) = \gamma_j(t)s(t) + \frac{\gamma_j(t)}{A(t)}\big((r(t) - r_j(t)) - (\delta(t) - \delta_j(t))\big) + \frac{1}{A(t)}\dot{\gamma}_j(t), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{6.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим динамику факторов (6.3), из которой следует, что

$$p_j(t)\dot{x}_j(t) = s_j(t)A(t)C(t) - \delta_j(t)\gamma_j(t)C(t), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{6.8}$$

Из формулы (4.2) для стоимости факторов производства можно вывести выражения для их темпов роста:

$$p_j(t)\dot{x}_j(t) = \gamma_j(t)\dot{C}(t) + C(t)\dot{\gamma}_j(t) - C(t)\gamma_j(t)r_j(t), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{6.9}$$

Принимая во внимание динамику затрат (6.6), выводим из формулы (6.9) следующее соотношение:

$$p_j(t)\dot{x}_j(t) = \gamma_j(t)C(t)\left((r(t) - \delta(t)) + s(t)A(t)\right) - C(t)\gamma_j(t)r_j(t) + C(t)\dot{\gamma}_j(t), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{6.10}$$

Исключая подобные члены в формулах (6.8) и (6.10), получаем требуемые соотношения для структуры инвестиций (6.7) в факторы производства. □

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что если полученные уровни инвестиций $s_j(t)$ (6.7) неотрицательны $s_j(t) \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$, то эти инвестиции могут быть осуществлены на основе текущего объема выпуска $y(t)$, и в этом смысле их следует назвать *осуществимыми* инвестициями.

Однако возможны и отрицательные знаки в уровнях инвестиций $s_j(t) < 0$, $j = 1, \ldots, n$. Здесь следует сказать, что в принципе в модели могут быть позволены отрицательные уровни, имея в виду возможность инвестирования в фактор производства x_j не только за счет полученного в текущем периоде продукта $y(t)$, но и за счет использования запасов других производственных факторов x_k, $k = 1, \ldots, n$, $k \neq j$.

З а м е ч а н и е 2. Важно подчеркнуть, что согласно динамике (6.4) траектории факторов производства сохраняют неотрицательные значения $x_j(t) \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$, на всем временном интервале $t \in [t_0, T]$ вне зависимости от знаков инвестиций $s_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$.

6.3. Ограничения на инвестиции и потребление

Полагаем, что существует ограничение на нижний уровень c^0 потребления (прожиточный минимум), заданный в процентах от произведенного продукта:

$$0 < c_0 \leq c(t) \leq 1.$$

Из балансового уравнения (5.1) следует, что имеется верхний возможный уровень инвестиций s^0:

$$0 \leq s(t) \leq s^0 < 1, \quad s^0 = 1 - c^0.$$

6.4. Функция полезности

Введем функцию полезности на втором уровне оптимизации для определения качества модельных траекторий. Будем использовать для этой цели интегральный логарифмический индекс дисконтированного потребления, который согласно балансовому уравнению (5.1) и структуре универсальной производственной функции (4.1) может быть представлен соотношениями

$$J = \int_{t_0}^{T} e^{-\rho t} \ln c(t)dt = \int_{t_0}^{T} e^{-\rho t}\big(\ln y(t) + \ln(1 - s(t))\big)dt$$

$$= \int\limits_{t_0}^{T} e^{-\rho t}\big(\ln A(t) + \ln C(t) + \ln(1 - s(t))\big)dt.$$

Здесь параметр ρ, $\rho > 0$, задает дисконтную ставку.

7. Задача оптимального управления

Рассмотрим задачу оптимального управления для инвестиционного процесса на втором уровне оптимизации. В постановке этой задачи в управляемой системе максимизируется функция полезности

$$J(C(\cdot), s(\cdot), T) = \int\limits_{t_0}^{T} e^{-\rho t}\big(\ln A(t) + \ln C(t) + \ln(1 - s(t))\big)dt \tag{7.1}$$

на траекториях, порожденных динамикой

$$\dot{C}(t) = C(t)\left(A(t)s(t) - \sigma(t)\right). \tag{7.2}$$

Здесь параметр “обобщенной” амортизации затрат $\sigma = \sigma(t)$ определяется формулой

$$\sigma(t) = \delta(t) - r(t).$$

Управляющий параметр инвестиций удовлетворяет ограничениям

$$0 \le s(t) \le s^0 < 1. \tag{7.3}$$

Фазовая переменная $C(t)$ системы (7.2) удовлетворяет начальным условиям

$$C(t_0) = C_0. \tag{7.4}$$

Отметим, что задача (7.1)–(7.4) является классической задачей оптимального управления как с конечным горизонтом $T < +\infty$, так и с бесконечным горизонтом $T = +\infty$ (см. [7; 8]).

8. Оптимальные решения

В этом разделе мы рассмотрим приложение принципа максимума Понтрягина, снабженного условиями трансверсальности, для решения поставленной задачи оптимального управления.

8.1. Гамильтонианы задач оптимального управления

Начнем решение задачи оптимального управления с составления гамильтониана управляемой системы (7.1)–(7.4):

$$\tilde{H}(t, C(t), s(t), \tilde{\psi}(t)) = e^{-\rho t}\big(\ln A(t) + \ln C(t) + \ln(1 - s(t))\big) + \tilde{\psi}(t)C(t)\left(s(t)A(t) - \sigma(t)\right).$$

Здесь параметр $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}(t)$ используется для сопряженной переменной.

Используя замену для сопряженной переменной

$$\psi(t) = e^{\rho t}\tilde{\psi}(t), \tag{8.1}$$

получаем стационарный (недисконтированный) гамильтониан

$$H(t, C(t), s(t), \psi(t)) = \ln A(t) + \ln C(t) + \ln(1 - s(t)) + \psi(t)C(t)\left(s(t)A(t) - \sigma(t)\right), \tag{8.2}$$

который связан с исходным гамильтонианом следующим соотношением:

$$\tilde{H}(t, C(t), s(t), \tilde{\psi}(t)) = e^{-\rho t}H(t, C(t), s(t), \psi(t)).$$

Лемма 1. *Гамильтониан* $H(t, C, s, \psi)$ (8.2) *является строго вогнутой функцией по переменным* C *и* s *для всех значений переменных* t *и* ψ.

Доказательство утверждения прямо вытекает из свойства отрицательной определенности матрицы вторых производных гамильтониана (8.2), которое проверяется с помощью критерия Сильвестра по переменным C и s для всех значений переменных t и ψ.

8.2. Принцип максимума Понтрягина

Следует отметить, что для задачи управления (7.1)–(7.4) выполнены условия теоремы существования (см. [8; 11]). Более того, можно сформулировать необходимые условия оптимальности для задач управления с конечным горизонтом [7] и с бесконечным горизонтом [8; 14] в форме принципа максимума Понтрягина.

Теорема 1. *Пусть* (s^*, C^*) *есть оптимальный процесс задачи управления. Тогда существует сопряженная переменная* $\tilde{\psi}$, *соответствующая процессу* (s^*, C^*) *и удовлетворяющая сопряженному уравнению*

$$\dot{\tilde{\psi}}(t) = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial C}(t, C^*(t), s^*(t), \tilde{\psi}(t))$$

такая, что

1) *процесс* (s^*, C^*) *вместе с сопряженной переменной* $\tilde{\psi}$ *удовлетворяют условию принципа максимума Понтрягина*:

$$\tilde{H}(t, C^*, s^*, \tilde{\psi}) = \max\left\{\tilde{H}(t, C^*, s, \tilde{\psi}),\ s \in [0, s^0]\right\};$$

2) *сопряженная переменная* $\tilde{\psi}$ *принимает строго положительные значения*:

$$\tilde{\psi}(t) > 0 \quad \forall t, \quad t_0 \le t < T, \quad T \le +\infty;$$

3) *сопряженная переменная* $\tilde{\psi}$ *удовлетворяет условию трансверсальности для задачи с конечным горизонтом:*

$$\tilde{\psi}(T) = 0,$$

и для задачи с бесконечным горизонтом:

$$\lim_{t \to \infty} \tilde{\psi}(t) C^*(t) = 0.$$

Замечание 3. Отметим, что для гамильтониана $H(t, C, s, \psi)$ (8.2) динамика сопряженной переменной $\psi(t)$ (8.1) описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{\psi}(t) = \rho\psi(t) - \frac{\partial H}{\partial C}(t, C^*(t), s^*(t), \psi(t)). \tag{8.3}$$

Условие максимума в этом случае имеет вид

$$H(t, C^*, s^*, \tilde{\psi}) = \max\left\{H(t, C^*, s, \tilde{\psi}),\ s \in [0, s^0]\right\}. \tag{8.4}$$

Сопряженная переменная ψ строго положительна:

$$\psi(t) > 0 \quad \forall t, \quad t_0 \le t < T, \quad T \le +\infty.$$

Условие трансверсальности в случае задачи с конечным горизонтом задается соотношением

$$\psi(T) = 0, \tag{8.5}$$

а для задачи с бесконечным горизонтом представляется в виде

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\rho t} \psi(t) C^*(t) = 0. \tag{8.6}$$

8.3. Максимизированный гамильтониан

Вычислим значения максимизированного гамильтониана задачи оптимального управления (7.1)–(7.4):

$$\begin{aligned}\bar{H}(t, C(t), \psi(t)) &= \max_{0\le s\le s^0} \hat{H}(t, C(t), s, \psi(t)) \\ &= \ln A(t) + \ln C(t) - \psi(t)C(t)\sigma(t) + \max_{0\le s\le s^0}\{\ln(1-s) + \psi(t)C(t)A(t)s\}. \end{aligned} \tag{8.7}$$

8.4. Структура оптимального управления

Используя необходимые условия оптимальности, можно получить структуру оптимального управления, которая реализует максимум гамильтониана (8.7):

$$s = \begin{cases} 0, & 1 - \dfrac{1}{\psi(t)A(t)C(t)} < 0; \\ 1 - \dfrac{1}{\psi(t)A(t)C(t)}, & 0 \le 1 - \dfrac{1}{\psi(t)A(t)C(t)} \le s^0; \\ s^0, & 1 - \dfrac{1}{\psi(t)A(t)C(t)} > s^0. \end{cases} \tag{8.8}$$

З а м е ч а н и е 4. Отметим, что благодаря свойству строгой вогнутости гамильтониана $\hat{H}(t, C, s, \psi)$ (8.2) по переменной s, установленному в лемме 1, решение (8.8) необходимых условий оптимальности действительно является единственной точкой максимума.

8.5. Структура максимизированного гамильтониана

Полученные выражения для оптимального управления (8.8) определяют структуру максимизированного гамильтониана, который задается тремя ветвями. Первая ветвь соответствует экстремальному нулевому режиму управления, $s_1 = 0$:

$$\begin{aligned}&\bar{H}_1(t, C(t), \psi(t)) = \ln A(t) + \ln C(t) - \psi(t)C(t)\sigma(t), \\ &1 - \frac{1}{\psi(t)A(t)C(t)} < 0.\end{aligned}$$

Вторая ветвь соответствует регулярному режиму управления, $s_2 = 1 - 1/(\psi(t)A(t)C(t))$:

$$\begin{aligned}&\bar{H}_2(t, C(t), \psi(t)) = -\ln \psi(t) + \psi(t)C(t)(A(t) - \sigma(t)) - 1, \\ &0 \le 1 - \frac{1}{\psi(t)A(t)C(t)} \le s^0.\end{aligned}$$

Третья ветвь определяется экстремальным режимом максимально возможного уровня управления, $s_3 = s^0$:

$$\begin{aligned}&\bar{H}_3(t, C(t), \psi(t)) = \ln A(t) + \ln C(t) + \ln(1 - s^0) + \psi(t)C(t)(A(t)s^0 - \sigma(t)), \\ &1 - \frac{1}{\psi(t)A(t)C(t)} > s^0.\end{aligned}$$

Оказывается, для максимизированного гамильтониана $\bar{H}(t, C, \psi)$ (8.7) выполнено свойство вогнутости по переменной C, которое устанавливается в следующем утверждении.

Лемма 2. *Максимизированный гамильтониан $\bar{H}(t, C, \psi)$ (8.7) является вогнутой функцией по переменной C.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Результат леммы 2 можно получить из того факта, что все три ветки $\bar{H}_i(t, C, \psi)$, $i = 1, 2, 3$, являются вогнутыми функциями по переменной C, которые гладким образом (с непрерывными производными) склеиваются вместе, порождая максимизированный гамильтониан $\bar{H}(t, C, \psi)$ для всех фиксированных значений переменных t и ψ.

8.6. Гамильтоновы системы

Согласно структуре максимизированного гамильтониана $\bar{H}(t,C,\psi)$ (8.7) можно построить серию из трех гамильтоновых систем, $i=1,2,3$, определяемых условиями (8.3), (8.4) принципа максимума Понтрягина:

$$\begin{cases} \dot{C}(t) = C(t)\left(A(t)s_i(t) - \sigma(t)\right), \\ \dot{\psi}(t) = \rho\psi(t) - \dfrac{\partial H_i}{\partial C}(t, C(t), \psi(t)). \end{cases} \tag{8.9}$$

Здесь производные максимизированного гамильтониана $\bar{H}(t,C,\psi)$ (8.7) вычисляются в соответствии с его ветвями, $i=1,2,3$:

$$\frac{\partial \bar{H}_i}{\partial C}(t, C(t), \psi(t)) = \begin{cases} \dfrac{1}{C(t)} - \sigma(t)\psi(t), & i=1, \\ (A(t) - \sigma(t))\psi(t), & i=2, \\ \dfrac{1}{C(t)} + (A(t)s^0 - \sigma(t))\psi(t), & i=3. \end{cases} \tag{8.10}$$

8.7. Анализ гамильтоновых систем

Введем новую переменную $x=x(t)$ для обозначения *обобщенных* затрат производственных факторов в принципе максимума Понтрягина:

$$x = x(t) = C(t)\psi(t).$$

Можно вывести уравнение гамильтоновой динамики для обобщенных затрат $x(t)$.

Предложение 2. *Согласно гамильтоновой динамике* (8.9) *обобщенные затраты* $x(t)$ *удовлетворяют следующему дифференциальному уравнению:*

$$\dot{x}(t) = \rho x(t) - 1. \tag{8.11}$$

Доказательство этого утверждения прямо вытекает из того факта, что согласно соотношениям (8.10) для всех ветвей гамильтоновой динамики, $i=1,2,3$, имеется следующая цепочка равенств:

$$\dot{x}(t) = \dot{C}(t)\psi(t) + C(t)\dot{\psi}(t) = (\rho - \sigma(t) + A(t)s_i(t))C(t)\psi(t) - C(t)\frac{\partial H_i}{\partial C}(t, C(t), \psi(t)) = \rho x(t) - 1.$$

$\square$

Выводится также общее решение уравнения динамики (8.11) обобщенных затрат.

Предложение 3. *Общее решение для обобщенных затрат, подчиняющихся гамильтоновой динамике* (8.9)*, представляется соотношением*

$$x(t) = \frac{1}{\rho} + Be^{\rho t}.$$

Здесь символом B обозначена константа, значение которой может быть определено либо из условий трансверсальности (8.5) *для задачи с конечным горизонтом* $B = -\dfrac{e^{-\rho T}}{\rho}$*, либо из условий трансверсальности* (8.6) *для задачи с бесконечным горизонтом* $B=0$.

Доказательство этого утверждения вытекает из формулы Коши для дифференциального уравнения (8.11).

З а м е ч а н и е 5. Отметим, что решение уравнения гамильтоновой динамики (8.9) для обобщенных затрат в случае задачи с конечным горизонтом описывается соотношением

$$x(t) = \frac{1}{\rho}\left(1 - e^{\rho(t-T)}\right), \tag{8.12}$$

а в случае задачи с бесконечным горизонтом определяется формулой

$$x(t) = \frac{1}{\rho}. \tag{8.13}$$

8.8. Оптимальное управление

Получим здесь аналитические соотношения для оптимального программного управления. Для того чтобы сделать это, необходимо подставить решения (8.12), (8.13) уравнения гамильтоновой динамики (8.9) в структуру оптимального управления (8.8).

Для случая задачи с конечным горизонтом оптимальное программное управление задается в виде

$$s^*(t) = \begin{cases} 0, & 1 - \dfrac{\rho}{A(t)(1 - e^{\rho(t-T)})} < 0; \\ 1 - \dfrac{\rho}{A(t)(1 - e^{\rho(t-T)})}, & 0 \le 1 - \dfrac{\rho}{A(t)(1 - e^{\rho(t-T)})} \le s^0; \\ s^0, & 1 - \dfrac{\rho}{A(t)(1 - e^{\rho(t-T)})} > s^0. \end{cases} \tag{8.14}$$

Для случая задачи с бесконечным горизонтом оптимальное программное управление описывается соотношениями

$$s^*(t) = \begin{cases} 0, & 1 - \dfrac{\rho}{A(t)} < 0; \\ 1 - \dfrac{\rho}{A(t)}, & 0 \le 1 - \dfrac{\rho}{A(t)} \le s^0; \\ s^0, & 1 - \dfrac{\rho}{A(t)} > s^0. \end{cases} \tag{8.15}$$

Отметим, что, получив оптимальные инвестиции $s^*(t)$, можно выполнить обратный ход от второго уровня оптимизации к первому уровню и определить структуру оптимальных уровней инвестиций $s_j^*(t)$ в факторы производства согласно условиям пропорциональности. Более точно можно сформулировать следующий результат.

Предложение 4. *Если оптимальные инвестиции* $s^* = s^*(t)$ *определены либо соотношением* (8.14) *для задачи с конечным горизонтом, либо соотношением* (8.15) *для задачи с бесконечным горизонтом, то оптимальные инвестиции* $s_j^*(t)$ *в производственные факторы, которые поддерживают пропорциональное развитие системы, пересчитываются по формулам* (6.7) *в следующем виде*:

$$s_j^*(t) = \gamma_j(t)s^*(t) + \frac{\gamma_j(t)}{A(t)}\left((r(t) - r_j(t)) - (\delta(t) - \delta_j(t))\right) + \frac{1}{A(t)}\dot{\gamma}_j(t), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Сделаем важное наблюдение о структуре оптимального управления (8.14) для задачи с конечным горизонтом.

З а м е ч а н и е 6. Если коэффициент масштаба $A = A(t)$ (4.1) в универсальной производственной функции удовлетворяет свойству ограниченности в задаче с конечным горизонтом T :

$$0 < A(t) \le A^0, \quad t_0 \le t \le T,$$

то существует непустой интервал времени

$$T - \frac{1}{\rho} \ln \Big(\frac{A^0}{A^0 - \rho} \Big) \leq t \leq T,$$

на котором оптимальные инвестиции $s^*(t)$ принимают нулевые значения

$$s^*(t) \equiv 0.$$

Это означает, что в задачах с конечным горизонтом оптимальные инвестиции неизбежно вырождаются в нулевые уровни, а произведенный продукт должен быть полностью потреблен, $y(t) = Ç(t)$, на некотором интервале времени, близком к моменту окончания T процесса управления.

8.9. Достаточные условия оптимальности в принципе максимума

Сформулируем результат, который обеспечивает достаточные условия оптимальности для траекторий, удовлетворяющих принципу максимума Понтрягина.

Предложение 5. *Благодаря свойству вогнутости максимизированного гамильтониана* $\bar{H}(t, C, \psi)$ (8.7) *по переменной C, полученному в лемме, принцип максимума Понтрягина выделяет траектории, являющиеся оптимальными для задачи управления* (7.1)–(7.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. этого утверждения проводится аналогично рассуждениям, предложенным в работе [14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Arrow K.J.** Production and capital. Collected papers. Cambridge; Massachusetts; London: The Belknap Press of Harvard University Press, 1985. Vol. 5. 496 p.
2. **Barro R.J., Sala-i-Martin X.** Economic growth. New York: McGraw-Hill, 1995. 672 p.
3. **Grossman G.M., Helpman E.** Innovation and growth in the global economy. Cambridge; Massachusetts: MIT Press, 1991. 359 p.
4. **Shell K.** Applications of Pontryagin's maximum principle to economics // Mathematical Systems Theory and Economics. Berlin: Springer Verlag, 1969. Vol. 1. P. 241–292.
5. **Solow R.M.** Growth theory: An Exposition. New York: Oxford Univ. Press, 1970. 109 p.
6. **Интрилигатор М.** Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: АЙРИС ПРЕСС, 2002. 553 с.
7. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
8. **Асеев С.М., Кряжимский А.В.** Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Тр. МИАН. 2007. Т. 257. С. 5–271.
9. **Aseev S.M., Veliov V.M.** Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems with dominating discount // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Ser. B: Applications & Algorithms. 2012. Vol. 19, no. 1-2. P. 43–63.
10. **Nikol'skii M.S.** Investigation of the continuity and Lipschitz properties for the Bellman function in some optimization problems on the semi-infinite interval $[0, +\infty)$ // Diff. Eq. 2002. Vol. 38, no. 11. P. 1599–1604.
11. **Balder E.J.** An existence result for optimal economic growth problems // J. Math. Anal. Appl. 1983. Vol. 95. P. 195–213.
12. **Tarasyev A.M., Watanabe C.** Optimal dynamics of innovation in models of economic growth // J. Math. Anal. Appl. 2001. Vol. 108. P. 175–203.
13. **Kryazhimskiy A.V., Watanabe C.** Optimization of technological growth. Kanagawa: GENDAITOSHO, 2004. 392 p.
14. **Красовский А.А., Тарасьев А.М.** Свойства гамильтоновых систем в принципе максимума Понтрягина для задач экономического роста // Тр. МИАН. 2008. Т. 262. С. 127–145.

15. **Krasovskii A.A., Tarasyev A.M.** An algorithm for construction of optimal timing solutions in problems with a stochastic payoff function // Appl. Math. Comput. 2008. Vol. 204, iss. 2. P. 632–643.
16. **Krasovskii A.A., Kryazhimskiy A.V., Tarasyev A.M.** Optimal control design in models of economic growth // Evolutionary methods for design, optimization and control / eds. P. Neittaanmaki, J. Periaux, T. Tuovinen. Barcelona: CIMNE, 2008. P. 70–75.
17. **Crespo Cuaresma J., Palokangas T., Tarasyev A.** Dynamic systems, economic growth and the environment. Heidelberg; New York; Dordrecht; London: Springer, 2010. 289 p. (Dynamic Modeling and Econometrics in Economics and Finance.)
18. **Crespo Cuaresma J., Palokangas T., Tarasyev A.** Green growth and sustainable development. Heidelberg; New York; Dordrecht; London: Springer, 2013. 226 p. (Dynamic Modeling and Econometrics in Economics and Finance.)
19. **Тарасьев А.М., Усова А.А.** Стабилизация гамильтоновой системы для построения оптимальных траекторий // Тр. МИАН. 2012. Т. 277. С. 257–274.
20. Построение оптимальных траекторий интегрированием гамильтоновой динамики в моделях экономического роста при ресурсных ограничениях / А.М. Тарасьев, А.А. Усова, О.В. Русских, В. Ванг // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 258–276.
21. **Tarasyev A.M., Usova A.A., Shmotina Yu.V.** Projection of the Russian economic development in the framework of the optimal control model by investments in fixed assets // Economy of Region. 2014. No. 3. P. 265–273.
22. Dynamic structure, exogeneity, phase portraits, growth paths, and scale and substitution elasticities / B.S. Jensen, P.K. Alsholm, M.E. Larsen, J.M. Jensen // Review of International Economics. 2005. Vol. 13, no. 1. P. 59–89.
23. **Hofbauer J., Sigmund K.** The theory of evolution and dynamical systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1988. 341 p.
24. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О дифференциально-эволюционных играх // Тр. МИАН. 1995. Т. 211. С. 257–287.
25. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.

Кряжимский Аркадий Викторович
академик РАН
главный научный сотрудник
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
Международный институт прикладного системного анализа (IIASA)

Поступила 16.02.15

Тарасьев Александр Михайлович
д-р физ.-мат. наук
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Международный институт прикладного системного анализа (IIASA)
e-mail: tam@imm.uran.ru, tarasiev@iiasa.ac.at

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 519.857.3

ЗАДАЧА О НЕСТОЛКНОВЕНИЯХ ПРИ ГРУППОВОМ ДВИЖЕНИИ В УСЛОВИЯХ ПРЕПЯТСТВИЙ[1]

А. Б. Куржанский

Статья посвящена задаче координированного управления стаей управляемых систем, совершающих совместное движение к целевому множеству в условиях нестолкновения ее элементов. В ней приводится одна из подзадач этой общей проблемы. А именно по ходу движения к цели члены группы должны находиться внутри виртуального эллипсоидального контейнера, образующего эталонное движение (трубку), уклоняющуюся от заранее известных препятствий, используя свою реконфигурацию. В ответ на это стая должна перестраиваться внутри контейнера, избегая взаимных столкновений. Поведению стаи именно внутри контейнера, при координации своих движений с эволюцией контейнера, посвящена настоящая работа.

Ключевые слова: групповое управление, стая, целевое множество, эллипсоидальная траектория, эталонное движение, нестолкновение, препятствия, координация.

A. B. Kurzhanskii. Problem of collision avoidance for a group motion with obstacles.

The paper is devoted to the problem of coordinated control for a flock of control systems moving jointly towards a target set with the requirement of noncollision of its elements. In the present paper, we consider its subproblem, which is formulated as follows. During the motion to the target, the members of the group must stay within a virtual ellipsoidal container, which forms a reference motion ("tube"). The container avoids obstacles, which are known in advance, by means of reconfigurations. In response, the flock must rearrange itself inside the container, avoiding collisions between its members. The present paper is concerned with the behavior of the flock inside the container, when the flock coordinates its motions according to the evolution of the container.

Keywords: group control, flock, target set, ellipsoidal trajectory, reference motion, noncollision, obstacles, coordination.

Введение

В данной публикации приводится подзадача из числа указанных в статье [1], посвященной общему решению задачи группового управления целевым движением в условиях препятствий. А именно рассматриваемые в ней групповые движения реализуются при помощи виртуального эллипсоидального контейнера $E_c[t]$, в котором они должны находиться во время движения контейнера к целевому множеству. Для обеспечения нестолкновений элементов группы ("стаи") во время подобного движения предполагается, что каждый из этих элементов является центром шара с *радиусом безопасности* $r > 0$ и внутренности шаров не должны пересекаться.Таким образом, элементы группового движения должны передвигаться, сохраняя *свойство вместимости стаи*, — находиться внутри контейнера $E_c[t]$ в условиях *взаимного нестолкновения.* При этом ключевые вопросы о поведении стаи именно внутри контейнера и возникающие здесь многомерные задачи еще не были достаточно охвачены. Им посвящена настоящая статья.

Особенность рассматриваемой здесь ситуации состоит в том, что контейнер $E_c[t]$ ради прохождения среди препятствий, должен претерпевать реконфигурацию с сохранением своего объема в заданных пределах, обеспечивая вместимость стаи. В ответ на это элементы стаи должны осуществлять перегруппировку внутри контейнера, чтобы оставаться в нем, не допуская взаимных столкновений. В настоящей статье поясняется конструирование эллипсоидальной траектории ("трубки") $E_c[t]$, образующей *эталонное движение,* которая к началу

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-05950а) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-2692.2014.1)

движения стаи предполагается известной. Вычисление таких трубок изложено в публикациях [2–4].

Таким образом, данная работа посвящена синтезу управлений именно для реальных движений стаи внутри контейнера $E_c[t]$, достигающих целевого множества вместе с содержащим их виртуальным контейнером. Рассматриваемые движения моделируются, как и в [1], на основе гамильтонова формализма в виде соответствующих уравнений динамического программирования Гамильтона — Якоби — Беллмана (см. [2; 5–7]). В условиях негладкости решения этих уравнений могут быть интерпретированы в обобщенном минимаксном смысле А. И. Субботина [6] или эквивалентном "вязкостном" смысле [8]. Такие подходы дополняются методами вариационного анализа и теории минимаксных задач [9–12]. Среди решений задач группового управления в иных постановках отметим [13–15].

1. Групповое управление: проблема нестолкновения

Следуя статье [1], напомним упомянутую в ней основную задачу. Рассмотрим уравнения совместных движений набора однотипных управляемых систем

$$\ddot{x} = \mathbf{f}(t, x, \dot{x}, \mathbf{u}), \quad x \in \mathbb{R}^{nm}, \quad n \leq 3, \quad u \in \mathbb{R}^{nm}, \tag{1.1}$$

$$x^{(j)} = \begin{pmatrix} x_1^{(j)} \\ \vdots \\ x_n^{(j)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} A(t)x^{(1)} + C(t)\dot{x}^{(1)} + B(t)u^{(1)}, \\ \vdots \\ A(t)x^{(m)} + C(t)\dot{x}^{(m)} + B(t)u^{(m)}, \end{pmatrix}, \quad j = 1, \ldots, m,$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(m)} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathcal{P} \\ \vdots \\ \mathcal{P} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u} \in \mathbf{P}, \qquad u^{(j)} \in \mathbb{R}^n,$$

с непрерывными коэффициентами $A(t), B(t), C(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ на рассматриваемом интервале $t \in [t_0, \vartheta]$, длина которого предполагается достаточной для реализации всех конструируемых движений.

Введем обозначения

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \quad \mathbf{x}^{(m)}\}, \quad \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2n \times m}, \quad \mathbf{x}^{(j)} \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \mathbf{x}^{(j)\prime} = \{x^{(j)\prime}, \dot{x}^{(j)\prime}\},$$

$$x^{(j)\prime} = \{x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\}, \quad \dot{x}^{(j)\prime} = \{\dot{x}_1^{(j)}, \ldots, \dot{x}_n^{(j)\prime}\} \ \ \forall j.$$

Здесь штрих означает транспонирование. Тогда

$$x^{(j)} = N_s \mathbf{x}^{(j)}, \quad \dot{x}^{(j)} = N_v \mathbf{x}^{(j)}, \quad N_s = \{I, \mathcal{O}\}, \quad N_v = \{\mathcal{O}, I\}; \quad N_s, N_v \in \mathbb{R}^{n \times 2n},$$

где I — единичная матрица, $\mathcal{O}$ — нулевая матрица соответствующих размеров.

Уравнение (1.1) отражает совместное движение m систем с фазовыми векторами $x^{(j)}, \dot{x}^{(j)} \in \mathbb{R}^n$ и управлениями $u^{(j)} \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \ldots, n$, подверженными жестким геометрическим ограничениям

$$u^{(j)} \in \mathcal{P}, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{1.2}$$

где множество $\mathcal{P} = -\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ является выпуклым и компактным, содержащим внутреннюю точку $0 \in \mathrm{int}\mathcal{P}$.

Система (1.1) предполагается *вполне управляемой*, допускающей при ограничении (1.2) условие $\dot{x}^{(j)}(t) = \mathrm{const}$ и достижимость любого $x^{(j)} \in \mathbb{R}^n$ за конечное время. Подобные условия заведомо выполняются при $p = n, A(t) \leq 0, C(t) \leq 0$.

Для обеспечения нестолкновения элементов группового движения — траекторий $x^{(j)}(t)$ — каждое отдельное движения $x^{(j)}(t)$ представлено в виде подвижного виртуального евклидова шара $\mathcal{B}_r(x^{(j)}(t))$ с реальным центром $x^{(j)}(t)$ и радиусом безопасности $r > 0$. Тогда условие нестолкновения шаров имеет вид

$$D\big(\mathcal{B}_r(x^{(j)}(t)), \mathcal{B}_r(x^{(k)}(t))\big) \geq 0, \quad j \neq k, \quad j,k = 1,\ldots,m, \quad t \in [t_0, \vartheta], \tag{1.3}$$

где

$$D(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) = \max\{0, d(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)\}$$

— евклидово расстояние между двумя выпуклыми компактными множествами $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$, причем

$$d(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) = \inf\big\{\|z^* - z^{**}\| \mid z^* \in \mathcal{X}_1, z^{**} \in \mathcal{X}_2\big\}.$$

Заметим, что $D(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) = 0$ возможно лишь при касании этих множеств, которое не запрещено.

Пусть $\mathcal{E}(q, Q) = \{q_0 \in \mathbb{R}^n : \langle q_0 - q, Q^{-1}(t)(q_0 - q)\rangle \leq 1\}$ означает невырожденный эллипсоид с центром q и матрицей конфигураций $Q = Q' > 0$.

Наряду с уравнением (1.1) задано виртуальное эллипсоидальнозначное движение (“эталонная трубка”) $E_c[t] = \mathcal{E}(q_c(t), Q_c(t))$, стартующее из начальной позиции $E_c[t_0] = E^0$ и завершающееся в конечной позиции $E_f = E_c[\vartheta] \subseteq \mathcal{M} = \mathcal{E}(m, M), M = M' > 0$, где $\mathcal{M}$ — заданный эллипсоид. По ходу движения эллипсоидальная трубка $E_c[t]$ избегает пересечений с заданными постоянными препятствиями $\mathcal{E}(q^{(i)}, Q^{(i)})$:

$$E_c[t] \cap \mathcal{E}(q^{(i)}, Q^{(i)}) = \varnothing \ \ \forall i = 1,\ldots,i_o, \ \forall t \in [t_0, \vartheta],$$

сохраняя свои размеры, а именно удовлетворяя ограничениям

$$k_-^2 \leq \mathrm{vol}\mathcal{E}(q_c(t), Q_c(t)) \leq k_+^2 \tag{1.4}$$

по объему. Этот объем $\mathrm{vol}\mathcal{E}(0, Q_c(t)) = k_v\{\Pi\lambda_j \mid j = 1,\ldots,m\}$, где k_v — коэффициент, указанный ниже, $\lambda_j = \lambda_j(Q_c(t))$ — собственные числа матрицы $Q_c(t) = Q_c'(t) > 0$:

$$\lambda_- = \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n = \lambda_+.$$

Допустимые пределы объема контейнера

$$k_-^2 \leq \{\Pi\lambda_j \mid j = 1,\ldots,m\} \leq k_+^2$$

определяются условиями вместимости стаи в контейнер при реконфигурациях, необходимых по ходу движения для избежания пересечений с препятствиями.

Как приведено в статье [1], трубка $E_c[t] = \mathcal{E}(q_c(t), Q_c(t))$ является управляемой, однако подробное решение задачи об управлении ею выходит за рамки данной работы. Эта задача была рассмотрена в статьях [3; 4]. В настоящей же статье указана схема конструирования трубки $E_c[t]$, после чего она далее считается известной.

Общая задача статьи [1] теперь сводится к следующей. Перепишем систему (1.1) в новых обозначениях. Поскольку каждый член группы движений, обозначенный ранее как $x^{(j)}$, удовлетворяет линейному уравнению вида

$$\dot{x}_1^{(j)} = x_2^{(j)}, \quad \dot{x}_2^{(j)} = f(t, \mathbf{x}^{(j)}, u), \quad j = 1,\ldots,m,$$

система (1.1) фактически допускает представление в виде матричного уравнения.

Действительно, обозначим

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{X}) = \{F(t)\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, F(t)\mathbf{x}^{(m)}\}, \quad \mathbf{B}(t) = \{B(t), \ldots, B(t)\}, \quad B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m},$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ A(t) & C(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(t, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \mathcal{O} \\ \mathbf{B}(t) \end{pmatrix}\mathbf{u}, \quad N = \begin{pmatrix} N_s \\ N_v \end{pmatrix}.$$

Представим $\mathbf{F}(t, \mathbf{X})$, используя дополнительные обозначения. Пусть $\otimes$ означает Кронекерово произведение матриц. Тогда символ

$$\bar{A} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}^{(i)} \otimes (A\mathbf{e}^{(i)}),$$

где $\mathbf{e}^{(i)}$ — взаимно ортогональные единичные орты в прямоугольной системе координат, будет означать вектор, полученный путем вытягивания столбцов $n \times n$-матрицы A в n^2-мерный вектор, один под другим, начиная с первого. Тогда обозначим $2nm$-вектор $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{X}}$. Аналогично пусть $n \times nm$-матрица $N\mathbf{F} = \{NF, \ldots, NF\}$ и символ $\overline{N\mathbf{F}}$ означает $nm \times n$-матрицу, полученную из выпрямленной матрицы $N\mathbf{F}$. Поэтому в рассматриваемой системе под первой $n \times n$-матрицей $NF(t)$ стоит снова $NF(t)$ и так далее, вплоть до m-й $NF(t)$.

Далее, пусть $I^{n\times n}_{m\times m}(i)$ означает блочную $nm \times nm$-матрицу, содержащую m диагональных $n \times n$ блоков, где блок i — единичная $n \times n$-матрица, а остальные блоки нулевые. Тогда выражение $\sum_1^m I^{n\times n}_{m\times m}(i)\overline{\mathbf{F}}(t)$ представляет собой блочную $mn \times mn$-матрицу, содержащую m диагональных $n \times n$-блоков $NF(t)$. Аналогично поступаем для $n \times mn$-матрицы $\mathbf{B}(t)$ и $mn \times n$-матрицы $\overline{\mathbf{B}}(t)$ будет получена из $\mathbf{B}(t)$ подобно предыдущему случаю. Выражение $\sum_1^m I^{n\times p}_{m\times m}(i)\overline{\mathbf{B}}(t)$ тогда представляет собой блочную $mn \times mp$-матрицу, содержащую m диагональных $n \times p$-блоков $B(t)$.

Теперь исходная система примет матричный вид

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}) + \mathbf{B}(t, \mathbf{u}). \tag{1.5}$$

Далее, пусть

$$N\mathbf{X} = \begin{cases} N_s\mathbf{X} = \mathbf{X}_s, \\ N_v\mathbf{X} = \mathbf{X}_v, \end{cases} \qquad \bar{\mathbf{X}}_s = \mathbf{x}_s, \;\; \bar{\mathbf{X}}_v = \mathbf{x}_v.$$

Тогда в векторном варианте предыдущая система имеет вид

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_v \\ A(t)\mathbf{x}_s + C(t)\mathbf{x}_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{O} \\ \overline{\mathbf{B}(t)\mathbf{u}} \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

$$\overline{\mathbf{B}(t)\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^{m} I^{n\times p}_{m\times m}(i)\mathbf{B}(t, \mathbf{u}).$$

Задача H (*О групповом управлении внутри контейнера*).

Пусть заданы система (1.5) группового управления и виртуальное “эталонное” эллипсоидальное движение $E_c[t] = \mathcal{E}(q_c(t), Q_c(t)),\ t \in [t_0, \vartheta]$.

Пусть начальное состояние (*позиция*) $\{t_0, \mathbf{X}[t_0]\}$ системы (1.5) удовлетворяет следующим “свойствам стаи”:

CC(i) $\mathcal{B}_r(x^{(j)}(t_0)) \subset E_c[t_0],\ \dot{x}^{(j)}(t_0) = \dot{q}(t_0) = 0,\ j = 1, \ldots m,$

CC(ii) $D(\mathcal{B}_r(x^{(j)}(t_0))),\ \mathcal{B}_r(x^{(k)}(t_0)) \geq 0,\ j \neq k,\ j, k = 1, \ldots, m.$

В условиях ограничений (1.2) в задаче H требуется найти управления $u^{(i)}(t, \mathbf{X})$, переводящие стаю $\mathbf{X}(t_0) = \{\mathbf{x}^{(1)}(t_0), \ldots, \mathbf{x}^{(m)}(t_0)\}$ в конечное состояние $\mathbf{X}(\vartheta)$, сохраняя условия включения стаи в трубку $E_c[t]$ — ограничения

$$\bigcup\{\mathcal{B}_r(x^{(j)}(t)),\ j = 1, \ldots m\} \subset E_c[t], \quad t \in [t_0, \vartheta], \tag{1.7}$$

и выполняя условия нестолкновений внутри стаи — ограничения

$$D\big(\mathcal{B}_r(x^{(j)}(t)), \mathcal{B}_r(x^{(k)}(t))\big) \geq 0, \quad j \neq k, \quad j, k = 1, \ldots, m, \quad t \in [t_0, \vartheta]. \tag{1.8}$$

Конечное состояние $\mathbf{X}(\vartheta)$ определяется включением

$$\mathbf{X}(\vartheta) \subset \bigcup\{\mathcal{B}_r(x^{(j)}(\vartheta)),\ j = 1, \ldots m\} \subset E_c[t] = E_f[\vartheta] \subseteq \mathcal{E}(m, M) \tag{1.9}$$

и терминальным ограничением на скорости

$$\mathcal{O} \leq \|\dot{x}^{(j)}(\vartheta) - \dot{q}(\vartheta)\| \leq \delta_f^2, \quad j = 1, \dots, m. \tag{1.10}$$

Чтобы обеспечить вместимость элементов стаи, находящейся в $E_c[t]$, здесь указаны внутренние ограничения (1.3). Вместе с внешними (1.7) они реализуют требование сохранять размеры эллипсоида в предписанных пределах вдоль реализуемого движения. Условия (1.7), (1.3) определяют выбор k_-, k_+ в ограничениях (1.4).

Введенный ранее эллипсоид $\mathcal{E}(m, M) \subseteq \mathbb{R}^n$ означает терминальное *целевое множество*, не пересекающееся с эллипсоидами

$$\mathcal{E}(q^{(i)}, Q^{(i)}), \quad i = 1, \dots, i_o,$$

— постоянными *препятствиями* на пути группового движения, отстоящими друг от друга не менее чем на $2r + \sigma, \sigma > 0$.

Параметры $q_c(t)$, $Q_c(t)$ контейнера $E_c[t]$ предполагаются управляемыми в силу уравнений вида

$$\ddot{q}_c = v, \ \langle v, v\rangle \leq \mu^2, \quad \mathbf{q}_c(t_0) = \mathbf{q}_c^0, \tag{1.11}$$

$$\dot{Q}_c(t) = T(t)Q_c(t) + Q_c(t)T'(t) + B(t)V(t)B'(t), \quad trV'V \leq \nu^2, \tag{1.12}$$

при $\mathbf{q}_c' = \{q, \dot{q}\}$, $Q_c(t_0) = Q_c^0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Таким образом, $\mathcal{E}(q_c(t), Q_c(t)) = E_c[t]$ изображает виртуальное движение, реализуемое эллипсоидальнозначной траекторией, где $v \in \mathbb{R}^n$ — управление траекторией центра $q(t)$, $V(t)$ — управление матрицей конфигураций $Q_c(t)$. При этом управление $v(t)$ ответственно за направление движения эллипсоида, управление $V(t)$ — за его конфигурацию и ориентацию. Оно, в частности, должно обеспечивать прохождение $E_c[t]$ между препятствиями, не нарушая требуемых размеров (1.4), за счет реконфигурации матрицы $Q_c(t)$.

Итак, рассматривается задача целевого управления (1.7)–(1.10) следующего вида. Эллипсоид $E_c[t]$ должен совершать движение в течение интервала $[t_0, \vartheta]$, от начального состояния $E_c[t] = \mathcal{E}(q_c(t_0), Q_c(t_0))$ до конечного $E_f[\vartheta] = \mathcal{E}(q_c(\vartheta), Q_c(\vartheta)) \subseteq \mathcal{E}(m, M)$, маневрируя между известными препятствиям $\mathcal{E}(q^{(i)}, Q^{(i)}), \ i = 1, \dots, k$, сохраняя объем в заданных пределах (1.4), обеспечивающих свойства стаи, находящейся внутри. В условиях непересечения трубки $E_c[t]$ с препятствиями решение задачи управления ее движением должно допускать реконфигурацию контейнера $E_c[t]$ при указанных выше ограничениях. Следовательно, реализации движений непересекающихся шаров $\mathcal{B}_r(x^{(j)}(t))$ внутри контейнера должны быть *координированы* как с движением $E_c[t]$, так и между собой. В настоящей статье задача синтеза таких координированных управлений рассматривается при полной информации о текущих координатах всех задействованных движений.

Перейдем к строгой постановке задачи, рассматривая ее далее в *трехмерном пространстве* по координатам положения $\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_v \in \mathbb{R}^3, \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^6$ и при *четном* размере m стаи.

2. Траектория эллипсоидального контейнера

Опишем гарантированные размеры и траекторию контейнера $E_c[t]$, обеспечивающие разрешимость поставленных задач.

Начальное состояние $E_c[t_0]$ контейнера определим следующим образом. Рассмотрим прямоугольный параллелотоп в $\mathbb{R}^3$ в виде

$$\mathcal{P}(p, P, \alpha) = \Big\{x : x = p + \sum_{i=1}^{m} \xi_i \alpha_i p^{(i)} \mid \alpha_i \geq 0, \ \ \xi = \{-1, 1\}\Big\}.$$

где $P = \{p^{(1)}, \dots, p^{(m)}\}$, причем $p^{(i)} = \mathbf{e}^{(i)}$ — взаимно ортогональные единичные орты в прямоугольной системе координат и векторы $p, \alpha, \xi \in \mathbb{R}^3$. Начальные размеры $\mathcal{P}(p, P, \alpha)$ определяются условием вместимости стаи — набора из m непересекающихся шаров $\mathcal{B}_r(x^{(i)}), \ i = 1, \dots, m$.

Каждому шару $\mathcal{B}_r(0) \subset \mathbb{R}^3$ поставим в соответствие куб $C_r(0)$ размеров $2r \times 2r \times 2r$, туго облегающий $\mathcal{B}_r(0)$. При заданных m элементах стаи в качестве начальной позиции системы рассмотрим параллелотоп $\mathcal{P}[t_0] = \mathcal{P}(p, P, \alpha)[t_0]$ наименьшего объема, составленный из таких кубов и содержащий стаю — внутри каждого куба по шару с центром $x^{(i)}$, элементом стаи. При этом, в зависимости от m, некоторые из кубов могут остаться пустыми.

Так, в трехмерном пространстве при $m = 6$ в качестве такого параллелотопа можем взять

$$\mathcal{P}[t_0] = \mathcal{P}(p, P, \alpha)[t_0] = p^0 + \cup\{C_r^i = C_r(x^{(i)}),\ i = 1, \dots, 6\},\ p^0 = p(t_0),$$

полагая

$$x^{(1)} = \{-2, -1, r\}, \quad x^{(2)} = \{0, -1, r\}, \quad x^{(3)} = \{2, -1, r\},$$
$$x^{(4)} = \{-2, 1, r\}, \quad x^{(5)} = \{0, 1, r\}, \quad x^{(6)} = \{2, 1, r\}$$

и все кубы C_r^i занятыми. Его объем $\mathrm{vol}\mathcal{P}[t_0] = 6r \times 4r \times r$.

Далее, определим $E_c^0[t_0] = \mathcal{E}(q_c(t_0), Q_c(t_0))$ как эллипсоид наименьшего объема, содержащий $\mathcal{P}[t_0] = \mathcal{P}(p, P, \alpha)[t_0]$. Для параллелотопа $\mathcal{P}[t_0]$ это будет при $p(t_0) = q_c^0 = q_c(t_0)$ и $Q_c^{-1}(t_0) = I[\alpha^2]$, где $I[\alpha^2]$ — диагональная матрица с элементами $3\alpha_i^2(t_0)$ по диагонали. Тогда

$$\mathcal{P}[t_0] \subset E_c^0[t_0], \quad \mathrm{vol}\mathcal{P}[t_0] = \min.$$

Заметим, что для m-мерного эллипсоида при объеме $\mathrm{vol}\mathcal{P}[t_0] = 2^m \prod \alpha_i(t_0), i = 1, \dots, m$, имеем $\mathrm{vol}E_c^0[t_0] = k_v \prod_1^m \alpha_i(t_0),\ \ k_v = \pi^{m/2}/\Gamma(m/2 + 1)$.

В указанном выше трехмерном случае имеем, при объеме $\mathrm{vol}\mathcal{P}[t_0] = (6 \times 4 \times 2)r^3$, что оптимальный по минимуму объема внешний эллипсоид будет определяться через $q_c^0 = p^0, Q_c(t_0) \in \mathbb{R}^{3\times 3}; (\alpha^2)'(t_0) = \{9r^2, 4r^2, r^2\}$, при объеме $\mathrm{vol}E_c^0[t_0] = (4/3)(3 \times 2 \times 1)3\sqrt{3}\pi r^3 = 24\sqrt{3}\pi r^3$.

Начальные скорости будем считать равномерно ограниченными:

$$\|\dot{x}^{(j)}(t_0)\| \le \delta_0^2, \quad \dot{q}_c(t_0) = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

2.1. Схема движения контейнера со стаей

Напомним, что эталонное эллипсоидальное движение $E_c^0[t] = \mathcal{E}(q_c(t), Q_c(t))$, исходящее из состояния $E_c^0[t_0]$, подчиняется уравнениям (1.11), (1.12) с управлениями v, V. Оно должно совершать движение к целевому множеству $\mathcal{M} = \mathcal{E}(m, M)$, обеспечивая условие на скорости (1.10) и передвигаясь таким образом в пространстве размерности $\mathbb{R}^n$, избегая внешние препятствия в виде непересекающихся невырожденных эллипсоидов $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subset \mathbb{R}^{n\times n}$, ограниченных сферами радиуса $2rm$. Заметим, что трубка $E_c^0[t]$ определена в n-мерном пространстве положений при фазовом ограничении на скорости $\dot{x}$. Будем считать, что вся трубка лежит, как и целевое множество $\mathcal{M}$, в области $x_3 \ge 0$.

При конструировании движения $E_c^0[t] = \mathcal{E}(q_c, Q_c(t))$ первоначально определяется траектория центра $q_c(t)$, которая делится на три этапа : начальный участок $[t_0, t_s^-]$ движения без учета препятствий, участок $[t_s^-, t_s^+]$ прохождения препятствий и участок $[t_s^+, \vartheta]$ движения после препятствий, завершающегося попаданием в центр целевого множества : $q_c(\vartheta) = m$. Эти этапы пояснены ниже. К моменту t_s^- эллипсоид $\mathcal{E}(q_c, Q_c(t))$ должен произвести реконфигурацию за счет изменения матрицы $Q_c(t)$.

Предположим, что $E_c[t_0]$ расположен следующим образом: $\mathbf{q(t_0)} = 0$ при положительно определенной диагональной матрице $Q(t_0) = \{\kappa^{(1)}(t_0), \kappa^{(2)}(t_0), \kappa^{(3)}(t_0)\}$, приняв $\kappa^{(i)}(t_0) = \beta_{ii}^2(t_0)\mathbf{e}^{(i)}$, где $\beta_{ii}^2 = 3\alpha_{ii}$ и $\mathbf{e}^{(i)}$ — единичные орты в $\mathbb{R}^n$, причем $\beta_{11}^2 \ge \beta_{22}^2 \ge \beta_{33}^2$. Собственные числа $Q(t_0)$ суть $\lambda_i(t_0) = \beta_{ii}^2$. Для реконфигурации движения $E_c[t]$ необходимо преобразовать вектор $q(t)$ и матрицу $Q(t)$. Используем два отображения. Первое из них, полагая $q(t) = R(t, t_0)q(t_0)$, $Q_R(t) = R'(t, t_0)Q(t_0)R(t, t_0)$, — с ротационной матрицей $R(t, t_0)$, сохраняющей собственные значения $\lambda_i(t) = \lambda_i(t_0)\ \forall i$ и, следовательно, объем $\mathrm{vol}E_c[t]$). Тогда $E_c[t]$ превращается в $E_R[t] = \mathcal{E}(q(t), Q_R(t))$.

Второе — при помощи матрицы сжатия-растяжения S, положительной, диагональной, с коэффициентами $\tau_{ii}^2 > 0$. Тогда $SQ(t) = Q_S(t)$ остается диагональной, но с элементами $\beta_{ii}^2[S] = \tau_{ii}^2\beta_{ii}^2$. Эллипсоид $E = E_R[t]$ преобразуется в $E_S[t] = \mathcal{E}(q(t), Q_S(t))$. Чтобы сохранить объем $\mathrm{vol}E_R[t]$, следует соблюсти условие

$$\prod_i \beta_{ii}^2 = \prod_i \beta_{ii}^2[S]. \tag{2.1}$$

Отметим, что при $n = 3$ матрица $R(t, t_0)$ при поворотах E_c вокруг оси $\mathbf{e}_Q^{(1)}$ против часовой стрелки имеет вид

$$R(t, t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi(t - t_0) & -\sin\phi(t - t_0) \\ 0 & \sin\phi(t - t_0) & \cos\phi(t - t_0) \end{pmatrix},$$

где $\phi(t - t_0)$ — угол между $\mathbf{e}_Q^{(2)}(t)$ и $\mathbf{e}_Q^{(2)}(t_0)$, а также между $\mathbf{e}_Q^{(3)}(t)$ и $\mathbf{e}_Q^{(3)}(t_0)$. Эта матричная функция непрерывна по t, t_0. Преобразование $S(t, t_0)$ также может быть выбрано непрерывным.

К моменту $t = t_s^-$ начала прохождения между препятствиями эллипсоид $E_c[t] = E_S[t]$ должен быть перестроен согласно преобразованиям

$$\mathcal{E}_S(t) = \mathcal{E}(q(t), \quad Q_S(t)) = \mathcal{E}\big(R(t, t_0)q(t_0), S(t, t_0)R(t, t_0)Q(t_0)R'(t, t_0)S(t, t_0)\big).$$

Как указано в [1], реконфигурации эллипсоида объясняется необходимостью избежать столкновения с препятствиями $E_c^0[t]$ — *с сохранением вместимость стаи* по ходу всего движения. Но для достижения этого при использовании $\mathcal{P}(p, P, \alpha)$ может потребоваться увеличение на этапах $[t_0, t_s^-]$, $[t_s^+, \vartheta]$ размеров этого параллелотопа, а значит, и содержащего его эллипсоида $E_c^0[t]$. Последнее достигается заменой (2.1) условием (1.4). Таким образом, решение задачи нестолкновений внутри контейнера должно отражаться на построении внутренних ограничений на $E_c^0[t]$ и, далее, на разрешимости задачи о прохождении трубкой $E_c^0[t]$ препятствий $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$. (Их число далее ограничиваем двумя.)

Обсудим вначале движение трехмерного эллипсоида $E_c^0[t]$ на промежутке $[t_s^-, t_s^+]$ прохождения препятствий $E_i[t] = \mathcal{E}(q^{(i)}, Q^{(i)})$, $i = 1, 2$. Для определенности будем полагать

$$\kappa_k^{(i)} > \nu r, \quad i = 1, 2; \quad \kappa_3^{(i)} \geq 6r; \quad i = 1, 2, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Следуя [1], заметим, что минимальное расстояние между этими эллипсоидами, доступное для прохождения и учитывающее используемую схему, должно быть не менее $D(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \geq 2r\sqrt{3}$. Поэтому далее полагаем

$$\delta_0 = D(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \max_l \big\{\langle l, \kappa^{(1)} - \kappa^{(2)}\rangle - \langle l, Q_1 l\rangle^{1/2} - \langle l, Q_2 l\rangle^{1/2} \mid \langle l, l\rangle^{1/2} = 1\big\} = 2r\sqrt{3}$$

при единственным максимизаторе l^0. Тогда $\delta_0 = \|d^{(1)} - d^{(2)}\|$, где

$$\langle -l^0, d^{(1)}\rangle = \langle l^0, Q_1 l^0\rangle^{1/2}, \quad \langle -l^0, d^{(2)}\rangle = \langle l^0, Q_2 l^0\rangle^{1/2}.$$

Обозначив $d^0 = d^{(1)} - d^{(2)}$, $d^* = d^{(2)} + d^0/2$ рассмотрим гиперплоскости

$$\mathcal{H}_z = \{x : \langle x - d^*, d^0\rangle = 0\}, \quad \mathcal{H}_1 = \{x : \langle x - d^{(1)}, d^0\rangle = 0\}, \quad \mathcal{H}_2 = \{x : \langle x - d^{(2)}, d^0\rangle = 0\}.$$

Эти гиперплоскости параллельны, они ортогональны d^0, причем $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ суть опорные гиперплоскости к $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$, при том что $\mathcal{H}_z$ расположено посередине. Будем также считать, что система координат выбрана так, чтобы плоскости $\mathcal{H}_z, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ были перпендикулярны плоскости $\mathcal{H}_3 = \{x : x_3 = 0\}$.

Далее будем требовать, чтобы эталонная векторная траектория $q(t) = q_c(t)$ центра параллелотопа $\mathcal{P}[t]$ и эллипсоида $E_c[t]$, соединяющая начальное положение $p^0 = q^0$ с целевым вектором $q(\vartheta) = m$, лежала на промежутке прохождения препятствий $[t_s^-, t_s^+]$ в плоскости $\mathcal{H}_z$ и в момент $t = t^*$ прохождения минимального расстояния $D(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ проходила бы через точку $d^* = d^2 + d^0/2 \in \mathcal{H}_z$.

При этом после реконфигурации главная полуось эллипсоида $E_c^0[t] = \mathcal{E}(q_c(t), Q_c(t))$ должна быть ориентирована на промежутке $[t_s^-, t_s^+]$ вдоль вектора $\dot{q}_c(t)$, исходящего из точки d^*, и целиком лежать в плоскости $\mathcal{H}_z$. Она будет перпендикулярна d^0, т.е. $\langle d^0, \dot{q}_c(t)\rangle = 0$. При этом вторая полуось, ориентированная вдоль вектора d^0, будет не короче $r\sqrt{3}$. Далее будем полагать $\|d^0\| = r\sqrt{3}$, что потребует прохождения препятствий последовательно всеми членами стаи "в цепочку" ("гуськом"). Третья полуось получается автоматически. Она перпендикулярна плоскости $\mathcal{H}_3$.

Промежуток $[t_s^-, t_s^+]$ определяется следующим образом. Такой интервал времени может быть обозначен при помощи *барьерных гиперплоскостей*. При этом будем полагать, что выбор вектора h_b и чисел c_b^-, c_b^+ должен соответствовать условиям

$$d(d^*, \mathcal{H}_b^-) \geq 3rm, \quad d(d^*, \mathcal{H}_b^+) \geq 3rm$$

и что эти расстояния достигались в точках $q_-^* \in \mathcal{H}_{bz}^-, \quad q_+^* \in \mathcal{H}_{bz}^+$, где $\mathcal{H}_{bz}^- = \mathcal{H}_b^- \cap \mathcal{H}_z$, $\mathcal{H}_{bz}^+ = \mathcal{H}_b^+ \cap \mathcal{H}_z$. Тогда плоскости $\mathcal{H}_{bz}^-, \mathcal{H}_{bz}^+$ будут перпендикулярны к $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$, а также к $\mathcal{H}_3$. Расположение этих плоскостей может быть определено заранее, независимо от вычисления трубки $E^c[t]$.

Потребуем далее, чтобы эталонная траектория $q_c(t)$ центра трубки $E_c^0[t]$ удовлетворяла на $[t_s^-, t_s^+]$ следующим условиям:

$$q_c(t_0) = q_c^0 = 0, \quad q_c(t_s^-) \in \mathcal{H}_{zb}^-, \quad q_c(t_s^+) \in \mathcal{H}_{zb}^+, \quad q_c(t) \in \mathcal{H}_z, \quad \dot{q}_c(t) \in \mathcal{H}_z. \tag{2.2}$$

Пусть $q_-^* = q_c(t_s^-)$, $q_+^* = q_c(t_s^+)$, тогда траектория $q_c(t) \in \mathcal{H}_z$ будет лежать на прямой $\mathcal{L}(q_-^*, q_+^*)$, направленной вдоль единичного вектора $(q_+^* - q_-^*)\|q_+^* - q_-^*\|^{-1} = \mathbf{e}^*$ и проходящей через d_0.

Соотношения (2.2) сформулированы в виде стандартной задачи теории оптимального управления. Но чтобы решить задачу Н, момент t_s^- должен быть скоординирован с временем движения стаи внутри $E_c^0[t]$, которое, в свою очередь, должно учитывать время на перестройки внутри контейнера, обеспечивающие нестолкновения. Как будет указано далее, после упомянутой координации моменты времени t_s^-, t_s^+ и значения $q(t_s^-)$, $q(t_s^+)$ могут быть вычислены заранее. Поскольку выбор ограничения μ на управление v находится в нашем распоряжении, полученные значения t_s^-, t_s^+ можно варьировать.

2.2. Координация промежутков движений контейнера и стаи

Будем исходить из того, что расстояние $d(q_c(t_0), \mathcal{H}_{zb}^-) > 2krm, k \geq 3$. Движение стаи будет далее построено так, чтобы между плоскостями $\mathcal{H}_b^-, \mathcal{H}_b^+$ все ее элементы последовательно проходили через точки q_-^*, q_+^*.

Найдем оценку интервала времени на перестройку стаи от конфигурации $\mathbf{X}(t)$, с эллипсоидом $E_c^0[t]$ в момент $t \geq t_0$, до конфигурации $\mathbf{X}(t^*)$, $t^* > t$, ("в цепочку"), с эллипсоидом $E_c^0[t^*]$. *Верхний индекс* 0 в E_c^0 *далее опускаем.*

Пусть τ_- — момент попадания из $x^{(1)}(t_0)$ в $x^{(1)}(\tau_-) = q_-^* \in \mathcal{H}_{zb}^-$ со скоростью $v_s = v_s^{(j)}$, $\forall j$. Он может быть найден путем решения обычной задачи управления для системы (1.1) с учетом условий координации, указанных ниже. Пусть также τ_+ — момент попадания последнего элемента стаи в состояние $x^{(m)}(\tau_+) = \dot{q_+} *$.

Чтобы эллипсоид $E_c^0[t]$, содержащий стаю в виде цепочки, был построен, начиная с момента τ_- и далее достиг второй барьерной плоскости $\mathcal{H}_{zb}^+$, потребуем условий

$$x^{(1)}(\tau_-) = q_-^* \in \mathcal{H}_{zb}^-, \quad x^{(m)}(\tau_+) = q_+^* \in \mathcal{H}_{zb}^+, \tag{2.3}$$

$$x^{(1)}(t) = x^{(2)}(t+2h) = \ldots = x^{(m)}(t+2(m-1)h) = x^{(1)}(t) + 2r(m-1)\mathbf{e}^*, \tag{2.4}$$
$$t \in [\tau_-, \tau_+ + 2(m-1)h], \quad x^{(1)}(t) = q^*_- + (t-\tau_-)v_s,$$

где h — время прохождения траекториями $x^{(j)}(t)$ расстояния r при постоянном управлении $v_s = \mathrm{const}$, задаваемом при ограничении

$$\dot{x}^{(j)}(t) = v_s \in \mathbb{R}^n \ \forall j = 1, \ldots, m, \quad \|v_s\|h \geq r,$$

на промежутке $t \in [\tau_-, \tau_+ + (m-1)h]$.

Наряду с (2.4), (2.3) на том же промежутке должны быть также выполнены условия

$$\bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{B}_r(x^{(j)}(t-2(j-1)h)) \subset E_c[t-2(m-1)h], \tag{2.5}$$

$$\mathrm{vol}E_c[t_0] = \mathrm{vol}E_c[\tau_- + (m-2)h] = \mathrm{vol}E_c[\tau_+ - (m-2)h].$$

Таким образом, в момент $t = \tau_-$ происходит первое пересечение $E_c[t]$ с $\mathcal{H}_{bz}$ и при $t = t^* = \tau_- + (m-2)h$ половина стаи будет выстроена в цепочку вдоль прямой $\mathcal{L}(q^*_-, q^*_+)$. Это обстоятельство должно быть учтено при реконфигурации $E_c[t]$. Заметим, что при $t = t^{**} = \tau_+ + 2(m-1)h$ уже вся стая $\mathbf{X}[t]$ будет целиком выстроена в цепочку, расположенную на прямой $\mathcal{L}(q^*_-, q^*_+)$. Стороны параллелотопа $\mathcal{P}(p, P, \alpha)$ в $\mathbb{R}^3$ здесь будут определяться параметрами $\alpha = \{2mr, 2r, 2r\}$, а полуоси $E_c[t]$. будут равны $mr\sqrt{3}, r\sqrt{3}, r\sqrt{3}$. Подобная ситуация продлится вплоть до момента $t^\sharp = \tau_+ + (m-1)h$, когда $x^{(1)}(t^\sharp) = q^*_+$ и $x^{(m)}(\tau_+) = q^*_+$.

Будем считать, что для перестройки контейнера от $E_c[t]$ до $E_c[t^*]$ необходимо время $\tau^* = (t_r - t_0) \geq 4mr/\|v_s\|$. Тогда следует учесть, что одновременно должно быть выполнено и условие $q_c(t^*) = q^*_-$ с соблюдением первого из соотношений (2.3) вместе с (2.4). Следовательно, ограничения μ на скорости $\dot{q}_c(t)$ и стаи, например ее элемента $\dot{x}^{(1)}$, определяющего τ_-, должны быть согласованы, а именно они должны обеспечивать выполнение *условия координации*

$$t_0 + \tau^* \leq t^* = \tau_- + (m-1)h$$

наряду с (2.4), (2.3) и (2.5).

Теперь, когда время τ_- скоординировано, можно положить $t^-_s = \tau_-$. Далее, на участке $[\tau_-, \tau_+]$ при движении $E_c[t]$ от $\mathcal{H}^-_{zb}$, где $x^{(1)}(\tau_-) = q^*_-$, до $\mathcal{H}^+_{zb}$, где $x^{(m)}(\tau_+) = q^*_+$, со скоростью v_s, эталонная траектория $q_c(t)$ должна двигаться с той же скоростью $v = v_s = \mathrm{const}$, что и элементы стаи $x^{(j)}$, завершая проход через $q^*_+ \in \mathcal{H}^+_{zb}$ за время

$$\tau_{bz} = \|q^+_- - q^-_+\|/\|v_s\| = 6rm/\|v_s\|, \quad \tau_+ = t^+_s$$

при условии $x^{(m)}(\tau_+) = q^*_+$. Здесь $t^+_s = \tau_- + \tau_{bz} = \tau_+$.

На последнем участке $[t^+_s, \vartheta]$ остается совершить реконфигурацию от $E_c[\tau_+]$ до $E_c[\vartheta] \subseteq \mathcal{E}(m, M) + \varepsilon\mathcal{B}_r(m) = \mathcal{M}_\varepsilon$, сохраняя условия вместимости и отсутствия столкновений внутри стаи. (Предполагается, что подбор $\varepsilon \geq 0$ доставляет такую возможность.) Координация движения $q_c(t)$ и $E_c[t]$ здесь реализуется так же, как и выше.

После прохождения препятствий, на промежутке $t \in [t^+_s + mh, \vartheta]$, стае $\mathbf{X}[t] \subseteq E_c[t]$ может снова потребоваться реконфигурация для обеспечения включения $E^f_c[\vartheta] \subset \mathcal{M}$. Координация движения контейнера и стаи внутри тогда производится аналогично приведенной схеме.

З а м е ч а н и е. Переход от $E_c[t_0]$ к $E_c[\tau_-]$ и от $E_c[\tau_+]$ к $E^f_c[\vartheta]$ может потребовать расширения размеров контейнера (объема $\mathrm{vol}E^0_c[t]$) при сохранении объемов

$$\mathrm{vol}E^0_c[t_0] = \mathrm{vol}E^0_c[t^-_s] = \mathrm{vol}E^0_c[t^-_s] = \mathrm{vol}E_c[\vartheta].$$

Перейдем теперь к описанию управлений при нестолкновениях.

3. Групповое движение при нестолкновениях. Управляющие стратегии.

Полагая, что эллипсоидальная траектория $E_c[t]$ известна на всех участках, управление движением стаи $\overline{\mathbf{X}[t]} = \mathbf{x}[t]$ будем конструировать из условий пребывания ее элементов внутри $E_c[t]$ с сохранением условий нестолкновения и выполнении соотношений (2.3), (2.4), (2.5). Описание приведем как соединение решений на трех частях траектории, соответствующих интервалам $[t_0, \tau_-]$, $[\tau_-, \tau_+]$, $[\tau_+, \vartheta]$. При этом ограничения (I), (II), указанные ниже, одинаковы для всех трех интервалов, тогда как условия (III) различны для каждого из них.

Обсудим разрешимость перечисленных ранее условий для нахождения синтезированных управлений $u^{(j)}(t, \mathbf{x})$ и способы вычисления этих управлений. По каждому условию укажем составляющие общей функции цены, свойства которой будут определять условия совместности этих требований.

(I) **Внешние фазовые ограничения (выпуклые)**

$$\mathcal{B}_r(x^{(j)}(t)) \subset E_c^0[t] = \mathcal{E}^0(q_c(t), Q_c(t)), \quad \dot{x}^{(j)}(t) \in E_v^0[t] = \mathcal{E}(\dot{q}_c(t), \delta^2 \mathcal{B}_1(0)),$$

$$j = 1, \ldots, m; \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

Напомним, что $h_+(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) = \min\{\varepsilon : \mathcal{X}_2 + \varepsilon \mathcal{B}_1(0) \supset \mathcal{X}_1)$ означает хаусдорфово полурасстояние от множества $\mathcal{X}_2$ до множества $\mathcal{X}_1$. Тогда здесь

$$d^2(\mathcal{B}_r(x^{(j)}(t)), E_c^0[t]) = d_{cr}^2[t, x^{(j)}] = h_+^2(\mathcal{B}_r(x^{(j)}(t)), E_c^0[t])$$

будет означать квадрат такого полурасстояния от $E_c^0[t]$ до $\mathcal{B}_r(x^{(j)}(t))$ и $d^2(\dot{x}^{(j)}(t), E_v^0[t]) = d_v^2[t, \dot{x}^{(j)}]$ — квадрат нормы разности скоростей $\dot{x}^{(j)}(t)$ и центра $\dot{q}_c(t)$ эллипсоида $E_v^0[t]) = \mathcal{E}(\dot{q}_c(t), \delta^2 I)$.

В данном случае, при известном $q_c(t)$, ограничения $d_r^2[t, \mathbf{x}^{(j)}, \mathbf{q_c}] = d_{cr}^2[t, x^{(j)}] + d_v^2[t, \dot{x}^{(j)}] = 0$ обеспечиваются в случае задачи H неравенствами

$$U_E^{(j)}(t, \mathbf{x}^{(j)}) = \begin{cases} u : \left\{ d(d_r^2[t, \mathbf{x}^{(j)}, \mathbf{q}_c])/dt \,|_u \;\middle|\; u \in \mathcal{P} \right\} \le 0 \ \text{ при } \ d_r^2[t, \mathbf{x}^{(j)}, \mathbf{q}_c] > 0, \\ \mathcal{P} \ \text{ при } \ d_r^2[t, \mathbf{x}^{(j)}, \mathbf{q}_c] = 0. \end{cases}$$

(Для определения этого множества может потребоваться вторая производная $d^2(d_r^2[t, \mathbf{x}^{(j)}, \mathbf{q}_c])/dt^2$.) В задаче H подобное условие будет обеспечиваться добавками в соответствующее уравнение ГЯБ, имеющими вид

$$h_{jq}^+[t] = (h_+^2(x^{(j)}(t), \mathcal{E}(q_c(t), Q_c(t))) - r^2)_+ + (h_+^2(\dot{x}^{(j)}(t) - \dot{q}(t), \mathcal{E}(0, \delta^2 I)))_+.$$

Здесь и далее $h_+[t] = h(t)$, если $h(t) \ge 0$; $h_+(t) = 0$, если $h(t) < 0$.

(II) **Внутренние ограничения (невыпуклые). Избежание столкновений**

В соответствии с (1.3) эти ограничения можно записать при помощи *матрицы расстояний* $\mathbf{D}_r = \{D_{ij}\}$, где

$$D_{ij}(t, \mathbf{x}) = D(\mathcal{B}_r(x^{(i)}(t)), \mathcal{B}_r(x^{(j)}(t))) = D_{ji}(t, \mathbf{x}), \quad i \ne j; \quad i, j = 1 \ldots, m; \quad D_{ii} = 0.$$

Тогда условия нестолкновений внутри контейнера имеют вид

$$\mathbf{D}_r(t, \mathbf{x}) = \{D_{ij}(t, \mathbf{x})\}, \quad \mathbf{D}_r(t, \mathbf{x}) \ge 0, \quad t \in [t_0, \vartheta]. \tag{3.1}$$

Следует заметить, что указанные ограничения становятся активными только при расстоянии между центрами виртуальных шаров $\mathcal{B}_r(x^{(i)}), \mathcal{B}_r(x^{(j)})$ равном $d_{ij}(t, \mathbf{x}_s) = \|x^{(i)}(t) - x^{(j)}(t)\| \le 2r$. Методы решения подобных задач приведены в работах [16; 17].

Управления, обеспечивающие указанные ограничения, определяются неравенствами

$$U_{ji}(t,\mathbf{x}) = U_{ij}(t,\mathbf{x}) = \begin{cases} u : dD_{ij}(t,\mathbf{x})/dt \geq 0, \text{ при } D_{ij}(t,\mathbf{x}(t)) = 0, \\ \mathcal{P} \text{ при } D_{ij}(t,\mathbf{x}(t)] > 0. \end{cases}$$

(Здесь также может потребоваться вторая производная $d^2(D^2_{ij}[t,x(t)])/dt^2$.)

Для задачи H подобное условие будет также обеспечиваться добавками в соответствующее уравнение ГЯБ, имеющими вид

$$h_{ij}[t] = h^+(r^2 - \|x^{(i)}(t) - x^{(j)}(t)\|^2)_+, \quad i > j, \quad i,j = 1\ldots,m; \quad t \in [t_0,\vartheta].$$

Далее приняты обозначения

$$H_{1+}(t,\mathbf{x},\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^{m} h^+_{jq}[t], \; H_{2+}(t,\mathbf{x},q) = \sum_{i>j=1}^{m} h^+_{ij}[t],$$

$$H_+(t,\mathbf{x},\mathbf{q}) = H_{1+}(t,\mathbf{x},\mathbf{q}) + H_{2+}(t,\mathbf{x},q).$$

Дальнейшие условия отдельно выпишем для трех интервалов.

(III) **Построение уравнения ГЯБ для стаи**

Интервал III-1 ($t \in [t_0,\tau_-]$ при $t_s^- = \tau_-$).

Эти условия могут быть записаны в следующем виде.
Рассмотрим терминальный функционал

$$\varphi(\tau_-,\mathbf{x}) = \|x^{(1)}(\tau_-) - q^*_-\|^2 + \|\dot{x}^{(1)}(\tau_-) - v_s)\|^2$$

и назначим функцию цены для задачи H1: найти

$$\mathbf{V}^{(1)}(t,\mathbf{x}) = \min_u \left\{ \varphi(\tau_-,\mathbf{x}(\tau_-)) + \int_{t_0}^{\tau_-} H_+(t,\mathbf{x},\mathbf{q})dt \mid \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}, \mathbf{u} \in \mathbf{P} \right\}.$$

Пусть

$$\mathbf{x}_s = N_s\mathbf{x}, \;\; \mathbf{x}_v = N_v\mathbf{x}, \quad \partial\mathbf{V}/\partial\mathbf{x} = \{\partial\mathbf{V}/\partial\mathbf{x}_s, \partial\mathbf{V}/\partial\mathbf{x}_v\}.$$

Функция $\mathbf{V}^{(1)}(t,\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби — Беллмана (ГЯБ)

$$\begin{aligned} &\partial\mathbf{V}/\partial t + \langle\partial\mathbf{V}/\partial\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_v\rangle + \langle\partial\mathbf{V}/\partial\mathbf{x}_v, A(t)\mathbf{x}_s + C(t)\mathbf{x}_v\rangle \\ &+ \min_{u\in\mathcal{P}}\{\langle\partial\mathbf{V}/\partial\mathbf{x}_v, \overline{\mathbf{B}(t)\mathbf{u}}\rangle\} + H_+(t,\mathbf{x},q) = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

при краевом условии $\mathbf{V}(\tau_-,\mathbf{x}) = \varphi(\tau_-,\mathbf{x})$.

Интервал III-2 ($t \in [\tau_-,\tau_+]$ при $t_s^- = \tau_-, \; t_s^+ = \tau_+ = \tau_- + \tau_{bz} + 2(m-1)h$).

Теперь рассмотрим терминальный функционал

$$\varphi_{ob}(\tau_+,\mathbf{x}) = \|x^{(m)}(\tau_+) - q^*_+\|^2 + \|\dot{x}^{(m)}(\tau_+) - v_s)\|^2$$

и назначим функцию цены для задачи H2: найти

$$\mathbf{V}^{(2)}(t,\mathbf{x}) = \min_u \left\{ \varphi(\tau_+,\mathbf{x}(\tau_+)) + \int_{\tau_-}^{\tau_+} H_+(t,\mathbf{x},\mathbf{q})dt; \mid \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}, \mathbf{u} \in \mathbf{P} \right\}$$

Условия нестолкновения элементов стаи вдоль цепочки при движении с постоянной скоростью v_s будут обеспечены равенствами (2.4) вместе с добавками

$$\|x^{(1)}(t) - q_c(t)\|^2,\ t \in [\tau_-, \tau_- + \tau_{bz}], \quad q_c(t) = q_+^* + v_s(t - \tau_-)\mathbf{e}^*.$$

Обозначим

$$\mathbf{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{m-1} \|x^{(i)}(t) - x^{(i+1)}(t + 2h)\|^2 + \sum_{i=1}^{m-1} \|\dot{x}^{(i)}(t) - \dot{q}_c(t)\|^2.$$

Уравнение ГЯБ для $\mathbf{V}^{(2)}(t, \mathbf{x})$ имеет вид

$$\begin{gathered}\partial \mathbf{V}/\partial t + \langle \partial \mathbf{V}/\partial \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_v \rangle + \langle \partial \mathbf{V}/\partial \mathbf{x}_v, A(t)\mathbf{x}_s + C(t)\mathbf{x}_v \rangle \\ + \min_{u \in \mathcal{P}} \{\langle \partial \mathbf{V}/\partial \mathbf{x}_v, \overline{\mathbf{B}(t)\mathbf{u}} \rangle\} + \|x^{(1)}(t) - q_c(t)\|^2 + \mathbf{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{q}) = 0 \end{gathered} \tag{3.3}$$

при краевом условии $\mathbf{V}(\tau_+, \mathbf{x}) = \varphi_{ob}(\tau_+, \mathbf{x})$.

Интервал III-3 ($t \in [\tau_+, \vartheta]$).

Здесь решается задача Н3 о попадании стаи на целевое множество $\mathcal{M}_\varepsilon = \mathcal{E}(m, M + \varepsilon I)$ при ограничениях вида

$$\begin{gathered}(a) \qquad \mathcal{B}_r(x^{(j)}(\vartheta)) \subset E_f[\vartheta] = \mathcal{E}(q_c(\vartheta), Q_c(\vartheta)) \subseteq \mathcal{M}_\varepsilon, \\ \mathcal{O} \le \|\dot{x}^{(j)}(\vartheta) - \dot{q}_c^{(j)}(\vartheta)\| \le \delta_f^2; \\ (b) \qquad \mathbf{D}_r[\vartheta] = D(\mathcal{B}_r(x^{(j)}(\vartheta)), \mathcal{B}_r(x^{(k)}(\vartheta))) \ge 0, \\ j, k = 1, \dots, m, \quad j \ne k,\end{gathered}$$

где $m, M, \dot{q}_c(\vartheta)$ заданы вместе с матрицами $\mathbf{X}_s[t_0] - q_c(t_0) = \mathbf{X}_{sc}[t_0]$.

Требуется также выполнить *терминальные соотношения* $E_f[\vartheta] = E_c[t_0]$, а именно

$$q_c(\vartheta) = m,\ Q_c(\vartheta) = Q_c(t_0); \quad \mathbf{X}_s[\vartheta] - q_c(\vartheta) = \mathbf{X}_{sc}[\vartheta] = \mathbf{X}_{sc}[t_0],$$

обеспечивающие аналогичное изначальному включение

$$\mathbf{x}_{sc}^{(j)}[t_0] = \mathbf{x}_{sc}^{(j)}[\vartheta] \subset \mathcal{E}(0, Q_c(\vartheta)), \quad j = 1, \dots m,$$

при указанном в предыдущих строках условии (I) о вместимости стаи в контейнер.

В рассматриваемом случае имеем терминальный функционал

$$\varphi_f(\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) = \|\mathbf{x}_{sc}(\vartheta) - \mathbf{x}_{sc}(t_0)\|^2 + \sum_{j=1}^{m} \|\mathbf{x}_v^{(j)}(\vartheta) - \dot{q}_c(\vartheta)\|^2$$

и функцию цены $\mathbf{V}^{(3)}(t, \mathbf{x})$:

$$\mathbf{V}^{(3)}(t, \mathbf{x}) = \min_u \left\{ \varphi_f(\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) + \int_{\tau_+}^{\vartheta} H_+(t, \mathbf{x}, \mathbf{q}) dt \mid \mathbf{x}(t) = \mathbf{x},\ \mathbf{u} \in \mathbf{P} \right\}.$$

Отсюда следует и соответствующее уравнение ГЯБ

$$\begin{gathered}\partial \mathbf{V}/\partial t + \langle \partial \mathbf{V}/\partial \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_v \rangle + \langle \partial \mathbf{V}/\partial \mathbf{x}_v, A(t)\mathbf{x}_s + C(t)\mathbf{x}_v \rangle \\ + \min_{u \in \mathcal{P}} \{\langle \partial \mathbf{V}/\partial \mathbf{x}_v, \overline{\mathbf{B}(t)\mathbf{u}} \rangle\} + H_+(t, \mathbf{x}, q) = 0\end{gathered} \tag{3.4}$$

при краевом условии $\mathbf{V}(\vartheta, \mathbf{x}) = \varphi_f(\vartheta, \mathbf{x})$.

Разрешимость задачи H

Пусть
$$\mathcal{U}_{tot}(t) = \cup\{\mathcal{U}^{(j)}(t),\ j = 1, \ldots, m\},$$
причем
$$\mathcal{U}^{(j)}(t) = \big\{\mathcal{P} \cap U_E^{(j)}(t) \textstyle\bigcap_{i<j}\{U_{ij}(t) \mid i = 1, \ldots, m\}\big\}.$$

Тогда при $\mathcal{U}_{tot}(t, \mathbf{x}(t)) \neq \varnothing,\ t \in [t_0, \vartheta]$, условия разрешимости задачи H состоят из трех условий.

А именно пусть на интервале III-1 задана начальная позиция $\{t_0, \mathbf{x}\}$ системы (1.1), удовлетворяющая свойствам стаи CC(i), CC(ii) и найдена функция цены $\mathbf{V}^{(1)}(t, \mathbf{x})$.

Тогда для разрешимости задачи H1 необходимо и достаточно, чтобы
$$\mathbf{V}^{(1)}(t_0, \mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{V}^{(1)}(t_0, \mathbf{x}(t_0) \mid \tau_-, \varphi(\tau, \cdot)) = 0.$$
Аналогично для задач H2 и H3 при $\mathcal{U}_{tot}(t, \mathbf{x}(t)) \neq \varnothing$ необходимо и достаточно, чтобы соответственно
$$\mathbf{V}^{(2)}(\tau_-, \mathbf{x}(\tau_-)) = \mathbf{V}^{(2)}(\tau_-, \mathbf{x} \mid \tau_+, \varphi_{ob}(\tau_+, \cdot)) = 0,$$
$$\mathbf{V}^{(3)}(\tau_-, \mathbf{x}(\tau_-)) = \mathbf{V}^{(2)}(\tau_-, \mathbf{x} \mid \tau_+, \varphi_f(\vartheta, \cdot)) = 0.$$

В этом случае для задачи H получаем
$$\mathbf{V}^{(1)}\big(t_0, \mathbf{x} \mid \mathbf{V}^{(2)}(\tau_-, \cdot \mid \mathbf{V}^{(3)}(\tau_+, \cdot \mid \vartheta, \varphi_f(\varphi, \cdot)))\big) = 0, \tag{3.5}$$
а именно, что задача H разрешима для всех $\mathbf{x}$, удовлетворяющих условию (3.5).

Таким образом, указанные условия обеспечивают стыковку функций $\mathbf{V}^{(i)}$ в виде соотношений (3.5).

Множество
$$\mathcal{W}[t_0] = \big\{\mathbf{x} : \mathbf{V}^{(1)}(t_0, \mathbf{x}) = \mathbf{V}(t_0, \mathbf{x} \mid \vartheta, \varphi_f(\vartheta, \cdot)) = 0\big\}$$
состоит из начальных позиций $\{t_0, \mathbf{x}\}$, для которых задача H имеет решение при указанных в ней ограничениях.

Теорема H1 (О разрешимости задачи H). *При условиях* $\mathcal{U}_{tot}(t, \mathbf{x}(t)) \neq \varnothing,\ t \in t_0, \vartheta]$, *задача* H *имеет решение в том и только том случае, когда множество* $\mathcal{W}[t_0] \neq \varnothing$.

Указанные рассуждения позволяют сформулировать *принцип оптимальности для задачи* H *группового управления* — аналог известного для изолированных уравнений с управлениями [2], а именно
$$\mathbf{V}(t_0, \mathbf{x} \mid \vartheta, \varphi_f(\vartheta, \cdot)) = \mathbf{V}\big(t_0, \mathbf{x} \mid \tau_-, \mathbf{V}(\tau_-, \cdot \mid \tau_+, \mathbf{V}\big(\tau_+, \cdot \mid \vartheta, \varphi_f(\vartheta, \cdot)))\big).$$

Нахождение управлений

Общий способ нахождения управлений предполагает, что функция $\mathbf{V}_{\mathbf{x}_v}(t, \mathbf{x})$ найдена для каждого из уравнений (3.2)–(3.4). Тогда в каждом из случаев (I)–(III) синтезированная стратегия $\mathbf{u}^0(t, x)$ определяется из условия максимума вида
$$\langle \partial\mathbf{V}(t, \mathbf{x})/\partial\mathbf{x}_v, \overline{\mathbf{B}(t)\mathbf{u}^0}\rangle = \max\big\{\langle \partial\mathbf{V}(t, \mathbf{x})/\partial\mathbf{x}_v, \overline{\mathbf{B}(t)\mathbf{u}}\rangle \mid \mathbf{u} \in \mathcal{U}_{tot}\big\}. \tag{3.6}$$

Теорема H2 (О нахождении стратегий управления в задаче H). *При разрешимости задачи H о групповом управлении внутри контейнера имеем*:
$$\mathcal{U}_{tot}^{(j)}(t) \neq \varnothing, \quad j = 1, \ldots, m, \quad t \in [t_0, \vartheta],$$
управляющие стратегии $\mathbf{u}^0(t, \mathbf{x})$, *определяются из условий максимума вида* (3.6).

Второе условие разрешимости и принцип прицеливания

Укажем множества позиций стаи, из которых задача Н имеет решение при заданном ε в целевом множестве $\mathcal{M}_\varepsilon$. Эти области будем находить, двигаясь в попятном времени от $\mathcal{M}_\varepsilon$ и интервала III-3 к интервалу III.

Задача Н1В. Пусть заданы $\{\vartheta, \mathcal{M}_\varepsilon\}$ и интервал $[\tau_+, \vartheta]$. Найти множество позиций

$$\mathbf{W}[\tau_+] = \Big\{\{\tau_+, \mathbf{X}\} : \exists E_f[\vartheta] \subseteq \mathcal{M}_\varepsilon \Big| \operatorname{vol} E_c[\vartheta] \geq \operatorname{vol} E_c^0\Big\},$$

для которых, при $\mathbf{X}[\vartheta] \subset E_f[\vartheta]$, имеют место условия

$$x^{(m)}(\tau_+) = q_+^*, \quad \langle h_b, x^{(m)}(\tau_+)\rangle = c_b^+, \quad \langle h_b, x^{(j)}(\tau_+)\rangle \geq c_b^+ + r\|h_b\|, \quad j = 1, \ldots, (m-1),$$

а также выполняются включения $\mathbf{X}_s \subset E_c[t]$, $\mathbf{X}_s[t_0] = \mathbf{X}$ и неравенства $\mathbf{D}_r(t) \geq 0$, (3.1), при $t \in [\tau_+, \vartheta]$.

Задача Н2В. Пусть известны найденное множество позиций $\mathbf{W}[\tau_+]$ и интервал $[\tau_-, \tau_+]$. Найти множество позиций

$$\mathbf{W}[\tau_-] = \Big\{\{\tau_-, \mathbf{X}\} : \{\exists \mathbf{X}[t] \subset E_c[t] \Big| \mathbf{X}_s[\tau_+] \subseteq \mathbf{W}[\tau_+] \cap E_c[\tau_+]\Big\},$$

для которых при $\mathbf{X}_s[\tau_-] \subset E_c[\tau_-]$ имеют место условия

$$x^{(1)}(\tau_-) = q_-^*, \quad \langle h_b, x^{(1)}(\tau_-)\rangle = c_b^-, \quad \langle h_b, x^{(j)}(\tau_-)\rangle \leq c_b^- - r\|h_b\|, \quad j = 2, \ldots, m,$$

при выполнении неравенства $\mathbf{D}_r(t) \geq 0$, (3.1), и условий $E_c[t] \cap \mathcal{E}(q^{(i)}, Q^{(i)}) = \varnothing, i = 1, 2$, при $t \in [\tau_-, \tau_+]$.

Задача Н3В. Пусть известны найденное множество $\mathbf{W}[\tau_-]$ и интервал $[t_0, \tau_-]$. Найти множество позиций

$$\mathbf{W}[t_0] = \Big\{\{t_0, \mathbf{X}\} : \{\exists \mathbf{X}_s[t] \subseteq E_c[t] \Big| \mathbf{X}_s[\tau_-] \subset \mathbf{W}[\tau_-] \cap E_c[\tau_-]\Big\},$$

для которых при $\mathbf{X}[t_0] \subset E_c[t_0]$ имеют место условия $\mathbf{X}[t_0] \subset E_c[t_0]$ при выполнении неравенства $\mathbf{D}_r(t) \geq 0$, (3.1) на интервале $t \in [t_0, \tau_-]$.

Множества $\mathbf{W}[t]$ $t \in [t_0, \vartheta]$, состоящие из элементов из $\mathbf{X}$, образуют *трубку разрешимости* задачи Н. При непустоте этой трубки

$$\mathbf{W}[t] \neq \varnothing \ \forall t \in [t_0, \vartheta].$$

Задача Н будет разрешима.

Знание трубки $\mathbf{W}[t]$ в случае выпуклости ее сечений для каждого t позволяет применить групповые управления, сохраняющие траекторию при $\mathbf{X}[t_0] \subseteq \mathbf{W}[t_0]$ внутри этой трубки ($\mathbf{X}[t] \subseteq \mathbf{W}[t]$) и приводящие ее, следовательно, в состояние $\mathbf{X}[\vartheta] \subseteq \mathbf{W}[\vartheta] \subset \mathcal{M}_\varepsilon$.

С этой целью, положив $\lambda = \max\{\lambda_i(t) \mid i = 1, \ldots, n, \ t \in [t_0, \vartheta]\}$ как наибольшее из значений собственных чисел матрицы $Q(t)$ на этом промежутке и $\|A(t)\| \leq \nu$ на том же промежутке, рассмотрим функцию

$$\mathcal{V}(t, \mathbf{X}) = \exp(-2r\gamma t) h_+^2(\mathbf{X}[t], \mathbf{W}[t]), \ \ \gamma \geq \max\{\lambda, \nu\}.$$

Далее, для всех $j = \{1, \ldots, m\}$ примем стратегии управления

$$u^{(j)}(t, \mathbf{x}) \in \arg\min \sum_{j=1}^{m} \big\{\langle \partial \mathbf{V}(t, \mathbf{x}) / \partial x_v^{(j)}, B(t) u^{(j)}\rangle \mid u^{(j)} \in \mathcal{U}^{(j)}\big\}. \tag{3.7}$$

Теорема H2 (Второй подход).

(i) *Задача H о групповом управлении внутри контейнера разрешима в том и только том случае, когда множества* $\mathbf{W}[t] \neq \varnothing$, *при всех* $t \in [t_0, \vartheta]$.

(ii) *Управляющие стратегии* $u^{(j)}(t, \mathbf{x})$ *определяются из условий минимума вида* (3.7).

Доказательства приведенных выше теорем, а также теорем существования решений уравнений (1.1) при управлениях (3.7), проводятся по схемам книг [2; 5; 18].

П р и м е ч а н и я.

(i) Для реализации предложенной схемы синтеза управлений члены стаи должны располагать текущей информацией о положениях и скоростях других участников. Последнее может быть достигнуто путем доступных измерений абсолютных координат стаи, сообщаемых из центра, обязательно связанного с назначенным лидером стаи, так и с наблюдениями ее относительных координат с центром $q_c(t)$. Последнее должно определяться некоторой иерархической схемой сетевых коммуникаций внутри стаи. Члены стаи должны также обладать априорной информацией о параметрах траектории виртуального эллипсоидального контейнера. Вопросы информационного обеспечения группового управления образуют подзадачу для отдельного рассмотрения.

(ii) Отдельный круг подзадач составляют и описания вычислительных процедур для рассматриваемой общей задачи. Они особенно важны для преодоления трудностей, порожденных повышенной размерностью системы. Вопросы, связанные с вычислением траектории контейнера рассматривались в работах [4; 19] в рамках теории эллипсоидальных трубок (см. [2]).

4. Заключение

Данная работа, продолжающая публикацию [1], посвящена описанию поведения группы управляемых систем с ньютоновой динамикой в условиях нестолкновений и уклонения от препятствий. Основное внимание уделено движениям стаи внутри виртуального эллипсоидального контейнера, координированным с эволюцией самого контейнера, особенно в связи его реконфигурацией при прохождении препятствий. Работа посвящена теоретическим вопросам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Куржанский А.Б.** О задаче группового управления в условиях препятствий // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 166–179.
2. **Kurzhanski A.B., Varaiya P.** Dynamics and control of trajectory tubes. Theory and computation. Boston: Birkhauser, 2014. 445 p. (Systems & Control: Foundations & Appl.)
3. **Куржанский А.Б., Месяц А.И.** Оптимальное управление эллипсоидальными движениями // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 18, № 12. с. 1525-1532.
4. **Куржанский А.Б., Месяц А.И.** Управление эллипсоидальными траекториями. Теория и вычисления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2014. Т. 54, № 3. С. 404–414.
5. **Krasovskii N.N., Subbotin A.N.** Game-theoretical control problems. New York; Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1988. 517 p.
6. **Subbotin A.I.** Generalized solutions of first-order PDE's. The dynamic optimization perspective. Boston: Birkhauser, 1995. 312 p. (Systems & Control: Foundations & Appl.)
7. **Субботина Н.Н., Колпакова Е.А., Токманцев Т.Б., Шагалова Л.Г.** Метод характеристик для уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2013. 244 с.
8. **Crandall M.G., Lions P-L.** Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277. P. 1–41.
9. **Kurzhanski A.B., Varaiya P.** Dynamic optimization for reachability problems // J. Optim. Theory Appl. 2001. Vol. 108, no. 2. P. 227–251.
10. **Clarke F.H.,Ledyaev Yu.S.,Stern R.J., Wolenski P.R.** Nonsmooth analysis and control theory / New York: Springer-Verlag, 1998. 278 p. (Graduate Texts in Mathematics; vol. 178.)

11. **Rockafellar R.T., Wets R.J-B.** Variational analysis. New York: Springer, 2004. 733 p. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; vol. 317).
12. **Демьянов В.Ф.** Минимакс: дифференцируемость по направлениям. Л.: Изд-во ЛГУ, 1974. 112 с.
13. **Chang D.E.,Shadden S.,Marsden J.E.,Olfati-Saber R.**// Collision avoidance for multiple agent systems / Proc. of 42nd IEEE Conference on Decision and Control. Maui, Hawai, 2003. Vol. 1. P. 539–543.
14. **Junge O., Ober-Bloebaum S.** Optimal reconfiguration of formation flying satellites // Proc. of 44th IEEE Conference on Decision and Control, and European Control Conference (ECC). Seville, 2005. P. 66–71.
15. **Olfati-Saber R.** Flocking for multi-agent dynamic systems : algorithms and theory // IEEE Trans. Automatic Control. 2006. Vol. 51, no. 3. P. 401–420.
16. **Гусев М.И., Куржанский А.Б.** К оптимизации управляемых систем при наличии ограничений, I; II // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 9. С. 1591–1602; Т. 7, № 10. С. 1789–1800.
17. **Kurzhanski A.B., Mitchell I.M., Varaiya P.** Control synthesis for state constrained systems // Proc. of the 6th IFAC Symposium NOLCOS-2004. Stuttgart, 2004. P. 813–818.
18. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 255 с.
19. **Куржанский А.Б., Дарьин А.Н.** Параллельный алгоритм вычисления инвариантных множеств линейных систем большой размерности при неопределенных возмущениях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2013. Т. 53, № 1. С. 47–57.

Куржанский Александр Борисович
Поступила 27.04.2015
академик РАН, д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: kurzhans@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.977

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА ЭКСТРЕМАЛЬНОГО СДВИГА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

В. И. Максимов

Рассматривается задача отслеживания решения одного дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве второго порядка решением другого уравнения. Предполагается, что первое (эталонное) уравнение подвержено воздействию неизвестного неограниченного по времени управляющего воздействия. В условиях, когда текущие состояния каждого из уравнений наблюдаются с малыми погрешностями, указывается устойчивый к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритм решения задачи. Алгоритм основан на известном в теории гарантированного управления принципе экстремального сдвига Н.Н. Красовского.

Ключевые слова: отслеживание решения, экстремальный сдвиг, уравнение второго порядка.

V. I. Maksimov. On a modification of the extremal shift method for a second-order differential equation in a Hilbert space.

A problem of tracking a solution of a second-order differential equation in a Hilbert space by a solution of another equation is considered. It is assumed that the first (reference) equation is subject to the action of an unknown control, which is unbounded in time. In the case when the current states of both equation are observed with small errors, a solution algorithm stable with respect to informational noises and computational inaccuracies is designed. The algorithm is based on N.N. Krasovskii's extremal shift method known in the theory of guaranteed control.

Keywords: tracking a solution, extremal shift, second-order equation.

Введение

Как известно, в теории позиционного управления, созданной Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным, принцип экстремального сдвига играет важнейшую роль. Он позволяет осуществлять движение реальной системы, подверженной влиянию неконтролируемой помехи, вдоль траектории так называемого поводыря, остающегося в течение всего процесса управления внутри стабильного множества. Таким образом, принцип экстремального сдвига позволяет отслеживать траекторию поводыря в условиях меняющейся информации. В настоящей работе рассматривается задача отслеживания решения дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве. Методы исследования подобного типа задач излагаются, в частности, в рамках теории позиционного управления [1–7]. Обсуждаемая в настоящей работе постановка имеет одну особенность. Предполагается, что текущие состояния заданного уравнения, а также эталонного уравнения (на которое действует неизвестное управление) наблюдаются с малыми погрешностями. Это предположение ведет к невозможности точного решения задачи, в связи с чем мы конструируем устойчивый к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритм формирования управления по принципу обратной связи в заданном уравнении, гарантирующий выполнение подходящего свойства слежения. Алгоритм основан на методе экстремального сдвига. Прототипы рассматриваемой нами задачи слежения для динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, а также параболическими уравнениями, рассматривались в работах [8–10]. В данной работе, в

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 13-01-12446-офи-М2 и 13-01-00110) и программы Президиума УрО РАН “Фундаментальные проблемы математики”.

отличие от указанных выше работ, объектом наших исследований является система с распределенными параметрами второго порядка. При этом рассмотрен случай отсутствия мгновенных ограничений на управления.

1. Постановка задачи

Пусть V и H — действительные гильбертовы пространства. Пространство V вложено в пространство H плотно и непрерывно: $V \subset H = H^* \subset V^*$. Символы $|\cdot|_V$, $|\cdot|_{V^*}$ и $|\cdot|_H$ означают соответственно нормы в V, V^* и H, а символы $(\cdot,\cdot)$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в H и двойственность между V и V^*.

Рассматривается дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве H

$$\ddot{x}(t) + Ax(t) = Bu(t) + f(t), \quad t \in T = [t_0, \vartheta], \quad \vartheta < +\infty, \tag{1.1}$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = x_1.$$

Здесь $A : V \to V^*$ — линейный, непрерывный и симметричный ($A = A^*$) оператор, удовлетворяющий (для некоторого $c > 0$) условию коэрцитивности

$$\langle Ay, y\rangle \geq c|y|_V^2 \quad \forall y \in V,$$

$f(\cdot) \in L_2(T; H)$ — заданная функция, U — гильбертово пространство с нормой $|\cdot|_U$ и скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_U$ (пространство управлений), производная $\dot{x}(\cdot)$ понимается в смысле пространства распределений [11], B — линейный непрерывный оператор, действующий из пространства U в пространство H ($B \in L(U; H)$).

Следуя [12, с. 91], функцию $x(\cdot) \in C(T; V)$ такую, что $\dot{x}(\cdot) \in W(T; V) = \big\{z(\cdot) \in C(T; H) : \dot{z}(\cdot) \in L_2(T; V^*)\big\}$ и выполняется соотношение

$$\langle \ddot{x}(t), v\rangle + \langle Ax(t), v\rangle = (Bu(t) + f(t), v)$$

$$\forall v \in V \quad \text{при п.в.} \quad t \in T,$$

будем называть решением (слабым) уравнения (1.1) и обозначать символом $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, x_1, u(\cdot))$. В дальнейшем полагаем, что вложение пространства V в пространство H компактно. Кроме того

$$x_0 \in V, \quad x_1 \in H.$$

Тогда (см. [12, с. 93]) при любом $u(\cdot) \in L_2(T; U)$ уравнение (1.1) имеет единственное решение (слабое).

Рассматриваемая в настоящей работе задача формулируется следующим образом. Наряду с уравнением (1.1) имеется еще одно уравнение того же вида

$$\ddot{w}(t) + Aw(t) = Bv(t) + f(t) \tag{1.2}$$

с начальным условием

$$w(t_0) = \tilde{x}_0 \in V, \quad \dot{w}(t_0) = \tilde{x}_1 \in H.$$

Будем считать, что справедливы неравенства

$$|x_0 - \tilde{x}_0|_H \leq h, \quad |x_1 - \tilde{x}_1|_{V^*} \leq h. \tag{1.3}$$

Это уравнение (назовем его в дальнейшем эталонным) подвержено воздействию некоторого эталонного управления $v(\cdot) \in L_2(T; U)$. Эталонное управление, а также отвечающее ему решение $w(\cdot) = w(\cdot; t_0, \tilde{x}_0, \tilde{x}_1, v(\cdot))$ уравнения (1.2) заранее неизвестны. В дискретные, достаточно частые моменты времени

$$\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m \quad (\tau_0 = t_0,\ \tau_m = \vartheta,\ \tau_{i+1} = \tau_i + \delta)$$

измеряются производные состояния $\dot{w}(\tau_i) = \dot{w}(\tau_i; t_0, \tilde{x}_0, \tilde{x}_1, v(\cdot))$ уравнения (1.2), а также производные состояния $\dot{x}(\tau_i) = x(\tau_i; t_0, x_0, x_1, u(\cdot))$ уравнения (1.1). Величины $\dot{x}(\tau_i)$ измеряются с ошибкой. Результаты измерений — элементы $\xi_i^h \in H$ — удовлетворяют следующим неравенствам:

$$|\dot{x}(\tau_i) - \xi_i^h|_{V^*} \le h, \quad i \in [1 : m-1]. \tag{1.4}$$

(В силу вложения пространства $W(T;V)$ в пространство $C(T;H)$, неравенства (1.4) имеют смысл.) Здесь величина $h \in (0,1)$ характеризует точность измерения. Требуется указать алгоритм формирования управления $u = u^h(\cdot)$ в правой части уравнения (1.1), позволяющий осуществлять отслеживание решением $x(\cdot)$ уравнения (1.1) решение $w(\cdot)$ уравнения (1.2). Таким образом, рассматривается задача, состоящая в построении алгоритма, который по текущим измерениям величин $\dot{x}(\tau_i)$ и $\dot{w}(\tau_i)$ в "реальном времени" формирует (по принципу обратной связи) управление $u = u(\cdot)$ в правой части уравнения (1.1) такое, что "отклонение" $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, x_1, u(\cdot))$ от $w(\cdot) = x(\cdot; t_0, \tilde{x}_0, \tilde{x}_1, v(\cdot))$, а именно величина $\max_{t\in T}\{|x(t) - w(t)|_H + |\dot{x}(t) - \dot{w}(t)|_{V^*}\}$, мало при достаточной малости измерительной погрешности h.

Наряду с измерениями производных решения уравнения (1.1) в дискретные моменты времени (см. (1.4)) мы также рассмотрим случай непрерывного измерения, т. е. случай, когда в каждый момент $t \in T$ становится известным приближение $\xi^h(t) \in H$ величины $\dot{x}(t)$. При этом полагается, что функция $\xi^h(\cdot)$ есть элемент пространства $L_\infty(T;H)$ и удовлетворяет неравенству

$$|\xi^h(t) - \dot{x}(t)|_{V^*} \le h, \quad t \in T. \tag{1.5}$$

Такова содержательная постановка рассматриваемой в работе задачи.

В случае, когда и эталонное управление $v(\cdot)$, и управление $u(\cdot)$ в уравнении (1.1) стеснены мгновенными ограничениями ($u(t) \in P$, $v(t) \in P$, где $P \subset U$ — заданное ограниченное и замкнутое множество), сформулированная задача может быть решена с помощью метода экстремального сдвига [1, с. 55–64]. Таким образом, метод экстремального сдвига позволяет решить задачу отслеживания решения эталонного уравнения при наличии мгновенных ограничений на управления ($v, u \in P$). В настоящей работе мы рассмотрим случай, когда подобные ограничения отсутствуют, т. е. допустимым управлением (как эталонным, $v(\cdot)$, так и "истинным", $u(\cdot)$) может быть любая функция из пространства $L_2(T;U)$. Никакой иной информации о функциях $v(\cdot)$, $u(\cdot)$ не требуется. При этом мы укажем соответствующую модификацию принципа экстремального сдвига, воспользовавшись, следуя [3; 8], идеей его локальной регуляризации.

Перейдем к формальным определениям. Пусть для каждого $h \in (0,1)$ фиксировано семейство Δ_h разбиений отрезка T контрольными моментами времени $\tau_{h,i}$:

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,0} = t_0, \quad \tau_{h,m_h} = \vartheta, \quad \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta(h), \quad \delta(h) \in (0,1).$$

Всякую функцию $\xi^h(\cdot) \in L_(T;H)$, удовлетворяющую неравенству (1.5), назовем *допустимым h-измерением.* В свою очередь, кусочно-постоянные функции

$$\xi^h(\cdot) : T \mapsto \mathbb{R}^n, \quad \xi^h(t) = \xi_i^h \qquad t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1}), \quad i \in [0 : m_h - 1],$$

удовлетворяющие неравенствам (1.4), назовем *допустимыми измерениями точности* h, функции $u(\cdot) \in L_2(T;U)$ — *допустимыми управлениями*, а функции

$$\mathcal{U}(\cdot,\cdot) : H \times H \mapsto U, \quad \mathcal{V}(\cdot,\cdot,\cdot) : T \times H \times H \mapsto U$$

— *допустимыми обратными связями* (для уравнения (1.1)).

Сначала рассмотрим случай непрерывного измерения. Управление $u = u^{\alpha,h}(\cdot)$ (здесь α — некоторый положительный параметр) будем формировать с помощью обратной связи $\mathcal{U}(\cdot,\cdot)$. В силу этого решение $x = x^{\alpha,h}(\cdot)$ уравнения (1.1) будет изменяться под воздействием управления, порождаемого обратной связью $u^{\alpha,h}(\cdot) = \mathcal{U}(\xi^h(\cdot), \dot{w}(\cdot))$. Решение уравнения (1.1), таким образом, зависит от результатов $\xi^h(\cdot)$ измерения величин $\dot{x}^{\alpha,h}(\cdot)$, т. е. от допустимых h-измерений, и удовлетворяет следующим дифференциальному уравнению и начальному условию:

$$\ddot{x}^{\alpha,h}(t) + Ax^{\alpha,h}(t) = Bu^{\alpha,h}(t) + f(t), \quad t \in T, \tag{1.6}$$

$$x^{\alpha,h}(t_0) = x_0, \quad \dot{x}^{\alpha,h}(t_0) = x_1,$$

где

$$u^{\alpha,h}(t) = \mathcal{U}(\xi^h(t), \dot{w}(t)). \tag{1.7}$$

Для любой допустимой обратной связи $\mathcal{U}(\cdot,\cdot)$ и любого допустимого h-измерения $\xi^h(\cdot)$ решение $x^{\alpha,h}(\cdot)$ задачи Коши (1.6) будем называть *h-траекторией реальной системы*, порожденной допустимой обратной связью $\mathcal{U}(\cdot,\cdot)$ и допустимым h-измерением $\xi^h(\cdot)$.

Управляемым h-процессом, соответствующим допустимой обратной связи $\mathcal{U}(\cdot,\cdot)$ и допустимому h-измерению, будем называть всякую четверку $(w(\cdot), x^{\alpha,h}(\cdot), \xi^h(\cdot), u^{\alpha,h}(\cdot))$, где $w(\cdot)$ — решение эталонного уравнения (1.2), $\xi^h(\cdot)$ — допустимое h-измерение, $x^{\alpha,h}(\cdot)$ — решение уравнения (1.1), соответствующее $\mathcal{U}(\cdot,\cdot)$ и $\xi^h(\cdot)$, т. е. решение (1.6)) (h-траектория реальной системы), функция $u^{\alpha,h}(\cdot)\colon T \mapsto U$ задается соотношением (1.7). Функцию $u^{\alpha,h}(\cdot)$ будем при этом называть *h-реализацией* допустимой обратной связи $\mathcal{U}(\cdot,\cdot)$, соответствующей допустимому h-измерению. Основным элементом решения обсуждаемой задачи в случае непрерывного измерения является допустимая обратная связь $\mathcal{U}(\cdot,\cdot)$. Будем называть такую обратную связь *отслеживающей*, если найдутся число $h_0 \in (0,1)$ и функция $\gamma_U(\cdot) : (0,1) \mapsto [0,+\infty)$ такие, что $\gamma_U(h) \to 0$ при $h \to 0$ для $\forall h \in (0,h_0)$ и для всякой реализации $u^{\alpha,h}(\cdot)$ допустимой обратной связи $\mathcal{U}(\cdot,\cdot)$ вида (1.7), всякой h-траектории реальной системы (1.1) $x^{\alpha,h}(\cdot)$ (т. е. решения (1.6)), соответствующей управлению $u^{\alpha,h}(\cdot)$ вида (1.7), и всякого допустимого h-измерения $\xi^h(\cdot)$ выполняется неравенство

$$\max_{t\in T} \left\{ |x^{\alpha,h}(t) - w(t)|_H + |\dot{x}^{\alpha,h}(t) - \dot{w}(t)|_{V^*} \right\} \le \gamma_U(h), \tag{1.8}$$

т. е. неравенство (1.8) выполняется для управляемого h-процесса $(w(\cdot), x^{\alpha,h}(\cdot), \xi^h(\cdot), u^{\alpha,h}(\cdot))$. Функцию $\gamma_U(\cdot)$ будем при этом называть *оценкой точности* допустимой обратной связи $\mathcal{U}(\cdot,\cdot)$.

В случае дискретного измерения управление $u = u^h(\cdot)$ будем задавать с помощью обратной связи $\mathcal{V}(\cdot,\cdot,\cdot)$. Решение $x = x^h(\cdot)$ уравнения (1.1) в этом случае наблюдается в дискретные моменты $\tau_{h,i}$ с ошибкой и изменяется под воздействием некоторой обратной связи $u^h(\cdot) = \mathcal{V}(\cdot, \xi^h(\cdot), \dot{w}(\cdot))$. Решение уравнения (1.1), таким образом, зависит от результатов $\xi^h(\cdot)$ измерения $\dot{x}^h(\cdot)$ (т. е. допустимых измерений точности h) и удовлетворяет следующим дифференциальному уравнению и начальному условию:

$$\ddot{x}^h(t) + Ax^h(t) = Bu^h(t) + f_1(t), \quad t \in T, \tag{1.9}$$

$$x^h(t_0) = x_0, \quad \dot{x}^h(t_0) = x_1,$$

где

$$u^h(t) = u_i^h = \mathcal{V}(\tau_i, \xi_i^h, \dot{w}(\tau_i)) \quad \text{при} \quad t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad \tau_i = \tau_{i,h}, \quad i \in [0 : m_h - 1]. \tag{1.10}$$

Для любой допустимой обратной связи $\mathcal{V}(\cdot,\cdot,\cdot)$ и любого допустимого измерения $\xi^h(\cdot)$ точности h решение $x^h(\cdot)$ задачи Коши (1.9) будем называть *траекторией реальной системы*, соответствующей допустимой обратной связи $\mathcal{V}(\cdot,\cdot,\cdot)$ и допустимому измерению $\xi^h(\cdot)$.

Управляемым процессом, соответствующим допустимой обратной связи $\mathcal{V}(\cdot,\cdot,\cdot)$ и допустимому измерению точности h, будем называть всякую четверку $(w(\cdot), x^h(\cdot), \xi^h(\cdot), u^h(\cdot))$, где $w(\cdot)$ — решение эталонного уравнения (1.2), $\xi^h(\cdot)$ — допустимое измерение точности h, $x^h(\cdot)$ — решение уравнения (1.1), соответствующее $\mathcal{V}(\cdot,\cdot,\cdot)$ и $\xi^h(\cdot)$ (т. е. решение уравнения (1.9)), функция $u^h(\cdot) : T \mapsto U$ задается соотношением (1.10), где $\xi_i^h = \xi^h(\tau_i)$ при $t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$,

$\tau_i = \tau_{h,i}, i \in [0 : m_h - 1]$. Функцию $u^h(\cdot)$ будем при этом называть *реализацией* допустимой обратной связи $\mathcal{V}(\cdot,\cdot,\cdot)$, соответствующей допустимому измерению точности h.

Инструментом решения рассматриваемой задачи в случае дискретного измерения является допустимая обратная связь $\mathcal{V}(\cdot,\cdot,\cdot)$. Будем называть такую обратную связь *отслеживающей*, если найдутся число $h_1 \in (0,1)$ и функция $\gamma_V(\cdot)\colon (0,1) \mapsto [0,+\infty)$ такие, что $\gamma_V(h) \to 0$ при $h \to 0$ и для всякого $h \in (0,h_1)$, всякого семейства Δ_h разбиений отрезка T, всяких реализаций $u^h(\cdot)$ допустимой обратной связи $\mathcal{V}(\cdot,\cdot,\cdot)$ вида (1.10), всякой траектории уравнения (1.1) $x^h(\cdot)$ (т. е. решения уравнения (1.9)), соответствующей управлению $u^h(\cdot)$ вида (1.10) и всякого допустимого измерения $\xi^h(\cdot)$ точности h выполняется неравенство

$$\max_{t\in T}\left\{|x^h(t) - w(t)|_H + |\dot{x}^h(t) - \dot{w}(t)|_{V^*}\right\} \le \gamma_V(h), \tag{1.11}$$

т. е. неравенство (1.11) выполняется для управляемого процесса $(w(\cdot), x^h(\cdot), \xi^h(\cdot), u^h(\cdot))$. Функцию $\gamma_V(\cdot)$ будем при этом называть *оценкой точности* допустимой обратной связи $\mathcal{V}(\cdot,\cdot,\cdot)$.

Рассматриваемая задача об устойчивом отслеживании решения эталонного уравнения (1.2) решением уравнения (1.1) состоит в построении отслеживающих допустимых обратных связей $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$.

2. Алгоритм решения. Случай непрерывного измерения решений

Обратимся к случаю, когда измерения решений уравнений (1.1), (1.2) происходят непрерывно, т. е. выполняется неравенство (1.5).

Итак, нам необходимо указать отслеживающую обратную связь $\mathcal{U}(\cdot,\cdot)$. Фиксируем функцию

$$\alpha = \alpha(h) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}.$$

Положим

$$\mathcal{U}(\xi^h(t), \dot{w}(t)) = \alpha^{-1} B^* A^{-1}(\dot{w}(t) - \xi^h(t)). \tag{2.1}$$

Здесь символ B^* означает оператор, сопряженный к оператору B. Таким образом, в данном случае мы имеем систему (1.2), (1.6), т. е. пару уравнений

$$\ddot{w}(t) + Aw(t) = Bv(t) + f(t), \quad t \in T,$$

$$\ddot{x}^{\alpha,h}(t) + Ax^{\alpha,h}(t) = -\alpha^{-1}BB^*A^{-1}(\xi^h(t) - \dot{w}(t)) + f(t)$$

с начальными условиями

$$x^{\alpha,h}(t_0) = x_0, \quad w(t_0) = \tilde{x}_0, \quad \dot{x}^{\alpha,h}(t_0) = x_1, \quad \dot{w}(t_0) = \tilde{x}_1.$$

Заметим, что существование и единственность решения второго уравнения указанной выше системы является следствием теоремы 1.2 [11, с. 285].

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $\alpha(h) \to 0$, $h\alpha^{-2}(h) \le \mathrm{const}$ при $h \to 0$. Пусть также $t \to Bv(t) \in L_\infty(T;H)$. Тогда можно указать числа $h_0 \in (0,1)$ и $d_0 > 0$ такие, что при $h \in (0,h_0)$ справедливо неравенство*

$$\sup_{t\in T}\left\{|w(t) - x^{\alpha,h}(t)|_H^2 + |\dot{w}(t) - \dot{x}^{\alpha,h}(t)|_{V^*}^2\right\} \le d_0(\alpha(h) + h).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользовавшись (1.5) и (2.1), заключаем: справедливо неравенство

$$|u^{\alpha,h}(t)|_U^2 \le 2b^2\alpha^{-2}(h^2 + |\dot{\mu}_{\alpha,h}(t)|_{V^*}^2), \quad t \in T,$$

где $\alpha = \alpha(h)$, $\mu_{\alpha,h}(t) = x^{\alpha,h}(t) - w(t)$, $b = |B^*A^{-1}|_{L(V^*;U)}$ — норма линейного оператора $B^*A^{-1} \in L(V^*;U)$. В таком случае при $t \in T$

$$\int_{t_0}^{t} |u^{\alpha,h}(\tau)|_U^2 d\tau \le 2b^2\alpha^{-2} \int_{t_0}^{t} |\dot{\mu}_{\alpha,h}(\tau)|_{V^*}^2 d\tau + c_1 h^2 \alpha^{-2}. \tag{2.2}$$

Легко видеть также, что (в силу (1.5)), верно неравенство

$$\big(B(u^{\alpha,h}(t) - v(t)), A^{-1}\dot{\mu}_{\alpha,h}(t)\big)$$
$$\le \big(B(u^{\alpha,h}(t) - v(t)), A^{-1}(\xi^h(t) - \dot{w}(t))\big) + c_2 h\big\{|v(t)|_U + |u^{\alpha,h}(t)|_U\big\} \quad \text{при п.в. } t \in T. \tag{2.3}$$

В свою очередь, из (1.6), (1.2) следует: $\mu_{\alpha,h}(t)$ — решение уравнения

$$\ddot{\mu}_{\alpha,h}(t) + A\mu_{\alpha,h}(t) = B(u^{\alpha,h}(t) - v(t)), \quad t \in T,$$

с начальным условием

$$\mu_{\alpha,h}(t_0) = x_0 - \tilde{x}_0, \quad \dot{\mu}_{\alpha,h}(t_0) = x_1 - \tilde{x}_1.$$

Введем функцию Ляпунова

$$\varepsilon_h(t) = |\mu_{\alpha,h}(t)|_H^2 + |\dot{\mu}_{\alpha,h}(t)|_{V^*}^2 + \alpha \int_{t_0}^{t} \big\{|u^{\alpha,h}(\tau)|_U^2 - |v(\tau)|_U^2\big\} d\tau, \quad t \in T.$$

Аналогично [12, с. 103, 104] устанавливаем

$$\dot{\varepsilon}_h(t) = 2\big\langle A^{-1}\mu_{\alpha,h}(t), B(u^{\alpha,h}(t) - v(t))\big\rangle + \alpha|u^{\alpha,h}(t)|_U^2 - \alpha|v(t)|_U^2 \quad \text{при п.в.} \quad t \in T.$$

Тогда в силу (2.3) верно неравенство

$$\dot{\varepsilon}_h(t) = \frac{d|\mu_{\alpha,h}(t)|_H^2}{dt} + \frac{d|\dot{\mu}_{\alpha,h}(t)|_{V^*}^2}{dt} + \alpha\{|u^{\alpha,h}(t)|_U^2 - |v(t)|_U^2\}$$
$$\le 2\big(u^{\alpha,h}(t), B^*A^{-1}(\xi^h(t) - \dot{w}(t))\big)_U + \alpha|u^{\alpha,h}(t)|_U^2 - 2\big(v(t), B^*A^{-1}(\xi^h(t) - \dot{w}(t))\big)_U$$
$$- \alpha|v(t)|_U^2 + 2c_2h\big\{|v(t)|_U + |u^{\alpha,h}(t)|_U\big\}. \tag{2.4}$$

Заметим, что управление $u^{\alpha,h}(t)$ вида (2.1) таково:

$$u^{\alpha,h}(t) = \arg\min\big\{\alpha|v|_U^2 + 2\big(B^*A^{-1}(\xi^h(t) - \dot{w}(t)), v\big)_U : v \in U\big\}. \tag{2.5}$$

Из (2.4), учитывая (2.5), получаем при $t \in T$

$$\varepsilon_h(t) \le \varepsilon_h(t_0) + \int_{t_0}^{t} 2c_2h\{|v(\tau)|_U + |u^{\alpha,h}(\tau)|_U\} d\tau. \tag{2.6}$$

Ввиду включения $v(\cdot) \in L_2(T;U)$ справедлива оценка

$$\int_{t_0}^{\vartheta} 2c_2h|v(\tau)|_U \, d\tau \le c_3h.$$

В таком случае отсюда и из (2.6) получаем при $t \in [t_0, \vartheta]$

$$\varepsilon_h(t) \le \varepsilon_h(t_0) + c_4h\bigg(1 + \int_{t_0}^{t} |u^{\alpha,h}(\tau)|_U^2 \, d\tau\bigg). \tag{2.7}$$

В свою очередь из (2.7) в силу (2.2) выводим, учитывая неравенство $\varepsilon_h(t_0) \le 2h^2$, вытекающее из (1.3),

$$\varepsilon_h(t) \le 2h^2 + c_4 h + c_5 h\alpha^{-2}\Bigl(h^2 + \int\limits_{t_0}^{t} |\dot\mu_{\alpha,h}(\tau)|^2_{V^*} d\tau\Bigr). \tag{2.8}$$

Из (2.8) следует оценка

$$|\dot\mu_{\alpha,h}(t)|^2_{V^*} \le c_7 h + c_6\alpha + c_5 h\alpha^{-2}\Bigl(h^2 + \int\limits_{t_0}^{t} |\dot\mu_{\alpha,h}(\tau)|^2_{V^*} d\tau\Bigr). \tag{2.9}$$

По лемме Гронуолла [13] из (2.9) получаем при $t \in T$

$$|\dot\mu_{\alpha,h}(t)|^2_{V^*} \le (c_7 h + c_6\alpha + c_5 h^3\alpha^{-2}) \exp\{c_5(t - t_0)h\alpha^{-2}\}. \tag{2.10}$$

В силу условия леммы существует $h_0 \in (0,1)$ такое, что при всех $h \in (0, h_0)$ имеем $h\alpha^{-2}(h) \le \mathrm{const}$. Тогда, воспользовавшись (2.10), устанавливаем

$$|\dot\mu_{\alpha,h}(t)|^2_{V^*} \le c_8(h + \alpha(h)), \quad t \in T. \tag{2.11}$$

Из (2.8), учитывая (2.11), выводим

$$|\mu_{\alpha,h}(t)|^2_{H} + |\dot\mu_{\alpha,h}(t)|^2_{V^*} \le c_9(h + \alpha(h)). \tag{2.12}$$

Справедливость леммы следует из (2.12). Лемма доказана.

Прямым следствием леммы 1 является

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Тогда обратная связь вида* (2.1) *является отслеживающей, причем оценка точности этой обратной связи* $\gamma_U(h) = d_0(\alpha(h) + h)$.

3. Алгоритм решения. Случай дискретного измерения решений

Обратимся к случаю дискретного измерения фазовых состояний. Таким образом, будем предполагать, что результаты измерений состояний $\dot x(\tau_i)$ — величины ξ_i^h — удовлетворяют неравенствам (1.4). Как и выше, фиксируем функцию $\alpha = \alpha(h) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$. Наша цель — указать отслеживающую обратную связь $\mathcal{V}(\cdot,\cdot,\cdot)$, а также описать алгоритм решения задачи, т. е. последовательность действий, которые необходимо выполнить для отслеживания решения эталонного уравнения решением уравнения (1.1). Начнем с алгоритма.

До начала работы алгоритма фиксируется величина $h \in (0,1)$, а вместе с ней число $\alpha = \alpha(h)$ и разбиение Δ_h. Работа алгоритма разбивается на $m-1$ ($m = m_h$) однотипных шагов. В течение i-го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, выполняются следующие операции. Сначала в момент τ_i, вычисляется элемент

$$u_i^h = \mathcal{V}(\tau_i, \xi_i^h, \dot w(\tau_i)) = \alpha^{-1}B^*A^{-1}(\dot w(\tau_i) - \xi_i^h). \tag{3.1}$$

Затем на вход уравнения (1.1) подается управление

$$u^h(t) = u_i^h, \quad t \in \delta_i. \tag{3.2}$$

Под действием этого управления вместо состояния $\{x(\tau_i), \dot x(\tau_i)\}$ реализуется состояние $\{x(\tau_{i+1}), \dot x(\tau_{i+1})\}$, где $x(\tau_{i+1}) = x(\tau_{i+1}; \tau_i, x(\tau_i), \dot x(\tau_i), u_i^h)$. Работа алгоритма заканчивается в момент ϑ.

Таким образом, в данном случае мы также имеем пару уравнений (1.2) и (1.9), т.е. уравнения

$$\begin{aligned}&\ddot{w}(t)+Aw(t)=Bv(t)+f(t),\quad t\in T,\\&\ddot{x}^h(t)+Ax^h(t)=-\alpha^{-1}BB^*A^{-1}(\xi_i^h-\dot{w}(\tau_i))+f(t),\\&t\in\delta_i,\quad i\in[0:m-1],\end{aligned}\tag{3.3}$$

с начальными условиями $w(t_0)=\tilde{x}_0,\ \ x^h(t_0)=x_0,\ \ \dot{w}(t_0)=\tilde{x}_1,\ \ \dot{x}^h(t_0)=x_1.$

Имеет место следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть $\alpha(h)\to 0$, $(h+\delta(h))\alpha^{-2}(h)\to 0$ при $h\to 0$. Пусть также $t\to Bv(t)\in L_\infty(T;H)$. Тогда можно указать числа $h_1\in(0,1)$ и $d_1>0$ такие, что при $h\in(0,h_1)$ справедливо неравенство*

$$\max_{t\in T}\{|\mu^h(t)|_H^2+|\dot{\mu}^h(t)|_{V^*}^2\}\le\nu(h),$$

где $\mu^h(t)=x^h(t)-w(t)$, $\nu(h)=d_1\{\alpha(h)+(h+\delta(h))\alpha^{-2}(h)\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценим изменение величины

$$\gamma(\tau_i)=\max_{0\le j\le i}\{\varepsilon(\tau_j)\},\quad i\in[0:m],\quad m=m_h,\tag{3.4}$$

где

$$\varepsilon(t)=|\mu^h(t)|_H^2+|\dot{\mu}^h(t)|_{V^*}^2+\alpha\int\limits_{t_0}^{t}|u^h(\tau)|_U^2\,d\tau.$$

Заметим, что $\gamma(\tau_{i+1})=\max\{\gamma(\tau_i),\varepsilon(\tau_{i+1})\}$. Кроме того

$$\varepsilon(\tau_{i+1})=\varepsilon(\tau_i)+\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\varrho_i(\tau)\,d\tau+\alpha\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}|u^h(\tau)|_U^2\,d\tau.\tag{3.5}$$

Здесь $\varrho_i(\tau)=2(A^{-1}\dot{\mu}^h(\tau),B(u_i^h-v(\tau)))$. Легко видеть, что справедливо равенство

$$\varrho_i(t)=\sum_{j=1}^{3}\varrho_i^{(j)}(t),$$

где

$$\begin{aligned}\varrho_i^{(1)}(t)&=2\big(A^{-1}(\dot{\mu}^h(t)-\dot{\mu}^h(\tau_i)),B(u_i^h-v(t))\big),\\\varrho_i^{(2)}(t)&=-2\big(A^{-1}(\dot{w}(\tau_i)-\xi_i^h),B(u_i^h-v(t))\big),\\\varrho_i^{(3)}(t)&=2\big(A^{-1}(\dot{x}^h(\tau_i)-\xi_i^h),B(u_i^h-v(t))\big).\end{aligned}$$

Учитывая правило определения величин u_i^h (см. (3.1), (3.2)), имеем при п.в. $t\in\delta_i$

$$\varrho_i^{(2)}(t)+\alpha|u^h(t)|_U^2\le\alpha|v(t)|_U^2.\tag{3.6}$$

В свою очередь, в силу включения $t\to Bv(t)\in L_\infty(T;H)$ при п.в. $t\in\delta_i$ получаем

$$\varrho_i^{(3)}(t)\le C_1\{|u_i^h|_U+|v(t)|_U^2\}|\dot{x}^h(\tau_i)-\xi_i^h|_{V^*}\le C_2h\{1+|u_i^h|_U\},\tag{3.7}$$

$$\varrho_i^{(1)}(t)\le C_3\{1+|u_i^h|_U\}\big\{|\dot{x}^h(t)-\dot{x}^h(\tau_i)|_{V^*}+|\dot{w}(t)-\dot{w}(\tau_i)|_{V^*}\big\}.\tag{3.8}$$

При выводе (3.7) мы воспользовались неравенствами (1.4). Заметим, что при $h\in(0,1)$ справедливо неравенство

$$|u_i^h|_U = \alpha^{-1}|B^*A^{-1}(\xi_i^h - \dot w(\tau_i))|_U \le C_4\alpha^{-1}|\xi_i^h - \dot w(\tau_i)|_{V^*}$$
$$\le C_4\alpha^{-1}\{h + |\dot w(\tau_i) - \dot x^h(\tau_i)|_{V^*}\} \le C_4\alpha^{-1}\{h + \gamma^{1/2}(\tau_i)\}. \tag{3.9}$$

В таком случае, учитывая (3.4), (3.9), устанавливаем

$$|u^h(\cdot)|_{L_\infty([t_0,\tau_{i+1}];U)} \le C_5\alpha^{-1}\{h + \gamma^{1/2}(\tau_i)\}. \tag{3.10}$$

Воспользовавшись включением $t \to Bv(t) \in L_\infty(T;H) \subset L_2(T;H) \cap L_\infty(T;V^*)$, из теоремы 1.2 [12, с. 97] получаем при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $s \in [\tau_i, t]$

$$|\dot w(t) - \dot w(s)|_{V^*} \le 2\big(1 + (\tau_{i+1} - t_0)^{1/2}\big)\big(|\tilde x_0|_V + |\tilde x_1|_H + |Bv(\cdot)|_{L_2([t_0,\tau_{i+1}];H)}$$
$$+ |Bv(\cdot)|_{L_\infty([t_0,\tau_{i+1}];V^*)}\big)(t-s) \le C_6(t-s). \tag{3.11}$$

Для решения $x^h(\cdot)$ уравнения (3.3) в таком случае при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $s \in [\tau_i, t]$ верна оценка

$$|\dot x^h(t) - \dot x^h(s)|_{V^*} \le 2\big(1 + (\tau_{i+1} - t_0)^{1/2}\big)\big(|x_0|_V + |x_1|_H + |Bu^h(\cdot)|_{L_2([t_0,\tau_{i+1}];H)}$$
$$+ |Bu^h(\cdot)|_{L_\infty([t_0,\tau_{i+1}];V^*)}\big)(t-s) \le C_7\big(1 + |u^h(\cdot)|_{L_\infty([t_0,\tau_{i+1}];U)}\big)(t-s).$$

Отсюда и из (3.10) выводим при $t \in [\tau_i, \tau_i + \delta]$ неравенство

$$|\dot x^h(t) - \dot x^h(\tau_i)|_{V^*} \le C_8\alpha^{-1}\{h + \gamma^{1/2}(\tau_i)\}\delta. \tag{3.12}$$

Из (3.8), (3.9), (3.11), (3.12) получаем при $t \in [\tau_i, \tau_i + \delta]$

$$\varrho_i^{(1)}(t) \le C_9\alpha^{-1}\{1 + |u_i^h|_U\}\{1 + \gamma^{1/2}(\tau_i)\}\delta \le C_{10}\alpha^{-2}(1 + \gamma(\tau_i))\delta. \tag{3.13}$$

Кроме того, из (3.7), (3.10) следует при п.в. $t \in [\tau_i, \tau_i + \delta]$ оценка

$$\varrho_i^{(3)}(t) \le C_{11}h\{1 + \alpha^{-1}(h + \gamma^{1/2}(\tau_i))\}$$
$$= C_{11}h + C_{11}\alpha^{-1}h^2 + C_{11}h\alpha^{-1}\gamma^{1/2}(\tau_i) \le C_{11}h + C_{12}\alpha^{-2}h + h\gamma(\tau_i). \tag{3.14}$$

Объединив (3.6), (3.13), (3.14), будем иметь при п.в. $t \in [\tau_i, \tau_i + \delta]$

$$\varrho_i(t) + \alpha|u^h(t)|_U^2 \le \alpha|v(t)|_U^2 + C_{13}(\alpha^{-2}\delta + h + \alpha^{-2}h) + C_{14}(h + \alpha^{-2}\delta)\gamma(\tau_i). \tag{3.15}$$

Таким образом, в силу (3.5), (3.15), устанавливаем

$$\gamma(\tau_{i+1}) \le \gamma(\tau_i) + \alpha\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |v(\tau)|_U^2\,d\tau + C_{13}\delta(\alpha^{-2}\delta + h + \alpha^{-2}h) + C_{14}\delta(h + \delta\alpha^{-2})\gamma(\tau_i).$$

Отсюда стандартным образом (см. [1]) получаем

$$\gamma(\tau_i) \le \left\{\gamma(t_0) + \alpha\int_{t_0}^{\tau_i} |v(\tau)|_U^2\,d\tau + C_{13}(\vartheta - t_0)(\alpha^{-2}\delta + h + \alpha^{-2}h)\right\}\exp\big\{C_{14}(h + \delta\alpha^{-2})(\tau_i - t_0)\big\}. \tag{3.16}$$

В силу (1.3) верно неравенство $\gamma(t_0) \le 2h^2$. Кроме того, по условию леммы $(h+\delta(h))\alpha^{-2}(h) \to 0$ при $h \to 0$. В таком случае существует $h_1 \in (0,1)$ такое, что при $h \in (0, h_1)$ в силу (3.16) следует неравенство

$$\max_{i\in[0:m_h]}\{|\mu^h(\tau_i)|_H^2 + |\dot\mu^h(\tau_i)|_{V^*}^2\} \le C_{15}\big\{\alpha(h) + (h + \delta(h))\alpha^{-2}(h)\big\}. \tag{3.17}$$

Утверждение леммы является следствием неравенств (3.15), (3.17), а также равенства

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(\tau_i) + \int_{\tau_i}^{t} \varrho_i(\tau)\,d\tau + \alpha\int_{\tau_i}^{t} |u^h(\tau)|_U^2\,d\tau, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}].$$

Лемма доказана.

Из леммы 2 вытекает

Теорема 2. *Пусть выполнено условие леммы* 2. *Тогда обратная связь вида* (3.1) *является отслеживающей, а ее оценка точности* $\gamma_V(h) = d_1\{\alpha(h) + (h + \delta(h))\alpha^{-2}(h)\}$.

З а м е ч а н и е. Мы рассмотрели случай, когда решение эталонного уравнения (уравнения (1.2)) известно точно. Нетрудно видеть, что описанные выше алгоритмы позволяют решать рассмотренные выше задачи слежения и при измерении производных решения эталонного уравнения (1.2) с ошибкой. Именно, если вместо $\dot{w}(t)$ ($\dot{w}(\tau_i)$) измеряются величины $\psi^h(\cdot) \in L_\infty(T; H)$ ($\psi^h(\tau_i) \in H$) такие, что

$$|\psi^h(t) - \dot{w}(t)|_{V^*} \le h, \quad t \in T,$$

в случае непрерывного измерения или

$$|\psi^h(\tau_i) - \dot{w}(\tau_i)|_{V^*} \le h, \quad i \in [0 : m - 1],$$

в случае дискретного измерения, то в формулах (2.1) ((3.1)) следует $\dot{w}(t)$ ($\dot{w}(\tau_i)$) заменить на $\psi^h(t)$ ($\psi^h(\tau_i)$) соответственно. При этом леммы 1 и 2, а также теоремы 1 и 2 останутся справедливыми.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 458 с.
2. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 418 с.
3. **Осипов Ю.С.** Избранные труды. Москва: Изд-во МГУ, 2009. 656 с.
4. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
5. **Ушаков В.Н.** К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 4. С. 29–36.
6. **Барабанова Н.Н., Субботин А.И.** О классах стратегий в дифференциальных играх уклонения от встречи // Прикл. математика и механика. 1971. Т. 35, № 6. С. 385–392.
7. **Пацко В.С.** Поверхности переключения в линейных дифференциальных игра: препринт / Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2004. 80 с.
8. **Максимов В.И.** Об отслеживании траектории динамической системы // Прикл. математика и механика. 2011. Т. 75, № 6. С. 951–960.
9. **Максимов В.И.** Об отслеживании решения параболического уравнения // Изв. вузов. Математика. 2012. № 1. С. 1–9.
10. **Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Задача ресурсосберегающего слежения на бесконечном промежутке времени // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 7. С. 993–1002.
11. **Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.** Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. 336 с.
12. **Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.** Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во МГУ, 1999. 237 с.
13. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.

Максимов Вячеслав Иванович
Поступила 5.02.2015
д-р физ.-мат. наук
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: maksimov@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.977

О ПОЛЕЗНОСТИ КООПЕРАЦИИ В ИГРАХ ТРЕХ ЛИЦ[1]

М. С. Никольский, М. Абубакар

В статье рассматриваются игры трех лиц, в которых каждый игрок максимизирует свою функцию выигрыша. Изучается интересный для кооперативной теории игр вопрос о полезности объединения всех трех игроков в союз. Цель такой кооперации — получить каждому игроку положительную прибавку к его гарантированному выигрышу. В статье получены эффективные достаточные условия, при которых объединение игроков в союз оказывается полезным для каждого игрока. Специально рассматривается линейный случай. Здесь были получены весьма общие результаты в конструктивной форме. Во второй части статьи изучается вопрос о полезности кооперации трех игроков при наличии четвертого игрока — Природы. Поведение Природы считается непредсказуемым. Таким образом, она может навредить и каждому игроку в отдельности, и союзу этих игроков. Отметим, что рассматриваемая во второй части ситуация связана с одним докладом А. В. Кряжимского, состоявшимся летом 2014 г. В статье получены конструктивные условия, при которых объединение игроков в союз выгодно и в этой ситуации.

Ключевые слова: игра трех игроков, кооперация, полезность.

M. S. Nikolskii, M. Aboubacar. On the usefulness of cooperation in three-person games.

Three-person games in which each player maximizes his payoff function are considered. The question on the usefulness of a union of three players, which is interesting for cooperative game theory, is studied. The aim of the cooperation is that each player increases his guaranteed payoff. Effective sufficient conditions are obtained under which the union of the players is useful for each of them. The linear case is considered separately. In this case, rather general results are obtained in a constructive form. In the second part of the paper, the question on the usefulness of cooperation of three players in the presence of the fourth player—Nature—is studied. The behavior of Nature is assumed to be unpredictable; it may harm any individual player or the union of the players. Note that the situation considered in the second part is related to A.V. Kryazhimskii's talk delivered in the summer of 2014. We obtain constructive conditions under which the union of the players is beneficial in this situation as well.

Keywords: three-person game, cooperation, usefulness.

В теории игр (см., например, [1]) большое внимание уделяется кооперативной теории игр N лиц. В работе [2] мы рассматривали игры двух лиц с точки зрения полезности их объединения в союз с целью получения дополнительных дивидендов. В этой статье в первой части мы будем рассматривать игры трех лиц с точки зрения полезности объединения игроков в союз, в котором выбор стратегий производится согласованно с целью максимального увеличения суммы выигрышей трех лиц. Во второй части рассматриваются игры трех игроков при наличии возмущающих факторов, которые можно трактовать как действия непредсказуемой Природы. Здесь изучается вопрос о целесообразности объединения (кооперации) трех игроков в союз с целью противодействия возможным неприятностям от Природы.

1. Пусть в евклидовых арифметических пространствах $\mathbb{R}^{k_1}$ $(k_1 \geqslant 1)$, $\mathbb{R}^{k_2}$ $(k_2 \geqslant 1)$ и $\mathbb{R}^{k_3}$ $(k_3 \geqslant 1)$ (k_1, k_2, k_3 — размерности пространств) фиксированы непустые компакты X, Y, Z соответственно и на $X \times Y \times Z$ определены непрерывные скалярные функции $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ и $h(x,y,z)$. В рассматриваемой игре первый игрок выбирает вектор $x \in X$ и стремится к максимизации своего выигрыша $f(x,y,z)$, второй игрок выбирает вектор $y \in Y$ и стремится к максимизации своего выигрыша $g(x,y,z)$, а третий игрок выбирает вектор $z \in Z$ и также стремится к максимизации своего выигрыша $h(x,y,z)$. Игроки производят выбор векторов x, y, z независимо друг от друга. Как известно из теории игр (см., например, [1]) первый игрок

[1]Работа написана при финансовой поддержке РФФИ (проекты 13-01-00685, 13-01-12446 офи-м2) и научного проекта № 14-00-90408 Укр_а и НАН Украины № 03-01-14.

может гарантировать выигрыш

$$\gamma_1 = \max_{x\in X} \min_{y\in Y, z\in Z} f(x,y,z), \tag{1}$$

если он выбирает вектор $x_0 \in X$ согласно требованию

$$\gamma_1 = \min_{y\in Y, z\in Z} f(x_0,y,z).$$

Аналогично второй игрок может гарантировать выигрыш

$$\gamma_2 = \max_{y\in Y} \min_{x\in X, z\in Z} g(x,y,z), \tag{2}$$

если он выбирает вектор $y_0 \in Y$ из условия

$$\gamma_2 = \min_{x\in X, z\in Z} g(x,y_0,z).$$

Третий игрок также может гарантировать выигрыш

$$\gamma_3 = \max_{z\in Z} \min_{x\in X, y\in Y} h(x,y,z), \tag{3}$$

если он выбирает вектор $z_0 \in Z$ из условия

$$\gamma_3 = \min_{x\in X, y\in Y} h(x,y,z_0).$$

Хотя, вообще говоря, с физической точки зрения выигрыши $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$, $h(x,y,z)$ могут измеряться в разных физических единицах, будем считать, что выигрыши $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$, $h(x,y,z)$ измеряются в одинаковых единицах (в экономических приложениях, например, выигрыши $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$, $h(x,y,z)$ обычно измеряются в денежных единицах). При таком предположении величина $f(x,y,z)+g(x,y,z)+h(x,y,z)$ тоже имеет физический смысл. Если три игрока объединяются в союз (коалицию), то, действуя согласованно (т. е. совместно выбирая тройку (x,y,z) из $X\times Y\times Z$), они могут использовать величину

$$\gamma_4 = \max_{x\in X, y\in Y, z\in Z} \left(f(x,y,z)+g(x,y,z)+h(x,y,z)\right).$$

Нетрудно обосновать, что (см. (1)–(3)) $\gamma_4 \geqslant \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$. Если

$$\gamma_4 > \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3, \tag{4}$$

то объединение игроков в союз (коалицию) выгодно всем игрокам, так как положительную величину $\Delta = \gamma_4 - (\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)$ можно распределить в виде положительных добавок к гарантированным выигрышам γ_1, γ_2, γ_3. Как это распределение разумно делать фактически, обсуждается в теории игр.

Возникает интересный для теорий игр и ее приложений вопрос о нахождении конструктивных условий на элементы рассматриваемой нами игры, при которых выполняется строгое неравенство (4). Рассмотрим два случая, в которых удается указать такие условия.

С л у ч а й А. Непрерывные функции f, g, h имеют на $X\times Y\times Z$ разделенный вид:

$$\begin{gathered} f(x,y,z) = f_1(x)+f_2(y)+f_3(z), \\ g(x,y,z) = g_1(x)+g_2(y)+g_3(z), \\ h(x,y,z) = h_1(x)+h_2(y)+h_3(z), \end{gathered} \tag{5}$$

где функции $f_1(x)$, $g_1(x)$, $h_1(x)$ непрерывны на X, функции $f_2(y)$, $g_2(y)$, $h_2(y)$ непрерывны на Y, а функции $f_3(z)$, $g_3(z)$, $h_3(z)$ непрерывны на Z.

Условимся в дальнейшем писать вместо операций $\max\limits_{x\in X}$, $\max\limits_{y\in Y}$ и $\max\limits_{z\in Z}$ операции $\max\limits_{x}$, $\max\limits_{y}$ и $\max\limits_{z}$ соответственно. Аналогично вместо операций $\min\limits_{x\in X}$, $\min\limits_{y\in Y}$ и $\min\limits_{z\in Z}$ будем писать $\min\limits_{x}$, $\min\limits_{y}$ и $\min\limits_{z}$ соответственно. В рассматриваемом случае исследуемое неравенство (4) переписывается в виде

$$\begin{aligned}\max_x\,[f_1(x)+g_1(x)+h_1(x)]+\max_y\,[f_2(y)+g_2(y)+h_2(y)]+\max_z\,[f_3(z)+g_3(z)+h_3(z)]\\ >\max_x f_1(x)+\min_y f_2(y)+\min_z f_3(z)+\max_y g_2(y)+\min_x g_1(x)+\min_z g_3(z)\\ +\max_z h_3(z)+\min_x h_1(x)+\min_y h_2(y).\end{aligned}\tag{6}$$

Отдельно рассмотрим неравенства

$$\max_x\,(f_1(x)+g_1(x)+h_1(x))\geqslant\max_x f_1(x)+\min_x g_1(x)+\min_x h_1(x),\tag{7}$$

$$\max_y\,(g_2(y)+f_2(y)+h_2(y))\geqslant\max_y g_2(y)+\min_y f_2(y)+\min_y h_2(y),\tag{8}$$

$$\max_z\,(h_3(z)+f_3(z)+g_3(z))\geqslant\max_z h_3(z)+\min_z f_3(z)+\min_z g_3(z).\tag{9}$$

Лемма 1. *При сделанных предположениях неравенство* (7) *имеет место.*

Доказательство. Очевидно $\forall x\in X$

$$f_1(x)+g_1(x)+h_1(x)\geqslant f_1(x)+\min_x g_1(x)+\min_x h_1(x).$$

Применяя к обеим частям этого неравенства операцию $\max\limits_x$, получим неравенство (7).

Аналогичным образом обосновываются следующие две леммы.

Лемма 2. *При сделанных предположениях неравенство* (8) *имеет место.*

Лемма 3. *При сделанных предположениях неравенство* (9) *имеет место.*

Отметим, что в общем случае каждое из неравенств (7)–(9) не обязательно выполняется в строгом смысле. Справедлива следующая

Лемма 4. *Пусть существует такая точка x_0 из множества $\operatorname{Arg}\max\limits_x f_1(x)$, которая не принадлежит по крайней мере одному из множеств $\operatorname{Arg}\min\limits_x g_1(x)$, $\operatorname{Arg}\min\limits_x h_1(x)$, тогда имеет место неравенство* (ср. с (7))

$$\max_x\,(f_1(x)+g_1(x)+h_1(x))>\max_x f_1(x)+\min_x g_1(x)+\min_x h_1(x).\tag{10}$$

Доказательство. Допустим, что $x_0\in\operatorname{Arg}\max\limits_x f_1(x)$, и x_0 не принадлежит по крайней мере одному из множеств $\operatorname{Arg}\min\limits_x g_1(x)$, $\operatorname{Arg}\min\limits_x h_1(x)$ и выполняется равенство

$$\max_x\,(f_1(x)+g_1(x)+h_1(x))=\max_x f_1(x)+\min_x g_1(x)+\min_x h_1(x).$$

Очевидно, левая часть неравенства (10) больше или равна величине

$$f_1(x_0)+g_1(x_0)+h_1(x_0)=\max_x f_1(x)+g_1(x_0)+h_1(x_0).$$

Из сказанного получаем $\max_x f_1(x) + \min_x g_1(x) + \min_x h_1(x) \geqslant \max_x f_1(x) + g_1(x_0) + h_1(x_0)$, т. е.

$$\min_x g_1(x) + \min_x h_1(x) \geqslant g_1(x_0) + h_1(x_0). \tag{11}$$

Очевидно неравенство

$$\min_x g_1(x) + \min_x h_1(x) \leqslant g_1(x_0) + h_1(x_0). \tag{12}$$

Из (11), (12), получаем $\min_x g_1(x) + \min_x h_1(x) = g_1(x_0) + h_1(x_0)$. Следовательно,

$$g_1(x_0) = \min_x g_1(x) \quad \text{и} \quad h_1(x_0) = \min_x h_1(x),$$

т. е.

$$x_0 \in \operatorname{Arg}\min_x g_1(x) \quad \text{и} \quad x_0 \in \operatorname{Arg}\min_x h_1(x).$$

Мы пришли к противоречию с условиями леммы. Таким образом, в условиях нашей леммы 4 в (7) выполняется строгое неравенство. □

Замечание 1. Символы $\operatorname{Arg}\max_x \omega(x)$, $\operatorname{Arg}\min_x \omega(x)$ означают соответственно множества точек максимума, минимума функции $\omega(x)$ на X.

По аналогии с леммой 4 доказываются следующие две леммы.

Лемма 5. *Пусть существует такая точка* y_0 *из множества* $\operatorname{Arg}\max_y g_2(y)$, *которая не принадлежит по крайней мере одному из множеств* $\operatorname{Arg}\min_y f_2(y)$, $\operatorname{Arg}\min_y h_2(y)$, *тогда имеет место неравенство* (ср. с (8))

$$\max_y (g_2(y) + f_2(y) + h_2(y)) > \max_y g_2(y) + \min_y f_2(y) + \min_y h_2(y). \tag{13}$$

Замечание 2. Символы $\operatorname{Arg}\max_y \omega(y)$, $\operatorname{Arg}\min_y \omega(y)$ означают соответственно множества точек максимума, минимума функции $\omega(y)$ на Y.

Лемма 6. *Пусть существует такая точка* z_0 *из множества* $\operatorname{Arg}\max_z h_3(z)$, *которая не принадлежит по крайней мере одному из множеств* $\operatorname{Arg}\min_z f_3(z)$, $\operatorname{Arg}\min_z g_3(z)$, *тогда имеет место неравенство* (ср. с (9))

$$\max_z (h_3(z) + f_3(z) + g_3(z)) > \max_z h_3(z) + \min_z f_3(z) + \min_z g_3(z). \tag{14}$$

Замечание 3. Символы $\operatorname{Arg}\max_z \omega(z)$, $\operatorname{Arg}\min_z \omega(z)$ означают соответственно множества точек максимума, минимума функции $\omega(z)$ на Z.

Из вышесказанного вытекает

Теорема 1. *Если выполняются условия одной из лемм* 4–6, *то имеет место строгое неравенство* (6) *и, следовательно, строгое неравенство* (4).

Теперь рассмотрим второй случай.

Линейный случай B. Множества X, Y и Z — выпуклые компакты, а непрерывные функции $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$, $h(x,y,z)$ имеют на $X \times Y \times Z$ линейный вид:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \langle a_1, x\rangle + \langle b_1, y\rangle + \langle c_1, z\rangle, \\ g(x,y,z) &= \langle a_2, x\rangle + \langle b_2, y\rangle + \langle c_2, z\rangle, \\ h(x,y,z) &= \langle a_3, x\rangle + \langle b_3, y\rangle + \langle c_3, z\rangle, \end{aligned} \tag{15}$$

где a_i, $i = 1,2,3$ — фиксированные векторы из $\mathbb{R}^{k_1}$; b_i, $i = 1,2,3$ — фиксированные векторы из $\mathbb{R}^{k_2}$; c_i, $i = 1,2,3$ — фиксированные векторы из $\mathbb{R}^{k_3}$; символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначены стандартные скалярные произведения в $\mathbb{R}^{k_1}$, $\mathbb{R}^{k_2}$ и $\mathbb{R}^{k_3}$ соответственно. Так как функции $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$, $h(x,y,z)$ имеют разделенный вид (ср. с (5)), то можно использовать результаты, полученные нами в случае A. В рассматриваемом линейном случае B можно переписать строгое неравенство (10) в виде

$$\max_x \left(\langle a_1 + a_2 + a_3, x \rangle \right) > \max_x \langle a_1, x \rangle + \min_x \langle a_2, x \rangle + \min_x \langle a_3, x \rangle \,, \tag{16}$$

строгое неравенство (13) в виде

$$\max_y \left(\langle b_1 + b_2 + b_3, y \rangle \right) > \max_y \langle b_2, y \rangle + \min_y \langle b_1, y \rangle + \min_y \langle b_3, y \rangle \tag{17}$$

и строгое неравенство (14) в виде

$$\max_z \left(\langle c_1 + c_2 + c_3, z \rangle \right) > \max_z \langle c_3, z \rangle + \min_z \langle c_1, z \rangle + \min_z \langle c_2, z \rangle \,. \tag{18}$$

Нам в дальнейшем понадобятся вспомогательные сведения.

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ $(m \geqslant 1)$ обозначим $\sigma_m = \{v \in \mathbb{R}^m : |v| = 1\}$, где $|v|$ означает стандартную длину вектора v. Нам будет полезно следующее (см., [2, с. 36]) определение.

О п р е д е л е н и е. Непустой выпуклый компакт $K \subset \mathbb{R}^m$ $(m \geqslant 2)$ с непустой внутренностью называется S-множеством, если:

(1) при любом $\psi \in \sigma_m$ в K существует лишь один вектор $v(\psi)$, максимизирующий по $v \in K$ скалярное произведение $\langle v, \psi \rangle$;

(2) для каждой граничной точки v_0 компакта K существует лишь одна опорная гиперплоскость, проходящая через точку v_0.

З а м е ч а н и е 4. Здесь и далее мы используем некоторые понятия выпуклого анализа (см., например [3; 4]). Отметим, что точка $v(\psi)$ при каждом $\psi \in \sigma_m$ принадлежит границе множества K. Используя терминологию выпуклого анализа, можно сказать, что S-множество является строго выпуклым множеством, а также гладким выпуклым телом.

Лемма 7 [2, лемма 6]. *Пусть множество $K \subset \mathbb{R}^m$ $(m \geqslant 2)$ является S-множеством, а векторы p, q — некоторые ненулевые векторы из $\mathbb{R}^m$, причем*

$$\frac{1}{|p|} p \neq \frac{1}{|q|} \, (-q).$$

Тогда выполняется неравенство $\left(\langle v(p), -q \rangle \right) < \left(\langle v(-q), -q \rangle \right)$.

Лемма 8. *Пусть в* (15) *множество $X \subset \mathbb{R}^{k_1}$ $(k_1 \geqslant 2)$* является S-множеством, а векторы a_1, a_2, a_3 являются ненулевыми и вектор $\dfrac{1}{|a_1|} a_1$ не равен по крайней мере одному из векторов $\dfrac{1}{|a_2|}\,(-a_2)$, $\dfrac{1}{|a_3|}\,(-a_3)$, тогда имеет место строгое неравенство (16).

Д о к а з а т е л ь с т в о. При сделанных предположениях однозначно определен вектор $x(a_1)$, максимизирующий функцию $\langle x, a_1 \rangle$ по $x \in X$. Таким образом,

$$\operatorname*{Arg\,max}_x \langle x, a_1 \rangle = \{x(a_1)\}. \tag{19}$$

Так как вектор $\dfrac{1}{|a_1|} a_1$ не равен по крайней мере одному из векторов $\dfrac{1}{|a_2|}\,(-a_2)$, $\dfrac{1}{|a_3|}\,(-a_3)$, то обозначив $p = a_1$, $q = a_i$, $i = 2,3$, на основании леммы 7, получим по крайней мере одно из неравенств

$$\left(\langle x(a_1), -a_2 \rangle \right) < \left(\langle x(-a_2), -a_2 \rangle \right), \quad \left(\langle x(a_1), -a_3 \rangle \right) < \left(\langle x(-a_3), -a_3 \rangle \right), \tag{20}$$

где $x(-a_2)$ означает максимизатор функции $\langle x, -a_2\rangle$ при $x \in X$, а $x(-a_3)$ максимизатор функции $\langle x, -a_3\rangle$ при $x \in X$. Можно показать, что

$$\min_x \langle x, a_2\rangle = -\langle x(-a_2), -a_2\rangle\,, \quad \min_x \langle x, a_3\rangle = -\langle x(-a_3), -a_3\rangle\,. \tag{21}$$

Из соотношений (20), (21) мы получим по крайней мере одно из неравенств

$$(\langle x(a_1), a_2\rangle) > \min_x \langle x, a_2\rangle\,, \quad (\langle x(a_1), a_3\rangle) > \min_x \langle x, a_3\rangle\,.$$

Отсюда вытекает, что выполняется по крайней мере одно из соотношений

$$x(a_1) \notin \operatorname*{Arg\,min}_x \langle x, a_2\rangle\,, \quad x(a_1) \notin \operatorname*{Arg\,min}_x \langle x, a_3\rangle\,. \tag{22}$$

Из соотношений (19), (20), (22) вытекает, что $x(a_1) \in \operatorname*{Arg\,max}_x f_1(x)$ и $x(a_1)$ не принадлежит по крайней мере одному из множеств $\operatorname*{Arg\,min}_x g_1(x)$, $\operatorname*{Arg\,min}_x h_1(x)$.
Из сказанного и леммы 4 следует, что имеет место строгое неравенство (16).

Лемма 9. *Пусть в* (15) *множество* $Y \subset \mathbb{R}^{k_2}$ ($k_2 \geqslant 2$) является S-множеством, а векторы b_1, b_2, b_3 являются ненулевыми и вектор $\dfrac{1}{|b_2|}b_2$ не равен по крайней мере одному из векторов $\dfrac{1}{|b_1|}\,(-b_1)$, $\dfrac{1}{|b_3|}\,(-b_3)$, тогда имеет место строгое неравенство (17).

Д о к а з а т е л ь с т в о этой леммы проводится по схеме доказательства леммы 8 с очевидными изменениями.

Лемма 10. *Пусть в* (15) *множество* $Z \subset \mathbb{R}^{k_3}$ ($k_3 \geqslant 2$) является S-множеством, а векторы c_1, c_2, c_3 являются ненулевыми и вектор $\dfrac{1}{|c_3|}c_3$ не равен по крайней мере одному из векторов $\dfrac{1}{|c_1|}\,(-c_1)$, $\dfrac{1}{|c_2|}\,(-c_2)$, тогда имеет место строгое неравенство (18).

Д о к а з а т е л ь с т в о этой леммы проводится по схеме доказательства леммы 8 с очевидными изменениями.

Теорема 2. *Если выполнены условия одной из лемм* 8–10, *то имеет место искомое неравенство*

$$\max_x (\langle a_1+a_2+a_3, x\rangle) + \max_y (\langle b_1+b_2+b_3, y\rangle) + \max_z (\langle c_1+c_2+c_3, z\rangle) > \max_x \langle a_1, x\rangle$$
$$+ \min_x \langle a_2, x\rangle + \min_x \langle a_3, x\rangle + \max_y \langle b_2, y\rangle + \min_y \langle b_1, y\rangle + \min_y \langle b_3, y\rangle + \max_z \langle c_3, z\rangle$$
$$+ \min_z \langle c_1, z\rangle + \min_z \langle c_2, z\rangle\,.$$

Заметим, что функции выигрыша, имеющие разделенный вид (см. (5)), нередко рассматриваются в теории игр (см., например, [5]).

2. В этой части мы кратко изучим некоторую более общую игровую модель, нежели в первой части, учитывающую наличие четвертого игрока — Природы. Постановка рассматриваемой здесь задачи возникла под влиянием одного доклада А. В. Кряжимского.

Рассматривается игра трех лиц в почти классической форме.

Функция выигрыша первого игрока — непрерывная функция $f(x,y,z,t)$. Функция выигрыша второго игрока — непрерывная функция $g(x,y,z,t)$. Функция выигрыша третьего игрока —

непрерывная функция $h(x,y,z,t)$. Здесь $x\in X$, $y\in Y$, $z\in Z$, $t\in T$, где X, Y, Z, T — непустые компакты в соответствующих конечномерных евклидовых пространствах. Первый игрок выбирает $x\in X$ с целью максимизации $f(x,y,z,t)$. Второй игрок выбирает $y\in Y$ с целью максимизации $g(x,y,z,t)$. Третий игрок выбирает $z\in Z$ с целью максимизации $h(x,y,z,t)$. Вектор $t\in T$ выбирается Природой, цели которой не ясны игрокам. Поэтому Природа может навредить игрокам, и это надо как-то учесть. Мы хотим показать, что иногда игрокам выгодно объединяться в коалицию и вместе бороться с возможными действиями Природы.

Будем изучать игры, для которых

$$\max_{x,y,z}\min_{t}\left(f(x,y,z,t)+g(x,y,z,t)+h(x,y,z,t)\right)>\max_{x}\min_{y,z,t}f(x,y,z,t)$$
$$+\max_{y}\min_{x,z,t}g(x,y,z,t)+\max_{z}\min_{x,y,t}h(x,y,z,t). \tag{23}$$

Здесь и далее в подобных неравенствах $x\in X$, $y\in Y$, $z\in Z$, $t\in T$.

Отметим, что при выполнении неравенства (23) игрокам выгодно объединиться в коалицию, чтобы после торга получить больший выигрыш, нежели при антагонистическом подходе к игре. В сущности, в неравенстве (23) мы используем идеи понятия характеристической функции из кооперативной теории игр. Наше исследование сильно упрощается, если

$$f(x,y,z,t)=f_1(x,y,z)+f_2(t),$$
$$g(x,y,z,t)=g_1(x,y,z)+g_2(t), \tag{24}$$
$$h(x,y,z,t)=h_1(x,y,z)+h_2(t),$$

где функции f_1, g_1, h_1 непрерывны на $X\times Y\times Z$, а функции f_2, g_2, h_2 непрерывны на T. С помощью (24) соотношение (23) тогда переписывается в виде неравенства

$$\max_{x,y,z}\left[f_1(x,y,z)+g_1(x,y,z)+h_1(x,y,z)\right]+\min_{t}\left[f_2(t)+g_2(t)+h_2(t)\right]$$
$$>\max_{x}\min_{y,z}f_1(x,y,z)+\max_{y}\min_{x,z}g_1(x,y,z)+\max_{z}\min_{x,y}h_1(x,y,z)$$
$$+\min_{t}f_2(t)+\min_{t}g_2(t)+\min_{t}h_2(t). \tag{25}$$

Отметим, что справедливо неравенство

$$\max_{x,y,z}\left[f_1(x,y,z)+g_1(x,y,z)+h_1(x,y,z)\right]\geqslant\max_{x}\min_{y,z}f_1(x,y,z)$$
$$+\max_{y}\min_{x,z}g_1(x,y,z)+\max_{z}\min_{x,y}h_1(x,y,z). \tag{26}$$

Обоснование неравенства (26): при $x\in X, y\in Y, z\in Z$ имеем

$$f_1(x,y,z)+g_1(x,y,z)+h_1(x,y,z)\geqslant\min_{y,z}f_1(x,y,z)+\min_{x,z}g_1(x,y,z)+\min_{x,y}h_1(x,y,z).$$

Применяем к обеим частям операцию $\max\limits_{x,y,z}$ и получаем искомое.

Из (26) вытекает, что для выполнения неравенства (25) достаточно обеспечить неравенство

$$\min_{t}\left[f_2(t)+g_2(t)+h_2(t)\right]>\min_{t}f_2(t)+\min_{t}g_2(t)+\min_{t}h_2(t). \tag{27}$$

Отметим, что в общем случае

$$\min_{t}\left[f_2(t)+g_2(t)+h_2(t)\right]\geqslant\min_{t}f_2(t)+\min_{t}g_2(t)+\min_{t}h_2(t). \tag{28}$$

То есть для реализации неравенства (27) нужно, чтобы неравенство (28) стало строгим.

От противного доказывается, что строгое неравенство (27) выполняется, если

$$\operatorname*{Arg\,min}_{t\in T}f_2(t)\bigcap\operatorname*{Arg\,min}_{t\in T}g_2(t)\bigcap\operatorname*{Arg\,min}_{t\in T}h_2(t)=\varnothing. \tag{29}$$

Отметим, что выполнение условия (29) не зависит от выбора функций $f_1(x,y,z)$, $g_1(x,y,z)$, $h_1(x,y,z)$. Итак, из сказанного вытекает, что для выполнения строгого неравенства (25) достаточно, чтобы было выполнено соотношение (29).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Воробьев Н.Н.** Теория игр для экономистов-кибернетиков. М.: Наука, 1985. 272 с.
2. **Никольский М.С., Абубакар М.** О полезности кооперации в играх двух лиц // Математическое образование. 2014. Т. 71, № 3. С. 34–40.
3. **Боннезен Т., Фенхель В.** Теория выпуклых тел. М.: Фазис, 2002. 210 с.
4. **Благодатских В.И.** Введение в оптимальное управление. М.: Высш. шк., 2001. 239 с.
5. **Жуковский В.И.** Кооперативные игры при неопределенности и их приложения. 2-е изд. М.: URSS, 2010. 336 с.

Никольский Михаил Сергеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Математический институт РАН им. В. А. Стеклова
e-mail: mni@mi.ras.ru

Поступила 10.02.2015

Мусса Абубакар
канд. физ.-мат. наук, Maitre-Assistant
Кафедра математики и информатики
Ниамейский Университет им. Абду Мумуни
Ниамей, Нигер
e-mail: moussa@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.977

УСПОКОЕНИЕ СИСТЕМЫ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЕННОГО СУХОГО ТРЕНИЯ[1]

А. И. Овсеевич, А. К. Федоров

Рассматривается задача успокоения системы линейных осцилляторов. Задача решается с помощью управления, имеющего вид сухого трения. Движение системы под действием данного управления описывается системой дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Доказана теорема единственности и непрерывности фазового потока этой системы. Тем самым, движение системы осцилляторов под действием управления в виде обобщенного сухого трения определяется однозначно.

Ключевые слова: оптимальное управление, теория ДиПерны — Лионса, сингулярные ОДУ.

A. I. Ovseevich, A. K. Fedorov. Damping of a system of linear oscillators using the generalized dry friction

The problem of damping a system of linear oscillators is considered. The problem is solved by using a control in the form of dry friction. The motion of the system under the control is governed by a system of differential equations with a discontinuous right-hand side. A uniqueness and continuity theorem is proved for the phase flow of this system. Thus, the control in the form of generalized dry friction defines the motion of the system of oscillators uniquely.

Keywords: optimal control, DiPerna–Lions theory, singular ODE.

Введение

Настоящая работа тесно связана с докладом одного из авторов (А. И. Овсеевич) на Международном семинаре “Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби”, посвященном А. И. Субботину. Предмет данной работы соотносится с одной из центральных тем творчества Андрея Измайловича: как правильно определить решение задачи так, чтобы вся соответствующая теория приняла привлекательную и окончательную форму.

Конечно, Андрей Измайлович и мы занимались существенно различными проблемами. В нашей работе идет речь не о решениях нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, а о решениях обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и связанных с ними линейных уравнений переноса. Тем не менее основная идея работы состоит именно в том, чтобы на основе нетрадиционного понятия решения получить окончательные теоремы существования и единственности движения для некоторой вполне конкретной системы дифференциальных уравнений с разрывной правой частью.

В рассматриваемом случае эта система возникает при попытке управлять квазиоптимальным образом системой из произвольного числа линейных осцилляторов с помощью управления по обратной связи в виде обобщенного сухого трения [1–3], а используемое нами понятие решения взято из классической работы Р. ДиПерны и П. Лионса [4].

1. Постановка задачи и предварительные сведения

Как известно, с помощью принципа максимума можно явно построить управление в форме синтеза (по обратной связи) для быстрейшего успокоения одного линейного осциллятора [5].

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 14-08-00606 и 14-01-00476).

Прямым обобщением такой задачи является вопрос об успокоении системы из произвольного числа N линейных осцилляторов с различными собственными частотами ω_i:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{V} = \mathbb{R}^{2N}, \quad u \in \mathbb{U} = \mathbb{R}, \quad |u| \leq 1, \tag{1.1}$$

где матрица A и вектор B имеют вид

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \operatorname{diag}(A_i), \quad B_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \oplus B_i. \tag{1.2}$$

В естественных координатах (x_i, y_i) система записывается в виде

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i = y_i, \\ &\dot{y}_i = -\omega_i^2 x_i + u, \quad |u| \leq 1, \quad i = 1, \ldots, N. \end{aligned}$$

Асимптотические свойства системы (1.1), (1.2) во многом определяются наличием или отсутствием резонансов, т. е. нетривиальных соотношений между частотами вида

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \omega_i = 0, \quad \text{где } 0 \neq m = (m_1, \ldots, m_N) \in \mathbb{Z}^N. \tag{1.3}$$

Критерий управляемости Калмана [6] для системы (1.1), (1.2) состоит в различии частот: $\omega_i \neq \omega_j$ при $i \neq j$ и, конечно, существенно слабее, чем условие отсутствия резонансов.

Задача быстродействия для системы (1.1), (1.2) может быть сведена к краевой задаче принципа максимума Понтрягина:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + Bu, \quad \dot{p} = -A^* p, \\ &u = \operatorname{sign}\langle B, p\rangle, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = 0, \quad h(x, p) = 0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

отвечающей гамильтониану $h(x,p) = \langle Ax, p\rangle + |\langle B, p\rangle| - 1 = \max_{|u| \leq 1}\{\langle Ax, p\rangle + \langle Bu, p\rangle - 1\}$, где угловые скобки $\langle .,. \rangle$ обозначают скалярное произведение в $\mathbb{R}^{2N}$ и $|\cdot|$ — евклидова норма.

Заметим, что система (1.4) — гамильтонова с $2N$ степенями свободы и $N+1$ интегралом движения. Таковыми являются гамильтониан h и энергии

$$I_i = \frac{1}{2}\left(\eta_i^2 + \omega_i^{-2}\xi_i^2\right), \quad i = 1, \ldots, N,$$

нормальных колебаний вектора p, записанного в виде $p_i = (\xi_i, \eta_i)$, где ξ_i — переменная, двойственная к x_i, η_i — переменная, двойственная к y_i. С точки зрения канонической системы принципа максимума (1.4) задача быстрейшего успокоения одного линейного осциллятора является вполне интегрируемой, поскольку именно в этом случае $N = 1$ число $N+1$ интегралов движения совпадает с числом $2N$ степеней свободы. Отметим, что аналогичное тождество лежит в основе теоремы Лиувилля — Арнольда о полной интегрируемости гамильтоновых систем [7]. Напротив, задача (1.1), (1.2), по-видимому, не является вполне интегрируемой и поэтому аналитическое построение оптимального управления методами, основанными на принципе максимума Понтрягина, вряд ли возможно.

Общая задача состоит в построении неоптимального управления по обратной связи, приводящего систему в состояние равновесия. В работах [1; 2] был предложен подход к построению асимптотически оптимального управления системой (1.1), (1.2). При использовании методов [1; 2] отношение времени приведения системы в положение равновесия с помощью предлагаемого управления к минимально возможному близко к единице, если начальная энергия системы достаточно велика [2].

В рамках данной работы мы ограничиваемся кругом вопросов, связанных с построением управления в виде обобщенного сухого трения и изучением движения системы под действием данного управления. Мы описываем подход к построению управления, а также изучаем связанные с движением системы дифференциальные уравнения с разрывной правой частью и показываем, что движение системы можно определить однозначно. В терминах [1; 2] это дает описание динамики системы под действием асимптотически оптимального управления в областях фазового пространства с достаточно большой энергией. В настоящей работы мы приводим доказательства теорем существования и единственности решений возникающих при этом дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Исследование асимптотических свойств и подробное описание управления могут быть найдены в [2; 3].

Следует отметить, что известны и существенно иные методы построения управления в форме синтеза для линейных систем. Таковы, например, методы, основанные на подходе Калмана к программному управлению [8;9]. Работы [8;9] также содержат оценки для времени движения под действием построенного управления. Это время оказывается сравнимым с оптимальным: отношение времени движения под действием данного управления к минимальному ограничено.

2. Управление системой осцилляторов

Хорошо известная геометрическая интерпретация уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана для задачи быстродействия состоит в том, что вектор импульса $\partial T/\partial x$ в точке x представляет собой внутреннюю нормаль к области достижимости $\mathcal{D}(T(x))$, где $T(x)$ — время быстродействия для управляемой системы.

О п р е д е л е н и е 1. Область достижимости $\mathcal{D}(T)$ — множество концов допустимых траекторий управляемой системы, выходящих из нуля и параметризованных интервалом времени $[0.T]$.

Управление оптимального быстродействия имеет вид

$$u(x) = -\operatorname{sign}\langle B, p(x)\rangle, \quad p = \frac{\partial T}{\partial x}(x), \tag{2.1}$$

где p — внешняя нормаль к области достижимости из нуля $\mathcal{D}(T(x))$, граница которой проходит через x.

Управление в виде обобщенного сухого трения

$$u = -\operatorname{sign}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i y_i, \tag{2.2}$$

где λ_i — некоторые положительные коэффициенты, зависящие от координат и скоростей, возникает при замене точной области достижимости $\mathcal{D}(T(x))$ системы (1.1), (1.2) на ее асимптотическое приближение. Согласно асимптотической теории областей достижимости [10–12] при больших временах $T \to \infty$ хорошим приближением к $\mathcal{D}(T)$ служит множество вида $T\Omega$, где Ω — некоторое фиксированное выпуклое тело. Тело Ω может быть однозначно задано опорной функцией.

О п р е д е л е н и е 2. Опорная функция $H_M(\xi)$ замкнутого выпуклого множества M имеет вид

$$H_M(\xi) = \sup_{x\in M}\langle \xi, x\rangle \tag{2.3}$$

и определяет множество M однозначно [13].

Если сформулировать более точно, для рассматриваемой системы (1.1), (1.2) имеем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть импульс p записан в виде $p = (p_i)$, где $p_i = (\xi_i, \eta_i)$, $i = 1, \dots, N$, ξ_i — переменная, двойственная к x_i, η_i — переменная, двойственная к y_i, и пусть $z_i = (\eta_i^2 + \omega_i^{-2}\xi_i^2)^{1/2}$.*

В случае отсутствия резонансов, т. е. нетривиальных соотношений между частотами вида (1.3), *опорная функция* H_T *области достижимости* $\mathcal{D}(T)$ *имеет при* $T \to \infty$ *асимптотику вида*

$$H_T(p) = \frac{T}{(2\pi)^N} \int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} \Big| \sum_{i=1}^N z_i \cos\varphi_i \Big| d\varphi_1 \dots d\varphi_N + o(T) = T\mathfrak{H}(z) + o(T), \tag{2.4}$$

а опорная функция выпуклого компакта Ω *задается главным членом* $\mathfrak{H}(z)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению опорная функция множества $\mathcal{D}(T)$ имеет вид (2.3), где sup берется по возможным траекториями, и $x(T)$ — состояние управляемой системы (1.1), (1.2) в момент T, при этом $x(0) = 0$.

Используя формулу Коши, имеем

$$\langle x(T), p\rangle = \int\limits_0^T \langle e^{A(T-t)} Bu(t), p\rangle dt = \int\limits_0^T u(t) B^* e^{A^*(T-t)} p dt.$$

После взятия sup под интегралом и замены переменных $t \mapsto T - t$ получим

$$H_{\mathcal{D}(T)}(p) = \int\limits_0^T \sup_{|u(t)|\le 1} u(t) B^* e^{A^*(T-t)} p dt = \int\limits_0^T |B^* e^{A^* t} p| dt. \tag{2.5}$$

В двойственных координатах ξ_i, η_i формула (2.5) имеет вид

$$H_{\mathcal{D}(T)}(p) = \int\limits_0^T \Big| \sum_{i=1}^N \eta_i \cos\omega_i t + \omega_i^{-1} \xi_i \sin\omega_i t \Big| dt.$$

Заметим, что последнее выражение — это интеграл функции

$$f(\varphi) = \Big| \sum_{i=1}^N \eta_i \cos\varphi_i + \omega_i^{-1} \xi_i \sin\varphi_i \Big|,$$

взятый по обмотке $\varphi_i(t) = \omega_i t$ тора $\mathcal{T} = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^N$ с угловой координатой φ_i.

Предположим, что в системе нет резонансов, т. е. нетривиальных соотношений между частотами вида (1.3). Тогда среднее по времени совпадает с пространственным средним [7]:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(\varphi(t)) dt = \int\limits_{\mathcal{T}} f(\varphi) d\varphi.$$

Заметим, что $\eta_i \cos\varphi_i + \omega_i^{-1}\xi_i \sin\varphi_i = z_i \cos(\varphi_i + \alpha_i)$, где $\alpha = (\alpha_i)$ — точка на торе. Следовательно,

$$\int\limits_{\mathcal{T}} f(\varphi) d\varphi = \int\limits_{\mathcal{T}} f(\varphi - \alpha) d\varphi = \int\limits_{\mathcal{T}} \Big| \sum_{i=1}^N z_i \cos\varphi_i \Big| d\varphi.$$

Тогда из (2.6) получим утверждение теоремы:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} H_{\mathcal{D}(T)}(p) = \int\limits_{\mathcal{T}} \Big| \sum_{i=1}^N z_i \cos\varphi_i \Big| d\varphi. \tag{2.6}$$

Теорема доказана. □

Отметим, что теорема следует из общей теории асимтотического поведении опорных функций линейных систем, детально разработанной в [11], но приведенное доказательство намного проще, чем общая теория.

Опорная функция $H_\Omega(p)$ выпуклого тела Ω — главный член асимптотики в (2.4):

$$H_\Omega(p) = \mathfrak{H}(z) = \int \left| \sum_{i=1}^{N} z_i \cos\varphi_i \right| d\varphi, \quad \text{где } z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{R}^N.$$

Вектор p является нормалью к границе $\partial\Omega$ в точке $\partial H_\Omega(p)/\partial p$. Поэтому нормаль к приближенной области достижимости $\rho\Omega$, граница которой проходит через x, определяется из уравнения

$$\rho^{-1}x = \frac{\partial H_\Omega(p)}{\partial p} = \frac{\partial \mathfrak{H}(z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial p}, \tag{2.7}$$

где $p \in \mathbb{R}^{2N}$ и $\rho > 0$ — неизвестные. Функция H_Ω дифференцируема, и уравнение (2.7) имеет ровно одно решение ввиду гладкости границы множества Ω [12]. Стратегия построения управления, продиктованная использованием уравнения (2.7), может быть применена и в резонансном случае, когда асимптотика (2.4) не работает, однако квазиоптимальные свойства управления при этом теряются. Функция $\rho = \rho(x)$ из уравнения (2.7) играет для рассматриваемого управления такую же роль, как время оптимального быстродействия $T(x)$ для оптимального управления (2.1). Импульс p в (2.7) имеет вид $p = \partial\rho/\partial x$. Функция $\rho(x)$ — это норма вектора x в метрике, в которой тело Ω — единичный шар. Функция $\rho(x)$ гладкая вне нуля.

Использование управления в виде сухого трения (2.2), хотя и способствует гашению колебаний, может не приводить к полной остановке системы. Точнее говоря, могут возникать зоны застоя, в которых система не движется вовсе, несмотря на то что положение равновесия еще не достигнуто. Метод, предложенный в [1–3], сочетает в себе несколько стратегий управления, последовательно применяемых при больших, промежуточных и малых значениях энергии. При больших и промежуточных энергиях используется скалярное управление в виде обобщенного сухого трения (2.2). При малых энергиях используется существенно отличный закон управления по обратной связи, который строится с использованием общих функций Ляпунова [1]. В данной работе нас интересует движение системы в областях с большими и промежуточными энергиями.

3. Движение под действием управления

Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью естественным образом возникают в теории оптимального управления. Традиционный подход к проблеме существования решений таких уравнений основан на теории Филиппова дифференциальных включений [14]. Однако интуитивная концепция управляемого движения подразумевает не только существование, но и однозначную определенность траекторий системы законом управления. Соответствующий вопрос о единственности решения дифференциального уравнения, как правило, находится за рамками теории Филиппова.

Управление в виде обобщенного сухого трения также приводит к движению системы, которое формально описывается дифференциальным уравнением с разрывной правой частью:

$$\dot{x} = Ax - B \operatorname{sign}\left\langle B, \frac{\partial\rho}{\partial x}\right\rangle, \quad u(x) = -\operatorname{sign}\left\langle B, \frac{\partial\rho}{\partial x}\right\rangle. \tag{3.1}$$

Здесь $u(x)$ — многозначная функция, поскольку $\operatorname{sign}(0)$ определен неоднозначно и может принимать любые значения в интервале $[-1, 1]$. Фактически мы имеем дело с дифференциальным включением.

Движение под действием управления в виде обобщенного сухого трения, которое описывается дифференциальным включением (3.1), как оказывается, можно определить однозначно. Для этого можно использовать теорию ДиПерны — Лионса сингулярных ОДУ [4].

3.1. Теория ДиПерны — Лионса

Если $b(x)$ — липшицева функция, то задачи Коши для ОДУ

$$\dot{x} = b(x), \quad x(0) = x_0, \tag{3.2}$$

и для уравнения в частных производных (уравнения переноса)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sum b_i(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad v(x,0) = v_0(x), \tag{3.3}$$

эквивалентны. Метод характеристик говорит, что решение v задачи (3.3) задается формулой

$$v(x,t) = v_0(\phi_t(x)), \tag{3.4}$$

где ϕ_t — фазовый поток для (3.2).

В работе ДиПерны и Лионса [4] существенно ослаблено условие Липшица $\dfrac{\partial b}{\partial x} \in L_\infty$ на правую часть дифференциального уравнения. Вместо него накладывается условие Липшица в интегральном смысле $\dfrac{\partial b}{\partial x} \in L_1$. Показано, что решение задачи (3.3) по-прежнему существует и единственно и задается формулой (3.4), где ϕ_t — измеримый поток. Тем самым в [4] было продемонстрировано, что можно эффективно работать с дифференциальными уравнениями, для правой части которых выполнено условие Липшица в интегральном смысле, а не поточечно.

Теория ДиПерны — Лионса основана на понятии перенормируемого решения.

Определение 3. Слабое ограниченное решение задачи v задачи Коши (3.3) называется перенормируемым, если для любой гладкой функции $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функция $\beta(v)$ — снова слабое решение.

3.2. Движение под действием обобщенного сухого трения

Общая идея теории ДиПерны — Лионса состоит в том, чтобы вместо решения индивидуальной задачи Коши для каждого начального условия строить глобальный фазовый поток, возможно, не всюду определенный. Наш главный результат утверждает, что в фазовом пространстве системы (3.1) можно определить *полупоток* $\phi_t(x)$, $t \geq 0$, который непрерывен, однозначно определен всюду и задает по формуле (3.4) решение уравнения переноса.

Теорема 2. *Имеется единственный непрерывный полупоток $\phi_t(x)$, $t \geq 0$, такой что $v(x,t) = v(\phi_t(x))$ — единственное перенормируемое решение задачи Коши для уравнения переноса*

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Big\langle Ax - B\mathrm{sign}\Big\langle B, \frac{\partial \rho}{\partial x}(x)\Big\rangle, \frac{\partial v}{\partial x}\Big\rangle, \quad v(x,0) = v(x). \tag{3.5}$$

Каждая кривая $x(t) = \phi_t(x)$ абсолютно непрерывна, и выполнено дифференциальное включение (3.1).

Доказательство. Мы ограничиваемся доказательством существования непрерывного ограниченного решения уравнения переноса (3.5), получаемого как предел классических решений сглаженных уравнений. Остальные утверждения могут быть установлены стандартными методами теории ДиПерны — Лионса [4; 15].

Будем использовать двухпараметрическую аппроксимацию задачи. Во-первых, выберем параметр $n \to \infty$ так, что гладкие выпуклые функции $m_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ равномерно аппроксимируют функцию $x \mapsto |x|$. Тогда производные $s_n = m_n'$ приближают функцию $\mathrm{sign}(x)$ в L_1. Заметим, что $x s_n(x) \geq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Во-вторых, выберем другой параметр, обозначаемый через $\delta \downarrow 0$, означающий, что мы останавливаем движение системы (3.1) в δ-окрестности

$U_\delta = \{\rho(x) \le \delta\}$ нуля относительно метрики ρ. Другими словами, мы приближаем ОДУ (3.1) уравнением без особенностей

$$\dot{x} = Ax - Bs_n\Big(\Big\langle B, \frac{\partial\rho}{\partial x}\Big\rangle\Big) \tag{3.6}$$

в области $V_\delta = \{x \in \mathbb{R}^{2N} \colon \rho(x) \ge \delta\}$. Важно, что все окрестности U_δ инвариантны относительно фазового потока системы (3.6) при положительных временах, поскольку функция ρ не растет вдоль интегральных кривых. В самом деле, выполнено неравенство

$$\dot{\rho} = -s_n\Big(\Big\langle \frac{\partial\rho}{\partial x}, B\Big\rangle\Big)\Big\langle \frac{\partial\rho}{\partial x}, B\Big\rangle \le 0.$$

Между опорной функцией H и функцией ρ существует соотношение двойственности [2; 3]:

$$1 = \rho\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} + \frac{\partial\rho}{\partial x} \otimes \frac{\partial H}{\partial p}. \tag{3.7}$$

Используя соотношение (3.7), перепишем второй член в правой части уравнения (3.6) в градиентном виде:

$$Bs_n\Big(\Big\langle B, \frac{\partial\rho}{\partial x}\Big\rangle\Big) = \rho\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x}m_n\Big(\Big\langle B, \frac{\partial\rho}{\partial x}\Big\rangle\Big) + xs_n\Big(\Big\langle B, \frac{\partial\rho}{\partial x}\Big\rangle\Big)\Big\langle B, \frac{\partial\rho}{\partial x}\Big\rangle.$$

Последнее выражение можно трактовать как приближение к

$$B \operatorname{sign}\Big\langle B, \frac{\partial\rho}{\partial x}\Big\rangle = \rho\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x}\Big|\Big\langle B, \frac{\partial\rho}{\partial x}\Big\rangle\Big| + x\Big|\Big\langle B, \frac{\partial\rho}{\partial x}\Big\rangle\Big|, \quad \alpha(x) = \frac{\partial^2 H}{\partial p^2}, \quad H = H_\Omega.$$

В частности, ОДУ принимает вид

$$\dot{x} = \begin{cases} F(x) = f(x) - g(x)\dfrac{\partial}{\partial x}m_n(h(x)), & \text{если } x \text{ лежит в } V_\delta, \\ 0, & \text{если } x \text{ лежит в } U_\delta. \end{cases} \tag{3.8}$$

Участвующие в этом уравнении функции

$$f(x) = Ax - xs_n\Big(\Big\langle B, \frac{\partial\rho}{\partial x}\Big\rangle\Big)\Big\langle B, \frac{\partial\rho}{\partial x}\Big\rangle, \quad g = \rho\alpha, \quad h = \Big\langle B, \frac{\partial\rho}{\partial x}\Big\rangle$$

довольно гладкие, а точнее, локально липшицевы вне нуля. Уравнения (3.8) аппроксимируют уравнение (3.1), переписанное в градиентной форме:

$$\dot{x} = F(x) = f(x) - g(x)\frac{\partial}{\partial x}|h(x)|, \quad f(x) = Ax - x\Big|\Big\langle B, \frac{\partial\rho}{\partial x}\Big\rangle\Big|.$$

Для нас важно, что матрица $g = \rho\alpha$ симметрическая и неотрицательная. Опуская индекс n, получим, что соответствующее уравнение переноса имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f_i v_i - g_{ij}h_j v_i s(h) = F_i v_i,$$

где

$$v_i = \frac{\partial}{\partial x_i}v, \quad h_i = \frac{\partial}{\partial x_i}h, \quad s(h) = \operatorname{sign} h, \quad F_i = f_i - g_{ij}h_j s(h),$$

и использованы обозначения Эйнштейна для суммирования. Дифференцируя, получим следующие уравнения для вектор-функции V с компонентами v_k:

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} = F_i v_{k,i} + f_{i,k}v_i - g_{ij,k}h_i v_i s(h) - g_{ij}h_{jk}v_i s(h) - g_{ij}h_j h_k v_i \delta(h), \tag{3.9}$$

где $v_{k,i} = \dfrac{\partial v_k}{\partial x_i}$, $h_{jk} = \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_k}$, $g_{ij,k} = \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}$ и $\delta = \delta_n$ обозначает m_n''. Уравнение (3.9) — это снова уравнение переноса с дополнительными членами $f_{i,k}v_i - g_{ij,k}h_i v_i s(h) - g_{ij}h_{ik}v_i s(h) - g_{ij}h_i h_k v_i \delta(h)$ в правой части. К счастью, наиболее "опасный" и сингулярный член $\sigma_k = g_{ij}h_i h_k v_i \delta(h)$ обладает свойством положительности:

$$g_{kl}v_l\sigma_k = g_{kl}h_k v_l g_{ij}h_j v_i \delta(h) = \left(\sum g_{kl}h_k v_l\right)^2 \delta(h) \text{ — положительная мера.}$$

Все прочие члены — линейные функции от V с коэффициентами, ограниченными вне любой окрестности нуля. Отсюда следует, что $w = \langle gV, V\rangle = g_{kl}v_l v_k$ является в некотором смысле квадратичной функцией Ляпунова:

$$\frac{\partial w}{\partial t} \le F_i w_i + LW, \quad W = |V|^2 = \sum v_k^2. \tag{3.10}$$

Здесь L — равномерно ограниченная функция вне любой окрестности нуля. Поскольку матрица $g = \rho\alpha$ не является строго положительно определенной, W нельзя оценить через w и уравнение (3.10) недостаточно для получения априорной оценки для w, не говоря уже о W. Тем не менее мы можем использовать оценку

$$W = \sum v_k^2 \le C\left(\left(\sum x_k v_k\right)^2 + \langle gV, V\rangle\right), \tag{3.11}$$

в которой C — положительная функция, ограниченная вне любой окрестности нуля. Эта оценка выполнена, поскольку ядро матрицы $g(x)$ — одномерное подпространство, порожденное вектором x. Ввиду неравенства (3.11) нужно найти оценку для $z = \sum x_k v_k = Ev$, где E — оператор Эйлера, $Ev = \sum x_k \dfrac{\partial v}{\partial x_k}$. Применяя оператор Эйлера к уравнению переноса (3.9), получим

$$\frac{\partial z}{\partial t} = F_i E v_i + (EF_i)v_i = F_i z_i - F_i v_i + (EF_i)v_i. \tag{3.12}$$

Здесь использованы коммутационные соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x_i}E = E\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i},$$

из которых следует, что $Ev_i = z_i - v_i$. Нетрудно вычислить EF_i. Функция

$$F(x) = Ax - Bs\left\langle B, \frac{\partial\rho}{\partial x}\right\rangle$$

очевидно является суммой однородных функций Ax и $-Bs\,\langle B, \partial\rho/\partial x\rangle$ степени 1 и 0. Поэтому EF_i — локально ограниченная функция. Соотношения (3.12) теперь показывают, что

$$\frac{\partial y}{\partial t} \le F_i y_i + C'W, \tag{3.13}$$

где $y = z^2$, а C' — локально ограниченная функция. Неравенство (3.11) говорит о том, что $W \le C\,(y + w)$. Поэтому, складывая неравенства (3.10) и (3.13), получим, что

$$\frac{\partial Y}{\partial t} \le F_i Y_i + MY, \quad Y = w + y,$$

где функция M локально ограничена вне нуля, причем равномерно по параметру n.

Неравенство (3.10) — это решающая оценка, позволяющая показать, что поток $x \mapsto \Phi_t(x) = \Phi_{n,t}(x)$, отвечающий уравнению (3.2), является локально липшицевым, причем соответствующая константа Липшица не зависит от параметра n. Поэтому, переходя к пределу $n \to \infty$, заключаем, что существует липшицев предел $\phi_t(x)$ потоков $\Phi_{n,t}$. Поскольку параметр δ произволен, то тем самым, в частности, доказано, что отображение $x \mapsto \phi_t(x)$ непрерывно, если $x \neq 0$ и $\phi_t(x) \neq 0$.

На самом деле очевидно, что отображение $x \mapsto \phi_t(x)$ непрерывно в нуле, поскольку поток ϕ отображает любую окрестность нуля U_δ в себя. Остается рассмотреть случай $x \neq 0$, $\phi_t(x) = 0$. Пусть $\tau := \inf\{t > 0\colon \phi_t(x) = 0\}$. Достаточно показать, что точка $\phi_\tau(y)$ близка к $\phi_\tau(x) = 0$, если точка y достаточно близка к x. Нам уже известно, что для любого $\epsilon > 0$ точка $\phi_{\tau-\epsilon}(x)$ непрерывно зависит от x. С другой стороны, очевидно, что отображение $t \mapsto \phi_t(y)$ является равномерно липшицевым для y из некоторой окрестности x. Поэтому

$$|\phi_\tau(y) - \phi_\tau(x)| \leq C|\epsilon| + |\phi_{\tau-\epsilon}(y) - \phi_{\tau-\epsilon}(x)|.$$

Поскольку ϵ произвольно и $|\phi_{\tau-\epsilon}(y) - \phi_{\tau-\epsilon}(x)|$ произвольно мало, если точка y достаточно близка к x, то непрерывность доказана. Теорема доказана. □

Аналогичное явление обнаружено И.А. Богаевским [16] для градиентных дифференциальных уравнений $\dot{x} = -\partial f/\partial x$, где f — негладкая выпуклая функция.

Заключение

В нашей работе исследовано управление, имеющее вид обобщенного сухого трения, для успокоения системы осцилляторов. Как это традиционно происходит в теории оптимального управления, такое управление приводит к дифференциальным уравнениям с разрывной правой частью. В данной работе показано, что для рассматриваемого случая в рамках теории ДиПерны–Лионса можно разрешить вопрос о существовании и единственности движения под действием управления. Важным представляется изучение аналогичного вопроса для оптимального управления.

Интересное развитие рассматриваемой задачи об успокоении системы осцилляторов дает переход к бесконечномерному случаю. Например, задача успокоения струны с помощью ограниченной нагрузки, приложенной в фиксированной точке, приводит к нетривиальным вопросам, которые родственны рассмотренным выше.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Овсеевич А.И., Федоров А.К.** Асимптотическое оптимальное управление в форме синтеза для системы линейных осцилляторов // Докл. акад. наук. 2013. № 3. С. 266–270.
2. **Fedorov A.K., Ovseevich A.I.** Asymptotic control theory for a system of linear oscillators: Preprint arXiv:1308.6090. URL: http://arxiv.org/pdf/1308.6090v2.pdf.
3. **Овсеевич А.И., Федоров А.К.** Движение системы осцилляторов под действием обобщенного сухого трения // Автоматика и телемеханика. 2015. № 5. С. 121–129.
4. **DiPerna R.J., Lions P.L.** Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces // Invent. Math. 1989. Vol. 98, no. 3. P. 511–547.
5. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе [и др.]. М.: Наука, 1983. 393 с.
6. **Калман Р.Е.** Об общей теории систем управления // Тр. 1-го Конгресса Междунар. федерации по автоматическому управлению. Москва, 1960. С. 481–492.
7. **Арнольд В.И.** Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432 с.
8. **Черноусько Ф.Л.** О построении ограниченного управления в колебательных системах // Прикл. математика и механика. 1988. № 4. С. 549–558.
9. **Овсеевич А.И.** О полной управляемости линейных динамических систем // Прикл. математика и механика. 1989. № 5. С. 845–848.
10. **Ovseevich A.I.** Limit behaviour of attainable and superattainable sets // Proc. Conf. Modeling, Estimation and Control of Systems with Uncertainty. Hungary, 1990. P. 324–333.
11. **Гончарова Е.В., Овсеевич А.И.** Сравнительный анализ асимптотической динамики множеств достижимости линейных систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2007. № 4. С. 5–13.

12. **Ovseevich A.I.** Singularities of attainable sets // Russian J. Math. Physics. 1998. Vol. 5, no. 3. P. 389–398.
13. **Schneider R.** Convex bodies: The Brunn-Minkowski theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. 490 p.
14. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
15. **Ovseevich A.I.** Irregular dynamic systems according to R.J. DiPerna and P.L. Lions // Funct. Anal. Other Math. 2012. Vol. 4, no. 1. P. 57–70.
16. **Богаевский И.А.** Разрывные градиентные дифференциальные уравнения и траектории в вариационном исчислении // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 12. С. 11–42.

Овсеевич Александр Иосифович
д-р физ.-мат. наук
ведущий научный сотрудник
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
e-mail: ovseev@ipmnet.ru

Поступила 20.03.15

Федоров Алексей Константинович
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
студент МГТУ им. Н. Э. Баумана
e-mail: akfedorov@student.bmstu.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.977

МНОГОКРАТНАЯ ПОИМКА В РЕКУРРЕНТНОМ ПРИМЕРЕ Л. С. ПОНТРЯГИНА С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ[1]

Н. Н. Петров, Н. А. Соловьева

Рассматривается обобщенный нестационарный пример Понтрягина при одинаковых динамических и инерционных возможностях игроков и фазовыми ограничениями на состояния убегающего. Граница фазовых ограничений не является “линией смерти” для убегающего. Множество допустимых управлений — шар с центром в нуле, терминальные множества — начало координат. Получены достаточные условия многократной поимки группой преследователей одного убегающего при условии, что некоторые функции, отвечающие начальным данным и параметрам игры, являются рекуррентными.

Ключевые слова: преследователь, убегающий, фазовые ограничения, пример Л. С. Понтрягина, групповое преследование.

N. N. Petrov, N. A. Solov'eva. Multiple capture in Pontryagin's recursive example with phase constraints.

We consider Pontryagin's generalized nonstationary example with identical dynamic and inertial capabilities of the players and state constraints on the evader's states. The boundary of the phase constraints is not a “death line” for the evader. The set of admissible controls is a ball centered at the origin, and the terminal sets are the origin. We obtain sufficient conditions for a multiple capture of one evader by a group of pursuers in the case when some functions corresponding to the initial data and parameters of the game are recursive.

Keywords: pursuer, evader, phase restrictions, Pontryagin's example, group pursuit.

Введение

Рассматривается обобщенный нестационарный пример Л. С. Понтрягина [1–6] со многими участниками при одинаковых динамических и инерционных возможностях всех игроков. Задача простого группового преследования с равными возможностями всех участников впервые рассматривалась Б. Н. Пшеничным [7], были получены необходимые и достаточные условия поимки одного убегающего. Однократная поимка в примере Понтрягина рассматривалась, в частности, в работах [8–10].

Для задачи с простым движением и равными возможностями всех участников Н. Л. Григоренко [11] были представлены необходимые и достаточные условия многократной поимки. Одновременная многократная поимка в задаче простого преследования рассматривалась А. И. Благодатских [12]. В работе [13] Н. Н. Петровым получены достаточные условия многократной поимки в стационарном примере Понтрягина с фазовыми ограничениями. В работе А. И. Благодатских [14] получены достаточные условия многократной поимки в нестационарном примере Понтрягина при условии, что некоторые функции являются почти-периодическими, а терминальные множества — начало координат.

В данной работе рассматривается задача преследования группой преследователей одного убегающего при равных динамических и инерционных возможностях игроков. Предполагается, что убегающий в процессе игры не покидает пределы выпуклого многогранного множества, терминальные множества — начало координат. При условии, что некоторые функции, определяемые начальными условиями и параметрами игры, являются рекуррентными, получены достаточные условия разрешимости задачи преследования. Работа примыкает к исследованиям [15–17].

[1]Работа выполнена при поддержке Минобранауки в рамках базовой части.

1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geq 2)$ рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(n, B)$ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающий E.

Движение каждого преследователя P_i описывается уравнением

$$x_i^{(l)} + a_1(t)x_i^{(l-1)} + a_2(t)x_i^{(l-2)} + \ldots + a_l(t)x_i = u_i, \quad u_i \in V, \tag{1.1}$$

закон движения убегающего E имеет вид

$$y^{(l)} + a_1(t)y^{(l-1)} + a_2(t)y^{(l-2)} + \ldots + a_l(t)y = v, \quad v \in V, \tag{1.2}$$

где $x_i, y_j, u_i, v_j \in \mathbb{R}^k$, функции $a_1(t), a_2(t), \ldots, a_l(t)$ непрерывны на промежутке $[t_0, \infty)$, V — выпуклый компакт. В момент $t = t_0$ заданы начальные условия

$$x_i^{(q)}(t_0) = x_i^q, \quad y^{(q)}(t_0) = y^q, \quad \text{причем} \quad x_i^0 - y^0 \neq 0 \quad \text{для всех} \quad i. \tag{1.3}$$

Здесь и далее $i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $q = 0, 1, \ldots, l-1$.

Дополнительно предполагается, что убегающий не покидает пределы выпуклого множества

$$B = \{y\colon y \in \mathbb{R}^k, (p_c, y) \leq \mu_c, c = 1, 2, \ldots, r\}$$

с непустой внутренностью, где (a, b) — скалярное произведение векторов a и b, $p_1, \ldots, p_r$ — единичные векторы $\mathbb{R}^k$, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — вещественные числа.

Вместо (1.1)–(1.3) рассмотрим уравнение

$$z_i^{(l)} + a_1(t)z_i^{(l-1)} + a_2(t)z_i^{(l-2)} + \ldots + a_l(t)z_i = u_i - v \tag{1.4}$$

с начальными условиями

$$z_i^{(q)}(t_0) = z_i^q = x_i^q - y^q. \tag{1.5}$$

Через $\varphi_q(t, s)$ $(t \geq s \geq t_0)$ обозначим решение уравнения

$$\omega^{(l)} + a_1(t)\omega^{(l-1)} + a_2(t)\omega^{(l-2)} + \ldots + a_l(t)\omega = 0$$

с начальными условиями

$$\omega(s) = 0, \ldots,\ \omega^{(q-1)}(s) = 0,\ \omega^{(q)}(s) = 1,\ \omega^{(q+1)}(s) = 0, \ldots,\ \omega^{(l-1)}(s) = 0.$$

Пусть далее

$$\xi_i(t) = \varphi_0(t, t_0)z_i^0 + \varphi_1(t, t_0)z_i^1 + \ldots + \varphi_{l-1}(t, t_0)z_i^{l-1},$$
$$\eta(t) = \varphi_0(t, t_0)y^0 + \varphi_1(t, t_0)y^1 + \ldots + \varphi_{l-1}(t, t_0)y^{l-1}.$$

Считаем, что $\xi_i(t) \neq 0$ для всех $i, t \geq t_0$, ибо если $\xi_i(\tau) = 0$ при некоторых i, τ, то преследователь P_i ловит убегающего E, полагая $u_i(t) = v(t)$.

Определение 1. Будем говорить, что задана квазистратегия U_i преследователя P_i, если определено отображение $U_i(t, z^0, v_t(\cdot))$, ставящее в соответствие начальному состоянию z^0, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающего E такой, что $y(t) \in D$ для всех $t \geq t_0$, измеримую функцию $u_i(t)$ со значениями в V.

Определение 2. В игре $\Gamma(n, D)$ происходит m-кратная поимка (при $m = 1$ поимка), если существуют момент $T(z^0)$, квазистратегии $U_1(t, z^0, v_t(\cdot)), \ldots, U_n(t, z^0, v_t(\cdot))$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot), v(t) \in V$, $y(t) \in D$, $t \in [t_0, T(z^0)]$ существуют моменты $\tau_1, \ldots, \tau_m \in [t_0, T(z^0)]$, попарно различные индексы $i_1, \ldots, i_m \in I$, такие, что $z_{i_s}(\tau_s) = 0, s = 1, \ldots, m$.

О п р е д е л е н и е 3 [18]. Функция $f\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^k$ называется рекуррентной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $a, t \in \mathbb{R}^1$ существует $\tau(t) \in [a, a+T(\varepsilon)]$ для которых справедливо неравенство $\|f(t+\tau(t)) - f(t)\| < \varepsilon$.

Функция $f\colon [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^k$ называется *рекуррентной на* $[t_0, \infty)$, если существует рекуррентная функция $F\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^k$ такая, что $f(t) = F(t)$ для всех $t \in [t_0, \infty)$.

Обозначим через $\mathrm{Int}X$, $\mathrm{co}X$ внутренность и выпуклую оболочку множества X,

$$\Omega(p) = \{(i_1, \dots, i_p) | i_1, \dots, i_p \in I \text{ и попарно различны}\},$$

$$r(t,s) = \begin{cases} 1, \text{ если } \varphi_{l-1}(t,s) \geq 0, \\ -1, \text{ если } \varphi_{l-1}(t,s) < 0, \end{cases} \quad (t_0 \leq s \leq t),$$

$$\lambda(v, \mu, b_i) = \sup\{\lambda \geq 0 \mid -\lambda\mu b_i \cap (V - v) \neq \varnothing\},$$

$$G_i(t, v(\cdot), b_i) = \int\limits_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t,s)| \lambda(v(s), r(t,s), b_i)) ds, \quad F(t) = \int\limits_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t,s)| ds.$$

2. Условия поимки

Предположение 1. 1. $n \geq m + k - 1$.

2. *Функции* $\xi_i(t)$ *являются рекуррентными на* $[t_0, \infty)$.

3. *Функция* $\eta(t)$ *ограничена на* $[t_0, \infty)$.

4. $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) = \infty$.

5. $V = D_1(0)$, *где* $D_r(a) = \{z \in \mathbb{R}^k \mid \|z - a\| \leq r\}$.

Отметим, что условие 2 будет, в частности, выполнено, если функции $a_i(t)$ являются постоянными, а корни характеристического уравнения (1.4) являются простыми и чисто мнимыми.

Предположение 2. *Существуют моменты* $\tau_i^0 \in [t_0, \infty)$ *такие, что для всех* $\Lambda \in \Omega(n - m + 1)$ *выполнено включение*

$$0 \in \mathrm{Intco}\{\xi_j(\tau_j^0), j \in \Lambda, p_1, \dots, p_r\}.$$

Лемма 1. *Пусть выполнено предположение* 2. *Тогда существуют* $\varepsilon > 0$, $T(\varepsilon) > 0$ *для которых справедливы следующие утверждения*:

1. $0 \notin D_\varepsilon(\xi_i(\tau_i^0))$ *и каждый набор* $h = (h_1, \dots, h_n)$, $h_i \in D_\varepsilon(\xi_i(\tau_i^0))$, *обладает свойством*

$$0 \in \mathrm{Intco}\{h_j, j \in \Lambda, p_1, \dots, p_r\} \text{ для всех } \Lambda \in \Omega(n - m + 1).$$

2. *Для каждого* $t \geq t_0$ *найдется момент* $\tau_i(t) \in [t, t+T(\varepsilon)]$ *такой, что* $\xi_i(\tau_i(t)) \in D_\varepsilon(\xi_i(\tau_i^0))$.

Справедливость первого утверждения следует из свойства открытых множеств, а справедливость второго утверждения — из свойства рекуррентных функций.

Выберем и зафиксируем $\varepsilon > 0$, $T(\varepsilon) > 0$ так, чтобы имели место утверждения леммы 1. Обозначим через

$$D = D_\varepsilon(\xi_1(\tau_1^0)) \times D_\varepsilon(\xi_2(\tau_2^0)) \times \dots \times D_\varepsilon(\xi_n(\tau_n^0)),$$

$$\delta = \min_{h \in D} \min_{r \in \{-1,1\}} \min_{v \in V} \max\big\{ \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{j \in \Lambda} \lambda(v, r, h_j), \max_s (p_s, v)\big\}.$$

Лемма 2. *Пусть* $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^k$, $b_j \neq 0$, $V = D_1(0)$. *В этом случае*

$$0 \in \mathrm{Intco}\{b_1, \dots, b_n, p_1, \dots, p_r\} \tag{2.1}$$

тогда и только тогда, когда

$$\delta_0 = \min_{v \in V} \max\big\{ \max_j \lambda(v, 1, b_j), \max_s (p_s, v)\big\} > 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено условие (2.1). Предположим, что $\delta_0 = 0$. Тогда существует $v_0 \in V$ для которого $\lambda(v_0, 1, b_j) = 0$, $(p_s, v_0) \leq 0$ для всех j, s. Так как [4, с. 56]

$$\lambda(v, 1, b_j) = \frac{(b_j, v) + \sqrt{(b_j, v)^2 + \|b_j\|^2(1 - \|v\|^2)}}{\|b_j\|^2},$$

то получаем, что $\|v_0\| = 1$ и для всех j верно неравенство $(b_j, v_0) \leq 0$. Следовательно, множество $\operatorname{co}\{b_1, \dots, b_n, p_1, \dots, p_r\}$ отделимо от нуля. Получили противоречие.

Пусть $\delta_0 > 0$. Докажем (2.1). Предположим, что условие (2.1) не выполняется. Тогда множество $\operatorname{co}\{b_1, \dots, b_n, p_1, \dots, p_r\}$ отделимо от нуля. Поэтому существует $v_0 \in V$, $\|v_0\| = 1$ и такой, что $(b_j, v_0) \leq 0$, $(p_s, v_0) \leq 0$ для всех j, s. Отсюда $\delta_0 = 0$. Получили противоречие. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $V = D_1(0)$ и выполнено предположение 2. Тогда $\delta > 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем $h \in D$. Пусть

$$\delta^+(h) = \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{j \in \Lambda} \lambda(v, +1, h_j),$$

$$\delta^-(h) = \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{j \in \Lambda} \lambda(v, -1, h_j).$$

Докажем, что $\delta^+(h) > 0$, $\delta^-(h) > 0$. Предположим, что $\delta^+(h) = 0$. Тогда существует $v \in V$, что для каждого $\Lambda \in \Omega(m)$ найдется номер $p \in \Lambda$, для которого $\lambda(v, +1, h_p) = 0$ и, кроме того, $\max_s (p_s, v) \leq 0$. Построим множество $\Lambda_0 \in \Omega(n - m + 1)$ по следующему правилу. Выберем $p_1 \in L_1 = \{1, 2, \dots, m\} \in \Omega(m)$ и h_{p_1} — из условия $\lambda(v, 1, h_{p_1}) = 0$, $p_2 \in L_2 = \big(L_1 \cup \{m + 1\}\big) \setminus \{p_1\}$ и h_{p_2} — из условия $\lambda(v, 1, h_{p_2}) = 0$ и так далее. На последнем шаге построим множество $L_{n-m+1} = \big(L_{n-m} \cup \{n\}\big) \setminus \{p_{n-m}\}$ и выберем $p_{n-m+1} \in L_{n-m+1}$ и $h_{p_{n-m+1}}$, для которых $\lambda(v, 1, h_{n-m+1}) = 0$. По построению множества Λ_0 имеем $\max\{\max_{j \in \Lambda_0} \lambda(v, 1, h_j), \max_s (p_s, v)\} = 0$. Поэтому из леммы 2 следует, что $0 \notin \operatorname{Intco}\{h_j, j \in \Lambda_0, p_1, \dots p_r\}$, что противоречит предположению 1. Значит, $\delta^+(h) > 0$ для всех $h \in D$. Аналогично доказывается, что $\delta^-(h) > 0$ для всех $h \in D$. Так как V — строго выпуклый компакт с гладкой границей, то в силу леммы 1.3.13 [4, с. 30] функции $\lambda(v, \pm 1, h)$ непрерывны по (v, h). Осталось применить теорему Вейерштрасса. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^k, n \geq k$, выполнено включение (2.1) и $b_1, \dots, b_k$ линейно независимы. Тогда существуют такие $p \in \mathbb{R}^k, \mu \in \mathbb{R}^1$, что $B \subset B_1 = \{z \mid (p, z) \leq \mu\}$ и $0 \in \operatorname{Intco}\{b_1, \dots, b_n, p\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из соотношения (2.1) [19] следует, что существуют $\alpha_i > 0, \beta_j > 0$ такие, что $0 = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n + \beta_1 p_1 + \dots + \beta_r p_r$. Пусть $x \in \mathbb{R}^k$. Тогда существуют $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ такие, что $x = \gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_k x_k$. Поэтому при любом $d \in \mathbb{R}^1$ справедливо равенство

$$x = \gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_k x_k + d(\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n + \beta_1 p_1 + \dots + \beta_r p_r).$$

Полагаем $p = \beta_1 p_1 + \dots + \beta_r p_r$. Возьмем $d > 0$ таким, чтобы для всех i выполнялись неравенства $\gamma_i + d\alpha_i > 0$. Получаем $x = \gamma_1^0 b_1 + \dots + \gamma_n^0 b_n + dp$, причем $\gamma_i^0 > 0$. Следовательно, $0 \in \operatorname{Intco}\{b_1, \dots, b_n, p\}$ [19]. Рассмотрим множество $B_1 = \{x \mid (p, x) \leq \mu\}$, где $\mu = \beta_1 \mu_1 + \dots \beta_r \mu_r$. Тогда $B \subset B_1$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $V = D_1(0)$, $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^k, n \geq m + k - 1$, и выполнены следующие условия*:

1. $0 \in \operatorname{Intco}\{b_j, j \in \Lambda, p_1, \dots, p_r\}$ *для любого* $\Lambda \in \Omega(n - m + 1)$.
2. $\min_{v \in \overline{\operatorname{co} V_1}} \max_s (p_s, v) > 0$, *где* $V_1 = \{v \in V \mid \max_{J \in \Omega(m)} \min_{j \in J} \lambda(v, 1, b_j) = 0\}$.

Тогда существуют $p \in \mathbb{R}^k, \mu \in \mathbb{R}^1$ такие, что:

1. $B \subset B_1 = \{z \in \mathbb{R}^k \mid (p, z) \leq \mu\}$.
2. $0 \in \operatorname{Intco}\{b_j, j \in \Lambda, p\}$ *для всех* $\Lambda \in \Omega(n - m + 1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме Боннебласта, Карлина, Шепли [20, с. 33] существуют неотрицательные вещественные числа $\gamma_1, \dots, \gamma_s$, $\gamma_1 + \dots + \gamma_s = 1$ такие, что верно неравенство $\inf\limits_{v \in \mathrm{co} V_1} \sum_{s=1}^{r} \gamma_s (p_s, v) > 0$. Полагаем $p = \gamma_1 p_1 + \dots + \gamma_s p_s$, $\mu = \gamma_1 \mu_1 + \dots + \gamma_s \mu_s$. Считаем, что $p \neq 0$. Получаем $B \subset B_1 = \{z \mid (p, z) \leq \mu\}$ и $(p, v) > 0$ для всех $v \in \overline{\mathrm{co}\, V_1}$. Докажем далее второе утверждение леммы. Предположим, что существует $\Lambda_0 \in \Omega(n - m + 1)$ для которого $0 \notin \mathrm{Intco}\{b_j, j \in \Lambda_0, p\}$. Тогда в силу леммы 2

$$\min_{v \in V} \max\{\max_{j \in \Lambda_0} \lambda(v, 1, b_j), (p, v)\} = 0.$$

Следовательно, существует $v_0 \in V$, для которого $\max\limits_{j \in \Lambda_0} \lambda(v_0, 1, b_j) = 0$, $(p, v_0) \leq 0$. Поэтому $\lambda(v_0, 1, b_j) = 0$ для всех $j \in \Lambda_0$. Отсюда для любого $J \in \Omega(m)$ $\min\limits_{j \in J} \lambda(v_0, 1, b_j) = 0$. Следовательно, $\max\limits_{J \in \Omega(m)} \min\limits_{j} \lambda(v_0, 1, b_j) = 0$. Получили, что $v_0 \in V_1$ и поэтому $(p, v_0) > 0$. Получили противоречие. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть выполнены предположения* 1, 2, $r = 1$. *Тогда существует момент* $T > t_0$ *такой, что для любого допустимого управления* $v(\cdot)$ *убегающего* E, *любого набора* $h \in D$ *найдется такое множество* $\Lambda \in \Omega(m)$, *что*

$$\min_{j \in \Lambda} G_j(T, v(\cdot), h_j) \geq 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $h \in D$. Тогда в силу леммы 3 $\delta > 0$. Так как управление $v(t)$ убегающего E допустимо, то для всех $t \geq t_0$ справедливо неравенство $(p_1, y(t)) \leq \mu_1$. Отсюда

$$\int_{t_0}^{t} \varphi_{l-1}(t, s)(p_1, v(s))\, ds \leq \mu(t) = \mu_1 - (p_1, \eta(t)).$$

Определим множества

$$\begin{gathered}
T^+(t) = \{\tau\colon \tau \in [t_0, t], \varphi_{l-1}(t, \tau) \geq 0\}, \quad T^-(t) = \{\tau\colon \tau \in [t_0, t], \varphi_{l-1}(t, \tau) < 0\}, \\
T_1^+(t) = \{\tau\colon \tau \in T^+(t), (p_1, v(\tau)) \geq \delta\}, \quad T_2^+(t) = \{\tau\colon \tau \in T^+(t), (p_1, v(\tau)) < \delta\}, \\
T_1^-(t) = \{\tau\colon \tau \in T^-(t), (-p_1, v(\tau)) \geq \delta\}, \quad T_2^-(t) = \{\tau\colon \tau \in T^-(t), (-p_1, v(\tau)) < \delta\}.
\end{gathered}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} \varphi_{l-1}(t, s)(p_1, v(s))\, ds &= \int_{T^+(t)} \varphi_{l-1}(t, s)(p_1, v(s))\, ds + \int_{T^-(t)} (-\varphi_{l-1}(t, s))(-p_1, v(s))\, ds \\
= \int_{T_1^+(t)} \varphi_{l-1}(t, s)(p_1, v(s))\, ds &+ \int_{T_2^+(t)} \varphi_{l-1}(t, s)(p_1, v(s))\, ds + \int_{T_1^-(t)} (-\varphi_{l-1}(t, s))(-p_1, v(s))\, ds \\
+ \int_{T_2^-(t)} (-\varphi_{l-1}(t, s))(-p_1, v(s))\, ds &\geq \delta \int_{T_1^+(t)} \varphi_{l-1}(t, s)\, ds - \int_{T_2^+(t)} \varphi_{l-1}(t, s)\, ds \\
+ \delta \int_{T_1^-(t)} (-\varphi_{l-1}(t, s))\, ds - \int_{T_2^-(t)} (-\varphi_{l-1}(t, s))\, ds &= \delta \int_{T_1^+(t) \cup T_1^-(t)} |\varphi_{l-1}(t, s)|\, ds - \int_{T_2^+(t) \cup T_2^-(t)} |\varphi_{l-1}(t, s)|\, ds.
\end{aligned}$$

Получаем

$$\delta \int\limits_{T_1^+(t)\cup T_1^-(t)} |\varphi_{l-1}(t,s)|\,ds - \int\limits_{T_2^+(t)\cup T_2^-(t)} |\varphi_{l-1}(t,s)|\,ds \leq \mu(t),$$

$$\int\limits_{T_1^+(t)\cup T_1^-(t)} |\varphi_{l-1}(t,s)|\,ds + \int\limits_{T_2^+(t)\cup T_2^-(t)} |\varphi_{l-1}(t,s)|\,ds = F(t).$$

Из последних двух соотношений следует, что

$$\int\limits_{T_2^+(t)\cup T_2^-(t)} |\varphi_{l-1}(t,s)|\,ds \geq \frac{\delta F(t) - \mu(t)}{1+\delta}.$$

Далее имеем

$$\max_{\Lambda\in\Omega(m)} \min_{j\in\Lambda} G_j(t,v(\cdot),h_j) = \max_{\Lambda\in\Omega(m)} \min_{j\in\Lambda} \int\limits_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t,s)|\lambda(v(s),r(t,s),h_j)\,ds$$

$$\geq \max_{\Lambda\in\Omega(m)} \int\limits_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t,s)| \min_{j\in\Lambda} \lambda(v(s),r(t,s),h_j)ds$$

$$\geq \frac{1}{C_n^m} \int\limits_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t,s)| \sum_{\Lambda\in\Omega(m)} \Big(\min_{j\in\Lambda} \lambda(v(s),r(t,s),h_j)\Big)ds$$

$$\geq \frac{1}{C_n^m} \int\limits_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t,s)| \max_{\Lambda\in\Omega(m)} \min_{j\in\Lambda} \lambda(v(s),r(t,s),h_j)ds$$

$$\geq \frac{1}{C_n^m} \int\limits_{T_1^+(t)\cup T_1^-(t)} |\varphi_{l-1}(t,s)| \max_{\Lambda\in\Omega(m)} \min_{j\in\Lambda} \lambda(v(s),r(t,s),h_j)ds$$

$$\geq \frac{\delta}{C_n^m} \int\limits_{T_1^+(t)\cup T_1^-(t)} |\varphi_{l-1}(t,s)|ds \geq \frac{\delta}{C_n^m}\Big[\frac{\delta F(t)-\mu(t)}{1+\delta}\Big].$$

Так как $F(t)\to\infty$, $\mu(t)$ ограничена, то существует момент T такой, что $\frac{\delta}{C_n^m}\Big[\frac{\delta F(t)-\mu(t)}{1+\delta}\Big] \geq 1$ для всех $t \geq T$, откуда получаем требуемое утверждение. Лемма доказана.

Определим число

$$T_0 = \min\{t \geq t_0 \mid \min_{v(\cdot)} \min_{h\in D} \max_{\Lambda\in\Omega(m)} \min_{j\in\Lambda} G_j(t,v(\cdot),h_j) \geq 1\}.$$

В силу леммы 6 $T_0 < +\infty$.

Предположение 3. *Существуют моменты* $\tau_i \geq T_0$ *такие, что*:
1. $\xi_i(\tau_i) \in D_\varepsilon(\xi_i(\tau_i^0))$ *для всех* i.
2. $\inf\limits_{v(\cdot)} \max\limits_{\Lambda\in\Omega(m)} \min\limits_{j\in\Lambda} G_j(\tau_j,v(\cdot),\xi_j(\tau_j)) \geq 1$.

З а м е ч а н и е 1. a) существование τ_i в п. 1 предположения 3 гарантировано предположением о рекуррентности функций $\xi_i(t)$;

b) если в предположении 3 все $\tau_i = \tau$, то п. 2 данного предположения выполнен автоматически в силу леммы 6.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения* 1, 2, 3, $r = 1$. *Тогда в игре* $\Gamma(n, B)$ *происходит* m*-кратная поимка.*

Доказательство. Пусть τ_j — моменты, удовлетворяющие предположению 3, $v(s)$, $s \in [t_0, T_1]$ — произвольное допустимое управление убегающего E, где $T_1 = \max_i \tau_i$. Рассмотрим функцию

$$H(t) = 1 - \max_{\Lambda\in\Omega(m)} \min_{j\in\Lambda} \int_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(\tau_j, s)|\lambda(v(s), r(\tau_j, s), \xi_j(\tau_j))ds.$$

Обозначим через $\tau_0 \geq t_0$ — первый корень данной функции. Отметим, что момент τ_0 существует в силу предположения 3. Кроме того, существует множество $\Lambda_0 \in \Omega(m)$ такое, что $\tau_0 \leq \tau_j$ для всех $j \in \Lambda_0$ и

$$1 - \min_{j\in\Lambda} \int_{t_0}^{\tau_0} |\varphi_{l-1}(\tau_j, s)|\lambda(v(s), r(\tau_j, s), \xi_j(\tau_j))ds \leq 0$$

для всех $j \in \Lambda_0$. Поэтому существуют моменты $t_j \leq \tau_0, j \in \Lambda_0$, для которых

$$1 - \int_{t_0}^{t_j} |\varphi_{l-1}(\tau_j, s)|\lambda(v(s), r(\tau_j, s), \xi_j(\tau_j))ds = 0. \tag{2.2}$$

Для $j \notin \Lambda_0$ также обозначим через t_j моменты времени, для которых выполнено условие (2.2), если такие моменты существуют. В силу леммы Филиппова [21] для каждого i существуют измеримые функции $u_i(s)$, $s \in [t_0, T_1]$, являющиеся при каждом фиксированном s решением уравнения

$$\lambda(v(s), r(\tau_i, s), \xi_i(\tau_i))\xi_i(\tau_i) = u_i - v(s).$$

Задаем управления преследователей P_i, полагая $u_i(t) = v(t) - \lambda\big(v(t), r(\tau_i, t), \xi_i(\tau_i)\big)\xi_i(\tau_i)$, $t \in [t_0, \min\{t_i, T_1\}]$, $u_i(t) = v(t),\ t \in (\min\{t_i, T_1\}, T_1]$. Тогда

$$z_i(\tau_i) = \xi_i(\tau_i) + \int_{t_0}^{\tau_i} \varphi(\tau_i, s)(u_i(s) - v(s))ds = \xi_i(\tau_i) - \int_{t_0}^{\tau_i} |\varphi_{l-1}(\tau_i, s)|\lambda\big(v(s), r(\tau_i, s), \xi_i(\tau_i)\big)\xi_i(\tau_i)ds$$

$$= \xi_i(\tau_i)(1 - \int_{t_0}^{t_i} |\varphi_{l-1}(\tau_i, s)|\lambda(v(s), r(\tau_i, s), \xi_i(\tau_i))ds.$$

Из (2.2) следует, что $z_j(\tau_j) = 0$ для всех $j \in \Lambda_0$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $m = 1$ *и выполнены предположения* 1, 2, 3. *Тогда в игре* $\Gamma(n, B)$ *происходит поимка.*

Доказательство. Из предположения 2 и леммы 4 следует, что существуют $p \in \mathbb{R}^k$, $\mu \in \mathbb{R}^1$ такие, что

$$0 \in \mathrm{Intco}\{\xi_i(\tau_i^0), i \in I, p\} \ \text{ и } \ B \subset B_1 = \{z \mid (p, z) \leq \mu\}.$$

Из теоремы 1 следует, что в игре $\Gamma(n, B_1)$ происходит поимка. Поэтому поимка происходит и в игре $\Gamma(n, B)$. Теорема доказана.

Предположение 4. *Существуют* $p \in \mathbb{R}^k$, $\mu \in \mathbb{R}^1$, *моменты* $\tau_i^0 \in [t_0, \infty)$ *такие, что*:
1. $B \subset B_1 = \{z \mid (p, z) \leq \mu\}$.
2. *Для всех* $\Lambda \in \Omega(n - m + 1)$ *выполнено включение* $0 \in \mathrm{Intco}\{\xi_j(\tau_j^0), j \in \Lambda, p\}$.

З а м е ч а н и е 2. Если выполнены предположение 2 и условия леммы 5, то предположение 4 выполнено.

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения* 1, 3, 4. *Тогда в игре* $\Gamma(n, B)$ *происходит* m*-кратная поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия теоремы и теоремы 1 следует, что m-кратная поимка происходит в игре $\Gamma(n, B_1)$. Следовательно, поимка произойдет и в игре $\Gamma(n, B)$.

3. Примеры

П р и м е р 1. Пусть $r = 1$, система $(1.4), (1.5)$ имеет вид

$$\dot{z}_i = u_i - v, \; z_i(0) = z_i^0.$$

Утверждение 1. *Пусть* $V = D_1(0)$ *и* $0 \in \operatorname{Intco}\{z_j^0, j \in \Lambda, p_1\}$ *для всех* $\Lambda \in \Omega(n - m + 1)$. *Тогда в игре* $\Gamma(n, B)$ *происходит* m*-кратная поимка.*

П р и м е р 2. Пусть в системе $(1.4), (1.5)$ $l = 1$, $t_0 = 0$, функция $a_1(t)$ имеет вид

$$a_1(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } t \in [0, 2\pi], \\ \sin t, \text{ если } t > 2\pi. \end{cases}$$

Тогда функция $\varphi_0(t)$ имеет вид

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} 1, \text{ если } t \in [0, 2\pi], \\ e^{1-\cos t}, \text{ если } t > 2\pi. \end{cases}$$

Функция $\varphi_0(t)$ является рекуррентной, но не является почти-периодической [18]. Предположение 1 выполнено.

Утверждение 2. *Пусть* $V = D_1(0)$, $m = 1$, $n \geq k$,

$$0 \in \operatorname{Intco}\{z_i^0, i \in I, p_1, \ldots, p_r\}.$$

Тогда в игре $\Gamma(n, B)$ *происходит поимка.*

П р и м е р 3. Пусть система (1.4) имеет вид

$$\ddot{z}_i + \frac{2}{3t}\dot{z}_i + \frac{1}{9t^{2/3}} z_i = u_i - v,$$

причем $t_0 = 8\pi^2$. Тогда

$$\varphi_0(t, s) = \cos(\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{s}), \; \varphi_1(t, s) = 3s^{2/3} \sin(\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{s}),$$
$$\xi_i(t) = z_i^0 \cos(\sqrt[3]{t}) + 12\pi^2 z_i^1 \sin(\sqrt[3]{t}).$$

Рекуррентность функций $\xi_i(t)$ следует из результатов работы [18].

Утверждение 3. *Пусть* $V = D_1(0)$, $n \geq m + k - 1$ *и выполнены предположения* 3, 4. *Тогда в игре* $\Gamma(n, B)$ *происходит* m*-кратная поимка.*

Взяв в качестве $\tau_i^0 = t_0 = 8\pi^2$, получаем, что справедливо

Утверждение 4. *Пусть* $V = D_1(0)$, $m = 1$, $n \geq k$, *и*

$$0 \in \operatorname{Intco}\{z_i^0, i \in I, p_1, \ldots, p_r\}.$$

Тогда в игре $\Gamma(n, B)$ *происходит поимка.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Понтрягин Л.С.** Избранные научные труды. М.: Наука, 1988. Т. 2. 576 с.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М: Наука, 1974. 456 с.
3. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М: Наука, 1981. 287 с.
4. **Чикрий А.А.** Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. Думка, 1992. 384 с.
5. **Григоренко Н.Л.** Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М: Изд-во МГУ, 1990. 197 с.
6. **Благодатских А.И., Петров Н.Н.** Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 2009. 266 с.
7. **Пшеничный Б.Н.** Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
8. **Банников А.С., Петров Н.Н.** К нестационарной задаче группового преследования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 40–51.
9. **Благодатских А.И.** О задаче группового преследования в нестационарном примере Понтрягина // Вест. Удмурт. ун-та. 2007. № 1. С. 17–24. (Математика.)
10. **Петров Н.Н.** “Мягкая” поимка в примере Л. С. Понтрягина со многими участниками // Прикл. математика и механика. 2003. Т. 67, вып. 5. С. 759–770.
11. **Григоренко Н.Л.** Игра простого преследования-убегания группы преследователей и одного убегающего // Вестн. МГУ. Сер. Вычислит. математика и кибернетика. 1983. № 1. С. 41–47.
12. **Благодатских А.И.** Одновременная многократная поимка в задаче простого преследования // Прикл. математика и механика. 2009. Т. 73, вып. 1. С. 54–59.
13. **Петров Н.Н.** Многократная поимка в примере Л.С.Понтрягина с фазовыми ограничениями // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 5. С. 747–754.
14. **Благодатских А.И.** Многократная поимка в примере Понтрягина // Вестн. Удмурт. ун-та. 2009. № 2. С. 3–12. (Математика. Механика. Компьютерные науки).
15. **Соловьева Н.А.** Групповое преследование в рекуррентном примере Л. С. Понтрягина // Вест. Удмурт. ун-та. 2014. № 3. С. 83–89. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
16. **Соловьева Н.А.** Одна задача группового преследования в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Математическая теория игр и ее приложения. 2011. Т. 3, № 1. С. 81–90.
17. **Виноградова М.Н., Петров Н.Н., Соловьева Н.А.** Поимка двух скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 1. С. 41–48.
18. **Зубов В.И.** К теории рекуррентных функций // Сиб. мат. журн. 1962. Т. III, № 4. С. 532–560.
19. **Петров Н.Н.** Об управляемости автономных систем // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 4. С. 606–617.
20. **Партхасаратхи Т., Рагхаван Т.** Некоторые вопросы теории игр двух лиц. М.: Мир, 1974. 296 с.
21. **Филиппов А.Ф.** О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 1959. № 2. С. 25–32.

Поступила 10.02.2015

Петров Николай Никандрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Удмуртский государственный университет
e-mail: kma3@list.ru

Соловьева Надежда Александровна
аспирантка
Удмуртский государственный университет
e-mail: solov_na@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 519.62

ОДНОШАГОВЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СМЕШАННЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

В. Г. Пименов, М. А. Панaчев

Уравнения в частных производных первого порядка методом характеристик сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям; если же в исходном уравнении имеется эффект запаздывания, аналогичный прием сводит уравнение к смешанному функционально-дифферен-циальному уравнению, в котором есть эффекты влияния по пространственной переменной и наследственности по времени. В работе приводятся конструкции одношаговых многоэтапных методов (аналогов явных методов Рунге — Кутты) численного решения смешанных функционально-дифференциальных уравнений с применением двумерной интерполяции вырожденными сплайнами. Исследуются порядки сходимости и приведены результаты численных экспериментов на тестовых примерах.

Ключевые слова: смешанные функционально-дифференциальные уравнения, численный алгоритм, двумерная интерполяция, экстраполяция, сходимость.

V. G. Pimenov, M. A. Panachev. One-step numerical methods for mixed functional differential equations.

First-order partial differential equations are reduced to ordinary differential equations by the method of characteristics. If there is a delay in the original equation, a similar method reduces the equation to a mixed functional differential equation with influence effects in the space variable and with time heredity. We present schemes of one-step multistage methods (analogs of explicit Runge–Kutta methods) for the numerical solution of mixed functional differential equations with the use of two-dimensional interpolation by degenerate splines. Orders of convergence are studied and results of numerical experiments on test examples are given.

Keywords: mixed functional differential equations, numerical algorithm, two-dimensional interpolation, extrapolation, convergence.

Введение

В смешанных функционально-дифференциальных уравнениях одна независимая переменная, играющая роль времени, отвечает за эволюцию, другая независимая переменная трактуется как пространственная. Математическая теория таких уравнений была развита, прежде всего, в трудах А. Д. Мышкиса [1]. Аналитическое исследование подобного рода объектов весьма затруднено, поэтому интерес представляют численные методы их решения; отсутствие алгоритмов и соответствующих программ препятствует, на наш взгляд, широкому распространению таких объектов в математическом моделировании. Смешанные функционально-дифференциальные уравнения имеют самостоятельное значение. Кроме того, их важность обусловлена тем, что если к уравнениям в частных производных первого порядка с наследственностью применить метод характеристик, то они сводятся как раз к смешанным функционально-дифференциальным уравнениям.

В данной статье конструируются одношаговые многоэтапные методы (аналоги явных методов Рунге — Кутты) численного решения, основанные на идее разделения конечномерной и бесконечномерной составляющих в структуре фазового состояния, идее построения сеточных методов только по конечномерной составляющей и идее применения интерполяции и экстраполяции (в данном случае по двум переменным) с заданными свойствами для учета бесконечномерной составляющей. Эти идеи ранее применялась для функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа с обыкновенными [2] и частными [3] производными. Ранее в

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00089) и Программы повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (соглашение 02.A03.21.0006 от 27 августа 2013 г.).

работе [4] для смешанных функционально-дифференциальных уравнений был построен простейший метод первого порядка — аналог метода Эйлера с двумерной кусочно-постоянной интерполяцией. В работах [5; 6] для этого же объекта были построены многошаговые численные алгоритмы, в том числе эффективный класс бесстартовых процедур. Однако одношаговые методы высокого порядка по сравнению с многошаговыми имеют несомненное преимущество — в них достаточно просто и эффективно организуются процедуры с переменным и автоматическим выбором шага [2; 7], без которых трудно представить современные пакеты прикладных программ.

В настоящей работе доказана теорема сходимости для аналогов методов Рунге — Кутты, изучены факторы, влияющие на порядок сходимости. Предложен способ двумерной интерполяции дискретной предыстории модели, обладающий нужными свойствами, а также способ экстраполяции по времени двумерной дискретной предыстории модели. Сконструирован эффективный аналог метода Рунге — Кутты четвертого порядка с кусочно-бикубической интерполяцией. Приведены результаты численных экспериментов на тестовом примере с различными видами эффекта наследственности по временной переменной и эффекта влияния по пространственной переменной. Статья продолжает продолжает и развивает результаты, намеченные в книге [8].

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{du}{dt} = f(x, t, u(x,t), u_{x,t}). \tag{1.1}$$

Здесь $u(x,t)$ — искомая функция, $x \in [a,b]$, $t \in [0,T]$ — независимые переменные, $u_{x,t} = \{u(x+\xi, t+s), -\eta \le \xi \le \eta, -\tau \le s \le 0\}$ — функция-предыстория искомой функции к моменту t, зависящая также от пространственного аргумента из зоны влияния $[x-\eta, x+\eta]$, $\tau > 0$ — величина запаздывания, $\eta > 0$ — величина, характеризующая зону влияния.

Обозначим $\Pi = [a,b] \times [0,T]$, $D = [-\eta, \eta] \times [-\tau, 0]$, $\Omega_0 = [a,b] \times [-\tau, 0]$, $\Omega_1 = [a-\eta, a] \times [-\tau, T]$, $\Omega_2 = [b, b+\eta] \times [-\tau, T]$, $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$. Пусть на множестве Ω определена функция (продолжающая) $\varphi(x,t)$, требуется найти решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям

$$u(x,t) = \varphi(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \tag{1.2}$$

это условие играет роль начальных и граничных условий.

Обозначим через P банахово пространство регулярных, т. е. ограниченных, измеримых по первому аргументу и непрерывных по второму функций $w(\xi, s)$, определенных на D, с нормой $\|w\|_P = \sup_{(\xi,s)\in D} |w(\xi,s)|$. Будем предполагать, что функционал $f(x,t,u,w)$ определен на $\Pi \times \mathbb{R} \times P$ и удовлетворяет вместе с функцией $\varphi(x,t)$ условиям, гарантирующим существование и единственность решения задачи (1.1), (1.2) (см. [1, с. 20]), в том числе липшицевости $f(x,t,u,w)$ по двум последним аргументам: существуют такие константы L и M, что для любых $(x,t) \in \Pi$, $u^{(1)} \in \mathbb{R}$, $u^{(2)} \in \mathbb{R}$, $w^{(1)} \in D$, $w^{(1)} \in D$ выполняется

$$|f(x,t,u^{(1)},w^{(1)}) - f(x,t,u^{(2)},w^{(2)})| \le L|u^{(1)} - u^{(2)}| + M\|w^{(1)} - w^{(2)}\|_P.$$

2. Семейство численных методов

Проведем дискретизацию задачи. Пусть пространственный шаг $h > 0$ такой, что $\eta/h = K$ — целое и временной шаг $\Delta > 0$ такой, что $\tau/\Delta = m$ — целое. Обозначим через $x_i = a + ih \in [a-\eta, b+\eta], i = -K, \ldots, N+K$, через $t_j = j\Delta \in [-\tau, T], j = -m, \ldots, J$. Без ограничения общности будем считать, что $N = (b-a)/h$, $J = T/\Delta$. Сеткой назовем набор таких пар $\{x_i, t_j\}$.

Приближения функции $u(x_i,t_j)$ в узлах сетки будем обозначать u^i_j. Дискретным влиянием (двумерной предысторией модели) для узла $\{x_i,t_j\}\in\Pi$ назовем набор значений $\{u^n_l\}^i_j=\{u^n_l,\ i-K\leqslant n\leqslant i+K,\ j-m\leqslant l\leqslant j\}$.

Для построения адекватной исходной задаче численной модели в плане учета предыстории введем интерполяцию дискретной предыстории модели.

Определение 1. Оператором двумерной интерполяции II назовем отображение $\{u^k_l\}^i_j\to v_{x_i,t_j}=\{v(x_i+\xi,t_j+s),\ -\eta\leqslant\xi\leqslant\eta,\ -\tau\leqslant s\leqslant 0\}\in P$.

Для рассматриваемых ниже методов потребуется также экстраполяция по времени вперед при заданном параметре $\alpha>0$. Обозначим $D_\alpha=[-\eta,\eta]\times[0,\alpha\Delta]$, через P_α — множество ограниченных, измеримых по первому аргументу и непрерывных по второму функций $w(\xi,s)$, определенных на D_α.

Определение 2. Оператором двумерной экстраполяции EE назовем отображение $\{u^k_l\}^i_j\to v_{x_i,t_j}=\{v(x_i+\xi,t_j+s),\ -\eta\leqslant\xi\leqslant\eta,\ 0\leqslant s\leqslant\alpha\Delta\}\in P_\alpha$.

Определение 3. Для натурального k назовем одношаговым k-этапным явным методом типа Рунге — Кутты — ЯРК-методом (с заданной двумерной интерполяцией II и двумерной экстраполяцией EE) — численную модель вида

$$u^i_{j+1}=u^i_j+\Delta\sum_{l=1}^{k}\sigma_l\,h_l(u^i_j,v_{x_i,t_j}),\quad i=1,\dots,N-1,\quad j=0,\dots,J-1,\tag{2.1}$$

$$h_1(u^i_j,v_{x_i,t_j})=f(x_i,t_j,u^i_j,v_{x_i,t_j}),\tag{2.2}$$

$$h_l(u^i_j,v_{x_i,t_j})=f\Big(x_i,t_j+a_l\Delta,u^i_j+\Delta\sum_{n=1}^{l-1}b_{ln}h_n(u^i_j,v_{x_i,t_j}),v_{x_i,t_j+a_l\Delta}\Big)\tag{2.3}$$

с начальными условиями $u^i_j=\varphi(x_i,t_j)$ при $\{x_i,t_j\}\in\Omega_0$, и краевыми условиями $u^i_j=\varphi(x_i,t_j)$ при $\{x_i,t_j\}\in\Omega_1\cup\Omega_2$.

Здесь предыстория модели определяется соотношениями

$$v_{x_i,t_j}(\xi,s)=\begin{cases}\varphi(x_i+\xi,t_j+s) & \text{при } t_j+s\leqslant 0,\ \text{или } x_i+\xi\leqslant a,\\ & \text{или } x_i+\xi\geqslant b,\\ II(\{u^n_l\}^i_j) & \text{при } -\tau\leqslant s<0,\\ EE(\{u^n_l\}^i_j) & \text{при } 0\leqslant s\leqslant\alpha\Delta,\end{cases}$$

$$\alpha=\max\{|a_l|,1\leqslant l\leqslant k\}.$$

Числа α_l,σ_l,b_{ln} являются коэффициентами метода. Будем обозначать также $\sigma=\max_l\{|\sigma_l|\}$, $b=\max_{l,n}\{|b_{ln}|\}$.

Рассмотрим вопрос о величине погрешности метода $\varepsilon^i_j=u(x_i,t_j)-u^i_j$.

Определение 4. Будем говорить, что метод сходится с порядком $h^p+\Delta^q$, если существует такая константа C, что выполняется неравенство: $|\varepsilon^i_j|\leqslant C(h^p+\Delta^q)$ для всех $i=0,\dots,N$ и $j=0,\dots,J$.

Порядок сходимости метода зависит от трех факторов: порядка невязки, порядка интерполяции и порядка экстраполяции.

Определение 5. Невязкой (погрешностью аппроксимации ЯРК-метода) назовем сеточную функцию

$$\psi^i_j=\frac{u(x_i,t_{j+1})-u(x_i,t_j)}{\Delta}-\sum_{l=1}^{k}\sigma_l\,h_l(u(x_i,t_j),u_{x_i,t_j}).$$

О п р е д е л е н и е 6. Будем говорить, что невязка имеет порядок Δ^q, если существует константа C такая, что выполняется неравенство $|\psi_j^i| \leqslant C\Delta^q$ для всех $i = 1, \dots, N-1$ и $j = 0, \dots, J-1$.

Заметим, что невязка определена на точном решении $u(x,t)$ и не зависит от интерполяции и экстраполяции.

О п р е д е л е н и е 7. Будем говорить, что оператор двумерной интерполяции II имеет порядок $h^p + \Delta^q$ на точном решении, если существуют константы C_1 и C_2 такие, что для всех $i = 1, \dots, N-1$, $j = 0, \dots, J$, $x \in [x_i - \eta, x_i + \eta]$ и $t \in [t_j - \tau, t_j]$ выполняется неравенство

$$|u(x,t) - v(x,t)| \leqslant C_1 \max_{i-K \leqslant l \leqslant i+K,\ j-m \leqslant n \leqslant j} |u(x_l, t_n) - u_n^l| + C_2(h^p + \Delta^q).$$

О п р е д е л е н и е 8. Будем говорить, что оператор двумерной экстраполяции EE имеет порядок $h^p + \Delta^q$ на точном решении, если существуют константы C_1 и C_2 такие, что для всех $i = 1, \dots, N-1$, $j = 0, \dots, J$, $x \in [x_i - \eta, x_i + \eta]$ и $t \in [t_j, t_j + \alpha\Delta]$ выполняется неравенство

$$|u(x,t) - v(x,t)| \leqslant C_1 \max_{i-K \leqslant l \leqslant i+K,\ j-m \leqslant n \leqslant j} |u(x_l, t_n) - u_n^l| + C_2(h^p + \Delta^q).$$

3. Теорема сходимости

Сформулируем теорему о порядках сходимости.

Теорема 1. *Если* ЯРК-*метод* (2.1)–(2.3) *имеет порядок невязки* Δ^{q_1}, *двумерная интерполяция предыстории модели имеет порядок* $h^{p_2} + \Delta^{q_2}$, *двумерная экстраполяция имеет порядок* $h^{p_3} + \Delta^{q_3}$ $(p_i > 0, q_i > 0, i = 1, 2, 3)$, *то метод сходится с порядком* $h^p + \Delta^q$, *где* $p = \min\{p_2, p_3\}$, $q = \min\{q_1, q_2, q_3\}$.

Для доказательства теоремы рассмотрим два вспомогательных утверждения. В этих утверждениях и их доказательствах, а также в доказательстве самой теоремы, индекс i меняется от 1 до $N-1$.

Лемма 1. *Функционалы* h_l, $l = 1, \dots, k$, *определяемые в* (2.2), (2.3), *липшицевы в следующем смысле: найдутся такие константы* L_l *и* M_l, *что*

$$|h_l(u_j^i, v_{x_i,t_j}) - h_l(u(x_i,t_j), u_{x_i,t_j})|$$
$$\leqslant L_l|u_j^i - u(x_i,t_j)| + M_l \sup_{x_i-\eta \leqslant x \leqslant x_i+\eta, t_j-\tau \leqslant t \leqslant t_j+\alpha\Delta} |v(x,t) - u(x,t)|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проведем индукцией по l.

При $l = 1$ функционал $h_1(u_j^i, v_{x_i,t_j}) = f(x_i, t_j, u_j^i, v_{x_i,t_j})$ и, следовательно, по предположению разд. 1 липшецев, причем $L_1 = L$, $M_1 = M$.

Предположим, что для индексов $n \leqslant l-1$ функционалы h_n липшицевы с константами L_n, M_n. Докажем липшицевость функционала h_l:

$$\big|h_l(u_j^i, v_{x_i,t_j}) - h_l(u(x_i,t_j), u_{x_i,t_j})\big| = \bigg|f\Big(x_i, t_j + a_l\Delta, u_j^i + \Delta\sum_{n=1}^{l-1} b_{ln} h_n(u_j^i, v_{x_i,t_j}), v_{x_i,t_j+a_l\Delta}\Big)$$
$$- f\Big(x_i, t_j + a_l\Delta, u(x_i,t_j) + \Delta\sum_{n=1}^{l-1} b_{ln} h_n(u(x_i,t_j), u_{x_i,t_j}), u_{x_i,t_j+a_l\Delta}\Big)\bigg|$$
$$\leqslant L|u_j^i - u(x_i,t_j)| + L\Delta b\sum_{n=1}^{l-1} \big|h_n(u_j^i, v_{x_i,t_j}) - h_n(u(x_i,t_j), u_{x_i,t_j})\big|$$

$$+ M \sup_{x_i-\eta\leqslant x\leqslant x_i+\eta, t_j-\tau\leqslant t\leqslant t_j+\alpha\Delta} |v(x,t)-u(x,t)| \leqslant L|u_j^i - u(x_i,t_j)|$$

$$+ L\Delta b \sum_{n=1}^{l-1} \Big(L_n |u_j^i - u(x_i,t_j)| + M_n \sup_{x_i-\eta\leqslant x\leqslant x_i+\eta, t_l-\tau\leqslant t\leqslant t_l+\alpha\Delta} |v(x,t)-u(x,t)| \Big)$$

$$+ M \sup_{x_i-\eta\leqslant x\leqslant x_i+\eta, t_l-\tau\leqslant t\leqslant t_l+\alpha\Delta} |v(x,t)-u(x,t)|.$$

Таким образом, функционал h_l липшицев с константами

$$L_l = L + L\Delta b \sum_{n=1}^{l-1} L_n, \quad M_l = M + L\Delta b \sum_{n=1}^{l-1} M_n.$$

Лемма 2. *Если оператор двумерной интерполяции имеет порядок $h^{p_2} + \Delta^{q_2}$, оператор двумерной экстраполяции имеет порядок $h^{p_3} + \Delta^{q_3}$, то найдутся такие константы $\hat{C}_1$ и $\hat{C}_2$, что выполняется неравенство*

$$|h_l(u_j^i, v_{x_i,t_j}) - h_l(u(x_i,t_j), u_{x_i,t_j})|$$

$$\leqslant \hat{C}_1 \max_{i-K\leqslant l\leqslant i+K, j-m\leqslant n\leqslant j} |u(x_l,t_n) - u_n^l| + \hat{C}_2 (h^{\min\{p_2,p_3\}} + \Delta^{\min\{q_2,q_3\}}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, объединяя определения порядков операторов двумерной интерполяции и экстраполяции, получаем, что найдутся константы C_1 и C_2, такие, что для всех $i = 0,\dots,N$, $j = 0,\dots,J$, $x \in [x_i-\eta, x_i+\eta]$ и $t \in [t_j, t_j - \tau + \alpha\Delta]$ выполняется неравенство

$$|u(x,t) - v(x,t)| \leqslant C_1 \max_{i-K\leqslant l\leqslant i+K, j-m\leqslant n\leqslant j} |u(x_l,t_n) - u_n^l| + C_2 (h^{\min\{p_2,p_3\}} + \Delta^{\min\{q_2,q_3\}}).$$

Отсюда и из леммы 1 вытекает

$$\big|h_l(u_j^i, v_{x_i,t_j}) - h_l(u(x_i,t_j), u_{x_i,t_j})\big| \leqslant L_l |u_j^i - u(x_i,t_j)| + M_l \sup_{x_i-\eta\leqslant x\leqslant x_i+\eta, t_l-\tau\leqslant t\leqslant t_l+\alpha\Delta} |v(x,t)-u(x,t)|$$

$$\leqslant L_l \|u_j^i - u(x_i,t_j)\| + M_l \Big(C_1 \max_{i-K\leqslant l\leqslant i+K, j-m\leqslant n\leqslant j} |u(x_l,t_n) - u_n^l| + C_2 \big(h^{\min\{p_2,p_3\}} + \Delta^{\min\{q_2,q_3\}} \big) \Big).$$

Взяв $\hat{C}_1 = \max_{1\leqslant l\leqslant k} M_l C_1 + \max_{1\leqslant l\leqslant k} L_l$, $\hat{C}_2 = \max_{1\leqslant l\leqslant k} M_l C_2$, получим утверждение леммы.

Перейдем к доказательству теоремы.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Выразим величину модуля погрешности $|\varepsilon_{j+1}^i|$ через $|\varepsilon_j^i|$, при этом точное решение $u(x_i,t_{j+1})$ подставим из определения невязки, а приближенное u_{j+1}^i — из определения метода (2.1)–(2.3). С использованием леммы 2 получаем

$$|\varepsilon_{j+1}^i| = \big|u(x_i,t_{j+1}) - u_{j+1}^i\big| = \Big| u(x_i,t_j) + \Delta\psi_j^i - u_j^i + \Delta \sum_{l=1}^{k} \sigma_l \left(h_l(u(x_i,t_j), u_{x_i,t_j}) - h_l(u_j^i, v_{x_i,t_j}) \right) \Big|$$

$$\leqslant |\varepsilon_j^i| + \Delta|\psi_j^i| + \Delta \sum_{l=1}^{k} |\sigma_l| \left(\hat{C}_1 \max_{i-K\leqslant l\leqslant i+K, j-m\leqslant n\leqslant j} |\varepsilon_n^i| + \hat{C}_2 (h^{\min\{p_2,p_3\}} + \Delta^{\min\{q_2,q_3\}}) \right)$$

$$\leqslant |\varepsilon_j^i| + \Delta k\sigma \hat{C}_1 \max_{i-K\leqslant l\leqslant i+K, j-m\leqslant n\leqslant j} |\varepsilon_n^i| + \Delta k\sigma \hat{C}_2 (h^{\min\{p_2,p_3\}} + \Delta^{\min\{q_2,q_3\}}) + C\Delta^{q_1+1}.$$

Введем послойную норму погрешности $\epsilon_j = \|\varepsilon_j^i\|_j = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant N} |\varepsilon_j^i|$, тогда выведенную оценку можно переписать как

$$\epsilon_{j+1} \leqslant \epsilon_j + \Delta C_3 \max_{j-m\leqslant n\leqslant j} \epsilon_n + C_4 \Delta (h^p + \Delta^q), \tag{3.1}$$

где $C_3 = k\sigma\hat{C}_1$, $C_4 = k\sigma\hat{C}_2 + C$, $p = \min\{p_2, p_3\}$, $q = \min\{q_1, q_2, q_3\}$.

Индукцией по j докажем оценку

$$\epsilon_j \leqslant (1 + \Delta(C_3 + 1))^j C_4(h^p + \Delta^q). \tag{3.2}$$

База индукции выполняется, так как $\epsilon_0 = 0$.

Шаг индукции. Пусть оценка (3.2) выполняется для индексов $\leqslant j$, покажем ее справедливость для $j + 1$.

Пусть max в правой части оценки (3.1) достигается на индексе $n_0 \leqslant j$, тогда, применяя индуктивное предположение к ϵ_j и ϵ_{n_0}, получаем

$$\epsilon_{j+1} \leqslant \epsilon_j + \Delta C_3 \epsilon_{n_0} + C_4\Delta(h^p + \Delta^q) \leqslant (1 + \Delta(C_3 + 1))^j C_4(h^p + \Delta^q)$$

$$+ \Delta C_3(1 + \Delta(C_3 + 1))^{n_0} C_4(h^p + \Delta^q) + C_4(h^p + \Delta^q) \leqslant (1 + \Delta(C_3 + 1))^j C_4(h^p + \Delta^q)(1 + C_3\Delta + \Delta).$$

Оценка (3.2) доказана.

Так как $j \leqslant J = T/\Delta$, то из (3.2) вытекает оценка

$$\epsilon_j \leqslant (1 + \Delta(C_3 + 1))^{T/\Delta} C_4(h^p + \Delta^q) \leqslant e^{(C_3+1)T} C_4(h^p + \Delta^q),$$

которая содержит утверждение теоремы. □

В связи с доказанной теоремой возникает вопрос о построении эффективных алгоритмов, с учетом факторов, обеспечивающих порядок сходимости методов. Для обеспечения методов с высоким порядком невязки можно конструировать полные аналоги известных для обыкновенных дифференциальных уравнений и функционально-дифференциальных уравнений алгоритмов. При этом для определения порядка невязки используются тейлоровские разложения точного решения и правой части исходного уравнения с использованием техники i-гладкого анализа [2]. Главной проблемой обеспечения нужного порядка сходимости метода является подбор соответствующего способа двумерных интерполяции и экстраполяции.

4. Двумерные интерполяция и экстраполяция

Опишем двумерную интерполяцию, основанную на интерполяции по каждой переменной функциями, кусочно составленными из многочленов p-й степени и q-й степени соответственно, где p и q — произвольные натуральные числа. Таким образом, по каждой переменной будет произведена интерполяция вырожденными сплайнами p-й и q-й степени соответственно. Без ограничения общности будем предполагать, что $\dfrac{2K}{p} = k_p$ — целое, в противном случае можно выбирать $2K$ (это число определяет шаг h) кратным p. Аналогично будем предполагать, что $\dfrac{m}{q} = k_q$ — целое, в противном случае можно выбирать m кратным q.

Сначала опишем одномерную интерполяцию по времени t. Зафиксируем индекс i, $1 \leqslant i \leqslant N - 1$, и соответственно пространственную координату узла x_i. Одномерной предысторией модели для узла $\{x_i, t_j\} \in \Pi$ назовем набор значений $\{u_l^i\}_j^i = \{u_l^n,\ j - m \leqslant l \leqslant j\}$.

Разобьем отрезок $[t_j - \tau, t_j]$ справа на k_q подотрезков $[t_{j_{n+1}}, t_{j_n}]$, $n = 0, 1, \ldots, k_q - 1$, длиной $q\Delta$ таким образом, что $t_{j_0} = t_j$, $t_{j_1} = t_{j-q}$, ... На каждом отрезке $[t_{j_{n+1}}, t_{j_n}]$ построим интерполяционный многочлен $L_q(t) = L_q^n(t)$ степени q по данным $u^i_{j_n-q}$, $u^i_{j_n-q+1}, \ldots, u_{j_n}$ в форме Лагранжа:

$$L_q^n(t) = \sum_{l=0}^{q} u^i_{j_n-l} \prod_{k=j_n-q;\ k\neq j_n-l}^{j_n} \frac{t - t_k}{t_{j_n-l} - t_k}. \tag{4.1}$$

О п р е д е л е н и е 9. Оператором интерполяции одномерной предыстории модели вырожденными сплайнами q-й степени назовем отображение

$$I : \{u_l^i\}_j^i \to w^i(t) = \begin{cases} L_q^n(t), & t_{j_{n+1}} \le t < t_{j_n},\ n = 0, \ldots, j-1, \\ \varphi(x_i, t), & t \in [t_j - \tau, 0]. \end{cases} \tag{4.2}$$

Теорема 2 [2, теорема 3.2]. *Пусть точное решение $u(x,t)$ обладает непрерывными частными производными $q+1$-го порядка по t на отрезке $[-\tau, T]$ при фиксированном $x = x_i$, тогда оператор интерполяции (4.1), (4.2) вырожденными сплайнами q-й степени имеет погрешность интерполяции $q+1$, то есть найдутся постоянные C_1, C_2 такие, что для всех $j = 0, 1, \ldots, J$ и $t \in [t_j - \tau, t_j]$ выполняется неравенство*

$$|u(x_i, t) - w^i(t)| \leq C_1 \max_{j-m \leq n \leq j} |u(x_i, t_n) - u_n^i| + C_2 \Delta^{q+1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о приведено в [2, с. 98], при этом $C_1 = (q+1)!$, $C_2 = \dfrac{M_{t,q+1}}{q+1}$, где

$$M_{t,q+1} = \max_{-\tau \leq t \leq T,\ a \leq x \leq b} \left| \frac{\partial^{q+1}}{(\partial t)^{q+1}} u(x,t) \right|.$$

Отметим, что константы C_1 и C_2 не зависят от $x = x_i$. □

Теперь, считая, что при фиксированных i, j $(1 \leqslant i \leqslant N-1, 0 \leqslant i \leqslant J-1)$ построены функции $w^k(t)$, при $t_j - \tau \leqslant t \leqslant t_j$ и $i - K \leqslant k \leqslant i + K, 1 \leqslant k \leqslant N-1$, построим при фиксированном $t \in [t_j - \tau, t_j]$ вырожденные сплайны p-й степени по x на отрезке $[x_i - \eta, x_i + \eta]$.

Разобьем отрезок $[x_i - \eta, x_i + \eta]$ на k_p подотрезков $[x^{n-1}, x^n]$, $n = 1, 2, \ldots, k_p$, длиной ph таким образом, что $x^0 = x_i - \eta = x_{i-K}$, $x^1 = x^0 + ph = x_{i-K+p}$, …, $x^n = x_{i-K+np}$, …, $x^{k_p} = x_i + \eta = x_{i+K}$. На каждом отрезке $[x^{n-1}, x^n]$ построим интерполяционный многочлен $L_p(x) = L_p^n(x,t)$ степени p по данным $w^{i-K+(n-1)p}(t)$, $w^{i-K+(n-1)p+1}(t)$, …, $w^{i-K+np}(t)$:

$$L_p^n(x,t) = \sum_{l=0}^{p} w^{i-K+(n-1)p+l}(t) \prod_{k=i-K+(n-1)p;\ k \neq i-K+(n-1)p+l}^{i-K+np} \frac{x - x_k}{x_{i-K+(n-1)p+l} - x_k}. \tag{4.3}$$

О п р е д е л е н и е 10. Оператором интерполяции двумерной предыстории модели вырожденными сплайнами q-й степени по переменной $t \in [t_j - \tau, t_j]$ и вырожденными сплайнами p-й степени по переменной $x \in [x_i - \eta, x_i + \eta]$ назовем отображение

$$II : \{u_l^k\}_j^i \to v(x,t) = \begin{cases} L_p^n(x,t), & x^{n-1} \leq x < x^n,\ n = 1, \ldots, k_p, \\ \varphi(x,t), & x \in [a-\eta, a] \cup [b, b+\eta]. \end{cases} \tag{4.4}$$

Теорема 3. *Пусть точное решение $u(x,t)$ обладает непрерывными частными производными $q+1$-го порядка по t и непрерывными частными производными $p+1$-го порядка по x на множестве $\Pi \cup \Omega$, тогда оператор интерполяции II вида (4.3), (4.4) имеет порядок $h^{p+1} + \Delta^{q+1}$ на точном решении.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем согласно определению порядка оператора двумерной интерполяции II индексы $i = 1, \ldots, N-1$, $j = 0, \ldots, J$ и числа $x \in [x_i - \eta, x_i + \eta]$ и $t \in [t_j - \tau, t_j]$. Пусть x лежит в подотрезке $[x^{n-1}, x^n]$. Тогда

$$|u(x,t) - v(x,t)| = |u(x,t) - L_p^n(x,t)| \leq |u(x,t) - \hat{L}_p^n(x,t)| + |L_p^n(x,t) - \hat{L}_p^n(x,t)|,$$

где $\hat{L}_p^n(x,t)$ — функция, являющаяся при фиксированном t интерполяционным многочленом p-й степени по x, построенным по значениям $u(x_l, t)$ на отрезке $[x^{n-1}, x^n]$:

$$\hat{L}_p^n(x,t) = \sum_{l=0}^{p} u(x_{i-K+(n-1)p+l}, t) \prod_{k=i-K+(n-1)p;\ k \neq i-K+(n-1)p+l}^{i-K+np} \frac{x - x_k}{x_{i-K+(n-1)p+l} - x_k}.$$

Погрешность интерполяции точного решения вычисляется по формуле

$$|R_p(x,t)| = |u(x,t) - L_p^n(x,t)| = \left| \frac{1}{(p+1)!} \frac{\partial^{p+1}}{(\partial x)^{p+1}} u(\xi, t) \prod_{j=0}^{p} (x - x_{i-K+(n-1)p+l}) \right|,$$

где $\xi \in [x_{i-K+(n-1)p}, x_{i-K+np}]$. Таким образом, если $x \in [x_{i-K+(n-1)p}, x_{i-K+np}]$, то

$$\left| \prod_{k=i-K+(n-1)p;\ k\neq i-K+(n-1)p+l}^{i-K+np} \frac{x-x_k}{x_{i-K+(n-1)p+l}-x_k} \right| \le h\cdot h\cdot(2h)\cdots(ph) = h^{p+1}p!$$

и

$$|R_p(x,t)| \le \frac{M_{x,p+1}}{(p+1)!}\, p!\, h^{p+1} = \frac{M_{x,p+1}}{p+1}\, h^{p+1}, \tag{4.5}$$

где $M_{x,p+1} = \max\limits_{-\tau\le t\le,\ a-K\le x\le b+K} \left|\frac{\partial^{p+1}}{(\partial x)^{p+1}} u(x,t)\right|$. Кроме того, имеем оценку

$$\left|L_p^n(x,t) - \hat{L}_p^n(x,t)\right|$$

$$\le \sum_{l=0}^{p} \left|u(x_{i-K+(n-1)p+l},t) - w^{i-K+(n-1)p+l}(t)\right| \prod_{k=i-K+(n-1)p;\ k\neq i-K+(n-1)p+l}^{i-K+np} \frac{|x-x_k|}{|x_{i-K+(n-1)p+l}-x_k|}$$

$$\le \max_{i-K\le n\le i+k,\ t_j-\tau\le t\le t_j} |u(x_n,t) - w^n(t)|\,(p+1)!. \tag{4.6}$$

Из оценки (4.6) и теоремы 2 вытекает

$$|L_p^n(x,t) - \hat{L}_p^n(x,t)| \le (p+1)!(q+1)! \max_{i-K\le n\le i+k,\ j-m\le k\le j} |u(x_n,t_k) - u_k^n| + C_2\Delta^{q+1}. \tag{4.7}$$

Из (4.5) и (4.7) получаем

$$|u(x,t) - v(x,t)| \le C_3 \max_{i-K\le n\le i+k,\ j-m\le k\le j} |u(x_n,t_k) - u_k^n| + C_4 h^{p+1} + C_2\Delta^{q+1},$$

где $C_3 = (p+1)!(q+1)!$, $C_2 = \dfrac{M_{t,q+1}}{q+1}$, $C_4 = \dfrac{M_{x,p+1}}{p+1}$. Эта оценка доказывает утверждение теоремы. □

Примером описанного способа двумерной интерполяции является кусочно-линейная интерполяция по каждой переменной (билинейная), которая при соответствующих условиях гладкости точного решения имеет порядок $h^2 + \Delta^2$.

Опишем способ экстраполяции продолжением.

Пусть проведена одномерная интерполяция (4.1), (4.2) вырожденными сплайнами q-й степени. Один из способов задания оператора E одномерной экстраполяции – экстраполяция продолжением интерполяционного многочлена

$$E: \{u_l^i\}_j^i \to w^i(t) = L_p^0(t), \quad t \in [t_j, t_j + \alpha\Delta], \tag{4.8}$$

где $L_p^0(t)$ — интерполяционный многочлен p-й степени вида (4.1), построенный на отрезке $[t_{j-p}, t_j]$. Таким образом, при фиксированных i, j $(1 \leqslant i \leqslant N-1, 0 \leqslant i \leqslant J-1)$ построены функции $w^k(t)$, при $t_j \leqslant t \leqslant t_j + \alpha\Delta$ и $i-K \leqslant k \leqslant i+K, 1 \leqslant k \leqslant N-1$, поэтому, также как в случае двумерной интерполяции, построим при фиксированном $t \in [t_j, t_j+\alpha\Delta]$ вырожденные сплайны p-й степени по x на отрезке $[x_i - \eta, x_i + \eta]$.

О п р е д е л е н и е 11. Оператором экстраполяции двумерной предыстории модели вырожденными сплайнами q-й степени по переменной $t \in [t_j, t_j+\alpha\Delta]$ и вырожденными сплайнами p-й степени по переменной $x \in [x_i - \eta, x_i + \eta]$ назовем отображение

$$EE: \{u_l^k\}_j^i \to v(x,t) = \begin{cases} L_p^n(x,t), & x^{n-1} \le x < x^n,\ n = 1,\dots,k_p, \\ \varphi(x,t), & x \in [a-\eta, a] \cup [b, b+\eta], \end{cases} \tag{4.9}$$

где функции $L_p^n(x,t)$ определяются по формуле (4.3), но в отличие от интерполяции эти функции определяются при $t \in [t_j, t_j + \alpha\Delta]$.

Аналогично теореме 3 проверяется следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть точное решение $u(x,t)$ обладает непрерывными частными производными $q+1$-го порядка по t и непрерывными частными производными $p+1$-го порядка по x на множестве $\Pi \cup \Omega$, тогда оператор экстраполяции EE вида* (4.3), (4.8), (4.9) *имеет порядок $h^{p+1} + \Delta^{q+1}$ на точном решении.*

5. Численный эксперимент

Рассмотрим следующее семейство смешанных функционально-дифференциальных уравнений:

$$\frac{du}{dt} = \alpha u(x,t) + \beta u(x,t-\tau) + \int\limits_{-\eta}^{\eta} u(x+\xi,t)d\xi + R(x,t), \tag{5.1}$$

где $u(x,t) = \phi(x,t)$ при $(x,t) \in [a-\eta,a) \times [0,T] \cup [a,b] \times [-\tau,0) \cup (b,b+\eta] \times [0,T]$; $\alpha, \beta, R(x,t)$ — параметры семейства.

Требуется вычислить $u(x,t)$ при $(x,t) \in [a,b] \times [0,T]$.

Опишем схему численного решения любого уравнения из семейства (5.1) в виде четырехэтапного явного метода типа Рунге — Кутты, имеющего невязку порядка Δ^4.

Для интерполяции значений сосредоточенного запаздывания по времени и распределенного влияния по пространству будем использовать по каждой переменной вырожденные кубические сплайны. Совокупная погрешность выбранного способа кусочно-бикубической интерполяции имеет порядок $h^4 + \Delta^4$ на точном решении.

Для численного интегрирования будем использовать составную формулу Ньютона — Котеса (метод Симпсона):

$$I(x_i,t_j) = \int\limits_{-\eta}^{\eta} u(x+\xi,t)d\xi \approx \frac{h}{3}\Big(u_j^{i-K} + u_j^{i+K} + 4\sum_{k=1}^{K} u_j^{i-K+2k-1} + 2\sum_{k=1}^{K} u_j^{i-K+2k}\Big) = I_j^i.$$

О п р е д е л е н и е 12. Методом Рунге — Кутты четвертого порядка для решения уравнений из семейства (5.1) назовем следующий алгоритм.

Ш а г 1.1. Прогноз $u_{j+0.5}^i$:

$$h_1 = \alpha u_j^i + \beta u_{j-m}^i + I_j^i + R(t_j,x_i),$$

$$u_{j+0.5}^i = u_j^i + \frac{\Delta}{2}h_1.$$

Шаг 1.2. Интерполяция $u_{j+0.5-m}^i$:

$$L_3(t_{j+0.5-m}) = \sum_{l=0}^{3} u_{m-l}^i \prod_{k=m-3;\ k\neq m-l}^{m} \frac{t_{j+0.5-m} - t_k}{t_{m-l} - t_k},$$

$$u_{j+0.5-m}^i = \begin{cases} \varphi(x_i,t), & t_{j+0.5-m} < 0, \\ L_3(t), & t_{j+0.5-m} \geq 0. \end{cases}$$

Ш а г 2. Коррекция $u_{j+0.5}^i$:

$$h_2 = \alpha u_{j+0.5}^i + \beta u_{j+0.5-m}^i + I_{j+0.5}^i + R(t_{j+0.5},x_i),$$

$$u_{j+0.5}^i = u_j^i + \frac{\Delta}{2}h_2.$$

Ш а г 3. Прогноз u^i_{j+1}:

$$h_3 = \alpha u^i_{j+0.5} + \beta u^i_{j+0.5-m} + I^i_{j+0.5} + R(t_{j+0.5}, x_i),$$
$$u^i_{j+1} = u^i_j + \Delta h_3.$$

Ш а г 4. Коррекция u^i_{j+1}:

$$h_4 = \alpha u^i_{j+1} + \beta u^i_{j+1-m} + I^i_{j+1} + R(t_{j+1}, x_i),$$
$$u^i_{j+1} = u^i_j + \frac{\Delta}{6}(h_1 + 2(h_2 + h_3) + h_4).$$

Согласно теореме 1 представленный метод сходится с порядком $h^4 + \Delta^4$.

В заключение рассмотрим пример численного решения уравнения из семейства (5.1):

$$\alpha = 1 - \frac{2}{\pi}\sqrt{2-\sqrt{2}}; \quad \beta = 1; \quad R(x,t) = -\frac{\pi}{2}e^{t-1.25}\cos\frac{\pi x}{2},$$

$$\eta = 0.25; \quad \tau = 0.25; \quad a = -1; \quad b = 1; \quad T = 1,$$

$$\varphi(x,t) = \frac{\pi}{2}e^{t-1}\cos\frac{\pi x}{2}.$$

При указанных параметрах уравнение из семейства (5.1) будет иметь единственное решение

$$u(x,t) = \frac{\pi}{2}e^{t-1}\cos\frac{\pi x}{2} \equiv \varphi(x,t).$$

На рис. 1, рис. 2 представлены графики, отражающие динамику абсолютной погрешности метода $|\varepsilon^i_j| = |u(x_i,t_j) - u^i_j|$ при $j = 0,\dots,J$; $i = 0,\dots,N$. Приведены сравнительные результаты по трем экспериментам, в которых шаги по переменным согласованы: $h = \Delta = 0.01$; 0.02; 0.03.

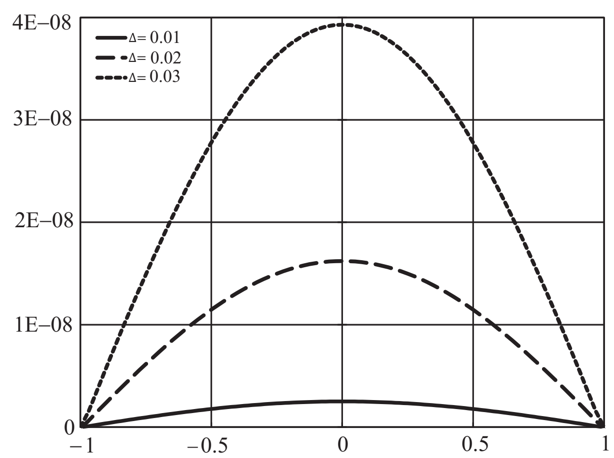


Рис. 1. Динамика развития $\epsilon_j = \max\limits_{i=0,\dots,N}|\varepsilon^i_j|$.

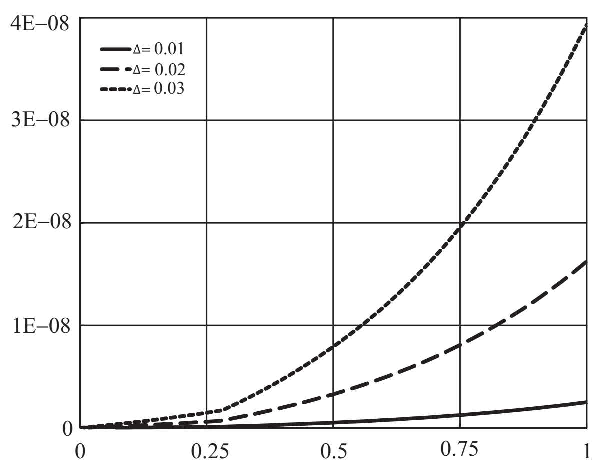


Рис. 2. График величины $\varepsilon^i_T = |u(x_i,T) - u^i_J|$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Мышкис А.Д.** Смешанные функционально-дифференциальные уравнения // Современная математика. Фундаментальные направления. 2003. Т. 4. С. 5–120.
2. **Ким А.В., Пименов В.Г.** i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. М.; Ижевск: РХД, 2004. 256 с.
3. **Пименов В.Г., Ложников А.Б.** Разностные схемы численного решения уравнения теплопроводности с последействием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 178–189.
4. **Пименов В.Г., Паначев М.А.** Численные алгоритмы и программы для решения смешанных функционально-дифференциальных уравнений // Теория управления и математическое моделирование: тр. конф. Ижевск: Изд. ИжГТУ, 2012. С. 60–61.
5. **Пименов В.Г., Паначев М.А.** Решение уравнения переноса с запаздыванием путем использования численных методов для смешанных функционально-дифференциальных уравнений // Вест. Тамб. ун-та. Сер. Естественные и технические науки. 2013. Т. 18, вып. 5-2. С. 2637–2638.
6. **Panachev M.A.** Startingless multistep methods approach for the numerical solution of the mixed functional differential equations // AIP Conf. Proc. 2014. Vol. 1631, iss. 1. P. 224–229.
7. **Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.** Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
8. **Пименов В.Г.** Разностные методы решения уравнений в частных производных с наследственностью. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2014. 132 с.

Пименов Владимир Германович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина,
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: v.g.pimenov@urfu.ru

Поступила 3.02.2015

Паначев Максим Александрович
ассистент
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: max.panachev@live.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.977

О СТРУКТУРЕ СИНГУЛЯРНОГО МНОЖЕСТВА КУСОЧНО-ГЛАДКОГО МИНИМАКСНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ — БЕЛЛМАНА[1]

А. С. Родин

В данной работе изучаются свойства минимаксного кусочно-гладкого решения уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана. Известно, что необходимыми и достаточными условиями для точек недифференцируемости (сингулярности) минимаксного решения являются условия Ранкина — Гюгонио. В работе получено обобщение этого условия и описание размерности гладких многообразий, из которых состоит сингулярное множество кусочно-гладкого решения, в терминах пришедших на него характеристик. Получены новые структурные свойства сингулярного множества в случае, когда гамильтониан зависит только от импульсной переменной.

Ключевые слова: уравнение Гамильтона — Якоби — Беллмана, минимаксное решение, сингулярное множество, кусочно-гладкое решение, касательное пространство, условие Ранкина — Гюгонио.

A. S. Rodin. On the structure of the singular set of a piecewise smooth minimax solution to the Hamilton–Jacobi–Bellman equation.

The properties of a minimax piecewise smooth solution of the Hamilton–Jacobi–Bellman equation are studied. It is known the Rankine–Hugoniot conditions are necessary and sufficient conditions for the points of nondifferentiability (singularity) of the minimax solution. We generalize this condition and describe the dimension of smooth manifolds contained in the singular set of the piecewise smooth solution in terms of state characteristics that come to this set. New structural properties of the singular set are obtained in the case when the Hamiltonian depends on the impulse variable only.

Keywords: Hamilton–Jacobi–Bellman equation, minimax solution, singular set, piecewise smooth solution, tangent space, Rankine–Hugoniot conditions.

Введение

Как известно [1–3], задачам теории оптимального управления сопоставляются уравнения в частных производных первого порядка типа Гамильтона — Якоби — Беллмана. В данной работе изучаются свойства предложенного А. И. Субботиным обобщенного (минимаксного) решения уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана. Ранее Е. А. Колпаковой [4;5] были получены необходимые и достаточные условия принадлежности точки фазового пространства сингулярному множеству минимаксного решения, т. е. множеству точек недифференцируемости. В настоящей работе эти результаты получили развитие. Изучены свойства сингулярного множества минимаксного кусочно-гладкого решения, и получена связь размерности сингулярных подмногообразий и пришедших на них фазовых характеристик. Получена также связь структуры гамильтониана и структуры сингулярного множества в случае, когда гамильтониан зависит только от импульсной переменной.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-00168) и программы Президиума РАН "Математические задачи современной теории управления".

1. Кусочно-гладкое решение уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана и его сингулярное множество

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу Коши для уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана

$$\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} + H(t,x,D_x\varphi(t,x)) = 0, \quad \varphi(T,x) = \sigma(x), \tag{1.1}$$

где $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $D_x\varphi(t,x) = \Big(\dfrac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x_1}, \dfrac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x_n}\Big) = s$.

Обозначим $\Pi_T = \{(t,x) : t \in [0,T]\,, x \in \mathbb{R}^n\}$.

Задача (1.1) рассматривается при следующих предположениях:

A1) функция $H(t,x,s)$ непрерывно дифференцируема по переменным t,x,s, вогнута по переменной s;

A2) функция $\sigma(x)$ непрерывно дифференцируема;

A3) выполнены условия подлинейного роста: существуют такие $\alpha > 0$, $\beta > 0$, что выполняются условия

$$\|D_xH(t,x,s)\| \le \alpha(1 + \|x\| + \|s\|), \quad \|D_sH(t,x,s)\| \le \beta(1 + \|x\| + \|s\|)$$

для любой точки $(t,x,s) \in \Pi_T \times \mathbb{R}^n$. Здесь символ $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму конечномерного вектора.

Целью работы является изучение структуры решения $\varphi(\cdot)$ задачи (1.1).

1.2. Обобщенное решение задачи (1.1)

При сделанных предположениях классическое решение задачи (1.1) $\varphi(\cdot)$ может существовать лишь локально в некоторой окрестности краевого многообразия

$$C^T = \{(t,x,z)\colon t = T, x = \xi, z = \sigma(\xi);\ \xi \in \mathbb{R}^n\}\,.$$

Это решение $\varphi(\cdot)$ может быть построено с помощью метода характеристик Коши [6]. Выпишем характеристическую систему с краевыми условиями при $t = T$ для задачи (1.1):

$$\dot{\tilde{x}} = D_sH(t,\tilde{x},\tilde{s}), \quad \dot{\tilde{s}} = -D_xH(t,\tilde{x},\tilde{s}), \quad \dot{\tilde{z}} = \langle\tilde{s}, D_sH(t,\tilde{x},\tilde{s})\rangle - H(t,\tilde{x},\tilde{s}), \tag{1.2}$$

$$\tilde{x}(T,\xi) = \xi, \quad \tilde{s}(T,\xi) = D_x\sigma(\xi), \quad \tilde{z}(T,\xi) = \sigma(\xi) \ \ \forall\xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.3}$$

Символ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает скалярное произведение.

Решения $\tilde{x}$, $\tilde{s}$, $\tilde{z}$ называются, соответственно, *фазовыми, импульсными, ценовыми характеристиками* уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана (1.1).

Заметим, что при выполнении условий A1–A3 решение характеристической системы существует, единственно и продолжимо на отрезок $[0,T]$, для $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Согласно методу Коши [6] при условии, что якобиан $\dfrac{\partial\tilde{x}(t,\xi)}{\partial(t,\xi)}$ отличен от нуля, справедливы формулы $x = \tilde{x}(t,\xi)$, $\quad \varphi(t,x) = \tilde{z}(t,\xi)$, $\quad D_x\varphi(t,x) = \tilde{s}(t,\xi)$.

В дальнейшем будут рассматриваться неклассические, негладкие решения задачи (1.1). При этом воспользуемся одним из полезных инструментов негладкого анализа, следующим обобщением понятия дифференцируемости функции [7].

О п р е д е л е н и е 1. Супердифференциалом функции $\varphi(\cdot)\colon \Pi_T \to \mathbb{R}$ в точке (t,x) называется множество

$$D^+\varphi(t_0,x_0) = co\Big\{(\alpha,s) \in \mathbb{R}^{n+1}\colon \limsup_{t\to t_0, x\to x_0} \frac{\varphi(t,x) - \varphi(t_0,x_0) - \langle(\alpha,s),(\Delta t,\Delta x)\rangle}{|\Delta t| + \|\Delta x\|} \le 0\Big\}.$$

В точках дифференцируемости функции $\varphi(\cdot)$ супердифференциал состоит из единственного элемента, градиента этой функции.

Напомним определение обобщенного решения задачи (1.1) [4; 5].

О п р е д е л е н и е 2. Обобщенным решением задачи (1.1) называется локально липшицевая супердифференцируемая функция $\Pi_T \ni (t,x) \mapsto \varphi(t,x) \in \mathbb{R}$ такая, что для любой точки $(t_0, x_0) \in \Pi_T$ существуют $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ и решения системы (1.2), (1.3) $\tilde{x}(\cdot,\xi_0)$, $\tilde{s}(\cdot,\xi_0)$, $\tilde{z}(\cdot,\xi_0)$, удовлетворяющие условию

$$\tilde{x}(t_0,\xi_0) = x_0, \quad \tilde{z}(t_0,\xi_0) = \varphi(t_0,x_0) \quad \text{и} \quad \tilde{z}(t,\xi_0) = \varphi(t,\tilde{x}(t,\xi_0)) \ \ \forall t \in [t_0,T].$$

Из результатов работ [4, с. 32; 5, с. 97; 8, с. 42; 9, с. 11; 10, с. 203] вытекает следующее утверждение о связи определения 2 с определениями минимаксного и вязкостного решений.

Утверждение 1. *Если в задаче* (1.1) *выполнены условия A1–A3, то существует и единственно обобщенное решение задачи* (1.1) *в смысле определения* 2, *причем определение* 2 *эквивалентно определениям минимаксного и вязкостного решений задачи* (1.1).

1.3. Сингулярное множество

Напомним определение сингулярного множества для обобщенного решения $\varphi(\cdot)$ задачи (1.1).

О п р е д е л е н и е 3. Сингулярным множеством Q для обобщенного решения $\varphi(\cdot)$ задачи (1.1) называется множество точек $(t,x) \in \Pi_T$, в которых функция φ недифференцируема.

Согласно работам [4, с. 157; 5, с. 97] справедливы следующие утверждения.

Утверждение 2. *Пусть в задаче* (1.1) *выполнены условия A1–A3. Для того чтобы точка $(t,x) \in Q$, необходимо и достаточно, чтобы существовали $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$, $\xi_1 \neq \xi_2$, для которых выполнены соотношения*

$$\tilde{x}(t,\xi_1) = \tilde{x}(t,\xi_2) = x, \quad \tilde{z}(t,\xi_1) = \tilde{z}(t,\xi_2) = \varphi(t,x), \quad \tilde{s}(t,\xi_1) \neq \tilde{s}(t,\xi_2),$$

где $\tilde{x}(\cdot,\xi_i)$, $\tilde{s}(\cdot,\xi_i)$, $\tilde{z}(\cdot,\xi_i)$, $i=1,2$, — решения характеристической системы (1.2), (1.3).

Утверждение 3. *Если множество сингулярности Q содержит кривую, описываемую дифференцируемой функцией $t \mapsto x(t)$, $0 < t_0 < t \leq T$, то справедливо соотношение*

$$\left\langle \tilde{s}(t,\xi_1) - \tilde{s}(t,\xi_2), \frac{dx(t)}{dt} \right\rangle = H(t,x(t),\tilde{s}(t,\xi_1)) - H(t,x(t),\tilde{s}(t,\xi_2)) \quad \forall t \in (t_0,T]\,.$$

Это соотношение обобщает известное условие Ранкина — Гюгонио на случай n-мерной фазовой переменной x.

1.4. Класс кусочно-гладких функций

В данной работе рассматриваются обобщенные решения $\varphi(\cdot)$ задачи (1.1) из класса кусочно-гладких функций(например, [8, с. 55]).

О п р е д е л е н и е 4. Функция $\varphi(\cdot) : \Pi_T \to \mathbb{R}$ называется кусочно-гладкой в Π_T, если

$$\Pi_T = \bigcup_{i\in I} M_i, \quad M_i \cap M_j = \varnothing, \quad \text{если} \quad i \neq j, \quad i,j \in I, \quad I = \{1,2,\ldots,N\}\,,$$

где M_i — дифференцируемые подмногообразия в Π_T.

Введем обозначения:

$$J := \{i \in I : M_i - (n+1) - \text{мерное многообразие}\},$$

$$J(x) := \{j \in J : x \in \overline{M}_j\}, \quad \text{где} \quad \overline{M}_j - \text{замыкание множества} \quad M_j.$$

Предполагается, что для любых $x_1, x_2 \in M_i$, $i \in I$, выполнено $J(x_1) = J(x_2)$.

Сужение кусочно-гладкой функции $\varphi(\cdot,\cdot)$ на $\overline{M}_j$, где $j \in J$, является непрерывно дифференцируемой функцией.

Поясним определение 4. Многообразия M_i, $i \in J \subset I$, имеющие размерность $n+1$, являются открытыми, и при этом $\bigcup_{i\in J} \overline{M}_i = \Pi_T$. Все остальные многообразия M_i, $i \in I \setminus J$, имеющие размерность меньше чем $n+1$, принадлежат границе замыкания многообразий, имеющих размерность $n+1$. Причем справедливо следующее свойство: для любых двух точек x_1, x_2, принадлежащих одному и тому же многообразию, выполнено $J(x_1) = J(x_2)$; это значит, что для любой точки $x \in M_i$, $i \in I$, выполнено следующее $x \in \overline{M}_{j_1} \cap \ldots \cap \overline{M}_{j_k}$, где $j_1, \ldots, j_k \in J(x)$, при этом $x \notin \overline{M}_j$, когда $j \in J \setminus J(x)$.

2. Характеристики и размерность сингулярного многообразия

2.1. Структура сингулярного многообразия

Рассмотрим минимаксное решение $\varphi(\cdot)$ задачи (1.1) из класса кусочно-гладких функций.

Фиксируем многообразие M_i, $i \in I$, размерность которого равна $(n+1-k)$, где $k \in \overline{1,n}$, и обозначим его символом $M_{[k]}$ для упрощения дальнейшего изложения.

Пусть $L_{[k]}(t,x)$ — касательное подпространство к многообразию $M_{[k]}$ в точке (t,x). Проекцию супердифференциала функции $\varphi(\cdot)$ на кокасательное пространство, ортогональное касательному подпространству в точке (t,x), обозначим как

$$S^+_{[k]}(t,x) := \left\{q^+ \in \mathbb{R}^{n+1} : \exists p \in L_{[k]}(t,x), p + q^+ \in D^+\varphi(t,x), \left\langle q^+, (1,f)\right\rangle = 0 \ \forall (1,f) \in L_{[k]}(t,x)\right\}.$$

Для точки $(t,x) \in Q$ определим множество $Index(t,x)$, состоящее из индексов характеристик, которые обладают следующими свойствами:

$$\tilde{x}(t,\xi_i) = x, \quad \tilde{z}(t,\xi_i) = \varphi(t,x), \quad \tilde{s}(t,\xi_i) \neq \tilde{s}(t,\xi_j), \quad i \neq j, \quad \forall i,j \in Index(t,x). \tag{2.1}$$

Согласно утверждению 2, это множество непусто для всех $(t,x) \in Q$.

Символом $|Index(t,x)|$ обозначим мощность множества $Index(t,x)$.

Лемма. *Если супердифференциал $D^+\varphi(t,x)$ кусочно-гладкого минимаксного решения $\varphi(\cdot)$ задачи (1.1) в точке $(t,x) \in \Pi_T$ состоит не из единственного элемента, то разность двух элементов d^* и d_* этого супердифференциала принадлежит кокасательному пространству в точке (t,x). Если размерность кокасательного пространства равна k, где $1 \le k \le n$, то найдутся k попарно различных линейно независимых векторов вида $d^* - d_*$, где $d^*, d_* \in D^+\varphi(t,x)$.*

Доказательство леммы следует из свойств кусочно-гладкого минимаксного решения $\varphi(\cdot)$ задачи (1.1). В работе [8, с. 60] показано, что всякий элемент $d = (\alpha, s)$, лежащий в супердифференциале $D^+\varphi(t,x)$, представим в виде суммы элементов $p+q^+$, где p принадлежит касательному пространству к сингулярному множеству в точке (t,x), а q^+ — кокасательному пространству в точке (t,x). При этом проекция p определяется единственным образом для всех элементов из супердифференциала $D^+\varphi(t,x)$. □

Как известно [4;8], супердифференциал локально липшицевого минимаксного решения $\varphi(\cdot)$ задачи (1.1) есть замкнутое, ограниченное множество и оно имеет вид

$$D^+\varphi(t,x) := co\{d(t,\xi_i) \in \mathbb{R}^{n+1} : i \in Index(t,x)\}, \quad d(t,\xi_i) = (-H(t,\tilde{x}(t,\xi_i),\tilde{s}(t,\xi_i)),\tilde{s}(t,\xi_i)).$$

Пусть касательное пространство к сингулярному множеству в точке (t,x) имеет размерность $n+1-k$. Рассмотрим вектора $d(t,\xi_i) - d(t,\xi_1)$, где $i \in Index(t,x)$, $i \neq 1$. Нетрудно видеть, что $d(t,\xi_i)-d(t,\xi_1)=q^+(t,\xi_i)-q^+(t,\xi_1)$. Из того что $q_i^+\in S^+_{[k]}(t,x)$, $i\in Index(t,x)$, получаем, что вектора $q^+(t,\xi_i)-q^+(t,\xi_1)$, $i\in Index(t,x)$, также лежат в кокасательном пространстве $S^+_{[k]}(t,x)$ размерности k. Следовательно, найдутся k таких $q^+(t,\xi_i)$, где $i\in Index(t,x)$, $i\neq 1$, что вектора $q^+(t,\xi_i)-q^+(t,\xi_1)$ являются линейно независимыми, эти вектора образуют базис в подпространстве $S^+_{[k]}(t,x)$.

Фиксируем точку $(t,x)\in M_{[k]}\subset Q$.

Теорема 1. *Пусть в задаче* (1.1) *выполнены условия* А1–А3 *и* $(t,x)\in Q$. *Тогда для того чтобы* $(t,x)\in M_{[k]}$, *где* $\dim M_{[k]}=n+1-k$, $k\in\overline{1,n}$, *необходимо и достаточно, чтобы существовали решения* $\tilde{x}(\cdot,\xi_i)$, $\tilde{s}(\cdot,\xi_i)$, $\tilde{z}(\cdot,\xi_i)$, $i\in Index(t,x)$, *системы* (1.2), (1.3) *такие, что выполнено* (2.1) *и матрица* D *вида*

$$D=\begin{pmatrix} -(H_2-H_1) & s_2^1-s_1^1 & s_2^2-s_1^2 & \dots & s_2^n-s_1^n\\ -(H_3-H_1) & s_3^1-s_1^1 & s_3^2-s_1^2 & \dots & s_3^n-s_1^n\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ -(H_{i+1}-H_1) & s_{i+1}^1-s_1^1 & s_{i+1}^2-s_1^2 & \dots & s_{i+1}^n-s_1^n \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

имеет ранг k, *где* $k\le|Index(t,x)|$. *Здесь* $(s_i^1,s_i^2,\dots,s_i^n)=\tilde{s}(t,\xi_i)$, $H_i=H(t,\tilde{x}(t,\xi_i),\tilde{s}(t,\xi_i))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть $(t,x)\in M_{[k]}\subset Q$. Отметим, что размерность касательного пространства $L_{[k]}(t,x)$ совпадает с размерностью многообразия $M_{[k]}$.

Так как $\dim L_{[k]}(t,x)=n+1-k$, то размерность кокасательного пространства $S^+_{[k]}(t,x)$ равна $n+1-(n+1-k)=k$.

Из леммы следует, что найдутся $q^+(t,\xi_i)\in S^+_{[k]}(t,x)$, $i\in\overline{1,k+1}$, такие, что вектора $q^+(t,\xi_i)-q^+(t,\xi_1)$, $i,j\in\overline{1,k+1}$, $i\neq j$, будут линейно независимыми.

Обозначим символом $Basic_{[k]}(t,x)$ множество, состоящее из k индексов таких, что вектора $q^+(t,\xi_i)-q^+(t,\xi_1)$, $i\in Index(t,x)$, $i\neq 1$, являются линейно независимыми.

Следовательно, матрица D, которая состоит из строк вида $q^+(t,\xi_i)-q^+(t,\xi_1)$, $i\in Index(t,x)$, имеет ранг k.

Добавлением к матрице, состоящей из строк вида $q^+(t,\xi_i)-q^+(t,\xi_1)$, $i\in Basic_{[k]}(t,x)$, строки вида $q^+(t,\xi_i)-q^+(t,\xi_1)$, $i\in Index(t,x)$, ранг матрицы не изменится.

Достаточность. Пусть ранг матрицы

$$D=\begin{pmatrix} -(H_2-H_1) & s_2^1-s_1^1 & s_2^2-s_1^2 & \dots & s_2^n-s_1^n\\ -(H_3-H_1) & s_3^1-s_1^1 & s_3^2-s_1^2 & \dots & s_3^n-s_1^n\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ -(H_{i+1}-H_1) & s_{i+1}^1-s_1^1 & s_{i+1}^2-s_1^2 & \dots & s_{i+1}^n-s_1^n \end{pmatrix}$$

равен k, $k\le|Index(t,x)|$. Строки этой матрицы суть элементы $d(t,\xi_i)-d(t,\xi_1)$, где $d(t,\xi_i)\in D^+\varphi(t,x)$, $2\le i\le|Index(t,x)|$. Кроме того, они могут рассматриваться как нормали к гиперплоскостям размерности n. При этом k из этих нормалей являются линейно независимыми.

В силу леммы из того, что вектора $d(t,\xi_i)-d(t,\xi_1)=q^+(t,\xi_i)-q^+(t,\xi_1)$, $i\in Basic_{[k]}(t,x)$, принадлежат кокасательному пространству и являются его базисом, следует, что размерность кокасательного пространства в точке (t,x) равна k, а размерность касательного равна $n+1-k$, т. е. $(t,x)\in M_{[k]}$.

З а м е ч а н и е. Из того что $(t,x)\in Q$, $d(t,\xi_i)\in D^+\varphi(t,x)$, $i\in Index(t,x)$, согласно [5] следует, что выполнены условия Ранкина — Гюгонио для кривой $x(\cdot)$, лежащей на $M_{[k]}$:

$$\left\langle \tilde{s}(t,\xi_i)-\tilde{s}(t,\xi_1),\frac{dx(t)}{dt}\right\rangle=H(t,x(t),\tilde{s}(t,\xi_i))-H(t,x(t),\tilde{s}(t,\xi_1)),\quad i\in Index(t,x). \tag{2.3}$$

Перепишем условие (2.3) в виде

$$\Big\langle\Big(-\big(H(t,x(t),\tilde{s}(t,\xi_i))-H(t,x(t),\tilde{s}(t,\xi_1))\big),\tilde{s}(t,\xi_i)-\tilde{s}(t,\xi_1)\Big),(1,\dot{x})\Big\rangle$$

$$= \langle q^+(t,\xi_i) - q^+(t,\xi_1), (1,\dot{x}) \rangle = 0, \quad i \in Index(t,x). \tag{2.4}$$

Из условия (2.4) видно, что вектор $(1,\dot{x})$ ортогонален всем векторам вида $q^+(t,\xi_i) - q^+(t,\xi_1)$, $i \in Index(t,x)$, а значит, этот вектор ортогонален и всем векторам $q^+(t,\xi_i) - q^+(t,\xi_1)$, $i \in Basic_{[k]}(t,x)$, составляющим базис пространства $S^+_{[k]}(t,x)$. Отсюда делаем вывод, что вектор $(1,\dot{x})$ принадлежит касательному пространству $L_{[k]}(t,x)$. Теорема доказана.

2.2. Свойство супердифференциала

Теорема 2. *Пусть в задаче* (1.1) *выполнены условия* A1–A3, $(t,x) \in Q$, $(t,x) \in M_{[k]}$, *где* $\dim M_{[k]} = n + 1 - k$ *и* $1 \le k \le n$, *и гамильтониан* H *зависит только от переменной* s *и является вогнутым по ней. Тогда для любых* $k+1$ *характеристик* $\tilde{s}(\cdot)$, *удовлетворяющих условию* (2.1) *и условию, что матрица* D *вида* (2.2), *построенная на этих характеристиках, имеет ранг* k, *не существует характеристики, также удовлетворяющей условию* (2.1), *которая представима в виде выпуклой комбинации этих* $k+1$ *характеристик.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем удобное обозначение

$$q_{i,j}(t,x) = q^+(t,\xi_i) - q^+(t,\xi_j) = d(t,\xi_i) - d(t,\xi_j) = \Big(-\big(H(\tilde{s}(t,\xi_i)) - H(\tilde{s}(t,\xi_j))\big),\ \tilde{s}(t,\xi_i) - \tilde{s}(t,\xi_j) \Big),$$

$$i \ne j, \quad \xi_i \ne \xi_j.$$

Предположим, что утверждение этой теоремы неверно и существует характеристика $\tilde{x}(t, \xi_{k+2})$, $\tilde{z}(t,\xi_{k+2})$, $\tilde{s}(t,\xi_{k+2})$, удовлетворяющая условию (2.1), что $\tilde{s}(t,\xi_{k+2})$ является выпуклой комбинацией $\tilde{s}(t,\xi_i)$, $i \in \overline{1,k+1}$, т. е.

$$\tilde{s}(t,\xi_{k+2}) = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \cdot \tilde{s}(t,\xi_i), \quad \alpha_i \ge 0, \quad \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i = 1. \tag{2.5}$$

Из теоремы 1 и из того, что $(t,x) \in M_{[k]}$, следует: ранг матрицы $\tilde{D}$, полученной путем добавления к матрице D строки вида $q_{k+2,1}(t,x)$, останется равным k, т. е добавленная строка $q_{k+2,1}(t,x)$ является линейной комбинацией всех остальных строк. Это можно записать так: существуют такие $b_i \in \mathbb{R}$, $i \in \overline{1,k}$, что

$$q_{k+2,1}(t,x) = \sum_{i=1}^{k} b_i \cdot q_{i+1,1}(t,x).$$

Отсюда следует, что $q_{k+2,1}(t,x)$ принадлежит подпространству размерности k, порожденному векторами $q_{i,1}(t,x)$, $i \in \overline{2,k+1}$.

Из этого условия вытекает, что

$$d(t,\xi_{k+2}) = \Big(1 - \sum_{i=1}^{k} b_i\Big) \cdot d(t,\xi_1) + \sum_{i=1}^{k} b_i \cdot d(t,\xi_{i+1}). \tag{2.6}$$

Поскольку равенство (2.6) применимо ко всем компонентам вектора $d(t,\xi_{k+2})$, данное равенство перепишем в виде двух равенств, а именно

$$H(\tilde{s}(t,\xi_{k+2})) = \Big(1 - \sum_{i=1}^{k} b_i\Big) \cdot H(\tilde{s}(t,\xi_1)) + \sum_{i=1}^{k} b_i \cdot H(\tilde{s}(t,\xi_{i+1})), \tag{2.7}$$

$$\tilde{s}(t,\xi_{k+2}) = \Big(1 - \sum_{i=1}^{k} b_i\Big) \cdot \tilde{s}(t,\xi_1) + \sum_{i=1}^{k} b_i \cdot \tilde{s}(t,\xi_{i+1}). \tag{2.8}$$

Из (2.6) и (2.8) следует, что функция H обладает следующим свойством:

$$H\Big(\Big(1-\sum_{i=1}^{k} b_i\Big)\cdot\tilde{s}(t,\xi_1)+\sum_{i=1}^{k} b_i\cdot\tilde{s}(t,\xi_{i+1})\Big)=\Big(1-\sum_{i=1}^{k} b_i\Big)\cdot H(\tilde{s}(t,\xi_1))+\sum_{i=1}^{k} b_i\cdot H(\tilde{s}(t,\xi_{i+1})).$$

Заметим также, что сумма коэффициентов при $H(\tilde{s}_i(t,x))$ и $\tilde{s}_i(t,x)$ равна 1, $i\in\overline{1,k+1}$.

Для $\tilde{s}(t,\xi_{k+2})$ существуют два представления: формула (2.5) из условия задачи, что $\tilde{s}(t,\xi_{k+2})$ есть выпуклая комбинация $\tilde{s}(t,\xi_i)$, где $i\in\overline{1,k+1}$, и формула (2.8), полученная из линейной зависимости строки $q_{k+2,1}(t,x)$.

Вычтем из (2.8) (2.5), получим

$$0=\Big(\Big(1-\sum_{i=1}^{k} b_i\Big)-\alpha_1\Big)\cdot\tilde{s}(t,\xi_1)+\sum_{i=1}^{k}(b_i-\alpha_{i+1})\cdot\tilde{s}(t,\xi_{i+1}).\tag{2.9}$$

Прибавим, вычтем в (2.9):

$$\sum_{i=1}^{k}(b_i-\alpha_{i+1})\cdot\tilde{s}(t,\xi_1),$$

сгруппировав, имеем

$$0=\Big(1-\alpha_1-\sum_{i=1}^{k}(b_i-b_i+\alpha_{i+1})\Big)\cdot\tilde{s}(t,\xi_1)+\sum_{i=1}^{k}(b_i-\alpha_{i+1})\cdot\big(\tilde{s}(t,\xi_{i+1})-\tilde{s}(t,\xi_1)\big).$$

Учитывая, что коэффициент при $\tilde{s}(t,\xi_1)$ равен 0, получим выражение

$$0=\sum_{i=1}^{k}(b_i-\alpha_{i+1})\cdot\big(\tilde{s}(t,\xi_{i+1})-\tilde{s}(t,\xi_1)\big).\tag{2.10}$$

Если $\tilde{s}(t,\xi_{i+1})-\tilde{s}(t,\xi_1)$, $i\in\overline{1,k}$, линейно независимы, то тождество (2.10) будет верным только тогда, когда $b_i=\alpha_{i+1}$, $i\in\overline{1,k}$, а из условия $\sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i=1$ получим, что $\alpha_1=(1-\sum_{i=1}^{k}b_i)$.

Рассмотрим другой случай. Если, например, $\tilde{s}(t,\xi_2)-\tilde{s}(t,\xi_1)$ является линейной комбинацией $\tilde{s}(t,\xi_{i+1})-\tilde{s}(t,\xi_1)$, где $i\in\overline{2,k}$, то, вспомнив условие Ранкина — Гюгонио (2.3), умножим скалярно на $\dot{x}$ каждую часть тождества (2.10). После преобразования получим, что

$$0=\sum_{i=1}^{k}(b_i-\alpha_{i+1})\cdot\big(H(\tilde{s}(t,\xi_1))-H(\tilde{s}(t,\xi_{i+1}))\big).$$

Отсюда делаем вывод, что $H(t,\xi_1)-H(t,\xi_2)$ есть линейная комбинация $H(\tilde{s}(t,\xi_1))-H(\tilde{s}(t,\xi_{i+1}))$, $i\in\overline{2,k}$, чего не может быть, так как в этом случае ранг матрицы D будет равен $k-1$, а не k. При скалярном умножении тождества на $\dot{x}=0$ из условия Ранкина — Гюгонио (2.3) получаем, что $H(t,\xi_1)-H(t,\xi_{i+1})=0$, $i\in\overline{1,k}$.

Это значит, что мы приходим к случаю, когда $\tilde{s}(t,\xi_{i+1})-\tilde{s}(t,\xi_1)$, $i\in\overline{1,k}$, линейно независимы. Следовательно, $b_i=\alpha_{i+1}$, $i\in\overline{1,k}$, а $\alpha_1=(1-\sum_{i=1}^{k}b_i)$.

В силу выпуклости функции $-H(s)$ точки $d(t,\xi_i)=(-H(\tilde{s}(t,\xi_i)),\tilde{s}(t,\xi_{i+1}))\in D^{+}\varphi(t,x)$, $i\in\overline{1,k+1}$, лежащие на графике функции $s\to -H(s)$, также являются вершинами симплекса размерности k. В силу гладкости функции $H(s)$ по переменной s опорная гиперплоскость к надграфику $-H(s)$ в точках $(-H(\tilde{s}(t,\xi_i)),\tilde{s}(t,\xi_i))$, где $i\in\overline{1,k+1}$, единственна и содержит данный симплекс. Обозначим вектор нормали к этой гиперплоскости символом $(-1,-N)\in\mathbb{R}^{n+1}$. Из того, что

$$H(\tilde{s}(t,\xi_{k+2}))=\sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i\cdot H(\tilde{s}(t,\xi_i)),\quad \sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i=1,\quad \alpha_i\geq 0,\quad i\in\overline{1,k+1},$$

следует, что точка $(-H(\tilde{s}(t,\xi_{k+2})), \tilde{s}(t,\xi_{k+2}))$, лежащая в симплексе, определяется как

$$\Big(-\sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i\cdot H(\tilde{s}(t,\xi_i)),\quad \sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i\cdot \tilde{s}(t,\xi_i)\Big)=\big(-H(\tilde{s}(t,\xi_{k+2})),\tilde{s}(t,\xi_{k+2})\big).$$

Отсюда следует, что

$$D_sH(\tilde{s}(t,\xi_i))=N=\mathrm{const},\quad i\in\overline{1,k+2}. \tag{2.11}$$

Поскольку гамильтониан H зависит только от переменной s, то $\dot{\tilde{s}}(t,\xi_i)=-D_xH(\tilde{s}(t,\xi_i))=0$, $i\in\overline{1,k+2}$, $t\le T$. Отсюда следует, что $\tilde{s}(t,\xi_i)\equiv D_x\sigma(\xi_i)=s_i^T$.

Из условия

$$x=x(t)=x_i^T-\int\limits_t^T\frac{\partial H}{\partial s}(s_i^T)d\tau=x_i^T-\int\limits_t^T Nd\tau,\quad i\in\overline{1,k+2},$$

и условия (2.1) следует, что

$$x(t)=x_i^T-\int\limits_t^T\frac{\partial H}{\partial s}(s_i^T)d\tau=x_j^T-\int\limits_t^T\frac{\partial H}{\partial s}(s_j^T)d\tau,\quad i,j\in\overline{1,k+2}.$$

Учитывая это и (2.11), получаем, что $x_i^T=x_j^T$, где $i,j\in\overline{1,k+2}$; это противоречит предположению о различии краевых данных $x_i^T=\xi_i$ и $x_j^T=\xi_j$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Беллман Р.Э.** Динамическое программирование. Москва: Изд-во иностр. лит., 1960. 400 с.
2. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961. 384 с.
3. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
4. Метод характеристик для уравнения Гамильтона — Якоби-Беллмана / Н.Н. Субботина, Е.А. Колпакова, Т.Б. Токманцев, Л.Г. Шагалова. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2013. 244 с.
5. **Колпакова Е.А.** Обобщенный метод характеристик в теории уравнений Гамильтона — Якоби и законов сохранения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 95–98.
6. **Петровский И.Г.** Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 296 с.
7. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 470 с.
8. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнения в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации / Ин-т компьютерных исследований. М.: Ижевск, 2003. 336 с.
9. **Crandall G., Lions P.L.** Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277, no. 1. P. 1–42.
10. **Субботина Н.Н., Колпакова Е.А.** О структуре локально липшицевых минимаксных решений уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана в терминах классических характеристик // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 202–218.

Родин Алексей Семёнович
ведущий математик
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
аспирант ИМКН УрФУ
e-mail: alexey.rodin.ekb@gmail.com

Поступила 11.03.2015

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.955

О СВЯЗИ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ С НЕКОТОРЫМИ СИСТЕМАМИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

О. С. Розанова

Мы показываем, что с уравнением Гамильтона — Якоби при некоторых условиях на гамильтониан может быть ассоциирована квазилинейная система уравнений первого порядка, которая сводится к векторному уравнению Хопфа. Найдена связь между системой инвариантов Римана и специально конструируемым уравнением Гамильтона — Якоби. Результат иллюстрирован примерами системы уравнений изэнтропической газовой динамики и системы уравнений хроматографии. Показано, что при помощи метода стохастического возмущения вдоль характеристик с уравнением Гамильтона — Якоби можно связать некоторую систему законов сохранения.

Ключевые слова: уравнение Гамильтона — Якоби, уравнение Хопфа, система инвариантов Римана, вязкостная регуляризация, стохастическая регуляризация.

O. S. Rozanova. On the connection of the Hamilton–Jacobi equation with some systems of quasilinear equations.

We show that the Hamilton–Jacobi equation with some conditions on the Hamiltonian can be associated with a quasilinear system of equations of the first order, which can be reduced to the vector Hopf equation. We find relations between the system of Riemann invariants and a specially constructed Hamilton–Jacobi equation. The result is illustrated with examples of a system of isentropic gas dynamics equations and a system of equations of chromatography. It is shown that the method of stochastic perturbations along characteristics allows to associate with the Hamilton–Jacobi equation a system of conservation laws.

Keywords: Hamilton–Jacobi equation, Hopf equation, system of Riemann invariants, viscous regularization, stochastic regularization.

1. Введение

Связь между уравнениями Гамильтона — Якоби (ГЯ) и квазилинейными системами уравнений первого порядка совершенно естественна: такие системы получаются как дифференциальное следствие уравнения ГЯ, где в качестве неизвестного выступает градиент решения уравнения ГЯ. Определения классических и обобщенных решений, а также формулы для представления решений уравнения ГЯ и дифференциальных следствий из них связаны. Таким образом, если для некоторой квазилинейной системы уравнений удается найти уравнение ГЯ такое, что система является дифференциальным следствием этого уравнения, то решение ее можно выразить через решение уравнения ГЯ и наоборот.

Самым известным примером такого рода связей является уравнение Гамильтона — Якоби

$$\Psi_t + \frac{|\nabla_x \Psi|^2}{2} = 0, \quad \Psi = \Psi(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

и его дифференциальное следствие, многомерное уравнение Хопфа для потенциальной вектор-функции $q = q(t,x) = \nabla_x \Psi(t,x)$, $q \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(q_i)_t + \sum_{j=1}^{n} q_j \,(q_i)_{x_j} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

или, в более короткой записи,

$$q_t + (q, \nabla_x)\, q = 0. \tag{1.2}$$

Последнее уравнение описывает скорость свободно движущихся частиц и играет важную роль в различных математических и физических задачах. Оно появляется при описании неравновесных процессов различного масштаба. На микроуровне это молекулярные явления, на мезоуровне — движение жидкости со свободными границами, на макроуровне — процессы эволюции галактик [1]. Самой интересной чертой уравнения Хопфа является возникновение особенностей первоначально гладкого решения, в частности, структура этих особенностей.

В случае одной пространственной переменной уравнение (1.2) имеет очень простой вид и считается "эталонным" уравнением, которое представляется в виде закона сохранения,

$$q_t + \frac{(q^2)_x}{2} = 0. \tag{1.3}$$

Для него вводится понятие обобщенного решения в виде ударной волны, возникают условие Ранкина — Гюгонио на ударной волне и условие устойчивости (допустимости) разрыва [2]. Также хорошо известно [3; 4], что обобщенное решение (1.3) может быть получено при помощи метода исчезающей вязкости (или вязкостной регуляризации). Этот метод состоит в том, что вместо гиперболического уравнения (1.3) рассматривается уравнение параболического типа

$$q_t + \frac{(q^2)_x}{2} = \mu q_{xx}, \quad \mu = \mathrm{const} > 0, \tag{1.4}$$

сводящееся к уравнению теплопроводности

$$z_t = \mu z_{xx}.$$

Поэтому решение его оказывается бесконечное число раз дифференцируемым, задача Коши для (1.4) в классе функций, растущих на бесконечности не более чем линейным образом, допускает явное интегральное представление и в пределе при $\mu \to 0$ сходится к устойчивому обобщенному решению (1.3). В процессе сведения возникает уравнение

$$\Psi_t + \frac{\Psi_x^2}{2} = \mu \Delta_x \Psi, \quad \Psi_x = q, \tag{1.5}$$

решение которого переводится в уравнение теплопроводности при помощи замены Коула — Хопфа $\Psi = -2\mu \ln z$. В пределе решение задачи Коши для (1.5) с начальными данными, имеющими не более чем квадратичный рост на бесконечности, при $\mu \to 0$ сходится к обобщенному (слабому) решению уравнения ГЯ $\Psi_t + \Psi_x^2/2 = 0$, так что (1.5) является вязкостной регуляризацией соответствующего уравнения ГЯ. Более того, то же слабое решение является минимаксным решением [5; 6], оно также может быть получено на основе вариационного принципа [7, с. 100].

Теория построения обобщенных решений уравнений ГЯ общего вида на основе вязкостной регуляризации, состоящей в добавлении малого диффузионного члена, существует с середины 70-х годов [8–11]. В случае одной пространственной переменной эта теория практически эквивалентна ранее возникшей теории гиперболических законов сохранения, развитой в 50-е годы [3; 12; 13]. Для случая многих пространственных переменных эти теории расходятся. Тем не менее в некоторых специальных случаях параллели между ними по-прежнему существуют. Уравнения (1.1) и (1.2) — очевидный пример этого. Действительно, система (1.2) может быть записана в консервативной форме

$$q_t + \nabla_x \Big(\frac{|\nabla_x \Psi|^2}{2} \Big) = 0, \tag{1.6}$$

что дает возможность определить ее обобщенное решение в смысле интегрального тождества стандартным образом [2; 14]. Дальнейшая процедура регуляризации абсолютно аналогична случаю одной пространственной переменной. А именно после добавления в правую часть члена со вторыми производными мы получим уравнение Бюргерса

$$q_t + (q, \nabla_x)\, q = \mu \Delta_x q, \quad \mu = \mathrm{const} > 0, \quad q \in \mathbb{R}^n, \tag{1.7}$$

и с учетом потенциальности q регуляризованное уравнение Гамильтона — Якоби

$$\Psi_t + \frac{|\nabla_x \Psi|^2}{2} = \mu \Delta_x \Psi,$$

которое при помощи замены Коула — Хопфа переводится в уравнение теплопроводности

$$z_t = \mu \Delta_x z$$

и, следовательно, допускает явное представление решения для произвольных интегрируемых начальных данных с не более чем линейным ростом на бесконечности по пространственным переменным [15]. Обобщенное решение в смысле интегрального тождества системы (1.2) (и, соответственно, уравнения (1.1)) может быть найдено как поточечный предел при $\mu \to 0$ решения уравнения (1.7).

Случай уравнения Хопфа и соответствующего ему уравнения ГЯ кажется очень специальным. На первый взгляд, получить явную асимптотическую формулу для представления решения для уравнений ГЯ более общего вида, равно как и для систем квазилинейных уравнений более общего вида, не представляется возможным.

Мы собираемся показать, что это не так и асимптотические представления обобщенных решений задачи Коши могут быть получены для широкого класса уравнений ГЯ с выпуклым по градиенту решения гамильтонианом. Среди квазилинейных систем уравнений первого порядка, для которых, как следствие, может быть получено явное асимптотическое представление обобщенного решения, — любая система, обладающая инвариантами Римана и дополнительным законом сохранения.

Практически все результаты этой статьи могут быть названы “вариациями на тему векторного уравнения Хопфа”. Идея состоит в том, чтобы найти классы уравнений, которые при помощи дополнительных соображений сводятся к уравнению Хопфа и поэтому к ним можно применить уже существующий аппарат представления решения. Самым приятным следствием возможности сведения к уравнению Хопфа является то, что нам не надо заново выстраивать доказательство трудного факта того, что решение регуляризованного уравнения сходится при стремлении параметра вязкости к нулю к обобщенному решению исходного уравнения.

Мы также покажем, что при построении стохастического возмущения решений уравнения ГЯ вдоль характеристик также возникает система квазилинейных уравнений, но на совершенно иных принципах. Это система уравнений баланса (или, в предельном случае, система уравнений законов сохранения), связанная с уравнением Колмогорова — Фоккера — Планка для плотности распределения некоторых случайных величин. На этом пути также можно получить формулу для представления решения, правда, только классического.

2. Уравнение Гамильтона — Якоби: вязкостная регуляризация и асимптотическое представление решения задачи Коши

Рассмотрим задачу

$$u_t + H(\nabla_x u, x) = 0, \quad u : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad u(x, 0) = u^0(x). \tag{2.1}$$

Обозначим $p = \nabla_x u$. Будем считать, что начальное данное является липшицевой функцией, а гамильтониан — гладкой функцией такой, что

$$\det H_{pp}(p, x) = \det\Big(\frac{\partial^2 H(p, x)}{\partial p_i \partial p_j}\Big) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad p \in \mathbb{R}^n, \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{2.2}$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} H_{p_j}\, H_{p_i x_j} = \sum_{j=1}^{n} H_{p_i p_j}\, H_{x_j}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.3}$$

Ниже будем обозначать как H_p и H_x векторы частных производных функции $H(p,x)$ по аргументам p и x, а как $\nabla_x \Phi$ вектор полных производных некоторой функции $\Phi(u,p,x)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть гамильтониан $H(p,x)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является функцией класса $\mathcal{C}^2$, удовлетворяющей условиям (2.2) и (2.3), существует функция $\Phi(u,p,x)$ такая, что $H_p = \nabla_x \Phi$, а начальное данное $u^0(x)$ таково, что*

$$|H_p(\nabla_x u^0(x), x)| = o(|x|), \quad |x| \to \infty. \tag{2.4}$$

Тогда обобщенное решение задачи Коши (2.1) может быть получено как предел при $\mu \to 0$ функции

$$u_\mu(t,x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \int_0^{x_i} H_{pp}^{-1}\, q_\mu(t,\xi)\, d\xi_i \right),$$

где

$$q_\mu(t,x) = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\frac{x-\xi}{t}\Big) \exp\Big(-\frac{\lambda(t,x,\xi)}{2\mu}\Big)\, d\xi}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \exp\Big(-\frac{\lambda(t,x,\xi)}{2\mu}\Big)\, d\xi}, \tag{2.5}$$

$$\lambda(t,x,\xi) = \Phi(0,\xi) + \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \xi_i)^2}{2t}. \tag{2.6}$$

Доказательство. В предположении достаточной гладкости решения взятие градиента от (2.1) приводит к системе

$$p_t + H_p(p,x)\, p_x + H_x(p,x) = 0, \tag{2.7}$$

т. е.

$$(p_i)_t + \sum_{j=1}^{n} H_{p_j}(p,x)\, (p_i)_{x_j} + H_{x_i}(p,x) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

с начальными данными

$$p(x,0) = p^0(x) \in L_\infty(\mathbb{R}^n).$$

Здесь мы использовали свойство $(p_j)_{x_i} = (p_i)_{x_j}$.

Зададимся вопросом о том, при каких дополнительных условиях на гамильтониан существует гладкая невырожденная замена переменных $q = G(p,x)$ такая, что в новых переменных система (2.7) совпадет с уравнением Хопфа (1.6), где $q = \nabla_x \Phi$. Последнее требование существенно, только если число пространственных переменных более одной. Тогда есть возможность найти обратимую замену $p = G^{-1}(q,x)$ и решение задачи (2.1) восстанавливается как потенциал этого векторного поля.

Подстановка $q = G(p,x)$ в (1.2) дает

$$G_p p_t + G\,(G_p\, p_x + G_x) = 0, \tag{2.8}$$

где матрицы G_p и G_x определяются как $(G_p)_{ij} = \dfrac{\partial G_i}{\partial p_j}$ и $(G_x)_{ij} = \dfrac{\partial G_i}{\partial x_j}$. Умножим (2.7) на G_p слева, получив

$$G_p p_t + G_p H_p\, p_x + G_p H_x = 0. \tag{2.9}$$

Сравнив (2.9) и (2.8), мы видим, что $G = H_p$, а

$$G\, G_x = G_p\, H_x,$$

что соответствует условию (2.3).

Таким образом, мы свели задачу к уравнению (1.6), условия (2.4) обеспечивают применимость стандартного интегрального представления для решения уравнения теплопроводности, к которому сведется соответствующее уравнение Бюргерса (1.7). Формулы (2.5), (2.6) получаются из этого представления при помощи элементарных выкладок. □

З а м е ч а н и е 1. Нетрудно проверить, что условию (2.3) удовлетворяет любой гамильтониан вида

$$H(p,x) = \Phi(p_1 - \phi_1(x_1), \dots, p_n - \phi_n(x_n)),$$

где $\phi_i(x_i)$ — произвольные дифференцируемые функции одной переменной, $i = 1, \dots, n$, а Φ — произвольная дважды дифференцируемая функция n переменных. В частности, всякий достаточно гладкий гамильтониан, не зависящий от пространственных переменных, удовлетворяет условию (2.3).

З а м е ч а н и е 2. Условие потенциальности преобразованного векторного поля $G(p,x)$, имеющее вид $H_p = \nabla_x \Phi$, конечно, является очень ограничительным в пространстве многих переменных. Однако, как следует из результатов разд. 4, асимптотическую формулу для гладкого решения можно получить и без требования потенциальности.

3. Уравнение Гамильтона — Якоби, ассоциированное с системой инвариантов Римана

Рассмотрим систему квазилинейных уравнений, записанную в инвариантах Римана, т. е.

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} + f_i(r_1, \dots, r_n)\frac{\partial r_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{3.1}$$

для функций $r_i = r_i(t,x)$, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $x \in \mathbb{R}$. Предположим, что заданы начальные условия

$$r(0,x) = r^0(x) = (r_1^0(x), \dots, r_n^0(x)) \tag{3.2}$$

такие, что

$$|f_i(r^0(x))| = o(|x|), \quad |x| \to \infty, \quad i = 1, \dots, n. \tag{3.3}$$

Пусть $f(r) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ и выполнено условие

$$\det\Big(\frac{\partial f_i(r)}{\partial r_j}\Big) \ne 0, \quad i,j = 1, \dots, n. \tag{3.4}$$

Хорошо известно, что всякая квазилинейная гиперболическая система $u_t + A(u)u_x = 0$, где $u = u(t,x)$ — это n-вектор $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$, а $A(u)$ — $(n \times n)$-матрица с гладкими коэффициентами, может быть записана в инвариантах Римана в случае $n = 2$. При $n = 3$ это возможно тогда и только тогда, когда левый собственный вектор l_k матрицы A удовлетворяет условию $\operatorname{rot} l_k = 0$ либо $l_k \cdot \operatorname{rot} l_k = 0$ [16].

В [17] получен простой критерий наличия инвариантов Римана, который состоит в проверке тождественного равенства нулю некоторого тензора, включающего строящийся по матрице A так называемый тензор Нейенхейса [18].

Среди физически значимых систем квазилинейных уравнений, допускающих запись в инвариантах Римана, — уравнения изэнтропической газовой динамики, уравнения мелкой воды, уравнения электрофореза и хроматографии [19–21].

Отталкиваясь от (3.1), построим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} f_k(q_1, \ldots, q_n)\frac{\partial q_i}{\partial x_k} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.5}$$

где $q_i(t, x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим соответствующие начальные данные

$$q(0, x) = q^0(x) = (q_1^0(x), \ldots, q_n^0(x)). \tag{3.6}$$

Предположим, что x_i, $i = 1, \ldots, n$, в свою очередь, являются функциями от одной переменной $\bar{x} \in \mathbb{R}$. В этом случае система (3.5) перепишется как

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} f_k(q_1, \ldots, q_n)\frac{\partial q_i}{\partial x_k}\frac{dx_k(\bar{x})}{d\bar{x}} = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

Положим

$$q_i(t, 0, \ldots, \underbrace{\bar{x}}_{i\text{-е место}}, \ldots, 0) := r_i(t, \bar{x}) \tag{3.7}$$

и

$$q_i^0(0, \ldots, \underbrace{\bar{x}}_{i\text{-е место}}, \ldots, 0) := r_i^0(\bar{x}), \tag{3.8}$$

$i, m = 1, \ldots, n$. Тогда $\dfrac{\partial q_i}{\partial x_m} = 0$, $i \neq m$, и вектор-функция $r(t, \bar{x})$ является решением задачи (3.1), (3.2).

Сведем (3.5) к уравнению Хопфа (1.2) подобно тому, как это делалось при доказательстве теоремы 1. Векторное уравнение (3.5) имеет вид

$$\partial_t q + (f(q), \nabla)q = 0, \tag{3.9}$$

где $q(t, x) = (q_1, \ldots, q_n)$ — вектор-функция $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, $f(q)$ — невырожденное в силу (3.4) отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, его якобиан удовлетворяет условию $\det\dfrac{\partial f_i(q)}{\partial q_j} \neq 0$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Умножив (3.9) слева на матрицу $\dfrac{\partial f_i(q)}{\partial q_j}$, $i, j = 1, \ldots, n$, получим уравнение Хопфа для вектор-функции $f(q)$:

$$\partial_t f(q) + (f(q), \nabla_x) f(q) = 0.$$

Для того чтобы иметь возможность построить вязкостную регуляризацию обобщенного решения уравнения (3.5) на основе преобразования Коула — Хопфа, надо предположить, что векторное поле $f(q)$ потенциально, т.е. существует скалярная функция $\psi(t, x)$ такая, что $\nabla_x \psi = f(q)$. Легко видеть, что конструкция (3.7) сводит это условие к условию потенциальности векторного поля $f(r)$, т.е. $f(r) = \nabla_r \Psi(r)$.

Тогда решение задачи (3.5), (3.6) может быть получено как предел при $\mu \to 0$ выражения

$$q_\mu(t, x) = f^{-1}(Y), \quad Y = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{x - \xi}{t}\right) \exp\left(-\frac{\lambda(t, x, \xi)}{2\mu}\right) d\xi}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{\lambda(t, x, \xi)}{2\mu}\right) d\xi}, \tag{3.10}$$

$$\lambda(t, x, \xi) = \psi(0, \xi) + \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \xi_i)^2}{2t}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.11}$$

Уравнение ГЯ, дифференциальным следствием которого является система (3.5), имеет вид

$$u_t + \Psi(\nabla_x u) = 0, \quad \nabla_x u = q, \tag{3.12}$$

от задачи (3.5), (3.6), (3.8) наследуются начальные данные

$$u^0(x) = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^{x_i} r_i^0(\eta)\, d\eta. \tag{3.13}$$

Наши рассуждения подытоживает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (3.3),(3.4) *и существует скалярная функция* $\Psi(r)$ *такая, что* $\nabla_r \Psi(r) = f(r)$. *Тогда решение задачи Коши* (3.1), (3.2) *имеет следующий вид*:

$$r_i(t, \bar{x}) = q_i(t, x)|_{\{x_j = 0,\, x_i = \bar{x}\}}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j \neq i,$$

где вектор-функция $q = \nabla_x u$, u — *решение задачи* (3.12), (3.13).

Вектор-функция $q(t, x)$ *может быть найдена как следующий предел*:

$$q(t, x) = \lim_{\mu \to 0} q_\mu(t, x),$$

где $q_\mu(t, x)$ *задана формулами* (3.10), (3.11), (3.8) *и* $\psi(0, \xi) = \Psi(q^0(\xi))$. □

Обратим внимание, что после образования разрыва решения предел $q(t, x) = \lim\limits_{\mu \to 0} q_\mu(t, x)$ тоже задает решение системы (3.1), (3.2). Система (3.1) имеет неконсервативный вид, поэтому для получения условий Ранкина — Гюгонио на разрывах приходится использовать расширенную систему (3.5).

З а м е ч а н и е 3. Нетрудно проверить, что потенциальность вектора $f(r)$ означает существование закона сохранения

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} r_i\Big)_t + ((\Psi(r))_x = 0.$$

З а м е ч а н и е 4. Интегральную формулу, которая дает асимптотическое представление *гладкого* решения произвольной системы инвариантов Римана без требования потенциальности векторного поля $f(r)$, можно получить, основываясь на идее стохастического возмущения решения вдоль характеристик [22]. Такой метод применим для систем уравнений, которые могут быть сведены к уравнению Хопфа без требования потенциальности поля скоростей. Неудивительно, что он перестает работать (дает решение другой системы) после момента образования особенности. Действительно, если поле скоростей в уравнении Хопфа не потенциально, то это уравнение нельзя записать в дивергентной форме и, следовательно, нельзя определить обобщенное решение в смысле интегрального тождества. Однако решение уравнения, полученного в результате добавления вязкого регуляризирующего члена, стремится при исчезновении вязкости именно к этому обобщенному решению в смысле интегрального тождества исходной системы. Поэтому необходимо привлекать дополнительные соображения, чтобы иметь возможность включить нужное решение в систему некоторых законов сохранения и на их основе строить обобщенное решение. Подробнее об этом можно прочитать в [23]. В разд. 4 мы построим асимптотическую формулу для гладкого решения уравнения ГЯ, основываясь на методе стохастических возмущений.

3.1. Пример 1: уравнения изэнтропической газовой динамики

Как известно, уравнения движения политропного газа в случае постоянной энтропии представляют собой законы сохранения массы и момента. Они имеют вид (см. [19, с. 154])

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0,$$

$$P = \frac{K^2}{\gamma}\rho^\gamma.$$

Здесь $\rho(t,x)$ — плотность, $v(t,x)$ — скорость, $P(t,x)$ — давление, K — положительная константа, константа $\gamma > 1$ — показатель адиабаты. Эта система может быть записана в инвариантах Римана следующим образом [19, с. 175]:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\alpha s + \beta r)\frac{\partial \rho s}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial t} + (\alpha r + \beta s)\frac{\partial \rho r}{\partial x} = 0, \tag{3.14}$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\gamma - 1}{4} > \frac{1}{2} > 0, \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{\gamma - 1}{4},$$

$$s = v - \phi(\rho) = v - \frac{2}{\gamma - 1}c(\rho), \quad r = v - \phi(\rho) = v + \frac{2}{\gamma - 1}c(\rho), \quad c^2(\rho) = P'(\rho).$$

Исходные переменные восстанавливаются по инвариантам Римана как

$$v = \frac{r+s}{2}, \quad c(\rho) = \frac{\gamma - 1}{4}(r - s).$$

В данной ситуации $G_1 = \alpha s + \beta r$, $G_2 = \alpha r + \beta s$, $\dfrac{\partial G_1}{\partial r} = \dfrac{\partial G_2}{\partial s} = \beta$, поэтому $H_p = (G_1, G_2)$, $p = (s,r)$, $H(s,r) = \alpha\dfrac{s^2 + r^2}{2} + \beta sr$, $H_{pp} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, $|H_{pp}| \neq 0$. Таким образом, с системой (3.14) ассоциировано уравнение Гамильтона — Якоби для функции $u(t,x,y)$:

$$u_t + \alpha\frac{u_x^2 + u_y^2}{2} + \beta u_x u_y = 0, \quad u_x = s, \quad u_y = r.$$

Нетрудно проверить, что вязкостной резуляризацией, допускающей явное представление для исходной системы (3.14), является стандартное добавление члена со вторыми производными:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\alpha s + \beta r)\frac{\partial s}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial r}{\partial t} + (\alpha r + \beta s)\frac{\partial r}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}.$$

3.2. Пример 2: уравнения нелинейной хроматографии

Уравнения, описывающие прохождение n-компонентной смеси веществ по хроматографической колонке в пренебрежении диффузией и временем установления сорбционного равновесия, имеют вид законов сохранения количества вещества для каждой из компонент [19, с. 661; 21; 24]:

$$V_0(c_i)_x + (c_i + a_i(c))_t = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Здесь V_0 — скорость движения газа-носителя, предполагаемая постоянной, $c_i = c_i(,t)$ — концентрация i-й компоненты смеси в газе-носителе (неотрицательная величина), $a_i(c)$ — концентрация сорбированной i-й компоненты. Перейдя к новой независимой переменной $\tau = V_0 t - x$, получим

$$(c_i)_x + (a_i(c))_\tau = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.15}$$

Для того чтобы система приняла замкнутый вид, необходимо задать изотерму сорбции, т. е. явный вид зависимости $a_i(c)$. Чтобы получить явное выражение для инвариантов Римана, предположим [25], что

$$a_i = \frac{\Gamma_i c_i}{\Big(1 + \sum_{k=1}^n (\Gamma_k c_k)^{1/\lambda}\Big)^\lambda}, \quad \lambda = \mathrm{const} > 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{3.16}$$

где Γ_i — константы, предполагающиеся различными. При $\lambda = 1$ эта зависимость соответствует простейшей и наиболее изученной классической изотерме Ленгмюра. Отметим, что иногда изотерму Ленгмюра представляют в несколько ином виде, вводя новые обозначения. Мы следуем работе [25], где доказано, что система (3.15), (3.16) допускает запись в инвариантах Римана $R_i(t,x)$:

$$(R_i)_t + \frac{1}{R_i}\left(\frac{\prod_{k=1}^n \Gamma_k}{\prod_{k=1}^n R_k}\right)^\lambda (R_i)_x = 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{3.17}$$

причем

$$c_i = \mu_i \left(\frac{\prod_{k=1}^n (R_k - \Gamma_i)}{\prod_{k=1}^n R_k}\right)^\lambda, \quad \mu_i = \frac{1}{\Gamma_i}\left(- \prod_{k=1,\, k\neq i}^n \Big(1 - \frac{\Gamma_i}{\gamma_k}\Big)\right)^{-\lambda}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Инварианты Римана не обращаются в ноль, поэтому запись системы (3.17) корректна.

В [25] рассмотрены случаи других изотерм, также допускающих запись в инвариантах Римана, которые мы здесь не будем рассматривать.

Следует отметить, что приведение к инвариантам Римана возможно лишь в той области изменения переменных, где система (3.15) является гиперболической, что требует дополнительного условия на коэффициенты. Ниже мы будем считать, что эти условия выполнены.

Таким образом, $R = (R_1, \dots, R_n)$,

$$G_i(R) = \frac{1}{R_i}\left(\frac{\prod_{k=1}^n \Gamma_k}{\prod_{k=1}^n R_k}\right)^\lambda.$$

Легко проверить, что $\dfrac{\partial G_i}{\partial R_j} = \dfrac{\partial G_j}{\partial R_i}$, $i \neq j$, поэтому существует функция $H(p)$, где $p = R$, такая, что $H_p = (G_1, \dots, G_n)$, $H(p) = -\dfrac{1}{\lambda}(\prod_{k=1}^n \Gamma_k)^\lambda / (\prod_{k=1}^n p_k)^\lambda$. Кроме того, можно проверить, что $|H_{pp}| = \det H_{R_i R_j} = \det\Big(\dfrac{\partial G_i(R)}{\partial R_j}\Big) \neq 0$. Таким образом, с системой (3.17) ассоциировано уравнение Гамильтона — Якоби для функции $u(t,x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$,

$$u_t - \frac{1}{\lambda}\frac{(\prod_{k=1}^n \Gamma_k)^\lambda}{(\prod_{k=1}^n u_{x_k})^\lambda} = 0.$$

Если мы хотим получить асимптотическую формулу для представления решения исходной системы инвариантов Римана, то соответствующая вязкостная регуляризация будет иметь вид

$$(R_i)_t + \frac{1}{R_i}\left(\frac{\prod_{k=1}^n \Gamma_k}{\prod_{k=1}^n R_k}\right)^\lambda (R_i)_x = \mu H^{-1}_{R_i R_j} (G_j(R))_{xx},$$

$$H^{-1}_{R_i R_j} = \Big(\frac{\partial G_i(R)}{\partial R_j}\Big)^{-1}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

З а м е ч а н и е 5. В теории электрофореза возникают уравнения, очень тесно связанные с уравнениями хроматографии (см. [20;26]), также допускающие запись в инвариантах Римана.

4. Метод стохастических возмущений для уравнения Гамильтона — Якоби

В этом разделе мы применим к уравнению ГЯ метод стохастических возмущений, использованный ранее для исследования свойств решений задачи Коши для уравнения Хопфа [23; 27; 28].

Снова рассмотрим задачу (2.1). Будем считать, что $H(p,x) \in \mathcal{C}^2$, обозначим $p = \nabla_x u$, $p^0(x) = \nabla_x u^0(x)$.

Первый путь состоит в том, чтобы воспользоваться результатами теоремы 1, в которой указаны условия на гамильтониан, позволяющие свести задачу к решению уравнения Хопфа (1.2) без условия потенциальности, а затем применить результаты, касающиеся стохастической регуляризации этого уравнения [23]. На этом пути возникнет пара законов сохранения массы и момента, где в роли "скорости" выступает вектор $q = G(p,x)$. Это хорошо известная система газовой динамики "без давления". Введение стохастического возмущения до момента образования особенности гладкого решения аналогично введению вязкости, а после момента образования особенности к вязкости добавляется еще и некоторый интегральный член, аналогичный давлению. Асимптотическое представление, полученное на этом пути, сходится при стремлении к нулю параметра стохастического возмущения к решению уравнения Хопфа только до момента возникновения особенности, а потом является частью решения другой задачи. Если "скорость" q оказывается потенциальной, конечно же, предпочтительнее применение метода, описанного в разд. 2, поскольку этот метод дает асимптотическую формулу также и для обобщенного решения.

Продемонстрируем второй путь. Запишем систему $2n+1$ стохастических дифференциальных уравнений, представляющую собой стохастическое возмущение характеристических уравнений:

$$dX = H_p(P,X)\,dt + \sigma\,dW, \quad dP = -H_x(P,X)\,dt,$$
$$dU = \big((P,\, H_p(P,X)) - H(P,X)\big)\,dt + \sigma\,dW,$$
$$X(0) = x, \quad P(0) = p, \quad U(0) = u, \quad (x,p,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

Здесь X, P — n-мерные случайные величины, U — одномерная случайная величина, W — n-мерное броуновское движение, σ — положительная константа. Уравнение Колмогорова—Фоккера—Планка [29] для функции $F(t,x,p,u)$ (совместной плотности распределения вероятностей случайных величин (X,P,U)) имеет вид

$$F_t + (H_p(p,x)\,,\, F_x) - (H_x(p,x)\,,\, F_p) + \big((p\,,\, H_p(p,x)) - H(p,x)\big)\,F_u = \frac{1}{2}\,\sigma^2\,\Delta_x F + \frac{1}{2}\,\sigma^2\,F_{uu}. \tag{4.1}$$

Поставим начальное условие

$$F(0,x,v,u) = \rho^0(x)\,\delta(p - p^0(x))\,\delta(u - u^0(x)), \tag{4.2}$$

где $\rho^0(x)$ — произвольная непрерывная функция, имеющая смысл плотности начального распределения случайной величины X и поэтому предполагаемая интегрируемой по $\mathbb{R}^n$, $p^0(x) = \nabla_x u^0(x)$.

4.1. Представление гладкого решения уравнения Гамильтона — Якоби

Для произвольного гамильтониана $H(p,x)$ решить задачу (4.1), (4.2) удается не всегда, однако если зависимость от x отсутствует, то явное представление решения этой задачи Коши существует. Для его нахождения нужно сделать преобразование Фурье по переменным x и u, решить полученное уравнение и сделать обратное преобразование Фурье. Мы не будем приводить выкладки, они совершенно аналогичны тем, что проведены в [22] или [30].

Рассмотрим функцию вида

$$u_\sigma(x,t) = \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} u\,F(t,x,p,u)\,dp\,du}{\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} F(t,x,p,u)\,dp\,du} \tag{4.3}$$

(условное математическое ожидание U при фиксированных X и P). Очевидно, что $u_\sigma(0,x) = u^0(x)$. Подстановка решения задачи (4.1), (4.2) в (4.3) даст следующее интегральное представление:

$$u_\sigma(x,t) = \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^0(s)\Big[u^0(s) + \Big((p^0(s), H_p(p^0(s))) - H(p^0(s))\Big)\,t\Big]\, e^{-\frac{|s-x+tH_p(p^0(s))|^2}{2t\sigma^2}} ds}{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^0(s)\, e^{-\frac{|s-x+tH_p(p^0(s))|^2}{2t\sigma^2}} ds}. \tag{4.4}$$

Нетрудно проверить непосредственной подстановкой, что предельное выражение

$$\bar u(t,x) = \lim_{\sigma\to 0} u_\sigma(x,t)$$

удовлетворяет уравнению ГЯ $u_t + H(p) = 0$ в случае, если $p(t,x)$ остается непрерывной. Для этой проверки надо иметь в виду, что вектор-функция $s = s(t,x)$ неявно задается системой уравнений

$$s - x + tH_p(p^0(s)) = 0. \tag{4.5}$$

Замечание 6. Отметим, что для получения формулы (4.4) не нужно требовать выпуклости гамильтониана.

Замечание 7. Как следует из исследования возможности выразить вектор-функцию $s(t,x)$ из уравнения (4.5), если матрица $C = C_{ij} = \sum_{k=1}^n H_{p_ip_k}(p^0(x))(p_k^0)_{x_j}$, $i,j = 1,\ldots,n$, имеет хотя бы одно собственное значение, отрицательное в некоторой точке $x\in\mathbb{R}^n$, то решение задачи (2.1) не может быть классическим в течение всего времени $t>0$, даже в случае $u^0(x)\in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$. Это происходит потому, что матрица $E+tC$, где E — единичная матрица, перестает быть обратимой в некоторый момент времени $t = t_*(u^0)$.

4.2. Ассоциированная система законов сохранения

Покажем, что со всяким уравнением ГЯ

$$u_t + H(\nabla_x u) = 0, \quad u = u(t,x), \quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{4.6}$$

можно связать замкнутую систему законов сохранения.

Введем следующие величины:

$$\rho_\sigma(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} F(t,x,p,u)\,dp\,du, \tag{4.7}$$

$$p_\sigma(t,x) = \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} pF(t,x,p,u)\,dp\,du}{\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} F(t,x,p,u)\,dp\,du}, \tag{4.8}$$

$$v_\sigma(t,x) = \frac{\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} H_p F(t,x,p,u)\,dp\,du}{\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} F(t,x,p,u)\,dp\,du}. \tag{4.9}$$

Будем предполагать, что интегралы существуют в смысле Лебега. Величина (4.7) — скалярная, величины (4.8) и (4.9) — векторные. Если решение задачи (4.1), (4.2) известно, то для каждой из величин (4.7), (4.8), (4.9) можно получить формулу, подобную (4.4). Например,

$$p_\sigma(x,t) = \frac{\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^0(s)\,p^0(s)\,e^{-\frac{|s-x+tH_p(p^0(s))|^2}{2t\sigma^2}}ds}{\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^0(s)\,e^{-\frac{|s-x+tH_p(p^0(s))|^2}{2t\sigma^2}}ds}.$$

Следующие два предложения отвечают на вопрос о том, какой системе уравнений удовлетворяет тройка функций $(\rho_\sigma, p_\sigma, v_\sigma)$ и их предел $(\bar\rho, \bar p, \bar v)$. Эти предложения совершенно аналогичны тем, которые были получены в [30] для случая скалярного закона сохранения, поэтому мы не будем их здесь доказывать, а отошлем заинтересованного читателя к работе [30].

Предложение 1. *Функции ρ_σ, u_σ, v_σ, заданные выражениями* (4.7), (4.8) *и* (4.9), *при $t \geq 0$ удовлетворяют следующей системе $2n+1$ уравнений в частных производных:*

$$\frac{\partial \rho_\sigma}{\partial t} + \mathrm{div}_x(\rho_\sigma v_\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2 \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \rho_\sigma}{\partial x_k^2}, \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial(\rho_\sigma p_{\sigma,i})}{\partial t} + \mathrm{div}_x(\rho_\sigma\, p_{\sigma,i}\, v_\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2 \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2(\rho_\sigma p_{\sigma,i})}{\partial x_k^2} - I^p_{\sigma,i}, \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial(\rho_\sigma v_{\sigma,i})}{\partial t} + \mathrm{div}_x(\rho_\sigma v_{\sigma,i}\, v_\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2 \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2(\rho_\sigma v_{\sigma,i})}{\partial x_k^2} - I^v_{\sigma,i}, \tag{4.12}$$

где

$$I^p_{\sigma,i} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (p_i - p_\sigma)\big((v - v_\sigma(t,x)), \nabla_x F(t,x,p,u)\big)\,dp\,du,$$

$$I^v_{\sigma,i} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (v_i(p) - v_{\sigma,i}(t,x)\big((v(p) - v_\sigma(t,x)), \nabla_x F(t,x,p,u)\big)\,dp\,du,$$

$i = 1, \ldots, n.$

Предложение 2. *До момента времени $t_*(u^0)$ потери гладкости решением задачи Коши* (2.1) *при $H = H(p)$ тройка функций $(\bar\rho, \bar p, \bar v)$, представляющая собой предел при $\sigma \to 0$ тройки функций $(\rho_\sigma, u_\sigma, v_\sigma)$, является решением следующей замкнутой системы законов сохранения:*

$$\partial_t \bar\rho + \mathrm{div}_x(\bar\rho \bar v) = 0, \tag{4.13}$$

$$\partial_t(\bar\rho \bar p) + \mathrm{Div}_x(\bar\rho \bar p \otimes \bar v) = 0, \tag{4.14}$$

$$\partial_t(\bar\rho \bar v) + \mathrm{Div}_x(\bar\rho \bar v \otimes \bar v) = 0, \tag{4.15}$$

где Div *обозначает дивергенцию тензора.*

З а м е ч а н и е 8. Пара уравнений (4.13), (4.15) представляет собой так называемую систему газовой динамики “без давления”, где в роли плотности выступает ρ, а в роли скорости — v. Эта система не является строго гиперболической, у ее характеристической матрицы нет полного набора собственных векторов. Характерной ее чертой является образование в компоненте плотности сильной сингулярости (дельтаобразной особенности), тогда как в компоненте скорости образуется обычный разрыв. Тем не менее до момента образования особенности конкретный вид функции $\rho^0(x)$ не играет роли, а $\rho(t,x)$ выполняет вспомогательную роль. Целью является нахождение вектора градиента p, и если предположить, что ρ и v найдены, то он находится из линейного по p уравнения (4.14). Отметим, что выпуклости гамильтониана для построения классических решений здесь не требуется.

З а м е ч а н и е 9. Фактически предложение 2 означает, что интегральные члены I^p_σ и I^v_σ уравнений (4.11), (4.12) стремятся к нулю при $\sigma \to 0$ в случае, если решения задачи Коши (2.1) дважды дифференцируемы. После момента образования особенности они не исчезают и образуют некий аналог давления в правой части уравнений (4.14) и (4.15) [23]. Это означает, что вектор p, найденный из этой системы, более не будет градиентом решения задачи (2.1) при $H = H(p)$. Существует процедура “пересчета” решения, полученного при предельном переходе при $\sigma \to 0$ в системе (4.10)–(4.12) к решению системы (4.13)–(4.15) после момента потери гладкости. Существенно используется сохранение интегральных величин, которое задается уравнениями (4.13)–(4.15). Для случая уравнений газовой динамики “без давления” (т. е. системы (4.13), (4.15)) для одной пространственной переменной такая процедура описана в [23].

З а м е ч а н и е 10. Из наших рассуждений следует, что для того чтобы решить уравнения газовой динамики “без давления”, надо найти решение уравнения ГЯ (4.6), затем найти $H(p)$ и поле скорости $v = H_p$. Плотность затем найдется из уравнения (4.13), линейного по ρ. Таким образом, ρ оказывается “пассивным скаляром”, т. е. все поведение системы диктуется только полем скорости. Для гладкого решения это правильно, так как уравнения (4.13) и (4.15) имеют следствием уравнение Хопфа $v_t + (v, \nabla_x)v = 0$. С другой стороны, как мы видели, в случае потенциального поля скорости, когда можно ввести закон сохранения, связанный только со скоростью, плотность тоже ведет себя как “пассивный скаляр”. О переносе массы на разрывах в этом случае идет речь, например, в [31].

Тем не менее поведение *разрывного* решения и перенос массы на разрыве диктуется именно нашим выбором законов сохранения. Нетрудно показать, что уже в одномерном случае поведение разрывов решений зависит как от скорости, так и от плотности, если в качестве законов сохранения выбраны (4.13) и (4.15), а не (4.13) и (1.1). Точно такая же ситуация с решением уравнения (4.6), которое представляет собой закон сохранения $p_t = -\nabla_x H(p)$. Если при построении обобщенного решения мы будем отталкиваться от пары (4.13), (4.6), мы получим другой результат, чем если бы мы отталкивались от (4.13) и (4.15).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bec J., Khanin K.** Burgers turbulence // Phys. Rep. 2007. Vol. 447. P. 1–66.
2. **Лакс П.Д.** Гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Ин-т компьютерных исследований, 2010. 296 с.
3. **Hopf E.** The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ // Comm. Pure Appl. Math. 1950. Vol. 3. P. 201–230.
4. **Cole J.D.** On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics // Quart. Appl. Math. 1951. Vol. 9. P. 225–236.
5. **Субботин А. И.** Минимаксные решения уравнений Гамильтона — Якоби // Итоги науки и техники. Темат. обзоры. М.: ВИНИТИ, 1999. Т. 64. С. 222–231. (Соврем. математика и ее приложения).
6. **Subbotin A.I.** Generalized solutions of PDEs of the first order: the dynamical optimization perspective. Boston: Birkhauser, 1995. 312 p.
7. **Эванс Л.К.** Уравнения с частными производными. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003. 560 с.

8. **Кружков С.Н.** Обобщенные решения уравнений Гамильтона — Якоби типа эйконала. I. Постановка задач, теоремы существования, единственности и устойчивости, некоторые свойства решений // Мат. сб. 1975. Vol. 98(140), № 3(11). С. 450–493.
9. **Lions P.-L.** Generalized solutions of Hamilton–Jacobi equations. Boston: Pitman, 1982. 317 p. (Research Notes in Mathematics; vol. 69).
10. **Crandall M.G, Ishii H., Lions P.-L.** User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations // Bull. Amer. Math. Soc. 1992. Vol. 27. P. 1–67.
11. **Crandall M. G., Evans L. C., Lions P.-L.** Some properties of viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. Vol. 282. P. 487–502.
12. **Lax P.** Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation // Comm. Pure Appl. Math. 1954. Vol. 7. P. 159–193.
13. **Олейник О.А.** О задаче Коши для нелинейных уравнений в классе разрывных функций // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95, № 3. С. 451–454.
14. **Dafermos C.M.** Hyperbolic conservation laws in continuum physics. 3rd ed. Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. 691 p.
15. **Frisch U., Bec J.** Burgulence // New trends in turbulence. Turbulence: nouveaux aspects (Les Houches, 2000) / eds. M. Lesieur, A. Yaglom, F. David. Berlin: Springer, 2001. P. 341–383.
16. **Cartan H.** Differential forms. Mineola; New-York: Dover, 2006. 176 p.
17. **Haantjes A.** On X_{n-1}-forming sets of eigenvectors // Indagationes Mathematicae. 1955. Vol. 17. P. 158–162.
18. **Nijenhuis A.** X_{n-1}-forming sets of eigenvectors // Indagationes Mathematicae. 1951. Vol. 13. P. 200–212.
19. **Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.** Системы квазилинейных уравнений. Москва: Физматлит, 1979. 591 с.
20. **Бабский В.Г., Жуков М.Ю., Юдович В.И.** Математическая теория электрофореза. Применение к методам фракционирования биополимеров. Киев: Наукова думка, 1983. 204 с.
21. The mathematical understanding of chemical engineering systems: selected papers of Neal R. Amundson / eds. R. Aris, A. Varma. Oxford; New York; Toronto; Sydney; Paris; Frankfurt: Pergamon Press, 1980. 829 p.
22. **Rozanova O.** Stochastic perturbations method for a system of Riemann invariants // Math. Commun. 2014. Vol. 19, no. 3. P. 573–580.
23. **Albeveriio S., Korshunova A., Rozanova O.** A probabilistic model associated with the pressureless gas dynamics // Bulletin des Sciences Mathematiques. 2013. Vol. 137, no. 7. P. 902–922.
24. **Киперман С.Л.** Основы химической кинетики в гетерогенном катализе. М.: Химия, 1979. 349 с.
25. **Ферапонтов Е. В., Царев С. П.** Системы гидродинамического типа, возникающие в газовой хроматографии. Инварианты Римана и точные решения // Мат. моделирование. 1991. Т. 3, № 2. С. 82–91.
26. **Жуков М.Ю., Юдович В.И.** Математическая теория изотахофореза // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267, № 2. С. 334–338.
27. **Albeverio S., Rozanova O.** The non-viscous Burgers equation associated with random positions in coordinate space: a threshold for blow up behavior // Math. Models Methods Appl. Sci. 2009. Vol. 19, no. 5. P. 749–767.
28. **Albeverio S., Rozanova O.** Suppression of unbounded gradients in a SDE associated with the Burgers equation // Proc. Amer. Math. Soc. 2010. Vol. 138, no. 1. P. 241–251.
29. **Risken H., Frank, T.** The Fokker-Planck equation: methods of solution and applications. 2nd ed. Berlin: Springer, 1996. 472 p.
30. **Albeveriio S., Rozanova O.** A representation of solutions to a scalar conservation law in several dimensions // J. Math. Anal. Appl. 2013. Vol. 405, no. 2. P. 711–719.
31. **Khanin K, Sobolevski A.** Particle dynamics inside shocks in Hamilton–Jacobi equations// Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 2010. Vol. 368, no. 1916. P. 1579–1593.

Розанова Ольга Сергеевна
д-р физ.-мат. наук
доцент
Московский государственного университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: rozanova@mech.math.msu.su

Поступила 15.02.2015

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.952+517.97

О НЕПРЕРЫВНОМ ПРОДОЛЖЕНИИ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ, ОБРАЗУЮЩИМИ ЦЕНТРАЛЬНОЕ ПОЛЕ ЭКСТРЕМАЛЕЙ[1]

Н. Н. Субботина, Л. Г. Шагалова

В работе рассматривается задача Коши для уравнения Гамильтона — Якоби с фазовыми ограничениями. Приведено обоснование конструкции обобщенного решения заданной структуры. Построения опираются на метод характеристик и решения задач вариационного исчисления.

Ключевые слова: уравнения Гамильтона — Якоби, метод характеристик, вязкостные решения, минимаксные решения, вариационное исчисление, экстремали.

N. N. Subbotina, L. G. Shagalova. On the continuous extension of a generalized solution of the Hamilton–Jacobi equation by characteristics that form a central field of extremals.

The Cauchy problem for the Hamilton–Jacobi equation with state constraints is considered. A justification for a construction of a generalized solution with given structure is provided. The construction is based on the method of characteristics and on solutions of problems related to calculus of variations.

Keywords: Hamilton–Jacobi equations, method of characteristics, viscosity solutions, minimax solutions, calculus of variations, extremals.

Введение

В настоящей работе продолжено начатое в [1–3] исследование полученного в [4] для модели Кроу — Кимуры молекулярной эволюции уравнения Гамильтона — Якоби с фазовыми ограничениями. В [1] было показано, что известные [5–9] понятия обобщенных решений уравнений в частных производных первого порядка неприменимы к этой задаче. В частности, минимаксные решения [6; 7] не рассматривались для задач с фазовыми ограничениями, а известные теоремы существования вязкостного [8; 9] решения доказаны при условии коэрцитивности гамильтониана, которое не выполняется в рассматриваемой задаче. В [1] авторами было введено новое понятие непрерывного обобщенного решения на ограниченном по времени и фазовым переменным множестве $\overline{\Pi}_T = [0,T] \times [-1,1]$ и показано, что такое решение существует, но не является единственным. При этом доказательство существования опиралось на сведение исходной задачи Коши к задаче Дирихле, полученной путем непрерывного продолжения начального условия с начального многообразия на границу фазовых ограничений. У полученной задачи Дирихле существует единственное минимаксное (вязкостное) решение, которое удовлетворяет определению непрерывного обобщенного решения изучаемого уравнения Гамильтона — Якоби. Это решение может быть построено с помощью решений соответствующей уравнению Гамильтона — Якоби характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений с краевыми условиями, отвечающими задаче Дирихле. В силу неединственности возможного непрерывного продолжения начального условия на границу фазовых ограничений обобщенное решение рассматриваемого уравнения Гамильтона — Якоби неединственно.

В связи с этим была поставлена задача о построении обобщенного решения определенной структуры, а именно обладающего таким свойством, что в той области Ω_0 фазового простран-

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-00168) и УрО РАН (программа фундаментальных исследований “Современные проблемы алгебры, анализа и теории динамических систем с приложениями к управлению сложными объектами”).

ства, через которую проходят фазовые характеристики, стартующие с начального многообразия, решение строится только с помощью этих характеристик, без участия характеристик, выпущенных с границы фазового ограничения.

В [3] были указаны достаточные условия возможности построения такого решения, описана его конструкция и приведены результаты численного моделирования. Настоящая статья посвящена обоснованию этой конструкции, базирующейся на методе характеристик [10–13]. Отметим, что существенной трудностью, которая преодолена в данной конструкции, является непродолжимость импульсных характеристик.

В рамках предлагаемой конструкции обобщенное решение строится только при помощи характеристик, выпущенных с начального многообразия. Сначала заполняется область Ω_0, а далее решение непрерывным образом продолжается на область $\overline{\Pi}_T \setminus \Omega_0$. Это непрерывное продолжение осуществляется с помощью решения вспомогательных задач вариационного исчисления с закрепленными концами. При этом максимум рассматриваемым функционалам доставляют фазовые компоненты характеристик, которые в начальный момент $t = 0$ стартуют из концов отрезка $[-1, 1]$ и образуют центральное поле экстремалей с центрами в точках $t = 0, x = -1$ и $t = 0, x = 1$ соответственно.

1. Задача о построении обобщенного решения уравнения Гамильтона — Якоби с заданными свойствами

1.1. Уравнение Гамильтона — Якоби в модели Кроу — Кимуры и обобщенное решение для задачи с фазовыми ограничениями

В работе [4] для модели молекулярной эволюции Кроу — Кимуры было получено следующее уравнение Гамильтона — Якоби:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H\Big(x, \frac{\partial u}{\partial x}\Big) = 0, \tag{1.1}$$

где

$$H(x, p) = -f(x) + 1 - \frac{1+x}{2} e^{2p} - \frac{1-x}{2} e^{-2p}. \tag{1.2}$$

Входящая в (1.2) функция $f(\cdot)$ называется *фитнесом* и предполагается дважды непрерывно дифференцируемой. Уравнение (1.1) рассматривается при $t \geq 0$, $-1 \leq x \leq 1$. Предполагается также, что задана непрерывно дифференцируемая функция $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и выполняется начальное условие

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [-1, 1]. \tag{1.3}$$

В [1] показано, что известные определения обобщенных решений [5–9] неприменимы к задаче (1.1)–(1.3), и введено новое определение (см. ниже определение 1) непрерывного обобщенного решения этой начальной задачи на компактном множестве $\overline{\Pi}_T = [0, T] \times [-1, 1]$. Определение использует следующие понятия негладкого анализа [9; 14].

Пусть задано множество $W \subset \mathbb{R}^2$. Символом $\overline{W}$ будем обозначать его замыкание, символом $C(W)$ — класс функций, непрерывных на множестве W.

Пусть $u(\cdot) \in C(\overline{W})$ и $(t, x) \in \overline{W}$. *Субдифференциалом* функции $u(\cdot)$ в точке (t, x) называется множество

$$D^- u(t, x) = \left\{ (a, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;\middle|\; \liminf_{\substack{(\tau, y) \to (t, x) \\ (\tau, y) \in \overline{W}}} \frac{u(\tau, y) - u(t, x) - a(\tau - t) - s(y - x)}{|\tau - t| + |y - x|} \geq 0 \right\}.$$

Супердифференциалом функции $u(\cdot)$ в точке (t,x) называется множество

$$D^+u(t,x)=\left\{(a,s)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\;\middle|\;\limsup_{\substack{(\tau,y)\to(t,x)\\(\tau,y)\in\overline{W}}}\frac{u(\tau,y)-u(t,x)-a(\tau-t)-s(y-x)}{|\tau-t|+|y-x|}\le 0\right\}.$$

Символом $\mathrm{Dif}(u)$ обозначим множество точек, в которых функция $u(\cdot)\in C(\overline{W})$ дифференцируема. Определим множество

$$\partial u(t,x)=\mathrm{co}\Big\{(a,s)\,\big|\,a=\lim_{i\to\infty}\frac{\partial u(t_i,x_i)}{\partial t},\ s=\lim_{i\to\infty}\frac{\partial u(t_i,x_i)}{\partial x};\quad (t_i,x_i)\to(t,x)\text{ при } i\to\infty,\quad (t_i,x_i)\in\overline{W}\cap\mathrm{Dif}(u)\Big\}. \tag{1.4}$$

В случае локальной липшицевости функции $u(\cdot)$ множество (1.4) совпадает с субдифференциалом Кларка [14].

О п р е д е л е н и е 1. Обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) в области $\overline{\Pi}_T$ назовем непрерывную функцию $u(\cdot)$, удовлетворяющую начальному условию (1.3) и условиям

$$a+H(x,s)\le 0\quad\forall\,(a,s)\in D^+u(t,x),\quad\forall\,(t,x)\in\Pi_T, \tag{1.5}$$

$$a+H(x,s)\ge 0\quad\forall\,(a,s)\in D^-u(t,x),\quad\forall\,(t,x)\in\Pi_T, \tag{1.6}$$

$$a+H(x,s)\ge 0\quad\forall\,(a,s)\in D^-u(t,x)\cap\partial u(t,x),\quad\forall\,(t,x)\in\Gamma_T, \tag{1.7}$$

где $\Pi_T=(0,T)\times(-1,1)$, $\Gamma_T=\{(t,x)|\,0<t<T,x=1\}\cup\{(t,x)|\,0<t<T,\,x=-1\}$.

В [1] доказано существование непрерывного обобщенного решения начальной задачи (1.1)–(1.3) в смысле определения 1 на компактном множестве $\overline{\Pi}_T$. Доказательство основано на применении методов теории оптимального управления и исследовании свойств характеристик — решений характеристической системы

$$\dot{x}=H_p(x,p)=-(1+x)e^{2p}+(1-x)e^{-2p}, \tag{1.8}$$

$$\dot{p}=-H_x(x,p)=f'(x)+\frac{e^{2p}-e^{-2p}}{2}, \tag{1.9}$$

$$\dot{z}=pH_p(x,p)-H(x,p), \tag{1.10}$$

где $H_x(x,p)=\partial H(x,p)/\partial x$, $H_p(x,p)=\partial H(x,p)/\partial p$, $f'(x)=\partial f(x)/\partial x$.

Система (1.8)–(1.10) рассматривается со следующими начальными условиями:

$$x(0,y)=y,\quad p(0,y)=u_0'(y),\quad z(0,y)=u_0(y),\quad y\in[-1,1]. \tag{1.11}$$

Компоненты решения системы (1.8)–(1.10) называются соответственно $x(\cdot,y)$ — фазовыми характеристиками, $p(\cdot,y)$ — импульсными характеристиками, $z(\cdot,y)$ — ценовыми характеристиками.

Основной результат [1] можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть $\varphi(t,x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, определенная в $\mathbb{R}^2$ и такая, что*

$$\varphi(0,x)=u_0(x)\quad\forall\,x\in[-1,1];$$

$$\frac{\partial\varphi(t,\pm1)}{\partial t}+H\Big(\pm1,\partial\frac{\varphi(t,\pm1)}{\partial x}\Big)=0\quad\forall\,t\ge 0.$$

Тогда существует непрерывное обобщенное в смысле определения 1 *решение* $u(t,x)$ *начальной задачи* (1.1)–(1.3) *на компактном множестве* $\overline{\Pi}_T$, *которое при всех* $(t,x)\in\overline{\Pi}_T$ *представимо в виде*

$$u(t,x)=\max_{x(t,y^\sharp)=x}\left[\varphi(t^\sharp,y^\sharp)+\int\limits_{t^\sharp}^{t}p(\tau,y^\sharp)H_p(x(\tau,y^\sharp),p(\tau,y^\sharp))-H(x(\tau,y^\sharp),p(\tau,y^\sharp))d\tau\right], \qquad (1.12)$$

где $t^\sharp\in[0,T]$, *причем* $y^\sharp=y\in[-1,1]$, *если* $t^\sharp=0$ *и* $y^\sharp=\pm1$, *если* $t^\sharp>0$; *функции* $(x(\cdot,y^\sharp),p(\cdot,y^\sharp))\colon[t^\sharp,t]\to\mathbb{R}^2$ — *решения характеристической системы* (1.8), (1.9), *удовлетворяющие начальным условиям*

$$x(t^\sharp,y^\sharp)=y^\sharp,\quad p(t^\sharp,y^\sharp)=\frac{\partial\varphi(t^\sharp,y^\sharp)}{\partial y}=p_0(t^\sharp,y^\sharp).$$

Таким образом, с помощью гладкой функции $\varphi(\cdot)$ начальная функция $u_0(\cdot)$ непрерывным образом продолжается на границу фазовых ограничений и исходная начальная задача Коши (1.1)–(1.3) сводится к задаче Дирихле, обобщенное (минимаксное) решение которой существует и единственно. При этом решение формируется с помощью операции максимума из характеристик, выпущенных с начального многообразия и с границ фазового ограничения.

Поскольку возможны различные продолжения $\varphi(\cdot)$ начальной функции $u_0(\cdot)$, решение исходной задачи (1.1)–(1.3) в смысле определения 1 неединственно.

1.2. Область определения обобщенного решения

Прямоугольная область $\overline{\Pi}_T=[0,T]\times[-1,1]$, в которой строится обобщенное решение, определяется значением T. Момент T выбирается таким образом, что решения системы (1.8)–(1.11) определены (продолжимы до момента T) для всех $y\in[-1,1]$. В силу нелинейной динамики характеристической системы импульсные характеристики $p(\cdot,y)$ непродолжимы на весь полуинтервал $[0,\infty)$. Символом $T^*=T^*(y)$ обозначим такой момент времени, что на интервале $[0,T^*)$ существует непродолжимое вправо решение $x=x(\cdot,y)$, $p=p(\cdot,y), z=z(\cdot,y)$ задачи Коши (1.8)–(1.11).

Поскольку функция $f(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема, существуют константы M_1 и M_2 такие, что

$$M_1\le f'(x)\le M_2,\quad x\in[-1,1].$$

Пусть задано $y\in[-1,1]$. Обозначим $p(0)=p(0,y)$. Для $i=1,2$ введем константы

$$K_i=\frac{1}{2}\ln\Big(-M_i+\sqrt{M_i^2+1}\Big),\quad C_i=\frac{\big|e^{2p(0)}+M_i-\sqrt{M_i^2+1}\,\big|}{e^{2p(0)}+M_i+\sqrt{M_i^2+1}}.$$

Несложно доказать, что справедливо неравенство $K_1\ge K_2$.

В [3] для момента T^* доказаны следующие оценки, зависящие от $p(0)$.

Теорема 2. a) *Пусть* $p(0)>K_1$. *Тогда*

$$T^*<\frac{-1}{2\sqrt{M_1^2+1}}\ln C_1,\quad 0<C_1<1,\quad и\ \ p(t)\to+\infty\ \ при\ \ t\to T^*.$$

b) *Пусть* $p(0)<K_2$. *Тогда*

$$T^*<\frac{1}{2\sqrt{M_2^2+1}}\ln\left(\frac{-M_2+\sqrt{M_2^2+1}}{C_2\big(M_2+\sqrt{M_2^2+1}\big)}\right),\quad C_2>0,\quad и\ \ p(t)\to-\infty\ \ при\ \ t\to T^*.$$

c) *Пусть* $K_2 \leq p(0) \leq K_1$. *Тогда*

$$T^* \geq \min\left\{\frac{1}{2\sqrt{M_1^2+1}}\ln\left(\frac{-M_1+\sqrt{M_1^2+1}}{C_1\big(M_1+\sqrt{M_1^2+1}\big)}\right),\ \frac{-1}{2\sqrt{M_2^2+1}}\ln C_2\right\},\quad C_1>0,\ 0<C_2<1.$$

Определим

$$T_* = \min_{y\in[-1,1]} T^*(y).$$

Таким образом, момент T, задающий область $\overline{\Pi}_T$, следует выбирать из условия $0 < T \leq T_*$.

1.3. Задача о построении решения с заданными свойствами

Поставим цель построить обобщенное решение $u(t,x)$ задачи (1.1)–(1.3), определенное и непрерывное на множестве $\overline{\Pi}_T \ni (t,x)$, обладающее следующим свойством: в части прямоугольника $\overline{\Pi}_T$, заполненной графиками фазовых характеристик $x(\cdot,y)$ уравнения Гамильтона — Якоби (1.1)–(1.2), стартующих с начального многообразия (1.11), решение $u(t,x)$ определяется формулой (1.12) только с помощью этих характеристик.

Пусть $x^-(t) = x(t,-1)$ и $x^+(t) = x(t,+1)$, $t \in [0,T]$ — фазовые компоненты характеристик (1.8)–(1.10), выпущенных в момент $t=0$ соответственно из точек $x=-1$ и $x=1$.

Определим

$$\Omega_T^0 = \big\{(t,x)\colon t\in[0,T],\ x^-(t)\leq x\leq x^+(t)\big\}. \tag{1.13}$$

Пусть выполнено следующее условие.

A. Фазовые компоненты $x(\cdot,y)$ характеристик (1.8)–(1.10) с краевым условием (1.11) удовлетворяют неравенствам

$$x^-(t) = x(t,-1) \leq x(t,y) \leq x(t,+1) = x^+(t)\quad \forall\ y\in[-1,1],\quad \forall\ t\in[0,\overline{T}],$$

$$\overline{T} = \min\{t|\ t>0,\ x^-(t) = x^+(t)\},$$

и прямоугольник $\overline{\Pi}_T = [0,T]\times[-1,1]$, в котором рассматривается задача (1.1)–(1.3), выбран таким образом, что

$$T \leq \min\{T_*, \overline{T}\}.$$

Из условия **A** следует, что все фазовые компоненты характеристик (1.8)–(1.10), выпущенных в момент $t=0$ с начального многообразия (1.11), лежат в области Ω_T^0 (1.13).

Целью данной работы является построение обобщенного решения, удовлетворяющего определению 1 и имеющего в области Ω_T^0 следующий вид:

$$u(t,x) = \max_{x(t,y)=x}\int\limits_0^t p(\tau)H_p(x(\tau),p(\tau)) - H(x(\tau),p(\tau))d\tau + u_0(y), \tag{1.14}$$

где $x(t) = x(t,y)$, $\quad p(t) = p(t,y)$, $t\geq 0$, — фазовые и импульсные характеристики (1.8)-(1.9) с начальными условиями: $x(0,y) = y$, $\quad p(0,y) = \partial u_0(y)/\partial x$, $\quad y\in[-1,1]$.

З а м е ч а н и е 1. При выполнении условия **A** прямоугольник $\overline{\Pi}_T$ разбивается на три части

$$\overline{\Pi}_T = G_T^+ \cup \Omega_T^0 \cup G_T^-,$$

где

$$G_T^+ = \{(t,x):\ t\in[0,T],\ x^+(t)\leq x\leq 1\},\quad G_T^- = \{(t,x):\ t\in[0,T],\ -1\leq x\leq x^-(t)\}, \tag{1.15}$$

и, таким образом, рассматриваемую задачу о построении обобщенного решения со свойством (1.14) можно трактовать как задачу о непрерывном продолжении обобщенного решения (1.14) из области Ω_T^0 на области G_T^- и G_T^+.

2. Конструкция обобщенного решения

2.1. Дополнительные предположения и вспомогательные утверждения

Далее будем предполагать, что наряду с условием **A** в задаче (1.1)–(1.3) выполнены следующие условия на входные данные $f(\cdot)$ и $u_0(\cdot)$.

B1. Существует непрерывная производная $u_0'(\cdot) : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ и справедливы неравенства

$$u_0'(1) < 0, \quad u_0'(-1) > 0.$$

B2. Существует непрерывная, монотонно неубывающая производная $f'(\cdot)\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ и справедливы неравенства

$$2f'(1) + e^{2u_0'(1)} < e^{-2u_0'(1)}, \quad -2f'(-1) + e^{-2u_0'(-1)} < e^{2u_0'(-1)}.$$

При выполнении условий **A**, **B1** и **B2** справедливы следующие утверждения, описывающие поведение характеристик, выпущенных из крайних точек начального многообразия.

Лемма 1 [2, лемма 3]. *Пусть $p^+(t)$, $p_1(t)$, $x^+(t)$, $x_1(t)$ — решения* (1.8), (1.9), *удовлетворяющие начальным условиям*

$$p_1(0) = p_1 \ < \ p^+ = p^+(0), \quad x_1(0) \ = \ x^+(0) \ = 1,$$

тогда при всех $t \in [0, T]$ справедливы неравенства

$$p^+(t) \geq p_1(t), \quad x^+(t) \leq x_1(t).$$

Лемма 2 [2, лемма 4]. *Пусть $p^-(t)$, $p_2(t)$, $x^-(t)$, $x_2(t)$ — решения* (1.8), (1.9), *удовлетворяющие начальным условиям*

$$p_2(0) = p_2 \ > \ p^- = p^-(0), \quad x_2(0) \ = \ x^-(0) \ = -1,$$

тогда при всех $t \in [0, T]$ справедливы неравенства

$$p^-(t) \leq p_2(t), \quad x^-(t) \geq x_2(t).$$

2.2. Поведение характеристик при приближении к границе интервала продолжимости

В этом разделе исследуются свойства решений системы (1.8), (1.9), которые будут использованы для построения обобщенного решения, удовлетворяющего требованию (1.14) в области Ω_T^0 (1.13).

Рассмотрим характеристики $x(\cdot; p_0)$, $p(\cdot; p_0)$ — решения характеристической системы (1.8), (1.9), соответствующие начальным данным

$$x(0) = 1, \quad p(0) = p_0, \quad p_0 \in (-\infty, u_0'(1)]. \tag{2.1}$$

Из леммы 1 следует, что графики фазовых компонент этих решений заполняют область G_T^+ так, что через каждую внутреннюю точку $(\bar{t}, \bar{x})$ области G_T^+ проходит единственная кривая $x(t) = x(t, p_0)$, определяемая параметром $p_0 = p_0(\bar{t}, \bar{x})$, такая, что $x(\bar{t}, p_0(\bar{t}, \bar{x})) = \bar{x}$. Кроме того, из теоремы 1 и леммы 1 следует, что для любого параметра p_0, $p_0 \in (-\infty, u_0'(-1)]$ существует значение $t^* = t^*(p_0)$ такое, что на интервале $[0, t^*)$ определена и непродолжима вправо характеристика $x(\cdot; p_0), p(\cdot; p_0)$. При этом

$$p(t; p_0) \to -\infty \ \text{ при } \ t \to t^* = t^*(p_0);$$

$$\text{если} \quad p_{01} \in (-\infty, u_0'(1)], \quad p_{02} \in (-\infty, u_0'(1)] \text{ и } p_{01} > p_{02}, \quad \text{то} \quad t^*(p_{01}) > t^*(p_{02}).$$

В следующем утверждении устанавливается поведение фазовой компоненты характеристики, а также ее производной при приближении к границе интервала продолжимости.

Лемма 3. *Пусть* $p_0 \in (-\infty, u_0'(1)]$, *и* $t^* = t^*(p_0)$. *Тогда для фазовой компоненты* $x(\cdot) = x(\cdot; p_0)$ *характеристики, определяемой системой* (1.8), (1.9) *и начальными данными* (2.1), *справедливо*

$$x(t) \to 1, \quad \dot{x}(t) \to 0 \ \ \textit{при} \quad t \to t^*.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию

$$y(t) = 1 - x(t), \quad t \in [0, t^*). \tag{2.2}$$

Поскольку $\dot{y} = -\dot{x}$, из (1.8) имеем

$$\dot{y} = -\varphi(t)y + 2e^{2p(t)}, \tag{2.3}$$

где $\varphi(t) = e^{2p(t)} + e^{-2p(t)}$, $t \in [0, t^*)$. Решение однородного линейного уравнения, соответствующего (2.3), имеет вид

$$y(t) = Ce^{-\int\limits_0^t \varphi(\xi)d\xi}, \quad t \in [0, t^*).$$

Применяя метод вариации произвольной постоянной, получим отсюда решение линейного неоднородного уравнения (2.3):

$$y(t) = 2\int\limits_0^t e^{2p(\tau)+\int\limits_0^\tau \varphi(\xi)d\xi} d\tau \cdot e^{-\int\limits_0^t \varphi(\xi)d\xi}, \quad t \in [0, t^*).$$

Пусть $t \to t^*$. При этом $p(t) \to -\infty$. Найдем, используя правило Лопиталя,

$$\lim_{t\to t^*} y(t) = 2\lim_{t\to t^*} \frac{\int\limits_0^t e^{2p(\tau)+\int\limits_0^\tau \varphi(\xi)d\xi} d\tau}{e^{\int\limits_0^t \varphi(\xi)d\xi}} = 2\lim_{t\to t^*} \frac{e^{2p(t)+\int\limits_0^t \varphi(\xi)d\xi}}{e^{\int\limits_0^t \varphi(\xi)d\xi}\varphi(t)}.$$

Подставив выражение для функции $\varphi(\cdot)$, получим

$$\lim_{t\to t^*} y(t) = \lim_{t\to t^*} \frac{e^{2p(t)}}{e^{2p(t)} + e^{-2p(t)}} = \lim_{t\to t^*} \frac{1}{1 + e^{-4p(t)}} = 0.$$

Итак, при $t \to t^*$ величина $y(t) \to 0$ и эквивалентна величине $e^{4p(t)}$. Тогда из (2.3) следует, что при $t \to t^*$ производная $\dot{y}(t)$ стремится к нулю эквивалентно величине $e^{2p(t)}$. Учитывая (2.2), получаем утверждение леммы. □

Рассмотрим решения $x(\cdot; p_0)$, $p(\cdot; p_0)$ характеристической системы (1.8), (1.9), соответствующие начальным данным

$$x(0) = -1, \quad p(0) = p_0, \quad p_0 \in [u_0'(-1), \infty). \tag{2.4}$$

Из леммы 2 следует, что графики фазовых компонент этих решений заполняют область G_T^- так, что через каждую внутреннюю точку $(\bar{t}, \bar{x})$ области G_T^- проходит единственная кривая $x(t) = x(t, p_0)$, определяемая параметром $p_0 = p_0(\bar{t}, \bar{x})$, такая, что $x(\bar{t}, p_0(\bar{t}, \bar{x})) = \bar{x}$. Из теоремы 1 и леммы 2 следует, что для любого параметра p_0, $\quad p_0 \in [u_0'(-1), \infty)$ существует значение $t^* = t^*(p_0)$ такое, что на интервале $[0, t^*)$ определена и непродолжима вправо характеристика $x(\cdot; p_0), p(\cdot; p_0)$. При этом

$$p(t; p_0) \to \infty \text{ при } t \to t^* = t^*(p_0);$$

$$\text{если } p_{01} \in [u_0'(-1), \infty), \quad p_{02} \in [u_0'(-1), \infty) \text{ и } p_{01} < p_{02}, \quad \text{то} \quad t^*(p_{01}) > t^*(p_{02}).$$

Следующее утверждение устанавливает поведение фазовой компоненты характеристики, а также ее производной при приближении к границе интервала продолжимости.

Лемма 4. *Пусть* $p_0 \in [u_0'(-1), \infty)$ *и* $t^* = t^*(p_0)$. *Тогда для фазовой компоненты* $x(\cdot) = x(\cdot; p_0)$ *характеристики, определяемой системой* (1.8), (1.9) *и начальными данными* (2.4), *справедливо*

$$x(t) \to -1, \quad \dot{x}(t) \to 0 \quad \textit{при} \quad t \to t^*.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству леммы 3.

2.3. Вспомогательная задача вариационного исчисления

Рассмотрим простейшую задачу вариационного исчисления о максимуме функционала

$$I(x(\cdot)) = \int\limits_0^{\bar{t}} H^*(x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau, \quad x(0) = 1, \quad x(\bar{t}) = \bar{x}, \quad (\bar{t}, \bar{x}) \in G = G_T^+ \tag{2.5}$$

в классе непрерывно дифференцируемых функций $x(\cdot)$. Подынтегральная функция $H^*(\cdot)$ — функция, сопряженная гамильтониану $H(\cdot)$ (1.2), определяемая следующим образом:

$$H^*(x(t), \dot{x}(t)) = \inf_{p \in R} [p\dot{x}(t) - H(x(t), p)]. \tag{2.6}$$

Поскольку при $x \in [-1, 1]$ гамильтониан $H(\cdot)$ непрерывно дифференцируем и вогнут, инфимум в выражении (2.6) достигается на единственном элементе p таком, что

$$\dot{x}(t) = H_p(x(t), p). \tag{2.7}$$

Далее, считая, что функция $p(\cdot)$ найдена из условия (2.7), выписываем необходимое условие для функции $x(\cdot)$, доставляющей экстремум функционалу (2.5), — известное из вариационного исчисления [15; 16] уравнение Эйлера. Получим

$$\dot{p}(t) = -H_x(x(t), p). \tag{2.8}$$

Уравнения (2.7), (2.8) совпадают с уравнениями (1.8), (1.9) характеристик исходного уравнения Гамильтона — Якоби (1.1). Таким образом, экстремалями функционала являются фазовые компоненты характеристик, стартующих из точки $x(0) = 1$, $p(0) = p_0$.

Из леммы 1 следует, что через каждую внутреннюю точку (t^*, x^*) области G_T^+ проходит единственная экстремаль $x(t) = x(t, p_0)$ функционала (2.5), определяемая параметром $p_0 \in (-\infty, u_0'(1)]$, $p_0 = p_0(t^*, x^*)$, такая, что $x(t^*, p_0(t^*, x^*)) = x^*$. Таким образом, семейство экстремалей функционала (2.5) образует центральное поле с центром в точке $t_0 = 0$, $x_0 = 1$.

Покажем, что на экстремалях выполнено усиленное условие Лежандра

$$H^*_{\dot{x}\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t)) < 0, \quad 0 < t < \bar{t}. \tag{2.9}$$

Пусть функция $\bar{p} = \bar{p}(x, \dot{x})$ такова, что $H^*(x, \dot{x}) = \bar{p}\dot{x} - H(x, \bar{p})$. Учитывая, что $\dot{x} = H_p(x, \bar{p})$, дифференцируя это равенство по $\dot{x}$, получаем $1 = H_{pp}(x, \bar{p})\bar{p}_{\dot{x}}$. Имеем также

$$H^*_{\dot{x}} = \bar{p} + \dot{x}\bar{p}_{\dot{x}} - H_p\bar{p}_{\dot{x}} = \bar{p} + (\dot{x} - H_p(x, \bar{p}))\bar{p}_{\dot{x}} = \bar{p},$$

$$H^*_{\dot{x}\dot{x}} = \bar{p}_{\dot{x}} = \frac{1}{H_{pp}(x, \bar{p})}. \tag{2.10}$$

Поскольку $H_{pp} = -2(1 + x)e^{2p} - 2(1 - x)e^{-2p} < 0$ для любого конечного p и для всех $x \in [-1; 1]$, из (2.10) следует выполнение условия (2.9), а также вогнутость подынтегральной функции $H^*(x, \dot{x})$ по $\dot{x}$.

Из курса вариационного исчисления [15; 16] известно, что включение экстремали в поле экстремалей, выполнение усиленного условия Лежандра (2.9) и вогнутость подынтегральной функции по импульсной переменной составляют набор достаточных условий для достижения на рассматриваемой экстремали сильного максимума. Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Для любой внутренней точки* $(\bar t, \bar x) \in G_T^+$ *существует единственная экстремаль* $x = x(t)$ *вариационной задачи* (2.5), (2.6). *Эта экстремаль совпадает с фазовой компонентой характеристики* (1.8), (1.9), *стартующей из точки* $x(0) = 1, \quad p(0) = p_0$. *При этом значение* $p_0 \in (-\infty, u_0'(1))$ *единственным образом определяется из условия* $x(\bar t) = \bar x$. *На экстремали функционал* (2.5) *достигает сильного максимума.*

Рассмотрим теперь вариационную задачу в области G_T^-:

$$I(x(\cdot)) = \int\limits_0^{\bar t} H^*(x(\tau), \dot x(\tau)) d\tau, \quad x(0) = -1, \quad x(\bar t) = \bar x, \quad (\bar t, \bar x) \in G = G_T^-. \tag{2.11}$$

Требуется найти непрерывно дифференцируемую функцию $x = x(t)$, удовлетворяющую заданным краевым условиям, на которой достигается максимум функционала (2.11). По аналогии с доказательством теоремы 3 можно доказать следующее утверждение.

Теорема 4. *Для любой внутренней точки* $(\bar t, \bar x) \in G_T^-$ *существует единственная экстремаль* $x = x(t)$ *вариационной задачи* (2.11), (2.6). *Эта экстремаль совпадает с фазовой компонентой характеристики* (1.8), (1.9), *стартующей из точки* $x(0) = -1, \quad p(0) = p_0$. *При этом значение* $p_0 \in (u_0'(-1), \infty)$ *единственным образом определяется из условия* $x(\bar t) = \bar x$. *На экстремали функционал* (2.11) *достигает сильного максимума.*

2.4. Вариационная задача с правым концом на границе фазового ограничения

В этом разделе рассмотрим вариационные задачи (2.5) и (2.11) в случае, когда оба конца искомой кривой принадлежат соответственно верхней или нижней границе фазового ограничения.

Пусть в задаче (2.5) условие на правом конце имеет вид

$$x(\bar t) = 1.$$

Из леммы 1 следует, что существует единственное значение $p_0 = p_0(\bar t, 1) \in (-\infty, u_0'(1)]$, определяющее характеристику $x(\cdot; \bar t, 1)$, $p(\cdot; \bar t, 1)$ — решение системы (1.8), (1.9) такое, что $x(0; \bar t, 1) = 1$, $p(0; \bar t, 1) = p_0$ и $\bar t = t^*(p_0)$. Из леммы 3 следует, что в точке $t = \bar t$ функцию $x(\cdot; \bar t, 1)$ можно непрерывным образом доопределить, положив $x(\bar t; \bar t, 1) = 1$, и при этом будет $\dot x(\bar t; \bar t, 1) = 0$.

Заметим также, что существует точка $\tau = \tau(p_0)$ такая, в которой функция $x(\cdot; \bar t, 1)$ достигает минимума и для которой справедливо

$$\dot x(t) < 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, \tau), \quad \dot x(\tau) = 0.$$

Определим функции $x^\Delta(\cdot) = x^\Delta(\cdot; \bar t, 1)$ и $x^*(\cdot) = x^*(\cdot; \bar t, 1, \Delta)$ следующим образом:

$$x^\Delta(t) = x(t - \Delta; \bar t, 1), \quad t \in [\Delta, \bar t + \Delta],$$

$$x^*(t) = \begin{cases} x(t; \bar t, 1), & t \in [0, \tau], \\ x(\tau; \bar t, 1), & t \in [\tau, \tau + \Delta], \\ x^\Delta(t), & t \in [\tau + \Delta, \bar t + \Delta]. \end{cases}$$

Обозначим

$$I(\bar t) = \int\limits_0^{\bar t} H^*\big(x(s; \bar t, 1), \dot x(s; \bar t, 1)\big) ds.$$

В силу теоремы 3 и из определения функции $x^*(\cdot)$ имеем

$$I(\bar{t}+\Delta) \geq \int\limits_0^{\bar{t}+\Delta} H^*(x^*(s), \dot{x}^*(s))ds = I(\bar{t}) + H^*(x^*(\tau), \dot{x}^*(\tau))\Delta. \tag{2.12}$$

Из (2.12) получаем

$$\frac{I(\bar{t}+\Delta)-I(\bar{t})}{\Delta} \geq H^*(x^*(\tau), \dot{x}^*(\tau)) = H^*(x(\tau;\bar{t},1),0) = -H(x(\tau;\bar{t},1), p(\tau;\bar{t},1)).$$

Вдоль характеристики гамильтониан $H(\cdot)$ (1.2) сохраняет постоянное значение, поэтому

$$H(x(\tau;\bar{t},1), p(\tau;\bar{t},1)) = H(1,p_0) = 1 - f(1) - e^{2p_0} < 1 - f(1).$$

Таким образом,

$$\frac{I(\bar{t}+\Delta)-I(\bar{t})}{\Delta} \geq f(1) - 1.$$

Устремляя Δ к нулю, получим следующую оценку для производной $I'(\cdot)$:

$$I'(\bar{t}) \geq 1 - f(1), \quad \bar{t} \in (0,T]. \tag{2.13}$$

Обозначим через $x(\cdot;p_0)$, $p(\cdot;p_0)$ решение характеристической системы (1.8), (1.9), удовлетворяющее начальному условию $x(0)=1$, $p(0)=p_0$. Введем также обозначение

$$I(t;p_0) = \int\limits_0^t H^*\big(x(s;p_0), \dot{x}(s;p_0)\big)ds, \quad t \in [0, t^*(p_0)].$$

Пусть $p_0 = p_0(\bar{t},1)$, $p_0 + \Delta p_0 = p_0(\bar{t}+\Delta,1)$. Тогда

$$I(\bar{t}+\Delta) = I(\bar{t}+\Delta; p_0+\Delta p_0) = I(\bar{t}; p_0+\Delta p_0)$$

$$+ \int\limits_{\bar{t}}^{\bar{t}+\Delta} H^*\big(x(s;p_0+\Delta p_0), \dot{x}(s;p_0+\Delta p_0)\big)ds + I(\bar{t};p_0) - I(\bar{t};p_0).$$

Поскольку $I(\bar{t};p_0) = I(\bar{t})$,

$$\frac{I(\bar{t}+\Delta)-I(\bar{t})}{\Delta} = \frac{I(\bar{t};p_0+\Delta p_0)-I(\bar{t};p_0)}{\Delta p_0 \dfrac{\Delta}{\Delta p_0}} + \frac{1}{\Delta}\int\limits_{\bar{t}}^{\bar{t}+\Delta} H^*\big(x(s;p_0+\Delta p_0), \dot{x}(s;p_0+\Delta p_0)\big)ds.$$

Применяя теорему о среднем в определенном интеграле, получаем

$$\frac{I(\bar{t}+\Delta)-I(\bar{t})}{\Delta} = \frac{I(\bar{t};p_0+\Delta p_0)-I(\bar{t};p_0)}{\Delta p_0 \dfrac{\Delta}{\Delta p_0}} + H^*\big(x(\theta;p_0+\Delta p_0), \dot{x}(\theta;p_0+\Delta p_0)\big),$$

где $\theta \in [\bar{t}, \bar{t}+\Delta]$. В этом равенстве устремим величину Δp_0 к нулю и перейдем к пределу. Заметим, что если $\Delta p_0 \to 0$, то $\Delta \to 0$. Рассмотрим

$$\lim_{\Delta p_0 \to 0} \frac{\Delta}{\Delta p_0} = \lim_{\Delta p_0 \to 0} \frac{t^*(p_0+\Delta p_0) - t^*(p_0)}{\Delta p_0}. \tag{2.14}$$

Из теоремы 2 следует, что

$$0 < t^*(p_0+\Delta p_0) - t^*(p_0) < \frac{1}{2\sqrt{M_2^2+1}}\delta(p_0, \Delta p_0),$$

где

$$\delta(p_0,\Delta p_0)=\ln\frac{|e^{2p_0}+M_2-\sqrt{M_2^2+1}|}{e^{2p_0}+M_2+\sqrt{M_2^2+1}}-\ln\frac{|e^{2(p_0+\Delta p_0)}+M_2-\sqrt{M_2^2+1}|}{e^{2(p_0+\Delta p_0)}+M_2+\sqrt{M_2^2+1}}.$$

Используя правило Лопиталя, вычислим

$$\lim_{\Delta p_0\to 0}\frac{\delta(p_0,\Delta p_0)}{\Delta p_0}=\frac{4e^{2p_0}\sqrt{M_2^2+1}}{e^{4p_0}+2M_2e^{2p_0}-1}.$$

Таким образом, значение предела (2.14) конечно и положительно. Обозначим это значение символом K. Тогда, учитывая это и полунепрерывность сверху функции $H^*(\cdot)$, получим

$$I'(\bar t)\le\frac{1}{K}\lim_{\Delta p_0\to 0}\frac{I(\bar t;p_0+\Delta p_0)-I(\bar t;p_0)}{\Delta p_0}+H^*(1,0)$$

или

$$I'(\bar t)\le\frac{1}{K}\frac{\partial I(\bar t;p_0)}{\partial p_0}+f(1)-1. \tag{2.15}$$

Произведем следующие преобразования:

$$\frac{\partial I(\bar t;p_0)}{\partial p_0}=\frac{\partial I(0;p_0)}{\partial p_0}+\int\limits_0^{\bar t}\frac{d}{dt}\frac{\partial I(t;p_0)}{\partial p_0}dt$$

$$=\int\limits_0^{\bar t}\frac{\partial}{\partial p_0}\frac{dI(t;p_0)}{dt}dt=\int\limits_0^{\bar t}\frac{\partial}{\partial p_0}\Big[p(t;p_0)\dot x(t;p_0)-H(x(t;p_0),p(t;p_0))\Big]dt$$

$$=\int\limits_0^{\bar t}\Big[\frac{\partial p(t;p_0)}{\partial p_0}H_p(x(t;p_0),p(t;p_0))+p(t;p_0)\frac{\partial}{\partial p_0}\frac{dx(t;p_0)}{dt}$$

$$-H_x(x(t;p_0),p(t;p_0))\frac{\partial x(t;p_0)}{\partial p_0}-\frac{\partial p(t;p_0)}{\partial p_0}H_p(x(t;p_0),p(t;p_0))\Big]dt$$

$$=\int\limits_0^{\bar t}\Big[p(t;p_0)\frac{d}{dt}\frac{\partial x(t;p_0)}{\partial p_0}+\frac{dp(t;p_0)}{dt}\frac{\partial x(t;p_0)}{\partial p_0}\Big]dt=\int\limits_0^{\bar t}\frac{d}{dt}\Big[p(t;p_0)\frac{\partial x(t;p_0)}{\partial p_0}\Big]dt$$

$$=\lim_{t\to\bar t}p(t;p_0)\frac{\partial x(t;p_0)}{\partial p_0}-p_0\frac{\partial x(0,p_0)}{\partial p_0}=\lim_{t\to\bar t}p(t;p_0)\frac{\partial x(t;p_0)}{\partial p_0}.$$

Итак, мы установили, что

$$\frac{\partial I(\bar t;p_0)}{\partial p_0}=\lim_{t\to\bar t}p(t;p_0)\frac{\partial x(t;p_0)}{\partial p_0}. \tag{2.16}$$

Известно [17], что производные $\dfrac{\partial x(t;p_0)}{\partial p_0}$ и $\dfrac{\partial p(t;p_0)}{\partial p_0}$ удовлетворяют следующей системе уравнений в вариациях:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial x(t;p_0)}{\partial p_0}&=H_{px}\frac{\partial x(t;p_0)}{\partial p_0}+H_{pp}\frac{\partial p(t;p_0)}{\partial p_0},\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial p(t;p_0)}{\partial p_0}&=-H_{xx}\frac{\partial x(t;p_0)}{\partial p_0}-H_{xp}\frac{\partial p(t;p_0)}{\partial p_0},\end{aligned} \tag{2.17}$$

где H_{px}, H_{pp}, H_{xp}, H_{pp} — частные производные второго порядка по соответствующим переменным гамильтониана $H(\cdot)$, вычисленные в точке $(x(t;p_0),p(t;p_0))$. Например,

$$H_{px} = H_{px}(x(t;p_0),p(t;p_0)) = \frac{\partial^2 H(x(t;p_0),p(t;p_0))}{\partial p\,\partial x}.$$

Продифференцировав уравнения характеристической системы (1.8), (1.9) вдоль ее решений, заметим, что производные $\dot{x},\dot{p}$ компонент характеристик тоже удовлетворяют системе (2.17).

Сведем уравнение для $\dfrac{\partial x(t,p_0)}{\partial p_0}$ к уравнению второго порядка. Обозначим

$$y_1 = \frac{\partial x(t,p_0)}{\partial p_0}, \quad y_2 = \frac{\partial p(t,p_0)}{\partial p_0}.$$

Таким образом, первое уравнение системы (2.17) запишется в виде

$$\dot{y_1} = H_{px}y_1 + H_{pp}y_2. \tag{2.18}$$

Отсюда

$$y_2 = \frac{1}{H_{pp}}\dot{y_1} - \frac{H_{px}}{H_{pp}}y_1. \tag{2.19}$$

Продифференцируем (2.18)

$$\ddot{y_1} = \frac{d}{dt}(H_{xp})y_1 + H_{xp}\dot{y_1} + \frac{d}{dt}(H_{pp}y_2) + H_{pp}\dot{y_2}.$$

Учитывая (2.19), получим

$$\ddot{y_1} = \frac{\frac{dH_{pp}}{dt}}{Hpp}\dot{y_1} + \left[\frac{d}{dt}(H_{xp}) - \frac{d}{dt}(H_{pp})\cdot\frac{H_{xp}}{H_{pp}} - H_{xx}H_{pp} + (H_{xp})^2\right]y_1. \tag{2.20}$$

Пусть $W(\cdot)$ — определитель Вронского для двух частных решений дифференциального уравнения (2.20). По формуле Остроградского — Лиувилля

$$W(t) = W(t_*)e^{\int\limits_{t_*}^{t}\frac{\frac{d}{d\tau}H_{pp}}{H_{pp}}d\tau}, \quad t_* \in [0,T), \quad t \in [t_*,T). \tag{2.21}$$

Произведя следующие выкладки:

$$e^{\int\limits_{t_*}^{t}\frac{\frac{d}{d\tau}H_{pp}}{H_{pp}}d\tau} = e^{\int\limits_{t_*}^{t}\frac{d}{d\tau}\ln H_{pp}d\tau} = e^{\ln H_{pp}(t)-\ln H_{pp}(t_*)} = \frac{H_{pp}(t)}{H_{pp}(t_*)},$$

получим из (2.21)

$$W(t) = W(t_*)\frac{H_{pp}(t)}{H_{pp}(t_*)}. \tag{2.22}$$

Здесь $H_{pp}(t) = H_{pp}\big((x(t;p_0),p(t;p_0)\big)$. Поскольку производная фазовой компоненты $x(\cdot) = x(\cdot;p_0)$ характеристики также является частным решением уравнения (2.20), справедливо соотношение

$$W(t) = \begin{vmatrix}\dot{x}(t) & y_1(t)\\ \ddot{x}(t) & \dot{y}_1(t)\end{vmatrix} = \dot{x}(t)\dot{y}_1(t) - \ddot{x}(t)y_1(t).$$

Отсюда получаем

$$y_1(t) = \dot{y}_1(t)\frac{\dot{x}(t)}{\ddot{x}(t)} - \frac{W(t)}{\ddot{x}(t)}.$$

Заметим также, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y_1(t)}{\dot{x}(t)}\right) = \frac{W(t)}{(\dot{x}(t))^2},$$

откуда

$$y_1(t) = \dot{x}(t)\int\limits_{t_*}^{t}\frac{W(\tau)}{(\dot{x}(\tau))^2}d\tau. \tag{2.23}$$

Используя (2.22), оценим выражение для интеграла в (2.23), переписав

$$\int\limits_{t_*}^{t}\frac{W(\tau)}{(\dot{x}(\tau))^2}d\tau = \frac{W(t_*)}{H_{pp}(t_*)}\int\limits_{t_*}^{t}\frac{H_{pp}(\tau)}{(\dot{x}(\tau))^2}d\tau. \tag{2.24}$$

Величина $\dfrac{W(t_*)}{H_{pp}(t_*)}$ конечна. Введем обозначения

$$a(t) = (1 + x(t))e^{2p(t)}, \quad b(t) = (1 - x(t))e^{-2p(t)}.$$

Из (1.8), (1.9) имеем

$$\int\limits_{t_*}^{t}\frac{H_{pp}(\tau)}{(\dot{x}(\tau))^2}d\tau = -2\int\limits_{t_*}^{t}\frac{a(\tau)+b(\tau)}{(b(\tau)-a(\tau))^2}d\tau$$

$$= -2\int\limits_{t_*}^{t}\frac{a(\tau)+b(\tau)}{(a(\tau)+b(\tau))^2 - 4a(\tau)b(\tau)}d\tau = \int\limits_{t_*}^{t}\frac{d\tau}{(a(\tau)+b(\tau)) - 4\dfrac{a(\tau)b(\tau)}{a(\tau)+b(\tau)}}. \tag{2.25}$$

Заметим, что

$$a(t)b(t) = (1 + x(t))e^{2p(t)}(1 - x(t))e^{-2p(t)} = 1 - x^2(t).$$

Кроме того, поскольку гамильтониан $H(\cdot)$ (1.2) вдоль характеристики сохраняет постоянное значение, имеем

$$-\frac{1}{2}(a(t)+b(t)) + 1 - f(x(t)) = H(x(t),p(t)) = H(1,p_0) = 1 - f(1) - e^{2p_0},$$

$$a(t) + b(t) = 2\big(e^{2p_0} + f(1) - f(x(t))\big).$$

Таким образом, из (2.25) получаем, что интеграл

$$\int\limits_{t_*}^{\bar{t}}\frac{H_{pp}(\tau)}{(\dot{x}(\tau))^2}d\tau = \lim_{t\to\bar{t}}\int\limits_{t_*}^{t}\frac{H_{pp}(\tau)}{(\dot{x}(\tau))^2}d\tau$$

конечен. Учитывая (2.23), (2.24) и тот факт, что при $t \to \bar{t}$ величина $\dot{x}(t)$ стремится к нулю эквивалентно величине $e^{2p(t)}$, получаем

$$\lim_{t\to\bar{t}} p(t;p_0)\frac{\partial x(t,p_0)}{\partial p_0} = 0. \tag{2.26}$$

Учитывая (2.26) и (2.16), получаем из (2.15) оценку

$$I'(\bar{t}) \le f(1) - 1, \quad \bar{t} \in (0,T]. \tag{2.27}$$

Из оценок (2.27) и (2.13) следует

$$I'(\bar{t}) = f(1) - 1, \quad \bar{t} \in (0,T]. \tag{2.28}$$

Поскольку $I(0) = 0$, из (2.28) получаем

$$I(\bar{t}) = (f(1) - 1)\bar{t}, \quad \bar{t} \in (0, T].$$

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 5. *Для любой граничной точки* $(\bar{t}, 1)$, $0 < \bar{t} \le T$ *области* G_T^+ *максимум функционала* (2.5), (2.6) *достигается на функции* $x(\cdot; \bar{t}, 1)$. *При этом*

$$I(x(\cdot; \bar{t}, 1)) = (f(1) - 1)\bar{t}.$$

Пусть в задаче (2.11) условие на правом конце имеет вид $x(\bar{t}) = -1$. Из леммы 2 следует, что существует единственное значение $p_0 = p_0(\bar{t}, -1) \in [u_0'(-1), \infty)$, определяющее характеристику $x(\cdot; \bar{t}, -1)$, $p(\cdot; \bar{t}, 1)$ — решение системы (1.8), (1.9) такое, что $x(0; \bar{t}, 1) = -1$, $p(0; \bar{t}, 1) = p_0$ и $\bar{t} = t^*(p_0)$. Из леммы 4 следует, что в точке $t = \bar{t}$ функцию $x(\cdot; \bar{t}, 1)$ можно непрерывным образом доопределить, положив $x(\bar{t}; \bar{t}, 1) = -1$, и при этом будет $\dot{x}(\bar{t}; \bar{t}, 1) = 0$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. *Для любой граничной точки* $(\bar{t}, -1)$, $0 < \bar{t} \le T$, *области* G_T^- *максимум функционала* (2.11), (2.6) *достигается на функции* $x(\cdot; \bar{t}, -1)$. *При этом*

$$I(x(\cdot; \bar{t}, -1)) = (f(-1) - 1)\bar{t}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 6 аналогично доказательству теоремы 5.

2.5. Структура обобщенного решения

Пусть выполнены условия **A**, **B1**, **B2**. Предлагается следующая конструкция непрерывного на множестве $\overline{\Pi}_T = [0, T] \times [0, 1]$ обобщенного решения задачи (1.1)–(1.3), опирающаяся на изложенные выше результаты.

В области Ω_T^0 (1.13) решение определяется с помощью соотношения (1.14) и согласно результатам [1] является субдифференцируемой функцией.

Определим теперь решение в области G_T^- (1.15). Рассмотрим фазовые $x^-(\cdot; p_0)$ и импульсные $p^-(\cdot; p_0)$ характеристики — решения системы (1.8), (1.9), соответствующие начальным данным

$$x^-(0, p_0) = -1, \quad p^-(0, p_0) = p_0, \quad p_0 \in [u_0'(-1), +\infty).$$

Из леммы 2 следует, что для любой внутренней точки (t_*, x_*) области G_T^- существует единственный параметр $p_0 \in [u_0'(-1), +\infty)$, $p_0 = p_0(t_*, x_*)$ такой, что $x^-(t_*, p_0(t_*, x_*)) = x_*$.

Пусть $(t_*, x_*) \in G_T^-$. Положим

$$u(t_*, x_*) = u_0(-1) + \int\limits_0^{t_*} \big[p(\tau) H_p(x(\tau), p(\tau)) - H(x(\tau), p(\tau))\big]\, d\tau, \tag{2.29}$$

где $x(t) = x^-(t, p_0(t_*, x_*))$, $p(t) = p^-(t, p_0(t_*, x_*))$. Для граничных точек области G_T^- таких, что $x_* = -1$, $0 \le t_* \le T$, положим

$$u(t_*, -1) = u_0(-1) + (f(-1) - 1)t_*.$$

В области G_T^+ (1.15) обобщенное решение определяется с помощью решений $x^+(\cdot; p_0)$ и $p^+(\cdot; p_0)$ характеристической системы (1.8), (1.9), соответствующих начальным данным

$$x^+(0) = 1, \quad p^+(0) = p_0, \quad p_0 \in (-\infty, u_0'(-1)].$$

Из леммы 1 следует, что для любой внутренней точки (t^*, x^*) области G_T^+ существует единственный параметр $p_0 \in (-\infty, u_0'(-1)]$, $p_0 = p_0(t^*, x^*)$ такой, что $x^+(t^*, p_0(t^*, x^*)) = x^*$.

Пусть $(t^*, x^*) \in G_T^+$. Положим

$$u(t^*, x^*) = u_0(1) + \int\limits_0^{t^*} \big[p(\tau)H_p(x(\tau), p(\tau)) - H(x(\tau), p(\tau))\big]\, d\tau, \tag{2.30}$$

где $x(t) = x^+(t, p_0(t^*, x^*)),\ p(t) = p^+(t, p_0(t^*, x^*))$. Для граничных точек области G_T^+ таких, что $x_* = 1,\ 0 \le t_* \le T$, положим

$$u(t_*, 1) = u_0(1) + (f(1) - 1)t_*.$$

З а м е ч а н и е 2. Значения функции $u(\cdot)$, задаваемые формулами (2.29), (2.30), совпадают со значениями ценовых характеристик $z(\cdot, y)$ (1.10), соответствующих начальным данным

$$x(0, y) = y, \quad p(0, y) = p_0, \quad z(0, y) = u_0(y), \quad y = \mp 1.$$

Применяя схему доказательства метода характеристик Коши [11], можно показать, что построенная таким образом функция $u(\cdot)$ является непрерывно дифференцируемой во внутренних точках (t, x) областей G_T^- и G_T^+, и ее градиент равен $(-H\,(x(t),\, p(t))\,, p(t))$, где $x(t)$ — соответственно $x^-(t, p_0(t, x))$ и $x^+(t, p_0(t, x))$, $p(t)$ — соответственно $p^-(t, p_0(t, x))$ и $p^+(t, p_0(t, x))$. Из доказанных в этом разделе теорем 1–4 следует, что функция $u(\cdot)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{\Pi}_T$, и для нее выполнены неравенства (1.5), (1.6). Таким образом, $u(\cdot)$ удовлетворяет определению 1 в точках множества $\Pi_T = (0, T) \times (-1, 1)$. Если $0 < t_* < T$, $x_* = -1$, то $\partial u(t_*, x_*) = \partial u(t_*, -1) = \{(-H(-1, \infty), \infty)\}$. Если $0 < t_* < T$, $x_* = 1$, то $\partial u(t_*, x_*) = \partial u(t_*, 1) = \{(-H(1, -\infty), -\infty)\}$. При этом $H(-1, \infty) = 1 - f(-1)$, $H(1, -\infty) = 1 - f(1)$. Итак, в точках множества Γ_T выполнено неравенство (1.7); таким образом, $u(\cdot)$ удовлетворяет определению 1 и является обобщенным решением задачи (1.1)-(1.3). По построению функция $u(\cdot)$ удовлетворяет условию (1.14).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Субботина Н.Н., Шагалова Л.Г.** О решении задачи Коши для уравнения Гамильтона — Якоби с фазовыми ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 191–208.
2. **Субботина Н.Н., Шагалова Л.Г.** Построение обобщенного решения уравнения, сохраняющего тип Беллмана в заданной области фазового пространства // Тр. МИАН. 2012. Т. 277. С. 243–256.
3. **Субботина Н.Н., Шагалова Л.Г.** Конструкция непрерывного минимаксного/вязкостного решения уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана с непродолжимыми характеристиками // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 247–257.
4. **Saakian D.B., Rozanova O., Akmetzhanov A.** Dynamics of the Eigen and the Crow-Kimura models for molecular evolution // Phys. Rev. E (3). 2008. Vol. 78, no. 4, 041908. 6 p.
5. **Кружков С.Н.** Обобщенные решения нелинейных уравнений первого порядка со многими независимыми переменными, I // Мат. сб. 1966. Т. 70(112), № 3. С. 394–415.
6. **Субботин А.И.** Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
7. **Subbotin A.I.** Generalized Solutions of First Order PDEs: The dynamical optimization perspective. Boston: Birkhauser, 1995. 312 p.
8. **Crandall M.G., Lions P.L.** Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277, no. 1. P. 1–42.
9. **Capuzzo-Dolcetta I., Lions P.-L.** Hamilton-Jacobi Equations with State Constraints // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. Vol. 318, no. 2. P. 643–683.
10. **Курант Р.** Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 832 с.
11. **Петровский И.Г.** Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970. 280 с.
12. **Subbotina N.N.** The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equations and its applications in dynamical optimization // J. Math. Sci. 2006. Vol. 135, no. 3. P. 2955–3091.
13. Метод характеристик для уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана / Н.Н. Субботина, Е.А. Колпакова, Т.Б. Токманцев, Л.Г. Шагалова. Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2013. 244 с.

14. **Кларк Ф.** Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
15. **Эльсгольц Л.Э.** Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.
16. **Ванько В.И, Ермошина О.В, Кувыркин Г.Н.** Вариационное исчисление и оптимальное управление. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. 488 с.
17. **Понтрягин Л.С.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974. 332 с.

Субботина Нина Николаевна
Поступила 12.03.2015
д-р физ.-мат. наук, член-корр. РАН
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
профессор кафедры прикладной математики,
ИМКН, Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: subb@uran.ru

Шагалова Любовь Геннадьевна
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: shag@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.988

РЕШЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ РАЗНОСТЬЮ СУБДИФФЕРЕНЦИАЛОВ[1]

А. А. Толстоногов

В сепарабельном гильбертовом пространстве рассматривается эволюционное включение, правая часть которого содержит разность субдифференциалов собственных, выпуклых, полунепрерывных снизу функций и многозначное возмущение, значениями которого являются невыпуклые, замкнутые множества. Наряду с исходным включением рассматривается включение с овыпукленным возмущением и возмущением, значениями которого являются экстремальные точки овыпукленного возмущения, принадлежащие одновременно значениям исходного возмущения. Изучаются вопросы существования решений при различных возмущениях и устанавливаются взаимосвязи между решениями. Основное внимание уделено ослаблению предположений на возмущение по сравнению с известными, при которых справедливы теоремы существования и релаксации. Все наши предположения в отличие от известных относятся не к исходному, а к овыпукленному возмущению.

Ключевые слова: эволюционные включения, разность субдифференциалов, релаксация.

A. A. Tolstonogov. Solutions of evolution inclusions generated by a difference of subdifferentials.

An evolution inclusion with the right-hand side containing the difference of subdifferentials of proper convex lower semicontinuous functions and a multivalued perturbation whose values are nonconvex closed sets is considered in a separable Hilbert space. In addition to the original inclusion, we consider an inclusion with convexified perturbation and a perturbation whose values are extremal points of the convexified perturbation that also belong to the values of the original perturbation. Issues of the existence of solutions under various perturbations are studied and relations between solutions are established. The primary focus is on the weakening of assumptions on the perturbation as compared to the known assumptions under which existence and relaxation theorems are valid. All our assumptions, in contrast to the known assumptions, concern the convexified rather than original perturbation.

Keywords: evolution inclusions, difference of subdifferentials, relaxation.

1. Введение

Пусть $T=[0,1]$ и H — сепарабельное гильбертово пространство. В пространстве H мы рассматриваем эволюционное включение

$$-\dot{x}(t)\in\partial\varphi^1(x(t))-\partial\varphi^2(x(t))+F(t,x(t)),\tag{1.1}$$

$$x(0)=x_0.$$

Здесь φ^1, φ^2 — элементы пространства $\Gamma_0(H)$ всех собственных, выпуклых, полунепрерывных снизу функций из H в $\overline{\mathbb{R}}=(-\infty,+\infty]$, $\partial\varphi^1$ и $\partial\varphi^2$ — субдифференциалы функций φ^1 и φ^2, $F(t,x)$ — многозначное возмущение с замкнутыми, ограниченными значениями. Наряду с включением (1.1) мы рассматриваем включения

$$-\dot{x}(t)\in\partial\varphi^1(x(t))-\partial\varphi^2(x(t))+\overline{\text{co}}\,F(t,x(t)),\tag{1.2}$$

$$x(0)=x_0,$$

и

$$-\dot{x}(t)\in\partial\varphi^1(x(t))-\partial\varphi^2(x(t))+F(t,x(t))\cap\text{ext}\,\overline{\text{co}}\,F(t,x(t)),\tag{1.3}$$

$$x(0)=x_0,$$

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00287).

где $\overline{\text{co}}\,F(t,x)$ означает замкнутую выпуклую оболочку множества $F(t,x)$, а $\text{ext}\,\overline{\text{co}}\,F(t,x)$ — совокупность всех экстремальных (крайних) точек множества $\overline{\text{co}}\,F(t,x)$.

При $\varphi^2 \equiv 0$ исследованию эволюционных включений вида (1.1) с возмущениями $F(t,x)$, $\overline{\text{co}}\,F(t,x)$ и $\text{ext}\,\overline{\text{co}}\,F(t,x)$ посвящено огромное количество работ. Основное внимание в подавляющем большинстве из них уделено вопросам существования решений и плотности множества решений включения (1.1) в множестве решений включения (1.2). В последнее время появились работы, в которых рассматриваются вопросы существования и плотности множества решений включения с возмущением $\text{ext}\,\overline{\text{co}}\,F(t,x)$ в множестве решений включения с возмущением $\overline{\text{co}}\,F(t,x)$. Это свойство обычно называют "bang-bang" принципом или релаксацией для траекторий.

Следует заметить, что в общем случае $\text{ext}\,\overline{\text{co}}\,F(t,x) \not\subset F(t,x)$ и при доказательстве "bang-bang" принципа включение (1.1) по существу остается невостребованным, так как множество $\text{ext}\,\overline{\text{co}}\,F(t,x)$ однозначно определяется множеством $\overline{\text{co}}\,F(t,x)$. Поэтому более естественно называть "bang-bang" принципом плотность множества решений включения (1.3) во множестве решений включения (1.2).

При изучении эволюционных включений вида (1.1)–(1.3) в бесконечномерном пространстве существенно используется максимальная монотонность оператора $\partial\varphi^1$ в случае, когда $\varphi^2 \equiv 0$. Наличие члена $\partial\varphi^2$ принципиально усложняет задачу, так как в общем случае оператор $\partial\varphi^1 - \partial\varphi^2$ не является даже монотонным. В случае, когда $F(t,x)$ является однозначным возмущением, не зависящим от x, включение (1.1) в гильбертовом пространстве изучалось в работах [1; 2], а в банаховом — в работе [3].

Основное внимание в этих работах уделено вопросам существования решений. В настоящей работе мы рассматриваем следующие вопросы:

а) существование решений;

б) компактность множества решений включений (1.2);

в) плотность множества решений включений (1.1) и (1.3) в множестве решений включения (1.2).

Рассматривается пример. В идейном плане при доказательстве существования решения включения (1.2) мы следуем работе [2]. Однако в отличие от [2] мы не предполагаем, что $\varphi^i(x) \geq 0,\ i = 1,2$.

2. Основные обозначения и определения

Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — сепарабельное банахово пространство, $T = [0,1]$ — отрезок числовой прямой с мерой Лебега μ и с σ-алгеброй Σ – μ-измеримых подмножеств из T.

Всюду в дальнейшем мы используем следующие обозначения: $\text{c}(X)$ — семейство всех непустых, замкнутых подмножеств из X, $\text{cb}(X)$ — семейство непустых, замкнутых, ограниченных подмножеств из X, $\text{ccb}(X)$ — семейство всех непустых, замкнутых, ограниченных, выпуклых подмножеств из X.

Пусть X' — пространство, топологически сопряженное к X и $\langle x, x'\rangle$ — каноническая билинейная форма, устанавливающая двойственность между X и X'.

Для множества $K \subset X,\ x' \in X',\ x' \neq 0,\ \alpha > 0$ положим

$$C(K,x') = \sup\{\langle x, x'\rangle;\ x \in K\},$$

$$C(K,x',\alpha) = \big\{x \in K;\ \langle x, x'\rangle > C(K,x') - \alpha\big\}.$$

Пусть $K \in \text{ccb}(X)$ и $x \in K$. Точка x называется строго выставленной (strongly exposed), если существует элемент $x' \in X'$ такой, что $\langle x, x'\rangle > \langle y, x'\rangle$ для всех $y \in K,\ y \neq x$ и семейство множеств $\{C(K,x',\alpha);\ \alpha > 0\}$ образует в нормированной топологии базу окрестностей точки x в K.

Через $\operatorname{st} K$ обозначим совокупность всех строго выставленных точек множества K. Хорошо известно [4], что если K — замкнутое множество и множество $\overline{\operatorname{co}}\, K$ является слабо компактным, то

$$\operatorname{st} \overline{\operatorname{co}}\, K \subset K \subset \overline{\operatorname{co}}\, K, \tag{2.1}$$

$$\overline{\operatorname{co}} \operatorname{st} \overline{\operatorname{co}}\, K = \overline{\operatorname{co}}\, K. \tag{2.2}$$

Через ω-X мы обозначаем пространство X, наделенное слабой топологией. Такое же обозначение мы используем и для подмножеств пространства ω-X.

Через $D_X(\cdot,\cdot)$ мы обозначим метрику Хаусдорфа на пространстве $\operatorname{cb}(X)$:

$$D_X(A,B) = \max\Big\{\sup_{x\in A} d(x,B), \sup_{y\in B} d(y,A)\Big\},$$

где $d(x,A)$ означает расстояние от точки x до множества A.

Пусть Y — метрическое пространство. Многозначное отображение $F : Y \to X$ с замкнутыми, ограниченными значениями называется непрерывным, если оно непрерывно как отображение из Y в $(\operatorname{cb}(X), D_X(\cdot,\cdot))$.

Многозначное отображение $F : Y \to X$ называется полунепрерывным снизу по Вьеторису, если для любого открытого множества $V \subset X$ множество $F^{-1}(V) = \{y \in Y;\ F(y) \cap V \neq \varnothing\}$ открыто.

Известно, что многозначное отображение $F : Y \to X$ полунепрерывно снизу по Вьеторису тогда и только тогда, когда таковым является отображение $\overline{F} : Y \to X$, где $\overline{F}(y) = \overline{F(y)}$ и $\overline{F(y)}$ означает замыкание множества $F(y)$, $y \in Y$.

Многозначное отображение $F : T \to X$ называется измеримым (слабо измеримым) [5], если множество $F^{-1}(V) = \{t \in T;\ F(t) \cap V \neq \varnothing\} \in \Sigma$ для любого замкнутого (открытого) множества $V \subset X$.

Пусть $\mathcal{B}(Y)$ — σ-алгебра борелевских множеств из Y и $\Sigma \otimes \mathcal{B}(Y)$ — σ-алгебра подмножеств из $T \times Y$, порожденная множествами $A \times B$, $A \in \Sigma$, $B \in \mathcal{B}(Y)$.

Многозначное отображение $F : T\times Y \to X$ называется $\Sigma\otimes\mathcal{B}(Y)$ измеримым (слабо $\Sigma\otimes\mathcal{B}(Y)$ измеримым), если $F^{-1}(V) = \{(t,x) \in T\times Y,\ F(t,x)\cap V \neq \varnothing\} \in \Sigma\otimes\mathcal{B}(Y)$ для любого замкнутого (открытого) множества $V \subset X$.

Множество $K \subset L^p(T,X)$, $1 \le p < \infty$ называется разложимым, если $\chi(E)u + \chi(T\backslash E)v \in K$ для любых $E \in \Sigma$, $u, v \in K$, где $\chi(\cdot)$ — характеристическая функция множества. Отметим, что замыкание разложимого множества является разложимым.

На пространстве $L^2(T,H)$ кроме стандартной нормы $\|\cdot\|_{L^2}$ мы рассмотрим норму

$$\|u\|_\omega = \sup_{0\le t'\le t\le 1} \Big\| \int_{t'}^{t} u(s)ds \Big\|, \tag{2.3}$$

которую обычно называют слабой. Пространство $L^2(T,H)$ с нормой (2.3) мы обозначаем через $L^2_\omega(T,H)$.

Через $C(T,X)$ мы обозначим пространство всех непрерывных отображений из T в X с топологией равномерной сходимости на T.

Функция $\varphi : H \to \overline{R} = (-\infty, +\infty]$ называется собственной, если ее эффективная область $\operatorname{dom}\varphi = \{x \in H;\ \varphi(x) < +\infty\}$ не пуста. Через $\Gamma_0(H)$ мы обозначаем множество всех функций $\varphi : H \to \overline{R}$, которые являются собственными, выпуклыми, полунепрерывными снизу.

Субдифференциал функции $\varphi \in \Gamma_0(H)$ в точке $x \in H$ обозначается $\partial\varphi(x)$, $\partial\varphi(x) = \{v \in H;\ \langle v, y - x\rangle \le \varphi(y) - \varphi(x)\, \forall y \in H\}$.

Известно, что $\partial\varphi$ является максимально монотонным оператором,

$$\operatorname{dom}\partial\varphi = \{x \in H;\ \partial\varphi(x) \neq \varnothing\} \subset \operatorname{dom}\varphi$$

и
$$\overline{\mathrm{dom}\,(\partial\varphi)} = \overline{\mathrm{dom}\,\varphi},$$
[6; 7], где черта означает замыкание в H.

Моро — Иосиды регуляризацией функции $\varphi \in \Gamma_0(H)$ является функция
$$\varphi_\lambda(x) = \inf\left\{\varphi(y) + \frac{1}{2\lambda}\|y - x\|^2;\ y \in H\right\}, \quad \lambda > 0.$$

Как обычно, $W^{1,2}(T,H)$ — пространство абсолютно непрерывных функций из T в H, производные которых принадлежат пространству $L^2(T,H)$.

Определение 2.1. Функция $x(\cdot) \in W^{1,2}(T,H)$, $x(0) = x_0$ называется решением включения (1.1), если $x(t) \in \mathrm{dom}\,\partial\varphi^1$ п.в. и существуют функции $f^i(\cdot)$, $f(\cdot) \in L^2(T,H)$, $i = 1,2$, такие, что
$$-\dot{x}(t) = f^1(t) - f^2(t) + f(t)\ \text{п.в.},$$
$$f^i(t) \in \partial\varphi^i(x(t)), \quad f(t) \in F(t,x(t))\ \text{п.в.}, \quad i = 1,2.$$
Аналогично определяются решения включений (1.2) и (1.3). Множества всех решений включений (1.1), (1.2) и (1.3) мы будем обозначать $\mathcal{R}_F$, $\mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\,F}$ и $\mathcal{R}_{F\cap\mathrm{ext}\,\overline{\mathrm{co}}\,F}$ соответственно.

3. Вспомогательные результаты

В этом разделе для удобства доказательств мы приведем ряд результатов, которые будем использовать в дальнейшем.

Лемма 3.1 [6, лемма 3.3]. *Пусть $\varphi \in \Gamma_0(H)$, $x(\cdot) \in W^{1,2}(T,H)$ и существуют $g(\cdot) \in L^2(T,H)$, $g(t) \in \partial\varphi(x(t))$ п.в. Тогда функция $t \to \varphi(x(t))$ абсолютно непрерывна и*
$$\dot{\varphi}(x(t)) = \langle g(t), \dot{x}(t)\rangle\ \textit{п.в.}$$

Лемма 3.2 [8]. *Если последовательность $f_n(\cdot) \in L^2(T,H)$, $n \geq 1$, ограничена в $L^2(T,H)$ и сходится к $f(\cdot)$ в $L^2_\omega(T,H)$, то она сходится к $f(\cdot)$ в ω-$L^2(T,H)$.*

Лемма 3.3. *Пусть $F : T \to c(H)$, отображение $t \to \overline{\mathrm{co}}\,F(t)$ измеримо и*
$$\|\overline{\mathrm{co}}\,F(t)\| = \sup\{\|v\|;\ v \in \overline{\mathrm{co}}\,F(t)\} \leq m(t)\ \textit{п.в.},$$
где $m(\cdot) \in L^2(T,\mathbb{R}^+)$. Тогда существует измеримое отображение $F^* : T \to c(H)$ такое, что $F^*(t) \subset F(t)$, $\overline{\mathrm{co}}\,F^*(t) = \overline{\mathrm{co}}\,F(t)$ п.в.

Доказательство. Пусть
$$S_{\overline{\mathrm{co}}\,F} = \{f(\cdot) \in L^2(T,H);\ f(t) \in \overline{\mathrm{co}}\,F(t)\ \text{п.в.}\}.$$
Тогда $S_{\overline{\mathrm{co}}\,F}$ является непустым, разложимым, выпуклым, компактным подмножеством пространства ω-$L^2(T,H)$. Поэтому множество $\mathrm{st}\,S_{\overline{\mathrm{co}}\,F}$ строго выставленных точек $S_{\overline{\mathrm{co}}\,F}$ будет непустым и
$$\overline{\mathrm{co}}\ \mathrm{st}\,S_{\overline{\mathrm{co}}\,F} = S_{\overline{\mathrm{co}}\,F}. \tag{3.1}$$
Согласно [9, теорема 2.1] точка $f(\cdot) \in \mathrm{st}\,S_{\overline{\mathrm{co}}\,F}$ тогда и только тогда, когда
$$f(t) \in \mathrm{st}\ \overline{\mathrm{co}}\,F(t)\ \text{п.в.} \tag{3.2}$$

Пусть $\{f_n(\cdot),\ n \geq 1\}$ — счетное, плотное в топологии $L^2(T,H)$ подмножество множества $\mathrm{st}\,S_{\overline{\mathrm{co}}\,F}$. Положим
$$F^*(t) = \left\{\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(t)}\right\}, \quad t \in T,$$

где черта означает замыкание в H. Тогда отображение $F^* : T \to c(H)$ является измеримым. Из (3.2), (2.1) вытекает, что $f_n(t) \in F(t)$ п.в., $n \geq 1$. Поэтому

$$F^*(t) \subset F(t) \text{ п.в.}$$

и $f(t) \in F^*(t)$ п.в. для любого $f(\cdot) \in \operatorname{st} S_{\overline{\operatorname{co}}\, F}$. Из этих включений следует, что

$$\operatorname{st} S_{\overline{\operatorname{co}}\, F} \subset S_{\overline{\operatorname{co}}\, F^*} \subset S_{\overline{\operatorname{co}}\, F}.$$

Так как множества $S_{\overline{\operatorname{co}}\, F^*}$ и $S_{\overline{\operatorname{co}}\, F}$ выпуклы и замкнуты, то из этих включений и (3.1) вытекает $S_{\overline{\operatorname{co}}\, F^*} = S_{\overline{\operatorname{co}}\, F}$. Поэтому [10]

$$\overline{\operatorname{co}}\, F^*(t) = \overline{\operatorname{co}}\, F(t) \text{ п.в.}$$

Лемма доказана.

Следующие результаты хорошо известны [7; 8 и др.].

Лемма 3.4. *Пусть* $\varphi \in \Gamma_0(H)$. *Тогда*:

(1) φ_λ *является конечной, непрерывной, выпуклой и дифференцируемой по Гато функцией с* $\operatorname{dom} \partial\varphi_\lambda = H$;

(2) $\|\partial\varphi_\lambda(x) - \partial\varphi_\lambda(y)\| \leq \|x - y\|/\lambda,\ \lambda > 0,\ x, y \in H$;

(3) *существует константа* $L > 0$ *такая, что*

$$-L(\|x\| + 1) \leq \varphi_\lambda(x) \leq \varphi(x),$$

$x \in H,\ \lambda > 0$ *и* $\varphi_\lambda(x) \uparrow \varphi(x)$ *при* $\lambda \downarrow 0$;

(4) $\|\partial\varphi_\lambda(x)\| \leq \|\partial\varphi^0(x)\|,\ \lambda > 0$ *и* $\partial\varphi_\lambda(x) \to \partial\varphi^0(x)$ *в* H *при* $\lambda \downarrow 0,\ x \in \operatorname{dom} \partial\varphi$, *где* $\partial\varphi^0(x)$ — *единственный элемент минимальной нормы множества* $\partial\varphi(x)$, *который существует в силу замкнутости и выпуклости множества* $\partial\varphi(x),\ x \in \operatorname{dom} \partial\varphi$;

(5) *если* $x_n \in \operatorname{dom} \partial\varphi,\ v_n \in \partial\varphi(x_n),\ n \geq 1$ *и* $x_n \to x$ *в* H, $v_n \to v$ *в* ω-H, *то* $v \in \partial\varphi(x)$;

(6) *если* $\lambda_n \downarrow 0,\ x_{\lambda_n} \to x$ *в* H *и* $\partial\varphi_{\lambda_n}(x_{\lambda_n}) \to x^*$ *в* ω-H, *то* $x^* \in \partial\varphi(x)$.

Лемма 3.5 [6; 7]. *Пусть* $\varphi \in \Gamma_0(H),\ x(\cdot) \in L^2(T, H)$ *и*

$$\Phi(x(\cdot)) = \begin{cases} \displaystyle\int_T \varphi(x(t))\, dt, & \text{если } \varphi(x)(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}), \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{3.3}$$

Тогда:

(1) $\Phi(\cdot) \in \Gamma_0(L^2(T, H))$;

(2) $$\Phi_\lambda(x(\cdot)) = \int_T \varphi_\lambda(x(t))\, dt,\ \lambda > 0; \tag{3.4}$$

(3) *если* $v(\cdot) \in L^2(T, H)$, *то* $v(\cdot) \in \partial\Phi(x(\cdot))$ *тогда и только тогда, когда* $v(t) \in \partial\varphi(x(t))$ *п.в.*;

(4) $\partial\Phi_\lambda(x)(t) = \partial\varphi_\lambda(x(t))$ *п.в.*, $\lambda > 0$.

4. Априорные оценки

Для доказательства существования решений включений (1.1)–(1.3) сделаем следующие предположения.

Гипотезы $H(\varphi)$:

(1) $\varphi^1, \varphi^2 \in \Gamma_0(H),\ \operatorname{dom} \partial\varphi^1 \subset \operatorname{dom} \partial\varphi^2$;

(2) для любого $r > 0$ множество $\{x \in H; \|x\| \leq r, |\varphi^1(x)| \leq r\}$ относительно компактно в H;

(3) существуют $0 \leq k_1, k_2 < 1$ и неубывающая функция $\eta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такие, что

$$\|\partial\varphi^{2^0}(x)\| \leq k_1 \|\partial\varphi^{1^0}(x)\| + \eta(|\varphi^1(x)| + |\varphi^2(x)| + \|x\|), \quad x \in \operatorname{dom} \partial\varphi^1;$$

(4) $\varphi^2(x) \le k_2\varphi^1(x) + C,\ C \ge 0, \quad x \in \mathrm{dom}\,\varphi^1$;

(5) $x_0 \in \mathrm{dom}\,\varphi^1$;

(6) для любого $r > 0$ существует неубывающая функция $\eta_r : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такая, что для любых $x, y \in \mathrm{dom}\,\partial\varphi^1,\ \|x\| \le r,\ \|y\| \le r$ и любых $v \in \partial\varphi^2(x),\ w \in \partial\varphi^2(y)$ будет иметь место неравенство

$$\langle x - y, v - w\rangle \le \eta_r\,(|\varphi^1(x)| + |\varphi^1(y)|)\,\|x - y\|^2.$$

Гипотезы $H(\overline{\mathrm{co}}\,F)$. Отображение $F : T \times \mathrm{dom}\,\varphi^1 \to \mathrm{cb}(H)$ таково, что

(1) отображение $t \to \overline{\mathrm{co}}\,F(t, x)$ измеримо;

(2) отображение $x \to \overline{\mathrm{co}}\,F(t, x)$ непрерывно;

(3) $\|\,\overline{\mathrm{co}}\,F(t, x)\| = \sup\{\|v\|;\ v \in \mathrm{co}F(t, x)\} \le m(t) + n(t)\|x\|$ п.в., $m(\cdot), n(\cdot) \in L^2(T, \mathbb{R}^+)$;

(4) для любого компакта $\mathcal{K} \subset \mathrm{dom}\,\varphi^1$ существует функция $l_{\mathcal{K}} \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$ такая, что для любых $x, y \in \mathcal{K},\ v \in \overline{\mathrm{co}}\,F(t, x)$ найдется элемент $u \in \overline{\mathrm{co}}\,F(t, y)$, удовлетворяющий неравенству $\langle x - y, v - u\rangle + l_{\mathcal{K}}(t)\|x - y\|^2 \ge 0$ п.в.

Теорема 4.1. *Пусть выполняются гипотезы* $H(\varphi)$ (1)–(5) *и* $H(\overline{\mathrm{co}}\,F)$ (1)–(3). *Тогда существует константа* $M > 0$ *такая, что для любого* $x \in \mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)$ *будут иметь место неравенства*

$$\|x(t)\| \le M, \quad t \in T, \quad \|\dot{x}\|_{L^2(T,H)} \le M, \tag{4.1}$$

$$|\varphi^i(x(t))| \le M, \quad t \in T, \quad i = 1, 2. \tag{4.2}$$

Доказательство. Пусть $x \in \mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)$. Тогда существуют $f^i,\ f \in L^2(T, H),\ i = 1, 2$, такие, что

$$f^i(t) \in \partial\varphi^i(x(t)),\ f(t) \in \overline{\mathrm{co}}\,F(t, x(t)) \text{ п.в.}$$

и

$$-\dot{x}(t) = f^1(t) - f^2(t) + f(t) \text{ п.в.} \tag{4.3}$$

Умножив (4.3) на $\dot{x}(t)$ и воспользовавшись леммой 3.1, мы получим

$$\|\dot{x}(t)\|^2 + \frac{d}{dt}\varphi^1(x(t)) - \frac{d}{dt}\varphi^2(x(t)) = -\langle f(t), \dot{x}(t)\rangle \text{ п.в.} \tag{4.4}$$

Согласно утверждению (3) леммы 3.4

$$-\varphi^i(x(t)) \le L(\|x(t)\| + 1), \quad i = 1, 2. \tag{4.5}$$

Тогда из (4.4), (4.5) и гипотезы $H(\varphi)$ (4) вытекает

$$\int_0^t \|\dot{x}(s)\|^2\,ds + (1 - k_2)\varphi^1(x(t)) \le C_1 + \int_0^t \|\dot{x}(s)\| \cdot \|f(s)\|\,ds, \tag{4.6}$$

где

$$C_1 = |\varphi^1(x_0)| + C + L(\|x_0\| + 1). \tag{4.7}$$

Воспользовавшись (4.5), (4.6) и неравенством Коши $ab \le \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2},\ a, b \ge 0$, мы получим

$$\int_0^t \|\dot{x}(s)\|^2\,ds \le 2C_1 + 2(1 - k_2)L(\|x(t)\| + 1) + \int_0^t \|f(s)\|^2\,ds. \tag{4.8}$$

Из этого неравенства, неравенства

$$\|x(t)\|^2 \le 2\|x_0\|^2 + 2\int_0^t \|\dot{x}(s)\|^2\,ds$$

и неравенства Коши, примененного к члену $4(1-k_2)L\|x(t)\|$, вытекает

$$\|x(t)\|^2 \le C_2 + 4\int_0^t \|f(s)\|^2\,ds, \tag{4.9}$$

где

$$C_2 = 4\|x_0\|^2 + 8C_1 + 8(1-k_2)L + (4(1-k_2)L)^2. \tag{4.10}$$

Воспользовавшись (4.9), гипотезой $H(\overline{\mathrm{co}}\,F)$ (3), мы получим

$$\|x(t)\|^2 \le C_2 + 8\int_0^t m^2(s)\,ds + 8\int_0^t n^2(s)\|x(s)\|^2\,ds. \tag{4.11}$$

Из неравенства (4.11) и неравенства Беллмана — Гронуолла вытекает, что существует $M_1 > 0$ такое, что

$$\|x(t)\| \le M_1, \quad t \in T. \tag{4.12}$$

Из (4.8), (4.12) и гипотезы $H(\overline{\mathrm{co}}\,F)$ (3) мы получим, что

$$\|\dot{x}\|_{L^2(T,H)} \le M_2 \tag{4.13}$$

при некотором $M_2 > 0$. Из неравенств (4.5), (4.6), (4.12), (4.13) и гипотезы $H(\varphi)$ (4) следует, что

$$|\varphi^i(x(t))| \le M_3, \quad t \in T, \quad i = 1,2, \tag{4.14}$$

при некотором $M_3 > 0$. Объединяя неравенства (4.12)–(4.14), мы приходим к неравенствам (4.1), (4.2). Теорема доказана.

Теорема 4.2. *Пусть выполняются гипотезы $H(\varphi)$ (1)–(5) и $H(\overline{\mathrm{co}}\,F)$ (1)–(3). Тогда $\mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)$ является непустым подмножеством пространства $C(T,H)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим при $\lambda > 0$ включение

$$-x_\lambda(t) \in \partial\varphi^1(x_\lambda(t)) - \partial\varphi^2_\lambda(x_\lambda(t)) + \overline{\mathrm{co}}\,F(t, x_\lambda(t)) \text{ п.в.}, \tag{4.15}$$

$$x_\lambda(0) = x_0.$$

Решение включения (4.15) определяется аналогично решению включения (1.1). Так как функция $x \to \partial\varphi^2_\lambda(x)$ является липшицевой, то существование решения включения (4.15) вытекает из существования решений включения

$$-\dot{x}(t) \in \partial\varphi^1(x(t)) + \tilde{F}(t, x(t)) \text{ п.в.},$$

$$x(0) = x_0,$$

где $\tilde{F}(t,x(t)) = -\partial\varphi^2_\lambda(x(t)) + \overline{\mathrm{co}}\,F(t,x(t))$. Существование решения этого включения хорошо известно, так как с учетом утверждения (2) леммы 3.4 отображение $\tilde{F}$ удовлетворяет гипотезам, аналогичным гипотезам $H(\overline{\mathrm{co}}\,F)$ (1)–(3), и имеет место гиплтеза $H(\varphi)$ (2). Из (4.15) по аналогии с (4.4) мы получим

$$\|\dot{x}_\lambda(t)\|^2 + \frac{d}{dt}\varphi^1(x_\lambda(t)) - \frac{d}{dt}\varphi^2_\lambda(x_\lambda(t)) = -\langle f_\lambda(t), \dot{x}_\lambda(t)\rangle \text{ п.в.}, \tag{4.16}$$

где

$$f_\lambda(t) \in \overline{\mathrm{co}}\,F(t, x_\lambda(t)) \text{ п.в.} \tag{4.17}$$

Дословно повторяя доказательство теоремы 4.1 с использованием (4.16), (4.17) и неравенства в утверждении (3) леммы 3.4, мы получим, что при той же по величине константе $M > 0$, которая фигурирует в (4.1), (4.2), будут справедливы неравенства

$$\|x_\lambda(t)\| \le M, \quad t \in T, \quad \|\dot{x}_\lambda\|_{L^2(T,H)} \le M, \quad \lambda > 0, \tag{4.18}$$

$$|\varphi^i(x_\lambda(t))| \le M, \quad t \in T, \quad i = 1, 2, \quad \lambda > 0. \tag{4.19}$$

Пусть

$$f^1_\lambda(t) = -\dot{x}_\lambda(t) + \partial\varphi^2_\lambda(x_\lambda(t)) - f_\lambda(t). \tag{4.20}$$

Так как

$$f^1_\lambda(t) \in \partial\varphi^1(x_\lambda(t)) \text{ п.в.}, \tag{4.21}$$

то из леммы 3.4 (4) и гипотезы $H(\varphi)$ (3), (4.20), (4.21) вытекает, что

$$\|\partial\varphi^2_\lambda(x_\lambda(t))\| \le k_1(\|\partial\varphi^2_\lambda(x_\lambda(t))\| + \|\dot{x}_\lambda(t)\| + \|f_\lambda(t)\|) + \eta\Big(\sum_{i=1}^{2}|\varphi^i(x_\lambda(t))| + \|x_\lambda(t)\|\Big). \tag{4.22}$$

Воспользовавшись гипотезой $H(\overline{\text{co}}\, F)$ (3), (4.17)–(4.19), (4.22), (4.20), мы получим, что

$$\|\partial\varphi^2_\lambda(x_\lambda)\|_{L^2(T,H)} \le N, \quad \lambda > 0, \tag{4.23}$$

$$\|f_\lambda\|_{L^2(T,H)} \le N, \quad \lambda > 0, \tag{4.24}$$

$$\|f^1_\lambda\|_{L^2(T,H)} \le N, \quad \lambda > 0 \tag{4.25}$$

при некотором $N > 0$. Из (4.18), (4.19), гипотезы $H(\varphi)$ (2) и теоремы Арцела — Асколи следует, что множество $\{x_\lambda;\, \lambda > 0\}$ относительно компактно в пространстве $C(T, H)$, а множество $\{\dot{x}_\lambda;\, \lambda > 0\}$ относительно компактно в пространстве ω-$L^2(T, H)$.

Аналогично из (4.23)–(4.25) вытекает, что множества $\{\partial\varphi^2_\lambda(x_\lambda); \lambda > 0\}$, $\{f_\lambda;\, \lambda > 0\}$, $\{f^1_\lambda;\, \lambda > 0\}$ относительно компактны в пространстве ω-$L^2(T, H)$. Поэтому существуют последовательность $\lambda_n \downarrow 0$ и функции $x \in W^{1,2}(T, H)$, f^1, f^2, $f \in L^2(T, H)$ такие, что

$$x_{\lambda_n} \to x \text{ в } C(T, H), \tag{4.26}$$

$$\dot{x}_{\lambda_n} \to \dot{x} \text{ в } \omega\text{-}L^2(T, H), \tag{4.27}$$

$$f^1_{\lambda_n} \to f^1 \text{ в } \omega\text{-}L^2(T, H), \tag{4.28}$$

$$\partial\varphi^2_\lambda(x_\lambda) \to f^2 \text{ в } \omega\text{-}L^2(T, H), \tag{4.29}$$

$$f_{\lambda_n} \to f \text{ в } \omega\text{-}L^2(T, H). \tag{4.30}$$

Из (4.20), (4.27)–(4.30) вытекает равенство

$$-\dot{x}(t) = f^1(t) - f^2(t) + f(t) \text{ п.в.} \tag{4.31}$$

Пусть Φ^i, $\Phi^i_\lambda : L^2(T, H) \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, $\lambda > 0$, — функции, определенные равенствами (3.3), (3.4), в которых функции φ, φ_λ заменены на функции φ^i, φ^i_λ, $i = 1, 2$, $\lambda > 0$. Тогда, воспользовавшись (4.21), (4.26)–(4.29), утверждениями (5), (6) в лемме 3.4 применительно к функциям Φ^i, $i = 1, 2$, мы получим $f^i \in \partial\Phi^i(x)$, $i = 1, 2$. Теперь из леммы 3.5 (3) вытекает, что

$$f^i(t) \in \partial\varphi^i(x(t)) \text{ п.в.}, \quad i = 1, 2. \tag{4.32}$$

Из (4.19), (4.26) и неравенства

$$\varphi^1(x(t)) \le \varliminf_{n\to\infty} \varphi^1(x_{\lambda_n}(t)) \le M, \quad t \in T,$$

следует, что $x(t) \in \operatorname{dom}\varphi^1$, $t \in T$. Так как $f_{\lambda_n}(t) \in \overline{\mathrm{co}}\, F(t, x_{\lambda_n}(t))$ п.в., $n \geq 1$, то из гипотез $H(\overline{\mathrm{co}}\, F)$ (1), (2), (4.26), (4.30) и теоремы Мазура для слабо сходящихся последовательностей [11] вытекает включение

$$f(t) \in \bigcap_{k\geq 1} \overline{\mathrm{co}} \Big(\bigcup_{n=k}^{\infty} \overline{\mathrm{co}}\, F(t, x_{\lambda_n}(t)) \Big) \in \overline{\mathrm{co}}\, F(t, x(t)) \text{ п.в.}$$

Из этого включения и (4.31), (4.32) следует, что $x \in \mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\, F}(x_0)$. Теорема доказана.

5. Существование решений

Как было установлено в теореме 4.2, при выполнении гипотез $H(\varphi)$ (1)–(5) и $H(\overline{\mathrm{co}}\, F)$ (1)–(3) множество $\mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\, F}(x_0)$ не пусто. Согласно теореме 4.1 для любого $x \in \mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\, F}(x_0)$ справедливы неравенства (4.1). Поэтому, не нарушая общности, мы можем считать, что вместо неравенства в гипотезе $H(\overline{\mathrm{co}}\, F)$ (3) многозначное отображение $\overline{\mathrm{co}}\, F(t, x)$ удовлетворяет неравенству

$$\| \overline{\mathrm{co}}\, F(t, x)\| \leq m(t) + n(t)M \text{ п.в.}, \quad x \in \operatorname{dom}\varphi^1. \tag{5.1}$$

Пусть

$$U(t) = \{u \in H;\ \|u\| \leq m(t) + n(t)M \text{ п.в.}\}, \tag{5.2}$$

$$S_U = \{u \in L^2(T, H);\ u(t) \in U(t) \text{ п.в.}\}. \tag{5.3}$$

Рассмотрим дифференциальное включение

$$-\dot{x}(t) \in \partial\varphi^1(x(t)) - \partial\varphi^2(x(t)) + U(t), \tag{5.4}$$

$$x(0) = x_0 \in \operatorname{dom}\varphi^1.$$

Решение включения (5.4) определяется аналогично решению включения (1.1). Пусть $\mathcal{R}_U(x_0)$ — множество решений включения (5.4). Так как отображение $t \to U(t)$ является измеримым с замкнутыми, выпуклыми значениями, то из теоремы 4.2 непосредственно вытекает, что включение (5.4) имеет решение. Более того, любое решение включения (5.4) является решением включения

$$-\dot{x}(t) \in \partial\varphi^1(x(t)) - \partial\varphi^2(x(t)) + u(t) \tag{5.5}$$

при некотором $u \in S_U$, а любое решение включения (5.5) при $u \in S_U$ является решением включения (5.4). Повторяя доказательство теоремы 4.1, мы получим, что существует $N > 0$ такое, что

$$\|x(t)\| \leq N, \quad t \in T, \quad \|\dot{x}\|_{L^2(T,H)} \leq N, \tag{5.6}$$

$$|\varphi^i(x(t))| \leq N, \quad t \in T, \tag{5.7}$$

для любого $x \in \mathcal{R}_U(x_0)$.

Лемма 5.1. *Пусть выполняются гипотезы* $H(\varphi)$. *Тогда для любого* $u \in S_U$ *включение* (5.5) *имеет единственное решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u \in S_U$ и x_i, $i = 1, 2$, — решения включения (5.5), соответствующие u. Из определения решения следует, что существуют $f_i^2 \in L^2(T, H)$, $f_i^2(t) \in \partial\varphi^2(x(t))$ п.в., $i = 1, 2$, при которых имеют место включения

$$-\dot{x}_i(t) \in \partial\varphi^1(x_i(t)) - f_i^2(t) + u(t) \text{ п.в.}, \quad i = 1, 2. \tag{5.8}$$

Так как $x_i \in \mathcal{R}_U(x_0)$, $x_i(t) \in \operatorname{dom}\partial\varphi^1$ п.в., $i = 1, 2$, то из (5.6), (5.7) и гипотезы $H(\varphi)$ (6) следует, что существует константа $L_N > 0$, $L_N \geq \eta_N(|\varphi^1(x_1(t))| + |\varphi^1(x_2(t))|)$, при которой будет иметь место неравенство

$$\langle x_1(t) - x_2(t), f_1^2(t) - f_2^2(t)\rangle \leq L_N \|x_1(t) - x_2(t)\|^2 \text{ п.в.} \tag{5.9}$$

Воспользовавшись (5.8), (5.9) и монотонностью оператора $\partial\varphi^1$, мы получим неравенство

$$\frac{1}{2}\|x_1(t)-x_2(t)\|^2 \le \int\limits_0^t L_N\|x_1(s)-x_2(s)\|^2\,ds, \quad t\in T.$$

Из этого неравенства вытекает, что $x_1(t)=x_2(t),\ t\in T$. Лемма доказана.

Обозначим через $\mathcal{L}$ оператор, который каждому $u\in S_U$ ставит в соответствие единственное решение x включения (5.5), т. е.

$$x=\mathcal{L}(u). \tag{5.10}$$

Лемма 5.2. *Пусть выполняются гипотезы $H(\varphi)$. Тогда оператор $\mathcal{L}$ является непрерывным из ω-S_U в $C(T,H)$.*

Доказательство. Так как S_U является выпуклым, метризуемым компактом в пространстве ω-$L^2(T,H)$, то нам достаточно доказать секвенциальную непрерывность оператора $\mathcal{L}$. Пусть $u_n\in S_U,\ n\ge 1$, сходится к u в пространстве ω-$L^2(T,H)$ и $x_n=\mathcal{L}(u_n),\ x=\mathcal{L}(u),\ n\ge 1$. Поскольку $x_n,x\in\mathcal{R}_U(x_0),\ n\ge1$, то для них будут иметь место неравенства (5.6), (5.7). Воспользовавшись (5.5)–(5.7), гипотезой $H(\varphi)$ (6), по аналогии с доказательством леммы 5.1 мы получим неравенство

$$\frac{1}{2}\|x_n(t)-x(t)\|^2 \le \int\limits_0^t L_N\|x_n(s)-x(s)\|^2\,ds + \int\limits_0^t \langle x_n(s)-x(s), u(s)-u_n(s)\rangle ds, \quad t\in T. \tag{5.11}$$

Из неравенств (5.6), (5.7) и гипотезы $H(\varphi)$ (2) вытекает, что последовательность x_n, $n\ge1$, относительно компактна в пространстве $C(T,H)$. Пусть $x_{n_k},\ k\ge1,$ — подпоследовательность последовательности $x_n,\ n\ge1$, которая сходится к y в $C(T,H)$. Заменяя в (5.11) n на n_k и переходя к пределу при $k\to\infty$, мы получим

$$\frac{1}{2}\|y(t)-x(t)\|^2 \le \int\limits_0^t L_N\|y(s)-x(s)\|^2\,ds.$$

Из этого неравенства вытекает, что $y(t)=x(t),\ t\in T$. Таким образом, мы показали, что если $u_n\to u$ в ω-$L^2(T,H)$, то существует подпоследовательность $x_{n_k}=\mathcal{L}(u_{n_k}),\ k\ge1$, последовательности $x_n=\mathcal{L}(u_n),\ n\ge1$, которая сходится к $x=\mathcal{L}(u)$. Если мы предположим, что сама последовательность $x_n,\ n\ge1$, не сходится к x, то, используя единственность решения включения (5.5) с помощью хорошо известных аргументов, мы придем к противоречию. Следовательно, $x_n=\mathcal{L}(u_n),\ n\ge1$, сходится к $x=\mathcal{L}(u)$ в $C(T,H)$ при $u_n\to u$ в пространстве ω-$L^2(T,H)$. Лемма доказана.

Следствие 5.1. *Множество $\mathcal{R}_U(x_0)$ является компактным подмножеством пространства $C(T,H)$.*

Следствие вытекает из леммы 5.2 и компактности множества S_U в пространстве ω-$L^2(T,H)$.

Теорема 5.1. *Пусть выполняются гипотезы $H(\varphi)$, $H(\overline{\mathrm{co}}\,F)$ (1)–(3). Тогда множества $\mathcal{R}_{F\cap\mathrm{ext}\,\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)$, $\mathcal{R}_F(x_0)$, $\mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)$ не пусты и множество $\mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)$ является компактом в $C(T,H)$.*

Доказательство. Непустота множества $\mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)$ была доказана в теореме 4.2. Поэтому нам достаточно доказать непустоту множества $\mathcal{R}_{F\cap\mathrm{ext}\,\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)$. Из (4.1), (5.1), (5.2), (5.4) следует, что

$$\mathcal{R}_{F\cap\mathrm{ext}\,\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)\subset\mathcal{R}_F(x_0)\subset\mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)\subset\mathcal{R}_U(x_0). \tag{5.12}$$

Пусть

$$\Gamma(x)=\big\{f\in L^2(T,H);\ f(t)\in\overline{\mathrm{co}}\,F(t,x(t))\ \text{п.в.}\big\}, \tag{5.13}$$

$x \in \mathcal{R}_U(x_0)$. Используя гипотезы $H(\overline{\operatorname{co}}\, F)$ (1)–(3), (5.1) и следствие 5.1 по аналогии с доказательством утверждения 8.1 в [12], мы получим, что значениями отображения $\Gamma(x)$ являются выпуклые, слабокомпактные, разложимые множества из $L^2(T,H)$ и отображение $\Gamma : \mathcal{R}_U(x_0) \to \operatorname{cb} L^2(T,H)$ является непрерывным в метрике Хаусдорфа на пространстве $\operatorname{cb} L^2(T,H)$. Поскольку отображение $t \to \overline{\operatorname{co}}\, F(t,x(t))$ измеримо, то согласно лемме 3.3 существует измеримое отображение $F^*(x) : T \to c(H),\ x \in \mathcal{R}_U(x_0)$ такое, что

$$F^*(x)(t) \subset F(t,x(t)), \quad \overline{\operatorname{co}}\, F^*(x)(t) = \overline{\operatorname{co}}\, F(t,x(t)) \text{ п.в.} \tag{5.14}$$

Пусть

$$\Gamma^*(x) = \bigl\{f \in L^2(T,H);\ f(t) \in F^*(x)(t) \text{ п.в.}\bigr\}, \quad x \in \mathcal{R}_U(x_0). \tag{5.15}$$

Тогда $\Gamma^*(x)$ является замкнутым, разложимым подмножеством пространства $L^2(T,H)$. Из (5.1), (5.13)–(5.15) и теоремы 1.5 в [10] вытекает, что

$$\Gamma(x) = \overline{\operatorname{co}}\, \Gamma^*(x), \quad x \in \mathcal{R}_U(x_0). \tag{5.16}$$

Воспользовавшись (5.16) и теоремой 0.2 в [12], мы получим, что существует непрерывное отображение $g : \mathcal{R}_U(x_0) \to L^2(T,H)$ такое, что

$$g(x) \in \Gamma^*(x) \cap \operatorname{ext}\Gamma(x).$$

Из этого включения, следствия 5.2 в [12] и (5.13)–(5.15) вытекает, что

$$g(x)(t) \in F(t,x(t)) \cap \operatorname{ext}\overline{\operatorname{co}}\, F(t,x(t)) \text{ п.в.}, \tag{5.17}$$

$x \in \mathcal{R}_U(x_0)$. Пусть $\mathcal{A} : S_U \to L^2(T,H)$ — оператор, определенный по правилу $\mathcal{A}(u) = g(\mathcal{L}(u))$, где $\mathcal{L}$ — оператор, который каждому $u \in S_U$ ставит в соответствие единственное решение $x = \mathcal{L}(u) \in \mathcal{R}_U(x_0)$ включения (5.5). Из леммы 5.2, (5.1), равенства $\mathcal{L}(S_U) = \mathcal{R}_U(x_0)$ следует, что оператор $\mathcal{A}$ является непрерывным из ω-S_U в ω-S_U. Так как ω-S_U является выпуклым компактом, то по теореме Шаудера о неподвижной точке существует элемент $u_* \in S_U$ такой, что

$$u_* = \mathcal{A}(u_*) = g(\mathcal{L}(u_*)). \tag{5.18}$$

Положим $x_* = \mathcal{L}(u_*)$. Тогда из (5.17), (5.18) следует, что

$$u_*(t) \in F(t,x_*(t)) \cap \operatorname{ext}\overline{\operatorname{co}}\, F(t,x_*(t)) \text{ п.в.}$$

Тем самым x_* является решением включения (1.3). Следовательно, множества $\mathcal{R}_{F\cap \operatorname{ext}\overline{\operatorname{co}}\, F}(x_0)$, $\mathcal{R}_F(x_0)$ и $\mathcal{R}_{\overline{\operatorname{co}}\, F}(x_0)$ не пусты.

Так как $\mathcal{R}_{\overline{\operatorname{co}}\, F}(x_0) \subset \mathcal{R}_U(x_0)$ и в соответствии со следствием 5.1 множество $\mathcal{R}_U(x_0)$ — компакт в $C(T,H)$, то для доказательства компактности множества $\mathcal{R}_{\overline{\operatorname{co}}\, F}(x_0)$ нам достаточно доказать его замкнутость. Пусть $x_n \in \mathcal{R}_{\overline{\operatorname{co}}\, F}(x_0),\ n \geq 1$, сходится к x в $C(T,H)$. Тогда $x_n = \mathcal{L}(u_n),\ u_n \in S_U,\ n \geq 1$,

$$u_n(t) \in \overline{\operatorname{co}}\, F(t,x_n(t)) \text{ п.в.}, \quad n \geq 1. \tag{5.19}$$

Не нарушая общности, можно считать, что $u_n \to u \in S_U$ в пространстве ω-$L^2(T,H)$. Согласно лемме 5.2

$$x = \mathcal{L}(u). \tag{5.20}$$

Тогда из гипотез $H(\overline{\operatorname{co}}\, F)$ (1), (2) и (5.19) по аналогии с доказательством теоремы 4.2 мы получаем

$$u(t) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\operatorname{co}} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \overline{\operatorname{co}}\, F(t,x_k(t)) \right) \subset \overline{\operatorname{co}}\, F(t,x(t)) \text{ п.в.}$$

Из этого включения и (5.20) следует, что $x \in \mathcal{R}_{\overline{\operatorname{co}}\, F}(x_0)$. Тем самым множество $\mathcal{R}_{\overline{\operatorname{co}}\, F}(x_0)$ замкнуто в $C(T,H)$. Теорема доказана.

6. Плотность

В этом разделе мы докажем основной результат настоящей работы.

Теорема 6.1. *Пусть выполняются гипотезы* $H(\varphi)$, $H(\overline{\mathrm{co}}\,F)$. *Тогда для любого* $x_* \in \mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)$ *существует последовательность* $x_n \in \mathcal{R}_{F\cap \mathrm{ext}\,\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)$, $n \geq 1$, *сходящаяся к* x_* *в пространстве* $C(T, H)$.

Доказательство. Пусть $x_* \in \mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)$. Тогда $x_* \in \mathcal{R}_U(x_0)$ и $x_* = \mathcal{L}(u_*)$,

$$u_*(t) \in \overline{\mathrm{co}}\,F(t, x_*(t)) \text{ п.в.} \tag{6.1}$$

Согласно следствию 5.1 множество $\mathcal{R}_U(x_0)$ является компактом в $C(T, H)$ и $x(t) \in \mathrm{dom}\,\varphi^1$, $t \in T$ для любого $x \in \mathcal{R}_U(x_0)$. Поэтому множество $\mathcal{K} = \{x(t);\ x \in \mathcal{R}_U(x_0),\ t \in T\}$ является компактом в H и $\mathcal{K} \subset \mathrm{dom}\,\varphi^1$. Тогда из гипотезы $H(\overline{\mathrm{co}}\,F)$ (4) вытекает, что существует функция $l_{\mathcal{K}} \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$ такая, что для любого $y \in \mathcal{K}$ найдется элемент $v \in \overline{\mathrm{co}}\,F(t, y)$, удовлетворяющий неравенству

$$\langle x_*(t) - y, u_*(t) - v\rangle + l_{\mathcal{K}}(t)\|x_*(t) - y\|^2 \geq 0. \tag{6.2}$$

Рассмотрим функцию

$$p(t, y, u) = \langle x_*(t) - y, u_*(t) - u\rangle + l_{\mathcal{K}}(t)\|x_*(t) - y\|^2, \quad t \in T, \quad y \in \mathcal{K}, \quad u \in H, \tag{6.3}$$

которая очевидно является измеримой по t и непрерывной по (y, u) на $\mathcal{K} \times H$. Воспользовавшись теоремой 6.1 в [5] и гипотезами $H(\overline{\mathrm{co}}\,F)$, мы получим, что для любого $z \in H$ функция $(t, x) \to d(z, \overline{\mathrm{co}}\,F(t, x))$, $x \in \mathcal{K}$ является $\Sigma \otimes \mathcal{B}_{\mathcal{K}}$ измеримой. Тогда в соответствии с теоремой 3.5 в [5] отображение $(t, x) \to \overline{\mathrm{co}}\,F(t, x)$, $x \in \mathcal{K}$, является слабо $\Sigma \otimes \mathcal{B}_{\mathcal{K}}$ измеримым. Поэтому из теоремы 2.4 в [13] вытекает, что существует последовательность замкнутых множеств $T_k \subset T_{k+1} \subset \ldots \subset T$, $k \geq 0$, $\mu\,(T \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k) = 0$ такая, что отображение $(t, y) \to \overline{\mathrm{co}}\,F(t, y)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису на $T_k \times \mathcal{K}$, а функция $(t, y, u) \to p(t, y, u)$ непрерывна на $T_k \times \mathcal{K} \times H$.

Рассмотрим многозначное отображение $V_n : T \times \mathcal{K} \to H$, определенное по правилу

$$V_n(t, y) = \Big\{u \in H;\ p(t, y, u) + \frac{1}{n} > 0\Big\}. \tag{6.4}$$

Очевидно, что для каждого $k \geq 1$ график сужения $V_n(t, y)$ на $T_k \times \mathcal{K}$ является открытым множеством в пространстве $T_k \times \mathcal{K} \times H$. Положим

$$F_n(t, y) = \overline{\mathrm{co}}\,F(t, y) \cap V_n(t, y), \quad t \in T, \quad y \in \mathcal{K}. \tag{6.5}$$

Из (6.2)–(6.4) следует, что для каждого $t \in T_k$, $k \geq 1$, $y \in \mathcal{K}$ множество $F_n(t, y)$ не пусто. Так как отображение $(t, y) \to \overline{\mathrm{co}}\,F(t, y)$ является полунепрерывным снизу по Вьеторису на $T_k \times \mathcal{K}$ и график сужения отображения $(t, y) \to V_n(t, y)$ на $T_k \times \mathcal{K}$ есть открытое подмножество в пространстве $T_k \times \mathcal{K} \times H$, то отображение $(t, y) \to F_n(t, y)$ является полунепрерывным снизу по Вьеторису на $T_k \times \mathcal{K}$, $k \geq 1$. Таковым будет и отображение $(t, y) \to \overline{F_n(t, y)}$, где черта означает замыкание в H. Из (6.5) и (6.4) следует, что

$$\overline{F_n}(t, y) = \overline{F_n(t, y)} \subset \overline{\mathrm{co}}\,F(t, y) \text{ п.в.}, \quad y \in \mathcal{K}, \tag{6.6}$$

$$p(t, y, u) + \frac{1}{n} \geq 0 \text{ п.в.}, \quad y \in \mathcal{K}, \quad u \in \overline{F_n}(t, y). \tag{6.7}$$

Так как $\mu(T \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k) = 0$, то из свойств отображения $\overline{F_n}(t, y)$, установленных выше, следует, что для любой функции $x \in \mathcal{R}_U(x_0)$ отображение $t \to \overline{F_n}(t, x(t))$ слабо измеримо, а отображение $x \to \overline{F_n}(t, x)$, $x \in \mathcal{K}$ полунепрерывно снизу по Вьеторису при почти всех $t \in T$. Поэтому на $\mathcal{R}_U(x_0)$ мы можем определить многозначное отображение

$$\Gamma_n(x) = \big\{v \in L^2(T, H);\ v(t) \in \overline{F_n(t, x(t))} \text{ п.в.}\big\}, \tag{6.8}$$

значениями которого являются непустые, замкнутые, разложимые множества из $L^2(T,H)$. Используя хорошо известные аргументы [12; 14 и др.], можно показать, что отображение $\Gamma_n : \mathcal{R}_U(x_0) \to L^2(T,H)$ является полунепрерывным снизу по Вьеторису. Тогда существует непрерывное отображение [12, 14] $g_n : \mathcal{R}_U(x_0) \to L^2(T,H)$ такое, что

$$g_n(x) \in \Gamma_n(x) \subset \Gamma(x), \quad x \in \mathcal{R}_U(x_0), \tag{6.9}$$

где Γ — отображение, определенное равенством (5.13). Из (6.3)–(6.5), (6.8), (6.9) вытекает, что

$$\langle x_*(t) - x(t), u_*(t) - g_n(x)(t)\rangle + l_{\mathcal{K}}(t)\|x_*(t) - x(t)\|^2 + \frac{1}{n} \geq 0 \text{ п.в.}, \tag{6.10}$$

$x \in \mathcal{R}_U(x_0)$.

Пусть $\Gamma^*(x)$ — отображение, определенное равенством (5.15), значениями которого являются замкнутые, разложимые множества в пространстве $L^2(T,H)$. Это отображение удовлетворяет равенству (5.16). Тогда из следствия 6.2 в [15] вытекает, что существует непрерывная функция $q_n : \mathcal{R}_U(x_0) \to L^2(T,H)$ такая, что

$$q_n(x) \in \Gamma^*(x) \cap \operatorname{ext}\Gamma(x), \tag{6.11}$$

$$\|g_n(x) - q_n(x)\|_\omega \leq \frac{1}{n}, \quad x \in \mathcal{R}_U(x_0), \tag{6.12}$$

где $\|\cdot\|_\omega$ — норма (2.3). Из (5.13)–(5.15), (6.11) вытекает, что

$$q_n(x)(t) \in F(t,x(t)) \cap \operatorname{ext}\overline{\operatorname{co}}\,F(t,x(t)) \text{ п.в.}, \tag{6.13}$$

$x \in \mathcal{R}_U(x_0)$.

Рассмотрим оператор $\mathcal{A}_n : S_U \to L^2(T,H)$, определенный по правилу

$$\mathcal{A}_n(u) = q_n(\mathcal{L}(u)), \quad u \in S_U, \quad n \geq 1.$$

По аналогии с доказательством теоремы 5.1 мы получим, что существует неподвижная точка $u_n \in S_U$ оператора $\mathcal{A}_n$, т. е.

$$u_n = \mathcal{A}_n(u_n) = q_n(\mathcal{L}(u_n)), \quad n \geq 1. \tag{6.14}$$

Положим

$$x_n = \mathcal{L}(u_n), \quad n \geq 1. \tag{6.15}$$

Тогда из (6.13)–(6.15) следует, что

$$u_n(t) \in F(t,x_n(t)) \cap \operatorname{ext}\overline{\operatorname{co}}\,F(t,x_n(t)) \text{ п.в.}, \quad n \geq 1.$$

Тем самым x_n, $n \geq 1$, является решением включения (1.3). Так как $x_*, x_n \in \mathcal{R}_U(x_0)$, $n \geq 1$, то используя гипотезу $H(\varphi)$ (6), (5.6), (5.7), как и при доказательстве леммы 5.2, мы получим неравенство

$$\frac{1}{2}\|x_n(t) - x_*(t)\|^2 \leq \int_0^t L_N\|x_n(s) - x_*(s)\|^2\,ds + \int_0^t \langle x_n(s) - x_*(s), u_*(s) - u_n(s)\rangle ds, \quad n \geq 1. \tag{6.16}$$

Пусть $v_n(t) = g_n(x)(t)$. Тогда из (6.10), (6.12) вытекает

$$\langle x_n(t) - x_*(t), u_*(t) - v_n(t)\rangle \leq \frac{1}{n} + l_{\mathcal{K}}(t)\|x_*(t) - x_n(t)\|^2, \quad n \geq 1, \tag{6.17}$$

$$\|v_n - u_n\|_\omega \leq \frac{1}{n}, \quad n \geq 1. \tag{6.18}$$

Объединяя (6.16), (6.17), мы придем к неравенству

$$\frac{1}{2}\|x_n(t)-x_*(t)\|^2 \le \int\limits_0^t L_N\|x_n(s)-x_*(s)\|^2\,ds+\frac{1}{n}$$

$$+\int\limits_0^t l_{\mathcal{K}}(s)\|x_n(s)-x_*(s)\|^2\,ds+\int\limits_0^t \langle x_n(s)-x_*(s), v_n(s)-u_n(s)\rangle ds. \tag{6.19}$$

Так как $u_n \in S_U,\ n \geq 1$, то последовательность $u_n,\ n \geq 1$, относительно компактна в ω-$L^2(T,H)$. Не нарушая общности, мы можем считать, что $u_n \to u$ в ω-$L^2(T,H)$. Тогда из леммы 5.2 и (6.15) вытекает, что $x_n \to x = \mathcal{L}(u)$ в $C(T,H)$. Так как $v_n, u_n \in S_U,\ n \geq 1$, то из (6.18) и леммы 3.2 вытекает, что последовательность $v_n \to u$ в ω-$L^2(T,H)$. Переходя к пределу в (6.19) при $n \to \infty$, мы получим

$$\frac{1}{2}\|x(t)-x_*(t)\|^2 \le \int\limits_0^t (L_N+l_{\mathcal{K}}(s))\|x(s)-x_*(s)\|^2\,ds, \quad t\in T.$$

Из этого неравенства следует, что $x(t) = x_*(t),\ t \in T$. Поэтому последовательность $x_n \in \mathcal{R}_{F\cap \mathrm{ext}\,\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0),\ n \geq 1$, сходится в $C(T,H)$ к $x_* \in \mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)$. Теорема доказана.

Следствие 6.1. *Пусть выполняются гипотезы $H(\varphi),\ H(\overline{\mathrm{co}}\,F)$. Тогда справедливы равенства*

$$\mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)=\overline{\mathcal{R}_F(x_0)}=\overline{\mathcal{R}_{F\cap \mathrm{ext}\,\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)}, \tag{6.20}$$

где черта означает замыкание в $C(T,H)$.

Следствие вытекает из теорем 5.1, 6.1.

Начиная с классической работы А. Ф. Филиппова [16] при доказательстве плотности множества решений того или иного типа включения с возмущением $F(t,x)$ в множестве решений включения с возмущением $\overline{\mathrm{co}}\,F(t,x)$ традиционными предположениями являются измеримость отображения $t \to F(t,x)$ и липшицевость отображения $x \to F(t,x)$. Наши предположения при доказательстве равенства (6.20) относятся к возмущению $\overline{\mathrm{co}}\,F(t,x)$ и носят более общий характер, чем известные. В частности, из липшицевости отображения $x \to F(t,x)$ вытекает гипотеза $H(\overline{\mathrm{co}}\,F)$ (4).

7. Пример

Пусть $T=[0,1],\ H=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ — евклидово пространство, $x=(x_1,x_2)\in H,\ f=(f_1,f_2)\in H,\ F: T\times H\to H$ — многозначное отображение с непустыми, замкнутыми значениями. Рассмотрим дифференциальное включение

$$\frac{dx_1}{dt}+a_1|x_1|^{p_1-2}x_1-b_1|x_1|^{\alpha_1}x_1=f_1(t), \tag{7.1}$$

$$\frac{dx_2}{dt}+a_2|x_2|^{p_2-2}x_2-b_2|x_2|^{\alpha_2}x_2=f_2(t), \tag{7.2}$$

$$f(t)\in F(t,x), \tag{7.3}$$

$$x(0)=x_0\in H.$$

Предположим, что

$$a_i, b_i>0, \quad 2+\alpha_i<p_i, \quad \alpha_i>0, \quad i=1,2. \tag{7.4}$$

Рассмотрим функции

$$\varphi^1(x) = \varphi^1_1(x_1) + \varphi^1_2(x_2), \tag{7.5}$$

$$\varphi^2(x) = \varphi^2_1(x_1) + \varphi^2_2(x_2), \tag{7.6}$$

где

$$\varphi^1_i(x_i) = \frac{1}{p_i} a_i |x_i|^{p_i}, \quad i = 1, 2, \tag{7.7}$$

$$\varphi^2_i(x_i) = \frac{1}{\alpha_i + 2} b_i |x_i|^{\alpha_i + 2}, \quad i = 1, 2. \tag{7.8}$$

Из (7.5)–(7.8) вытекает, что

$$\partial\varphi^1(x) = (a_1|x_1|^{p_1-2}x_1, a_2|x_2|^{p_2-2}x_2), \tag{7.9}$$

$$\partial\varphi^2(x) = (b_1|x_1|^{\alpha_1}x_1, b_2|x_2|^{\alpha_2}x_2). \tag{7.10}$$

Используя (7.9), (7.10), включения (7.1)–(7.3) можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} + \partial\varphi^1(x) - \partial\varphi^2(x) = f,$$

$$f \in F(t, x),$$

$$x(0) = x_0.$$

Покажем, что функции $\varphi^i(x)$, $i = 1, 2$, определенные равенствами (7.5), (7.6), при выполнении неравенств (7.4) удовлетворяют гипотезам $H(\varphi)$. Для этого нам понадобится неравенство Юнга

$$ab \le \frac{\varepsilon^p a^p}{p} + \frac{b^q}{q\varepsilon^q}, \quad a, b, \varepsilon > 0, \quad p > 1, \quad q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Поскольку $\operatorname{dom}\varphi^i = \operatorname{dom}\partial\varphi^i = H$ и пространство H конечномерно, то гипотезы $H(\varphi)$ (1), (2), (5) очевидны. Из (7.9), (7.10), (7.4) и неравенства Юнга вытекает, что существуют $0 < k_1 < 1$, $c_i > 0$, $i = 1, 2$, такие, что $b_i|x_i|^{\alpha_i+1} \le k_1 a_i |x_i|^{p_i - 1} + c_i$, $i = 1, 2$. Из этого неравенства и (7.9), (7.10) вытекает, что

$$\|\partial\varphi^2(x)\| \le k_1 \|\partial\varphi^1(x)\| + c,$$

где $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$. Так как $\partial\varphi^{i^0}(x) = \partial\varphi^i(x)$, $i = 1, 2$, то гипотеза $H(\varphi)$ (3) доказана.

Для доказательства гипотезы $H(\varphi)$ (4) воспользуемся (7.4), (7.7), (7.8) и неравенством Юнга. Тогда мы получим, что существуют $0 < k_2 < 1$, $c_i^* > 0$, $i = 1, 2$ такие, что

$$\frac{1}{\alpha_i + 2} b_i |x_i|^{\alpha_i + 2} \le k_2 \frac{1}{p_i} a_i |x_i|^{p_i} + c_i^*, \quad i = 1, 2.$$

Из этого неравенства и (7.5)–(7.8) вытекает, что $\varphi^2(x) \le k_2 \varphi^1(x) + c^*$, $c^* = c_1^* + c_2^*$. Следовательно, гипотеза $H(\varphi)$ (4) имеет место.

Так как функции $x_i \to b_i|x_i|^{\alpha_i} x_i, i = 1, 2$, непрерывно дифференцируемы, то из теоремы о среднем мы получаем

$$b_i|x_i|^{\alpha_i}x_i - b_i|y_i|^{\alpha_i}y_i = (\alpha_i + 1) b_i |\Theta_i x_i + (1 - \Theta_i) y_i|^{\alpha_i} \cdot |x_i - y_i|, \quad i = 1, 2, \quad 0 \le \Theta_i \le 1.$$

Так как

$$|\Theta_i x_i + (1 - \Theta_i) y_i|^{\alpha_i} \le (|x_i|^{\alpha_i} + |y_i|^{\alpha_i}),$$

то из этого неравенства, (7.4), (7.7) и неравенства Юнга вытекает

$$b_i|x_i|^{\alpha_i}x_i - b_i|y_i|^{\alpha_i}y_i \le (\alpha_i + 1) b_i (\varphi^1_i(x_i) + \varphi^1_i(y_i) + D_i)|x_i - y_i|, \quad D_i > 0, \quad i = 1, 2.$$

Воспользовавшись этим неравенством, (7.5), (7.10), мы получим

$$\langle x-y, \partial\varphi^2(x)-\partial\varphi^2(y)\rangle \le L(\varphi^1(x)+\varphi^1(y)+D)\|x-y\|^2, \quad x,y\in H,$$

где $L=\sum_{i=1}^{2}(\alpha_i+1)b_i, D=D_1+D_2$. Следовательно, гипотеза $H(\varphi)$ (6) имеет место.

Если мы предположим, что многозначное отображение $F: T\times H\to H$ удовлетворяет гипотезам $H(\overline{\text{co}}\,F)$, то для дифференциального включения (7.1)–(7.3) будут иметь место теоремы 5.1, 6.1 и следствие 6.1. Формулировки их мы не приводим в силу очевидности.

Если подходить к изучению включения (7.1)–(7.3) с точки зрения общей теории дифференциальных включений, не учитывая специфику, то для этого включения, как и для включения

$$\frac{dx_i}{dt}-a_i|x_i|^{p_1-2}x_i+b_i|x_i|^{\alpha_i}x_i=f_i(t), \quad i=1,2,$$

$$f(t)=(f_1(t),f_2(t))\in F(t,x(t)),$$

мы сможем доказать существование только локальных решений. Это объясняется тем, что для этих включений не выполняются традиционные условия роста для нелинейных членов, при которых доказывается существование глобальных решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Koi Y., Watanabe J.** On nonlinear evolution equation with a difference term of subdifferentials // Proc. Japan. Acad. 1976. №. 52. P. 413–446.
2. **Otani M.** On existence of strong solutions for $du(t)/dt+\partial\psi^1(u(t))-\partial\psi^2(u(t))\ni f(t)$ // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA Math. 1977. Vol. 24, no. 3. P. 575–605.
3. **Akagi G., Otani M.** Evolution inclusions governed by the difference of two subdifferentials in reflexive Banach spaces // J. Diff. Equat. 2005. Vol. 209, no. 2. P. 392–415.
4. **Bourgin R.D.** Geometric aspects of convex sets with the Radon–Nikodym property. Berlin: Springer-Verlag, 1983. 474 p. (Lecture Notes in Math.; vol. 993).
5. **Himmelberg C.J.** Measurable relations // Fund. Math. 1975. Vol. 87. P. 53–72.
6. **Brezis H.** Operateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert. Amsterdam; London: North-Holland, 1973. 183 p.
7. **Kenmochi N.** Solvability of nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications // Bull. Fac. Educ. Chiba University. 1981. Vol. 30. P. 1–87.
8. **Толстоногов А.А.** Релаксация в невыпуклых задачах оптимального управления, описываемых эволюционными уравнениями первого порядка // Мат. сб. 1999. Т. 190, № 11. С. 135–160.
9. **Толстоногов А.А.** Строго выставленные точки разложимых множеств в пространствах интегрируемых по Бохнеру функций // Мат. заметки. 2002. Т. 71, № 2. Р. 298–306.
10. **Hiai F., Umegaki H.** Integrals, conditional expectations and martingales of multivalued functions // J. Multivariate Anal. 1977. Vol. 7, no. 1. P. 149–182.
11. **Данфорд Н., Шварц Дж.** Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962. 896 с.
12. **Tolstonogov A.A., Tolstonogov D.A.** L_p-continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values: existence theorems // Set-valued Anal. 1996. Vol. 4, no. 2. P. 173–203.
13. **Толстоногов А.А.** К теореме Скорца Драгони для многозначных отображений с переменной областью определения // Мат. заметки. 1990. Vol. 48, № 5. P. 109–120.
14. **Fryszkowski A.** Continuous selections for a class of nonconvex multivalued maps // Studia Math. 1983. Vol. 76, no. 2. P. 163–174.
15. **Tolstonogov A.A., Tolstonogov D.A.** L_p-continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values: relaxation theorems // Set-valued Anal. 1996. Vol. 4, no. 3. P. 237–269.
16. **Филиппов А.Ф.** Классические решения уравнений с многозначной правой частью // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1967. № 3. Р. 16–26.

Толстоногов Александр Александрович
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
зам. директора по НР
Институт динамики систем и теории управления СО РАН
email: aatol@icc.ru

Поступила 03.02.15

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.977

ПРОИЗВОДНЫЕ В СИЛУ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКЕ[1]

А. А. Успенский

Исследуются негладкие задачи теории оптимального управления и геометрической оптики, допускающие формализацию в виде краевых задач Дирихле для уравнений в частных производных первого порядка (в том числе гамильтонова типа). Разрабатывается аппарат выявления и построения сингулярных множеств с помощью многоточечных производных. Вводятся в рассмотрение четыре типа производных в силу диффеоморфизмов, обобщающие понятия классической производной и односторонней производной. Приводятся формулы вычисления производных в силу диффеоморфизмов для некоторых классов функций. Эффективность развиваемого метода исследования демонстрируется на примере решения задачи о быстродействии в случае круговой вектограммы скоростей и невыпуклой цели с негладкой границей.

Ключевые слова: уравнение в частных производных первого порядка, минимаксное решение, волновой фронт, диффеоморфизм, эйконал, функция оптимального результата, сингулярное множество, симметрия.

A. A. Uspenskii. Derivatives by virtue of diffeomorphisms and their applications in control theory and geometrical optics.

The paper deals with nonsmooth problems of optimal control theory and geometrical optics that can be formalized as Dirichlet boundary value problems for first-order partial differential equations (including equations of Hamiltonian type). A methodology is elaborated for the identification and construction of singular sets with the use of multipoint derivatives. Four types of derivatives by virtue of diffeomorphisms are introduced; they generalize the notions of classical derivative and one-sided derivative. Formulas are given for the calculation of derivatives by virtue of diffeomorphisms for some classes of functions. The efficiency of the developed method of analysis is illustrated by the example of solving an optimal time problem in the case of a circular velocity vectogram and nonconvex target with nonsmooth boundary.

Keywords: first-order PDE, minimax solution, wavefront, diffeomorphism, eikonal, optimal result function, singular set, symmetry.

Введение

Построение решений задач оптимального управления [1], дифференциальных игр [2; 3], краевых задач для уравнений в частных производных первого порядка и уравнений гамильтонова типа [4–6] требует привлечения обобщений классической производной, поскольку данные решения, как правило, являются функциями, не дифференцируемыми в классическом смысле. Решения задач этого круга понимаются в обобщенном смысле. При описании и построении самих решений и их сингулярных множеств используются конструкции негладкого и выпуклого анализа [7], а также теории особенностей дифференцируемых отображений [8; 9]. В данной работе предлагаются обобщения традиционной производной. Обобщения представляют собой пределы дифференциальных отношений, построенных не на двух, а на большем числе точек, стесненных дифференциальной связью. Такие конструкции естественным образом возникают при анализе задач управления и игр, которым свойственна множественность управляемых движений, исходящих из фиксированной точки. Работа продолжает исследования [10–19].

[1]Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект № 15-16-1-13), а также при поддержке РФФИ (проекты 14-01-00486_а и 13-01-96055).

1. Определения, основные понятия

Кратко изложим мотивировку вводимых конструкций на примере краевой задачи Дирихле:

$$\min_{\nu\colon \|\nu\|\leqslant 1}\left(\nu_1\frac{\partial u}{\partial x}+\nu_2\frac{\partial u}{\partial y}\right)+1=0, \tag{1.1}$$

$$u|_\Gamma=0. \tag{1.2}$$

Здесь $\|\nu\| = \sqrt{\nu_1^2+\nu_2^2}$ — норма вектора $\nu = (\nu_1, \nu_2)$. Краевое условие (1.2) определено на границе $\Gamma = \partial M$ замкнутого множества M. Предполагается, что Γ не имеет точек самопересечения. Дифференциальные свойства границы следует оговаривать в каждом конкретном случае. Здесь для определенности полагаем, что Γ — гладкая регулярная кривая [20].

Структура минимаксного решения $u = u(x, y)$ задачи (1.1), (1.2) известна [14]:

$$u(x,y)=\rho\big((x,y),M\big).$$

Здесь $\rho(\mathbf{x}, M) = \min\limits_{\mathbf{a}\in M}\|\mathbf{a}-\mathbf{x}\|$ — евклидово расстояние от точки $\mathbf{x}$ до множества M.

Надо заметить, что решение $u(x, y) = \rho\big((x, y), M\big)$ допускает содержательную интерпретацию. Во-первых, оно совпадает с функцией оптимального результата в задаче о быстродействии с целевым множеством M в случае круговой вектограммы допустимых скоростей. Во-вторых, эта функция лишь знаком отличается от эйконала — обобщенного решения в смысле определения [4] основного уравнения геометрической оптики [21] для случая изотропной среды:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=1, \tag{1.3}$$

$$u|_\Gamma=0. \tag{1.4}$$

Линии уровня решения краевой задачи (1.3), (1.4) являются волновыми фронтами.

Гладкость $u(x, y) = \rho\big((x, y), M\big)$ находится в зависимости от геометрии множества $M \subset \mathbb{R}^2$. Если краевое множество невыпуклое, то функция имеет сингулярность. В общем случае сингулярное множество есть объединение нуль- и одномерных многообразий. Одна из самых простых модельных ситуаций отражена на рис. 1. Здесь краевое множество M есть подграфик функции $f(x) = x^2$. Сингулярное множество (биссектриса [12]) $L(M)$ состоит из одной ветви (одномерного многообразия), которая описывается явно [15]:

$$L(M)=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x=0, y=\frac{1}{2}+x_1^2, x_1<0\Big\}.$$

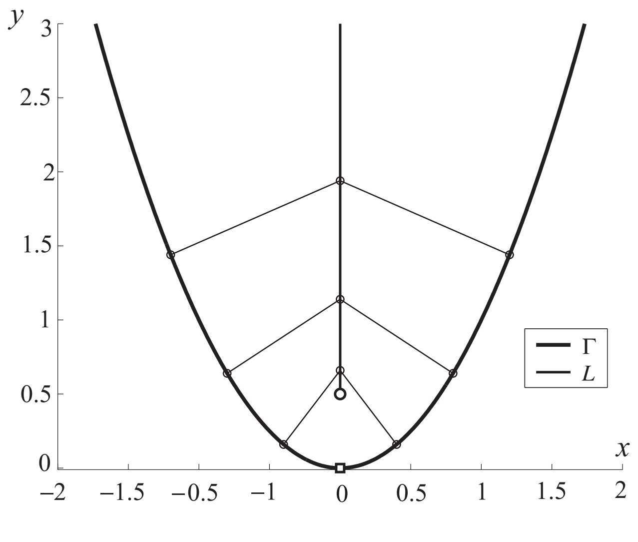


Рис. 1. Подграфик функции $f(x) = x^2$ и его биссектриса L.

Крайняя точка $D = (0, 1/2)$ — это “начало” кривой $L(M)$, которое, заметим, не принадлежит сингулярному множеству. Рассмотрим решения характеристической системы задачи (1.1), (1.2) (движения управляемой системы соответствующей задачи о быстродействии), стартующие с сингулярного множества. Они образуют пары движений, которые соскальзывают с сингулярной кривой $L(M)$ в разные от нее стороны. В рассматриваемом случае эти характеристики — отрезки прямых с началом на $L(M)$ и концом на M. Обратим внимание на то, что, когда их общая начальная точка стремится к крайней точке D кривой $L(M)$, концы соответствующих характеристик сходятся к точке $O = (0, 0)$ на границе краевого множества, причем сходятся с разных сторон. Точки типа O являются особыми для краевой задачи (1.1), (1.2) и названы псевдовершинами краевого множества [13; 15]. Можно сказать, что эти точки устанавливают связь между геометрией краевого множества и динамикой характеристической системы (или иначе — дифференциальным оператором (1.1)). Нахождение этих точек позволяет строить ветви сингулярного множества. Акцентируем внимание на том, что псевдовершина O является общим пределом сразу двух последовательностей из концов характеристик.

Для выделения особых точек границы краевого множества разрабатывается свой инструментарий [12–19], использующий (явно или неявно) многоточечные дифференциальные отношения. Перейдем к описанию трехточечных обобщений классических двухточечных дифференциальных отношений.

Пусть скалярная функция $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, определена в окрестности точки $t = t_0$. Под окрестностью точки $t = t_0$ понимаем числовой интервал $O(t_0, \delta_1, \delta_2) = (t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2)$, где параметры малости $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$, и в общем случае $\delta_1 \neq \delta_2$. Далее будем различать левую и правую полуокрестности $O_-(t_0, \delta_1) = (t_0 - \delta_1, t_0)$, $\delta_1 > 0$, $O_+(t_0, \delta_2) = (t_0, t_0 + \delta_2)$, $\delta_2 > 0$. В обозначениях окрестности и полуокрестностей условимся опускать параметры малости, если в контексте рассуждений их роль непринципиальна, полагая $O(t_0) \triangleq O(t_0, \delta_1, \delta_2)$, $O_-(t_0) \triangleq O_-(t_0, \delta_1)$, $O_+(t_0) \triangleq O_+(t_0, \delta_2)$.

Введем в рассмотрение диффеоморфизмы [8; 9; 22]. Здесь диффеоморфизм — скалярная непрерывно дифференцируемая строго монотонная без нулей производной функция. Говоря о локальном диффеоморфизме, мы подразумеваем, что он определен в малом — в окрестности или же в полуокрестности точки рассмотрения. Будем изучать четыре класса локальных диффеоморфизмов, связав их с точкой рассмотрения условиями односторонней непрерывности. Определим односторонние локальные диффеоморфизмы — левые h_- и правые h_+:

$$h_-\colon O_-(t_0) \to O_-(t_0), \quad \lim_{t_1 \to t_0 - 0} h_-(t_1) = t_0,$$

$$h_+\colon O_+(t_0) \to O_+(t_0), \quad \lim_{t_2 \to t_0 + 0} h_+(t_2) = t_0.$$

Функция вида $h_- = h_-(t_1)$ отображает левую полуокрестность точки $t = t_0$ в нее же. Аналогично функция $h_+ = h_+(t_2)$ отображает правую полуокрестность точки $t = t_0$ в правую же полуокрестность. Простейшими представителями каждого из этих двух семейств являются линейные диффеоморфизмы вида

$$h_-(t_1) = k_1(t_1 - t_0) + t_0, \quad k_1 = \mathrm{const} > 0, \quad k_1 \neq 1,$$

$$h_+(t_2) = k_2(t_2 - t_0) + t_0, \quad k_2 = \mathrm{const} > 0, \quad k_2 \neq 1.$$

Здесь $t_1 < t_0 < t_2$ и $(t_1 - t_0) < 0$, $(t_2 - t_0) > 0$. Тождественные диффеоморфизмы $h_-(t_1) = t_1$, $h_+(t_2) = t_2$ исключены, поскольку нарушают строгое неравенство $t_1 < t_0 < t_2$.

Определим симметрические односторонние локальные диффеоморфизмы — левые h_{-+} и правые h_{+-}:

$$h_{-+}\colon O_-(t_0) \to O_+(t_0), \quad \lim_{t_1 \to t_0 - 0} h_{-+}(t_1) = t_0,$$

$$h_{+-}\colon O_+(t_0) \to O_-(t_0), \quad \lim_{t_2 \to t_0 + 0} h_{+-}(t_2) = t_0.$$

Симметрический левый локальный диффеоморфизм $h_{-+} = h_{-+}(t_1)$ переводит левую полуокрестность точки $t = t_0$ в ее правую полуокрестность. Соответственно симметрический правый локальный диффеоморфизм $h_{+-} = h_{+-}(t_2)$ переводит правую полуокрестность точки $t = t_0$ в ее левую полуокрестность. Простейшими представителями каждого из этих двух семейств являются линейные диффеоморфизмы вида

$$h_{-+}(t_1) = k_3(t_1 - t_0) + t_0, \quad k_3 = \text{const} < 0,$$

$$h_{+-}(t_2) = k_4(t_2 - t_0) + t_0, \quad k_2 = \text{const} < 0.$$

Здесь $t_1 < t_0 < t_2$ и $(t_1 - t_0) < 0$, $(t_2 - t_0) > 0$. Диффеоморфизмы вида $h_{-+}(t_1) = -(t_1 - t_0) + t_0$ и $h_{+-}(t_2) = -(t_2 - t_0) + t_0$ будем называть *тривиальными диффеоморфизмами*.

Диаграммы диффеоморфизмов всех четырех типов представлены на рис. 2 и 3.

Тогда для обратных локальных диффеоморфизмов выполняются аналогичные свойства

$$h_-^{-1}\colon O_-(t_0) \to O_-(t_0), \quad \lim_{t_2 \to t_0 - 0} h_-^{-1}(t_2) = t_0,$$

$$h_+^{-1}\colon O_+(t_0) \to O_+(t_0), \quad \lim_{t_1 \to t_0 + 0} h_+^{-1}(t_1) = t_0,$$

$$h_{-+}^{-1}\colon O_+(t_0) \to O_-(t_0), \quad \lim_{t_2 \to t_0 + 0} h_{-+}^{-1}(t_2) = t_0,$$

$$h_{+-}^{-1}\colon O_-(t_0) \to O_+(t_0), \quad \lim_{t_1 \to t_0 - 0} h_{+-}^{-1}(t_1) = t_0.$$

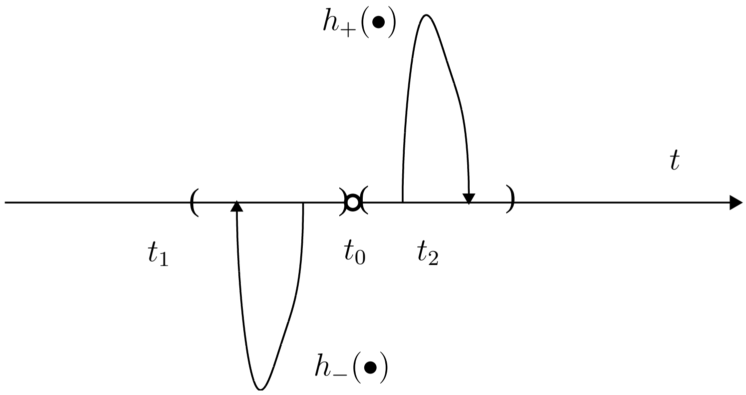


Рис. 2. Диаграмма левых и правых локальных диффеоморфизмов.

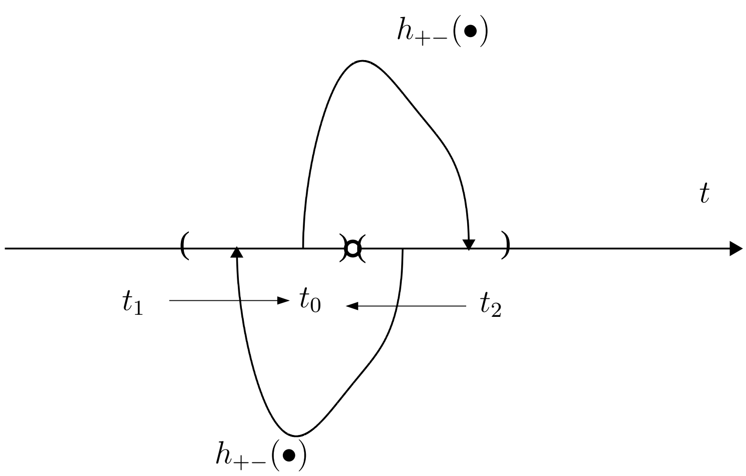


Рис. 3. Диаграмма симметрических односторонних локальных диффеоморфизмов.

Диффеоморфизмы имеют производные первого порядка, которые строго отделены от нуля, непрерывны в области рассмотрения и допускают доопределение по полунепрерывности в предельной точке $t = t_0$. А именно

$$\frac{dh_-(t_1)}{dt_1} > 0, \quad t_1 \in O_-(t_0), \quad c_- = \lim_{t_1 \to t_0 - 0} \frac{dh_-(t_1)}{dt_1} \geqslant 0, \quad \frac{dh_-(t_0)}{dt_1} \triangleq c_-,$$

$$\frac{dh_+(t_2)}{dt_2} > 0, \quad t_2 \in O_+(t_0), \quad c_+ = \lim_{t_2 \to t_0 + 0} \frac{dh_-(t_2)}{dt_2} \geqslant 0, \quad \frac{dh_-(t_0)}{dt_2} \triangleq c_+,$$

$$\frac{dh_{-+}(t_1)}{dt_1} > 0, \quad t_1 \in O_-(t_0), \quad c_{-+} = \lim_{t_1 \to t_0 - 0} \frac{dh_{-+}(t_1)}{dt_1} \leqslant 0, \quad \frac{dh_{-+}(t_0)}{dt_1} \triangleq c_{-+},$$

$$\frac{dh_{+-}(t_2)}{dt_2} > 0, \quad t_2 \in O_+(t_0), \quad c_{+-} = \lim_{t_2 \to t_0 + 0} \frac{dh_{+-}(t_2)}{dt_2} \leqslant 0, \quad \frac{dh_{+-}(t_0)}{dt_2} \triangleq c_{+-}.$$

Здесь не исключаются несобственные значения предельных величин, т. е. возможно, что $c_- = +\infty$, $c_+ = +\infty$, $c_{-+} = -\infty$, $c_{+-} = -\infty$. Собственные и несобственные значения c_-, c_+, c_{-+}, c_{+-}, играющие в вычислительных операциях существенную роль, будем называть *маркерами*. Поскольку маркеры являются односторонними пределами производной диффеоморфизма, будем различать левый маркер $\mathrm{Marker}_- \, h$ (предел слева производных) и правый маркер $\mathrm{Marker}_+ \, h$ (предел справа производных) функции h. Тогда для локальных диффеоморфизмов h_-, h_+, h_{-+}, h_{+-} маркеры имеют вид $\mathrm{Marker}_- \, h_- = c_-$, $\mathrm{Marker}_+ \, h_+ = c_+$, $\mathrm{Marker}_- \, h_{-+} = c_{-+}$, $\mathrm{Marker}_+ \, h_{+-} = c_{+-}$.

Для обратных диффеоморфизмов выполняются соответствующие соотношения:

$$\frac{dh_-^{-1}(t_2)}{dt_2} > 0, \quad t_2 \in O_-(t_0), \quad \frac{dh_-^{-1}(t_0)}{dt_2} \triangleq \lim_{t_2 \to t_0 - 0} \frac{dh_-^{-1}(t_2)}{dt_2} = \begin{cases} 1/c_-, & \text{если } c_- > 0, \\ 0, & \text{если } c_- = +\infty, \end{cases}$$

$$\frac{dh_+^{-1}(t_1)}{dt_1} > 0, \quad t_1 \in O_+(t_0), \quad \frac{dh_+^{-1}(t_0)}{dt_1} \triangleq \lim_{t_1 \to t_0 + 0} \frac{dh_+^{-1}(t_1)}{dt_1} = \begin{cases} 1/c_+, & \text{если } c_+ > 0, \\ 0, & \text{если } c_+ = +\infty, \end{cases}$$

$$\frac{dh_{-+}^{-1}(t_2)}{dt_2} < 0, \quad t_2 \in O_+(t_0), \quad \frac{dh_{-+}^{-1}(t_0)}{dt_2} \triangleq \lim_{t_2 \to t_0 + 0} \frac{dh_{-+}^{-1}(t_2)}{dt_2} = \begin{cases} 1/c_{-+}, & \text{если } c_{-+} < 0, \\ 0, & \text{если } c_{-+} = -\infty, \end{cases}$$

$$\frac{dh_{+-}^{-1}(t_1)}{dt_1} < 0, \quad t_1 \in O_-(t_0), \quad \frac{dh_{+-}^{-1}(t_0)}{dt_1} \triangleq \lim_{t_1 \to t_0 - 0} \frac{dh_{+-}^{-1}(t_1)}{dt_1} = \begin{cases} 1/c_{+-}, & \text{если } c_{+-} < 0, \\ 0, & \text{если } c_{+-} = +\infty. \end{cases}$$

Таким образом, для обратных диффеоморфизмов $h_-^{-1}, h_+^{-1}, h_{-+}^{-1}, h_{+-}^{-1}$ $\mathrm{Marker}_- \, h_-^{-1} = c_-^{-1}$, $\mathrm{Marker}_+ \, h_+^{-1} = c_+^{-1}$, $\mathrm{Marker}_- \, h_{-+}^{-1} = c_{-+}^{-1}$, $\mathrm{Marker}_+ \, h_{+-}^{-1} = c_{+-}^{-1}$. При этом маркер обратного диффеоморфизма равен нулю, если маркер исходного диффеоморфизма принимает несобственное значение.

Совокупность левых локальных диффеоморфизмов и совокупность правых локальных диффеоморфизмов, если их пополнить тождественными диффеоморфизмами, являются группами Ли [22] относительно суперпозиции. Обе совокупности симметрических локальных диффеоморфизмов не образуют групп Ли относительно суперпозиции, поскольку не замкнуты относительно этой операции. Таким образом симметрические локальные диффеоморфизмы являются более “бедными” с точки зрения алгебры. Однако именно с их помощью удается вскрывать негладкие особенности решений задач о быстродействии. Пример эффективности применения таких конструкций приведен в третьем разделе.

Геометрия и взаимосвязь между локальными диффеоморфизмами и обратными диффеоморфизмами раскроется яснее, если мы уйдем с прямой, удвоим пространство переменных и перейдем в плоскость t_1, t_2 (см. рис. 4–6). Заметим, что взаиморасположение графиков симметрических правых локальных диффеоморфизмов h_{-+} и h_{-+}^{-1} такое же, как в случае симметрических левых локальных диффеоморфизмов h_{+-} и h_{+-}^{-1} (рис. 6).

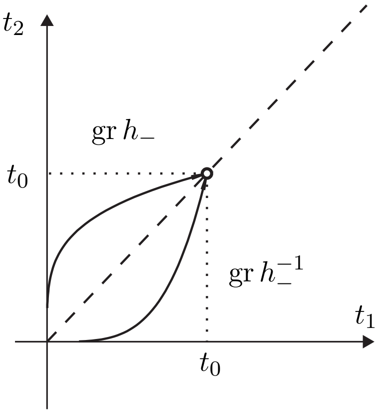


Рис. 4. Склейка графиков h_- и h_-^{-1}.

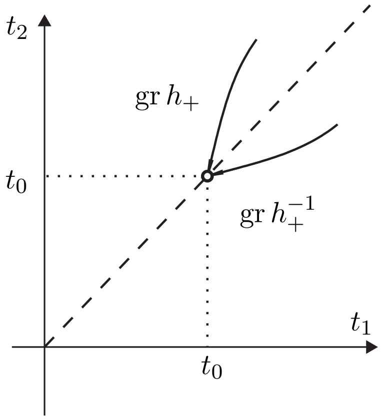


Рис. 5. Склейка графиков h_- и h_-^{-1}.

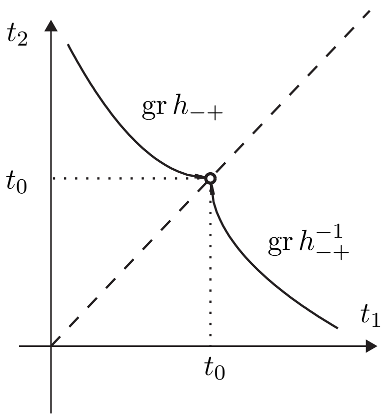


Рис. 6. Склейка графиков h_{-+} и h_{-+}^{-1}.

Пусть скалярная функция $y = f(t)$ определена в окрестности точки $t = t_0$. Введем определения производных в силу диффеоморфизмов.

Определение 1. Левой производной в силу диффеоморфизма $D_{h_-}f(t_0)$ назовем односторонний левый частичный предел дифференциальных отношений $\dfrac{f(h_-(t_1)) - f(t_1)}{h_-(t_1) - t_1}$, построенных на трех точках $t = t_1, t = t_0, t = t_2$, $t_0 > t_1, t_0 > t_2, t_1 \neq t_2$, которые связаны между собой в силу левого локального диффеоморфизма $h_- = h_-(t_1)$:

$$D_{h_-}f(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0 - 0} \frac{f(h_-(t_1)) - f(t_1)}{h_-(t_1) - t_1}.$$

Определение 2. Правой производной в силу диффеоморфизма $D_{h_+}f(t_0)$ назовем односторонний правый частичный предел дифференциальных отношений $\dfrac{f(h_+(t_2)) - f(t_2)}{h_+(t_2) - t_2}$, построенных на трех точках $t = t_1, t = t_0, t = t_2$, $t_0 > t_1, t_0 > t_2, t_1 \neq t_2$, которые связаны между собой в силу левого локального диффеоморфизма $h_+ = h_+(t_2)$:

$$D_{h_+}f(t_0) = \lim_{t_2 \to t_0 + 0} \frac{f(h_+(t_2)) - f(t_2)}{h_+(t_2) - t_2}.$$

Определение 3. Симметрической левой производной в силу диффеоморфизма $D_{h_{-+}}f(t_0)$ назовем односторонний левый частичный предел дифференциальных отношений $\dfrac{f(h_{-+}(t_1)) - f(t_1)}{h_{-+}(t_1) - t_1}$, построенных на трех точках $t = t_1, t = t_0, t = t_2$, $t_1 < t_0 < t_2$, которые связаны между собой в силу симметрического левого локального диффеоморфизма $h_{-+} = h_{-+}(t_1)$:

$$D_{h_{-+}} f(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0 - 0} \frac{f(h_{-+}(t_1)) - f(t_1)}{h_{-+}(t_1) - t_1}.$$

О п р е д е л е н и е 4. Симметрической правой производной в силу диффеоморфизма $D_{h_{+-}} f(t_0)$, назовем односторонний правый частичный предел дифференциальных отношений $\dfrac{f(h_{+-}(t_2)) - f(t_2)}{h_{+-}(t_2) - t_2}$, построенных на трех точках $t = t_1, t = t_0, t = t_2$, $t_1 < t_0 < t_2$, которые связаны между собой в силу симметрического правого локального диффеоморфизма $h_{+-} = h_{+-}(t_1)$:

$$D_{h_{+-}} f(t_0) = \lim_{t_2 \to t_0 + 0} \frac{f(h_{+-}(t_2)) - f(t_2)}{h_{+-}(t_2) - t_2}.$$

Введенные в рассмотрение локальные диффеоморфизмы можно рассматривать как локальные перепараметризации функций.

Обратим внимание на одну из особенностей приведенных определений обобщений классической производной. Знаменатель каждого из дифференциальных отношений не обязательно является линейной функцией относительно аргумента. В дифференциальное отношение закладывается сравнение приращения функции вдоль диффеоморфизма к приращению этого диффеоморфизма.

2. Формулы для производных в силу диффеоморфизмов

Для некоторых классов функций установим формулы дифференцирования согласно введенным определениям. Вывод формул опирается на следующие разложения трехточечных дифференциальных отношений в комбинации двухточечных дифференциальных отношений:

$$\frac{f(h_-(t_1)) - f(t_1)}{h_-(t_1) - t_1} = \frac{h_-(t_1) - t_0}{h_-(t_1) - t_1} \frac{f(h_-(t_1)) - f(t_0)}{h_-(t_1) - t_0} + \frac{t_0 - t_1}{h_-(t_1) - t_1} \frac{f(t_0) - f(t_1)}{t_0 - t_1}, \tag{2.1}$$

$$\frac{f(h_+(t_2)) - f(t_2)}{h_+(t_2) - t_2} = \frac{h_+(t_2) - t_0}{h_+(t_2) - t_2} \frac{f(h_+(t_2)) - f(t_0)}{h_+(t_2) - t_0} + \frac{t_0 - t_2}{h_+(t_2) - t_2} \frac{f(t_0) - f(t_2)}{t_0 - t_2}, \tag{2.2}$$

$$\frac{f(h_{-+}(t_1)) - f(t_1)}{h_{-+}(t_1) - t_1} = \frac{h_{-+}(t_1) - t_0}{h_{-+}(t_1) - t_1} \frac{f(h_{-+}(t_1)) - f(t_0)}{h_{-+}(t_1) - t_0} + \frac{t_0 - t_1}{h_{-+}(t_1) - t_1} \frac{f(t_0) - f(t_1)}{t_0 - t_1}, \tag{2.3}$$

$$\frac{f(h_{+-}(t_2)) - f(t_2)}{h_{+-}(t_2) - t_2} = \frac{h_{+-}(t_2) - t_0}{h_{+-}(t_2) - t_2} \frac{f(h_{+-}(t_2)) - f(t_0)}{h_{+-}(t_2) - t_0} + \frac{t_0 - t_2}{h_{+-}(t_2) - t_2} \frac{f(t_0) - f(t_2)}{t_0 - t_2}. \tag{2.4}$$

Во всех равенствах (2.1)–(2.4) сумма весовых коэффициентов равна единице, однако не обязательно является выпуклой. В пределе знак весовых коэффициентов определяется маркером соответствующего диффеоморфизма.

Исключив из рассмотрения тождественные диффеоморфизмы $h_-(t_1) = t_1$, $h_+(t_2) = t_2$ (в семейства $\{h_{-+}\}$ и $\{h_{+-}\}$ тождественные диффеоморфизмы не входят по определению), имеем

$$\lim_{t_1 \to t_0 - 0} \frac{h_-(t_1) - t_0}{h_-(t_1) - t_1} = \lim_{t_1 \to t_0 - 0} \frac{(h_-(t_1) - t_0)'}{(h_-(t_1) - t_1)'} = \frac{c_-}{c_- - 1}, \tag{2.5}$$

$$\lim_{t_1 \to t_0 - 0} \frac{t_0 - t_1}{h_-(t_1) - t_1} = \lim_{t_1 \to t_0 - 0} \frac{(t_0 - t_1)'}{(h_-(t_1) - t_1)'} = \frac{-1}{c_- - 1}, \tag{2.6}$$

$$\lim_{t_2 \to t_0 + 0} \frac{h_+(t_2) - t_0}{h_+(t_2) - t_2} = \lim_{t_2 \to t_0 + 0} \frac{(h_+(t_2) - t_0)'}{(h_+(t_2) - t_2)'} = \frac{c_+}{c_+ - 1}, \tag{2.7}$$

$$\lim_{t_2 \to t_0 + 0} \frac{t_0 - t_2}{h_+(t_2) - t_2} = \lim_{t_2 \to t_0 + 0} \frac{(t_0 - t_2)'}{(h_+(t_2) - t_2)'} = \frac{-1}{c_+ - 1}, \tag{2.8}$$

$$\lim_{t_1\to t_0-0}\frac{h_{-+}(t_1)-t_0}{h_{-+}(t_1)-t_1}=\lim_{t_1\to t_0-0}\frac{(h_{-+}(t_1)-t_0)'}{(h_{-+}(t_1)-t_1)'}=\frac{c_{-+}}{c_{-+}-1}\geqslant 0, \tag{2.9}$$

$$\lim_{t_1\to t_0-0}\frac{t_0-t_1}{h_{-+}(t_1)-t_1}=\lim_{t_1\to t_0-0}\frac{(t_0-t_1)'}{(h_{-+}(t_1)-t_1)'}=\frac{-1}{c_{-+}-1}\geqslant 0, \tag{2.10}$$

$$\lim_{t_2\to t_0+0}\frac{h_{+-}(t_2)-t_0}{h_{+-}+(t_2)-t_2}=\lim_{t_2\to t_0+0}\frac{(h_{+-}(t_2)-t_0)'}{(h_{+}(t_2)-t_2)'}=\frac{c_{+-}}{c_{+-}-1}\geqslant 0, \tag{2.11}$$

$$\lim_{t_2\to t_0+0}\frac{t_0-t_2}{h_{+-}(t_2)-t_2}=\lim_{t_2\to t_0+0}\frac{(t_0-t_2)'}{(h_{+-}(t_2)-t_2)'}=\frac{-1}{c_{+-}-1}\geqslant 0. \tag{2.12}$$

В зависимости от локальных свойств скалярных функций $y=f(t)$ выделим для рассмотрения семейства функций:

• $F(t_0)$ — совокупность функций $y=f(t)$, имеющих в точке $t=t_0$ классическую производную $f'(t_0)$;

• $\overset{\cup}{F}(t_0)$ — совокупность функций $y=f(t)$, выпуклых в окрестности точки $t=t_0$;

• $\overset{\cap}{F}(t_0)$ — совокупность функций $y=f(t)$, вогнутых в окрестности точки $t=t_0$;

• $\widetilde{F}(t_0)$ — совокупность функций $y=f(t)$, меняющих при переходе через точку $t=t_0$ характер выпуклости (с выпуклого на вогнутый или наоборот).

Далее напомним, что односторонние пределы

$$f'_-(t_0)\triangleq\lim_{t\to t_0-0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0},\quad f'_+(t_0)\triangleq\lim_{t\to t_0+0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \tag{2.13}$$

называются соответственно *левой производной и правой производной функции* $y=f(t)$ в точке $t=t_0$.

Теорема (О структуре производных в силу диффеоморфизмов на разных классах функций). *Функции $y=f(t)$ из классов $F(t_0)$, $\overset{\cup}{F}(t_0)$, $\overset{\cap}{F}(t_0)$, $\widetilde{F}(t_0)$ имеют в точке $t=t_0$ производные в силу диффеоморфизмов h_-,h_+,h_{-+},h_{+-}. При этом*

• *если $f\in F(t_0)$, то*

$$D_{h_-}f(t_0)=D_{h_+}f(t_0)=D_{h_{-+}}f(t_0)=D_{h_{+-}}f(t_0)=f'(t_0); \tag{2.14}$$

• *если $f\in\overset{\cup}{F}(t_0)$, либо $f\in\overset{\cap}{F}(t_0)$, либо $f\in\widetilde{F}$, то*

$$D_{h_-}f(t_0)=f'_-(t_0), \tag{2.15}$$

$$D_{h_+}f(t_0)=f'_+(t_0), \tag{2.16}$$

$$D_{h_{-+}}f(t_0)=\frac{c_{-+}}{c_{-+}-1}f'_+(t_0)+\frac{-1}{c_{-+}-1}f'_-(t_0), \tag{2.17}$$

$$D_{h_{+-}}f(t_0)=\frac{c_{+-}}{c_{+-}-1}f'_-(t_0)+\frac{-1}{c_{+-}-1}f'_+(t_0). \tag{2.18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим класс $F(t_0)$ дифференцируемых в классическом смысле функции $y=f(t)$. Все частичные пределы дифференциальных отношений совпадают с классической производной. Поскольку

$$\lim_{t_1\to t_0-0}=\frac{f(h_-(t_1))-f(t_0)}{h_-(t_1)-t_0}=\lim_{t_1\to t_0-0}\frac{f(t_0)-f(t_1)}{t_0-t_1}=f'(t_0),$$

то в силу (2.1), (2.5), (2.6)

$$D_{h_-}f(t_0)=\lim_{t_1\to t_0-0}\frac{f(h_-(t_1))-f(t_1)}{h_-(t_1)-t_1}=\frac{c_-}{c_--1}f'(t_0)+\frac{-1}{c_--1}f'(t_0)=f'(t_0).$$

Аналогично поскольку

$$\lim_{t_2\to t_0+0}\frac{f(h_+(t_2))-f(t_0)}{h_+(t_2)-t_0}=\lim_{t_2\to t_0+0}\frac{f(t_0)-f(t_2)}{t_0-t_2}=f'(t_0),$$

то в силу (2.2), (2.7), (2.8)

$$D_{h_+}f(t_0)=\lim_{t_2\to t_0+0}\frac{f(h_+(t_2))-f(t_2)}{h_+(t_2)-t_2}=\frac{c_+}{c_+-1}f'(t_0)+\frac{-1}{c_+-1}f'(t_0)=f'(t_0).$$

Так как

$$\lim_{t_1\to t_0-0}=\frac{f(h_{-+}(t_1))-f(t_0)}{h_{-+}(t_1)-t_0}=\lim_{t_1\to t_0-0}\frac{f(t_0)-f(t_1)}{t_0-t_1}=f'(t_1),$$

то в силу (2.3), (2.9), (2.10)

$$D_{h_{-+}}f(t_0)=\lim_{t_1\to t_0-0}\frac{f(h_{-+}(t_1))-f(t_1)}{h_{-+}(t_1)-t_1}=\frac{c_{-+}}{c_{-+}-1}f'(t_0)+\frac{-1}{c_{-+}-1}f'(t_0)=f'(t_0).$$

Наконец,

$$\lim_{t_2\to t_0+0}\frac{f(h_{+-}(t_2))-f(t_0)}{h_{+-}(t_0)-t_2}=\lim_{t_2\to t_0+0}\frac{f(t_0)-f(t_2)}{t_0-t_2}=f'(t_0),$$

поэтому с учетом (2.4), (2.11), (2.12)

$$D_{h_{+-}}f(t_0)=\lim_{t_2\to t_0+0}\frac{f(h_{+-}(t_2))-f(t_2)}{h_{+-}(t_2)-t_2}=\frac{c_{+-}}{c_{+-}-1}f'(t_0)+\frac{-1}{c_{+-}-1}f'(t_0)=f'(t_0).$$

Таким образом, производные в силу диффеоморфизмов h_-, h_+, h_{-+}, h_{+-} совпадают между собой и равны классической производной. Равенство (2.14) доказано.

Рассмотрим локально выпуклые и локально вогнутые функции, т. е. функции из классов $\overset{\cup}{F}(t_0)$ и $\overset{\cap}{F}(t_0)$. У них, как известно [7], существуют односторонние производные (2.13). Все односторонние частичные пределы дифференциальных отношений совпадают с соответствующими односторонними производными. В нашем случае

$$\lim_{t_1\to t_0-0}\frac{f(h_-(t_1))-f(t_0)}{h_-(t_1)-t_0}=\lim_{t_1\to t_0-0}\frac{f(t_0)-f(t_1)}{t_0-t_1}=f'_-(t_0)$$

и в силу (2.1), (2.5), (2.6)

$$D_{h_-}f(t_0)=\lim_{t_1\to t_0-0}\frac{f(h_-(t_1))-f(t_1)}{h_-(t_1)-t_1}=\frac{c_-}{c_--1}f'_-(t_0)+\frac{-1}{c_--1}f'_-(t_0)=f'_-(t_0).$$

Формула (2.15) доказана.

Поскольку

$$\lim_{t_2\to t_0+0}\frac{f(h_+(t_2))-f(t_0)}{h_+(t_2)-t_0}=\lim_{t_2\to t_0+0}\frac{f(t_0)-f(t_2)}{t_0-t_2}=f'_+(t_0),$$

то в силу (2.2), (2.7), (2.8)

$$D_{h_+}f(t_0)=\lim_{t_2\to t_0+0}\frac{f(h_+(t_2))-f(t_0)}{h_+(t_2)-t_0}=\frac{c_+}{c_+-1}f'_+(t_0)+\frac{-1}{c_+-1}f'_+(t_0)=f'_+(t_0).$$

Формула (2.16) обоснована.

Поскольку

$$\lim_{t_1\to t_0-0}\frac{f(h_{-+}(t_1))-f(t_1)}{h_{-+}(t_1)-t_1}=\lim_{t_2\to t_0+0}\frac{f(t_0)-f(t_2)}{t_0-t_2}=f'_+(t_0)$$

и

$$\lim_{t_1\to t_0-0}\frac{f(t_0)-f(t_1)}{t_0-t_1}=f'_-(t_0),$$

то в силу (2.3), (2.9), (2.10)

$$D_{h_{-+}}f(t_0)=\lim_{t_1\to t_0-0}\frac{f(h_{-+}(t_1))-f(t_1)}{h_{-+}(t_1)-t_1}=\frac{c_{-+}}{c_{-+}-1}f'_+(t_0)+\frac{-1}{c_{-+}-1}f'_-(t_0).$$

причем весовые коэффициенты образуют выпуклую комбинацию

$$\frac{c_{-+}}{c_{-+}-1}+\frac{-1}{c_{-+}-1}=1,\frac{c_{-+}}{c_{-+}-1}\geqslant 0,\frac{-1}{c_{-+}-1}\geqslant 0.$$

Тем самым доказана формула (2.17).

Поскольку

$$\lim_{t_2\to t_0+0}\frac{f(h_{+-}(t_2))-f(t_0)}{h_{+-}(t_2)-t_0}=\lim_{t_1\to t_0-0}\frac{f(t_0)-f(t_1)}{t_0-t_1}=f'_-(t_0)$$

и

$$\lim_{t_2\to t_0+0}\frac{f(t_0)-f(t_2)}{t_0-t_2}=f'_+(t_0),$$

то в силу (2.4), (2.11), (2.12)

$$D_{h_{+-}}f(t_0)=\lim_{t_2\to t_0+0}\frac{f(h_{+-}(t_2))-f(t_2)}{h_{-+}(t_2)-t_2}=\frac{c_{+-}}{c_{+-}-1}f'_-(t_0)+\frac{-1}{c_{+-}-1}f'_+(t_0),$$

причем и здесь весовые коэффициенты образуют выпуклую комбинацию

$$\frac{c_{+-}}{c_{+-}-1}+\frac{-1}{c_{+-}-1}=1,\frac{c_{+-}}{c_{+-}-1}\geqslant 0,\frac{-1}{c_{+-}-1}\geqslant 0.$$

Формула (2.18) обоснована.

Таким образом, если функция локально выпуклая или локально вогнутая, то односторонние производные в силу диффеоморфизмов равны соответствующим односторонним производным, а односторонние симметрические производные в силу диффеоморфизмов равны выпуклым комбинациям односторонних производных. Весовые коэффициенты определяются соответствующими маркерами диффеоморфизмов.

Важный класс отображений составляют функции $y=f(t)$, меняющие характер выпуклости в точке $t=t_0$ (с выпуклого на вогнутый или наоборот). Речь идет о классе $\widetilde{F}(t_0)$. Здесь в каждой из полуокрестностей $t=t_0$ функции регулярны с точки зрения характера выпуклости, следовательно, у них существуют односторонние производные. Поэтому функции из $\widetilde{F}(t_0)$ имеют производные в силу диффеоморфизмов h_-,h_+,h_{-+},h_{+-}, которые вычисляются по тем же формулам (2.15)–(2.18), что и для локально выпуклых и локально вогнутых функций. Теорема доказана. □

В качестве следствия теоремы стоит заметить, что симметрические односторонние производные для функций классов $F(t_0)$, $\overset{\cup}{F}(t_0)$, $\overset{\cap}{F}(t_0)$, $\widetilde{F}(t_0)$ совпадают, когда маркеры симметрических односторонних диффеоморфизмов равны, причем $\mathrm{Marker}_-\,h_{-+}^{-1}=\mathrm{Marker}_+\,h_{+-}^{-1}=-1$. В этом случае каждая из односторонних симметрических производных образует выпуклую равновесную комбинацию односторонних производных:

$$D_{h_{-+}}f(t_0)=D_{h_{+-}}f(t_0)=\frac{1}{2}f'_+(t_0)+\frac{1}{2}f'_-(t_0).$$

В заключение этого раздела выделим для изучения еще один класс отображений, который включает в себя некоторые семейства недифференцируемых функций, в том числе функций, не удовлетворяющих локальному условию Липшица. Ниже покажем, что у таких функций в частных случаях может существовать производная в силу диффеоморфизма.

Обозначим $\widehat{F}(t_0)$ совокупность непрерывных в точке $t = t_0$ и четных относительно этой точки функций, т. е. функций $y = f(t)$, для которых выполняется равенство

$$f(t_0 - \delta) = f(t_0 + \delta)$$

при всех $\delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, $(t_0 - \delta) \in O(t_0, \delta_1, \delta_2)$, $(t_0 + \delta) \in O(t_0, \delta_1, \delta_2)$, где $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$, а также предельное равенство

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = f(t_0).$$

Ограничимся рассмотрением только односторонних симметрических производных и тривиальных диффеоморфизмов $h_{-+}(t_1) = -(t_1 - t_0) + t_0$, $h_{+-}(t_1) = -(t_2 - t_0) + t_0$. Примем $\Delta_1 = t_0 - t_1 > 0$. Тогда $h_{-+}(t_1) = t_0 + \Delta_1$, $t_1 = t_0 - \Delta_1$, и левая симметрическая производная

$$D_{h_{-+}} f(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0 - 0} \frac{f(h_{-+}(t_1)) - f(t_1)}{h_{-+}(t_1) - t_1} = \lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta_1) - f(t_0 - \Delta_1)}{2\Delta_1} = 0. \tag{2.19}$$

Примем $\Delta_2 = t_2 - t_0 > 0$. Тогда $h_{+-}(t_2) = t_0 - \Delta_2$, $t_2 = t_0 + \Delta_2$, и правая симметрическая производная

$$D_{h_{+-}} f(t_0) = \lim_{\Delta_2 \downarrow 0} \frac{f(t_0 - \Delta_2) - f(t_0 + \Delta_2)}{-2\Delta_2} = \lim_{\Delta_2 \downarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta_2) - f(t_0 - \Delta_2)}{2\Delta_2} = 0. \tag{2.20}$$

Равенства (2.19) и (2.20) можно рассматривать как формулы усреднения классических производных в выколотой окрестности четной функции.

Здесь отметим, что при тривиальном локальном диффеоморфизме односторонние симметрические производные совпадают с производной Шварца [23]. Еще одно наблюдение заключается в том, что в рассматриваемом случае симметрические производные могут оказаться равными нулю, даже если четная функция не является локально липшицевой функцией.

П р и м е р. Пусть $f(t) = \sqrt[3]{t^2}$, $t_0 = 0$. Здесь

$$D_{h_{-+}} f(0) = \lim_{t_1 \to t_0 - 0} \frac{f(h_{-+}(t_1)) - f(t_1)}{h_{-+}(t_1) - t_1} = \lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \frac{f(\Delta_1) - f(-\Delta_1)}{2\Delta_1} = \lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta_1^2} - \sqrt[3]{(-\Delta_1)^2)}}{2\Delta_1} = 0.$$

Аналогично показывается, что $D_{h_{+-}} f(0) = 0$. При этом результаты останутся такими же, если эту функцию “принудить” к разрыву в точке $t_0 = 0$, положив

$$f(t) = \begin{cases} \sqrt[3]{t^2}, & t_0 \neq 0, \\ c \neq 0, & t_0 = 0. \end{cases}$$

3. Приложения

В работах [13–19] изложены методы аналитического исследования краевой задачи (1.1), (1.2) для случая, когда граница Γ краевого множества M является графиком скалярной функции $y = f(x), x \in \mathbb{R}$. Свойства обобщенного решения задачи и его сингулярного множества анализируются (если использовать терминологию настоящей работы) с помощью симметрической левой производной в силу диффеоморфизма $x_2 = x_2(x_1)$, принадлежащей классу $\{h_{-+}\}$. Здесь учитывается природа сингулярности, выявленная в рамках конструкций теории дифференциальных игр. Используется как факт, что сингулярная кривая для задачи управления по быстродействию — это рассеивающая кривая. Из каждой точки сингулярной кривой выходят не менее двух оптимальных траекторий в виде отрезков (см. [2, с. 196]). Этим и объясняется привлечение для изучения структуры сингулярного множества симметрических производных, которые по своей природе настроены на “отлавливание” ситуаций, когда концы характеристик, исходящих из одной точки в обе стороны от сингулярной кривой сходятся с разных сторон к особой точке на границе краевого множества (см. рис. 1).

Одна из особенностей задачи состоит в том, что функция $x_2 = x_2(x_1)$ не назначается, она неизвестна и ищется среди локальных решений уравнения

$$G(x_1, x_2) = 0.$$

Здесь $G(x_1, x_2) = \rho^2\big((x_1, f(x_1)), (x_*, y_*)\big) - \rho^2\big((x_2, f(x_2)), (x_*, y_*)\big)$ — разность квадратов расстояний между точками $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ графика $\Gamma = \mathrm{gr}\, f(x)$ функции $y = f(x)$, $x_1 < x_2$ и точкой пересечения касательных, проведенных через эти точки. Касательные определяются системой уравнений

$$\begin{cases} y_* = f'(x_1)(x_* - x_1) + f(x_1), \\ y_* = f'(x_2)(x_* - x_2) + f(x_2). \end{cases} \tag{3.1}$$

При этом *псевдовершиной кривой* $\Gamma = \mathrm{gr}\, f$ называется точка

$$(x_0, f(x_0)) = \lim_{x_1 \to x_0 - 0} (\widehat{x}_*, \widehat{y}_*),$$

где $(\widehat{x}_*, \widehat{y}_*) = (\widehat{x}_*(x_1), y_*(\widehat{x}_1)) = \big(x_*(x_1, x_2(x_1)), y_*(x_1, x_2(x_1))\big)$ — однопараметрическое подмножество решений $(x_*, y_*) = (x_*(x_1,\ x_2),\ y_*(x_1, x_2))$ системы уравнений (3.1), порожденное локальным диффеоморфизмом $x_2 = x_2(x_1)$. Здесь с точки зрения геометрии точка (x_*, y_*) — центр окружности, пересекающей график функции в точках $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ под прямыми углами.

Ветвь $L(x_0, y_0)$ сингулярного множества L, где $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ — псевдовершина $\Gamma = \mathrm{gr}\, f(x)$, строится как множество точек (x, y) на плоскости, удовлетворяющих сопряженной к (3.1) системе уравнений

$$\begin{cases} -x + x_1 - f'(x_1)(y - f(x_1)) = 0, \\ -x + x_2(x_1) - f'(x_2(x_1))\big(y - f(x_2(x_1))\big) = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Крайняя точка $(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$ ветви $L(x_0, y_0)$ сингулярного множества находится по формуле

$$(\overline{x}_0, \overline{y}_0) = \lim_{x_1 \to x_0 - 0} (x, y),$$

Здесь (x, y) — решения системы (3.2).

В общем случае выделение в явном виде функции $x_2 = x_2(x_1)$ невозможно. Однако для решения задачи достаточно знать маркеры этого диффеоморфизма. При этом значение маркера, отвечающее псевдовершине $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$, зависит от дифференциальных свойств функции в точке $x = x_0$. Эти значения выявлены для различных по своим дифференциальным свойствам случаев границы $\Gamma = \mathrm{gr}\, f(x)$ краевого множества. Так, если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в точке $x = x_0$, $f''(x_0) \neq 0$, то (см. [15])

$$\mathrm{Marker\_}x_2 = -1.$$

Если функция $y = f(x)$ один раз дифференцируема в точке $x = x_0$, имеет в этой точке односторонние производные второго порядка — левую $f''_-(x_0)$ и правую $f''_+(x_0)$, причем $f''_-(x_0) \neq f''_+(x_0)$ и $f''_-(x_0) \neq 0$, то (см. [17])

$$\mathrm{Marker\_}x_2 = 0.$$

Если функция $y = f(x)$ непрерывна, но недифференцируема в точке $x = x_0$, имеет в этой точке односторонние производные первого порядка — левую $f'_-(x_0)$ и правую $f'_+(x_0)$, причем $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$, $f'_+(x_0) \neq \infty$ и $f'_-(x_0) \neq \infty$, то (см. [17])

$$\mathrm{Marker\_}x_2 = -\sqrt{\frac{1 + (f'_-(x_0))^2}{1 + (f'_+(x_0))^2}}.$$

Введенная в работе [17] псевдопроизводная

$$f'_{\wedge}(x_0) = \frac{f(x_2(x_1)) - f(x_1)}{x_2(x_1) - x_1},$$

где $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ — псевдовершина кривой $\Gamma = \operatorname{gr} f$, $x_2 = x_2(x_1)$ — непрерывный слева в точке $x = x_0$ локальный диффеоморфизм, принадлежащий классу $\{h_{-+}\}$, является примером симметрической левой производной в силу диффеоморфизма. Формула ее вычисления, охватывающая все три описанных выше случая дифференциальных свойств графика $\Gamma = \operatorname{gr} f(x)$, найдена (см. [17]):

$$f'_{\wedge}(x_0) = \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg} f'_{-}(x_0) + \operatorname{arctg} f'_{+}(x_0)}{2}.$$

В гладких случаях $f'_{\wedge}(x_0) = f'(x_0)$. Интерес представляет ситуация, когда в псевдовершине $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ происходит излом границы множества. Тогда

$$f'_{\wedge}(x_0) = -f'_{+}(x_0)\frac{c}{c-1} - f'_{-}(x_0)\frac{1}{c-1}.$$

Здесь $c = \mathrm{Marker}_{-}x_2 = -\sqrt{\dfrac{1 + (f'_{-}(x_0))^2}{1 + (f'_{+}(x_0))^2}}$.

Видим, что негладкие особенности решения задачи формализуются в терминах маркеров (односторонних производных). В теории обобщенных решений уравнений в частных производных первого порядка односторонние производные часто используются для описания свойств кусочно-гладких решений на линиях разрыва гладкости. В терминах односторонних производных выписываются, например, условия Ранкина — Гюгонио в задаче Коши для уравнения гамильтонова типа [24].

Все три возможные ситуации отражены на рис. 7 для случая, когда граница Γ краевого множества является графиком функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2}, & x \leqslant 0, \\ \cos(2x), & 0 < x \leqslant \pi/2, \\ -\sin(x), & \pi/2 < x \leqslant 2\pi, \\ 1 - e^{-2x+4\pi}, & x > 2\pi. \end{cases}$$

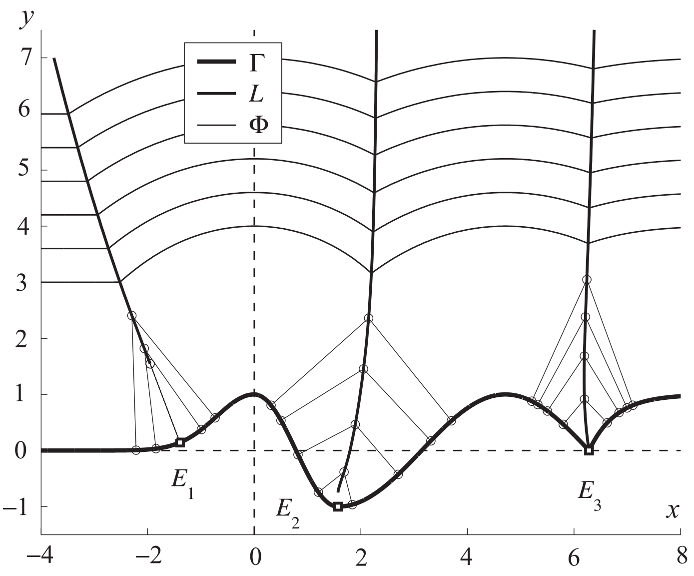


Рис. 7. Волновые фронты и геометрия сингулярного множества.

Псевдовершины E_1, E_2, E_3 краевого множества M отмечены маркерами в виде маленького квадрата. При этом E_1 — псевдовершина, в которой функция дважды дифференцируема, E_2 — псевдовершина, в которой функция один раз дифференцируема, а производная второго порядка терпит разрыв, E_3 — псевдовершина, в которой производная первого порядка разрывна. Каждой из псевдовершин отвечает ветвь сингулярного множества. При этом сингулярные кривые, отвечающие точкам E_1, E_2 гладкости кривой Γ, отстоят от краевого множества на ненулевом расстоянии. Крайняя точка сингулярной кривой, отвечающей точке E_3 излома границы краевого множества, совпадает с этой псевдовершиной. Во все трех случаях, если начальная точка характеристик стремится к крайней точке сингулярной кривой, концы каждой пары соответствующих характеристик сходятся к псевдовершине, причем сходятся с разных от нее сторон.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
2. **Айзекс. Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
3. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. **Кружков С.Н.** Обобщенные решения уравнений Гамильтона — Якоби типа эйконала, I // Мат. сб. 1975. Т. 98, вып. 3. С. 450–493.
5. **Субботин А.И.** Обобщение основного уравнения теории дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254, № 2. С. 293–297.
6. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации / Институт компьютерных технологий. М.; Ижевск, 2003. 336 с.
7. **Демьянов В.Ф., Васильев Л.В.** Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.
8. **Арнольд В.И.** Особенности каустик и волновых фронтов. М.: Фазис, 1996. 334 с.
9. **Брус Дж., Джиблин П.** Кривые и особенности. М.: Мир, 1988. 262 с.
10. **Успенский А.А., Ушаков В.Н., Фомин А.Н.** α-множества и их свойства / Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2004. Деп. в ВИНИТИ 02.04.04, № 543-В2004. 62 с.
11. **Успенский А.А.** Аналитические методы вычисления меры невыпуклости плоских множеств / Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2007. Деп. в ВИНИТИ 07.02.07, № 104-В2007. 21 с.
12. **Успенский А.А., Лебедев П.Д.** Исследование геометрии и асимптотики волновых фронтов в некоторых задачах управления // Тр. 9-й Междунар. Четаев. конф. 2007. Т. 5. С. 224–236.
13. **Успенский А.А., Лебедев П.Д.** Геометрия и асимптотика волновых фронтов // Изв. высш. учеб. заведений. 2008. № 3. С. 27–37.
14. **Ушаков В.Н., Успенский А.А., Лебедев П.Д.** Построение минимаксного решения уравнения типа эйконала // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 182–191.
15. **Успенский А.А., Лебедев П.Д.** Условия трансверсальности ветвей решения нелинейного уравнения в задаче быстродействия с круговой индикатрисой // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 82–100.
16. **Успенский А.А., Лебедев П.Д.** Построение функции оптимального результата в задаче быстродействия на основе множества симметрии // Автоматика и телемеханика. 2009. № 7. С. 50–57.
17. **Успенский А.А., Лебедев П.Д.** О множестве предельных значений локальных диффеоморфизмов при эволюции волновых фронтов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 171–186.
18. **Ушаков В.Н., Успенский А.А., Лебедев П.Д.** Геометрия сингулярных кривых для одного класса задач быстродействия // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 2013. Сер. 10, вып. 3. С. 157–167.
19. **Успенский А.А.** Формулы исчисления негладких особенностей функции оптимального результата в задаче быстродействия // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 276–290.
20. **Бюшгенс С.С.** Дифференциальная геометрия. М.: ГИТТЛ, 1940. 300 с.
21. **Слюсарев Г.Г.** Геометрическая оптика. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1946. 332 с.

22. **Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.** Современная геометрия. Методы и приложения. 2-е изд., перераб. М.: Наука, 1986. 760 с.
23. **Натансон И.П.** Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
24. **Субботина Н. Н., Колпакова Е. А.** О структуре локально липшицевых минимаксных решений уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана в терминах классических характеристик // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 202–218.

Успенский Александр Александрович
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН им. Н.Н. Красовского
e-mail: uspen@imm.uran.ru

Поступила 24.02.2015

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.977

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИМПУЛЬСНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХИ

В. И. Ухоботов, И. В. Изместьев

Рассмотрена задача импульсной встречи в заданный момент времени с началом координат. Имеется воздействие со стороны неконтролируемой помехи, о которой известно только множество ее значений. Динамика системы имеет декомпозиционный вид, характеризующийся тем, что часть фазовых переменных не подвержена воздействию со стороны импульсного управления.

Ключевые слова: импульсное управление, декомпозиционная система, стабильный мост.

V. I. Ukhobotov, I. V. Izmest'ev. On a problem of impulse control in the presence of a disturbance.

We consider the problem of impulse encounter with the origin at a given time under the action of an uncontrolled disturbance given only by a set of its values. The dynamics of the system has decomposition form, which is characterized by the nonsusceptibility of a part of the state variable to the action of the impulse control.

Keywords: impulse control, decomposition system, stable bridge.

Введение

К задачам импульсного управления сводятся задачи управления механическими системами переменного состава, когда в отдельные моменты времени может отделяться конечное количество реактивной массы [1]. Если на механическую систему воздействуют неконтролируемые силы, о которых известны только области их возможных значений, то задача управления может быть рассмотрена в рамках теории управления гарантированным результатом.

Анализ задач импульсного управления усложняется тем, что траектории управляемой системы могут быть разрывными.

В работе [2] предложен метод решения игровых задач преследования, основанный на принципе поглощения областей достижимости. Возможность применения этого метода к задачам импульсного управления рассматривалась, например, в работах [3;4]. В [4] приводится пример импульсной «мягкой» встречи двух управляемых материальных точек, когда первый игрок не может поддерживать требуемое включение областей достижимости. Обсуждается вопрос о возможности применения метода динамического программирования к задачам импульсной встречи. В работе [5] этот метод применяется при решении конкретных задач импульсной встречи.

В [6] доказана теорема об альтернативе для дифференциальных игр с импульсными управлениями в предположении, что целевые координаты вектора состояния меняются непрерывно.

В работах [7–11] предложены разные подходы к исследованию дифференциальных игр и задач управления при наличии помех в случае импульсных управлений.

Известно, что линейную управляемую систему с фиксированным моментом окончания с помощью линейной замены переменных [12] можно свести к виду, когда в правой части новых уравнений стоят только управления.

1. Постановка задачи

Рассмотрим управляемый процесс, уравнения движения которого имеют вид (см. [1])

$$dz = A(t)du + wf_1(t,\theta,v)dt, \quad \dot{\theta} = f_2(t,\theta,v), \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad \theta \in \mathbb{R}^q, \quad t \le p. \qquad (1.1)$$

Здесь $A(t)$ — непрерывная при $t \le p$ матрица размерности $n \times l$, p — заданное число.

На каждом отрезке $[t, \tau] \subset (-\infty, p]$ допустимым программным управлением является функция $u : [t; \tau] \to \mathbb{R}^l$ с ограниченным изменением

$$\int\limits_t^\tau \|du(r)\|_{(l)} = \sup \sum \|u(r_{i+1}) - u(r_i)\|_{(l)} .$$

Здесь и в дальнейшем посредством $\|\cdot\|_{(j)}$ будем обозначать норму в пространстве $\mathbb{R}^j$, $j = n, q, l$. Верхняя грань берется по всем разбиениям точками r_i отрезка $[t, \tau]$.

Программной реализацией помехи являются измеримые функции $v : [t, \tau] \to V$, $w : [t, \tau] \to [-1, 1]$, где V — компакт в $\mathbb{R}^g$.

Предположение 1.1. *Функции $f_1 : (-\infty, p] \times \mathbb{R}^q \times V \to \mathbb{R}^n$ и $f_2 : (-\infty, p] \times \mathbb{R}^q \times V \to \mathbb{R}^q$ являются непрерывными.*

Предположение 1.2. *Для любого компакта $D \subset [-\infty, p] \times \mathbb{R}^q$ найдется такая константа $L = L(D) > 0$, что*

$$\|f_2(t, \theta_1, v) - f_2(t, \theta_2, v)\|_{(q)} \le L\|\theta_1 - \theta_2\|_{(q)} \ \ \forall\, (t, \theta_i, v) \in D \times V, \quad i = 1, 2.$$

Предположение 1.3. *Для любого числа $t_0 < p$ существует такая константа $\gamma > 0$, что*

$$\|f_2(t, \theta, v)\|_{(q)} \le \gamma(1 + \|\theta\|_{(q)}) \ \ \forall\, (t, \theta, v) \in [t_0, p] \times \mathbb{R}^q \times V.$$

Из предположений 1.1–1.3 следует (см. [13; 14]), что для любого начального условия $t_0 < p$, $\theta(t_0) = \theta_0$ и для любой измеримой функции $v : [t_0, p] \to V$ уравнение $\dot{\theta} = f_2(t, \theta, v(t))$ имеет единственное решение, определенное при $t_0 \le t \le p$. Под решеним понимается абсолютно непрерывная функция $\theta : [t_0, p] \to \mathbb{R}^q$, почти всюду на $[t_0, p]$ удовлетворяющая уравнению. Это решение будем обозначать $\theta = \psi(t, t_0, \theta_0, v(\cdot))$. Для любой измеримой функции $v : [t_0, p] \to V$ и для любых $t_0 \le t \le \tau \le p$ выполнено равенство

$$\psi(\tau, t, \psi(t, t_0, \theta_0, v(\cdot)), v(\cdot)) = \psi(\tau, t_0, \theta_0, v(\cdot)).$$

Позицией является точка (t, z, μ, θ), где $t < p$, $z \in \mathbb{R}^n$, $\mu \ge 0$, $\theta \in \mathbb{R}^q$. Число μ характеризует имеющийся запас ресурсов, который можно использовать на формирование управления u.

О п р е д е л е н и е 1.1. Назовем *u-стратегией* правило, ставящее в соответствие каждой позиции (t, z, μ, θ) функцию

$$u : [t, p] \to \mathbb{R}^l, \quad \int\limits_t^p \|du(r)\|_{(l)} \le \mu. \tag{1.2}$$

Пусть задана начальная позиция $(t_0, z_0, \mu_0, \theta_0)$ и выбрана u-стратегия. Возьмем разбиение

$$\omega : t_0 < t_1 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_{k+1} = p \tag{1.3}$$

с диаметром $d(\omega) = \max\,(t_{i+1} - t_i)$, $i = \overline{1, k}$.

Зафиксируем u-стратегию (1.2) и для уравнения (1.1) построим ломаную с вершинами

$$z^{(\omega)}(t_{i+1}) = z^{(\omega)}(t_i) + \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} A(r) du(r) + \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} w_i(r) f_1\Big(r, \psi\big(r, t_i, \theta^{(\omega)}(t_i), v_i(\cdot)\big), v_i(r)\Big) dr, \tag{1.4}$$

$$\mu^{(\omega)}(t_{i+1}) = \mu^{(\omega)}(t_i) - \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|du(r)\|_{(l)}, \quad \theta^{(\omega)}(t_{i+1}) = \psi\big(t_{i+1}; t_i, \theta^{(\omega)}(t_i), v_i(\cdot)\big). \tag{1.5}$$

Здесь $i = \overline{0,k}$, $z^{(\omega)}(t_0) = z_0$, $\mu^{(\omega)}(t_0) = \mu_0$, $\theta^{(\omega)}(t_0) = \theta_0$. Первый интеграл в (1.4) понимается в смысле Римана — Стилтьеса. Функции $v_i : [t_i, t_{i+1}] \to V$ и $w_i : [t_i, t_{i+1}] \to [-1, 1]$ — любая измеримая реализация помехи.

Цель построения u-стратегии заключается в выводе вектора z в момент времени p в начало координат. Наличие импульсного управления может привести к мгновенному изменению фазовых координат. Это требует специального определения условия попадания точки $z(p)$ в начало координат [5; 9] . С этой целью введем в рассмотрение вектограмму управления

$$U(t) = \big\{z \in \mathbb{R}^n \colon z = A(t)u,\ \|u\|_{(l)} \le 1\big\}. \tag{1.6}$$

Множество (1.6) является выпуклым компактом, симметричным относительно начала координат. Из непрерывности матрицы $A(t)$ следует, что многозначная функция (1.6) непрерывно по Хаусдорфу зависит от t.

О п р е д е л е н и е 1.2. Из начальной позиции $(t_0, z_0, \mu_0, \theta_0)$ можно попасть в момент времени p в начало координат, если для любого числа $\epsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ и u-стратегия такие, что для любого разбиения ω (1.3) с диаметром $d(\omega) < \delta$ и для любой допустимой реализации помехи выполнено включение

$$z^{(\omega)}(p) \in \mu^{(\omega)}(p)U(p) + \epsilon S. \tag{1.7}$$

Здесь обозначено $S = \{z \in \mathbb{R}^n \colon \|z\|_{(n)} \le 1\}$.

З а м е ч а н и е. Из включения (1.7) и из формулы (1.6) следует, что

$$z^{(\omega)}(p) + \mu^{(\omega)}(p)A(p)u \in \epsilon S$$

при некотором $\|u\|_{(l)} \le 1$. Следовательно, выбрасывая мгновенно в момент времени p в направлении вектора u оставшееся $\mu^{(\omega)}(p)$ количество ресурсов, получим включение $z(p_+) \in \epsilon S$.

2. Область достижимости управления

Зафиксируем числа $t < \tau \le p$. Объединение множеств $U(r)$ (1.6) при $t \le r \le \tau$ является компактом, симметричным относительно начала координат. Поэтому выпуклая оболочка

$$U_t^\tau = co \bigcup_{t \le r \le \tau} U(r) \tag{2.1}$$

является выпуклым компактом, симметричным относительно начала координат. Положим $U_t^t = U(t)$. Тогда множества U_t^τ непрерывно по Хаусдорфу зависят от $t \le \tau \le p$.

Можно показать, что (см. [15])

$$U_t^\tau = \bigcup_{0 \le \lambda \le 1} \big(\lambda U_t^s + (1-\lambda) U_s^\tau\big), \quad t \le s \le \tau \le p, \tag{2.2}$$

а область достижимости импульсного управления определяется как

$$\left\{ z = \int\limits_t^\tau A(r)\, du(r) : \int\limits_t^\tau \|du(r)\|_{(l)} = \mu \right\} = \mu U_t^\tau, \quad t < \tau. \tag{2.3}$$

Скалярное произведение двух векторов ϕ и y в $\mathbb{R}^n$ будем обозначать $\langle \phi, y\rangle$. Если $Y \subset \mathbb{R}^n$ — компакт, то его опорную функцию будем обозначать $c(\phi; Y) = \max \langle \phi, y\rangle, y \in Y$.

Обозначим $m\,(t,\phi) = c\,(\phi; U_t^p)$. Тогда из формул (1.6) и (2.1) получим, что

$$m\,(t,\phi) = \max_{r,\,u} \langle \phi, A(r)u \rangle, \quad \|u\|_{(l)} \le 1, \quad t \le r \le p. \tag{2.4}$$

Отметим, что функция (2.4) является четной по переменной ϕ и убывает по t при $t \le p$.

Предположение 2.1. *При всех $t < p$ и $\phi \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство $m(t,\phi) > 0$.*

3. Задача уклонения

Зафиксируем число $t_0 < p$, векторы $\theta_0 \in \mathbb{R}^q$ и $\phi \in \mathbb{R}^n$. Обозначим

$$B(t_0,\theta_0,\phi) = \sup_{v(\cdot)\in V} \int_{t_0}^{p} \frac{\big|\langle \phi, f_1(r,\psi(r,t_0,\theta_0,v(\cdot)),v(r))\rangle\big|}{m(r,\phi)} dr. \tag{3.1}$$

Здесь верхняя грань вычисляется по всем измеримым функциям $v : [t_0, p] \to V$. Поскольку согласно предположению 2.1 возможно равенство $m(p,\phi) = 0$, то интеграл в (3.1) понимается в смысле несобственного.

Теорема 3.1. *Пусть начальное состояние $t_0 < p$, $z(t_0) \in \mathbb{R}^n$, $\mu(t_0) \ge 0$ и $\theta(t_0) \in \mathbb{R}^q$ таково, что для некоторого единичного вектора $\phi \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство*

$$|\langle \phi, z(t_0)\rangle| > m(t_0,\phi)\left(\mu(t_0) - B(t_0,\theta(t_0),\phi)\right). \tag{3.2}$$

Тогда существует такая допустимая реализация помехи, что из этого начального состояния невозможно в момент времени p попасть в начало координат при любой u-стратегии.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формул (3.1) и (3.2) следует, что существуют измеримая функция $v_0 : [t_0, p] \to V$ и число $\gamma > 0$, для которых выполнено неравенство

$$|\,\langle \phi, z(t_0)\rangle\,| > m_\gamma(t_0,\phi)\Bigg(\mu(t_0) - \int_{t_0}^{p} \frac{|\langle \phi, f(r)\rangle|}{m_\gamma(r,\phi)} dr + \gamma\Bigg). \tag{3.3}$$

Здесь

$$f(r) = f_1\big(r, \psi\big(r, t_0, \theta(t_0), v_0(\cdot)\big), v_0(r)\big), \quad m_\gamma(t,\phi) = m(t,\phi) + \gamma. \tag{3.4}$$

Для разбиения ω (1.3) обозначим

$$B_i(\omega) = \sum_{j=i}^{k} \frac{1}{m_\gamma\,(t_j,\phi)} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |\langle \phi, f(r)\rangle| dr, \quad i = \overline{0,k}. \tag{3.5}$$

Тогда (см., например, [15, с. 39–40])

$$\sup_{\omega} B_0(\omega) = \int_{t_0}^{p} \frac{|\langle \phi, f(r)\rangle|}{m_\gamma(r,\phi)} dr.$$

Отсюда и из неравенства (3.3) следует, что существует разбиение ω (1.3) отрезка $[t_0, p]$, при котором

$$|\,\langle \phi, z(t_0)\rangle\,| > m_\gamma(t_0,\phi)\big(\mu(t_0) - B_0(\omega) + \gamma\big). \tag{3.6}$$

В качестве реализации v помехи возьмем найденную функцию $v_0 : [t_0, p] \to V$. Покажем, что существует допустимая реализация w помехи такая, что для любой u-стратегии выполнено неравенство

$$\big|\big\langle \phi, z^{(\omega)}(t_i)\big\rangle\big| > m_\gamma(t_i,\phi)\big(\mu^{(\omega)}(t_i) - B_i(\omega) + \gamma\big), \quad i = \overline{0,k}. \tag{3.7}$$

Из (3.6) следует, что неравенство (3.7) при $i = 0$ выполнено. Пусть оно выполнено при $0 \le i < k$. Возьмем

$$w_i(r) = \operatorname{sign}\big(\langle \phi, f(r)\rangle \big\langle \phi, z^{(\omega)}(t_i)\big\rangle\big). \tag{3.8}$$

Из формулы (1.4), используя первое обозначение в (3.4), получим, что

$$\big|\big\langle \phi, z^{(\omega)}(t_{i+1})\big\rangle\big| \ge \left|\big\langle \phi, z^{(\omega)}(t_i)\big\rangle + \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} w_i(r)\langle \phi, f(r)\rangle dr\right| - \left|\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \langle \phi, A(r)du(r)\rangle\right|.$$

Подставим сюда функцию (3.8) и учтем неравенство

$$\left|\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \langle \phi, A(r)du(r)\rangle\right| \le m(t_i,\phi)\Big(\mu^{(\omega)}(t_i) - \mu^{(\omega)}(t_{i+1})\Big),$$

которое следует из теоремы о среднем интеграла Римана — Стилтьеса [16] и из первой формулы (1.5). Получим

$$\big|\big\langle \phi, z^{(\omega)}(t_{i+1})\big\rangle\big| \ge \big|\big\langle \phi, z^{(\omega)}(t_i)\big\rangle\big| + \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} |\langle \phi, f(r)\rangle| dr - m_\gamma(t_i,\phi)\Big(\mu^{(\omega)}(t_i) - \mu^{(\omega)}(t_{i+1})\Big). \tag{3.9}$$

Отсюда, используя второе обозначение в (3.4) и неравенство (3.7), будем иметь

$$\big|\big\langle \phi, z^{(\omega)}(t_{i+1})\big\rangle\big| > m_\gamma(t_i,\phi)\big(\mu^{(\omega)}(t_{i+1}) - B_{i+1}(\omega) + \gamma\big). \tag{3.10}$$

Из этого неравенства следует, что если выражение, стоящее в нем в правой части, меньше нуля, то неравенство (3.7) выполнено и при $i+1$. Если же это выражение больше нуля, то неравенство (3.7) при $i+1$ будет следовать из (3.10) и из монотонности функции $m_\gamma(t,\phi)$.

Положим в (3.7) $i = k$. Тогда, учитывая формулу (3.5), получим

$$\big|\big\langle \phi, z^{(\omega)}(t_k)\big\rangle\big| > m_\gamma(t_k,\phi)\mu^{(\omega)}(t_k) - \int\limits_{t_k}^{p} |\langle \phi, f(r)\rangle| dr + m_\gamma(t_k,\phi)\gamma.$$

Отсюда и из формул (3.4) и (3.9) следует, что

$$\big|\big\langle \phi, z^{(\omega)}(p)\big\rangle\big| > m_\gamma(t_k,\phi)\big(\mu^{(\omega)}(p) + \gamma\big) \ge m(t_k,\phi)\mu^{(\omega)}(p) + \gamma^2.$$

Это неравенство означает, что

$$z^{(\omega)}(p) \notin \mu^{(\omega)}(p)U(p) + \gamma^2 S. \tag{3.11}$$

Возьмем любое разбиение ω_* отрезка $[t_0, p]$, среди точек разбиения которого находятся все точки рассмотренного разбиения ω. Тогда из формулы (3.5) и из монотонности функции $m_\gamma(t,\phi)$ следует, что $B_0(\omega) \le B_0(\omega_*)$. Следовательно, неравенство (3.6) будет выполнено и для этого разбиения.

Таким образом, существуют число $\gamma > 0$ и последовательность разбиений (1.3) отрезка $[t_0, p]$ с диаметром разбиения, стремящимся к нулю, такие, что можно построить допустимую реализацию помехи, для которой будет выполнено условие (3.11) для любой u-стратегии.

Согласно определению 1.2 это означает, что из рассмотренного начального состояния нельзя попасть в момент времени p в начало координат. Теорема доказана. □

Обозначим при $t < p$ и $\theta \in \mathbb{R}^q$

$$b(t,\theta) = \sup_{\phi} B(t,\theta,\phi), \quad \|\phi\|_{(n)} = 1. \tag{3.12}$$

Следствие 3.1. *Пусть* $0 \le \mu_0 < b(t_0,\theta_0)$. *Тогда для любого* $z_0 \in \mathbb{R}^n$ *существует такая допустимая реализация помехи, что из начальной позиции* $(t_0, z_0, \mu_0, \theta_0)$ *невозможно попасть в начало координат при любой* u*-стратегии.*

Можно показать, что для любых $t < \tau \le p$, $\theta \in \mathbb{R}^q$ и для любой измеримой функции $v : [t,\tau] \to V$ выполнены условия

$$b(p,\theta) = 0, \; b(t,\theta) \ge b\big(\tau, \psi(\tau; t, \theta, v(\cdot))\big). \tag{3.13}$$

4. Построение u-стратегии, гарантирующей встречу

Построим u-стратегию, гарантирующую попадание в начало координат из начальной позиции при любой допустимой реализации помехи. Это построение проведем с помощью стабильного моста [12], который определяется следующим образом (см. [10; 11]):

$$\mu \ge b(t,\theta), \quad z \in (\mu - b(t,\theta))U_t^p + N(t,\theta). \tag{4.1}$$

Здесь $b(t,\theta) \ge 0$ — произвольная функция, удовлетворяющая условиям (3.13), а семейство множеств $N(t,\theta) \subset \mathbb{R}^n$ при $t \le p$ и $\theta \in \mathbb{R}^q$ должно удовлетворять условию стабильности [12] и равенству

$$N(p,\theta) = 0. \tag{4.2}$$

Условие стабильности означает следующее: если позиция (t, z, μ, θ) удовлетворяет соотношениям (4.1), то для момента времени $\tau \in (t,p]$ и для любой допустимой реализации помехи $v : [t,\tau] \to V$, $w : [t,\tau] \to [-1,1]$ найдется управление $u : [t,\tau] \to \mathbb{R}^n$ с расходом ресурсов $\int_t^\tau \|du(r)\|_{(l)} \le \mu$ такое, что реализовавшаяся позиция $(\tau, z(\tau), \mu(\tau), \theta(\tau))$ будет удовлетворять условию (4.1).

Можно показать, используя формулы (2.2) и (2.3), что условие стабильности будет выполнено, если

$$N(t,\theta) + \int_t^\tau w(r) f_1(r, \psi(r,t,\theta,v(\cdot)), v(r))dr$$
$$\subset \Big(b(t,\theta) - b\big(\tau, \psi(\tau,t,\theta,v(\cdot))\big)\Big)U_t^p + N\big(\tau, \psi(\tau,t,\theta,v(\cdot))\big) \tag{4.3}$$

для любых измеримых функций $v : [t,\tau] \to V$, $w : [t,\tau] \to [-1,1]$.

Теорема 4.1. *Пусть при* $t \le p$, $\theta \in \mathbb{R}^q$ *задано семейство непустых множеств* $N(t,\theta) \subset \mathbb{R}^n$, *удовлетворяющих равенству* (4.2) *и включению* (4.3). *Тогда из начальной позиции* $t_0 < p$, $z(t_0) = z_0$, $\theta(t_0) = \theta_0$, $\mu(t_0) = \mu_0$, *удовлетворяющей соотношениям* (4.1), *возможно попадание в начало координат в момент времени* p.

Доказательство. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Возьмем число $a > 0$ такое, что

$$ab(t_0,\theta_0) < \varepsilon. \tag{4.4}$$

Из условия (3.13) следует, что $b(t_0,\theta_0) \ge b(t,\theta)$ при всех $t_0 \le t \le p$ и

$$\theta = \psi(t, t_0, \theta_0, v(\cdot)) \text{ при некоторой } v : [t_0, t] \to V. \tag{4.5}$$

Обозначим при таких t и θ

$$N_+(t,\theta) = N(t,\theta) + a\big(b(t_0,\theta_0) - b(t,\theta)\big)S. \tag{4.6}$$

Для позиции (t,z,μ,θ), удовлетворяющей условиям (4.6) и соотношениям (4.1) с заменой в них множества $N(t,\theta)$ на $N_+(t,\theta)$, верно разложение

$$z = x + y, \quad x \in \big(\mu - b(t,\theta)\big)U_t^p, \quad y \in N_+(t,\theta). \tag{4.7}$$

Очевидно, что рассматриваемая начальная позиция этим условиям удовлетворяет.

Рассмотрим проблему моментов (см. [1]):

$$\int\limits_t^p \|du(r)\|_{(l)} \to \min, \quad x + \int\limits_t^p A(r)du(r) = 0. \tag{4.8}$$

Из второго включения (4.7) и из формулы (2.3) следует, что проблема моментов (4.8) имеет решение $u^* : [t,p] \to \mathbb{R}^l$, причем

$$\int\limits_t^p \|du^*(r)\|_{(l)} \le \mu - b(t,\theta). \tag{4.9}$$

Из второго равенства (4.8) и неравенства (4.9) следует, что построенная функция u^* : $[t,p] \to \mathbb{R}^l$ при $t < \tau \le p$ удовлетворяет неравенству

$$\mu(\tau) = \mu - \int\limits_t^\tau \|du^*(r)\|_{(l)} \ge b(t,\theta) \tag{4.10}$$

и включению

$$x + \int\limits_t^\tau A(r)du^*(r) \in \big(\mu(\tau) - b(t,\theta)\big)U_\tau^p. \tag{4.11}$$

Берем эту функцию $u^* : [t,p] \to \mathbb{R}^l$ в качестве u-стратегии для позиции (t,z,μ,θ). Для всех остальных позиций полагаем $u^*(r) = 0$ при $t \le r \le p$.

Область достижимости U_t^p непрерывно по Хаусдорфу зависит от t. Поэтому на отрезке $[t_0,p]$ она равномерно непрерывна. Следовательно, для числа $a > 0$, удовлетворяющего неравенству (4.4), существует число $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения ω (1.3) с диаметром разбиения меньше δ выполнено включение

$$U_{t_i}^p \subset U_{t_{i+1}}^p + aS, \quad i = \overline{0,k}. \tag{4.12}$$

Возьмем разбиение ω (1.3) и применим построенную u-стратегию. В результате реализации допустимой помехи получим ломаную (1.4), (1.5). Отметим, что точки t_i, $\theta^{(\omega)}(t_i)$, $i = \overline{1,k+1}$, удовлетворяют условию (4.5). Покажем, что для всех $i = \overline{0,k+1}$ выполнены неравенство

$$\mu^{(\omega)}(t_i) \ge b\big(t_i,\theta^{(\omega)}(t_i)\big) \tag{4.13}$$

и включение

$$z^{(\omega)}(t_i) \in \Big(\mu^{(\omega)}(t_i) - b\big(t_i,\theta^{(\omega)}(t_i)\big)\Big)U_{t_i}^p + N_+\big(t_i,\theta^{(\omega)}(t_i)\big). \tag{4.14}$$

При $i = 0$ соотношения (4.13) и (4.14) выполнены. Допустим, что они выполнены для $0 \le i \le k$. Тогда из (4.10) следует, что $\mu^{(\omega)}(t_{i+1}) \ge b\left(t_i,\theta^{(\omega)}(t_i)\right)$. Отсюда и из условия (3.13) получим, что неравенство (4.13) выполнено и при $i+1$.

Используя формулу (1.4), последнее включение в (4.7) и включение (4.11), выводим, что

$$z^{(\omega)}(t_{i+1}) \in \Big(\mu^{(\omega)}(t_{i+1}) - b\big(t_i, \theta^{(\omega)}(t_i)\big)\Big)U^p_{t_{i+1}}$$

$$+ N_+\big(t_i, \theta^{(\omega)}(t_i)\big) + \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} w_i(r) f_1\Big(r, \psi\big(r, t_i, \theta^{(\omega)}\left(t_i\right), v_i(\cdot)\big), v_i(r)\Big)dr. \qquad (4.15)$$

Включение (4.3) выполнено при $t = t_i$, $\theta = \theta^{(\omega)}(t_i)$, $\tau = t_{i+1}$. Прибавим к обеим частям включения (4.3) множество $a\left(b\left(t_0, \theta_0\right) - b\left(t_i, \theta^{(\omega)}(t_i)\right)\right)S$ и учтем включение (4.12). Получим

$$N_+\big(t_i, \theta^{(\omega)}(t_i)\big) + \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} w_i(r) f_1\Big(r, \psi\big(r, t_i, \theta^{(\omega)}\left(t_i\right), v_i(\cdot)\big), v_i(r)\Big)dr$$

$$\subset \Big(b\big(t_i, \theta^{(\omega)}(t_i)\big) - b\big(t_{i+1}, \theta^{(\omega)}(t_{i+1})\big)\Big)U^p_{t_{i+1}} + N_+\big(t_{i+1}, \theta^{(\omega)}(t_{i+1})\big).$$

Отсюда и из включения (4.15) следует, что включение (4.14) выполнено при $i + 1$.

Положим в (4.14) $i = k + 1$. Получим требуемое включение (1.7). Теорема доказана.

5. Пример

Рассмотрим одномерный случай $z \in \mathbb{R}$. Тогда, как следует из формулы (2.4), $m(t, \phi) = m(t)|\phi|$ при любом $\phi \in \mathbb{R}$. Далее, функция (3.1) не зависит от ϕ и равна

$$B(t, \theta) = \sup \int\limits_t^p \frac{|f_1(r, \theta(r), v(r))|}{m(r)} dr, \qquad (5.1)$$

$$\dot\theta(r) = f_2(r, \theta(r), v(r)), \quad \theta(t) = \theta, \quad v(r) \in V. \qquad (5.2)$$

Условие (3.2), при выполнении которого существует реализация помехи, гарантирующая непопадание в момент времени p в начало координат из начального состояния $t_0 < p$, $z(t_0) = z_0$, $\theta(t_0) = \theta_0$, $\mu(t_0) = \mu_0$, принимает вид $|z_0| > (\mu_0 - B(t_0, \theta_0))m(t_0)$.

В рассматриваемом случае функция $b(t, \theta)$, определяемая формулой (3.12), совпадает с функцией $B(t, \theta)$. Покажем, что семейство множеств $N(t, \theta) = 0$ удовлетворяет включению (4.3). Это значит, что при всех $t < \tau < p$ имеет место неравенство

$$\int\limits_t^\tau |f_1(r, \theta(r), v(r))| dr \le \big(B(t, \theta) - B(\tau, \theta(\tau))\big)m(t) \qquad (5.3)$$

для любой измеримой функции $v : [t, p] \to V$ и любого решения $\theta(r)$ задачи Коши (5.2). Из монотонности функции $m(t)$ следует, что

$$\frac{1}{m(r)} \int\limits_t^\tau |f_1(r, \theta(r), v(r))| dr \le \int\limits_t^\tau \frac{|f_1(r, \theta(r), v(r))|}{m(r)} dr.$$

Поэтому неравенство (5.3) будет выполнено, если верно неравенство

$$B(t, \theta) \ge B(\tau, \theta(\tau)) + \int\limits_t^\tau \frac{|f_1(r, \theta(r), v(r))|}{m(r)} dr.$$

Это неравенство следует из формул (5.1) и (5.2).

Соотношения (4.1) при $N(t,\theta) = 0$ для заданного начального состояния $(t_0, z_0, \mu_0, \theta_0)$ принимают следующий вид: $|z_0| \leq (\mu_0 - B(t_0, \theta_0))m(t_0)$.

Таким образом, для рассматриваемого примера последнее неравенство задает необходимые и достаточные условия возможности попадания в начало координат в момент времени p из заданной начальной позиции $(t_0, z_0, \mu_0, \theta_0)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
2. **Красовский Н.Н.** Об одной задаче преследования // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27, вып. 2. С. 244–254.
3. **Красовский Н.Н., Репин Ю.М., Третьяков В.Е.** О некоторых игровых ситуациях в теории управляемых систем // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1965. № 4. С. 3–23.
4. **Красовский Н.Н., Третьяков В.Е.** К задаче о преследовании в случае ограничений на импульсы управляющих сил // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 5. С. 587–599.
5. **Пожарицкий Г.К.** Игровая задача импульсного сближения с противником, ограниченным по энергии // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39, вып. 4. С. 579–589.
6. **Субботина Н.Н., Субботин А.И.** Альтернатива для дифференциальной игры сближения-уклонения при ограничениях на импульсы управлений игроков // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39, вып. 3. С. 397–406.
7. **Чикрий А.А., Матичин И.И., Чикрий К.А.** Конфликтно управляемые процессы с разрывными траекториями // Кибернетика и системный анализ. 2004. № 6. С. 15–29.
8. **Петров Н.Н.** Задача группового преследования в классе импульсных стратегий преследователя// Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 2. С. 38–44.
9. **Ухоботов В.И.** Линейная дифференциальная игра с ограничениями на импульсы управлений // Прикл. математика и механика. 1988. Т. 52, вып. 3. С. 355–362.
10. **Ухоботов В.И.** Линейная игра импульсной встречи заданной продолжительности с интегральным ограничением // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Математика, механика. 1991. № 1. С. 47–64.
11. **Ухоботов В.И., Зайцева О.В.** Линейная задача импульсной встречи в заданный момент времени при наличии помехи //Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 186–198.
12. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
13. **Коддингтон Э.А., Левинсон Н.** Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Иностр. лит., 1958. 475 с.
14. **Hermes H.** The generalized differential equation $\dot{x} \in R(t,x)$ // Advances Math. 1970. Vol. 4, no. 2. P. 149–169.
15. **Ухоботов В.И.** Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями: учеб. пособие. Челябинск: Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2005. 124 с.
16. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука. 1972. 496 с.

Ухоботов Виктор Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Челябинский государственный университет
e-mail: ukh@csu.ru

Поступила 23.01.2015

Изместьев Игорь Вячеславович
аспирант
Челябинский государственный университет
e-mail: j748e8@gmail.com

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 514.174.3

АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПОКРЫТИЯ МНОЖЕСТВ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

В. Н. Ушаков, П. Д. Лебедев

Исследуется задача об оптимальном покрытии множеств в трехмерном евклидовом пространстве объединением фиксированного числа шаров одинакового радиуса. Критерием оптимальности считается радиус шаров. Предложены аналитические и численные алгоритмы решения задачи на базе разбиения множества на его области Дирихле и отыскания их чебышевских центров. Применены стохастические итерационные процедуры. Получены оценки асимптотики радиуса шаров при стремлении их числа к бесконечности. Проведено моделирование нескольких примеров и представлена их визуализация.

Ключевые слова: хаусдорфово отклонение, наилучшая n-сеть, покрытие шарами, чебышевский центр.

V. N. Ushakov, P. D. Lebedev. Algorithms for the construction of an optimal cover for sets in three-dimensional Euclidean space.

The problem of an optimal cover of sets in three-dimensional Euclidian space by the union of a fixed number of equal balls, where the optimality criterion is the radius of the balls, is studied. Analytical and numerical algorithms based on the division of a set into Dirichlet domains and finding their Chebyshev centers are suggested for this problem. Stochastic iterative procedures are used. Bounds for the asymptotics of the radii of the balls as their number tends to infinity are obtained. The simulation of several examples is performed and their visualization is presented.

Keywords: Hausdorff deviation, best n-net, ball cover, Chebyshev center.

1. Постановка задачи о покрытии

При изучении задач динамики [1] часто приходится работать с множествами сложной геометрии, имеющими нерегулярную структуру, например с множествами достижимости для нелинейных нестационарных управляемых систем [2] или стабильными мостами в дифференциальных играх [3]. Возникает потребность в их аппроксимации более удобными для вычислительных процедур множествами. Так, удобной для многих множеств в евклидовых пространствах является аппроксимация их эллипсоидами. Эффективные методы аппроксимации эллипсоидами развиваются в научных школах А. Б. Куржанского [4] и Ф. Л. Черноусько [5]. Другой подход [6; 7] состоит в аппроксимации множеств в евклидовом пространстве наборами шаров одинакового радиуса. Привлекательность этого подхода заключается в том, что элементы данных наборов — шары в евклидовом пространстве — чрезвычайно просты в описании. Авторами этой статьи предложена схема аппроксимации множеств в $\mathbb{R}^3$ наборами из заданного числа шаров одинакового радиуса. В качестве критерия оптимальности при такой аппроксимации выбран радиус шаров подобно тому, как это делалось в [6; 7].

Эта статья продолжает начатые ранее исследования по построению оптимальных покрытий компактных множеств на плоскости — объединением кругов [8; 9] и на сфере — объединением сферических сегментов [10].

Задача о покрытии множества в пространстве шарами равного радиуса имеет большое значение в различных областях комбинаторной геометрии для построения разбиений множества [11]. В них обычно изучаются вопросы, связанные с соотношением диаметра компактного множества M в евклидовом пространстве и диаметров его подмножеств и других, связанных с

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 15-11-10018.

M конструкций. В частности, в работе [12] показано, что любое множество $M \subset \mathbb{R}^3$, имеющее диаметр 1, может быть вложено в объединение 4 шаров диаметра 0.99983. Данный результат доказывает гипотезу Борсука для случая трехмерного пространства о том, что любое множество можно разбить на 4 подмножества меньшего диаметра [11, с. 153]. От покрытий шарами часто легко перейти к покрытиям телами с более сложной геометрией.

В настоящей работе разработан численный алгоритм отыскания чебышевского центра многогранника, позволяющий существенно экономить вычислительные мощности. Предложены схемы решения задачи о покрытии на базе разбиения множества на его области Дирихле за счет выделения так называемых характеристических точек. Введена возможность улучшения результатов за счет применения стохастической коррекции текущего покрытия. Доказана теорема об асимптотике радиусов шаров наилучшего покрытия при стремлении их числа к бесконечности для одного класса множеств.

Важным практическим приложением решения рассматриваемой задачи может быть построение оптимальных сетей датчиков, отслеживающих состояние некоторой области M в пространстве [13]. В случае, когда размерами датчика можно пренебречь по сравнению с размерами M, необходимо найти минимальное число шаров радиуса, равного номинальному радиусу области, контролируемой данным прибором, — шаров, объединение которых полностью покрывало бы M. Центры шаров следует интерпретировать как места расположения датчиков. Другим примером применения может служить составление схем оптимального размещения логистических центров или пунктов технического обслуживания [14].

Введем обозначения: $\mathrm{cl}(\mathbb{R}^d)$ — множество всех замкнутых множеств в евклидовом пространстве размерности d, $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^d)$ — множество всех компактов (т. е. замкнутых ограниченных множеств) в $\mathbb{R}^d$, S_n — n-сеть в $\mathbb{R}^d$, непустое множество, состоящее не более чем из n точек, Σ_n — множество всех n-сетей, $B(\mathbf{s}, r)$ — замкнутый шар с центром в точке $\mathbf{s}$ радиуса r (множество, состоящее из одной точки, будем рассматривать как шар нулевого радиуса). Далее обозначим $\Xi(S_n, r) = \bigcup_{\mathbf{s}_i \in S_n} B(\mathbf{s}_i, r)$. Введем также многозначное отображение $\mathbf{x} \mapsto \Omega_M(\mathbf{x})$, где $\Omega_M(\mathbf{x})$ — множество ближайших в евклидовой метрике к $\mathbf{x}$ точек из $M \in \mathrm{cl}(\mathbb{R}^d)$, и функции $\rho(\mathbf{x}, M) = \min\{\|\mathbf{x} - \mathbf{m}\| \colon \mathbf{m} \in M\}$ — евклидово расстояние от точки $\mathbf{x}$ до множества $M \in \mathrm{cl}(\mathbb{R}^d)$, $h(A, B) = \max\{\rho(\mathbf{a}, B) \colon \mathbf{a} \in A\}$ — хаусдорфово отклонение множества $A \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^d)$ от $B \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^d)$.

Ограничимся далее рассмотрением множеств, содержащихся в $\mathbb{R}^3$.

Определение 1. Наилучшим покрытием множества $M \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^3)$ шарами при фиксированном $n \in \mathbb{N}$ назовем множество $\Xi(S_n, r)$, для которого выполняются условия

$$M \subseteq \Xi(S_n, r) \ \text{ и } \ \forall \lambda \in [0, r), \ \forall S_n^* \in \Sigma_n \ M \not\subseteq \Xi(S_n^*, \lambda).$$

Будем далее рассматривать задачу об отыскании наилучшего покрытия множества M при фиксированном n. При этом полагаем, что задача решена, если найдено хотя бы одно $\Xi(S_n, r)$, удовлетворяющее определению 1.

Решение задачи сводится к отысканию наилучшей n-сети S_n компакта M, т. е. такой n-сети, хаусдорфово отклонение от которой $h(M, S_n)$ минимально по отношению ко всем n-сетям из Σ_n. Основные свойства наилучших n-сетей описаны в [15;16], в частности показано, что для любого компакта M при любом n существует как минимум одна наилучшая n-сеть. В настоящее время активно изучаются наилучшие n-сети в пространствах различной размерности [17]. Точки таких n-сетей S_n выступают в роли центров шаров наилучшего покрытия, а радиус r равен $h(M, S_n)$.

2. Построение чебышевского центра множества

Рассмотрим задачу о построении наилучшего покрытия при $n = 1$. Данный относительно простой случай важен для разработки алгоритмов решения задачи при $n > 1$.

О п р е д е л е н и е 2. Чебышевским центром [18] множества $M \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^d)$ называется точка $\mathbf{c}(M)$, для которой

$$h(M, \{\mathbf{c}(M)\}) = \min\left\{h(M, \{\mathbf{x}\})\colon \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\right\}. \tag{2.1}$$

При $n = 1$ множество $\{\mathbf{c}(M)\}$ есть наилучшая n-сеть. Решением задачи о наилучшем покрытии множества при $n = 1$ является шар радиуса (2.1) (называемого также чебышевским радиусом $r(M)$ множества M) с центром в точке $\mathbf{c}(M)$. Различные методы отыскания чебышевского центра на плоскости рассмотрены ранее, например в работе [8].

Для построения чебышевского центра множества в $\mathbb{R}^3$ можно, по существу, использовать его свойства. В связи с этим отметим следующие свойства: точка $\mathbf{c}(M)$ принадлежат выпуклой оболочке $\mathrm{co}\, M$ множества M; чебышевские центры множества M и $\mathrm{co}\, M$ совпадают [18; 19]. В частности, если M — многогранник (т. е. замкнутое множество, граница которого состоит из конечного числа многоугольников) с набором вершин $V = \{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^{v}$ (общим числом $v \in \mathbb{N}$), то $\mathbf{c}(M) = \mathbf{c}(V)$ (и $r(M) = r(V)$).

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ в случае состоящего из конечного числа точек множества V чебышевский центр $\mathbf{c}(V)$ принадлежит выпуклой оболочке $\mathrm{co}\, V^*$ множества V^* всех точек $\mathbf{v}_i$ из V, лежащих на сфере $\partial B(\mathbf{c}(M), r(M))$ (подробнее см. [19; 20]). Действительно, если допустить, что $\mathbf{c}(V) \notin \mathrm{co}\, V^*$, то V^* вложено в сферический сегмент Θ (сферы $\partial B(\mathbf{c}(M), r(M))$) радиуса меньше, чем $\pi/2$. В свою очередь, чебышевский радиус такого сегмента меньше, чем $r(M)$, а его чебышевский центр не совпадает с $\mathbf{c}(M)$. Обозначим $h_0 = \min\{\rho\big(\mathbf{v}_i, \partial B(\mathbf{c}(M), r(M))\big)\colon \mathbf{v}_i \in V \setminus V^*\} = r(M) - \max\{\|\mathbf{v}_i\|\colon \mathbf{v}_i \in V \setminus V^*\}$ — расстояние от сферы $\partial B(\mathbf{c}(M), r(M))$ до ближайшей к ней точки из $V \setminus V^*\}$ (в случае, если $V = V^*$, полагаем $h_0 = r(M)/2$). Рассмотрим вектор $\mathbf{h}$, сонаправленный $\mathbf{c}(V) - \mathbf{c}(\Theta)$, равный по норме $\min\{\|\mathbf{c}(V) - \mathbf{c}(\Theta)\|, h_0\}$. Сдвинув на него центр шара $B(\mathbf{c}(M), r(M))$, мы получим шар $B\big((\mathbf{c}(V) + \mathbf{h}), r(V)\big)$ того же размера, в который вложено V, что приводит к противоречию с единственностью чебышевского центра.

Согласно теореме Каратеодори [21] найдется набор не более чем из 4 точек, принадлежащих V^*, таких, что $\mathbf{c}(V)$ лежит в их выпуклой оболочке. Поэтому для отыскания чебышевского центра и радиуса множества V достаточно рассмотреть все 4-сети $S_4 \subseteq V$ и выделить ту, для которой $r(S_4)$ является наибольшим. Хотя данный путь является трудоемким и требует большого числа операций, он прост в реализации и дает точный результат.

Чебышевский центр 4-сети $S_4 = \{\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_4\}$, состоящей ровно из четырех точек, не лежащих в одной плоскости, совпадает с центром $\mathbf{c}^*$ сферы, на которой лежат точки 4-сети S_4, в случае, если $\mathbf{c}^* \in \mathrm{co}\, S_4$. В противном случае $\mathbf{c}(S_4)$ совпадает с чебышевским центром некоторой 3-сети $S_3 \subset S_4$. В свою очередь, чебышевский центр множества S_3, состоящего из трех точек, образующих треугольник, есть либо центр описанной вокруг треугольника окружности (если он остроугольный), либо середина наибольшей стороны (если он тупоугольный) (см. [22]).

Авторами разработан алгоритм построения чебышевского центра и вычисления чебышевского радиуса многогранника с множеством вершин V, а также выполнена его программная реализация. Обозначим $\Sigma_4(V)$ — множество всех 4-сетей, вложенных в V. Полагаем, что V содержит как минимум две не совпадающие точки.

А л г о р и т м.

1. Среди множества V находится такая пара точек $\mathbf{v}_{i^*}$, $\mathbf{v}_{j^*}$, что

$$\|\mathbf{v}_{i^*} - \mathbf{v}_{j^*}\| = \max\{\|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\|\colon i = \overline{1, v}, j = \overline{1, v}\}.$$

Переменная k (счетчик циклов) устанавливается в $k = 1$ и записывается набор точек

$$V^k = \{\mathbf{v}_{i^*}, \mathbf{v}_{j^*}\}. \tag{2.2}$$

2. Находятся все множества из $\Sigma_4(V^k)$ и вычисляются чебышевский центр и чебышевский радиус каждого из них. Выбирается 4-сеть S_4^k с наибольшим чебышевским радиусом $r_k = r(S_4^k)$ и выписывается точка $\mathbf{c}_k = \mathbf{c}(S_4^k)$.

3. Строится массив $\{\overline{r}_i\}_{i=1}^{v} = \{\|\mathbf{c}_k - \mathbf{v}_i\|\}_{i=1}^{v}$ расстояний от точки $\mathbf{c}_k$ до элементов множества V. Из него выбирается наибольший элемент $\overline{r}_j = \max\limits_{i=\overline{1,v}} \overline{r}_i$.

4. Если $\overline{r}_j \leqslant r_k$, то выполняется переход к п. 7.

5. Значение величины k увеличивается на 1 и записывается массив точек
$$V^k = V^{k-1} \cup \{\mathbf{v}_j\}. \tag{2.3}$$

6. Осуществляется переход к п. 2.

7. Записывается значение чебышевского центра $\mathbf{c}(V) = \mathbf{c}_k$ и чебышевского радиуса $r(V) = r_k$ множества V.

Предложение. *Алгоритм отыскивает значения $\mathbf{c}(V)$ и $r(V)$ за количество циклов k, не превышающее $(\widehat{v}-1)$, где $\widehat{v}$ — число точек, лежащих в $\widehat{V} = V \cap \partial(\operatorname{co} V)$.*

Доказательство. Покажем, что все точки из наборов (2.2) и (2.3) принадлежат $\widehat{V}$. Точка $\mathbf{v}_j$, которая при построении набора V^k добавляется к набору точек V^{k-1}, есть точка максимума на V функции $u(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{c}_{k-1}\|$ — евклидового расстояния до чебышевского центра $\mathbf{c}_{k-1}$ множества V^{k-1}. Поскольку функция $u(\mathbf{x})$ является выпуклой и ее множества Лебега (шары с центром в $\mathbf{c}_{k-1}$) — строго выпуклые [21], то ее максимум на любом компактном множестве может достигаться только на его крайних точках. В то же время $\operatorname{co} V = \operatorname{co} \widehat{V}$, а, значит, любая точка, лежащая в $V \setminus \widehat{V}$, по теореме Каратеодори может быть представлена в виде выпуклой комбинации не более чем 4 элементов из $\widehat{V}$. Поэтому если $\mathbf{v}_i \in V$ и $\mathbf{v}_i \notin \widehat{V}$, то $\mathbf{v}_i$ не является крайней точкой множества V и в ней функция $u(\mathbf{x})$ не может принимать максимальное значение на множестве V. Аналогично можно показать, что точки $\mathbf{v}_{i^*}$ и $\mathbf{v}_{j^*}$ лежат в $\widehat{V}$ как наиболее удаленные от $\mathbf{v}_{j^*}$ и $\mathbf{v}_{i^*}$ соответственно в наборе V.

Очевидно, что если в п. 4 имеет место $\overline{r}_j > r_k$, то точка $\mathbf{v}_j$ (номер j которой находится в п. 3) не входит в V^k. Значит, переход к п. 5 возможен не более чем $(\widehat{v}-2)$ раз, поскольку уже при $k=1$ множество V^k содержит 2 точки из $\widehat{V}$. Следовательно, максимальное значение переменной k может быть $(\widehat{v}-1)$.

Также найдется как минимум одна 4-сеть $S_4^* \subseteq \widehat{V}$, для которой $r(S_4^*) = r(V)$. В качестве этой сети можно взять множество точек, лежащих в V^* и содержащих $\mathbf{c}(V)$ в своей выпуклой оболочке. Выше показано, что всегда можно найти такое множество, состоящее не более чем из 4 элементов. □

Замечание 1. Согласно доказанному предложению приведенный в статье алгоритм позволяет значительно сократить время работы вычислительного комплекса по сравнению с перебором всех без исключения 4-сетей, образованных точками из V. Как видно из доказательства утверждения, алгоритм не рассматривает точки, не являющиеся крайними для V.

При практической реализации, естественно, сразу отбрасываются 4-сети, состоящие из одной точки. Кроме того, в программе хранится информация о всех множествах $\Sigma_4(V_k)$, что позволяет на каждом следующем шаге итерации сокращать объем вычислений.

3. Итерационные методы построения наилучшего покрытия

Решение задачи о покрытии при большом n возможно лишь приближенно, численными методами. Авторами использованы методы, аналогичные тем, которые ранее применялись для решения задач об оптимальном покрытии плоских множеств [9; 10], пдодробнее они описаны в [23; 24].

Определение 3. Ячейкой Вороного [25, с. 48] точки $\mathbf{s}_i \in S_n$ n-сети S_n называется множество точек
$$W_i(S_n) = \left\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 \colon \|\mathbf{w} - \mathbf{s}_i\| = \min\{\|\mathbf{w} - \mathbf{s}_j\| \colon \mathbf{s}_j \in S_n\}\right\}. \tag{3.1}$$

Ячейка Вороного есть геометрическое место точек, лежащих не дальше от $\mathbf{s}_i$, нежели от других точек S_n. Если $\mathbf{s}_i \in \partial(\operatorname{co} S_n)$, то $W_i(S_n)$ — неограниченное выпуклое множество; если $\mathbf{s}_i \notin \partial(\operatorname{co} S_n)$, то $W_i(S_n)$ — ограниченный выпуклый многогранник (подробнее см. [26]).

О п р е д е л е н и е 4. Диаграммой Вороного [25] n-сети S_n называется множество точек

$$W(S_n) = \bigl\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 \colon \exists \mathbf{s}_i \in \Omega_{S_n}(\mathbf{w}), \exists \mathbf{s}_j \in \Omega_{S_n}(\mathbf{w}), (\mathbf{s}_i \neq \mathbf{s}_j)\bigr\}. \tag{3.2}$$

В общем случае диаграмма Вороного состоит из объединения плоских двумерных многообразий, точки которых имеют ровно два ближайших элемента из S_n, одномерных многообразий (лучей или отрезков на прямых), точки которых имеют ровно три ближайших элемента из S_n, и нульмерных многообразий — точек, имеющих четыре или более ближайших элемента из S_n. Из выражений (3.1) и (3.2) видно, что $W(S_n)$ есть объединение всех граничных точек ячеек Вороного $W_i(S_n)$ при $i = \overline{1,n}$.

О п р е д е л е н и е 5. Пусть заданы множество $M \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^3)$ и n-сеть S_n. Областью Дирихле [24, с. 305] точки $\mathbf{s}_i \in S_n$ в множестве M называется подмножество $D_i(M, S_n) = M \cap W_i(S_n)$.

По построению $D_i(M, S_n)$ есть та часть множества M, которая лежит ближе к точке $\mathbf{s}_i$, нежели к остальным точкам S_n. В случае, если точка $\mathbf{s}_i$ расположена вне M ее область Дирихле может быть пустым множеством. Если M — выпуклое множество, то и все его области Дирихле в M выпуклы. В частности, если M — выпуклый многогранник, то его области Дирихле — тоже выпуклые многогранники [26].

Авторами разработан итерационный алгоритм построения n-сети, направленный на уменьшение хаусдорфова отклонения $h(M, S_n)$ множества M от n-сети. Первым шагом алгоритма является генерация начального массива точек $S_n^0 \subset M$. Затем строятся области Дирихле $D_i(M, S_n^0)$ для каждой точки $\mathbf{s}_i \in S_n^0$, $i = \overline{1,n}$. Затем строится новая n-сеть $S_n^1 = \{\mathbf{s}_i^1\}_{i=1}^n$ как набор их чебышевских центров

$$\mathbf{s}_i^1 = \mathbf{c}\bigl(D_i(M, S_n^0)\bigr), \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.3}$$

После этого вычисляется величина $d_0 = d(S_n^0, S_n^1) = \max\{h(S_n^0, S_n^1), h(S_n^1, S_n^0)\}$, — хаусдорфово расстояние между множествами S_n^0 и S_n^1. Если величина d_0 меньше заданного параметра точности, то работа алгоритма заканчивается. Если больше, то процедура повторяется, но в качестве начальной n-сети S_n^0 берется уже S_n^1.

При построении областей Дирихле для многогранника авторами реализовано разбиение на области Дирихле, основанное на выделении его так называемых характеристических точек. Данный метод описан, в частности, в работе [24] (для плоского случая) и применялся авторами в работе [10] для множеств на поверхности сферы.

О п р е д е л е н и е 6. Характеристической относительно n-сети S_n называется точка $\mathbf{m}_i^*$ многогранника M, для которой выполняется одно из условий:

∘ $\mathbf{m}_i^*$ — вершина многогранника M;

∘ $\mathbf{m}_i^*$ принадлежит ребру многогранника M и для нее найдется не менее двух, ближайших в евклидовой метрике, элементов из S_n;

∘ $\mathbf{m}_i^*$ принадлежит грани многогранника M и для нее найдется не менее трех, ближайших в евклидовой метрике, элементов из S_n;

∘ $\mathbf{m}_i^*$ принадлежит M и для нее найдется не менее четырех, ближайших в евклидовой метрике, элементов из S_n.

Множество характеристических точек многогранника M относительно n-сети S_n обозначим $X(M, S_n)$. Если M — многогранник, выполняются равенства

$$\mathbf{c}(D_i(M, S_n)) = \mathbf{c}(X_i(M, S_n)), \quad i = \overline{1,n}, \tag{3.4}$$

где $X_i(M,S_n) = X(M,S_n) \cap D_i(M,S_n)$. Выпуклый многогранник M есть пересечение полупространств Π_j, ограниченных плоскостями $\partial\Pi_j$, проходящими через грани M. Ячейка Вороного $W_i(S_n)$ есть пересечение полупространств Π_k^*, ограниченных плоскостями $\partial\Pi_k^*$, равноудаленными от точки $\mathbf{s}_i$ и точек $\mathbf{s}_k \in S_n \setminus \{\mathbf{s}_i\}$. Значит, область Дирихле есть выпуклый многогранник, представляющий собой пересечение конечного числа полупространств Π_j и Π_k^*. Поэтому для любой точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ максимум евклидового расстояния на множестве $D_i(M,S_n)$ достигается в его крайних точках (подробнее см. [26]). По сути, характеристические точки $\mathbf{m}_i^* \in X_i(M,S_n)$ — это места пересечения трех (или более) полуплоскостей из числа $\partial\Pi_j$ и $\partial\Pi_k^*$.

Выражение (3.4) позволяет свести отыскание чебышевского центра области Дирихле $D_i(M, S_n)$ к нахождению его для набора точек с помощью алгоритма. При этом работу программного комплекса можно оптимизировать за счет сохранения информации о 4-сетях, образованных из точек (2.2) и (2.3). Множества $X_i(M,S_n)$ и $X_j(M,S_n)$ при $i \neq j$ могут иметь общие точки (лежащие на плоскости, образованной срединным перпендикулярами к отрезку $[\mathbf{s}_i,\mathbf{s}_j]$) в случае, если $W_i(S_n) \cap W_j(S_n) \neq \varnothing$. Поэтому информация о чебышевских центрах и радиусах подмножеств $S_4 \subseteq X_i(M,S_n)$ может использоваться для отыскания $\mathbf{c}(X_j(M,S_n))$ при $i \neq j$.

При программной реализации описанной схемы авторы столкнулись с ситуацией, когда хаусдорфово отклонение $h(M,S_n)$ от полученной n-сети S_n существенно зависит от начального набора S_n^0. Часто в итоге вычислений реализуется n-сеть, которая достаточно далека от оптимальной, однако применение к этой n-сети S_n формулы (3.3) порождает итерацию, мало от нее отличающуюся. Поэтому в программном комплексе предусмотрена возможность организации "итерации из итераций" со стохастическим изменением координат точек. После того как найдено некоторое значение n-сети S_n, генерируется массив из n векторов $\Psi = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n = \{(x_i,y_i,z_i)\}_{i=1}^n$, координаты которых суть случайные числа, равномерно распределенные на отрезке $[-1,1]$. Затем конструируется множество точек

$$\widetilde{S}_n = \{\mathbf{s}_i + \lambda h(M,S_n)\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n,$$

где $\lambda \in (0,1)$ — параметр, задаваемый в программе. По построению $\widetilde{S}_n$ есть n-сеть, хаусдорфово отклонение от которой множества M возможно оценить следующим образом:

$$h(M,\widetilde{S}_n) \leqslant h(M,S_n) + h(S_n,\widetilde{S}_n) \leqslant h(M,S_n) + \lambda h(M,S_n) \max_{\mathbf{x}_i \in \Psi} \|\mathbf{x}_i\|$$

$$\leqslant h(M,S_n) + \lambda h(M,S_n)\sqrt{3} = h(M,S_n)\big(1+\lambda\sqrt{3}\big).$$

В то же время результаты итерационного применения к $\widetilde{S}_n$ формулы (3.3) могут дать лучший результат по сравнению с $h(M,S_n)$, поскольку введение элемента стохастики позволяет отыскивать новые n-сети, которые не были бы получены детерминированными методами.

4. Оценка радиуса шаров наилучшего покрытия

При построении наилучших покрытий компактных множеств большим числом шаров важно оценить их радиус r. Это требуется прежде всего для отыскания критерия окончания работы программного комплекса при достижении определенного значения хаусдорфова отклонения $h(M,S_n)$ от текущей найденной n-сети S_n. Кроме того, примерное знание r позволяет более эффективно генерировать начальное значение массива центров шаров S_n^0 за счет выбора минимально допустимого расстояния между точками из S_n^0.

Схожая задача впервые была исследована А. Н. Колмогоровым и В. М. Тихомировым в работах [27;28] в несколько иной постановке — они оценивали число шаров n, которым можно покрыть множество при заданном их радиусе r. Для компактных множеств M в евклидовом пространстве размерности d, имеющих ненулевую меру, ими получена оценка $R_M(n) = O\big(1/\sqrt[d]{n}\big)$, где $R_M(n)$ — минимальный радиус, позволяющий построить набор из n шаров, в который вложен компакт M. Естественно, для конкретных фигур M в трехмерном пространстве практический смысл имеют не качественные выражения, а численные неравенства относительно поведения функции $R_M(n)$ при росте n.

Теорема. *Пусть множество M — куб с длиной ребра l. Тогда выполняется*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(R_M(n)\sqrt[3]{n}\right) \leqslant \frac{\sqrt{3}l}{2}. \tag{4.1}$$

Здесь $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$ — верхний предел последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, неравенство (4.1) не выполняется. Тогда найдутся монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ и число $\gamma > 0$ такие, что

$$\forall i \in \mathbb{N} \;\; R_M(n_i)\sqrt[3]{n_i} > \frac{\sqrt{3}l}{2} + \gamma. \tag{4.2}$$

Запишем наибольший куб $P = p^3$ целого числа p, не превосходящий n_i, и разность $q = n_i - p^3$. Множество M можно представить как объединение P равных кубов $M_j, j = \overline{1,P}$, подобных M, с длиной стороны, равной $l^* = l/p$. Обозначим как $\mathbf{c}_j = \mathbf{c}(M_j)$ чебышевский центр куба M_j (который совпадает с его центром симметрии). Чебышевский радиус $r(M_j)$ равен расстоянию от $\mathbf{c}_j$ до любой из вершин M_j, т. е. половине длины диагонали куба M_j; обозначим его как

$$r_p = r(M_j) = \frac{\sqrt{3}l}{2p} \;\; \forall j = \overline{1,P}. \tag{4.3}$$

Рассмотрим P-сеть $S_P = \{\mathbf{c}_j\}_{j=1}^{P}$. Для любой точки $\mathbf{m} \in M$ выполняется оценка

$$\rho(\mathbf{m}, S^*) \leqslant \max\{r(M_j)\colon j = \overline{1,P}\} = r_p,$$

поскольку $\mathbf{m}$ лежит хотя бы в одном из кубов из числа M_j, $j = \overline{1,P}$. Построим объединение $\Xi(S_{n_i}, r_p)$ шаров радиуса r_p. Массив центров строим по следующему принципу: первые P элементов из набора S_{n_i} совпадают с точками из S_P, а в качестве оставшихся q элементов берутся произвольные q точек, принадлежащих M. По построению $S_{n_i} \subseteq S_P$, а значит $h(S_{n_i}, M) \leqslant h(S_{n_i}, M) \leqslant r_p$. Поэтому выполняется вложение $M \subseteq \Xi(S_{n_i}, r_p)$. Следовательно, выполняется оценка

$$R_M(n_i) \leqslant r_p. \tag{4.4}$$

Оценим величину q. Поскольку p — наибольшее целое число, куб которого не превосходит n_i, выполняется неравенство $(p+1)^3 > n_i$. Представив n_i в виде суммы $P+q$, можно записать его в виде

$$p^3 + q < (p+1)^3 = p^3 + 3p^2 + 3p + 1.$$

Перенеся все слагаемые, содержащие p, в правую часть, получаем $q < 3p^2 + 3p + 1$. Поскольку $n_i = p^3 + q \geqslant p^3$, то получаем оценку $q < 3\sqrt[3]{n_i^2} + 3\sqrt[3]{n_i} + 1$. n_i — натуральное число, то ${n_i}^2 \geqslant n_i \geqslant 1$, и можно записать неравенство $q < 3\sqrt[3]{n_i^2} + 3\sqrt[3]{n_i^2} + \sqrt[3]{n_i^2} = 7\sqrt[3]{n_i^2}$. Следовательно, выполняется оценка для числа $P = p^3$: $P = n_i - q \geqslant n_i - 7\sqrt[3]{n_i^2}$. При достаточно больших n_i, точнее, при $n_i > 7^3 = 343$, число $n_i - 7\sqrt[3]{n_i^2}$ является положительным. В этом случае из (4.3) следует

$$r_p = \frac{\sqrt{3}l}{2\sqrt[3]{P}} \leqslant \frac{\sqrt{3}l}{2p\sqrt[3]{n_i - 7\sqrt[3]{n_i^2}}}.$$

Видно, что оценку (4.4) можно записать для $n_i > 343$ в виде

$$R_M(n_i) \leqslant \frac{\sqrt{3}l}{2\sqrt[3]{n_i}}\varphi(n_i),$$

где
$$\varphi(n_i) = \frac{\sqrt[3]{n_i}}{\sqrt[3]{n_i - 7\sqrt[3]{n_i^2}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - 7{n_i}^{-1/3}}}.$$

Умножив обе части неравенства на $\sqrt[3]{n_i}$, приходим к выражению
$$R_M(n_i)\sqrt[3]{n_i} \leqslant \frac{\sqrt{3}l}{2}\varphi(n_i). \tag{4.5}$$

Из условия $n_i \to \infty$ при $i \to \infty$ получаем значение предела для функции $\varphi(n_i)$:
$$\lim_{i\to\infty} \varphi(n_i) = \lim_{n_i\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1 - 7{n_i}^{-1/3}}} = 1.$$

По условию длина ребра куба $l > 0$. Значит, для любого $\gamma > 0$ можно указать натуральное число i_γ такое, что
$$\forall i > i_\gamma \ \ |\varphi(n_i) - 1| < \frac{\gamma}{\sqrt{3}l}.$$

Подставив данную оценку в неравенство (4.5), имеем
$$\forall i > i_\gamma \ \ R_M(n_i)\sqrt[3]{n_i} \leqslant \frac{\sqrt{3}l}{2}\Big(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{3}l}\Big) = \frac{\sqrt{3}l}{2} + \frac{\gamma}{2}.$$

Получилось противоречие с условием (4.2) для последовательности $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ и числа $\gamma > 0$. □

З а м е ч а н и е 2. Теорема может рассматриваться как экстраполяция на случай трехмерного пространства теоремы об асимптотике наилучшего покрытия квадрата набором кругов из работы [10]. При этом оценка (4.1) может быть улучшена, поскольку при росте числа шаров центры наилучшего покрытия стремятся не к кубической решетке, а к более сложным конструкциям, описанным в [29, с. 265].

5. Примеры построения покрытий

Рассмотрим несколько примеров построения наилучших покрытий множеств в трехмерном евклидовом пространстве наборами шаров минимального радиуса. Для их реализации авторами использовался программный комплекс, реализованный в пакете MATLAB [30]. В каждом из примеров проводился многократный его запуск с последующим сравнением результатов.

П р и м е р 1. Требуется построить наилучшее покрытие куба $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1, |z| \leqslant 1\}$ с длиной ребра $l = 2$ при числе шаров n, равном 27 и 28.

Решение задачи проведено на базе вышеизложенного алгоритма и итерационного улучшения n-сети с использованием стохастической коррекции результатов.

Полученный результат при $n = 27$: массив S_{27} центров шаров покрытия, близкого к наилучшему, имеет вид
$$S_{27} \approx \{(-0.7003, -0.6922, -0.6939), (-0.7098, -0.7117, -0.005), (-0.6931, -0.6982, 0.6834),$$
$$(-0.7180, 0.0093, -0.718), (-1, -0.0001, -0.0008), (-0.7161, -0.0134, 0.7191), (-0.6914,$$
$$0.7029, -0.6895), (-0.7121, 0.7123, 0.0029), (-0.6981, 0.692, 0.6909), (0.0045, -0.7202,$$
$$-0.7226), (0.0034, -1, -0.0091), (0.0029, -0.7106, 0.7223), (-0.0009, 0.0009, -1),$$
$$(0.0035, -0.0031, -0.0041), (0.0007, -0.0025, 1), (0.0014, 0.7121, -0.7214), (-0.0062,$$
$$1, 0.0049), (-0.007, 0.7113, 0.7243), (0.7027, -0.6901, -0.6937), (0.7117, -0.7139, -0.0029),$$

$$(0.6934, -0.6997, 0.6894), (0.7132, 0.0091, -0.7202), (1, 0.0014, 0.0031), (0.7197, 0.0019,$$

$$0.7248), (0.6939, 0.6985, -0.6917), (0.7159, 0.7121, -0.0003), (0.6912, 0.7026, 0.6918)\}.$$

Радиус шаров покрытия $r \approx 0.5441$.

Множество M представлено на рис. 1. На рис. 2 показана часть шаров $B(\mathbf{s}_i, r)$ покрытия $\Xi(S_{27}, r)$ (у которых ордината центра $\mathbf{s}_i$ больше -0.5), чтобы проиллюстрировать его структуру в окрестности начала координат. Полностью множество $\Xi(S_{27}, r)$ представлено на рис. 3 и 4. Заметим, что, хотя число $n = 27$ является кубом натурального числа 3, точки S_{27} не являются центрами кубической решетки, а образуют более сложную структуру.

Значение величины $r\sqrt[3]{n} \approx 0.5441\sqrt[3]{27} \approx 1.6323$ немного меньше, чем $\sqrt{3}l/2 = \sqrt{3} \approx 1.7321$, что иллюстрирует результат теоремы.

Полученный результат при $n = 28$: массив S_{28} центров шаров покрытия, близкого к наилучшему, имеет вид

$$S_{28} \approx \{(-0.6589, -0.7127, -0.7006), (-0.7127, -0.7193, -0.0538), (-0.6414, -0.8689,$$

$$0.6632), (-0.7145, -0.0276, -0.7879), (-1, 0.0094, -0.0932), (0.0516, 0.0268, 1), (-0.6777, 0.6787,$$

$$-0.7010), (-0.7150, 0.7115, -0.0686), (-0.7251, 0.3167, 0.7176), (0.0761, -0.7113, 0.7068),$$

$$(0.0303, 0.0339, -0.0036), (-0.0215, 0.7756, -0.7011), (0.0462, 0.7220, 0.6885), (0.7075,$$

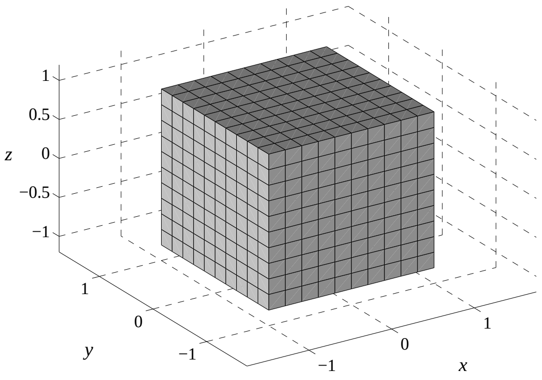


Рис. 1. Множество M в примере 1.

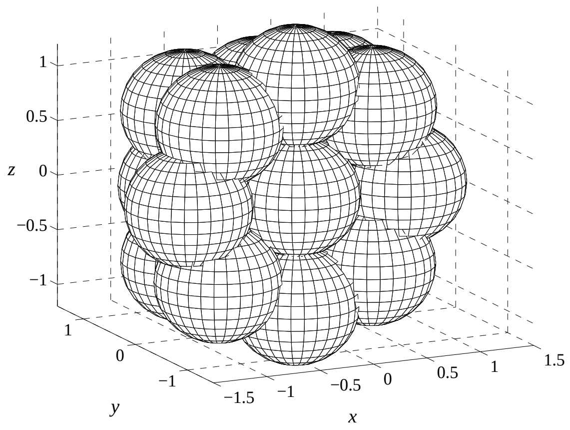


Рис. 2. Часть покрытия $\Xi(S_{27}, r)$ куба M 27 шарами.

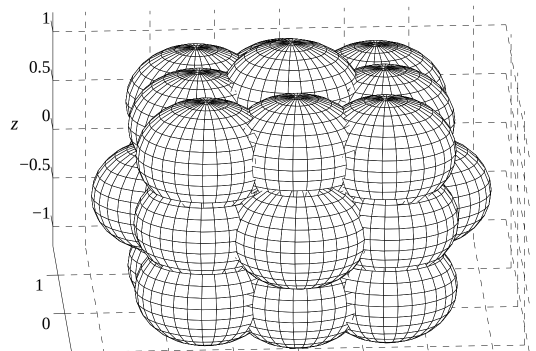


Рис. 3. Покрытие $\Xi(S_{27}, r)$ куба M: вид 1.

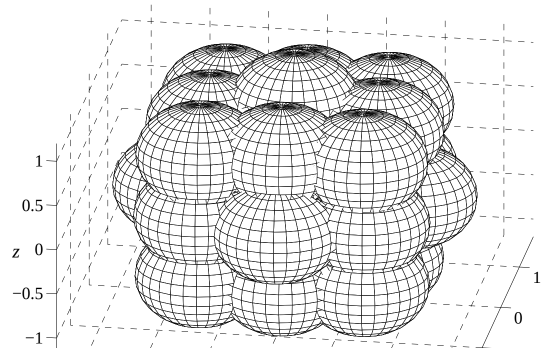


Рис. 4. Покрытие $\Xi(S_{27}, r)$ куба M: вид 2.

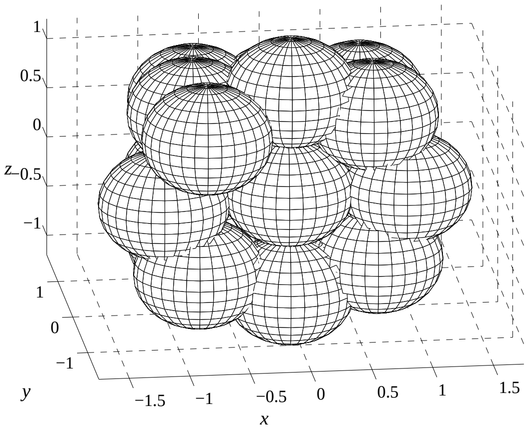


Рис. 5. Часть покрытия $\Xi(S_{28}, r)$ куба M.

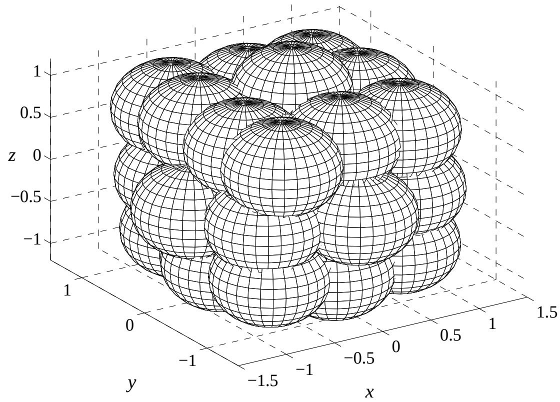


Рис. 6. Покрытие $\Xi(S_{28}, r)$ куба M.

$$-0.6710, -0.6928), (0.7298, -0.7253, -0.0123), (0.7084, -0.6815, 0.6801), (0.7637, 0.0423,$$
$$-0.7180), (0.7236, 0.0094, 0.7478), (0.6788, 0.7132, -0.6737), (0.7090, 0.7219, 0.0022),$$
$$(0.6964, 0.7020, 0.6837), (-0.6542, 0.8634, 0.6502)(-0.6864, -0.3469, 0.6890), (0.0134,$$
$$-0.7043, -0.8058), (0.0589, -1, -0.0374), (0.0411, 0.0262, -1), (0.0094, 1, -0.0159), (1, 0.0235, 0)\}.$$

Радиус шаров покрытия $r \approx 0.5376$.

Значение величины $r\sqrt[3]{n} = 0.5441\sqrt[3]{28} \approx 1.6324$, как и в предыдущем случае, немного меньше, чем $\sqrt{3}l/2 \approx 1.7321$, хотя $n = 28$ не является кубом натурального числа.

На рис. 5 показана часть шаров $B(\mathbf{s}_i, r)$ покрытия $\Xi(S_{28}, r)$ (у которых ордината центра $\mathbf{s}_i$ больше -0.5), чтобы проиллюстрировать его структуру в окрестности начала координат. Полностью множество $\Xi(S_{28}, r)$ представлено на рис. 6.

П р и м е р 2. Требуется построить наилучшее покрытие шара $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$ при числе шаров n, равном 29.

Шар не является многогранником, однако его граница может быть хорошо аппроксимирована многоугольниками [29, с. 189]. Поэтому для вычисления его покрытия шарами был применен программный комплекс с небольшими дополнительными процедурами, позволяющими находить области Дирихле в шаре при заданной n-сети и их чебышевские центры.

Полученный результат при $n = 29$: массив S_{29} центров шаров покрытия, близкого к наилучшему, имеет вид

$$S_{29} \approx \{(-0.6329, -0.1855, -0.5929), (-0.4827, -0.5803, -0.3007), (0.0857, 0.0366, -0.3076),$$
$$(-0.0075, -0.3857, 0.7959), (-0.1834, 0.3923, -0.7743), (-0.0785, -0.8411, -0.2682),$$
$$(-0.3749, -0.0205, 0.7876), (-0.5317, 0.4934, -0.1753), (-0.7352, 0.1925, 0.3261), (0.1918,$$
$$0.8196, 0.2889), (-0.7976, -0.3369, 0.1924), (0.1852, -0.8357, 0.2299), (0.4663, -0.0394,$$
$$-0.7533), (-0.1969, 0.8261, -0.2357), (0.7381, 0.2775, 0.4076), (0.8681, 0.0109, -0.1805),$$
$$(0.5358, 0.6626, -0.1489), (0.1880, 0.387, 0.7587), (-0.0492, -0.3125, -0.8283), (0.7161,$$
$$-0.4846, 0.1961), (0.4762, -0.5981, -0.4485), (-0.1445, -0.1907, 0.0808), (0.4498, -0.2566,$$
$$0.6921), (0.4078, 0.5088, -0.6015), (-0.4742, -0.6365, 0.3952), (0.0696, 0.2487, 0.166),$$
$$(-0.7823, 0.119, -0.402), (-0.3833, 0.6356, 0.4878), (0.2848, -0.1494, 0.0184)\}.$$

Радиус шаров покрытия $r \approx 0.4631$.

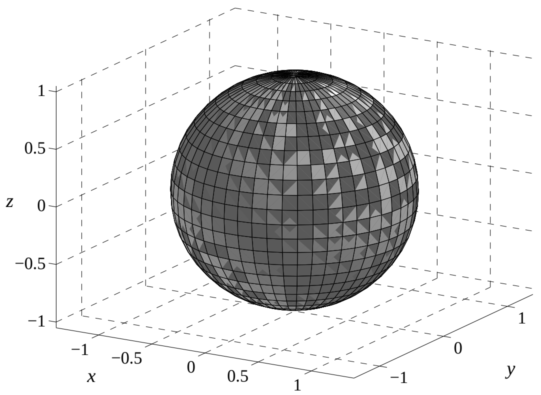


Рис. 7. Множество M в примере 2.

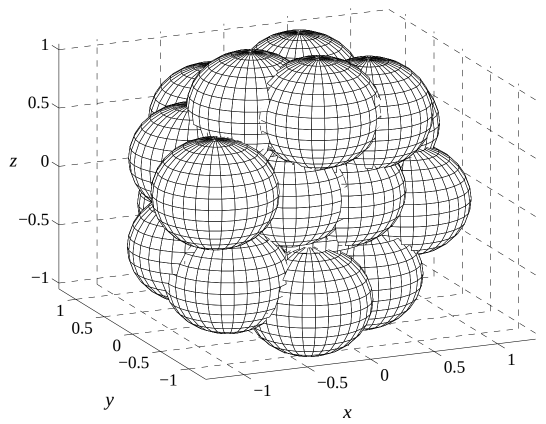


Рис. 8. Часть покрытия $\Xi(S_{29}, r)$ шара M .

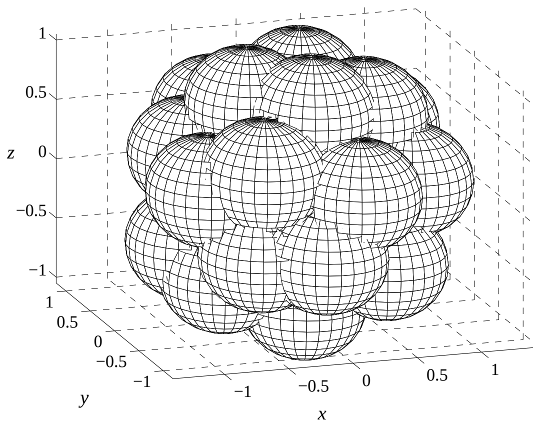


Рис. 9. Покрытие $\Xi(S_{29}, r)$ шара M: вид 1.

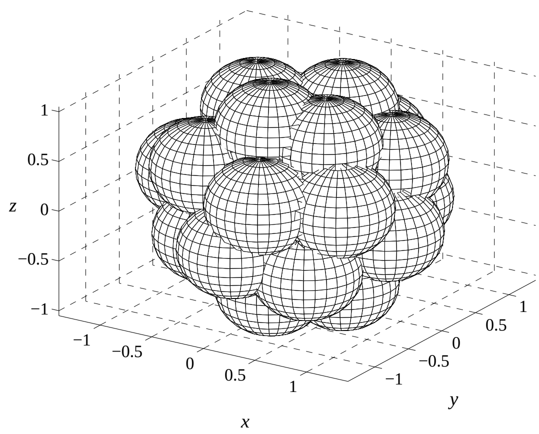


Рис. 10. Покрытие $\Xi(S_{29}, r)$ шара M: вид 2.

Множество M представлено на рис. 7. На рис. 8 показана часть шаров $B(\mathbf{s}_i, r)$ из покрытия $\Xi(S_{29}, r)$ (у которых ордината центра $\mathbf{s}_i$ больше -0.4), чтобы проиллюстрировать его структуру в окрестности начала координат. Полностью множество $\Xi(S_{29}, r)$ представлено на рис. 9 и 10.

Примеры иллюстрируют работу программного комплекса по построению покрытий, близких к оптимальным, множеств в трехмерном пространстве наборами из n шаров равного радиуса. Полученные результаты свидетельствуют о высокой точности применяемых численных методов, позволяющих минимизировать радиус покрытия. При моделировании конкретных примеров требовались большие затраты машинного времени, связанные прежде всего с перебором 4-сетей при построении областей Дирихле и отыскании их чебышевских центров. Это означает, что при увеличении числа n потребуется применять распараллеливание вычислений. Оно, в свою очередь, вызывает необходимость изменения алгоритмов. Одной из возможностей представляется введение возможностей конструирования наилучших n_i-сетей для подмножеств M_i множества M при $i = \overline{1,k}$, $k > 1$, $n_1+n_2+\ldots+n_k = n$, $M_1\cup M_2\cup\ldots\cup M_k = M$, а затем построения на их базе аппроксимации n-сети S_n, хаусдорфово отклонение от которой множества M близко к минимально возможному. Другим путем увеличения скорости вычислений может стать использование субградиентного метода [31] отыскания чебышевского центра многогранника, подобного описанным, например, А. Ф. Шориковым в работах [32; 33], посвященных построению аппроксимаций многогранников. Ранее авторы использовали подобные методы для многоугольников на плоскости [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Ушаков В.Н., Лавров Н.Г., Ушаков А.В.** Конструирование решений в задаче о сближении стационарной управляемой системы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 277–286.
3. **Ушаков В.Н., Малев А.Г.** К вопросу о дефекте стабильности в игровой задаче о сближении // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 199–222.
4. **Куржанский А.Б., Филиппова Т.Ф.** Об описании множества выживающих траекторий дифференциального включения // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 1. С. 38–41.
5. **Черноусько Ф.Л.** Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука. 1988. 384 с.
6. **Aronov B., Ezra E. , and Sharir M.** Small-size ε-nets for axis-parallel rectangles and boxes // SIAM J. Comput. 2010. Vol. 39, no. 7. P. 3248–3282.
7. **Laue S.** Geometric set cover and hitting sets for polytopes in R^3 // 25th Int. Symp. Theoretical Aspects of Comput. Sci. 2008. Vol. 1. P. 479–490.
8. **Лебедев П.Д., Ушаков А.В.** Аппроксимация множеств на плоскости оптимальными наборами кругов // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 79–90.
9. **Лебедев П.Д., Успенский А.А., Ушаков В.Н.** Алгоритмы наилучшей аппроксимации плоских множеств наборами кругов // Вест. Удмурт. ун-та. 2013. Вып. 4. С. 88–99. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
10. **Ушаков В.Н., Лахтин А.С., Лебедев П.Д.** Оптимизация хаусдорфова расстояния между множествами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 291–308.
11. **Райгородский А.М.** Вокруг гипотезы Борсука // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 23. С. 147–164.
12. **Katzarowa–Karanowa P.** Über ein euklidisch-geometrisches Problem von B. Grünbaum // Arch. Math. 1967. Vol. 18, iss. 6. P. 663–672.
13. О задаче патрулирования границы акватории, охраняемой группой подводных аппаратов / И.В. Бычков, Н.Н. Максимкин, И.С. Хозяинов, Л.В. Киселев // Технические проблемы освоения мирового океана: материалы 5-й Всерос. науч.-техн. конф. Владивосток, 2013. С. 424–429.
14. **Казаков А.Л., Лемперт А.А., Бухаров Д.С.** К вопросу о сегментации логистических зон для обслуживания непрерывно распределенных потребителей // Автоматика и телемеханика. 2013. № 6. С. 87–100.
15. **Гаркави А.Л.** О существовании наилучшей сети и наилучшего поперечника множества в банаховом пространстве // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, вып. 2. С. 210–211.
16. **Гаркави А.Л.** О наилучшей сети и наилучшем сечении множеств в нормированном пространстве // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1962. Т. 26, № 1. С. 87–106.
17. **Сосов Е.Н.** Метрическое пространство всех N-сетей геодезического пространства // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. 2009. Т. 15, вып. 4. С. 136–149.
18. **Гаркави А.Л.** О чебышевском центре и выпуклой оболочке множества // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19, вып. 6. С. 139–145.
19. **Белобров П.К.** К вопросу о чебышевском центре множества // Изв. высш. учеб. заведений. Математика. 1964. № 1 (38). С. 3–9.
20. **Сосов Е.Н.** Наилучшее приближение в метрике Хаусдорфа выпуклого компакта шаром // Мат. заметки. 2004. Т. 76, вып. 2. С. 226–236.
21. **Лейхтвейс К.** Выпуклые множества / пер. с нем. В. А.Залгаллера, Т. В. Хачатуровой; под ред. В. А. Залгаллера. М.: Наука, 1985. 335 с. (Leichtweiss K. von. Konvexe Nengene.)
22. **Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.** Современная геометрия. Методы и приложения. 2-е изд., перераб. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 760 с.
23. **Пиявский С.А.** Об оптимизации сетей // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1968. № 1. С. 68–80.
24. **Брусов В.С., Пиявский С.Л.** Вычислительный алгоритм оптимального покрытия областей плоскости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1971. Т. 11, № 2. С. 304–312.
25. **Местецкий Л.М.** Непрерывная морфология бинарных изображений: фигуры, скелеты, циркуляры. М.: Физматлит, 2009. 288 с.
26. **Препарата Ф., Шеймос М.** Вычислительная геометрия. М.: Мир. 1989. 478 с.
27. **Колмогоров А.Н.** О некоторых асимптотических характеристиках вполне ограниченных метрических пространств // Докл. АН СССР. 1956. Т. 108, № 3. С. 385–388.

28. **Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М.** ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. 1959. Вып 2(86). С. 3–86.
29. **Тот Л.Ф.** Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1958. 365 с.
30. **Чен К., Джиблин П., Ирвинг А.** MATLAB в математических исследованиях. М.: Мир, 2001. 346 с.
31. **Поляк Б.Т.** Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 382 с.
32. **Шориков А.Ф.** Алгоритм решения задачи апостериорного минимаксного оценивания состояний дискретных динамических систем. I // Автоматика и телемеханика. 1996. № 7. С. 130–143.
33. **Шориков А.Ф.** Алгоритм решения задачи апостериорного минимаксного оценивания состояний дискретных динамических систем. II // Автоматика и телемеханика. 1996. № 9. С. 139–150.

Ушаков Владимир Николаевич
Поступила 10.04.2015
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
профессор
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: ushak@imm.uran.ru

Лебедев Павел Дмитриевич
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: pleb@yandex.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.9

АБСТРАКТНАЯ ЗАДАЧА О ДОСТИЖИМОСТИ: "ЧИСТО АСИМПТОТИЧЕСКАЯ" ВЕРСИЯ[1]

А. Г. Ченцов

Рассматривается задача о достижимости в топологическом пространстве при ограничениях асимптотического характера. Исследуются конструкция расширения, использующая элементы компактификаций, и более общие процедуры с применением обобщенных элементов. Основное внимание уделяется случаю отсутствия точных решений, для которого изучаются условия реализации множества допустимых обобщенных элементов в наросте, возникающем при погружении пространства обычных решений. В частности, указаны условия, обеспечивающие упомянутую реализацию в наросте при использовании (в качестве обобщенных элементов) ультрафильтров широко понимаемых измеримых пространств.

Ключевые слова: множество притяжения, топологическое пространство, ультрафильтр.

A. G. Chentsov. An abstract reachability problem: "purely asymptotic" version.

A reachability problem in a topological space under constraints of asymptotic nature is considered. An extension construction using elements of compactification, as well as more general procedures employing generalized elements, is studied. The primary focus is on the case where exact solutions are absent. For this case, we study conditions for the realization of the set of admissible generalized elements in a remainder appearing under the immersion of the space of ordinary solutions. In particular, we specify conditions that provide such a realization in a remainder in the case of using (as generalized elements) ultrafilters of broadly understood measurable spaces.

Keywords: attraction set, topological space, ultrafilter.

1. Введение

Настоящий выпуск журнала посвящен Андрею Измайловичу Субботину, выдающемуся ученому-математику, одному из создателей теории дифференциальных игр и целого ряда других направлений современной математики. Автору довелось обсуждать с Андреем Измайловичем вопросы, излагаемые в настоящей работе. Эти обсуждения всякий раз способствовали лучшему пониманию проблемы; они были своеобразными импульсами, помогавшими в исследовании абстрактных постановок и поиску смысла в проведении таких исследований. Автор благодарен судьбе за возможность столь плодотворного общения с А. И. Субботиным.

В работе используются следующие сокращения: БФ — база фильтра, ИП — измеримое пространство, МП — множество притяжения, ОАХ — ограничения асимптотического характера, ОД — область достижимости, ОЭ — обобщенный элемент, п/м — подмножество, ТП — топологическое пространство, у/ф — ультрафильтр, ЭП — элемент притяжения.

Статья посвящена исследованию вопросов, связанных с решением абстрактных задач о достижимости при ОАХ. Упомянутые ОАХ могут возникать изначально, непосредственно определяя асимптотику выбора элементов исходного пространства обычных решений, а могут соответствовать процедурам возмущения, и в частности ослабления стандартных ограничений (таковыми являются в задачах управления краевые и промежуточные условия, фазовые ограничения). Так или иначе, можно полагать, что ОАХ определяются посредством задания непустого семейства п/м пространства обычных решений (управлений). Один из вариантов

[1]Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН "Математические задачи современной теории управления" и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 15-01-07909, 13-01-00304а).

введения ОАХ рассматривался в [1, гл. III] в свете классификации Дж. Варги: точные, обобщенные и приближенные решения в задачах оптимизации, и прежде всего в задачах оптимального управления. Определяемые в [1, гл. III] приближенные решения-последовательности по своему смыслу являются асимптотическими (здесь же напомним работы [2; 3], где подобные конструкции использовались в задачах математического программирования).

Следует отметить, что наряду с излагаемыми в [1, гл. III] конструкциями, реализующими ОАХ посредством последовательного ослабления стандартных ограничений, рассматривались [4;5] естественные постановки, в которых ОАХ (возникающие изначально) непосредственно задаются в виде непустого семейства множеств.

В настоящей работе, продолжающей серию публикаций автора, обсуждаются вопросы, связанные с достижимостью в ТП при наличии ОАХ. В этой связи имеет смысл выделить два варианта задачи о достижимости и на этой основе указать важную функцию расширений исходной задачи, а именно: сведение более сложной и, по сути, асимптотической версии этой задачи к более простой — стандартной. Не вдаваясь в подробности, укажем гипотетическую возможность упомянутого сведения, для чего вначале обсудим и соответствующие варианты задачи о достижимости.

Итак, пусть имеются непустые множества X и Y, (целевое) отображение $f\colon X \to Y$ и множество M, содержащееся в X. Рассматривая точки $x \in X$ как решения, подлежащие выбору, а точки Y — как желаемые результаты, множество-образ $f^1(M) = \{f(x)\colon x \in M\}$ можно (при $M \subset X$) интерпретировать как некоторый аналог ОД в задачах управления, отвечающий ограничению $x \in M$ (выбирая такие x, получаем в виде результата $f(x) \in f^1(M)$). Достижимость элементов Y в упомянутом смысле будем называть *стандартной* (ОД в теории управления есть важный частный случай данной конструкции).

Другой вариант реализуется в условиях, когда вместо одного множества M задано непустое семейство $\mathcal{M}$ п/м X (в этом случае $\mathcal{M}$ порождает ОАХ), а Y оснащено отделимой топологией t (последняя может быть метризуемой, что соответствует рассмотрению метрического пространства с “единицей” Y). В этом случае семейству $\mathcal{M}$ можно сопоставить МП (AS)$[\mathcal{M}]$ в (Y, t), реализуемое на значениях f. Точное определение этого МП в общем случае сейчас не рассматриваем, но в наиболее интересном для практики случае, когда $\mathcal{M}$ есть БФ (см. [6, с. 101]), упомянутое МП есть пересечение замыканий (в (Y, t)) множеств-образов $f^1(B)$, $B \in \mathcal{M}$. Второй вариант задачи о достижимости (первый мы назвали стандартным) будем связывать как раз с построением МП, что объективно представляет собой, конечно, более сложную проблему. Вполне естественным представляется желание свести данный второй вариант к (более простому в логическом отношении) первому. Реализовать упомянутое сведение удается во многих практически интересных случаях на основе идеи расширения пространства обычных решений. При этом X погружается (см. [7, предложение 5.2.1]) в то или иное компактное ТП $(K, \tilde{t})$, а f “заменяется” непрерывным (в смысле $(K, \tilde{t})$ и (Y, t)) отображением $\tilde{f}$ с соблюдением условия $f = \tilde{f} \circ m$, где m есть оператор на X, осуществляющий погружение последнего в K. В этом случае удается указать множество K_o, $K_o \subset K$, образ $\tilde{f}^1(K_o)$ которого как раз и определяет искомое МП.

Конкретный выбор набора $(K, \tilde{t}, m, \tilde{f})$ может осуществляться различными способами, что соответствует объективно различным вариантам расширения исходной задачи. В теории управления широко используется схема расширения, реализуемая в классе мерозначных функций (см. [1; 8; 9] и др.), т. е. в классе управлений-мер. В работах Н. Н. Красовского и его учеников упомянутая схема использовалась как при исследовании разрешимости дифференциальной игры (при определении стабильных мостов Н. Н. Красовский и А. И. Субботин использовали обобщенные реакции на управления игрока-противника, что сыграло важную роль в установлении ими фундаментальной теоремы об альтернативе; см. [10; 11]), так и при построении вспомогательных программных конструкций для позиционного управления. Вопросы, связанные с взаимодействием обобщенных и приближенных решений, подробно рассматривались в [1, гл. III, IV].

Отметим, что в общей топологии интенсивно развивается направление, связанное с расширением ТП (см., например, [12; 13]). При целом ряде существенных различий расширения в задачах прикладной математики (в частности, в теории управления) и в топологии имеют много общего. Возникает, в частности, естественный вопрос о возможности и целесообразности применения “топологических” расширений при исследовании абстрактных задач о достижимости. Этот вопрос касается вышеупомянутой возможности сведения асимптотической версии задачи о достижимости к стандартной. Представляется, что “топологические” расширения могут дополнять подходы на основе традиционных (для соответствующей области прикладной математики) конструкций.

Одна из таких возможностей обсуждается в статье и связывается с реализацией ОЭ в наросте, возникающем при погружении пространства обычных решений в соответствующее компактное ТП. Наиболее понятной данная ситуация становится при отсутствии точных решений, понимаемых в смысле, подобном [1, гл. III]. Полезно отметить, однако, что в случае исследования задачи с ОАХ множество допустимых ОЭ есть вариант МП.

Чтобы уточнить данное высказывание, вернемся к рассмотрению асимптотического варианта задачи о достижимости, следуя вышеупомянутому толкованию $X, (Y, t), f$ и сопоставляя непустому семейству $\mathcal{M}$ п/м X соответствующее МП (AS)$[\mathcal{M}]$. Кроме того, пусть $(K, \tilde{t}, m, \tilde{f})$ есть вышеупомянутый набор со свойствами компактности $(K, \tilde{t})$, непрерывности $\tilde{f}$ и равенства $f = \tilde{f} \circ m$ (более подробное описание было приведено выше). Тогда множество K_o (допустимых ОЭ) само является МП в $(K, \tilde{t})$, для которого (AS)$[\mathcal{M}] = \tilde{f}^1(K_o)$; построение K_o подобно аналогичному построению (AS)$[\mathcal{M}]$ при очевидных заменах $(Y, t) \longrightarrow (K, \tilde{t})$, $f \longrightarrow m$. В этой связи полагаем (as)$[\mathcal{M}] \stackrel{\triangle}{=} K_o$ с тем, чтобы подчеркнуть зависимость от $\mathcal{M}$. Получаем, что

$$(\mathrm{AS})[\mathcal{M}] = \tilde{f}^1((\mathrm{as})[\mathcal{M}]). \tag{1.1}$$

Основной операцией при построении МП (1.1) можно считать теперь построение вспомогательного МП (as)$[\mathcal{M}]$. Пересечение же всех множеств из $\mathcal{M}$ можно рассматривать в качестве аналога множества точных решений Дж. Варги (см. [1, гл. III]). Представляет интерес случай, когда упомянутое пересечение пусто, т. е. точных (обычных) решений не существует вовсе. Это, однако, не означает еще пустоты МП (as)$[\mathcal{M}]$, а стало быть, и (AS)$[\mathcal{M}]$.

Представляется, что в упомянутом случае отсутствия точных решений естественно ожидать свойства (as)$[\mathcal{M}] \subset K \setminus m^1(X)$, где $m^1(X) = \{m(x) \colon x \in X\}$. Иными словами, логично ожидать реализации ОЭ в наросте. Тем не менее, это свойство может отсутствовать (см. пример в разд. 4).

Вместе с тем в широком классе “топологических” расширений упомянутое свойство “реализации в наросте” уже имеет место; в качестве ОЭ при этом используются у/ф широко (см. [14–16]) понимаемых ИП. Обсуждению данной возможности посвящается настоящая статья. Соответствующая схема излагается при этом в более общем в сравнении с потребностями реализации (1.1) варианте, что может оказаться полезным в некоторых оценочных конструкциях, когда (1.1) не достигается и реализуется всего лишь вложение $\tilde{f}^1\big((\mathrm{as})[\mathcal{M}]\big) \subset (\mathrm{AS})[\mathcal{M}]$ (случай, когда ТП $(K, \tilde{t})$ некомпактно).

2. Обозначения и определения общего характера

Используется стандартная теоретико-множественная символика: кванторы, связки; $\varnothing$ — пустое множество, $\stackrel{\triangle}{=}$ — равенство по определению. Символ def заменяет фразу “по определению”, а $\exists!$ (как обычно) — фразу “существует и единственно”. Принимаем аксиому выбора и называем семейством множество, все элементы которого сами являются множествами. Для всякого объекта x через $\{x\}$ обозначаем синглетон, содержащий x. Через $\mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{P}'(X)$ обозначаем соответственно семейства всех и всех непустых п/м множества X. Пусть $\mathrm{Fin}(X)$ — семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(X)$. Тогда для всякого множества H в виде $\mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(H)\big)$

имеем семейство всевозможных непустых подсемейств $\mathcal{P}(H)$. При этом $\mathbf{C}_H[\mathcal{H}] \overset{\triangle}{=} \{H \setminus S \colon S \in \mathcal{H}\} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(H)\big)\ \forall \mathcal{H} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(H)\big)$ (введено семейство всевозможных дополнений множеств фиксированного семейства). Через B^A обозначаем множество всех отображений из множества A в множество B (при $f \in B^A$ и $a \in A$ в виде $f(a) \in B$ имеем значение f в точке a). Как обычно, при $g \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$ в виде $g^1(C) \overset{\triangle}{=} \{g(c)\colon c \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ реализуется образ C при действии g, $g^1(C) \neq \varnothing$ при $C \neq \varnothing$. Рассматриваем также "образы" семейств: если $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — непустые множества, $f \in \mathbb{B}^{\mathbb{A}}$ и $\mathcal{A} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{A}))$, то $f^1[\mathcal{A}] \overset{\triangle}{=} \{f^1(A)\colon A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(\mathbb{B})\big)$ интерпретируем как "образ" $\mathcal{A}$. Если $\mathcal{E}$ — непустое семейство, то полагаем, что

$$\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E}) \overset{\triangle}{=} \Big\{\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{K}} \Sigma \colon \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{E})\Big\}. \tag{2.1}$$

Семейства множеств. Фиксируем в пределах настоящего пункта непустое множество I. Будем рассматривать те или иные специальные семейства из $\mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(I)\big)$ и их совокупности: так, в виде

$$\pi[I] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(I)\big) \mid (\varnothing \in \mathcal{I})\,\&\,(I \in \mathcal{I})\,\&\,(A \cap B \in \mathcal{I}\ \ \forall A \in \mathcal{I}\ \ \forall B \in \mathcal{I})\}$$

имеем семейство всех π-систем [17, с. 14] п/м I с "нулём" и "единицей";

$$(\mathrm{alg})[I] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{A} \in \pi[I] \mid I \setminus A \in \mathcal{A}\ \ \forall A \in \mathcal{A}\}, \quad (\mathrm{top})[I] \overset{\triangle}{=} \Big\{\tau \in \pi[I] \,\Big|\, \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau\ \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\Big\} \tag{2.2}$$

— семейства всех алгебр п/м I и всех топологий на I. Условимся рассматривать пары $(I, \mathcal{I})$, где $\mathcal{I} \in \pi[I]$, как ИП, используя, конечно, здесь расширительное толкование. Среди таких ИП выделяем отделимые, полагая, что

$$\tilde{\pi}^o[I] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{I} \in \pi[I] \mid \forall L \in \mathcal{I}\ \ \forall x \in I \setminus L\ \ \exists \Lambda \in \mathcal{I}\colon (x \in \Lambda)\,\&\,(\Lambda \cap L = \varnothing)\} \tag{2.3}$$

(из (2.2), (2.3) следует, что $(\mathrm{alg})[I] \subset \tilde{\pi}^o[I]$). Если $\mathcal{J} \in \tilde{\pi}^o[I]$, то пару $(I, \mathcal{J})$ рассматриваем как отделимое ИП. Сами π-системы из множества (2.3) также называем *отделимыми.* Полагаем также, что

$$\pi'_o[I] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{J} \in \pi[I] \mid \{x\} \in \mathcal{J}\ \ \forall x \in I\}. \tag{2.4}$$

Понятно, что $\pi'_o[I] \subset \tilde{\pi}^o[I]$. В (2.4) введены π-системы с синглетонами.

В дальнейшем через $\beta[I]$ (через $\beta_o[I]$) обозначаем семейство всех $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(I)\big)$ (всех $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}'(I)\big)$) таких, что

$$\forall B_1 \in \mathcal{B}\ \ \forall B_2 \in \mathcal{B}\ \ \exists B_3 \in \mathcal{B}\colon B_3 \subset B_1 \cap B_2. \tag{2.5}$$

Семейства из $\beta[I]$ являются в силу (2.5) направленными (двойственно к вложению), а семейства из $\beta_o[I]$ суть БФ множества I и только они.

Фильтры $\boldsymbol{\pi}$-систем, I. В настоящем пункте фиксируем ИП $(I, \mathcal{I})$, $I \neq \varnothing$, $\mathcal{I} \in \pi[I]$. Элементы семейства

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \overset{\triangle}{=} \big\{&\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}) \mid (\varnothing \notin \mathcal{F})\,\&\,(A \cap B \in \mathcal{F}\ \ \forall A \in \mathcal{F}\ \ \forall B \in \mathcal{F}) \\ &\&\,\big(\forall F \in \mathcal{F}\ \ \forall J \in \mathcal{I}\ \ (F \subset J) \Rightarrow (J \in \mathcal{F})\big)\big\} \end{aligned} \tag{2.6}$$

являются фильтрами ИП $(I, \mathcal{I})$ (в широком толковании последнего), а элементы

$$\mathbb{F}^*_o(\mathcal{I}) \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I})\ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Rightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} \tag{2.7}$$

— соответственно у/ф данного ИП. Каждое из семейств (2.6), (2.7) непусто. Для построения фильтров и у/ф традиционно используются базы: если $\mathcal{B} \in \beta_o[I]$, то

$$(I - \mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{I}] \overset{\triangle}{=} \{J \in \mathcal{I} \mid \exists B \in \mathcal{B}\colon B \subset J\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I});$$

обычно бывают достаточны базы из семейства $\beta^o_I(\mathcal{I}) \stackrel{\triangle}{=} \{\widetilde{\mathcal{B}} \in \beta_o[I] \mid \widetilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{I}\}$, т. е. БФ, содержащиеся в $\mathcal{I}$. Заметим, что при $x \in I$

$$\big((I,\mathcal{I}) - \mathrm{ult}\big)[x] \stackrel{\triangle}{=} \{J \in \mathcal{I} \mid x \in J\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I}), \tag{2.8}$$

но возможен случай, когда $\big((I,\mathcal{I}) - \mathrm{ult}\big)[x] \notin \mathbb{F}^*_o(\mathcal{I})$ ((2.8) — тривиальный фильтр, соответствующий точке x). Тогда множество

$$\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{t}}(\mathcal{I}) \stackrel{\triangle}{=} \big\{\big((I,\mathcal{I}) - \mathrm{ult}\big)[x]\colon x \in I\big\} \in \mathcal{P}'\big(\mathbb{F}^*(\mathcal{I})\big)$$

рассматриваем как результат погружения I в $\mathbb{F}^*(\mathcal{I})$ посредством оператора

$$\big((I,\mathcal{I}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]\colon I \longrightarrow \mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \tag{2.9}$$

(образ I при действии оператора (2.9));

$$\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}(\mathcal{I}) \stackrel{\triangle}{=} \Big\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_o(\mathcal{I}) \,\Big|\, \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \varnothing\Big\} = \mathbb{F}^*_o(\mathcal{I}) \setminus \mathbb{F}^*_{o,\mathbf{t}}(\mathcal{I}) \tag{2.10}$$

есть множество всех свободных у/ф ИП $(I,\mathcal{I})$. Если $L \in \mathcal{I}$, то

$$\Phi_{\mathcal{I}}(L) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_o(\mathcal{I}) \mid L \in \mathcal{U}\}. \tag{2.11}$$

В этих терминах определяем множества

$$\mathbb{F}^*_o(\mathcal{I}|\,\mathcal{J}) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_o(\mathcal{I}) \mid \mathcal{J} \subset \mathcal{U}\} = \bigcap_{J \in \mathcal{J}} \Phi_{\mathcal{I}}(J) \quad \forall \mathcal{J} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}), \tag{2.12}$$

играющие в дальнейшем важную роль. Обобщая (2.11), введем

$$\mathbf{F}^*_o[\mathcal{I}|\,A] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_o(\mathcal{I}) \mid A \cap U \neq \varnothing \ \ \forall U \in \mathcal{U}\} \quad \forall A \in \mathcal{P}(I) \tag{2.13}$$

(действительно [16, с. 92], $\Phi_{\mathcal{I}}(L) = \mathbf{F}^*_o[\mathcal{I}|\,L]$ при $L \in \mathcal{I}$). Отметим, что (см. [15;16]) при условии $\mathcal{I} \in \tilde{\pi}^o[I]$ (случай отделимого ИП) $\big((I,\mathcal{I}) - \mathrm{ult}\big)[x] \in \mathbb{F}^*_o(\mathcal{I})\ \forall x \in I$. Следовательно, в данном случае (2.9) есть погружение I в $\mathbb{F}^*_o(\mathcal{I})$. Данное свойство используется ниже без дополнительных пояснений.

Частный случай. Полагаем в пределах данного пункта, что $\mathcal{I} = \mathcal{P}(I)$, где I — непустое множество. Тогда пусть $\mathfrak{F}[I] \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{F}^*\big(\mathcal{P}(I)\big)$, $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{F}^*_o\big(\mathcal{P}(I)\big)$ и $(I - \mathrm{fi})[\mathcal{B}] \stackrel{\triangle}{=} (I - \mathrm{fi})[\mathcal{B}|\,\mathcal{P}(I)]\ \ \forall \mathcal{B} \in \beta_o[I]$. Ясно, что $(I - \mathrm{fi})[\mathcal{B}] \in \mathfrak{F}[I]$ при $\mathcal{B} \in \beta_o[I]$. Кроме того,

$$(I - \mathrm{ult})[x] \stackrel{\triangle}{=} \big(\big(I,\mathcal{P}(I)\big) - \mathrm{ult}\big)[x] = \{J \in \mathcal{P}(I) \mid x \in J\} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \quad \forall x \in I.$$

Наконец, имеем естественный вариант (2.11): если $L \in \mathcal{P}(I)$, то

$$\Phi_o(L|\,I) \stackrel{\triangle}{=} \Phi_{\mathcal{P}(I)}(L) = \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \mid L \in \mathcal{U}\}. \tag{2.14}$$

С (2.14) связываем процедуру, подобную (2.12): если $\mathcal{J} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(I)\big)$, то

$$\mathfrak{F}^o_{\mathbf{u}}[I|\,\mathcal{J}] \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{F}^*_o\big(\mathcal{P}(I)|\,\mathcal{J}\big) = \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \mid \mathcal{J} \subset \mathcal{U}\} = \bigcap_{J \in \mathcal{J}} \Phi_o(J|\,I). \tag{2.15}$$

Элементы топологии, I. В настоящем пункте фиксируем $\tau \in (\mathrm{top})[I]$, где I — непустое множество; итак (I,τ) есть ТП и, в частности, ИП в нашем расширительном толковании, а потому (2.6), (2.7) применимы в (нашем) случае $\mathcal{I} = \tau$. Если $x \in I$, то $N_\tau^o(x) \stackrel{\triangle}{=} \{G \in \tau \mid x \in G\} \in \mathbb{F}^*(\tau)$ и, в частности, $N_\tau^o(x) \in \beta_o[I]$, а потому определен фильтр

$$N_\tau(x) \stackrel{\triangle}{=} (I - \mathbf{fi})[N_\tau^o(x)] \in \mathfrak{F}[I]$$

окрестностей x в ТП (I, τ), понимаемых в смысле [18, гл. I]. Множеству $H \in \mathcal{P}(I)$ сопоставляем замыкание $\mathrm{cl}(H, \tau)$ и внутренность $(\tau - \mathrm{Int})[H] \stackrel{\triangle}{=} \{x \in I \mid H \in N_\tau(x)\} \in \tau$. Наконец,

$$(\tau - \mathrm{isol})[I] \stackrel{\triangle}{=} \{x \in I \mid \{x\} \in \tau\} \tag{2.16}$$

есть множество всех изолированных в (I, τ) точек I. Легко видеть, что $(\tau - \mathrm{isol})[I] \in \tau$. Через $(\tau - \mathrm{dens})[I]$ обозначаем семейство всех всюду плотных в (I, τ) п/м I:

$$(\tau - \mathrm{dens})[I] \stackrel{\triangle}{=} \{H \in \mathcal{P}(I) \mid I = \mathrm{cl}(H, \tau)\}.$$

Напомним, что $\mathbf{C}_I[\tau] = \{I \setminus G \colon G \in \tau\} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(I)\big)$ есть семейство всех замкнутых в (I, τ) п/м I. Далее через $(\tau - \mathrm{comp})[I]$ обозначаем семейство всех компактных в ТП (I, τ) п/м множества I. Следуя [18, гл. I], полагаем, что $\forall \mathcal{B} \in \beta_o[I] \ \ \forall x \in I$

$$(\mathcal{B} \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} x) \stackrel{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \big(N_\tau(x) \subset (I - \mathbf{fi})[\mathcal{B}]\big). \tag{2.17}$$

Разумеется, посредством (2.17) определена, в частности, сходимость фильтров и у/ф.

Фильтры $\boldsymbol{\pi}$-систем, II. В настоящем пункте вновь фиксируем ИП $(I, \mathcal{I})$, $I \neq \varnothing$, $\mathcal{I} \in \pi[I]$. Используя (2.11), введем (непустое) семейство $(\mathbb{UF})[I; \mathcal{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\Phi_{\mathcal{I}}(J) \colon J \in \mathcal{I}\} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}\big(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{I})\big)\big)$, которое, как легко видеть, есть база топологии

$$\mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[I] \stackrel{\triangle}{=} \{G \in \mathcal{P}\big(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{I})\big) \mid \forall \mathcal{U} \in G \ \exists U \in \mathcal{U} \colon \Phi_{\mathcal{I}}(U) \subset G\} \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_o^*(\mathcal{I})] \tag{2.18}$$

(см. (2.6), (2.7)). С учетом (2.18) легко проверяется, что

$$\big(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{I}), \mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[I]\big) \tag{2.19}$$

есть T_2-пространство (хаусдорфово ТП), в котором все множества (2.11) открыто-замкнуты, а потому

$$(\mathbb{UF})[I; \mathcal{I}] \subset \mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[I] \cap \mathbf{C}_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{I})}\big[\mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[I]\big], \tag{2.20}$$

что означает справедливость следующего свойства: ТП (2.19) нульмерно. Заметим, что в силу (2.12) и (2.20) $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{I} | \, \mathcal{J}) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{I})}\big[\mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[I]\big] \ \ \forall \mathcal{J} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I})$.

Предложение 2.1. *Если $A \in \mathcal{P}(I)$, то множество $\mathbf{F}_o^*[\mathcal{I} | \, A]$ замкнуто в* ТП (2.19):

$$\mathbf{F}_o^*[\mathcal{I} | \, A] \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{I})}\big[\mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[I]\big].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A \in \mathcal{P}(I)$. Введем в рассмотрение (см. (2.13)) множество

$$\Omega \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{F}_o^*(\mathcal{I}) \setminus \mathbf{F}_o^*[\mathcal{I} | \, A] = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{I}) \mid \exists U \in \mathcal{U} \colon A \cap U = \varnothing\}. \tag{2.21}$$

Тогда $\Omega \in \mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[I]$. В самом деле, пусть $\mathcal{V} \in \Omega$. Тогда $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{I})$ и для некоторого $V \in \mathcal{V}$ имеет место равенство $A \cap V = \varnothing$. Рассмотрим множество $\Phi_{\mathcal{I}}(V) \in (\mathbb{UF})[I; \mathcal{I}]$. Пусть $\mathcal{W} \in \Phi_{\mathcal{I}}(V)$, т. е. $\mathcal{W} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{I})$ и при этом $V \in \mathcal{W}$ (см. (2.11)). Тогда имеем, в частности, что $\exists U \in \mathcal{W} \colon A \cap U = \varnothing$. С учетом (2.21) получаем, что $\mathcal{W} \in \Omega$. Поскольку выбор $\mathcal{W}$ был произвольным, установлено, что $\Phi_{\mathcal{I}}(V) \subset \Omega$. Коль скоро и $\mathcal{V}$ выбиралось произвольно, имеем из (2.18) требуемое свойство: Ω открыто в смысле (2.19), а потому (см. (2.21)) $\mathbf{F}_o^*[\mathcal{I} | \, A] = \mathbb{F}_o^*(\mathcal{I}) \setminus \Omega$ замкнуто в этом ТП. $\square$

З а м е ч а н и е 2.1. Если $\mathcal{I} \in (\mathrm{alg})[I]$, то (2.19) — компакт (компактное T_2-пространство) и при этом $(\mathbb{UF})[I;\mathcal{I}] = \mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[I] \cap \mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_o(\mathcal{I})}\big[\mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[I]\big]$. Итак, в данном случае база $(\mathbb{UF})[I;\mathcal{I}]$ совпадает с семейством всех открыто-замкнутых множеств порождаемого ею пространства.

До конца настоящего пункта полагаем, что $\mathcal{I} \in \tilde{\pi}^o[I]$. Отметим тогда, что (см. [16]) имеет место следующее свойство плотности:

$$\mathbf{F}^*_o[\mathcal{I}|\,A] = \mathrm{cl}\Big(\big((I,\mathcal{I}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A), \mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[I]\Big) \quad \forall A \in \mathcal{P}(I). \tag{2.22}$$

Из (2.22) вытекает, в частности, что

$$\Phi_{\mathcal{I}}(L) = \mathrm{cl}\Big(\big((I,\mathcal{I}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(L), \mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[I]\Big) \quad \forall L \in \mathcal{I}. \tag{2.23}$$

В свою очередь, из (2.23) получаем очевидное следствие

$$\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{t}}(\mathcal{I}) \in (\mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[I] - \mathrm{dens})[\mathbb{F}^*_o(\mathcal{I})]. \tag{2.24}$$

Итак (см. (2.24)), при $\mathcal{I} \in \tilde{\pi}^o[I]$ тривиальные у/ф образуют множество, всюду плотное в ТП (2.19).

Элементы топологии, II. В пределах настоящего пункта фиксируем непустые множества $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$. Отметим, что при $s \in \mathbb{Y}^{\mathbb{X}}$ и $\mathcal{B} \in \beta_o[\mathbb{X}]$ непременно $s^1[\mathcal{B}] \in \beta_o[\mathbb{Y}]$ (см. [18, гл. I]). Разумеется, в качестве $\mathcal{B}$ можно использовать у/ф из $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{X}]$. Наконец, может использоваться также вариант $\mathcal{B} = \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_o(\mathcal{J})$, где $\mathcal{J} \in \pi[\mathbb{X}]$. Итак, “образы” БФ, фильтров и у/ф суть БФ.

Если $\tau_1 \in (\mathrm{top})[\mathbb{X}]$ и $\tau_2 \in (\mathrm{top})[\mathbb{Y}]$, то полагаем $C(\mathbb{X},\tau_1,\mathbb{Y},\tau_2) \overset{\triangle}{=} \{f \in \mathbb{Y}^{\mathbb{X}} \mid f^{-1}(G) \in \tau_1 \ \forall G \in \tau_2\}$, получая множество всех (τ_1,τ_2)-непрерывных отображений из множества $\mathbb{Y}^{\mathbb{X}}$.

3. Множества притяжения

Всюду в дальнейшем фиксируем непустое множество E в качестве пространства обычных решений. В настоящем разделе фиксируем также ТП (Y,τ), $Y \neq \varnothing$, и отображение $f \in Y^E$, сопоставляющее решению $e \in E$ точку $f(e) \in Y$. Последняя играет роль результата, доставляемого упомянутым решением. При $\mathcal{B} \in \beta_o[E]$ имеем $f^1[\mathcal{B}] \in \beta_o[Y]$, а тогда $\forall y \in Y$

$$(f^1[\mathcal{B}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} y) \Longleftrightarrow \big(N_\tau(y) \subset (Y - \mathbf{fi})\big[f^1[\mathcal{B}]\big]\big). \tag{3.1}$$

Разумеется, в (3.1) допускается случай $\mathcal{B} = \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$. Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$, то

$$(\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}] \overset{\triangle}{=} \{y \in Y \mid \exists\, \mathcal{U} \in \mathfrak{F}^o_{\mathbf{u}}[E|\,\mathcal{E}] \colon f^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} y\} \tag{3.2}$$

рассматриваем как МП при ОАХ $\mathcal{E}$. Данное МП допускает эквивалентное представление в терминах направленностей и сходимости по Мору — Смиту, а при дополнительных условиях — в терминах последовательностей (в этой связи см. [15]). Отметим также, что (см. [15])

$$(\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}] = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \mathrm{cl}\big(f^1(\Sigma),\tau\big) \quad \forall \mathcal{E} \in \beta[E]. \tag{3.3}$$

Вместе с тем, как легко видеть, при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$ согласно (2.1) $\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E}) \in \beta[E]$ и

$$(\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}] = (\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})], \tag{3.4}$$

откуда следует (см. (3.3)), что в упомянутом общем случае семейства $\mathcal{E}$

$$(\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}] = \bigcap_{\Sigma \in \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})} \mathrm{cl}\big(f^1(\Sigma),\tau\big). \tag{3.5}$$

По целому ряду причин представляет интерес вопрос о реализации точек МП, т. е. ЭП, в виде $f(x)$, где $x \in E$. Данный вопрос смыкается с вопросом о роли точных решений Дж. Варги [1, гл. III]. В принятой здесь редакции речь идет о множестве $f^{-1}\big((\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}]\big)$ при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$. Весьма очевидно следующее

Предложение 3.1. *Если* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$, *то*

$$\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma \subset f^{-1}\big((\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}]\big). \tag{3.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введя $\widetilde{\mathcal{E}} \stackrel{\triangle}{=} \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})$ и воспользовавшись (3.5), получаем, что $(\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}]$ есть пересечение всех множеств $\mathrm{cl}\big(f^1(\widetilde{\Sigma}),\tau\big)$, $\widetilde{\Sigma} \in \widetilde{\mathcal{E}}$. Выберем произвольно точку p_o из множества в левой части (3.6). Тогда $p_o \in \widetilde{\Sigma}\ \forall \widetilde{\Sigma} \in \widetilde{\mathcal{E}}$ (учитываем (2.1)). Поэтому $f(p_o) \in f^1(\widetilde{\Sigma})\ \forall \widetilde{\Sigma} \in \widetilde{\mathcal{E}}$. Тем более, $f(p_o) \in \mathrm{cl}\big(f^1(\widetilde{\Sigma}),\tau\big)\ \forall \widetilde{\Sigma} \in \widetilde{\mathcal{E}}$. Это означает (см. (3.5)), что $f(p_o) \in (\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}]$ и, стало быть, $p_o \in f^{-1}\big((\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}]\big)$. □

Предложение 3.2. *Если* $\big(f(x) \in (\tau - \mathrm{isol})[Y]\ \ \forall x \in E\big)\ \&\ \Big(\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)\Big)$, *то*

$$\forall u \in f^{-1}\big((\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}]\big) \quad \forall \Sigma \in \mathcal{E} \quad \exists\, v \in \Sigma\colon\ f(u) = f(v).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнены оба условия настоящего предложения. Выберем произвольно $x_* \in f^{-1}\big((\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}]\big)$. Тогда $x_* \in E$ и $f(x_*) \in (\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}]$; вместе с тем, $f(x_*) \in (\tau - \mathrm{isol})[Y]$. С учетом (2.16) получаем, что $\{f(x_*)\} \in \tau$ и, следовательно, $\{f(x_*)\} \in N_\tau^o\big(f(x_*)\big)$. В частности,

$$\{f(x_*)\} \in N_\tau\big(f(x_*)\big). \tag{3.7}$$

Вместе с тем согласно (3.2) для некоторого у/ф $\mathfrak{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^o[E|\,\mathcal{E}]$ имеет место сходимость $f^1[\mathfrak{U}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} f(x_*)$. Тогда $\mathfrak{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ и при этом $\mathcal{E} \subset \mathfrak{U}$ (см. (2.15)). В силу (3.1)

$$N_\tau\big(f(x_*)\big) \subset (Y - \mathbf{fi})\big[f^1[\mathfrak{U}]\big],$$

откуда, в частности, следует по аксиомам фильтра, что $A \cap f^1(U) \neq \varnothing\ \ \forall A \in N_\tau(x_*)\ \ \forall U \in \mathfrak{U}$. Пусть $\Sigma_o \in \mathcal{E}$. Тогда последнее свойство означает, что (см. (3.7)) $\{f(x_*)\} \cap f^1(\Sigma_o) \neq \varnothing$, поскольку $\Sigma_o \in \mathfrak{U}$. Поэтому $f(x_*) \in f^1(\Sigma_o)$, а тогда для некоторого $x^* \in \Sigma_o$ имеем равенство $f(x_*) = f(x^*)$. Требуемое свойство установлено. □

Теорема 3.1. *Пусть отображение* f *инъективно, т. е.* $\forall x_1 \in E\ \ \forall x_2 \in E$

$$\big(f(x_1) = f(x_2)\big) \Longrightarrow (x_1 = x_2), \tag{3.8}$$

и, кроме того, $f(x) \in (\tau - \mathrm{isol})[Y]\ \ \forall x \in E$. *Тогда*

$$f^{-1}\big((\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}]\big) = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big). \tag{3.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$. Выберем произвольно точку $u \in f^{-1}\big((\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}]\big)$. Тогда $u \in E$, согласно предложению 3.2 $\forall \Sigma \in \mathcal{E}\ \exists\, v \in \Sigma\colon f(u) = f(v)$. С учетом (3.8) получаем, что $u \in \Sigma\ \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}$. Тем самым установлено, что

$$f^{-1}\big((\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}]\big) \subset \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma. \tag{3.10}$$

С учетом (3.10) и предложения 3.1 получаем нужное свойство (3.9). □

Следствие 3.1. *Пусть* $f \in (\tau - \mathrm{isol})[Y]^E$ *обладает свойством инъективности* (*см.* (3.8)). *Тогда* $\forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$

$$\Big(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma = \varnothing\Big) \Longrightarrow \big((\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}] \subset Y \setminus f^1(E)\big). \tag{3.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть истинна посылка доказываемой импликации (3.11). Тогда в силу теоремы 3.1 имеем, что $f^{-1}\big((\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}]\big) = \varnothing$, и, следовательно,

$$f(x) \notin (\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}] \quad \forall x \in E.$$

Поэтому $(\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}] \cap f^1(E) = \varnothing$. С учетом (3.2) получаем требуемое утверждение. □

4. Обобщенные элементы и вспомогательные множества притяжения

В настоящем кратком разделе коснемся вопросов представления одних МП в терминах других. Фиксируем непустое множество $\mathbf{H}$ и топологию $\tilde{\mathbf{t}} \in (\mathrm{top})[\mathbf{H}]$, превращающую $\mathbf{H}$ в T_2-пространство $(\mathbf{H}, \tilde{\mathbf{t}})$, а также отображение $r \in \mathbf{H}^E$, рассматриваемое в качестве целевого. Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$, т. е. заданы ОАХ, то МП $(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\mathbf{t}}; r; \mathcal{E}] \in \mathcal{P}(\mathbf{H})$ рассматриваем в качестве основного. Для построения основного МП привлекаем конструкцию $(\mathbf{H}, \tilde{\mathbf{t}}, r)$-компактификатора [19, разд. 3]: мы называем здесь $(\mathbf{H}, \tilde{\mathbf{t}}, r)$-компактификатором всякий кортеж $(K, \tilde{\tau}, p, q)$, для которого $(K, \tilde{\tau})$ — компактное ТП, $K \neq \varnothing$, $p \in K^E$, $q \in C(K, \tilde{\tau}, \mathbf{H}, \tilde{\mathbf{t}})$ и при этом $r = q \circ p$, где $\circ$ — символ композиции отображений $\big(r(x) = q\big(p(x)\big)$ при $x \in E\big)$.

Ключевое для наших построений свойство имеет следующий вид: если $(K, \tilde{\tau}, p, q)$ есть $(\mathbf{H}, \tilde{\mathbf{t}}, r)$-компактификатор, то [15; 19]

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\mathbf{t}}; r; \mathcal{E}] = q^1\big((\mathbf{as})[E; K; \tilde{\tau}; p; \mathcal{E}]\big) \in (\tilde{\mathbf{t}} - \mathrm{comp})[\mathbf{H}] \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big). \tag{4.1}$$

С учетом (4.1) получаем, что (при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$) проблема построения основного МП “перекладывается” на построение вспомогательного МП $(\mathbf{as})[E; K; \tilde{\tau}; p; \mathcal{E}]$; последнее существенно облегчается, если $p^1(E) \in (\tilde{\tau} - \mathrm{dens})[K]$. С учетом этих обстоятельств конструкции предыдущего раздела можно адресовать тому случаю, когда $(Y, \tau) = (K, \tilde{\tau})$, $f = p$. Само вспомогательное МП является, по сути дела (см. (4.1)), множеством допустимых ОЭ, непрерывный образ которого определяет основное МП. При этом согласно (4.1) “асимптотическая” достижимость, соответствующая множеству в левой части (4.1), сводится к стандартной (см. правую часть (4.1)). Тем самым реализуется важная, упомянутая во введении, функция расширения, осуществляемого посредством $(\mathbf{H}, \tilde{\mathbf{t}}, r)$-компактификатора. Теорему 3.1 и следствие 3.1 можно использовать для целей исследования вспомогательного МП $(\mathbf{as})[E; K; \tilde{\tau}; p; \mathcal{E}]$ на предмет реализации ОЭ в наросте $K \setminus p^1(E)$ в случае, когда семейство $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$ обладает свойством пустоты пересечения всех своих множеств.

Отметим, однако, что последнее положение может, вообще говоря, нарушаться (см., например, [20, с. 472]). В целях полноты изложения приведем соответствующий пример, уже не связанный с построениями [20]. Рассмотрим простейшую скалярную управляемую систему

$$\dot{x}(t) = u + 2, \quad x(0) = 0, \tag{4.2}$$

где $t \in [0, 1]$, $u \in [-1, 1]$. Для простоты полагаем, что в (4.2) допускаются только постоянные управления-программы; их множество полностью определяется отрезком $[-1, 1]$. Все траектории (4.2) достигают состояния $x(t) = 1$ на промежутке $[0, 1]$; полагая при $\mathbf{u} \in [-1, 1]$, что $t_{\mathbf{u}} \triangleq (\mathbf{u} + 2)^{-1}$, получаем, что $\mathbf{x_u}(t_{\mathbf{u}}) = 1$, где $\mathbf{x_u} = \mathbf{x_u}(\cdot)$ есть траектория (4.2), порожденная управлением $u(t) \equiv \mathbf{u}$: $\mathbf{x_u}(t) = (\mathbf{u} + 2)(t)$ $\forall t \in [0, 1]$. Будем стремиться к осуществлению медленнодействия: $t_u = 1$ при $u = -1$. Имеется, однако, препятствие, возникающее в момент $\theta \triangleq 2^{-1}$: требуется обеспечить неравенство

$$x(\theta) > 1/2. \tag{4.3}$$

Совместить медленнодействие с осуществлением (4.3) невозможно. Таким образом, система ограничений несовместна, и точные решения отсутствуют.

Рассмотрим асимптотический вариант постановки, полагая в данном примере, что $E \triangleq [-1, 1]$. Если $\varepsilon \in]0, \infty[$, то

$$\Xi_\varepsilon \triangleq \big\{u \in E \mid (t_u > 1 - \varepsilon) \,\&\, \big(\mathbf{x}_u(\theta) > 1/2\big)\big\} \neq \varnothing. \tag{4.4}$$

Полагая в данном примере $\mathcal{E} \triangleq \{\Xi_\varepsilon \colon \varepsilon \in]0, \infty[\}$, получаем БФ $\mathcal{E} \in \beta_o[E]$ с пустым пересечением всех своих множеств. Пусть в настоящем примере $\mathbf{H} \triangleq \mathbb{R}$ (вещественная прямая), $\tilde{\mathbf{t}} = \tau_{\mathbb{R}}$, где

$\tau_{\mathbb{R}}$ есть обычная $|\cdot|$-топология вещественной прямой. Определим r посредством правила

$$u \longmapsto \mathbf{x}_u(1) \colon E \longrightarrow \mathbf{H}, \tag{4.5}$$

получая оператор системы (4.2), позволяющий конструировать ОД в виде образа соответствующего п/м E. Тогда определено МП $(\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tilde{\mathbf{t}};r;\mathcal{E}]$, для представления которого можно использовать (4.1) при произвольном выборе компактификатора $(K,\tilde{\tau},p,q)$. Последний можно, в частности, определить следующим образом: $K \triangleq E$, $\tilde{\tau} \triangleq \{K \cap G \colon G \in \tau_{\mathbb{R}}\}$ (итак, $(K,\tilde{\tau})$ — компактное подпространство $(\mathbb{R},\tau_{\mathbb{R}})$), $p(u) \triangleq u$ при $u \in E$, $q \triangleq r$ (см. (4.5)).

Тогда $(\mathbf{as})[E;K;\tilde{\tau};p;\mathcal{E}] = \{-1\}$ (см. (4.4)), хотя пересечение всех множеств из $\mathcal{E}$ пусто. В самом деле, при $\varepsilon \in]0,\infty[$ имеем в силу (4.4), что $-1 \notin \Xi_\varepsilon$ и, кроме того, $u < 3\varepsilon - 1$ при $u \in \Xi_\varepsilon$ (учитываем также, что $\varphi \triangleq (t_u)_{u \in E}$ — непрерывная функция и $\varphi(-1) = 1$). Вместе с тем $p^1(E) = E = K$, а потому $K \setminus p^1(E) = \varnothing$. Поскольку $(\mathbf{as})[E;K;\tilde{\tau};p;\mathcal{E}]$ играет в силу (4.1) роль множества допустимых ОЭ, получаем, что, будучи недопустимой как обычное решение, точка -1 допустима как решение обобщенное, т. е. как ОЭ. Следовательно, в данном примере вспомогательное МП “не реализуется в наросте”. В силу (4.1) $(\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tilde{\mathbf{t}};r;\mathcal{E}] = \{q(-1)\} = \{r(-1)\} = \{1\}$, что вполне соответствует смыслу решаемой задачи: точка 1 есть ЭП, реализуемый, например, посредством секвенциального приближенного решения $(u_s)_{s\in\mathbb{N}}$, где $u_l \triangleq l^{-1} - 1$ при $l \in \mathbb{N}$. Итак, само основное МП у нас “не пострадало”. Отметим, однако, что не всякая последовательность в E, сходящаяся к -1, является секвенциальным приближенным решением, допустимым относительно $\mathcal{E}$. Так, стационарная последовательность, все члены которой совпадают с -1, не является упомянутым решением.

5. Расширение в классе ультрафильтров

В настоящем разделе рассматривается один конкретный вариант МП, для которого реализуются утверждения теоремы 3.1 и следствия 3.1. Данное МП может играть роль пространства ОЭ при некоторых дополнительных условиях (имеются в виду варианты ИП с алгебрами или полуалгебрами множеств, а также условия на отображение r предыдущего раздела, отмеченные в [15]). При этих условиях излагаемая ниже схема может встраиваться в компактификатор, подобный используемому в (4.1).

Фиксируем $\mathcal{L} \in \pi'_o[E]$ (итак, $\mathcal{L}$ есть π-система с синглетонами). Используя положения [21, разд. 5], легко устанавливаем свойство

$$\Bigl\{\bigl((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\bigr)[x]\Bigr\} \in \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] \quad \forall x \in E \tag{5.1}$$

(учитываем то, что при $\hat{x} \in E$ определено открыто-замкнутое множество $\Phi_{\mathcal{L}}(\{\hat{x}\})$). Из (5.1) вытекает, что

$$\bigl((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\bigr)[x] \in (\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] - \mathrm{isol})[\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L})] \quad \forall x \in E. \tag{5.2}$$

Отметим следующее очевидное и, тем не менее, полезное

Предложение 5.1. *Справедливо равенство* $\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{t}}(\mathcal{L}) = (\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] - \mathrm{isol})[\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L})]$.

Доказательство. Согласно (5.2) имеем вложение

$$\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{t}}(\mathcal{L}) = \bigl((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\bigr)[\cdot]^1(E) \subset (\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] - \mathrm{isol})[\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L})]. \tag{5.3}$$

Выберем произвольно $\mathfrak{U} \in (\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] - \mathrm{isol})[\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L})]$. Тогда $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}^*_o(\mathcal{L})$ и согласно (2.16) $\{\mathfrak{U}\} \in \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]$. Поэтому

$$\{\mathfrak{U}\} \in N^o_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}(\mathfrak{U}). \tag{5.4}$$

Из (2.24) и (5.4) следует, что $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}^*_{o,\mathbf{t}}(\mathcal{L})$, чем завершается проверка вложения, противоположного (5.3), а стало быть, и требуемого равенства. $\square$

Из предложения 5.1 следует, в частности, что $\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{t}}(\mathcal{L}) \in \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]$, а потому (см. (2.10))

$$\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}(\mathcal{L}) = \mathbb{F}^*_o(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{F}^*_{o,\mathbf{t}}(\mathcal{L}) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L})}\big[\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]\big]. \tag{5.5}$$

Таким образом, согласно (5.5) замкнутое множество $\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}(\mathcal{L})$ образует нарост при погружении E в $\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L})$ посредством $\big((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult}\big)[\cdot]$. Заметим также, что, как легко видеть, $\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{t}}(\mathcal{L}) \subset \mathbb{S}\ \forall \mathbb{S} \in (\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]-\mathrm{dens})[\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L})]$. Следовательно, $\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{t}}(\mathcal{L})$ есть наименьшее по вложению всюду плотное (в смысле ТП типа (2.19)) п/м $\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L})$, состоящее из изолированных точек.

Отметим теперь, что в рассматриваемом случае π-системы с синглетонами отображение $\big((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult}\big)[\cdot]$, т.е. $x \longmapsto \big((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult}\big)[x]\colon E \longrightarrow \mathbb{F}^*_o(\mathcal{L})$, инъективно (точнее, $\big((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult}\big)[\cdot]$ есть биекция E на $\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{t}}(\mathcal{L})$). С учетом этого свойства и предложения 5.1 применяем теорему 3.1, получая следующее

Предложение 5.2. *Если* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$, *то*

$$\big((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult}\big)[\cdot]^{-1}\big((\mathbf{as})\big[E;\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L});\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E];\big((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult}\big)[\cdot];\mathcal{E}\big]\big) = \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma. \tag{5.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно учесть равенство $\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{t}}(\mathcal{L}) = \big((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(E)$, следующее из определений разд. 2. □

В свою очередь, конкретизируя следствие 3.1 с учетом предложения 5.1 и инъективности $\big((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult}\big)[\cdot]$, получаем $\forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$

$$\Big(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma = \varnothing\Big) \Longrightarrow \big((\mathbf{as})\big[E;\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L});\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E];\big((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult}\big)[\cdot];\mathcal{E}\big] \subset \mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}(\mathcal{L})\big). \tag{5.7}$$

Далее учитываем (2.10). Итак, при отсутствии точных решений вспомогательное МП, имеющее смысл множества допустимых ОЭ, состоит только из свободных у/ф и, таким образом, содержится в наросте, возникающем при погружении E в $\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L})$ посредством построения тривиальных у/ф. Этот вывод справедлив (при $\mathcal{L} \in \pi'_o[E]$) для любых вариантов ОАХ со свойством пустого пересечения множеств семейства, определяющего упомянутые ОАХ. □

6. Полезные добавления

В настоящем разделе предполагается, что $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^o[E]$; следовательно, $(E,\mathcal{L})$ есть отделимое ИП. Тогда (как и в разд. 5) $\big((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult}\big)[\cdot]$ определяет погружение E в $\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L})$ со свойствами (2.22)–(2.24). В этом, формально более общем в сравнении с разд. 5, случае мы рассмотрим некоторые аналоги предложения 5.2 и свойства (5.7).

Однако сначала напомним представления вспомогательного МП, полученные в [16]. Так, согласно [16, предложение 2]

$$(\mathbf{as})[E;\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L});\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E];\big((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult}\big)[\cdot];\mathcal{J}] = \mathbb{F}^*_o(\mathcal{L}|\,\mathcal{J}\big) \quad \forall \mathcal{J} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}). \tag{6.1}$$

Представление (6.1) касается ОАХ со свойством измеримости соответствующих множеств. Далее, из [16, предложение 3] следует, что

$$\begin{aligned}(\mathbf{as})\big[E;\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L});\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E];\big((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult}\big)[\cdot];\mathfrak{B}\big] &= \bigcap_{B\in\mathfrak{B}} \mathbf{F}^*_o[\mathcal{L}|\,B] \\ = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_o(\mathcal{L}) \mid B\cap U \neq \varnothing\ \forall B\in\mathfrak{B}\ \forall U\in\mathcal{U}\} &\quad \forall \mathfrak{B} \in \beta[E].\end{aligned} \tag{6.2}$$

Наконец, комбинируя (3.4) и (6.2), получаем, что

$$\begin{aligned}(\mathbf{as})\big[E;\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L});\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E];\big((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult}\big)[\cdot];\mathcal{E}\big] &= \bigcap_{\Sigma\in\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})} \mathbf{F}^*_o[\mathcal{L}|\,\Sigma] \\ = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_o(\mathcal{L}) \mid \Sigma\cap U \neq \varnothing\ \forall \Sigma\in\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})\ \forall U\in\mathcal{U}\} &\quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big).\end{aligned} \tag{6.3}$$

Из определений разд. 2 (см. (2.8), (2.9)) легко следует

Предложение 6.1. *Если* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, *то* $\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^{-1}\big(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}|\,\mathcal{E})\big) = \bigcap\limits_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma.$

В свою очередь, комбинируя (6.1) и предложение 6.1, получаем, что

$$\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^{-1}\big((\mathbf{as})\big[E; \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; \big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]; \mathcal{E}\big]\big) = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}).$$

Предложение 6.2. *Если* $\mathcal{L} \in \pi_o'[E]$ *и* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$, *то*

$$\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^{-1}\big(\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}) \mid \Sigma \cap U \neq \varnothing \ \ \forall \Sigma \in \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E}) \ \ \forall U \in \mathcal{U}\}\big) = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о получается непосредственной комбинацией (6.3) и предложения 5.2. Возвращаясь к более общему случаю $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^o[E]$, отметим

Следствие 6.1. *Если* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, *то*

$$\Big(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma = \varnothing\Big) \Longrightarrow \big(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}|\,\mathcal{E}) \subset \mathbb{F}_{o,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L})\big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть пересечение всех множеств семейства $\mathcal{E}$ пусто. Тогда $\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[x] \notin \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}|\,\mathcal{E}) \ \ \forall x \in E$. Иными словами, $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}|\,\mathcal{E}) \cap \mathbb{F}_{o,\mathbf{t}}^*(\mathcal{L}) = \varnothing$, а потому согласно (2.10) и (2.12) $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}|\,\mathcal{E}) \subset \mathbb{F}_{o,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L})$. □

В заключение приведем одно замечание общего характера (учитываем, что для всяких ТП (X,τ) и множества $A \in \mathcal{P}(X)$ справедливо равенство $(\tau - \mathrm{Int})[\mathrm{cl}(A,\tau) \setminus A] = \varnothing$): $(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_{o,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L})] = \varnothing$.

Наконец, для случая π-системы с синглетонами имеем очевидное теперь

Следствие 6.2. *Если* $\mathcal{L} \in \pi_o'[E]$ *и* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$, *то*

$$\Big(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma = \varnothing\Big) \Longrightarrow \big(\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}) \mid \Sigma \cap U \neq \varnothing \ \ \forall \Sigma \in \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E}) \ \ \forall U \in \mathcal{U}\} \subset \mathbb{F}_{o,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L})\big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о получается непосредственной комбинацией (5.7) и (6.3).

7. Пример применения компакта Стоуна

В пределах настоящего раздела фиксируем два числа $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ — вещественная прямая), для которых $a < b$, и полагаем, что $\mathbf{I} \triangleq [a,b]$. Полагаем также, что

$$\mathfrak{I} \triangleq \{L \in \mathcal{P}(\mathbf{I}) \mid \exists\, c \in \mathbf{I} \ \exists\, d \in \mathbf{I}\colon (]c,d[\subset L) \,\&\, (L \subset [c,d])\},$$

получая полуалгебру промежутков (открытых, полуоткрытых и замкнутых), содержащихся в $\mathbf{I}$; также рассматривается $\varnothing$ как промежуток: $\varnothing = [b,a]$. Полагаем далее, что $\mathcal{A} \in (\mathrm{alg})[\mathbf{I}]$ есть алгебра п/м $\mathbf{I}$, порожденная полуалгеброй $\mathfrak{I}$; тогда, в частности, $\mathfrak{I} \subset \mathcal{A}$. Итак, $(\mathbf{I},\mathcal{A})$ есть ИП с алгеброй множеств, а

$$\big(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{A}), \mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[\mathbf{I}]\big) \tag{7.1}$$

есть соответствующий данному ИП компакт Стоуна. Отметим, что исчерпывающее описание $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{A})$ приведено в [14]; данное представление использовано в [22] для целей построения МП в регулярном ТП при “измеримых” ОАХ.

Полагаем до конца настоящего раздела, что $E = \mathbf{I}$ и $\mathcal{L} = \mathcal{A}$, т. е. рассматриваем вышеупомянутое ИП в качестве пространства обычных решений. Отметим, что в данном случае имеем, в частности, свойство $\mathcal{L} \in \pi'_o[E]$, а это позволяет использовать (в духе конструкций [22]) положения разд. 5.

Так, в частности, для произвольного семейства $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$, определяющего ОАХ, справедливо (5.6) (см. предложение 5.2). Отметим здесь же, что (см. [14]) множество $\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}(\mathcal{L})$ допускает в данном случае достаточно простое описание.

Итак, полагаем, что

$$(\mathfrak{U}_t^{(-)} \triangleq \{L \in \mathcal{L} \mid \exists\, c \in [a,t[\colon [c,t[\subset L\} \ \ \forall t \in]a,b])$$
$$\& \, (\mathfrak{U}_t^{(+)} \triangleq \{L \in \mathcal{L} \mid \exists\, c \in]t,b]\colon]t,c] \subset L\} \ \ \forall t \in [a,b[). \tag{7.2}$$

Тогда (см. [14, предложение 6.1, (6.19), (6.20)]) имеем из (7.2), что

$$\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}(\mathcal{L}) = \big\{\mathfrak{U}_t^{(-)} \colon t \in]a,b]\big\} \cup \big\{\mathfrak{U}_t^{(+)} \colon t \in [a,b[\big\}. \tag{7.3}$$

Посредством (7.2), (7.3) реализуется в данном конкретном случае (см. [14, (6.21)]) исчерпывающее описание нульмерного компакта Стоуна (напомним, что в нашем случае $(E,\mathcal{L}) = (\mathbf{I},\mathcal{A})$). С учетом (7.3) получаем полезную конкретизацию (5.7): если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$, то

$$\Big(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma = \varnothing\Big) \Longrightarrow \Big((\mathbf{as})\big[E;\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L});\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E];\big(E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot];\mathcal{E}\big]$$
$$= \bigcap_{\Sigma \in \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})} \mathbf{F}^*_o[\mathcal{L}|\,\Sigma] \subset \big\{\mathfrak{U}_t^{(-)} \colon t \in]a,b]\big\} \cup \big\{\mathfrak{U}_t^{(+)} \colon t \in [a,b[\big\}\Big). \tag{7.4}$$

Важной особенностью (7.4) является то, что от семейства $\mathcal{E}$, определяющего в данной импликации ОАХ, не требуется $\mathcal{L}$-измеримость множеств, составляющих это семейство (в связи с (7.4) полезно отметить, что согласно (2.20) каждое множество $\mathbf{F}^*_o[\mathcal{L}|\,\Sigma]$, $\Sigma \in \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})$, замкнуто, а стало быть, и компактно в смысле $\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]$).

В связи с (7.4) рассмотрим вспомогательное МП для примера разд. 4, реализуемое, однако, в компакте (7.1). Итак, полагаем до конца раздела, что $a = -1$, $b = 1$. Будем при этом использовать в качестве $\mathcal{E}$ семейство всех множеств (4.4) при переборе $\varepsilon > 0$ (см. разд. 4). Для данного случая рассматриваем МП

$$(\mathbf{as})\big[E;\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L});\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E];\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot];\mathcal{E}\big] = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \mathbf{F}^*_o[\mathcal{L}|\,\Sigma] \tag{7.5}$$

(учитываем (6.2)). Покажем, что (7.5) есть синглетон $\{\mathfrak{U}_{-1}^{(+)}\}$. Для этого напомним, что в нашем случае

$$\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \mathbf{F}^*_o[\mathcal{L}|\,\Sigma] = \bigcap_{\varepsilon \in]0,\infty[} \mathbf{F}^*_o[\mathcal{L}|\,\Xi_\varepsilon] = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_o(\mathcal{L}) \mid \Xi_\varepsilon \cap U \neq \varnothing \ \ \forall \varepsilon \in]0,\infty[\ \ \forall U \in \mathcal{U}\}. \tag{7.6}$$

Итак, пусть $\kappa \in]0,\infty[$ и $U_* \in \mathfrak{U}_{-1}^{(+)}$. Тогда Ξ_κ есть непустое п/м $E = [a,b]$, причем в силу непрерывности функции $(t_u)_{u \in E}$ в точке -1 можно указать $\zeta \in]0,1[$, для которого $]-1,\zeta-1] \subset \Xi_\kappa$. Далее, в силу (7.2) для некоторого $c \in]-1,1]$ имеем $]-1,c] \subset U_*$. Поскольку $\zeta > 0$ и $c+1 > 0$, имеем для некоторого $d \in]-1,c]$ неравенство $d \leqslant \zeta - 1$. Тогда $\varnothing \neq]-1,d] \subset \Xi_\kappa \cap U_*$. Итак, установлено, что $\Xi_\varepsilon \cap U \neq \varnothing$ $\forall \varepsilon \in]0,\infty[$ $\forall U \in \mathfrak{U}_{-1}^{(+)}$. Поэтому (см. (7.3), (7.6)) $\mathfrak{U}_{-1}^{(+)}$ есть элемент множества (7.6), т. е.

$$\{\mathfrak{U}_{-1}^{(+)}\} \subset \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \mathbf{F}^*_o[\mathcal{L}|\,\Sigma]. \tag{7.7}$$

Пусть $\mathcal{V}$ — произвольный у/ф из множества в правой части (7.7). Тогда согласно (7.4), (7.5) получаем, что

$$(\exists\, t \in]-1,1]\colon \mathcal{V} = \mathfrak{U}_t^{(-)}) \ \vee \ (\exists\, t \in [-1,1[\colon \mathcal{V} = \mathfrak{U}_t^{(+)}) \tag{7.8}$$

(мы учитываем здесь, что согласно (4.4) семейство $\mathcal{E}$ направлено и имеет пустое пересечение всех своих множеств).

Пусть $\mathcal{V} = \mathfrak{U}_\theta^{(-)}$, где $\theta \in]-1,1]$. Тогда согласно (7.2) $\mathcal{V} = \{L \in \mathcal{L} \mid \exists\, c \in [-1,\theta[\colon [c,\theta[\subset L\}$ и, в частности, $[\tilde{d},\theta[\in \mathcal{V}$ при $\tilde{d} \in [-1,\theta[$. С другой стороны (см. разд. 4), при $\varepsilon \in]0,\infty[$ имеем, что $\Xi_\varepsilon \subset]-1, 3\varepsilon - 1[$. Поскольку $-1 < \theta$, можно подобрать $d' \in]-1,\theta[$ и $\xi \in]0,\infty[$ так, чтобы $\Xi_\xi \cap [d',\theta[= \varnothing$, что невозможно по выбору $\mathcal{V}$ (согласно (7.6) $\Xi_\varepsilon \cap U \neq \varnothing$ $\forall \varepsilon \in]0,\infty[$ $\forall U \in \mathcal{V}$). Поэтому первая возможность в (7.8) отпадает.

Допустим теперь, что $\mathcal{V} = \mathfrak{U}_\zeta^{(+)}$, где $\zeta \in [-1,1[$. Тогда $\mathcal{V} = \{L \in \mathcal{L} \mid \exists\, c \in]\zeta,1] \colon]\zeta,c] \subset L\}$. В частности, $]\zeta,\tilde{c}] \in \mathcal{V}$ при $\tilde{c} \in]\zeta,1]$. Если $\zeta > -1$, то для некоторого $\gamma \in]0,\infty[$ имеем вложение $\Xi_\gamma \subset]-1,\zeta]$, а тогда $\Xi_\gamma \cap]\zeta,1] = \varnothing$, что снова приводит к противоречию с предположением о свойствах $\mathcal{V}$ (см. (7.6)). Остается допустить, что $\mathcal{V} = \mathfrak{U}_{-1}^{(+)}$. Поскольку выбор $\mathcal{V}$ был произволен, установлено, что имеет место вложение, противоположное (7.7), а это означает справедливость требуемого равенства

$$\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \mathbf{F}_o^*[\mathcal{L} \mid \Sigma] = \{\mathfrak{U}_{-1}^{(+)}\}. \tag{7.9}$$

Итак, согласно (7.5) и (7.9) вспомогательное МП есть синглетон, содержащий свободный у/ф. Данный у/ф “является ответственным” (см. [14, разд. 7; 22; 23]) за операцию вычисления предела справа (в точке -1) на пространстве ярусных [14; 22–24] функций, что несколько точнее характеризует нужный ЭП в сравнении с ЭП в виде самой точки -1 в разд. 4.

8. Некоторые топологические свойства

С учетом (6.3) отметим, что в конструкциях, связанных с представлением МП в пространствах у/ф, важную роль играют множества (2.13). В этой связи имеет смысл исследовать топологические свойства упомянутых множеств; некоторые свойства такого рода рассматриваются в настоящем разделе. Фиксируем $\mathcal{L} \in \pi_o'[E]$, где E — произвольное непустое множество. Напомним с учетом (2.16) и (5.2), что (в рассматриваемом случае)

$$\big\{\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[x]\big\} \in \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \quad \forall x \in E. \tag{8.1}$$

Как следствие получаем (см. (8.1)), что

$$\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A) = \bigcup_{x \in A} \big\{\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[x]\big\} \in \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \quad \forall A \in \mathcal{P}'(E). \tag{8.2}$$

Ясно также, что $\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(\varnothing) = \varnothing \in \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$, а потому (см. (8.2))

$$\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A) = \big\{\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[x] \colon x \in A\big\} \in \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \quad \forall A \in \mathcal{P}(E). \tag{8.3}$$

Предложение 8.1. *Если $A \in \mathcal{P}(E)$, то*

$$\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A) \subset (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})\big[\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L} \mid A]\big]. \tag{8.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим прежде всего, что согласно (2.22)

$$\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L} \mid A] = \mathrm{cl}\Big(\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\Big),$$

а потому $\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A) \subset \mathbf{F}_o^*[\mathcal{L} \mid A]$. С учетом (8.3) получаем требуемое свойство (8.4) (в виде $\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A)$ имеем открытое п/м $\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L} \mid A]$). □

З а м е ч а н и е 8.1. Отметим, что несмотря на (8.3) и на то, что согласно (2.22) при $A \in \mathcal{P}(E)$ $\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L} \mid A] = \mathrm{cl}\Big(\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\Big)$, возможен случай, когда в (8.4) равенство отсутствует (более того, данный случай может возникать и при условии $A \in \mathcal{L}$, т. е. для $\mathcal{L}$-измеримых множеств A). В самом деле, пусть ИП $(E, \mathcal{L})$ совпадает с (7.1): $E = \mathbf{I}$ и $\mathcal{L} = \mathcal{A}$; $\mathbf{I}$ и $\mathcal{A}$ определены в разд. 7 (свойство $\mathcal{L} \in \pi'_o[E]$ имеет место). Пусть теперь $A = [a_*, b_*]$, где $a_* \in [a, b[$ и $b_* \in]a_*, b]$, т. е. $a \leqslant a_* < b_* \leqslant b$. Тогда $A \in \mathcal{L}$ и потому (см. разд. 2)

$$\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\, A] = \Phi_{\mathcal{L}}(A), \tag{8.5}$$

что в силу (2.20) означает, в частности, справедливость свойства $\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\, A] \in \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$. Как следствие получаем цепочку равенств

$$(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})\big[\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\, A]\big] = (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[\Phi_{\mathcal{L}}(A)] = \Phi_{\mathcal{L}}(A) = \mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\, A]. \tag{8.6}$$

Заметим, что согласно (7.2) и (8.6) $(\mathfrak{U}_t^{(-)} \in \mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\, A] \ \ \forall t \in]a_*, b_*])\,\&\,(\mathfrak{U}_t^{(+)} \in \mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\, A] \ \ \forall t \in [a_*, b_*[)$ (мы учитываем здесь также (2.11) и (8.5)). В частности, у нас $\mathfrak{U}_{a_*}^{(+)} \in \mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\, A]$ и $\mathfrak{U}_{b_*}^{(-)} \in \mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\, A]$, где согласно (7.3) $\big(\mathfrak{U}_{a_*}^{(+)} \in \mathbb{F}_{o,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L})\big)\,\&\,\big(\mathfrak{U}_{b_*}^{(-)} \in \mathbb{F}_{o,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L})\big)$; последнее означает в силу (2.10), что $\Big(\mathfrak{U}_{a_*}^{(+)} \notin \big((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A)\Big)\,\&\,\Big(\mathfrak{U}_{b_*}^{(-)} \notin \big((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A)\Big)$ (действительно, $\big((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A) = \big\{\big((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[x] \colon x \in A\big\} \subset \mathbb{F}_{o,\mathbf{t}}^*(\mathcal{L})$). С учетом (8.6) получаем теперь, что

$$\Big(\mathfrak{U}_{a_*}^{(+)} \in (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})\big[\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\, A]\big] \setminus \big((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A)\Big)$$
$$\&\,\Big(\mathfrak{U}_{b_*}^{(-)} \in (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})\big[\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\, A]\big] \setminus \big((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A)\Big).$$

Попутно установлено, что $(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})\big[\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\, A]\big]$ может содержать свободные у/ф. $\square$

Следствие 8.1. *Если* $A \in \mathcal{P}(E)$, *то* $\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\, A]$ *есть множество, канонически замкнутое в топологии* $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$:

$$\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\, A] = \mathrm{cl}\big((\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})\big[\mathbf{F}_o^*\big[\mathcal{L}|\, A]\big], \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\big). \tag{8.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предложения 2.1

$$\mathrm{cl}\big((\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})\big[\mathbf{F}_o^*\big[\mathcal{L}|\, A]\big], \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\big) \subset \mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\, A]. \tag{8.8}$$

С другой стороны, из предложения 8.1 имеем по свойствам оператора замыкания, что

$$\mathrm{cl}\Big(\big((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\Big) \subset \mathrm{cl}\big((\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})\big[\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\, A]\big], \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\big),$$

откуда с учетом (2.22) получаем вложение $\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\, A] \subset \mathrm{cl}\big((\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})\big[\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\, A]\big], \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\big)$. Учитывая (8.8), получаем требуемое свойство (8.7). $\square$

З а м е ч а н и е 8.2. Заметим здесь же, что следствие 8.1 вытекает из (2.22) и (8.3) в силу [6, предложение 1.17]. $\square$

В связи со следствием 8.1 условимся о следующих обозначениях: если (X, τ) есть ТП (X — множество, $\tau \in (\mathrm{top})[X]$), то

$$(\mathrm{can} - \mathrm{op})[\tau] \stackrel{\triangle}{=} \{G \in \mathcal{P}(X) \mid G = (\tau - \mathrm{Int})[\mathrm{cl}(G, \tau)]\} = \{(\tau - \mathrm{Int})[F] \colon F \in \mathbf{C}_X[\tau]\}, \tag{8.9}$$

$$(\mathrm{can} - \mathrm{clos})[\tau] \stackrel{\triangle}{=} \{F \in \mathcal{P}(X) \mid F = \mathrm{cl}\big((\tau - \mathrm{Int})[F], \tau\big)\} = \{\mathrm{cl}(G, \tau) \colon G \in \tau\} \tag{8.10}$$

(в (8.9) и (8.10) введены соответственно семейства канонически открытых и канонически замкнутых множеств в (X, τ)); $(\mathrm{can} - \mathrm{op})[\tau] \in \pi[X]$. Из следствия 8.1 и (8.10) имеем, что

$$\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\, A] \in (\mathrm{can} - \mathrm{clos})\big[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\big] \quad \forall A \in \mathcal{P}(E). \tag{8.11}$$

С учетом (8.9)–(8.11) имеем, как легко видеть, что

$$(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})\big[\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\, A]\big] \in (\mathrm{can} - \mathrm{op})\big[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\big] \quad \forall A \in \mathcal{P}(E).$$

Предложение 8.2. *Если* $A_1 \in \mathcal{P}(E)$ *и* $A_2 \in \mathcal{P}(E)$, *то эквивалентны следующие три условия*:
(1) $A_1 \subset A_2$; (2) $\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\, A_1] \subset \mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\, A_2]$; (3) $(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]-\mathrm{Int})\big[\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\, A_1]\big] \subset (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]-\mathrm{Int})\big[\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\, A_2]\big]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем A_1, A_2 в соответствии с условиями доказываемого предложения. Тогда из (2.13) следует, что (1) $\Rightarrow$ (2). Далее, из определения внутренности множества следует, что (2) $\Rightarrow$ (3). Пусть выполнено условие (3). Тогда по свойствам оператора замыкания

$$\mathrm{cl}\big((\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]-\mathrm{Int})\big[\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\, A_1]\big], \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\big) \subset \mathrm{cl}\big((\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]-\mathrm{Int})\big[\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\, A_2]\big], \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\big). \tag{8.12}$$

С учетом следствия 8.1 и (8.12) получаем, что справедливо (2). Итак, (3) $\Rightarrow$ (2), а стало быть (2) $\Leftrightarrow$ (3).

Пусть выполнено условие (2). Покажем, что истинно (1). Допустим противное:

$$A_1 \setminus A_2 \neq \varnothing. \tag{8.13}$$

Используя (8.13), выберем $x_* \in A_1 \setminus A_2$. Тогда с учетом (2.4) имеем, что $\{x_*\} \in \mathcal{L}$. При этом

$$\mathfrak{U} \overset{\triangle}{=} \big((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult}\big)[x_*] = \{L \in \mathcal{L} \mid x_* \in L\} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})$$

и, кроме того, $\{x_*\} \in \mathfrak{U}$. Более того, $A_1 \cap U \neq \varnothing \ \forall U \in \mathfrak{U}$ (в самом деле, $x_* \in A_1 \cap L$ при $L \in \mathfrak{U}$). Согласно (2.13) $\mathfrak{U} \in \mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\, A_1]$ и, коль скоро предполагалось выполненным (2), $\mathfrak{U} \in \mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\, A_2]$, а, следовательно,

$$A_2 \cap U \neq \varnothing \quad \forall\, U \in \mathfrak{U}. \tag{8.14}$$

Но $x_* \notin A_2$, а потому $A_2 \cap \{x_*\} = \varnothing$, где, как уже отмечалось, $\{x_*\} \in \mathfrak{U}$. Получили противоречие с (8.14), которое показывает, что (8.13) невозможно, а стало быть истинно (1). Итак, (2) $\Rightarrow$ (1) и, следовательно, (1) $\Leftrightarrow$ (2). $\square$

Следствие 8.2. *Если* $A_1 \in \mathcal{P}(E)$ *и* $A_2 \in \mathcal{P}(E)$, *то эквивалентны следующие три условия*:
(1′) $A_1 = A_2$; (2′) $\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\, A_1] = \mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\, A_2]$; (3′) $(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]-\mathrm{Int})\big[\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\, A_1]\big] = (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]-\mathrm{Int})\big[\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\, A_2]\big]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о вполне очевидно. $\square$

9. Заключение

В работе установлено, что конструкции расширений, являющиеся модификациями используемых в общей топологии, оказываются в ряде случаев более чувствительными в вопросах, связанных с соблюдением ОАХ. Данные “топологические” расширения могут, как представляется, дополнять (см. также [25]) более традиционные для задач прикладной математики схемы расширения в “более широких” постановках, связанных с достижимостью при ОАХ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
2. **Даффин Р. Дж.** Бесконечные программы // Линейные неравенства и смежные вопросы. М.: ИЛ, 1959. С. 263–267.
3. **Гольштейн Е. Г.** Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 351 с.
4. **Скворцова А. В., Ченцов А. Г.** О построении асимптотического аналога пучка траекторий линейной системы с одноимпульсным управлением // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 12. С. 1645–1657.

5. **Ченцов А. Г., Бакланов А. П.** Об одной задаче, связанной с асимптотической достижимостью в среднем // Докл. РАН. 2014. Т. 459, № 6. С. 672–676.
6. **Александрян Р. А., Мирзаханян Э. А.** Общая топология: учеб. пособие для вузов. М.: Высшая школа, 1979. 336 с.
7. **Chentsov A. G.** Asymptotic attainability. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1997. 322 p.
8. **Янг Л.** Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1970. 488 с.
9. **Гамкрелидзе Р. В.** Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975. 230 с.
10. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
11. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34, № 6. С. 1005–1022.
12. **Архангельский А. В.** Компактность // Итоги науки и техники. 1989. Т. 50. С. 7–128 (Современные проблемы математики. Фундаментальные направления).
13. **Терпе Ф., Флаксмайер Ю.** О некоторых приложениях теории расширений топологических пространств и теории меры // Успехи мат. наук. 1977. Т. 32, № 5. С. 125–162.
14. **Ченцов А. Г.** Об одном примере представления пространства ультрафильтров алгебры множеств // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 293–311.
15. **Ченцов А. Г.** Множества притяжения в абстрактных задачах о достижимости: эквивалентные представления и основные свойства // Изв. вузов. Математика. 2013. № 11. С. 33–50.
16. **Ченцов А. Г.** Некоторые свойства ультрафильтров, связанные с конструкциями расширений // Вестн. Удмурт. ун-та. 2014. Вып. 1. С. 87–101. (Математика, механика, компьютер. науки).
17. **Булинский А. В., Ширяев А. Н.** Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.
18. **Бурбаки Н.** Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 272 с.
19. **Ченцов А. Г.** Расширения абстрактных задач о достижимости: несеквенциальная версия // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 2. С. 184–217.
20. **Chentsov A. G.** The nonsequential approximate solutions in problems of asymptotic analysis // Soochow Journal of Mathematics. 2006. V. 32, № 3. P. 441–475.
21. **Ченцов А. Г.** Ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения: задача соблюдения ограничений асимптотического характера // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 7. С. 1047–1064.
22. **Ченцов А. Г.** К вопросу о структуре множеств притяжения в топологическом пространстве // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. ун-та. 2012. Вып. 1(39). С. 147–150.
23. **Ченцов А. Г., Бакланов А. П.** К вопросу о построении множества достижимости при ограничениях асимптотического характера // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 309–323.
24. **Ченцов А. Г.** Элементы конечно-аддитивной теории меры, I. Екатеринбург: Изд-во УГТУ-УПИ, 2009. 389 с.
25. **Ченцов А. Г.** К вопросу о соблюдении ограничений в классе обобщенных элементов // Вестн. Удмурт. ун-та. 2014. Вып. 3. С. 90–109. (Математика, механика, компьютер. науки).

Ченцов Александр Георгиевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. РАН
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Поступила 14.01.2015

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.983.54

EXAMPLES OF COMPUTED VIABILITY KERNELS

Nikolai D. Botkin, Varvara L. Turova

Conflict control systems with state constraints are under consideration. A numerical method of constructing viability kernels, i.e the largest subsets of state constraints where the system trajectories can be confined, is applied to several nontrivial examples. The method can be interpreted as the approximate construction of the Hausdorff limit of sets generated by a backward procedure based on differential games theory essentially developed in works by N. N. Krasovskii and A. I. Subbotin. Numerically, the method is implemented in the framework of computing level sets of approximate solutions to an appropriate Hamilton–Jacobi equation. The main objective of the paper is the demonstration of nontrivial examples of computing viability kernels.

Keywords: differential game, state constraint, viability kernel, backward procedure, Hamilton–Jacobi equation, viscosity solution.

Н. Д. Боткин, В. Л. Турова. Примеры численного построения ядер выживаемости.

Рассматриваются конфликтно-управляемые системы с ограничениями на фазовые состояния. Численный метод построения ядер выживаемости (наибольших подмножеств фазовых ограничений, где система может удерживаться неограниченное время) применяется к некоторым нетривиальным задачам. Метод может интерпретироваться как построение предельных множеств некоторой попятной процедуры, базирующейся на на теории дифференциальных игр, существенно развитой в работах Н. Н. Красовского и А. И. Субботина. Численная реализация метода выполнена на языке множеств уровня вязких решений подходящего уравнения Гамильтона-Якоби. Основной целью статьи является демонстрация нетривиальных примеров построения ядер выживаемости.

Ключевые слова: дифференциальная игра, фазовое ограничение, ядро выживаемости, попятная процедура, уравнение Гамильтона — Якоби, вязкое решение.

Dedicated to the memory and the 70th anniversary of the Academician of RAS
Andrei I. Subbotin

1. Introduction

In many technical problems, it is required to keep a control system within a state constraint in the presence of unpredictable disturbances. Viability theory (see [1]) can be considered as an approach to the design of appropriate control laws. Notice that a viable subset of the state constraint determines a feedback strategy which can keep the state vector within this subset. Such a feedback strategy can be designed using the extremal aiming procedure proposed in [2]. A method for finding viability kernels (maximal viable subsets of state constraints) is proposed in [3]. This method is based on the necessary and sufficient viability conditions formulated in terms of contingent cones and vectogramms. The monograph [4] considers a wide range of problems related to analysis and construction of viable sets and viability kernels. Grid methods for constructing viability kernels have been studied in works by V. N. Ushakov and his pupils (see e.g. [5]).

In papers [6–8], a method for finding viability kernels is described and theoretically analyzed. The approach developed there is based on the theory of differential games (see [2]). The viability kernel is constructed as the Hausdorff limit of sets generated by a backward procedure that produces the time-sections of the so-called maximal stable bridges described in [2]. In [8], it was sketched how this algorithm can be numerically implemented in terms of level sets of limiting solutions of an appropriate Hamilton–Jacobi equation arising from conflict control problems with state constraints.

The present paper describes a slightly modified grid algorithm for computing viability kernels and shows its application to nontrivial examples of conflict control problems.

2. Differential game and viability kernels

In this section, some definitions related to viability theory are recalled.

Consider a conflict control system with the autonomous dynamics

$$\dot{x} = f(x, u, v), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in P \subset \mathbb{R}^p, \quad v \in Q \subset \mathbb{R}^q. \tag{1}$$

Here, x is the state vector; u and v are control parameters of the first and second players, respectively; and P and Q are compacts of the corresponding dimensions. In the following, it is assumed that all functions of x are defined on the whole $\mathbb{R}^n$ and have global properties. Thus, the right-hand side f is supposed to be globally bounded, continuous in (x, u, v), and Lipschitzian in x.

Bearing in mind the conflict control system (1), consider for any $v \in Q$ the differential inclusion

$$\dot{x} \in F_v(x) = \overline{\text{co}}\{f(x, P, v)\}. \tag{2}$$

Definition 1 (viability property [1]). *A set $K \subset \mathbb{R}^n$ is called viable if for any $x_* \in K$ and any $v \in Q$ there exists a solution $x(\cdot)$ to the differential inclusion* (2) *with the initial state $x(0) = x_*$ such that $x(t) \in K,\ t \geq 0$.*

Definition 2 (viability kernel [1]). *For a given compact set $G \subset \mathbb{R}^n$, define $Viab(G)$ as the largest subset of G with the viability property. This subset is called the viability kernel of G.*

Proposition 1 (see e.g. [1]). *For any compact set $G \subset \mathbb{R}^n$ there exists a unique viability kernel $Viab(G) \subset G$ if there exists at last one viable subset of G.*

3. Computation of viability kernels

The algorithm proposed in [8] for finding viability kernels utilizes ideas of dynamic programming. Namely, a Pontryagin-like step-by-step backward procedure (see [9]) yielding a sequence of sets is used. The new feature consists in the reduction of the time step at each backward iteration in such a way that the time step tends to zero, but the sum of all time steps goes to infinity. The algorithm looks as follows:

$$\begin{aligned} K_0 &= G, \\ K_{i+1} &= \bigcap_{v \in Q} \Big[\bigcup_{x \in K_i} (x - \delta_{i+1} F_v(x)) + \delta_{i+1}^2 \beta S \Big] \bigcap G. \end{aligned} \tag{3}$$

Here S is the unit ball in $\mathbb{R}^n$, $\beta = LM$, L is the Lipschitz constant of F_v, and $M = \sup\{|f|\colon f \in F_v(x), x \in \mathbb{R}^n, v \in Q\}$.

Theorem 1 (see [8] for the proof). *Let the sequence $\{K_i\}$ be defined by (3), where the sequence $\{\delta_i\}$ is such that $\delta_i \to 0$ and $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i = \infty$. If $K_i \neq \varnothing$ for any $i > 0$, then there exists the Hausdorff limit, $\lim\limits_{i\to\infty} K_i$, and*

$$\lim_{i\to\infty} K_i = Viab(G) \neq \varnothing.$$

Otherwise, if $K_i = \varnothing$ for some $i > 0$, there are no viable subsets of G.

4. Numerical implementation

The numerical method utilizes the idea of representation of the viability kernel as a level set of an appropriate function. Suppose that the state constraint, G, is given by the relation

$$G = \{x \in \mathbb{R}^n, g(x) \leq 0\}, \tag{4}$$

where g is a continuous function. It is required to construct a function Vrepresenting the viability set as follows:

$$Viab(G) = \{x \in \mathbb{R}^n, V(x) \leq 0\}. \tag{5}$$

Define the Hamiltonian of the game (1) by the formula

$$H(x,p) = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} p \cdot f(x,u,v)$$

and consider the following Hamilton–Jacobi equation

$$H(x, \nabla \mathcal{V}) = 0. \tag{6}$$

A continuous function $\mathcal{V}$ is a viscosity solution of (6) if the following conditions hold.

(i) $\mathcal{V}(x) \geq g(x)$ for all $x \in \mathbb{R}^n$.

(ii) For any point $y_0 \in \mathbb{R}^n$ and any function $\varphi \in C^1$ such that $\mathcal{V} - \varphi$ attains a local maximum at y_0, the inequality $H\left(y_0, \nabla\varphi(y_0)\right) \leq 0$ holds.

(iii) For any point $y_0 \in \mathbb{R}^n$ satisfying the inequality $\mathcal{V}(y_0) > g(y_0)$ and any function $\varphi \in C^1$ such that $\mathcal{V} - \varphi$ attains a local minimum at y_0, the inequality $H\left(y_0, \nabla\varphi(y_0)\right) \geq 0$ holds.

The existence of a unique viscosity solution follows from the results of [10] (cf. Theorem 2.1) and [11]. Moreover, the function $\mathcal{V}$ satisfying conditions (i)–(iii) has the property

$$Viab(\{x \in \mathbb{R}^n, g(x) \leq c\}) = \{x \in \mathbb{R}^n, \mathcal{V}(x) \leq c\}.$$

Indeed, the condition (i) provides the embedding of the level sets of $\mathcal{V}$ into the corresponding level sets of g. Condition (ii) provides the u-stability property of the function $\mathcal{V}$. Condition (iii) expresses the v-stability property at points y_0 where $\mathcal{V}(y_0) > g(y_0)$ (i.e. in the interior of the state constraint). Such a modification of the conventional definition of viscosity solutions was introduced in the work [11] to describe conflict control problems with state constraints. See also [12] for the relation between viability sets and viscosity solutions.

Our aim is to construct grid approximations of viscosity solutions of equation (6) and propose a control procedure that guaranties an approximate non-increase of this grid approximation along trajectories of the conflict control system (1).

Let $h := (h_1, \ldots, h_n)$ be spatial grid steps, and $|h| := (\sum_{i=1}^n h_i)^{1/2}$. Use the notation

$$\phi^h(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) := \phi(i_1 h_1, \ldots, i_n h_n)$$

so that the upper index “h” denotes the restrictions of ϕ to the grid.

Introduce an interpolation operator $\mathcal{L}_h$ mapping grid functions to continuous ones and satisfying the estimate

$$\|\mathcal{L}_h[\phi^h] - \phi\| \leq C|h|^2 \, \|D^2\phi\| \tag{7}$$

for all smooth function ϕ. Here, ϕ^h is, as usually, the restriction of ϕ to the grid, $\|\cdot\|$ the pointwise maximum norm, $D^2\phi$ the Hessian matrix of ϕ, and C a constant independent on the grid and function ϕ.

It should be noticed that the estimate (7) is typical for interpolation operators (see e.g. [13]) because interpolation operators reconstruct not only the values but also the gradients of interpolated functions.

Consider, for example, a multilinear interpolation operator. Introduce the functions $\omega_0 = 1 - \xi$ and $\omega_1 = \xi$. Assume that a point $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ lies in a grid cell whose origin is given by the multiindex $(ip_1, ip_2, \ldots, ip_n)$. The multilinear interpolation of a grid function ϕ^h reads:

$$\mathcal{L}_h[\phi^h](x) = \sum_{i_1=ip_1}^{ip_1+1} \dots \sum_{i_n=ip_n}^{ip_n+1} \phi^h(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})\, \omega_{i_1-ip_1}\Big(\frac{x_1 - x_{ip_1}}{h_1}\Big) \dots\, \omega_{i_n-ip_n}\Big(\frac{x_n - x_{ip_n}}{h_n}\Big).$$

Use the following backward grid procedure applied to continuous functions defined on $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{V}_{\ell+1} = \Pi_g[\delta, h; \mathcal{V}_\ell], \quad \mathcal{V}_0 = g, \quad \ell = 0, 1, \dots, \tag{8}$$

where the operator Π_g is defined as follows:

$$\Pi_g[\delta, h; \phi](x) = \max\{\Pi[\delta, h; \phi](x); g(x)\}, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{9}$$

with

$$\Pi[\delta, h; \phi](x) = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \mathcal{L}_h[\phi]\big(x + \delta f(x, u, v)\big), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{10}$$

The notation $\mathcal{L}_h[\phi]$ assumes that the interpolation operator is computed using the values of the function ϕ at grid nodes. In other words, $\mathcal{L}_h[\phi] \equiv \mathcal{L}_h[\phi^h]$, where the upper index "h" denotes the restriction of the function ϕ to the grid. Notice that the procedure (8)–(10) is closed with respect to grid functions, i.e. we can compute the function $\mathcal{V}_{\ell+1}$ in the grid nodes using only grid values of the functions $\mathcal{V}_\ell$ and g. Thus, this procedure is numerically feasible.

The procedure (8)–(10) is related to the algorithm (3) in the following way. The shift f of the argument of the function $\mathcal{L}_h[\mathcal{V}_\ell^h]$ in (10) results in the opposite shift of level sets of ϕ. The minimum over u results in the union of level sets of ϕ, and the maximum over v results in the intersection of the level sets. Moreover, the maximum in (9) results in the intersection of the level sets with the state constraint set G. Thus, the procedure (8)–(10) implements the algorithm (3) in terms of level sets. The difference consists in the usage of a constant value of the backward time step δ.

To be more precisely, consider properties of the operators Π and Π_g.

(j) It holds $\Pi[\zeta] = \zeta$ for a constant function ζ.

(jj) The operator Π is monotone, i.e. if $\phi_1 \leq \phi_2$ pointwise, then $\Pi[\delta, h; \phi_1] \leq \Pi[\delta, h; \phi_2]$ pointwise. Obviously, the operator Π_g is also monotone in this sense.

(jjj) The operator Π has the consistency property, i.e.

$$\left| \frac{\Pi(\delta, h; \phi)(x) - \phi(x)}{\delta} - H(x, \nabla\phi) \right| \leq C \|D^2\phi\| \Big(\delta + \frac{h^2}{\delta}\Big) \tag{11}$$

for any twice differentiable function bounded with its second derivative. Here C is a constant independent on ϕ, δ, and h.

Property (j) follows from the definition of the operator Π and the property $\mathcal{L}_h[\zeta] = \zeta$. Property (jj) follows from the monotonicity of the operators $\mathcal{L}_h$ and "$\max_v \min_u$". Property (jjj) is being proven using the expansion of the function ϕ and the estimate (7).

Remark 1. *If the spatial steps are chosen to be proportional to a power of the time step,* $h = C_h \delta^\gamma$, $\gamma \geq 1$, *inequality* (11) *yields the conventional, one-parameter form, of consistency* (*see e.g.* [10] *and* [11]).

Using the monotonicity of the operator Π_g, it is easy to see that the sequence of functions $\mathcal{V}_\ell$ is monotonically growing and bounded from above. Indeed, applying the operator Π_g to the obvious inequality $g = \mathcal{V}_0 \leq \mathcal{V}_1$ yields the relation $\mathcal{V}_1 \leq \mathcal{V}_2$ and so on. Moreover, the inequality $g \leq C$ (the function g is assumed to be bounded) implies the relation $\mathcal{V}_1 = \Pi_g[\delta, h; g] \leq \max\{C, g\} \leq C$. Repeating this implies the required result.

Therefore, the sequence $\mathcal{V}_\ell$ converges pointwise to a limiting, generally speaking, upper semi-continuous function $\mathcal{V}_\delta$ satisfying the relation

$$\mathcal{V}_\delta = \Pi_g[\delta, C_h\delta^\gamma; \mathcal{V}_\delta] = \max\big\{\Pi[\delta, C_h\delta^\gamma; \mathcal{V}_\delta], g\big\}, \tag{12}$$

assuming that the relation $h = C_h\delta^\gamma$, $\gamma \geq 1$ holds.

Remark 2. *If the viscosity solution, $\mathcal{V}$, of equation* (6) *is a Lipschitz continuous function, and all functions $\mathcal{V}_\delta$ are uniformly Lipschitzian with respect to δ, then some adaptation (simplification) of techniques of the work* [11] *provides the estimate*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\mathcal{V}_\delta - \mathcal{V}| \leq C_1\sqrt{\delta}.$$

In the general case, results of the work [10] *provide the local uniform convergence of functions V_δ satisfying the relation*

$$V_\delta = \Pi[\delta, C_h\delta; V_\delta] \tag{13}$$

to the viscosity solution of equation (6) *without the condition "$\mathcal{V}(y_0) > g(y_0)$" in* (iii). *A minimal adaptations of the proof of Theorem* 2.1 *of* [10] *to the case of the presence of the condition "$\mathcal{V}(y_0) > g(y_0)$" in* (iii) *yields the local uniform convergence of the functions $\mathcal{V}_\delta$ to $\mathcal{V}$ as $\delta \to 0$.*

Proposition 2. *The following discrete u-stability property of the function $\mathcal{V}_\delta$ is true. If $x_\star$ is a grid node such that $\mathcal{V}_\delta(x_\star) \geq g(x_\star)$, then for any $v \in Q$ there exists $u \in P$ such that $\mathcal{L}_h[\mathcal{V}_\delta](x_\star + \delta f(x_\star, u, v)) \leq \mathcal{L}_h[\mathcal{V}_\delta](x_\star) = \mathcal{V}_\delta(x_\star)$.*

The validity of this proposition follows from the definitions of the operators Π and Π_g and the relation (12). □

It is worth to mention another way of constructing an operator satisfying the properties (j)–(jjj). Define

$$\hat{\Pi}[\delta, h; \phi](x) = \phi(x) + \delta \max_{v\in Q}\min_{u\in P}\sum_{i=1}^{n}(p_i^{\text{right}} f_i^+ + p_i^{\text{left}} f_i^-), \tag{14}$$

with f_i being the components of $f(x, u, v)$, and

$$a^+ = \max\{a, 0\}, \quad a^- = \min\{a, 0\},$$

$$p_i^{\text{right}} = \frac{[\phi(x_1, \ldots, x_i + h_i, \ldots, x_n) - \phi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)]}{h_i},$$

$$p_i^{\text{left}} = \frac{[\phi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) - \phi(x_1, \ldots, x_i - h_i, \ldots, x_n)]}{h_i}.$$

The new operator $\hat{\Pi}$ does not use any interpolation and can immediately be applied to a grid function to return a grid function. The proof of the properties (j)–(jjj) can be found in [14].

The new numerical scheme formally assumes the same form as (8), i.e.

$$\hat{\mathcal{V}}_{\ell+1} = \hat{\Pi}_g\big[\delta, h; \hat{\mathcal{V}}_\ell\big] := \max\Big\{\hat{\Pi}\big[\delta, h; \hat{\mathcal{V}}_\ell\big], g\Big\}, \quad \hat{\mathcal{V}}_0^h = g, \quad \ell = 0, 1, \ldots . \tag{15}$$

The application of the method (15) requires holding the relation $\delta/h \leq 1/(M\sqrt{n})$ for all ℓ, where M is the bound of F_v, see [11] and [14]. Nevertheless, numerical experiments show a very nice feature of the method(15): in real computations involving bounded solution domains, the noise coming from the boundary of the grid area is absent, and therefore the grid area should not be too much larger than its part where the solution is searched. The procedure (8) does not possess such a property, which requires larger grid areas. On the other hand, larger time steps δ are allowed, which can compensate the use of larger grid regions.

Obviously, the functional sequence $\hat{\mathcal{V}}_\ell$ is non-decreasing and bounded from above, and therefore converges to a limiting function $\hat{\mathcal{V}}_\delta$. Moreover, Remark 2 holds true if $\mathcal{V}_\delta$ is replaced by $\hat{\mathcal{V}}_\delta$.

Unfortunately, an analog of Proposition 2 (approximate u-stability) cannot be easily proven.

5. Control procedure

In this section, the computation of optimal controls for system (1) using the procedure of extremal aiming (see [2] and [15]) is described. Suppose that the right-hand side of (1) satisfies the following saddle point condition:

$$\max_{u\in P}\min_{v\in Q}\ s\cdot f(x,u,v)=\min_{v\in Q}\max_{u\in P}\ s\cdot f(x,u,v) \tag{16}$$

for all x and s from $\mathbb{R}^n$.

Remember that the procedure (8) gives the values of the functions $\mathcal{V}_\ell$ in the grid nodes. These values converge monotonically and relatively quickly to the grid values of the limiting function $\mathcal{V}_\delta$. Thus, it is reasonable to assume that the values of $\mathcal{V}_\delta$ are known exactly in the grid nodes, and therefore the function $\mathcal{L}_h[\mathcal{V}_\delta]$ is known exactly.

Let $t_l = l\cdot\delta,\ l=0,1,\dots,$ be the time sampling of control process. Construct recursively a sequence, $\{\varepsilon_k\}$, as follows:

$$\varepsilon_0=|h|,\quad \bar\varepsilon_{k+1}^2=\varepsilon_k^2e^{L\delta}+R\delta^2+r(\delta),\quad \varepsilon_{k+1}=\bar\varepsilon_{k+1}+|h|,\quad k=0,1,\dots\ , \tag{17}$$

where the constant R and function $r(\delta)$ are defined below by formula (19).

Assume t_k and $x(t_k)$ being the current time instant and the state, respectively. Consider the neighborhood

$$\mathcal{U}_{\varepsilon_k}(x(t_k))=\{x\in\mathbb{R}^n:\ |x-x(t_k)|\le\varepsilon_k\} \tag{18}$$

of the current state. Search through all grid points $x^h\in\mathcal{U}_{\varepsilon_k}(x(t_k))$ and find a point x_k^h such that

$$\mathcal{V}_\delta(x_k^h)=\min_{x^h\in\mathcal{U}_{\varepsilon_k}(x(t_k))}\mathcal{V}_\delta(x^h).$$

The current control $u(t_k)$ of the first player applied on the time interval $[t_k,t_{k+1}]$ is computed from the condition of minimum projection of the system velocity $f\big(x(t_k),u,v\big)$ onto the direction of the vector $x(t_k)-x_k^h$, i.e.

$$u(t_k)=\arg\min_{u\in P}\max_{v\in Q}\big(x(t_k)-x_k^h\big)\cdot f\big(x(t_k),u,v\big).$$

Let $v(\xi)$ be an unknown control of the second player on the interval $[t_k,t_{k+1}]$. Introduce an auxiliary guide whose dynamics is described by the relation

$$y(t_{k+1})=y(t_k)+\delta f(y(t_k),u,v),$$

where the choice of controls u and v is at our disposal. Introduce an additional vector $v^0\in Q$ satisfying the relation

$$v^0=\arg\max_{v\in Q}\min_{u\in P}\big(x(t_k)-x_k^h\big)\cdot f\big(x(t_k),u,v\big).$$

Assume that the guide starts from the state $y(t_k)=x_k^h$. According to Proposition 2, for the control vector v^0 there exists a control vector $\bar u\in P$ such that

$$\mathcal{L}_h[\mathcal{V}_\delta](x_k^h+\delta f(x_k^h,\bar u,v^0))\le\mathcal{L}_h[\mathcal{V}_\delta](x_k^h)=\mathcal{V}_\delta(x_k^h).$$

In other words,

$$\mathcal{L}_h[\mathcal{V}_\delta](y(t_{k+1})\le\mathcal{L}_h[\mathcal{V}_\delta](y(t_k)).$$

Estimate the distance $|x(t_{k+1})-y(t_{k+1})|$. It holds

$$x(t_{k+1})=x(t_k)+\int\limits_{t_k}^{t_k+\delta}f(x(\xi),u(t_k),v(\xi))d\xi,$$

$$y(t_{k+1})=y(t_k)+\int\limits_{t_k}^{t_k+\delta}f(y(t_k),\bar u,v^0)d\xi.$$

Therefore,

$$\begin{aligned}
x(t_{k+1}) - y(t_{k+1}) &= x(t_k) - y(t_k) \\
&+ \int\limits_{t_k}^{t_k+\delta} \big[f(x(t_k), u(t_k), v(\xi)) - f(x(t_k), \bar{u}, v^0)\big]\, d\xi \\
&+ \int\limits_{t_k}^{t_k+\delta} \big[f(x(\xi), u(t_k), v(\xi)) - f(x(t_k), u(t_k), v(\xi))\big]\, d\xi \\
&+ \int\limits_{t_k}^{t_k+\delta} \big[f(x(t_k), \bar{u}, v^0) - f(y(t_k), \bar{u}, v^0)\big]\, d\xi.
\end{aligned}$$

Squaring the both sides of the above equation, accounting for the choice of $u(t_k)$ and v^0, and assuming that $x(t_k) - y(t_k)$ lies in a bounded domain for all k yield the estimate

$$|x(t_{k+1}) - y(t_{k+1})|^2 \le |x(t_k) - y(t_k)|^2 e^{L\delta} + R\delta^2 + r(\delta) \le \bar{\varepsilon}_{k+1}^2,$$

where

$$R = 12M^2 + MLD, \quad D = \sup_k |x(t_k) - y(t_k)|, \quad r(\delta) = 4LM^2\delta^3 + L^2M^2\delta^4. \tag{19}$$

Notice that, according to the relations (17), the grid cell containing $y(t_{k+1})$ entirely belongs to $U_{\varepsilon_{k+1}}(x(t_{k+1}))$, and therefore this grid cell has a node x_{k+1}^h such that

$$\mathcal{L}_h[\mathcal{V}_\delta](y(t_{k+1}) \le \mathcal{L}_h[\mathcal{V}_\delta](x_{k+1}^h) = \mathcal{V}_\delta(x_{k+1}^h).$$

Thus, the above described process can be repeated for the interval $[t_{k+1}, t_{k+2}]$. Finally, assuming that $|h| = C_h\delta\sqrt{\delta}$ and proving the estimate $\varepsilon_k^2 \le C\delta e^{Lt_k}$, where C is a constant depending on L, M, and D, yield the estimate $\mathcal{V}_\delta\big(x(t_k)\big) \le \mathcal{V}_\delta\big(x(t_0)\big) + G\sqrt{C}\delta^{1/2}e^{Lt_k/2}$ with G being the Lipschitz constant of the function $\mathcal{V}_\delta$.

Remark 3. *It should be noticed that the growth rate of the neighborhood U_{ε_k} with respect to k is large enough in theoretical considerations. In practical simulations, the value ε_k is defined as a minimum value such that*

$$\min_{x_h \in U_{\varepsilon_k}(x(t_k))} \mathcal{V}_\delta(x^h) \le \min_{x_h \in U_{\varepsilon_0}(x(t_0))} \mathcal{V}_\delta(x^h).$$

Numerical results show that ε_k defined according to this rule grows relatively slowly with k or remains constant.

Remark 4. *The control procedure of the second player is being designed in a similar way as for the first player. The difference consists in the use of the function $\bar{\mathcal{V}}_\delta$ satisfying the relation, cf.* (12),

$$\bar{\mathcal{V}}_\delta = \bar{\Pi}_g[\delta, C_h\delta^\gamma; \bar{\mathcal{V}}_\delta] := \max\big\{\bar{\Pi}[\delta, C_h\delta^\gamma; \bar{\mathcal{V}}_\delta], g\big\},$$

where the operator $\bar{\Pi}$ is defined as, cf. (10),

$$\bar{\Pi}[\delta, h; \phi](x) = \min_{u\in P}\max_{v\in Q} \mathcal{L}_h[\phi]\big(x + \delta f(x,u,v)\big), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

The last operator has the approximate v-stability property (*cf. Proposition* 2), *which allows us to repeat the above arguments and design a control rule of the second player guaranteeing the estimate*

$$\bar{\mathcal{V}}_\delta\big(x(t_k)\big) \ge \bar{\mathcal{V}}_\delta\big(x(t_0)\big) - \bar{G}\sqrt{C}\delta^{1/2}e^{Lt_k/2},$$

where $\bar{G}$ is the Lipschitz constant of the function $\bar{\mathcal{V}}_\delta$.

It should be noted that numerical experiments show that the difference $\max_{x^h} |\bar{\mathcal{V}}_\delta(x^h) - \mathcal{V}_\delta(x^h)|$ *is very small* (*less then* δ^2) *if the condition* (16) *holds, and therefore the function $\mathcal{V}_\delta$ can be used for the control design of the second player.*

Remark 5. *Remember that the function* $\hat{\mathcal{V}}_\delta$ *constructed with the difference operator* (14) *does not evidently possess the approximate u-stability property* (*cf. Proposition* 2)*. Therefore, the above described procedure of control design for the first player is not applicable in this case. Nevertheless, a method described in* [16] *can apparently be adapted, which demands an additional investigation.*

6. Examples

6.1. A pendulum with a movable suspension point

The first example serves to the purpose of comparing results obtained by the application of the grid algorithm (15) with an exact analytical solution found in [17].

A pendulum with the movable suspension point is under consideration. It is assumed that this point can move with the velocity u. The performance is disturbed by a horizontal force v applied to the suspended load. This force is caused, e.g., by wind gusts. Denote by x_1 the angle deviation from the vertical axis, and let x_2 be the velocity of the suspended load in the ground reference system. These variables satisfy the equations

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & \beta(x_2 - u), \\ \dot{x}_2 & = & -\alpha x_1 + v, \end{array}\right. \tag{20}$$

where α and β are positive constant coefficients depending on the suspended mass and pendulum's length. The controls u and v are bounded as follows:

$$|u| \le \mu, \quad |v| \le \nu, \tag{21}$$

and the following state constraints are imposed:

$$|x_1| \le a, \quad |x_2| \le b. \tag{22}$$

The first player controlling the parameter u strives to maintain the state constraints. The second player dealing with the control parameter v tends to violate the state constraints. Assume that $\beta = 1$, otherwise this can be achieved by proper time scaling.

This problem was analytically solved in [17] for all values of the parameters a, b, μ, ν, and α. The most interesting case corresponds to the following relations between the parameters:

$$b \ge \mu \quad \text{and} \quad |\sqrt{\alpha} a - b| \le \mu - \nu/\sqrt{\alpha}.$$

In this case, the boundary of the viability kernel includes parts of all edges of the state constraint (see Fig. 1 to the right).

The viability kernel was analytically constructed using four families of ellipses of the form

$$\frac{1}{\alpha}(\alpha x_1 - v)^2 + (x_2 - u)^2 = C. \tag{23}$$

The families, I–IV, correspond to the following pairs of the controls u and v (see Fig. 1 to the left):

$$\text{I:} \quad \{\mu, \nu\}; \quad \text{II:} \quad \{-\mu, \nu\}; \quad \text{III:} \quad \{-\mu, -\nu\}; \quad \text{IV:} \quad \{\mu, -\nu\}. \tag{24}$$

In the analytical construction, the ellipses from the families I, II, III, and IV passing through the points p_1, p_2, p_3, and p_4, respectively, were used. The points d_1, d_2, d_3, and d_4 were obtained as common points of the corresponding ellipses and the edges of the state constraint. Notice that the conjunction at the points p_1, p_2, p_3 and p_4 is smooth.

In the numerical construction based on the application of the grid algorithm (15), the following values of the parameters are chosen: $a = 6, b = 4, \mu = 1, \nu = 0.3$, and $\alpha = 0.5$. The function g

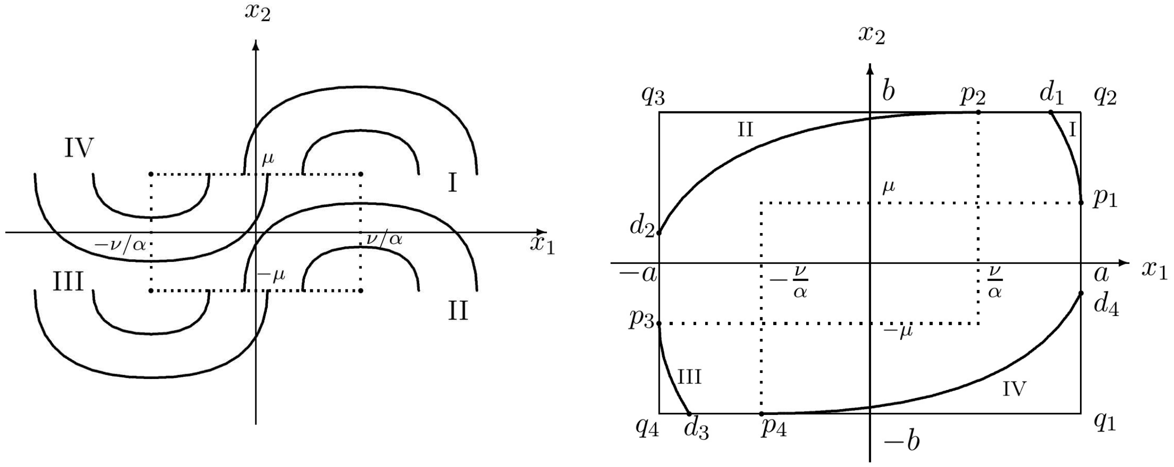


Fig. 1. Four families of ellipses (left) and the schematic structure of the viability kernel (right).

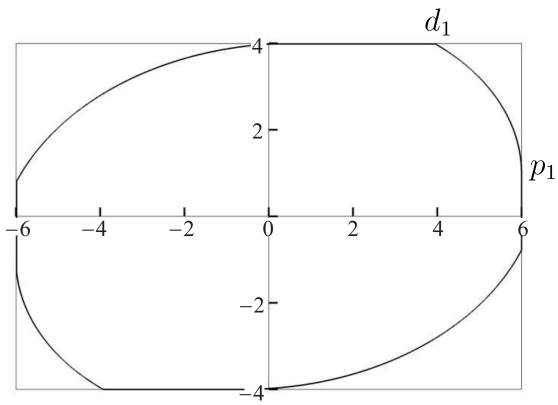


Fig. 2. The viability kernel computed numerically: $p_1 = (6, 1)$ and $d_1 = (3.95, 4)$. The exact values of p_1 and d_1 are $(6, 1)$ and $(3.94, 4)$, respectively.

defining the state constraint is of the form $g(x_1, x_2) = \max\{|x_1|/a, |x_2|/b\} - 1$. The time step δ is chosen as $\delta = 0.001$. The grid is obtained by dividing the region $[-7, 7]^2$ into 1000×1000 square cells. Computations using the algorithm (8) show that

$$\max_{\text{over grid}} |\mathcal{V}^h_{\ell+1} - \mathcal{V}^h_\ell| < 10^{-6} \text{ if } l \geq 8000,$$

which is the stop criterion. The runtime on a common laptop with a 4 core/8 thread processor is approximately 1 *min*. Figure 2 shows the viability kernel obtained as $Viab(G) = \{(x_1, x_2) : \mathcal{V}^h_\ell(x_1, x_2) \leq 0\}$. The computed coordinates of the points p_1 and d_1 are equal $(6, 1)$ and $(3.95, 4)$, respectively, whereas the analytically found values are $(6, 1)$ and $(3.94, 4)$, respectively. This proves the validity of the numerical algorithm (8). It should be noted that the algorithm (15) yields practically the same, visually indistinguishable, approximation of the viability kernel.

6.2. Acoustic version of the homicidal chauffeur game

The homicidal chauffeur game was firstly considered in [18]. In this game, the first player, a car whose minimum turn radius is bounded from below, strives to capture the second player, an inertia-less pedestrian, as soon as possible. The linear velocity of the car is assumed being constant, the magnitude of pedestrian's velocity is bounded by a given value. The car is controlled by changing the rate of turn of the linear velocity, whereas the pedestrian changes his velocity arbitrarily within

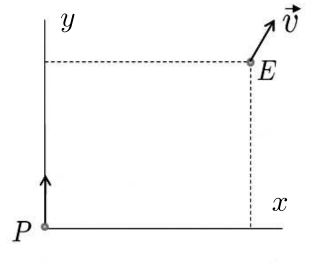


Fig. 3. Movable reference coordinate system in the homicidal chauffeur game.

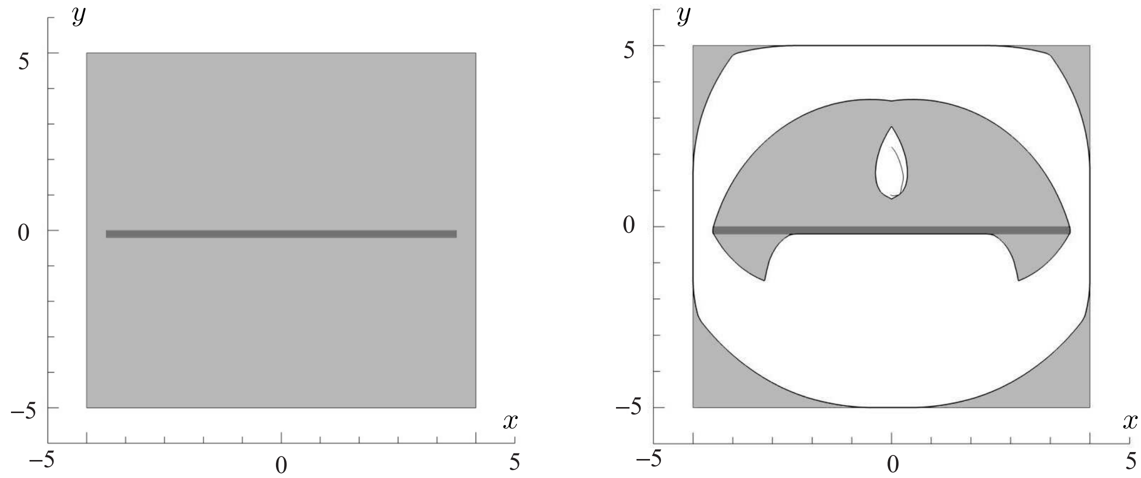


Fig. 4. To the left: the state constraint (light-grey). To the right: the viability kernel (white). The viability kernel consists of two disconnected parts. A trajectory corresponding to the optimal strategies of the players goes downwards and stops forever near the bottom of the small part.

the prescribed bounds. The original system consists of five differential equations, but it can be reduced (see [18]) to the following two-dimensional model:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = -yu + v_1, \\ &\dot{y} = xu + v_2 - 1, \\ &|u| \le 1, \quad \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \le \nu \end{aligned} \tag{25}$$

written in a movable reference frame with y-axis directed along the car velocity vector (see Fig. 3). The problem statement where the bound ν depends on the state (x, y) is known (due to Pierre Bernhard) as the acoustic version of the homicidal chauffeur game. The following case:

$$\nu(x, y) = \nu^* \min\left\{1, \sqrt{x^2 + y^2}/s\right\},$$

where ν^* and s are some positive constant parameters, was considered in [19] and [20].

Reformulate the problem as follows. Introduce the state constraint

$$G = [-c, c]^2 \setminus [-a, a] \times [-b, 0]$$

(see Fig. 4 to the left) given by the formula

$$g(x, y) := \max\Big\{ \max\{|x/c|, |y/c|\} - 1; \quad 1 - \max\{|x/a|, |2y/b + 1|\}\Big\} \le 0.$$

The second player dealing with the control parameters v_1 and v_2 aims to maintain the state constraint, and the opposite player managing the control parameter u has the opposite objective.

Thus, one of the objectives of the first player is to bring the state vector to the set $\Gamma = [-a, a] \times [-b, 0]$, and the second player strives to avoid that. This establishes the relation with the original problem formulation used in [20] where Γ is considered as the target set of the first player.

The following values of the parameters are chosen in the numerical simulation based on the algorithm (8)–(10): $c = 5, a = 4.5, b = 0.2, \nu^* = 1.5,\ s = 0.9375$. The time step δ is chosen as $\delta = 0.001$. The grid is formed by dividing the region $[-7, 7]^2$ into 1000×1000 square cells, and 16000 iterations of the algorithm (8)–(10) are done.

Figure 4 shows the state constraint (to the left) and the computed viability kernel (to the right). The last consists of two disconnected parts. A trajectory started at a point of the small part and computed using optimal control strategies described in Section 5 goes downwards and remains forever near the bottom of the small part.

6.3. In-plane nonlinear double pendulum

This example demonstrates the treatment of a high-nonlinear system whose state vector lies in $\mathbb{R}^4$. In this case the algorithm (8)–(10) is more preferable because it allows us to choose larger time steps (see the remark at the end of Section 4). Figure 5 shows a sketch of the pendulum. The notations are self-explanatory. The control is the torque applied at the suspension point, and the disturbance is associated with wind. It is assumed that the force exerted by the wind on an linear element of the pendulum is computed as the product of the wind strength and the cosine of the angle between the element and wind directions.

The governing equations read

$$
\begin{aligned}
\dot\theta_1 &= \frac{6}{ml^2}\frac{2\,p_1 - 3\cos(\theta_1-\theta_2)\,p_2}{16 - 9\cos^2(\theta_1-\theta_2)},\\
\dot\theta_2 &= \frac{6}{ml^2}\frac{8\,p_2 - 3\cos(\theta_1-\theta_2)\,p_1}{16 - 9\cos^2(\theta_1-\theta_2)},\\
\dot p_1 &= -\frac{1}{2}ml^2\left[\dot\theta_1\dot\theta_2\sin(\theta_1-\theta_2) + 3\frac{g}{l}\sin\theta_1\right] + u + vl^2\left[\frac{1}{2}\cos^2\theta_1 + \cos\theta_1\cos\theta_2\right],\\
\dot p_2 &= -\frac{1}{2}ml^2\left[-\dot\theta_1\dot\theta_2\sin(\theta_1-\theta_2) + \frac{g}{l}\sin\theta_2\right] + vl^2\frac{1}{2}\cos^2\theta_2.
\end{aligned}
$$

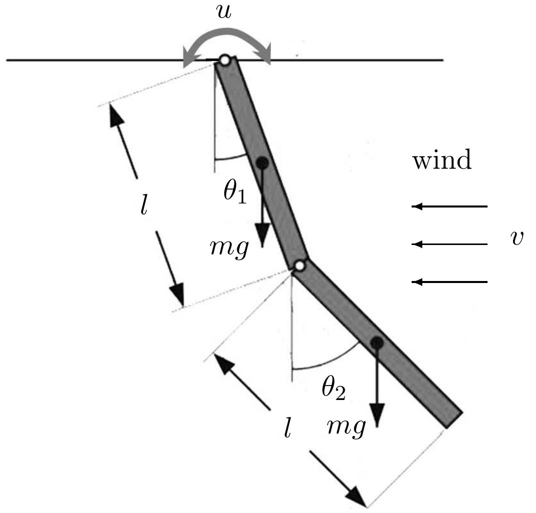


Fig. 5. Sketch of an in-plane nonlinear double pendulum. The control parameter is the torque applied at the suspension point, and the disturbance is associated with wind.

Here, p_1 and p_2 are the so-called generalized momenta defined by the relation

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}, \quad i = 1, 2,$$

where

$$L = \frac{1}{6} m l^2 \Big[4\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 3\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \Big] + \frac{1}{2} m g l (3\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

is the Lagrangian of the system (kinetic energy minus potential energy).

Assume that the control and the disturbance are bounded as follows:

$$|u| \le 1, \quad |v| \le 0.1,$$

and the state constraint $G \in \mathbb{R}^4$ is defined by the inequality $g(p_1, p_2, \theta_1, \theta_2) \le 0$, where

$$g(p_1, p_2, \theta_1, \theta_2) = \max\Big\{ \sqrt{p_1^2 + p_2^2}, |\theta_1|/2.6, |\theta_2|/2.6 \Big\} - 1.$$

Therefore, the central p_1, p_2 cross-section of the state constraint is the unique circle (see Fig. 6, to the left), and the central θ_1, θ_2 cross-section is 2.6 $\times$ the unit square (see Fig. 6, to the right).

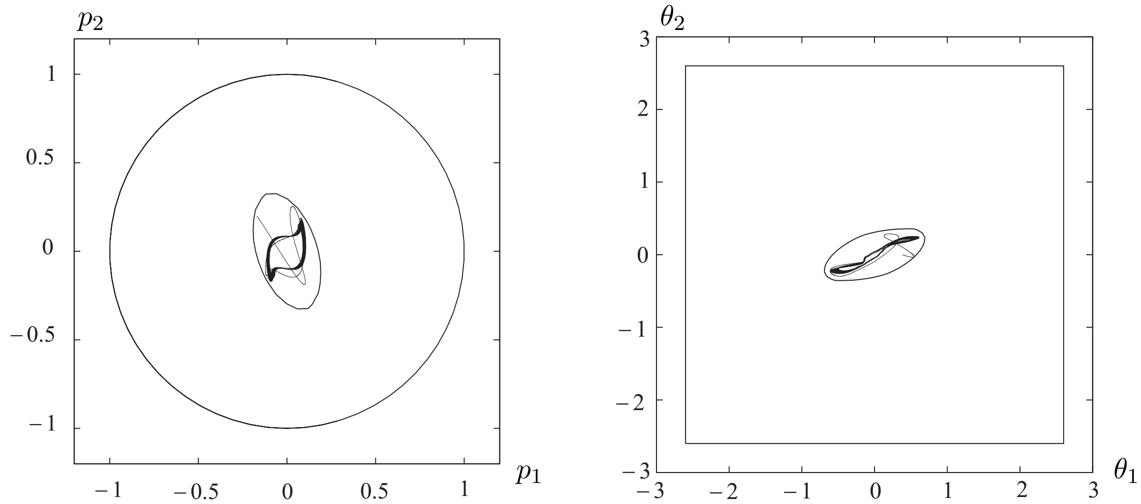


Fig. 6. To the left: the central p_1, p_2 cross-section of the state constraint and the viability kernel; the p_1, p_2 projection of the trajectory computed using optimal strategies of the players. To the right: the same but for the central θ_1, θ_2 cross-section and θ_1, θ_2 projection.

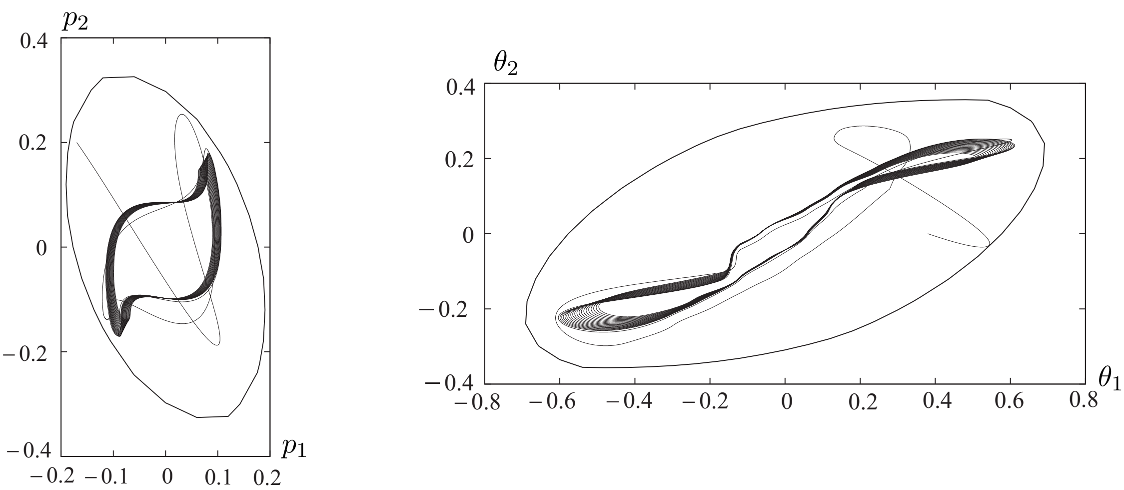


Fig. 7. The enlarged pictures, without the cross-sections of the state constraint, from Fig. 6.

In the numerical computations, the time step δ is chosen as $\delta = 0.01$. The grid is formed by dividing the region $[-1.2, 1.2]^2 \times [-3, 3]^2$ into $40^2 \times 100^2$ cells, and 8000 iterations of the algorithm (8)–(10) are done.

Fig. 6 (to the left) shows the central p_1, p_2 cross-section of the viability kernel and the p_1, p_2 projection of a trajectory corresponding to the optimal control laws described in Section 5. The trajectory remains in the viability kernel arbitrary long.

Fig. 6 (to the right) shows the central θ_1, θ_2 cross-section of the viability kernel and the θ_1, θ_2 projection of the trajectory.

Fig. 7 shows the enlarged pictures, without the cross-sections of the state constraint, from Fig. 6.

7. Conclusions

In this work, viability kernels for some nontrivial problems are computed using numerical procedures developed by the authors in the framework of grid methods for solving differential games. Theoretically, these numerical procedures are suitable for arbitrary dimensions of the state vector. Currently, the maximal number of processors used in the computations is up to 32, which allows us to handle nonlinear problems of the dimension less or equal to four. The usage of supercomputing systems with large number of processors and the utilization of sparse representations of grid functions will enable us to advance our capabilities towards higher dimensionality. This should support the treatment of e.g. aircraft applications related to essentially nonlinear takeoff and landing problems with complex state constraints.

Acknowledgements

This work was supported in part by the DFG grant TU427/2-1.

REFERENCES

1. **Aubin J.P.** A survey of viability theory // SIAM J. Control Optim. 1990. Vol. 28, no. 4. P. 749–788.
2. **Krasovskii N.N. and Subbotin A.I.** Game-theoretical control problems. New York: Springer-Verlag, 1988. 517 p.
3. **Quincampoix M.** Frontieres de domaines d'invariance et de viabilite pour des inclusions differentielles avec contraintes // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics. 1990. Vol. 311. P. 411–416.
4. **Aubin J.-P., Bayen A.M. and Saint-Pierre P.** Viability theory: New directions. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. 830 p.
5. **Neznakhin A. A. and Ushakov V. N.** A discrete method for constructing an approximate viability kernel of a differential inclusion // Comput. Math. Math. Phys. 2001. Vol. 41, no. 6. P. 846–859.
6. **Botkin N.D.** Asymptotic behavior of solution in differential games. Viability domains of differential inclusions // Dokl. Akad. Nauk. 1992. Vol. 325, no. 1. P. 16–19.
7. **Botkin N.D.** Construction of viable sets for autonomous controlled systems. Preprint No. 430. Würzburg: University of Würzburg, 1993. 14 p. (Preprint Ser. SPP Anwendungsbezogene Optimierung und Steuerung (Applied optimization and control)).
8. **Botkin N.D. and Turova V.L.** Numerical construction of viable sets for autonomous conflict control systems // Mathematics. 2014. Vol. 2. P. 68–82.
9. **Pontryagin L.S.** Linear differential games. 2 // Soviet Math. Dokl. 1967. Vol. 8. P. 910–912.
10. **Barles G. and Souganidis P.E.** Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equations // Asymptot. Anal. 1991. Vol. 4, no. 3. P. 271–283.
11. **Botkin N. D., Hoffmann K.-H., Mayer N. and Turova V. L.** Approximation schemes for solving disturbed control problems with non-terminal time and state constraints // Analysis. 2011. Vol. 31, no. 4. P. 355–379.
12. **Bardi M. and Goatin P.** Invariant sets for controlled degenerate diffusions: a viscosity solutions approach // Stochastic Analysis, Control, Optimization and Applications: A Volume in Honor of W.H. Fleming / eds. W.H. Fleming, W.M. McEneaney, G.G. Yin, and Q. Zhang. Boston: Birkhäuser, 1999. P. 191–208. (Systems Control Found. Appl.)

13. **Mößner B. and Reif U.** Error bounds for polynomial tensor product interpolation // Computing. 2009. Vol. 86, no. 2-3. P. 185–197.
14. **Botkin N. D., Hoffmann K.-H. and Turova V. L.** Stable numerical schemes for solving Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs equations // SIAM J. Sci. Comp. 2011. Vol. 33, no. 2. P. 992–1007.
15. **Subbotin A.I. and Chentsov A.G.** Optimization of guaranteed result in control problems.Moscow: Nauka, 1981 (in Russian). 288 p.
16. **Subbotina N.N. and Tokmantsev T.B.** On the efficiency of optimal grid synthesis in optimal control problems with fixed terminal time // Differ. Equ. 2009. Vol. 45, no. 11. P. 1686–1697.
17. **Botkin N.D. and Ryazantseva E.A.** Structure of viability kernels for some linear differential games // J. Optim. Theory Appl. 2011. Vol. 147, no. 1. P. 42–57.
18. **Isaacs R.** Differential games. New York: John Wiley, 1965. 408 p.
19. **Cardaliaguet P., Quincampoix M. and Saint-Pierre P.** Set valued numerical analysis for optimal control and differential games // Stochastic and Differential Games: Theory and Numerical Methods / eds. M. Bardi, T. Parthasarathy, and T. E. S. Raghavan. Boston: Birkhäuser, 1999. P. 177–247. (Ann. Internat. Soc. Dynam. Games, 4).
20. **Patsko V. S. and Turova V. L.** Level sets of the value function in differential games with the homicidal chauffeur dynamics // Game Theory Review. 2001. Vol. 3, no. 1. P. 67–112.

Received February 14, 2015

Nikolai D. Botkin
Technische Universität München, Fakultät für Mathematik
Boltzmannstr. 3, 85747 Garching, Germany
e-mail: botkin@ma.tum.de

Varvara L. Turova
Technische Universität München, Fakultät für Mathematik
Boltzmannstr. 3, 85747 Garching, Germany
e-mail: turova@ma.tum.de

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.983.54

ON ONE APPLICATION OF CONVEX OPTIMIZATION TO STABILITY OF LINEAR SYSTEMS

Vakif Dzhafarov, Taner Büyükköroğlu, Şerife Yılmaz

One of the most important problem of control theory is control of switched systems. This problem is related to the common quadratic Lyapunov function problem and one of the way to solve it is LMI (Linear Matrix Inequalities) approach. On the other hand this approach requires a huge number of parameters and is not effective when the number of subsystems and matrix dimensions increase. In this paper we give alternative methods for testing stability of switched systems. These methods are based on the convexity property of the maximum eigenvalue function of symmetric matrices.

Keywords: Lyapunov inequalities, switched systems, maximum eigenvalue.

V. Dzhafarov, T. Büyükköroğlu, Ş. Yılmaz. Об одном применении выпуклой оптимизации к устойчивости линейных систем.

Проблема стабильности переключаемих систем является одной из важных в теории управления. Эта проблема тесно связана с общими квадратичными ляпуновскими функциями и линейными матричными неравенствами (ЛМН). С другой стороны ЛМН подход требует огромного числа параметров и является не эффективным, когда число подсистем увеличивается. В данной работе мы предлагаем альтернативные методы для проверки устойчивости переключаемых систем. Эти методы основаны на свойстве выпуклости функции максимального собственного значения.

Ключевые слова: ляпуновские неравенства, переключаемые системы, максимальное собственное значение.

Dedicated to the memory and the 70th anniversary of the Academician of RAS
Andrei I. Subbotin

1. Introduction

Consider the following linear switched system

$$\dot{x} \in \{A_1, A_2, \dots, A_N\}. \tag{1}$$

Here $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$, the matrices A_1, A_2, …, A_N are $n \times n$ dimensional. We investigate the problem of asymptotical stability of the system (1) by finding a common quadratic Lyapunov function.

Let A be Hurwitz stable matrix, that is all eigenvalues lie in the open left-half plane. Let a linear transformation $\mathcal{P}_A(Q)$ be defined as follows. For $Q > 0$, the unique solution of the Lyapunov equation $A^T P + PA = -Q$ (see [1–3]) is denoted by $\mathcal{P}_A(Q) > 0$. Here the symbol “$>$” stands for positive definiteness, the symbol “T” means the transpose.

We investigate common $P > 0$ solutions to the system of Lyapunov inequalities

$$A_i^T P + PA_i < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \tag{2}$$

where the matrices $A_1, A_2, \dots, A_N$ are Hurwitz stable. In the case of existence of a common $P > 0$ the function $V(x) = x^T Px$ is called common quadratic Lyapunov function. This problem has been investigated in a lot of works (see [4–9] and references therein). A necessary and sufficient condition is known only in the case $n = N = 2$ (see [5]). In [6], for a commuting family it has been proven the existence and evaluation of a common $P > 0$. In [2], the existence is proved for an upper triangular family. In [4], gradient algorithm is proposed which converges to a common solution under assumption that common solution exists.

This paper is a continuation of these researches and consists of two parts. First part is devoted to a weighted common solutions. The idea of the approach is the following. Suppose that we are given convex functions $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, N)$ defined on a convex set X and we search a common $x_* \in X$ which satisfies $f_i(x_*) < 0$ for all $i = 1, 2, \dots, N$. On the other hand assume that we can easily find $x_1, x_2, \dots, x_N$ such that $f_i(x_i) < 0$ $(i = 1, 2, \dots, N)$. The aim is from $x_1, x_2, \dots, x_N$ to construct a weighted sum $x_* = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_N x_N$ $(\alpha_i \ge 0)$ which satisfies the inequality $f_i(x_*) < 0$ for all $i = 1, 2, \dots, N$.

For $Q_i > 0$ (i=1,2,...,N) define

$$P_1 = \mathcal{P}_{A_1}(Q_1),\ P_2 = \mathcal{P}_{A_2}(Q_2),\ \dots,\ P_N = \mathcal{P}_{A_N}(Q_N)$$

and

$$l_{ij} = \lambda_{\max}(A_i^T P_j + P_j A_i) \quad (i, j = 1, 2, \dots, N)$$

where $\lambda_{\max}(C)$ stands for the maximum eigenvalue of C. From stability of A_i it follows that

$$l_{ii} < 0 \text{ for all } i = 1, 2, \dots, N.$$

Define $N \times N$ dimensional matrix

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1N} \\ l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{N1} & l_{N2} & \dots & l_{NN} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

The matrix L is defined by choosing $P_1 = \mathcal{P}_{A_1}(Q_1), \dots, P_N = \mathcal{P}_{A_N}(Q_N)$. If some column of L, say j-th column, is negative then P_j is a common solution. Unfortunately, this is not a case and therefore we use a weighted sum. More specifically, for example, assume that $N = 2$ and A_1, A_2, P_1, P_2 are such that $L = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. Neither P_1 nor P_2 is a common solution, whereas the weighted sum $\frac{2}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2$ is common solution.

Define

$$\begin{aligned} S &= \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)^T : \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N = 1, \alpha_i \ge 0\}, \\ K &= \{(x_1, x_2, \dots, x_N)^T : x_i < 0,\ i = 1, 2, \dots, N\}, \\ \tilde{S} &= \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)^T : \alpha_i \ge 0,\ i = 1, 2, \dots, N\}, \\ \tilde{K} &= \{(x_1, x_2, \dots, x_N)^T : x_i \le -1,\ i = 1, 2, \dots, N\}. \end{aligned}$$

In Section 2, Theorems 1-2 we show that if $L(\tilde{S}) \cap \tilde{K} \ne \emptyset$ then $P^* = \alpha_1^* P_1 + \cdots \alpha_N^* P_N$ is a common solution, where $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_N^*)^T \in \tilde{S}$ satisfies $L\alpha^* \in \tilde{K}$. On the other hand the condition $L(\tilde{S}) \cap \tilde{K} \ne \varnothing$ can be easily verified as a feasibility condition of a linear programming problem (see (5)).

In the second part of the paper, we consider a fast algorithm for the case the $N = 2$, that is consider the evaluation of a common P satisfying the inequalities

$$A_i^T P + P A_i < 0 \quad (i = 1, 2).$$

Here we use the scheme from the work [4]. On the other hand differently from [4] where optimization has been done over P, we consider an optimization over the right-hand side of the equation $A^T P + PA = -Q$.

2. Weighted common quadratic functions

In this section we show that a weighted sum of matrices $P_1, P_2, \dots, P_N$ may serve as a common solution to Lyapunov inequalities.

Theorem 1. *If $L(S) \cap K \neq \varnothing$ then $P^* = \alpha_1^* P_1 + \dots + \alpha_N^* P_N$ is a common solution where $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_N^*)^T \in S$ satisfies the condition $L\alpha^* \in K$.*

Proof. Suppose that $L(S) \cap K$ is not empty. Then there exists at least one vector $(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_N^*)^T$ such that

$$\begin{cases} l_{11}\alpha_1^* + l_{12}\alpha_2^* + \dots + l_{1N}\alpha_N^* < 0, \\ l_{21}\alpha_1^* + l_{22}\alpha_2^* + \dots + l_{2N}\alpha_N^* < 0, \\ \vdots \\ l_{N1}\alpha_1^* + l_{N2}\alpha_2^* + \dots + l_{NN}\alpha_N^* < 0, \\ \alpha_1^* \geq 0, \alpha_2^* \geq 0, \dots, \alpha_N^* \geq 0, \\ \alpha_1^* + \alpha_2^* + \dots + \alpha_N^* = 1. \end{cases} \tag{4}$$

Define $P^* = \alpha_1^* P_1 + \dots + \alpha_N^* P_N$. Using (4) and convexity of the function $P \ \to \lambda_{\max}(A_i^T P + PA_i)$ (see [10, p. 34]), we obtain

$$\begin{aligned} &\lambda_{\max}(A_i^T P^* + P^* A_i) \\ &= \lambda_{\max}(\alpha_1^*(A_i^T P_1 + P_1 A_i) + \alpha_2^*(A_i^T P_2 + P_2 A_i) + \dots + \alpha_N^*(A_i^T P_N + P_N A_i)) \\ &\leq \alpha_1{}^* \lambda_{\max}(A_i^T P_1 + P_1 A_i) + \alpha_2{}^* \lambda_{\max}(A_i^T P_2 + P_2 A_i) + \dots + \alpha_N{}^* \lambda_{\max}(A_i^T P_N + P_N A_i) \\ &= l_{i1}\alpha_1{}^* + l_{i2}\alpha_2{}^* + \dots + l_{iN}\alpha_N{}^* < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N). \end{aligned}$$

Therefore the matrix $P^* = \alpha_1^* P_1 + \dots + \alpha_N^* P_N$ is a common solution. □

Theorem 2. *$L(\tilde{S}) \cap \tilde{K} \neq \varnothing \Leftrightarrow L(S) \cap K \neq \varnothing$.*

Proof. ($\Rightarrow$) Let $L(\tilde{S}) \cap \tilde{K}$ be nonempty. Then there exists $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_N^*)^T \in \tilde{S}$ such that $L\alpha^* \in \tilde{K}$. Define $\beta_i^* = \dfrac{\alpha_i^*}{\sum_{i=1}^N \alpha_i^*}$. Then $\beta^* = (\beta_1^*, \dots, \beta_N^*)^T \in S$ and $L\beta^* \in K$. That is $L(S) \cap K \neq \varnothing$.

($\Leftarrow$) Let $L(S) \cap K$ be nonempty. Then there exists $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_N^*)^T \in S$ such that $L\alpha^* \in K$. Multiply the vector α^* by a sufficiently large positive k, such that for the vector $\beta^* = k\alpha^*$ the condition $L\beta^* \in \tilde{K}$ is satisfied. Therefore, $L(\tilde{S}) \cap \tilde{K} \neq \varnothing$. □

Taking into account Theorems 1-2 and to test condition $L(\tilde{S}) \cap \tilde{K} \neq \varnothing$ consider the following linear programming (LP) problem:

$$\begin{gathered} -x_1 - x_2 - \dots - x_N \to \max, \\ l_{11}x_1 + l_{12}x_2 + \dots + l_{1N}x_N \leq -1, \\ \vdots \\ l_{N1}x_1 + l_{N2}x_2 + \dots + l_{NN}x_N \leq -1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_N \geq 0. \end{gathered} \tag{5}$$

(5) is a standard LP problem (see [11]).

If the feasibility set of (5) is nonempty, by Theorems 1-2 we obtain common solution to Lyapunov inequalities. The goal function in (5) is taken for the sake of formality. On the other hand we wish to obtain a common matrix P with smaller entries.

Example 1. Consider the switched system

$$\dot{x} \in \{A_1, A_2, A_3, A_4\}x$$

where

$$A_1 = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 0 & -4 \\ 1 & -5 & -5 & -4 \\ -1 & 6 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 4 & 3 \\ -1 & -5 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -7 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -6 & -4 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -4 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} -5 & 5 & -1 & -4 \\ -5 & -9 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

are Hurwitz stable matrices.

Let

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

The matrix L (3) can be calculated as

$$L = \begin{pmatrix} -1 & 5.151 & 0.332 & 0.798 \\ -0.047 & -0.585 & 0.355 & 0.102 \\ 0.140 & 0.919 & -1 & 0.014 \\ 0.002 & 1.342 & 0.360 & -0.999 \end{pmatrix}.$$

If we calculate P_i as solution of $A_i^T P + P A_i = -Q_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ the corresponding LP problem (5) is feasible and gives the solution $x_1 = 765.018$, $x_2 = 101.873$, $x_3 = 205.700$, $x_4 = 213.954$ which in turn gives weighted common solution

$$\begin{aligned} P^* &= x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3 + x_4 P_4 \\ &= \begin{pmatrix} 509.370 & -142.390 & -399.541 & -229.109 \\ -142.390 & 532.382 & 301.071 & 67.481 \\ -399.541 & 301.071 & 977.343 & 351.358 \\ -229.109 & 67.481 & 351.358 & 522.908 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Note that none of the matrices P_1, P_2, P_3 and P_4 is a common solution, whereas a weighted sum is.

Example 2. Consider the switched system from the previous example

$$\dot{x} \in \{A_1, A_2, A_3, A_4\}x.$$

Take P_1, P_2, P_3 and P_4 as matrices obtained at 7th, 8th, 9th and 10th steps of Liberzon-Tempo's algorithm from [4].

The corresponding LP problem is feasible and gives $x_1 = 0$, $x_2 = 29.7089$, $x_3 = 30.2001$, $x_4 = 47.3297$ and the common solution

$$P^* = \begin{pmatrix} 124.9040 & -11.7498 & -50.9109 & -4.6359 \\ -11.7498 & 185.5921 & 39.0194 & 6.2082 \\ -50.9109 & 39.0194 & 260.1918 & 67.8976 \\ -4.6359 & 6.2082 & 67.8976 & 140.3675 \end{pmatrix}.$$

This problem has been solved by Liberzon-Tempo's algorithm which gives positive answer only after 30 steps.

If a common solution exists, the following theorem demonstrates that it can be obtained as a weighted sum.

Theorem 3. *If there is a common P, then there exist $Q_1 > 0$, $Q_2 > 0$, $\ldots$, $Q_N > 0$ and $(\alpha_1{}^*, \alpha_2{}^*, \ldots, \alpha_N{}^*)^T \in S$ such that $P = \alpha_1{}^* P_1 + \alpha_2{}^* P_2 + \cdots + \alpha_N{}^* P_N$, where $P_i = \mathcal{P}_{A_i}(Q_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$.*

That is, if there is a common matrix P, this matrix is a weighted sum of solutions of the Lyapunov equations for $A_1, A_2, \ldots, A_N$.

Proof. Let a common P be exists. Then $A_i^T P + PA_i < 0$. $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Denote $Q_i = -(A_i^T P + PA_i) > 0$. Then $P = \mathcal{P}_i(Q_i)$. Hence,

$$P = \frac{1}{N}\mathcal{P}_1(Q_1) + \cdots + \frac{1}{N}\mathcal{P}_N(Q_N) = \frac{1}{N}P_1 + \cdots + \frac{1}{N}P_N. \qquad \square$$

3. Fast algorithm for two matrices

In this section we give fast algorithm for a common P for a switched system consisting of two matrices. Differently from [4] where optimization has been done over P, we consider an optimization over the right-hand side of the Lyapunov equation $A^T P + PA = -Q$. Such approach essentially improves the convergence rate. Number of examples show that the proposed algorithm is sufficiently fast.

Let A_1 and A_2 be an $n \times n$ dimensional Hurwitz stable matrices.

Theorem 4. *Let $\varepsilon > 0$ and I be the identity matrix. Then*

$$\exists P > 0, \quad \begin{matrix} A_1^T P + PA_1 < 0, \\ A_2^T P + PA_2 < 0, \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \exists P > 0, \quad \begin{matrix} A_1^T P + PA_1 + \varepsilon I \leq 0, \\ A_2^T P + PA_2 + \varepsilon I \leq 0. \end{matrix}$$

Proof. $(\Rightarrow)$ Let $P^* > 0$ be a common solution to

$$\begin{cases} A_1^T P + PA_1 < 0, \\ A_2^T P + PA_2 < 0. \end{cases}$$

Denote

$$\begin{cases} Q_1 := -(A_1^T P^* + P^* A_1), \\ Q_2 := -(A_2^T P^* + P^* A_2). \end{cases}$$

Then $Q_1 > 0$, $Q_2 > 0$.

Let $\alpha = \min\{\lambda_1(Q_1), \ldots, \lambda_n(Q_1), \lambda_1(Q_2), \ldots, \lambda_n(Q_2)\} > 0$. Choose a positive number k such that $k\alpha \geq \varepsilon$. Denote

$$Q_1{}^* = -[A_1^T(kP^*) + (kP^*)A_1 + \varepsilon I],$$
$$Q_2{}^* = -[A_2^T(kP^*) + (kP^*)A_2 + \varepsilon I].$$

Then

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}(-Q_i^*) &= \lambda_{\max}[A_i{}^T(kP^*) + (kP^*)A_i + \varepsilon I] \\ &= \lambda_{\max}[A_i{}^T(kP^*) + (kP^*)A_i] + \varepsilon \\ &= k\lambda_{\max}(A_i{}^T P^* + P^* A_i) + \varepsilon \\ &= k\lambda_{\max}(-Q_i) + \varepsilon \\ &= -k\lambda_{\min}(Q_i) + \varepsilon \leq -k\alpha + \varepsilon \leq 0 \quad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ Obvious. $\square$

Let A be Hurwitz stable and $\varepsilon > 0$ be fixed. For $Q \geq 0$ consider the equation

$$A^T P + PA + \varepsilon I = -Q. \tag{6}$$

The unique $P > 0$ solution of (6) denote by $P_A(Q)$. The map $P_A(Q)$ differs from $\mathcal{P}_A(Q)$ defined in Introduction by term εI. Consider the following convex matrix functionals:

$$\begin{cases} F(Q) = \lambda_{\max}[A_1^T P_{A_2}(Q) + P_{A_2}(Q)A_1], \\ G(Q) = \lambda_{\max}[A_2^T P_{A_1}(Q) + P_{A_1}(Q)A_2]. \end{cases}$$

Theorem 5. *If there exists a common solution P to two inequalities*

$$A_i^T P + PA_i < 0 \ \ (i = 1, 2)$$

then $\inf\limits_{Q\geq 0} F(Q) = \inf\limits_{Q\geq 0} G(Q) = -\infty$.

Proof. By Theorem 4 there exists $P > 0$ such that

$$\begin{aligned} A_1^T P + PA_1 + \varepsilon I = -Q_1, \quad Q_1 \geq 0, \\ A_2^T P + PA_2 + \varepsilon I = -Q_2, \quad Q_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Multiply the above equations by a sufficiently large k and denote $P^* = kP$, $Q^* = kQ_2 + k\varepsilon I - \varepsilon I \geq 0$, $Q_1^* = kQ_1 + k\varepsilon I - \varepsilon I \geq 0$. Then $P^* = P_{A_2}(Q^*)$ and

$$A_1^T P_{A_2}(Q^*) + P_{A_2}(Q^*)A_1 = -Q_1^*,$$

$$F(Q^*) = \lambda_{\max}(-Q_1^*) \to -\infty \text{ as } k \to \infty.$$

Similarly $\inf\limits_{Q\geq 0} G(Q) = -\infty$. □

Let for symmetric matrices S and T the inner product be defined by $< S, T >= \mathrm{trace(ST)}$. This product generates the norm $\| S \|^2 = \mathrm{trace(S^2)}$. For the convergence of the proposed algorithm we impose the following

Condition 1. *For $r > 0$ there exists $Q^* \geq 0$ such that the closed ball of radius r and centered at Q^* is contained in the set $\{Q \geq 0 : F(Q) < 0\}$.*

It should be noted that this requirement is a strong variant of the existence of a common solution and is satisfied when $\varepsilon = 0$ and there exists a common solution.

Now we define the derivative of a scalar symmetric matrix functional with respect to the matrix variable. A general definition of such derivative is given in [12]. As has been noted in [12] the definition from [12] is not applicable to symmetric matrix functionals. Our Proposition 1 (see below) fills a gap in the approach from [12].

A functional $f(P)$ defined on symmetric matrices is called differentiable at P if there exists a symmetric matrix $\partial f|_P$ such that

$$f(P + \Delta P) = f(P) + < \partial f|_P, \Delta P > + o(\Delta P)$$

where $\dfrac{o(\Delta P)}{\| \Delta P \|} \to 0$ as $\Delta P \to 0$. Symmetric $n \times n$ matrix has totally $r = \dfrac{n(n+1)}{2}$ entries:

$$P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_2 & x_{n+1} & \cdots & x_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_{2n-1} & \cdots & x_r \end{pmatrix}.$$

Define r-variable scalar function g by

$$g(x_1, x_2, \dots, x_r) := f(P).$$

Proposition 1. *Assume that the functional $f(P)$ is differentiable at P. Then*

$$\partial f|_P = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x_2} & \cdots & \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x_n} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x_{2n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x_n} & \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x_{2n-1}} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_r} \end{pmatrix}.$$

This proposition can be proved by using the above definition of the derivative $\partial f|_P$.

Recall that for $Q_i \geq 0$ the unique solution of the Lyapunov equation $A_i^T P + PA_i + \varepsilon I = -Q_i$ is denoted by $P_{A_i}(Q_i) \quad (i = 1, 2)$.

Define 2×2 matrix

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \tag{7}$$

where

$$\begin{cases} l_{11} &= \lambda_{\max}(A_1^T P_{A_1}(Q_1) + P_{A_1}(Q_1)A_1) = \lambda_{\max}(-Q_1 - \varepsilon I), \\ l_{12} &= \lambda_{\max}(A_1^T P_{A_2}(Q_2) + P_{A_2}(Q_2)A_1) = F(Q_2), \\ l_{21} &= \lambda_{\max}(A_2^T P_{A_1}(Q_1) + P_{A_1}(Q_1)A_2) = G(Q_1), \\ l_{22} &= \lambda_{\max}(A_2^T P_{A_2}(Q_2) + P_{A_2}(Q_2)A_2) = \lambda_{\max}(-Q_2 - \varepsilon I). \end{cases}$$

By the above construction $l_{11} \leq -\varepsilon$, $l_{22} \leq -\varepsilon$.

We try to minimize l_{12} (or l_{21}) with respect to Q_2. If $l_{12} < 0$ ($l_{21} < 0$) then the matrix $P_{A_2}(Q_2)$ ($P_{A_1}(Q_1)$) is a common solution.

Consider the minimization of $F(Q)$. For symmetric R denote by $[R]^+$ the projection of R onto the convex cone of nonnegative definite matrices.

Algorithm 1. *Consider the following convex problem*

$$\begin{cases} F(Q) \to \min \\ Q \geq 0. \end{cases}$$

1. *Choose $Q^0 \geq 0$.*

   If $F(Q^0) < 0$ then stop. Otherwise continue.

2. *For $k = 0, 1, 2, \ldots$ define*

   $$Q^{k+1} = [Q^k - \mu_k \partial F(Q)|_{Q=Q^k}]^+$$

   where

   $$\mu_k := \frac{\alpha F(Q^k) + r \parallel \partial F(Q)|_{Q=Q^k} \parallel}{\parallel \partial F(Q)|_{Q=Q^k} \parallel^2},$$

   $0 \leq \alpha \leq 2$ *and* $r > 0$ *is defined from Condition* 1.

3. *If $F(Q^k) < 0$ for some k then stop. The corresponding $P_{A_2}(Q^k)$ is a common solution.*

Theorem 6. *If Condition 1 is satisfied then there exists k such that $F(Q^k) < 0$ where Q^k is defined by the above algorithm.*

Proof. Using the convexity and the scheme from [4] the following estimation can be obtained

$$\parallel Q^{k+1} - Q^* \parallel^2 \;\leq\; \parallel Q^k - Q^* \parallel^2 - r^2 \tag{8}$$

where Q^* is as in Condition 1. (8) shows that $\{Q^k\}$ converges to the set $\{Q \geq 0 \colon F(Q) < 0\}$. $\square$

Example 3. Consider the switched system

$$\dot{x} \in \{A_1, A_2\}x$$

where

$$A_1 = \begin{pmatrix} -7 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -6 & -7 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

are Hurwitz stable matrices. Let $Q^0 = I$ and $\varepsilon = 0.01$. We get

$$P_{A_2}(Q^0) = \begin{pmatrix} 0.2392 & 0.0786 & 0.2062 \\ 0.0786 & 0.1283 & 0.2033 \\ 0.2062 & 0.2033 & 0.9671 \end{pmatrix}$$

and $F(Q^0) = 1.0355 > 0$. By Proposition 1

$$\partial F(Q)|_{Q=Q^0} = \begin{pmatrix} -0.0484 & -0.5009 & -0.7029 \\ -0.5009 & -0.0293 & -0.3997 \\ -0.7029 & -0.3997 & -0.9474 \end{pmatrix}.$$

We calculate $Q^1 = [Q^0 - \mu_0 \partial F(Q)|_{Q=Q^0}]^+$, where $\alpha = 2$, $r = 1$, $\|\partial F(Q)|_{Q=Q^0}\| = 1.6464$, $\mu_0 = 1.3787$ as

$$Q^1 = \begin{pmatrix} 1.2089 & -0.4841 & -0.5213 \\ -0.4841 & 1.1142 & -0.2158 \\ -0.5213 & -0.2158 & 0.4207 \end{pmatrix}.$$

Algorithm 1 after 15 steps give

$$Q^{15} = \begin{pmatrix} 3.2057 & 0.0756 & -1.38002 \\ 0.0756 & 0.8877 & -0.4371 \\ -1.38002 & -0.4371 & 0.7787 \end{pmatrix}, \quad F(Q^{15}) = -0.0009 < 0$$

and

$$P_{A_2}(Q^{15}) = \begin{pmatrix} 0.5206 & 0.2012 & 0.1201 \\ 0.2012 & 0.2078 & 0.1783 \\ 0.1201 & 0.1783 & 0.7632 \end{pmatrix}$$

is a common solution.

The same example has been evaluated by Liberzon-Tempo's algorithm from [4] which gives common solution only after 1663 iterations.

Remark. *Alternatively, instead of the minimization* $F(Q) \to \min$ *we may consider the minimization problem* $G(Q) \to \min$ *which is convergent and will give common solution as well.*

4. Conclusions

In this paper we consider the existence of a common quadratic Lyapunov function problem for switched systems. The paper consists of two parts. First part is devoted to weighted quadratic functions which are based on the convexity property of the maximum eigenvalue function of symmetric matrices. In the second part we present a fast algorithm for systems consisting of two subsystems. In the computational algorithm, differently from known algorithms, the variable of optimization is chosen the right hand side of the Lyapunov equation.

REFERENCES

1. **Barmish B.R.** New tools for robustness of linear systems. New York: Macmillan, 1994.
2. **Liberzon D.** Switching in systems and control. Boston: Birkhäuser, 2003. 233 p.
3. **Bhattacharyya S.P., Chapellat H. and Keel L.H.** Robust control: The parametric approach. N.J.: Prentice-Hall, 1995. 672 c.
4. **Liberzon D. and Tempo R.** Common Lyapunov functions and gradient algorithms // IEEE Trans. Automat. Control. 2004. Vol. 49, no. 6. P. 990–994.
5. **Shorten R.N. and Narendra K.S.** Necessary and sufficient conditions for the existence of a common quadratic Lyapunov function for a finite number of stable second order linear time-invariant systems // Int. J. Adapt. Control Signal Process. 2002. Vol. 16, no. 10. P. 709–728.
6. **Narendra K.S. and Balakrishnan J.A.** A common Lyapunov function for stable lti systems with commuting A-matrices // IEEE Trans. Automat. Control. 1994. Vol. 39, no. 12. P. 2469–2471.
7. **Shorten R., Narendra K. and Mason O.** A result on common quadratic Lyapunov functions // IEEE Trans. Automat. Control. 2003. Vol. 48, no. 1. P. 110–113.
8. **Büyükköroğlu T., Esen Ö. and Dzhafarov V.** Common Lyapunov functions for some special classes of stable systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2011. Vol. 56, no. 8. P. 1963–1967.
9. **Lin H. and Antsaklis P.J.** Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results // IEEE Trans. Automat. Control. 2009. Vol. 54, no. 2. P. 308–322.
10. **Horn R.A. and Johnson C.R.** Matrix analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. 561 p.
11. **Dantzig G.B. and Thapa M.N.** Linear programming: Theory and extensions. New York: Springer, 2003. 448 p.
12. **Athans M.** The matrix minimum principle. Information and control. 1967. Vol. 11. P. 592–606.

Received February, 9, 2015

Vakif Dzhafarov
Professor Doctor
Department of Mathematics, Faculty of Science,
Anadolu University, 26470 Eskisehir, Turkey
e-mail: vcaferov@anadolu.edu.tr

Taner Büyükköroğlu
Associate Professor Doctor
Department of Mathematics, Faculty of Science,
Anadolu University, 26470 Eskisehir, Turkey
e-mail: tbuyukkoroglu@anadolu.edu.tr

Şerife Yılmaz
Assistant Professor Doctor
The Department of Elementary Education, Faculty of Education,
Mehmet Akif Ersoy University, Istiklal Campus 15030 / Burdur, Turkey
e-mail: serifeyilmaz@mehmetakif.edu.tr

СОДЕРЖАНИЕ

ПРАВИЛА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ

В журнале “Труды Института математики и механики УрО РАН” публикуются *оригинальные работы* теоретического характера по современным разделам математики и механики.

“Труды Института математики и механики УрО РАН” являются изданием широкого профиля, поэтому редколлегия рекомендует авторам в начале статьи изложить постановку задачи и дать определения основных понятий, используемых в работе. Новые результаты должны быть ясно сформулированы, математические утверждения должны быть обоснованы. В доказательствах нельзя использовать результаты из неопубликованных или принятых в печать статей. В “Труды Института математики и механики” не принимаются методические статьи. По заказу редакции могут публиковаться статьи обзорного характера. Объем статьи, как правило, не должен превышать 16 страниц (в формате стилевого файла “Трудов Института математики и механики”).

Для решения вопроса о целесообразности публикации в “Трудах Института математики и механики” редакционная коллегия организует рецензирование представленных статей. В настоящее время существует также дорецензионная проверка статей, во время которой статьи проверяются на оригинальность и просматривается структура статей на соответствие правилам журнала.

По решению редколлегии статья может быть включена в переводной номер “Трудов Института математики и механики”, который выходит на английском языке в издательстве Pleiades Publishing, Ltd; МАИК “НАУКА/INTERPERIODICA” под названием “Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics (Trudy Instituta Matematiki I Mekhaniki)” как приложение к “Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. Supplement.”

Автор представляет в редакцию (на адрес trudy@imm.uran.ru) электронный вариант статьи (формат ps или pdf).

К статье должны быть приложены:

• Сопроводительное письмо от имени организации следующего содержания: Организация не возражает против опубликования статьи в открытой печати автора (ФИО, должность, звание). На письме должна стоять печать организации.

• Лист с индексами статьи по Универсальной десятичной классификации (УДК), английское название статьи, аннотация и ключевые слова на русском и английском языках.

• Лист со сведениями об авторе (на русском и английском языке) — ФИО, место работы, почтовый адрес, а также e-mail и телефон.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Авторы заключают с Учреждением Российской академии наук Институтом математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН авторский договор, текст которого размещен на сайте ИММ УрО РАН.

Присланные в журнал рукописи статей не возвращаются.

Правила оформления рукописей:

• Текст статьи должен быть набран в LATEX2e в соответствии со стилевым файлом и рекомендациями журнала, размещенными на веб-сайте ИММ УрО РАН.

• Представляемая в “Труды Института математики и механики УРО РАН” статья должна начинаться с индекса УДК, названия работы, фамилий и инициалов авторов, аннотации на русском языке, ключевых слов на русском и английском языках. Аннотация должна быть содержательной, не менее 300 знаков, лучше 500–600 знаков. В аннотации не допускаются ссылки на список цитированной литературы и нумерация формул.

• Список цитированной литературы оформляется по ГОСТу 7.05-2008, очередность названий — по алфавиту либо в соответствии с порядком ссылок в тексте работы.

• Статьи, содержащие рисунки, принимаются к публикации только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

Учредитель
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134–4889

Редактор Н. М. Юркова
TEX-редакторы Г. Ф. Корнилова, Н. Н. Моргунова

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 25.05.15. Формат $60 \times 84^1/_8$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 38, 6. Уч.-изд. л. 32,8 Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru
http://journal.imm.uran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 17, офис 226