

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

**ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

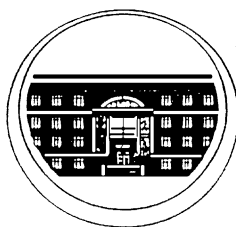
ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

Том 20

№ 3

2014



ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 20, № 3. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2014. 336 с.

ISSN 0134-4889

Главный редактор акад. РАН В. И. Бердышев

Зам. гл. редактора д-р физ.-мат. наук В. В. Кабанов

Научные редакторы д-р физ.-мат. наук А. Л. Агеев,
д-р физ.-мат. наук А. Р. Данилин

Редакционная коллегия

д-р физ.-мат. наук А. Г. Бабенко, д-р физ.-мат. наук Вэньбинь Го (Китай),
М. И. Гомоюнов, д-р физ.-мат. наук М. И. Гусев,
д-р физ.-мат. наук А. Ф. Клейменов, д-р физ.-мат. наук А. С. Кондратьев,
д-р физ.-мат. наук А. И. Короткий, канд. физ.-мат. наук П. Д. Лебедев,
д-р физ.-мат. наук Н. Ю. Лукоянов, д-р физ.-мат. наук В. И. Максимов,
канд. физ.-мат. наук Н. В. Маслова (*отв. секретарь*),
д-р физ.-мат. наук В. С. Монахов (Беларусь), д-р физ.-мат. наук М. Ю. Хачай

Редакционный совет

чл.-корр. РАН С. М. Асеев, чл.-корр. РАН В. В. Васин,
акад. РАН А. В. Кряжковский, акад. РАН А. Б. Куржанский,
чл.-корр. РАН С. В. Матвеев, чл.-корр. РАН А. А. Махнев,
акад. РАН Ю. С. Осипов, чл.-корр. РАН Н. Н. Субботина,
чл.-корр. РАН Ю. Н. Субботин, чл.-корр. РАН В. Н. Ушаков,
чл.-корр. РАН А. Г. Ченцов, чл.-корр. НАН Украины А. А. Чикрий (Украина)

Отв. редакторы выпуска

д-р физ.-мат. наук Н. Ю. Лукоянов, чл.-корр. РАН В. Н. Ушаков,
чл.-корр. РАН А. Г. Ченцов

© Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской
академии наук, 2014

СОДЕРЖАНИЕ

НИКОЛАЙ НИКОЛАЕВИЧ КРАСОВСКИЙ (<i>К девяностолетию со дня рождения</i>) ..	5
Ю. В. Авербух. Универсальные равновесия по Нэшу в дифференциальных играх многих лиц.....	26
S. M. Aseev and V. M. Veliov. Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems under weak regularity assumptions	41
М. И. Гомоюнов, Д. В. Корнев, Н. Ю. Лукоянов. О численном решении задачи управления на минимакс позиционного функционала.....	58
А. Р. Данилин. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления на отрезке с интегральным ограничением.....	76
Ю. Ф. Долгий. Линейно-квадратичная задача управления для систем дифференциальных уравнений с последействием	86
А. И. Короткий, Ю. В. Стародубцева. Прямые и обратные граничные задачи для моделей стационарной реакции-конвекции-диффузии.....	98
Н. А. Красовский, А. В. Кряжимский, А. М. Тарасьев. Уравнения Гамильтона — Якоби в эволюционных играх.....	114
А. В. Кряжимский, Н. В. Стрелковский. Программный критерий разрешимости задачи позиционного наведения с неполной информацией. Линейные управляемые системы	132
С. С. Кумков, С. Ле Менек, В. С. Пацко. Множества разрешимости в задаче преследования с двумя догоняющими и одним убегающим.....	148
А. Б. Куржанский. О задаче группового управления в условиях препятствий	166
В. И. Максимов. Об одном алгоритме реконструкции входного воздействия в линейной системе с последействием.....	180
Л. А. Петросян, Е. В. Громова. Двухуровневая кооперация в коалиционных дифференциальных играх	193
Д. А. Серков. О неулучшаемости стратегий с полной памятью в задачах оптимизации гарантированного результата	204
Н. Н. Субботина, Т. Б. Токманцев. Исследование устойчивости решения обратных задач динамики управляемых систем по отношению к возмущениям входных данных	218
П. Г. Сурков. Регуляризация некорректной задачи Коши для автономной системы с запаздыванием при использовании одного класса стабилизаторов	234

(Продолжение)

А. А. Толстоногов. Дифференциальные включения с неограниченной правой частью: теоремы существования и релаксации	246
Е. Л. Тонков. Теорема об асимптотической устойчивости Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского распространяется на управляемые системы на гладких многообразиях ..	263
А. А. Успенский. Формулы исчисления негладких особенностей функции оптимального результата в задаче быстрого действия	276
В. Н. Ушаков, А. С. Лахтин, П. Д. Лебедев. Оптимизация хаусдорфова расстояния между множествами в евклидовом пространстве	291
А. Г. Ченцов, А. П. Бакланов. К вопросу о построении множества достижимости при ограничениях асимптотического характера	309
А. А. Чикрий, Г. Ц. Чикрий. Матричные разрешающие функции в игровых задачах динамики	324



НИКОЛАЙ НИКОЛАЕВИЧ КРАСОВСКИЙ*(К девяностолетию со дня рождения)*

В сентябре 2014 г. исполняется 90 лет со дня рождения Николая Николаевича Красовского, выдающегося русского ученого, обогатившего науку фундаментальными достижениями в математике и механике.

Н. Н. Красовский родился 7 сентября 1924 г. в Екатеринбурге. Его отец Николай Арсеньевич, выпускник Казанского университета, был известным в Екатеринбурге врачом. В начале 1920-х гг. он заведовал клиникой внутренних болезней и исполнял обязанности профессора на медицинском факультете Уральского государственного университета. Затем медицинский факультет перевели в Пермь, а Николай Арсеньевич остался в Екатеринбурге. Мать Мария Федоровна, учившаяся в свое время на Бестужевских курсах, преподавала русский язык.

С 1932 по 1941 г. Н. Н. Красовский учился в школе №1 г. Свердловска. С 1941 по 1943 г. работал электромонтером на заводе имени С. Орджоникидзе. Поступив в 1943 г. в Уральский политехнический институт (УПИ) им. С. М. Кирова, он окончил его в январе 1949 г. со званием инженера по пластической и термической обработке металлов. На втором курсе института начал заниматься научной работой под руководством профессора-алгебраиста С. Н. Черникова, заведовавшего кафедрой высшей математики. Н. Н. Красовский принимал также участие в исследованиях по научной тематике кафедры обработки металлов давлением и обратил внимание на целесообразность подхода к решению задач деформации металлов, основанного на вариационных принципах.

После окончания УПИ Николай Николаевич в течение десяти лет работал на кафедре высшей математики в должностях ассистента, доцента, профессора, заведующего кафедрой. В 1959–1970 гг. работал в Уральском государственном университете (УрГУ) им. А. М. Горького, заведывая сначала кафедрой теоретической механики, а затем организованными по его инициативе кафедрой вычислительной математики и кафедрой прикладной математики. В 1970–1977 гг. Н. Н. Красовский возглавлял Институт математики и механики (ИММ) АН СССР, организованный на базе Свердловского отделения Математического института им. В. А. Стеклова по инициативе академиков И. М. Виноградова и М. В. Келдыша. Позднее Институт вошел в состав Уральского научного центра (затем — Уральского отделения РАН). С тех пор и вплоть до самой кончины в апреле 2012 г. жизнь и научная деятельность Николая Николаевича были неразрывно связаны с Институтом.

Приоритеты научных интересов Н. Н. Красовского находились в области качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости движения, математической теории управления, в том числе теории дифференциальных игр. Он проявлял устойчивый интерес и к другим направлениям математики и механики, к новейшим достижениям в этих направлениях, поддерживал их развитие в Уральском регионе.

В статьях, посвященных 80-летию и 85-летию Н. Н. Красовского (см.: Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2004, т. 10, № 2; 2009, т. 15, № 3), публиковались краткие описания его научной биографии. В настоящей статье приводится ее более развернутое изложение.

Широта научных интересов Н. Н. Красовского проявилась еще в молодые годы под влиянием его учителей — Е. А. Барбашина, Н. П. Еругина, И. Г. Малкина, Н. Г. Четаева. Он бережно сохранил сложившиеся к тому времени научные традиции и успешно продолжил исследования в области качественной теории дифференциальных уравнений и теории устойчивости, восходящие к А. М. Ляпунову.

Уже первые работы Николая Николаевича по теории устойчивости движения сделали его известным в среде специалистов и доставили признание в научном мире. В этих работах исследовалась и была решена представлявшая существенный интерес для инженеров задача об устойчивости траекторий нелинейных систем при обобщенных условиях Рауса — Гурвица в случае, когда область начальных возмущений нельзя считать малой. Были получены критерии устойчивости в целом для ряда нелинейных систем. Н. Н. Красовским совместно с Е. А. Барбашиным была доказана теорема об асимптотической устойчивости в целом, когда функция Ляпунова неограниченно возрастает в бесконечности, а ее производная в силу уравнений возмущенного движения может быть равна нулю на некотором множестве, не содержащем целых траекторий. Эти результаты сыграли существенную роль при исследовании задач динамики систем и широко используются при решении различных теоретических и прикладных задач. Вопросам теории устойчивости посвящена кандидатская диссертация Н. Н. Красовского “Об устойчивости движения при любых начальных возмущениях”, защищенная в 1953 г.

Одной из центральных в теории устойчивости движения была проблематика, связанная с задачами обращения теорем Ляпунова. Здесь Н. Н. Красовский получил фундаментальные результаты, имевшие значительный резонанс в научной среде. В продолжение исследований Е. А. Барбашина, И. Г. Малкина, Х. Л. Массеры, К. П. Персидского, Н. Г. Четаева им было доказано существование функций Ляпунова, удовлетворяющих теоремам Ляпунова об асимптотической устойчивости и неустойчивости. В основе доказательства лежал следующий установленный им фундаментальный факт: для того чтобы в некоторой области фазового пространства, содержащей начало координат, существовала гладкая функция со знакопеременной производной, необходимо и достаточно, чтобы любая подобласть не содержала целых траекторий системы. Примечательно, что результаты, полученные Н. Н. Красовским по проблематике обращения теорем Ляпунова, имели заверченный характер и по сути исчерпали упомянутую проблематику.

В 1957 г. защитой докторской диссертации “Некоторые вопросы теории устойчивости нелинейных систем” закончился плодотворный период пребывания Н. Н. Красовского в докторантуре у Н. Г. Четаева (1955–1957). В этот период он имел возможность принимать участие в работе научного семинара по проблемам теории управления, проходившего в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР под руководством Л. С. Понтрягина.

Во второй половине 1950-х гг. важным направлением научной деятельности Н. Н. Красовского стали исследования систем с последействием. Им был предложен оригинальный подход к теории устойчивости движения для систем с последействием. Было показано, что движение таких систем естественно рассматривать как эволюцию историй движения в подходящем функциональном пространстве. Эта эволюция обладает полугрупповыми свойствами, и соответствующий бесконечно малый производящий оператор играет роль обыкновенного дифференциального уравнения в этом функциональном пространстве. В линейном случае такая интерпретация открыла возможность для исследования систем с последействием на базе общей теории полугрупп линейных преобразований и указала путь к развитию теории критических случаев устойчивости по Ляпунову, а также стабилизации, в том числе оптимальной, движений таких систем.

Применив указанный подход, Н. Н. Красовский распространил второй метод Ляпунова на системы с последействием. При этом оказалось естественным использование в роли функций Ляпунова функционалов от истории движения, именуемых в настоящее время функционалами Ляпунова — Красовского. Николай Николаевич доказал теорему об асимптотической устой-

чивости, допускающую обращение, что свидетельствует об универсальности предложенного подхода. Смыкая исследования на базе функционалов Ляпунова с исследованиями на базе функций Ляпунова, он сформулировал и доказал теорему об асимптотической устойчивости и на базе функций Ляпунова.

Результаты Н. Н. Красовского, полученные в этот период и определившие новый этап в развитии модернизированной теории устойчивости, опубликованы в монографии “Некоторые задачи теории устойчивости”, вышедшей в 1959 г. Монография была переведена в США и вышла в издательстве Стэнфордского университета в 1963 г. Многие известные американские математики рассказывали, что они изучали теорию устойчивости по книге Н. Н. Красовского на своих научных семинарах.

1950-е гг. ознаменовались становлением современной математической теории оптимального управления. Значительный вклад в эту теорию сделан Н. Н. Красовским. Впервые с задачами оптимального управления он познакомился на научном семинаре Л. С. Понтрягина во время пребывания в докторантуре. В эти годы формируются основы теории, в частности, создаются принцип максимума Л. С. Понтрягина и метод динамического программирования Р. Беллмана. У Н. Н. Красовского сложилось свое ясное понимание ряда ключевых задач оптимального управления: задач программного управления, управления по принципу обратной связи, стохастических задач управления и задач управления наследственными динамическими системами.

В 1957 г. Н. Н. Красовский предложил оригинальный подход к решению задач оптимального программного управления, основанный на идеях и методах функционального анализа. Линейные задачи с функционалами, имеющими смысл нормы в подходящих функциональных пространствах, были сведены им к проблеме моментов, решение которой связано с одной из важнейших теорем функционального анализа — теоремой Хана — Банаха о распространении линейного функционала. Такой подход позволил получить основные соотношения, характеризующие решение подобных задач оптимального управления, и дополнительно получить недостающую информацию о краевых условиях для сопряженной системы принципа максимума Л. С. Понтрягина — ключевом элементе решения. В рамках данной теории было получено эффективное описание условия существования решений, выведены удобные необходимые и достаточные условия оптимальности, приведены условия корректности для типичных задач этого круга.

В начале 1960-х гг. Н. Н. Красовским был предложен подход к построению теории устойчивости по Ляпунову для стохастических систем. Были введены основные определения устойчивости по вероятности и в средне-квадратичном, которые стали общепринятыми. Было определено понятие стохастических функций Ляпунова. На базе этих функций получены условия устойчивости, асимптотической устойчивости и вероятностной стабилизации.

Н. Н. Красовский также получил основополагающие результаты на первом этапе разработки теории управления стохастическими системами, построенной на базе естественной связи метода динамического программирования, теории инфинитезимальных операторов марковских полугрупп преобразований и развитой им теории стохастической устойчивости движения.

В это же время Н. Н. Красовским был разработан минимаксный подход к задачам наблюдения в условиях неопределенных помех. В развитие работ Р. Калмана он сформулировал и обосновал правило дуальности, связывающее оптимальные оценки качества в решении сопряженных задач управления и наблюдения. Предложенный им подход к задачам управления и наблюдения стал одним из основных путей выхода теории оптимального управления к методам математического программирования и выпуклого анализа.

Считаем уместным привести здесь интересный факт, дающий представление о том, как оценивалась научная деятельность Николая Николаевича специалистами. В 1960 г., возвратившись с только что закончившегося в Москве I конгресса Международной федерации по автоматическому управлению (ИФАК), профессор Е. А. Барбашин, зачитывавший там в отсутствие автора доклад Н. Н. Красовского, рассказывал, что иностранные участники расспра-

шивали его, правда ли, что под псевдонимом “Н. Н. Красовский” в СССР работает целая группа молодых талантливых исследователей. Этот факт отражает то уважение, с которым зарубежные специалисты относились к результатам научных исследований Н. Н. Красовского, столь значимым по глубине и разнообразным по проблематике.

Еще одним важным направлением научных исследований Николая Николаевича в 1960-е гг. стала теория стабилизации движения, находившаяся в то время в стадии становления. Им была предложена общая концепция стабилизации управляемых систем, впитавшая в себя как идеи классической теории устойчивости Ляпунова, так и новые идеи теории управления. На этом пути им была создана единообразная теория стабилизации движений управляемых систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, дифференциальными уравнениями с последействием, дифференциальными уравнениями, содержащими случайные параметры. Были даны строгие математические постановки основных задач, указаны критерии их разрешимости и способы построения искомых законов стабилизации, конкретизированные в эффективной форме для линейных и квазилинейных объектов. Построенная им спектральная теория имеет основой взаимосвязь свойств собственных векторов системы первого приближения и направлений стабилизирующих сил. В рамках этой теории Н. Н. Красовским была исследована проблема стабилизации механических систем силами той или иной природы. В частности, изучено свойство стабилизируемости, которое приобретает не вполне управляемая консервативная механическая система при наложении дополнительных гироскопических сил. Такая гироскопическая стабилизируемость имеет общие черты с известными свойствами гироскопической устойчивости, исследованной Н. Г. Четаевым.

Н. Н. Красовский распространил теорию оптимальной стабилизации на системы с последействием. Для линейных задач стабилизации с квадратичным показателем качества им впервые указан явный вид оптимального значения показателя качества в форме квадратичного функционала от исходной истории процесса и притом получен явный вид оптимального управления в форме линейного функционала от текущей истории.

Результаты исследований конца 1950-х — середины 1960-х гг. составили монографию “Теория управления движением” (1968), важная роль которой в становлении теории управления и подготовке специалистов общепризнана.

В 1960-е гг. развитие новой техники обусловило возникновение новых важных прикладных задач. Значительную их часть составляли задачи управления объектами в условиях динамических и информационных помех. Особенность исследуемых задач заключается в том, что управление требуется формировать в зависимости от поступающей информации, которая не всегда оказывается полной вследствие воздействия неизвестных помех и информационных ошибок наблюдения текущего состояния объекта. В этих условиях требуется гарантировать возможно более высокое качество процесса управления. Задачи такого сорта — задачи гарантирующего управления — формализуются в рамках теории дифференциальных игр, фундаментальный вклад в создание и развитие которой был сделан Николаем Николаевичем.

В отличие от работ Л. С. Понтрягина, посвященных дифференциальным играм, в работах Н. Н. Красовского с самого начала разрешающие управления формировались в классе управлений с обратной связью — позиционных стратегий, что соответствовало сути прикладных задач.

Первые работы Н. Н. Красовского, относящиеся к теории дифференциальных игр, были выполнены в середине 1960-х гг. В них для регулярного случая, охватывающего однотипные управляемые объекты, предложен метод экстремального прицеливания на границу множеств достижимости. Согласно этому методу построение разрешающих позиционных стратегий сводится к решению вспомогательных задач программного управления. Метод экстремального прицеливания подробно изложен в монографии “Игровые задачи о встрече движений” (1970).

Этот метод был распространен Н. Н. Красовским и его сотрудниками на различные классы линейных и нелинейных задач. Движения в рассматриваемых здесь программных конструк-

циях можно трактовать как обобщенные характеристики для соответствующего уравнения в частных производных из динамического программирования. При этом возможности метода позволяют охватить более широкий круг задач, чем те, для которых существует гладкий потенциал, рассматриваемый в динамическом программировании.

В конце 1960-х — начале 1970-х гг. Н. Н. Красовским была предложена формализация позиционных дифференциальных игр. Центральным моментом теории стала следующая альтернатива для основополагающей задачи сближения с целевым множеством — уклонения от него внутри заданного множества в пространстве позиций. Указаны классы стратегий и движений таких, что в названной задаче для всякой исходной позиции верно одно и только одно: либо существует стратегия, которая гарантирует встречу всех движений с целевым множеством внутри заданного множества, либо существует стратегия, которая гарантирует уклонение от некоторой окрестности целевого множества внутри некоторой окрестности заданного множества. На основе этой альтернативы было установлено существование цены и седловой точки для типичных дифференциальных игр. Основу формализации составила принципиально новая концепция экстремального сдвига на стабильные множества (мосты). В работах Н. Н. Красовского и его сотрудников показано, что оптимальные в предложенной формализации решения в принципе неулучшаемы. При этом данная формализация является не только полной, но и содержательной, поскольку используемые в ней формальные конструкции аппроксимируются практически реализуемыми процедурами.

Известно, что оптимальные решения в задачах гарантирующего управления, вообще говоря, неустойчивы по отношению к малым возмущениям и информационным ошибкам. Учитывая значимость этого вопроса в разрабатываемой теории, Н. Н. Красовский для регуляризации этих решений предложил и развил вместе со своими сотрудниками идеологию процедур управления, в которых наряду с реальным объектом рассматривается подобная ему эталонная система — поводырь. Движение поводыря, мыслимое или моделируемое на ЭВМ, играет роль идеального невозмущенного процесса. По сути дела здесь возникает и решается задача стабилизации в новом игровом качестве.

Итоги исследований конца 1960-х — начала 1970-х гг. были подведены в совместной с А. И. Субботиным монографии “Позиционные дифференциальные игры” (1974).

В конце 1970-х гг. концепция управления дифференциальными и эволюционными системами, основанная на совместном рассмотрении реального управляемого объекта и вспомогательной модельной системы — поводыря получила дальнейшее развитие. Удобным инструментом для этого стала предложенная Н. Н. Красовским унифицированная форма описания динамики модельной системы. Была решена задача унификации позиционных дифференциальных игр, были определены и построены универсальные оптимальные стратегии, устойчивые к возмущениям. Изучены новые типы задач, например, задача гарантирующего управления в условиях неполной информации о состоянии управляемого объекта, задача управления диффузионными системами. В 1980-е гг. идея унификации была распространена А. И. Субботиным и на теорию минимаксных решений уравнений в частных производных первого порядка. Унификация стимулировала развитие численных методов и алгоритмов приближенного нахождения решений дифференциальных игр. Унификация явилась принципиальным моментом, смыкающим формализацию позиционных дифференциальных игр с гамильтоновым формализмом, и в том числе с понятием обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби.

Таким образом, построенная к началу 1980-х гг. теория позиционных дифференциальных игр стала основой для разработки осуществимых на деле эффективных процедур управления в условиях помех и неопределенности. Однако развитие к этому времени методы в основном опирались на программные конструкции, в которых возможные помехи подменялись детерминированными программами. Это существенно ограничивало область действенного применения этих методов. Н. Н. Красовский ввел в программные конструкции вероятностные элементы. Он установил, что для учета влияния на управляемый объект наиболее неблагоприятных пере-

гулярных воздействий достаточно рассмотреть класс стохастических неупреждающих программных помех. На этой основе Н. Н. Красовский и его сотрудники разработали новый метод синтеза оптимального гарантирующего управления, названный методом стохастического программного синтеза. Существенной особенностью метода является его ориентированность на широкий круг нерегулярных задач управления по принципу обратной связи. Он сводит исходную задачу к регулярной задаче поиска стохастического программного экстремума.

Результаты этих исследований были изложены в монографии “Управление динамической системой” (1985).

В 1990-е гг. внимание Н. Н. Красовского концентрируется на задачах конфликтного управления с оптимизацией функционалов комбинированного типа, оценивающих качество движения управляемого объекта не только в конечный, но и в предшествующие моменты времени. Эти задачи носят по существу многомерный характер даже при небольшой размерности фазового вектора управляемой системы. Для их решения Н. Н. Красовским и его сотрудниками был предложен и развит эффективный, экономный по размерности используемых переменных метод выпуклых сверху оболочек во вспомогательных программных конструкциях. Идейную основу этого метода составил стохастический программный синтез в сочетании с функциональной трактовкой процесса управления на базе своеобразного прогноза будущего. Метод предусматривает редукцию переменных на основе оригинального овыпукляющего свертывания к вспомогательным параметрам, что и позволяет существенно понизить размерность используемых конструкций.

Метод выпуклых сверху оболочек дает возможность решить важную задачу об оценке величины оптимального гарантированного результата управления и при этом построить соответствующие оптимальные законы управления по принципу обратной связи, реализуемые в форме эффективных вычислительных алгоритмов. В зависимости от структурных свойств управляемой системы и показателя качества движения закон управления может базироваться либо на чистой (детерминированной) стратегии, либо на смешанной (вероятностной) стратегии. В последнем случае используются результаты специальным образом организованных случайных испытаний, но при этом результат управления гарантируется с вероятностью, сколь угодно близкой к единице. В свою очередь стратегии управления опираются на информационный образ, достаточный для достижения неулучшаемого гарантированного результата. Разработанные методы и процедуры управления ориентированы на использование современной вычислительной техники и представляют собой мощный инструмент для исследования и решения широкого круга трудных задач.

Результаты этих исследований опубликованы в совместной с А. Н. Красовским монографии “Control under Lack of Information” (1996).

В 2000-е гг. Н. Н. Красовский и его сотрудники продолжили эти исследования, создав эффективные методы управления наследственными динамическими системами, в том числе на основе адекватного развития для таких систем конструкций динамического программирования, экстремального сдвига и соответствующей математической техники.

В последнее время, переосмысливая прожитое, анализируя полученные результаты и их современное развитие, Николай Николаевич работал над созданием единой концепции позиционных методов управления, которая бы естественным образом смыкала аппарат математической теории оптимального управления и дифференциальных игр с классическими методами уравнений математической физики, теорией обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби, конструкциями функционального и негладкого анализа и высвечивала бы естественную взаимосвязь дескриптивных теорем существования корректных решений оптимизационных задач с конструктивными методами построения этих решений на базе унификации, сглаживающих предельных переходов и процедур управления со стохастическими поводьями. В этом направлении им была предложена оригинальная интерпретация процесса оптимального управления со стохастическим поводьем как взаимодействия двух встречных

диффузионных процессов. Первый из них развивается в обратном времени и подчиняется обратному уравнению Колмогорова — Чепмэна. Он определяет плотность, которая задает потенциал (функцию Ляпунова) для второго диффузионного процесса с конфликтно управляемым сносом и малой дисперсией. Этот второй процесс моделирует оптимальное движение управляемой системы, развивается в прямом времени и подчиняется прямому уравнению Чепмэна — Колмогорова. Чтобы охватить наследственные динамические системы и более общие функционально-дифференциальные системы, Николай Николаевич рассматривал схемы управления с двумя поводьями: промежуточным моделирующим и основным стохастическим. Уравнения движения промежуточного поводья строились при помощи аппроксимации исходных функционально-дифференциальных уравнений обыкновенными дифференциальными уравнениями. Стохастический поводья строился по получаемой аппроксимирующей системе. Этот поводья в итоге и обеспечивал оптимальность движения исходной системы. При этом вся схема управления организовывалась так, чтобы исходный объект гарантированно отслеживал движение моделирующего поводья, а тот в свою очередь отслеживал движение стохастического поводья.

Результаты этих исследований составляют содержание последних работ Н. Н. Красовского.

Н. Н. Красовский — автор около 300 научных публикаций, в том числе 6 монографий. Он был продолжателем уральской научной школы по теории устойчивости движения и основателем и главой уральской научной школы по математической теории управления. Среди его учеников — инженеры и преподаватели, доктора и кандидаты наук, члены-корреспонденты и академики РАН. Научные достижения этой школы получили широкое признание.

Деятельность Н. Н. Красовского в должности директора Института математики и механики (1970–1977), его авторитет и энергия способствовали утверждению Института как ведущего научного центра в области математики и механики в Уральском регионе, обеспечили качественно новый уровень его развития. Он инициировал и поддерживал многие направления прикладных исследований по механике и новой технике. Большое значение Николай Николаевич придавал оснащению Института первоклассной вычислительной техникой, развитию вычислительного дела в Уральском регионе.

Весомый вклад внес Н. Н. Красовский в математическое образование в Уральском регионе и как крупный организатор, и как блестящий лектор. В начале своей педагогической деятельности (1949–1959) он преподавал в Уральском политехническом институте. За это время он прочитал большое число курсов. Его лекции отличались глубиной содержания, высоким научным уровнем, ясностью изложения. Хорошо известен тот факт, что для студентов “золотого выпуска” 1954 г. на физико-техническом факультете (на этом потоке были собраны самые сильные студенты со всех факультетов УПИ, как только физтех открылся) он прочитал лекции и провел практические занятия абсолютно по всем математическим дисциплинам. Заметим, что в то время программа физтеха в части математических дисциплин была идентична университетской программе матмеха.

В Уральском госуниверситете, где Николай Николаевич работал с 1959 г., им разработано и прочитано большое число спецкурсов, оригинальных по содержанию и включавших новейшие научные достижения, в том числе полученные им самим. Многие выпускники матмеха УрГУ гордятся тем, что они учились у Н. Н. Красовского. В УрГУ он создал под новые специальности и специализации две новые кафедры: вычислительной математики и прикладной математики.

Много времени и сил Николай Николаевич отдавал пропаганде достижений фундаментальной науки среди ученых-прикладников, инженеров, медиков. Для них он разработал и прочитал ряд курсов, опубликовал пособия и брошюры, излагающие в доступной форме идеи и новейшие методы в математике, механике и информатике. Символично, что американский Институт инженеров электротехники и электроники (IEEE), присуждая ему премию 2003 г., отметил его “новаторские идеи, которые были восприняты как теоретиками, так и инженерами-практиками” (цитата из официального письма IEEE).

В Институте математики и механики Н. Н. Красовский организовал Общественный университет математики и вычислительной техники с факультетами: методы прикладной математики, программирование и алгоритмические языки, методы оптимизации в экономике, математические методы в медицине и биологии, основы информатики. По его инициативе при ИММ был организован семинар по вычислительной математике и вычислительной технике для ведущих специалистов вычислительных центров города и области.

В 1970–1980-е гг. на возглавляемой Николаем Николаевичем секции математики и механики Межведомственного совета по координации при Президиуме УНЦ АН СССР регулярно ставились вопросы о состоянии дел с преподаванием математики в вузах Уральского региона, об имевшихся проблемах и мерах по их разрешению. Обсуждалась работа математических кафедр многих вузов Свердловска, Перми, Челябинска, Ижевска, принимались рекомендации по кадровому обеспечению кафедр, по открытию новых специальностей и кафедр в вузах, по установлению новых контактов. Большое значение придавалось обмену опытом работы.

Особенно остро Н. Н. Красовский воспринимал проблемы школьного математического образования в стране и в Уральском регионе. Сам он был тесно связан со школой с начала своей творческой деятельности и до последних дней. Из года в год он встречался с учениками и учителями, выступал перед ними с лекциями, проводил занятия, участвовал в работе школьных олимпиад. Н. Н. Красовский неоднократно посещал уроки математики в общеобразовательных школах. В 1980-е гг. он входил в состав Комиссии по школьному образованию при Отделении математики АН СССР, проводил большую работу по оценке общеобразовательных школьных программ и учебников по математике. Он организовал и курировал Очно–заочную математическую школу для школьников Свердловской области при ИММ УрО РАН.

Николай Николаевич считал, что массовое школьное образование — это основное звено, определяющее уровень науки в стране и очень важно поддерживать в обществе атмосферу уважения к знаниям, уважения к труду и миссии учителя. Занятия математикой способствуют развитию таких ценных для любого вида деятельности способностей, как память, сосредоточенность, прилежание, дисциплина мысли. Учеба понимается как труд, достаточно тяжелый, но неизбежный и благодетельный. По мнению Николая Николаевича, в будущем математика сохранит свое значение как одна из важнейших наук в жизни человека. Появятся новые ветви, усовершенствуются разделы математики, которые будут работать на биологию, медицину и другие науки.

Большую тревогу у Н. Н. Красовского вызывали проводившиеся в последние десятилетия реформы школьного образования, в частности математического. Он считал, что большинство аргументов, выдвигаемых в пользу этих реформ, далеко не бесспорны, а действия реформаторов могут иметь самые негативные последствия для российского школьного образования. Обнадеживало его только то, что не перевелись еще учителя по призванию, осознавшие свою высокую миссию, глубокие знатоки своего предмета и блестящие популяризаторы.

Остановимся подробнее на роли Николая Николаевича в постановке преподавания информатики в школах Свердловской области. В марте 1985 г. постановлением ЦК КПСС и Совета Министров СССР с 1985/86 учебного года в средних учебных заведениях страны (школах, ПТУ, техникумах) был введен новый предмет “Основы информатики и вычислительной техники”. При этом полагалось, что из-за отсутствия в школах достаточного числа комплектов вычислительных машин обучение следует начинать в безмашинном варианте. Решением Свердловского облисполкома был образован областной Научно-методический совет по школьной компьютеризации под руководством Н. Н. Красовского, в который вошли представители народного образования, вузов, научных учреждений, промышленных предприятий, учителя школ и учебно-производственных комбинатов. Первоочередной задачей совета стало техническое оснащение школ области, чтобы каждый свердловский школьник имел хотя бы минимальный доступ к компьютеру, а также экстренная подготовка учителей информатики.

Используя свой авторитет и добрые отношения, Николай Николаевич обращался к дирек-

торам промышленных предприятий с просьбой выделить средства для закупки необходимой вычислительной техники. Так были приобретены 8 классов “Роботронов” из ГДР. Благодаря помощи директивных органов удалось приобрести также компьютеры отечественного производства. Часть техники была предоставлена вузами и научными учреждениями — всего 20 кустовых ВЦ для школ. В какой-то мере задача оснащения техникой на тот момент была решена.

Была разработана 72-часовая программа подготовки преподавателей информатики. По этой программе совместно с Облоно и Институтом усовершенствования учителей было подготовлено к новому учебному году около 1100 учителей, причем каждый из них имел возможность поработать за терминалом не менее 12 часов в режиме диалога. В помощь учителю были разработаны и изданы соответствующие методические пособия. В результате в каждом среднем учебном заведении области был подготовлен, по крайней мере, один учитель, владеющий начальными навыками общения с ЭВМ. Любопытно, что для обучения школьников Свердловской области информатике в “машинном” варианте потребовалось специальное разрешение Министерства образования России, поскольку такой вариант упомянутым выше постановлением не предусматривался.

Проделанная под руководством Николая Николаевича работа дала сильный первоначальный импульс дальнейшему выходу школ Екатеринбурга и области на достойный уровень современных информационных технологий. Когда в 1989 г. решался вопрос о месте проведения первой Всесоюзной школьной олимпиады по информатике, был выбран Свердловск, поскольку здесь были обеспечены все необходимые условия.

Авторитет Н. Н. Красовского среди ученых был очень высок. В 1964 г. он был избран членом-корреспондентом АН СССР, в 1968 г. — действительным членом АН СССР. Он входил в состав Президиума РАН и бюро Отделения механики и процессов управления АН СССР, был членом Президиума Национального комитета по теоретической и прикладной механике, входил в редколлегии авторитетных научных изданий.

Научные достижения и преподавательская деятельность Н. Н. Красовского высоко оценены государством (Герой Социалистического Труда, лауреат Ленинской и Государственной премий, кавалер орденов Советского Союза и России) и научной общественностью (Большая золотая медаль Российской академии наук им. М. В. Ломоносова, Золотая медаль им. А. М. Ляпунова, Демидовская премия в области физико-математических наук, премия “Триумф”). Он был доктором *Honoris causa* Венгерской академии наук, удостоен награды Международного общества инженеров-электриков и электронщиков (IEEE), премии программы Фонда содействия отечественной науки “Выдающиеся ученые”.

Николаю Николаевичу были присущи исключительная работоспособность, волевой характер, доброжелательность в общении, высокая внутренняя культура и организованность. Он был человеком чести, настоящим гражданином, которого глубоко волновала судьба России.

Память о Николае Николаевиче Красовском жива в сердцах знавших и любивших его людей. Многие из его учеников сами стали крупными учеными. Созданная им школа по математической теории управления продолжает работать. Институт математики и механики носит теперь его имя.

СПИСОК НАУЧНЫХ ТРУДОВ Н. Н. КРАСОВСКОГО

1. Теоремы об устойчивости движений, определяемых системой двух уравнений // Прикл. математика и механика. 1952. Т. 16, вып. 5. С. 547–554.
2. Об устойчивости движения в целом // Докл. АН СССР. 1952. Т. 86, № 3. С. 453–456 (совм. с Е.А. Барбашиным).
3. Об устойчивости движения при любых начальных возмущениях: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Свердловск: Урал. гос. ун-т, 1953. 120 с.
4. Расчет оптимальной формы заготовки при штамповке деталей типа шестерен // Тр. Урал. политехн. ин-та. Свердловск: Машгиз, 1953. № 45. С. 137–151 (совм. с О.А. Ганаго, И.Я. Тарновским).
5. Об устойчивости при любых начальных возмущениях решений одной нелинейной системы трех уравнений // Прикл. математика и механика. 1953. Т. 17, вып. 3. С. 339–350.
6. Об устойчивости решений системы двух дифференциальных уравнений // Прикл. математика и механика. 1953. Т. 17, вып. 6. С. 651–672.
7. Об одной задаче устойчивости движения в целом // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88, № 3. С. 401–404.
8. Об устойчивости решений системы второго порядка в критических случаях // Докл. АН СССР. 1953. Т. 93, № 6. С. 965–967.
9. Об устойчивости движения в целом при постоянно действующих возмущениях // Прикл. математика и механика. 1954. Т. 18, вып. 1. С. 95–102.
10. О поведении в целом интегральных кривых системы двух дифференциальных уравнений // Прикл. математика и механика. 1954. Т. 18, вып. 2. С. 142–154.
11. О существовании функций Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом // Прикл. математика и механика. 1954. Т. 18, вып. 3. С. 345–350 (совм. с Е.А. Барбашиным).
12. Об обращении теорем А.М. Ляпунова и Н.Г. Четаева о неустойчивости для стационарных систем дифференциальных уравнений // Прикл. математика и механика. 1954. Т. 18, вып. 5. С. 513–532.
13. Об устойчивости в целом решения нелинейной системы дифференциальных уравнений // Прикл. математика и механика. 1954. Т. 18, вып. 6. С. 735–737.
14. Достаточные условия устойчивости решений системы нелинейных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1954. Т. 98, № 6. С. 901–904.
15. Расчет поверхностного натяжения по форме лежащей капли // Журн. физ. химии. 1954. Т. 28, вып. 9. С. 1678–1680 (совм. с О.А. Есиным, Ю.П. Никитиным, С.И. Попелем).
16. К вопросу определения усилий при обработке металлов давлением // Обработка металлов давлением. М.: Металлургиздат, 1954. Вып. 3. С. 5–22 (совм. с А.А. Поздеевым, И.Я. Тарновским).
17. Методика графического расчета поверхностного и межфазного натяжений по форме капли // Тр. Урал. политехн. ин-та. 1954. № 49. С. 76–82 (совм. с О.А. Есиным, Ю.П. Никитиным, С.И. Попелем).
18. Об обращении теоремы К.П. Персидского о равномерной устойчивости // Прикл. математика и механика. 1955. Т. 19, вып. 3. С. 273–278.
19. Об устойчивости по первому приближению // Прикл. математика и механика. 1955. Т. 19, вып. 5. С. 516–530.
20. Об условиях обращения теорем А.М. Ляпунова о неустойчивости для стационарных систем дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1955. Т. 101, № 1. С. 17–20.
21. Об устойчивости движения в критическом случае одного нулевого корня // Мат. сб. 1955. Т. 37, вып. 1. С. 83–88.
22. К вопросу об обращении теорем второго метода А.М. Ляпунова исследования устойчивости движения // Успехи мат. наук. 1956. Т. 11, № 3. С. 159–164.
23. К теории второго метода А.М. Ляпунова для исследования устойчивости // Мат. сб. 1956. Т. 40, вып. 1. С. 57–64.
24. К теории второго метода А.М. Ляпунова исследования устойчивости движения // Докл. АН СССР. 1956. Т. 109, № 3. С. 460–463.
25. Обращение теорем второго метода Ляпунова и вопросы устойчивости движения по первому приближению // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, вып. 2. С. 255–265.
26. О применении второго метода А.М. Ляпунова для уравнений с запаздываниями времени // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, вып. 3. С. 315–327.

27. Об асимптотической устойчивости систем с последействием // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, вып. 4. С. 513–518.
28. Некоторые вопросы теории устойчивости нелинейных систем: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М.: Ин-т механики АН СССР, 1957. 344 с.
29. Об устойчивости при больших начальных возмущениях // Прикл. математика и механика. 1957. Т. 21, вып. 3. С. 309–319.
30. Об одной задаче оптимального регулирования // Прикл. математика и механика. 1957. Т. 21, вып. 5. С. 670–677.
31. Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях // Прикл. математика и механика. 1957. Т. 21, вып. 6. С. 769–774 (совм. с В.Е. Гермаидзе).
32. К теории оптимального регулирования // Автоматика и телемеханика. 1957. Т. 18, № 1. С. 960–970.
33. О гладком сечении дисперсивной динамической системы // Изв. вузов. Математика. 1957. № 1. С. 167–173.
34. О периодических решениях дифференциальных уравнений с запаздыванием времени // Докл. АН СССР. 1957. Т. 114, № 2. С. 252–255.
35. Об устойчивости квазилинейных систем с последействием // Докл. АН СССР. 1958. Т. 119, № 3. С. 435–438.
36. Об одной задаче оптимального регулирования нелинейных систем // Прикл. математика и механика. 1959. Т. 23, вып. 2. С. 209–229.
37. К достаточным условиям оптимальности // Прикл. математика и механика. 1959. Т. 23, вып. 3. С. 592–594.
38. К теории оптимального регулирования // Прикл. математика и механика. 1959. Т. 23, вып. 4. С. 625–639.
39. К теории оптимального регулирования нелинейных систем второго порядка // Докл. АН СССР. 1959. Т. 126, № 2. С. 267–270.
40. Об оптимальном регулировании в нелинейных системах // Изв. вузов. Математика. 1959. № 5. С. 122–130.
41. К проблеме существования оптимальных траекторий // Изв. вузов. Математика. 1959. № 6. С. 81–87.
42. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с. — Пер. на англ.: Stability of motion. Applications of Lyapunov's second method to differential systems and equations with delay. Stanford (Calif.): Stanford Univ. Press, 1963. 188 p.
43. Об оптимальном регулировании при случайных возмущениях // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, вып. 1. С. 64–79.
44. О приближенном вычислении оптимального управления прямым методом // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, вып. 2. С. 271–276.
45. Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, вып. 5. С. 809–823 (совм. с И.Я. Кацем).
46. Аналитическое конструирование регуляторов в стохастических системах при ограничениях на скорость изменения управляющего воздействия // Прикл. математика и механика. 1961. Т. 25, вып. 3. С. 420–432 (совм. с Э.А. Лидским).
47. Равномерная асимптотическая устойчивость систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных // Прикл. математика и механика. 1961. Т. 25, вып. 4. С. 680–690 (совм. с А.И. Климусевым).
48. О среднеквадратичной оптимальной стабилизации при случайных затухающих возмущениях // Прикл. математика и механика. 1961. Т. 25, вып. 5. С. 806–817.
49. О выборе параметров оптимальных устойчивых систем // Тр. 1-го Междунар. конгр. ИФАК. Т. 2: Теория дискрет., оптимальн. и самонастраивающихся систем. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 482–489.
50. Об одном методе построения оптимальных траекторий // Мат. сб. 1961. Т. 53, вып. 2. С. 195–206.
51. Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами. I: Постановка задачи. Метод решения // Автоматика и телемеханика. 1961. Т. 22, № 9. С. 1145–1150 (совм. с Э.А. Лидским).
52. Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами. II: Уравнения для оптимального управления. Приближенный метод решения // Автоматика и телемеханика. 1961. Т. 22, № 10. С. 1273–1278 (совм. с Э.А. Лидским).

53. Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами. III: Оптимальное регулирование в линейных системах. Минимум среднеквадратичной ошибки // Автоматика и телемеханика. 1961. Т. 22, № 11. С. 1425–1431 (совм. с Э.А. Лидским).
54. Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздываниями времени // Прикл. математика и механика. 1962. Т. 26, вып. 1. С. 39–51.
55. Об одной задаче преследования // Прикл. математика и механика. 1962. Т. 26, вып. 2. С. 218–232.
56. К теории аналитического конструирования регуляторов // Автоматика и телемеханика. 1962. Т. 23, № 6. С. 713–720 (совм. с А.М. Летовым).
57. Второй метод Ляпунова в теории устойчивости движения // Тр. 1-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике (Москва, 1960): обзор. докл. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1962. С. 36–47.
58. Об одной задаче преследования // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27, вып. 2. С. 244–254.
59. О стабилизации неустойчивых движений дополнительными силами при неполной обратной связи // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27, вып. 4. С. 641–663.
60. О стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27, вып. 6. С. 988–1004 (совм. с Е.А. Гальпериным).
61. Об оптимальном регулировании в линейных системах с запаздываниями времени // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4, № 2. С. 295–302.
62. Об оптимальном регулировании со случайной нагрузкой // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4, № 3. С. 622–631.
63. Об оптимальном регулировании при запаздывании сигналов обратной связи // Автоматика и телемеханика. 1963. Т. 24, № 8. С. 1021–1036.
64. О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1963. № 6. С. 3–15 (совм. с Ю.С. Осиповым).
65. К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, вып. 1. С. 3–14.
66. Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, вып. 4. С. 716–724.
67. К задаче о стабилизации механической системы // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, вып. 5. С. 801–811 (совм. с М.С. Габриеляном).
68. О наблюдении нелинейной управляемой системы в окрестности заданного движения // Автоматика и телемеханика. 1964. Т. 25, № 7. С. 1047–1057 (совм. с Э.Г. Альбрехтом).
69. Об одном свойстве гироскопической стабилизируемости управляемой консервативной механической системы // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1964. № 5. С. 156–164.
70. Optimal processes in systems with time lag // Automat. & Remote Control Theory. London: Butterths; Munich: Oldenbourg, 1964. P. 327–332.
71. Проблема качества устойчивости процессов в системах со случайными параметрами // Тр. 4-го Всесоюз. мат. съезда (1961). Т. 2. Л.: Наука, 1964. С. 451–456.
72. Об одной задаче стабилизации // Межвуз. симпоз. по качеств. теории дифференц. уравнений и ее применениям: тез. докл. Самарканд, 1964. С. 35–36.
73. К задаче об успокоении линейной системы при минимальной интенсивности управления // Прикл. математика и механика. 1965. Т. 29, вып. 2. С. 218–225.
74. О коррекции движения системы с двумя степенями свободы при одной циклической координате // Прикл. математика и механика. 1965. Т. 29, вып. 3. С. 401–407 (совм. с Г.С. Шелементьевым).
75. К задаче об успокоении линейной системы // Прикл. математика и механика. 1965. Т. 29, вып. 5. С. 828–834 (совм. с В.И. Бондаренко, Ю.М. Филимоновым).
76. О стабилизации нестационарных систем // Прикл. математика и механика. 1965. Т. 29, вып. 6. С. 1081–1083 (совм. с Н.Г. Булгаковым).
77. О стабилизации динамических систем дополнительными силами // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 1. С. 5–16.
78. Об одном свойстве линейной устойчивой системы, вполне управляемой по случайному воздействию // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 2. С. 143–152.
79. Об оптимальном управлении при дискретных сигналах обратной связи // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 11. С. 1415–1427.
80. Задача о наблюдении линейной динамической системы и уравнения с запаздыванием аргумента // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 12. С. 1551–1556.

81. О стабилизации систем, в которых помеха зависит от величины управляющего воздействия // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1965. № 2. С. 102–109.
82. О некоторых игровых ситуациях в теории управляемых систем // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1965. № 4. С. 3–13 (совм. с Ю.М. Репиным, В.Е. Третьяковым).
83. Оптимальное управление в обыкновенных динамических системах // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20, № 3. С. 153–174.
84. Оптимальные процессы в системах с запаздыванием // Тр. 2-го Междунар. конгр. ИФАК: Оптимальные системы. Статист. методы. Т. 2. М.: Наука, 1965. С. 201–210.
85. Проблемы управляемости, наблюдаемости и стабилизируемости динамических систем // Тр. 2-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике (1964): обзор. докл. М.: Наука, 1965. Вып. 1. С. 77–93.
86. К задаче о преследовании в случае линейных однотипных объектов // Прикл. математика и механика. 1966. Т. 30, вып. 2. С. 209–225.
87. Об управлении объектом с последействием // Прикл. математика и механика. 1966. Т. 30, вып. 5. С. 938.
88. Об аппроксимации одной задачи об оптимальном управлении в системе с последействием // Докл. АН СССР. 1966. Т. 167, № 3. С. 540–542.
89. К вопросу о наблюдаемости систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 3. С. 298–308 (совм. с А.Б. Куржанским).
90. К задаче о преследовании в случае ограничений на импульсы управляющих сил // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 5. С. 587–599 (совм. с В.Е. Третьяковым).
91. Проблемы стабилизации управляемых движений // И.Г. Малкин. Теория устойчивости движения. Дополнение 4. М.: Наука, 1966. С. 475–514.
92. К задаче об успокоении линейной системы // Прикл. математика и механика. 1967. Т. 31, вып. 3. С. 460–467 (совм. с Ю.М. Репиным).
93. К задаче о встрече движений // Докл. АН СССР. 1967. Т. 173, № 2. С. 285–287 (совм. с В.Е. Третьяковым).
94. К задаче об игровой встрече движений // Докл. АН СССР. 1967. Т. 173, № 3. С. 535–537.
95. Теория оптимальных управляемых систем // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1967. № 5. С. 14–27 (совм. с Н.Н. Моисеевым).
96. Евгений Алексеевич Барбашин (к 50-летию со дня рождения) // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3, № 12. С. 2179–2180 (совм. с Н.П. Еругиным).
97. Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968. 475 с.
98. О регуляризации одной задачи об игровой встрече движений // Прикл. математика и механика. 1968. Т. 32, вып. 1. С. 3–14 (совм. с В.Е. Третьяковым).
99. Об игровой встрече движений с ограничениями на импульсы // Прикл. математика и механика. 1968. Т. 32, вып. 2. С. 177–184.
100. Задача о сближении управляемых объектов // Прикл. математика и механика. 1968. Т. 32, вып. 4. С. 575–586 (совм. с А.И. Субботиным).
101. К задаче об игровой встрече движений // Прикл. математика и механика. 1968. Т. 32, вып. 5. С. 793–803.
102. Регуляризация задачи об игровой встрече движений // Прикл. математика и механика. 1968. Т. 32, вып. 6. С. 972–976.
103. Лекции по теории управления. Вып. 1: Обыкновенное программное управление линейными системами. Свердловск: Изд-во УрГУ, 1968. 47 с.
104. Лекции по теории управления. Вып. 2: Обобщенное программное управление линейными системами. Свердловск: Изд-во УрГУ, 1968. 45 с.
105. Регуляризация задачи о встрече движений // Докл. АН СССР. 1968. Т. 179, № 2. С. 300–303.
106. Об игровой встрече движений // Докл. АН СССР. 1968. Т. 181, № 5. С. 1062–1064.
107. О дифференциальной игре на сближение // Докл. АН СССР. 1968. Т. 182, № 6. С. 1287–1289.
108. Об одной особенности игровой встречи движений // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 5. С. 767–778.
109. Оптимальное уклонение в дифференциальной игре // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 12. С. 2159–2165 (совм. с А.И. Субботиным).
110. Теория оптимальных управляемых систем // Механика в СССР за 50 лет. Т. 1: Общая и прикл. механика. М.: Наука, 1968. С. 179–244.

111. Игровые задачи о встрече движений // 3-й Всесоюз. съезд по теорет. и прикл. механике: аннот. докл. М., 1968. С. 177.
112. Игровая задача о коррекции движения // Прикл. математика и механика. 1969. Т. 33, вып. 3. С. 386–396.
113. Об оптимальных стратегиях в линейной дифференциальной игре // Прикл. математика и механика. 1969. Т. 33, вып. 4. С. 698–704 (совм. с А.И. Субботиным).
114. Смешанное управление в дифференциальной игре // Докл. АН СССР. 1969. Т. 188. № 4. С. 745–747 (совм. с А.И. Субботиным).
115. Регуляризация одной дифференциальной игры // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1969. № 1. С. 3–8.
116. Дифференциальная игра сближения. I: Грубый случай // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 3. С. 407–423.
117. Игровые задачи динамики. I // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1969. № 5. С. 3–12.
118. Игровые задачи динамики // Всесоюз. конф. по пробл. теорет. кибернетики: тез. докл. / ИМ СО АН СССР. Новосибирск, 1969. С. 52–53 (совм. с А.И. Субботиным).
119. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
120. К теории дифференциальных игр // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34, вып. 2. С. 197–207.
121. Достаточные условия осуществления встречи в дифференциальной игре // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34, вып. 5. С. 777–784.
122. Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34, вып. 6. С. 1005–1022 (совм. с А.И. Субботиным).
123. Дифференциальная игра наведения // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, № 4. С. 579–591 (совм. с А.И. Субботиным).
124. Дифференциальная игра сближения. II: Регулярные смешанные стратегии // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, № 10. С. 1743–1751.
125. Игровые задачи динамики. II // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1970. № 1. С. 3–13.
126. О структуре дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1970. Т. 190, № 3. С. 523–526 (совм. с А.И. Субботиным).
127. К задаче о преследовании // Докл. АН СССР. 1970. Т. 191, № 2. С. 270–272.
128. О дифференциальной игре сближения // Докл. АН СССР. 1970. Т. 193, № 2. С. 284–287.
129. Лекции по теории управления. Вып. 3: Общая схема дифференциальной игры. Примеры. Свердловск: Изд-во УрГУ, 1970. 87 с.
130. Лекции по теории управления. Вып. 4: Основная игровая задача наведения. Поглощение цели. Экстремальная стратегия. Свердловск: Изд-во УрГУ, 1970. 96 с.
131. Общие проблемы управления: О развитии техн. кибернетики // Вестн. АН СССР. 1970. № 8. С. 10–25 (совм. с М.А. Гавриловым, А.М. Летовым, В.С. Пугачевым).
132. О структуре игровых задач динамики // Прикл. математика и механика. 1971. Т. 35, вып. 1. С. 110–122 (совм. с А.И. Субботиным).
133. Минимаксное поглощение в игре сближения // Прикл. математика и механика. 1971. Т. 35, вып. 6. С. 945–951.
134. Экстремальные стратегии в дифференциальных играх // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196, № 2. С. 278–281 (совм. с А.И. Субботиным).
135. Линейные дифференциально-разностные игры // Докл. АН СССР. 1971. Т. 197, № 4. С. 777–780 (совм. с Ю.С. Осиповым).
136. Программное поглощение в дифференциальных играх // Докл. АН СССР. 1971. Т. 201, № 2. С. 270–272.
137. Extremal strategies in a differential game // Acts Congr. Intern. Math. (Nice, 1970). Paris: Gauthier-Villars, 1971. Vol. 3. P. 177–181.
138. Аппроксимационные стратегии в дифференциальных играх // Всесоюз. конф. по качеств. теории дифференц. уравнений (Свердловск, 1971): тез. докл. / ИММ АН СССР. Свердловск, 1971. С. 68–69 (совм. с А.И. Субботиным).
139. Седловые точки в позиционных дифференциальных играх // Всесоюз. конф. по пробл. теорет. кибернетики: тез. докл. Новосибирск, 1971. С. 37–38 (совм. с А.И. Субботиным).

140. Экстремальное управление в нелинейной дифференциальной игре // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36, вып. 6. С. 986–1006.
141. К игровой задаче уклонения // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 2. С. 243–248.
142. Экстремальное управление в нелинейной позиционной дифференциальной игре // Докл. АН СССР. 1972. Т. 203, № 3. С. 520–523.
143. Минимаксная дифференциальная игра // Докл. АН СССР. 1972. Т. 206, № 2. С. 277–280 (совм. с А.И. Субботиным, В.Н. Ушаковым).
144. Задача программного управления на максимин // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1972. № 6. С. 35–44 (совм. с В.Д. Батухтиным).
145. О седловой точке позиционной дифференциальной игры // Тр. МИАН СССР. 1972. Т. 128. С. 22–33 (совм. с А.И. Субботиным).
146. Экстремальные стратегии в дифференциальных играх // Междунар. конгр. математиков в Ницце. М.: Наука, 1972. С. 118–124.
147. Аппроксимация в дифференциальной игре // Прикл. математика и механика. 1973. Т. 37, вып. 2. С. 197–204 (совм. с А.И. Субботиным).
148. Дифференциальная игра сближения-уклонения. I // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1973. № 2. С. 3–18.
149. Дифференциальная игра сближения-уклонения. II // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1973. № 3. С. 22–42.
150. Экстремальное управление в нелинейной позиционной дифференциальной игре // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1973. № 4. С. 55–63 (совм. с В.Д. Батухтиным).
151. Задача управления с неполной информацией // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. 1973. № 4. С. 5–14 (совм. с Ю.С. Осиповым).
152. Программные конструкции для позиционных дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1973. Т. 211, № 6. С. 1287–1290.
153. О нелинейной дифференциальной игре сближения-уклонения // Докл. АН СССР. 1973. Т. 212, № 1. С. 29–32 (совм. с В.Д. Батухтиным).
154. Линейные неравенства и некоторые их приложения // Укр. мат. журн. 1973. Т. 25, № 4. С. 465–478 (совм. с И.И. Ереминым).
155. Регуляризация дифференциальных игр преследования // Теория игр: Всесоюз. конф. по теории игр (Ереван, 1968): сб. докл. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1973. С. 206–207.
156. Дифференциальная игра на рассогласование в заданный момент времени // Теория игр: Всесоюз. конф. по теории игр (Ереван, 1968): сб. докл. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1973. С. 208–209.
157. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с. — Пер. на фр.: Jeux Differentiels. М.: Mir, 1977. 446 р. (совм. с А.И. Субботиным).
158. Регулярная дифференциальная игра // Прикл. математика и механика. 1974. Т. 38, вып. 3. С. 389–401.
159. Задачи сближения-уклонения в системах с малым параметром при производных // Прикл. математика и механика. 1974. Т. 38, вып. 5. С. 771–779 (совм. с В.М. Решетовым).
160. К теории дифференциальных игр с неполной информацией // Докл. АН СССР. 1974. Т. 215, № 4. С. 780–783 (совм. с Ю.С. Осиповым).
161. Экстремальное прицеливание в нелинейной игре сближения // Экстремальные стратегии в позицион. дифференц. играх: сб. ст. / ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1974. С. 26–76 (совм. с В.Д. Батухтиным).
162. Минимаксное прицеливание в дифференциальной игре // Экстремальные стратегии в позиц. дифференц. играх: сб. ст. / ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1974. С. 121–137.
163. Game-theoretic control and problems of stability // Probl. Contr. & Inform. Theory. 1974. Vol. 3, no. 3. P. 171–182.
164. Позиционные дифференциальные игры // Techn. Conf. Optimization Techn. IFIP: препр. Новосибирск, 1974. № 2. 14 с.
165. Игровое управление и задачи устойчивости // Всесоюз. конф. по оптим. упр. в мех. системах: тез. докл. / Ин-т пробл. механики АН СССР. М., 1974. С. 36–38.
166. Регулярная дифференциальная игра // 3-я Всесоюз. конф. по теории игр: тез. докл. Одесса, 1974. С. 15–21.

-
167. Стохастические стратегии в дифференциальных играх // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220, № 5. С. 1023–1026 (совм. с А.И. Субботиным, В.Ф. Россохиным).
 168. Экстремальное управление в нелинейной позиционной дифференциальной игре // Дифференц. игры и задачи упр.: сб. науч. тр. / ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1975. Вып. 15. С. 34–63 (совм. с В.Д. Батухтиным).
 169. Дифференциальные игры в смешанных стратегиях // Проблемы аналитической механики и теорий устойчивости и управления. М.: Наука, 1975. С. 11–18 (совм. с А.И. Субботиным).
 170. Closed-loop differential games // Optimization Techniques: IFIP Technical Conf. (Новосибирск). Heidelberg; N.Y.: Springer, 1975. P. 422–434. (Lect. Notes in Comput. Sci.; vol. 27B).
 171. Optimal control under conditions of conflict or uncertainty // Proc. IFAC 6th World Congress (Boston/Cambridge, Mass.). Pt 4. Dusseldorf, 1975. 8 p.
 172. Об управлении при неполной информации // Прикл. математика и механика. 1976. Т. 40, вып. 2. С. 197–206.
 173. Игровое управление в дифференциальных эволюционных системах // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227, № 5. С. 1049–1052.
 174. К задаче унификации дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 6. С. 1260–1263.
 175. К задаче управления с неполной информацией // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1976. № 2. С. 3–7.
 176. Game-theoretic control under incomplete phase-state information // Probl. Control & Inform. Theory. 1976. Vol. 5, no. 4. P. 291–302.
 177. Петр Иванович Кузнецов (к 40-летию научной деятельности) // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 3. С. 567–570 (совм. с Л.Н. Большевым, В.А. Ильиным и др.).
 178. О дифференциальных эволюционных системах // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, вып. 5. С. 774–782.
 179. Смешанные стратегии в дифференциальных играх // Докл. АН СССР. 1977. Т. 235, № 3. С. 519–522.
 180. Игра сближения-уклонения со стохастическим поведением // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237, № 5. С. 1020–1023.
 181. Экстремальные конструкции для дифференциальной игры // Докл. АН СССР. 1977. Т. 235, № 6. С. 1260–1262.
 182. Унификация дифференциальных игр // Тр. Ин-та математики и механики УНЦ АН СССР. Свердловск, 1977. Вып. 24: Игровые задачи управления. С. 32–45.
 183. Control under incomplete information // Information Processing 77: Proc. IFIP Congr. Ser. (Toronto, Ont. 1977). Amsterdam: North-Holland, 1977. Vol. 7. P. 353–365.
 184. On designing of differential games. I // Probl. Contr. & Inform. Theory. 1977. Vol. 6, no. 5–6. P. 381–395 (совм. с А.Г. Ченцовым).
 185. Позиционное управление эволюционными системами // 2-я Всесоюз. конф. по оптим. упр. в мех. системах / АН СССР, Ин-т пробл. механики; КАИ : тез. докл. Казань, 1977. С. 108. (совм. с Ю.С. Осиповым).
 186. О конструировании дифференциальных игр // Материалы Всесоюз. симпоз. по оптим. упр. и дифференц. играм (Тбилиси, 1976). Тбилиси: Мецниереба, 1977. С. 170–174 (совм. с А.Г. Ченцовым).
 187. Программные конструкции для позиционного игрового управления // Прикл. математика и механика. 1978. Т. 42, вып. 1. С. 3–14.
 188. К синтезу управления в дифференциальной игре // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239, № 5. С. 1041–1043.
 189. Дифференциальные игры. Аппроксимационные и формальные модели // Мат. сб. 1978. Т. 107, вып. 4. С. 541–571.
 190. On designing differential games. II // Probl. Contr. & Inform. Theory. 1979. Vol. 8, no. 1. P. 3–11 (совм. с А.Г. Ченцовым).
 191. Differential games: actual problems and their formalization // A link between sci. & appl. automat. contr.: Proc. Trienn. World Congr. IFAC. (Helsinki, 1978). Oxford: Pergamon Press, 1979. Vol. 2. P. 975–982.
 192. Вероятностное управление с гарантированным результатом // Probl. Control & Inform. Theory. 1980. Vol. 9, no. 3. P. 163–170.

193. Седловая точка стохастической дифференциальной игры // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254, № 3. С. 534–539 (совм. с В.Е. Третьяковым).
194. Control under incomplete information and differential games // Proc. Intern. Congr. Math. (Хельсинки, 1978). Helsinki: Ollilehto, 1980. Vol. 1. P. 151–163.
195. Game-theoretical optimization of differential systems // Optimization Techniques: Proc. IFIP Conf. (Варшава, 1979). Pt. 1. Berlin: Springer, 1980. P. 37–53. (Lect. Notes Control & Inform. Sci.; vol. 22).
196. Стохастический программный синтез для детерминированной позиционной дифференциальной игры // Прикл. математика и механика. 1981. Т. 45, вып. 4. С. 579–586 (совм. с А.Н. Красовским, В.Е. Третьяковым).
197. Стохастический программный синтез для позиционной дифференциальной игры // Докл. АН СССР. 1981. Т. 259, № 1. С. 24–27 (совм. с В.Е. Третьяковым).
198. Валентин Витальевич Румянцев (К 60-летию со дня рождения) // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 8. С. 1522–1525 (совм. с Н.П. Еругиным, Н.Н. Моисеевым).
199. О стохастическом программном синтезе стратегий в дифференциальной игре // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46, вып. 6. С. 885–892.
200. Об одной задаче минимаксного управления // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 12. С. 2126–2132.
201. О программном синтезе позиционного управления // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264, № 6. С. 1309–1312 (совм. с В.Е. Третьяковым).
202. Смешанные стратегии в дифференциальной игре // Соврем. пробл. мат. физики и вычисл. математики: сб. ст. / ИПМ АН СССР. М.: Наука, 1982. С. 208–216.
203. Control solution with optimal ensured result // Probl. Control & Inform. Theory. 1982. Vol. 11, no. 4. P. 271–281 (совм. с В.Е. Третьяковым).
204. Стохастический программный синтез в некоторых задачах управления механическими объектами // Всесоюз. конф. по оптим. упр. в мех. системах (Москва, 1982): тез. докл. / ИПМ АН СССР. М., 1982. С. 112–113 (совм. с В.Е. Третьяковым).
205. Одна задача оптимального управления на минимум гарантированного результата // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 6–23 (совм. с В.Е. Третьяковым).
206. Стохастический программный синтез одного гарантирующего управления // Control & Inform. Theory. 1983. Vol. 12, no. 2. P. 79–95 (совм. с В.Е. Третьяковым).
207. Задача управления при неполной информации / ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1984. 63 с. (совм. с С.И. Тарасовой, В.Е. Третьяковым, Г.И. Шишкиным).
208. Задача об управлении в условиях неполной информации // Прикл. математика и механика. 1984. Т. 48, вып. 4. С. 533–539.
209. Минимаксное управление и стохастический максимин // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 9. С. 1523–1529.
210. Extremal aiming and extremal displacement in a game-theoretical control // Probl. Control & Inform. Theory. 1984. Vol. 13, no. 5. P. 287–302.
211. Математические модели и вычислительный процесс на примере задачи управления // Пром. технология создания и применения програм. ср-в в организацион. упр. и НИОКР: пленар. докл. на Всесоюз. семинаре. Свердловск, 1984.
212. Детерминированные стратегии и стохастические программы // Стохаст. оптимизация: Междунар. конф.: тез. докл. Киев, 1984. Ч. 1. С. 129–130.
213. Эти неконкретные конкретные задачи // Техника — молодежи. 1984. № 7. С. 9–11.
214. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 516 с.
215. Управление динамической системой / ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1985. 199 с. (совм. с А.Н. Красовским, В.Е. Третьяковым).
216. Детерминированная стратегия и стохастические программы // Прикл. математика и механика. 1985. Т. 49, вып. 2. С. 179–190.
217. Позиционная дифференциальная игра // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 159–179.
218. Управление при дефиците информации // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280, № 3. С. 536–540.
219. Задача управления с гарантированным результатом. Свердловск: Ср.-Урал. кн. изд-во, 1986. 64 с. (совм. с В.Е. Третьяковым).

220. О синтезе в дифференциальной игре // Прикл. математика и механика. 1986. Т. 50, вып. 6. С. 898–902.
221. Control with information deficit // Probl. Control. & Inform. Theory. 1986. Vol. 15, no. 3. P. 1–13 (совм. с С.И. Тарасовой, В.Е. Третьяковым, Г.И. Шишкиным).
222. Стохастический программный синтез оптимального управления для систем с распределенными параметрами // Дифференц. уравнения с частными производными: тр. Междунар. конф. (Новосибирск, 1983). Новосибирск: Наука, 1986. С. 93–102 (совм. с В.Е. Третьяковым).
223. О постановках задач управления // Всесоюз. съезд по теорет. и прикл. механике: аннот. докл. Ташкент, 1986. С. 382–383.
224. Game-theoretical control problems. New York etc.: Springer, 1988. 517 с. (совместно с А.И. Субботиным).
225. On the program synthesis of a guaranteed control // Probl. Control. & Inform. Theory. 1988. Vol. 17, no. 6. P. 333–343, P. 1–11 (совм. с Т.Н. Решетовой).
226. Задачи повышения точности навигации движущихся объектов // Всесоюз. шк. по проблемам мат. обеспечения и архитектуры бортовых вычисл. систем: тез. докл. Ташкент, 1988. С. 6 (совм. с В.Л. Гасиловым, Ю.С. Осиповым).
227. Юрий Станиславович Богданов (1920–1987) // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 6. С. 1091–1092 (совм. с А.Ф. Андреевым, А.В. Бицадзе и др.).
228. Черников Сергей Николаевич (1912–1987) // Успехи мат. наук. 1988. Т. 43, № 2. С. 125–126 (совм. с Ю.Л. Ершовым, Ю.А. Митропольским, Д.К. Фаддеевым и др.).
229. Модельные задачи управления // Упр. в мех. системах: тез. докл. 7-й Всесоюз. конф. Свердловск, 1990. С. 63.
230. Управление при дефиците информации. Свердловск: Изд-во УрГУ, 1990. 103 с. (совместно с Т.Н. Решетовой).
231. Управление и стабилизация при недостатке информации // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1993. № 1. С. 148–151.
232. A differential game for the minimax of a positional functional // Adv. in Nonlinear Dynamics and Control: A Report from Russia / Ed. A.B. Kurzhanski. Boston etc.: Birkhäuser, 1993. P. 41–72. (Progress in Systems and Control Theory; vol. 17) (совм. с А.Н. Красовским).
233. Школьник и компьютер: Учимся друг у друга. М.: Наука. Физматлит, 1993. 208 с. (совм. с В.В. Прохоровым, Т.Н. Решетовой, Д.А. Серковым и др.).
234. Валентин Константинович Иванов // Успехи мат. наук. 1993. Т. 48, вып. 5. С. 147–152 (совм. с В.В. Васиным, М.М. Лаврентьевым, Ю.С. Осиповым, А.Н. Тихоновым и др.).
235. Предмет логики в средней и высшей школе // Проблемы образования одаренных учащихся: тез. науч.-метод. конф. / СУНЦ УрГУ. Екатеринбург, 1994. С. 197–198.
236. Construction of solutions of a nonantagonistic positional differential game // Sixth International Symposium on Dynamic Games and Applications. (St-Jovite, Quebec, Canada, July 13–15, 1994). Preprint volume. P. 620 (совм. с А.Ф. Клейменовым, А.Н. Красовским, Т.Н. Решетовой).
237. Control under lack of information. Boston etc.: Birkhäuser, 1995. 322 p. (Systems and Control: Foundat. and Appl.) (совм. с А.Н. Красовским).
238. Математическое моделирование в школе // Изв. Урал. гос. ун-та. 1995. № 4. С. 12–24.
239. О некоторых вопросах теории управления // Алгоритм. и числ. анализ некорректных задач: тез. докл. Всерос. науч. конф., посвящ. памяти В.К. Иванова. Екатеринбург, 1995. С. 79–80.
240. Задача конфликтного управления с наследственной информацией // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 6. С. 885–900 (совм. с Н.Ю. Лукояновым).
241. Моделирование — математика, информатика, логика — в школе // Информатика и образование. 1997. № 2. С. 65–71; № 3. С. 3–7; № 6. С. 5–12; № 7. С. 3–7 (совм. с Т.Н. Решетовой).
242. Николай Павлович Еругин: к 90-летию со дня рождения // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 5. С. 579–582 (совм. с А.Ф. Андреевым, И.В. Гайшуном, В.И. Громаком и др.).
243. In Memory of Andrei I. Subbotin // Dynamic Games and Appl.: 8-th Proc. Intern. Symp. Maastricht, 1998. P. XIII–XXII (совм. с Э.Г. Альбрехтом, А.Г. Ченцовым и др.).
244. О некоторых задачах управления со странностями // Алгоритм. анализ некорректных задач: тез. докл. Всерос. науч. конф., посвящ. памяти В.К. Иванова. Екатеринбург, 1998. С. 139.
245. О некоторых задачах управления // Тр. МИАН. 1999. Т. 224. С. 208–217.

246. Задачи управления и стабилизации динамических систем // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее прил. 1999. Т. 60: Тр. Междунар. конф., посвящ. 90-летию Л.С. Понтрягина (Москва, 1998). Т. 1: Оптим. упр. С. 24–41. — Пер. на англ.: Problems of control and stabilization in dynamical systems // Pontryagin Conference (Moscow, 1998). Vol. 1: Optimal Control. J. Math. Sci. (New York). 2000. Vol. 100, no. 5. P. 2458–2469.
247. Уравнения типа Гамильтона — Якоби в наследственных системах: минимаксные решения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2000. Т. 6, № 1–2. С. 110–130. — Пер. на англ.: Equations of Hamilton–Jacobi Type in Hereditary Systems: Minimax Solutions // Proc. Steklov Inst. Math. 2000. Suppl. 1. P. S136–S153 (совм. с Н.Ю. Лукояновым).
248. Экспериментальная математика в школе: математика, информатика, логика // Материалы Всерос. конф. “Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков”. М.: МЦНМО, 2000. С. 25–27 (совм. с Н.Ю. Лукояновым, Т.Н. Решетовой).
249. Математика, информатика и логика в школе: докл. на Объед. ученом совете по математике, механике и информатике // Отчет о науч. и науч.-орг. деятельности УрО РАН за 1999 г. Екатеринбург, 2000. Ч. 2. С. 21 (совм. с В.В. Самофаловым).
250. О работах С.Н. Черникова по линейным неравенствам // Инф. бюлл. АМП. 2001. № 9. С. 11–26 (совм. с И.И. Ереминым).
251. Предисловие // Сб. интервью: От архаики управления бизнесом к интернет-экономике. Екатеринбург: Изд-во УрГУ, 2001. С. 3–6 (совм. с И.И. Ереминым).
252. Урал обязан Евгению Алексеевичу очень и очень многим (памяти акад. Е.А. Барбашина) // 50 лет радиофаку УГТУ-УПИ. Екатеринбург: РЕАЛ, 2002. С. 99–100.
253. О работах С.Н. Черникова по линейным неравенствам // Алгебра и линейная оптимизация: тр. Междунар. семинара, посвящ. 90-летию со дня рождения С.Н. Черникова (Екатеринбург, 2002). Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2002. С. 216–234 (совм. с И.И. Ереминым).
254. Одна школьная задача как элемент обучения экспериментальной математике // Вестн. Челябин. ун-та. 2003. № 2. С. 50–131. (Сер. 3: Математика. Механика. Информатика) (совм. с А.Н. Котельниковой).
255. Размышления о математическом образовании // Изв. Урал. гос. ун-та. 2003. № 27. С. 5–13. (Сер. Проблемы образования, науки и культуры; вып. 14).
256. О проекте федерального компонента Государственного образовательного стандарта по математике // Модернизация математического образования: проблемы, мнения, реалии: сб. ст. Екатеринбург: Изд-во Дома учителя, 2003. С. 9–11 (совм. с В.И. Бердышевым, А.Л. Агеевым).
257. Одна задача расшифровки информации // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: тез. докл. Всерос. науч. конф. Екатеринбург, 2004. С. 175–176. (совм. с А.Н. Котельниковой).
258. Отслеживание и лидирование движений моделирующим моделированием // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: тез. докл. Всерос. науч. конф. Екатеринбург, 2004. С. 177–178 (совм. с А.Н. Котельниковой).
259. Судьба одного подхода к изучению наследственных систем // Изв. Урал. гос. ун-та. 2004. № 32. С. 12–24. (Сер. Проблемы образования, науки и культуры; вып.16) (совм. с А.Н. Котельниковой).
260. Стабилизирующий люфт в задаче об устойчивости процесса управления // Вестн. УГТУ-УПИ. Информ.-мат. технологии в экономике, технике и образовании. 2005. № 9 (61). С. 16–23 (совм. с А.Н. Котельниковой).
261. Минимаксная стабилизация наследственных стохастических систем // Устойчивость и процессы управления: сб. тр. Междунар. конф., посвящ. 75-летию В.И. Зубова. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2005. Т. 1. С. 25.
262. Из воспоминаний об Андрее Измайловиче Субботине // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. № 34. С. 35–36. (Сер. Проблемы образования, науки и культуры; вып.17).
263. Одна задача об устойчивом отслеживании движения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 1. С. 142–156. — Пер. на англ.: One problem on stable tracking of motion // Proc. Steklov Inst. Math. 2006. Vol. 253, iss. 1. Suppl. P. S151–S167 (совм. с А.Н. Котельниковой).
264. Юрий Сергеевич Осипов (К 70-летию со дня рождения) // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 1. С. 3–5 (совм. с В.И. Бердышевым, А.Б. Куржанским, Е.Ф. Мищенко).
265. Об одной задаче о стабилизации // Изв. Урал. гос. ун-та. 2006. № 46. С. 90–106 (Сер. Математика и механика; вып.10) (совм. с А.Н. Котельниковой).

266. О некоторых задачах расшифровки информации // Информ.-мат. технологии в экономике, технике и образовании: сб. материалов обл. науч.-практ. конф. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2006. Ч. 1. С. 38–43 (совм. с А.Н. Котельниковой).
267. К методу функций Ляпунова для задач об устойчивости в системах с последействием // Изв. Ин-та математики и информатики. Ижевск: Изд-во Удмурт. гос. ун-та, 2006. Вып. 3 (37). С. 73–74 (совм. с А.Н. Котельниковой).
268. Исаак Яковлевич Кац // Устойчивость, управление и моделирование динамических систем: материалы Междунар. науч. семинара, посвящ. 75-летию И.Я. Каца. Екатеринбург: Изд-во УрГУПС, 2006. № 54 (137). С. 3–4 (совм. с А.Б. Куржанским, Г.А. Тимофеевой).
269. О корректности вероятностной стабилизации // Устойчивость, управление и моделирование динамических систем: материалы Междунар. науч. семинара, посвящ. 75-летию И.Я. Каца. Екатеринбург: Изд-во УрГУПС, 2006. № 54 (137). С. 12–13 (совм. с А.Н. Котельниковой).
270. Современные проблемы оптимизации и устойчивости неопределенных и стохастических систем // Автоматика и телемеханика. 2007. № 10. С. 3–4 (совм. с А.Б. Куржанским, А.И. Кибзуном).
271. Очерк научной биографии И.Я. Каца // Автоматика и телемеханика. 2007. № 10. С. 5–15 (совм. с А.Б. Куржанским, П.В. Пакшиным, Г.А. Тимофеевой).
272. О корректности вероятностной стабилизации // Автоматика и телемеханика. 2007. № 10. С. 106–124 (совм. с А.Н. Котельниковой).
273. О корректности стабилизации к помехам в последействии // Математика. Механика. Информатика: материалы Всерос. науч. конф. (Челябинск, 19–22 сент. 2006 г.). Челябинск: Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2007. С. 94–103 (совм. с А.Н. Котельниковой, Т.Н. Решетовой).
274. Модели динамических и логических систем в образовательном процессе // Информ.-мат. технологии в экономике, технике и образовании: сб. материалов Междунар. науч. конф. (Екатеринбург, 2006). Екатеринбург, 2007. Вып. 3. С. 33–40 (совм. с А.Н. Котельниковой, Т.Н. Решетовой).
275. Юрий Николаевич Субботин (к 70-летию со дня рождения) // Успехи мат. наук. 2007. Т. 62, № 2. С. 187–190 (совм. с В.В. Арестовым, В.И. Бердышевым, С.М. Никольским и др.).
276. О развитии второго метода Ляпунова в теории устойчивости движения // Междунар. конгресс “Нелинейный динамический анализ – 2007” (СПб., 4–8 июня 2007 г.), посвящ. 150-летию акад. А.М. Ляпунова: тез. докл. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2007. С. 14–15.
277. О смешанных стратегиях стабилизации // Междунар. конгресс “Нелинейный динамический анализ – 2007” (СПб., 4–8 июня 2007 г.), посвящ. 150-летию акад. А.М. Ляпунова: тез. докл. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2007. С. 40 (совм. с А.Н. Котельниковой, Т.Н. Решетовой).
278. Об одной задаче оптимального управления системой с последействием в условиях конфликта // Вестн. Удмурт. ун-та. 2008. Вып. 2. С. 65–70. (Математика. Механика. Компьютер. науки) (совм. с А.Н. Котельниковой).
279. Об исследованиях в Свердловске—Екатеринбурге, инициированных принципом максимума Л.С. Понтрягина // Междунар. конф. “Диф. уравнения и топология”, посвящ. 100-летию Л.С. Понтрягина: тез. докл. / Математический ин-т им. В.А. Стеклова РАН; Моск. гос. ун-т. М., 2008. С. 10–11.
280. Об одном регулярном случае задачи о сближении-уклонении в системе с последействием // Междунар. конф. “Диф. уравнения и топология”, посвящ. 100-летию Л.С. Понтрягина: тез. докл. / Математический ин-т им. В.А. Стеклова РАН; Моск. гос. ун-т. М., 2008. С. 355 (совм. с А.Н. Котельниковой).
281. К 90-летию со дня рождения Евгения Алексеевича Барбашина (1918–1969) // Междунар. конф. “Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация”: тез. докл. / Ин-т математики НАН Беларуси. Минск, 2008. С. 6–8.
282. Об унификации дифференциальной игры // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 100-летию В.К. Иванова. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2008. С. 217–218 (совм. с А.Н. Котельниковой).
283. Александр Борисович Куржанский (к семидесятилетию юбилею) // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 5–9 — Пер. на англ.: Alexander Borisovich Kurzhanski // Proc. Steklov Inst. Math. 2010. Vol. 269, iss. 1. Suppl. P. 1–5 (совм. с В.И. Бердышевым, М.И. Гусевым, Ю.С. Осиповым и др.).
284. Дифференциальная игра сближения-уклонения. Стохастический поводыр // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 146–166. — Пер. на англ.: An approach-evasion

- differential game: Stochastic guide // Proc. Steklov Inst. Math. 2010. Vol. 269, iss. 1. Suppl. P. 191–213 (совм. с А.Н. Котельниковой).
285. Унификация дифференциальных игр, обобщенные решения уравнений типа Гамильтона — Якоби, стохастический поводыр // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 11. С. 1618–1633 — Пер. на англ.: Unification of differential games, generalized solutions of the Hamilton–Jacobi equations, and a stochastic guide // Diff. Eq. 2009. Vol. 45, iss. 11. P. 1653–1668 (совм. с А.Н. Котельниковой).
 286. О дифференциальной игре на перехват / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2009. 47 с. (совм. с А.Н. Котельниковой).
 287. О дифференциальной игре на перехват // Актуальные проблемы теории устойчивости и управления: тез. докл. Междунар. конф. Екатеринбург, 2009. С. 95–97 (совм. с А.Н. Котельниковой).
 288. О дифференциальной игре на перехват // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 113–126 (совм. с А.Н. Котельниковой).
 289. О дифференциальной игре на перехват // Тр. МИАН. 2010. Т. 268. С. 168–214 — Пер. на англ.: On a differential interception game // Proc. Steklov Inst. Math. 2010. Vol. 268, iss. 1. P. 161–206 (совм. с А.Н. Котельниковой).
 290. Памяти Евгения Фроловича Мищенко // Тр. МИАН. 2010. Т. 271. С. 7–8 — Пер. на англ.: In memory of Evgenii Frolovich Mishchenko // Proc. Steklov Inst. Math. 2010. Vol. 271, iss. 1. P. 1–2 (совм. с Ю.С. Осиповым, В.В. Козловым, Л.Д. Фаддеевым и др.).
 291. К семидесятилетию Е.Л. Тонкова // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 6. С. 763–767 — Пер. на англ.: Evgenii Leonidovich Tonkov (A Tribute In Honor of his Seventieth Birthday) // Diff. Eq. 2010. Vol. 46, iss. 6. P. 769–773 (совм. с Н.А. Изобовым, В.А. Ильиным, А.Б. Куржанским и др.).
 292. Стохастическое управление в детерминированной дифференциальной игре сближения-уклонения // Автоматика и телемеханика. 2011. № 2. P. 93–110. — Пер. на англ.: Stochastic control in a determinate differential pursuit-evasion game // Automation and Remote Control. 2011. Vol. 72, iss. 2. P. 305–322 (совм. с А.Н. Котельниковой).
 293. Александр Михайлович Летов (1911–1974) // Автоматика и телемеханика. 2011. № 11. С. 3–8 — Пер. на англ.: Aleksandr Mikhailovich Letov (1911–1974) // Automation and Remote Control. 2011. Vol. 72, iss. 11. P. 2221–2226 (совм. с С.Н. Васильевым, А.П. Курдюковым, А.Б. Куржанским, Т.А. Летовой).
 294. К семидесятипятилетию академика Российской академии наук Юрия Сергеевича Осипова // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 5–6 — Пер. на англ.: On the 75th birthday of Academician of the Russian Academy of Sciences Yurii Sergeevich Osipov // Proc. Steklov Inst. Math. 2012. Vol. 276, iss. 1. Suppl. P. 1–3 (совм. с И.И. Ереминым, А.М. Ильиным, А.В. Кряжимским и др.).
 295. Стохастический поводыр для объекта с последействием в позиционной дифференциальной игре // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 97–104 — Пер. на англ.: Stochastic guide for a time-delay object in a positional differential game // Proc. Steklov Inst. Math. 2012. Vol. 276, iss. 1. Suppl. P. 145–151 (совм. с А.Н. Котельниковой).

УДК 517.977

**УНИВЕРСАЛЬНЫЕ РАВНОВЕСИЯ ПО НЭШУ
В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ МНОГИХ ЛИЦ¹****Ю. В. Авербух**

В работе рассматриваются дифференциальные игры конечного числа лиц в классе стратегий с поводом, предложенных Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным. Строится набор стратегий, обеспечивающий равновесие по Нэшу в любой начальной позиции из заданного компакта. Конструкция решения основана на многозначной функции, удовлетворяющей некоторым условиям стабильности. Доказано существование функции цены.

Ключевые слова: дифференциальные игры, равновесие по Нэшу, стратегии с поводом.

Yu. V. Averboukh. Universal Nash equilibria in n -person differential games.

We consider differential games of a finite number of players in the class of strategies with a guide proposed by Krasovskii and Subbotin. A family of strategies that guarantee the Nash equilibrium for any initial position from a given compact set is constructed. The construction is based on a multivalued function satisfying some stability conditions. The existence of this value function is established.

Keywords: differential games, Nash equilibrium, strategies with a guide.

1. Введение

Развитие теории дифференциальных игр связано с идеями и работами Н. Н. Красовского. Разрабатываемая в Свердловске — Екатеринбурге теория позиционных дифференциальных игр основана на методе экстремального сдвига и на концепции стабильности, предложенных Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным [1]. Эти идеи легли в основу теоремы об альтернативе. Теорема об альтернативе Н. Н. Красовского и А. И. Субботина определяет, в свою очередь, теорему существования для функции цены антагонистической дифференциальной игры. Существование цены доказано в классе разрывных позиционных стратегий (в этом случае рассматриваются пределы пошаговых движений — конструктивные движения). Н. Н. Красовский и А. И. Субботин также предложили также концепцию стратегий управления с поводом. Эти стратегии позволяют построить решение, устойчивое по отношению к информационным помехам. Н. Н. Красовский предложил конструкцию универсальных позиционных стратегий [2]. В этом случае стратегия является функцией позиции и параметра точности. Универсальная стратегия не может быть реализована в классе стратегий, зависящих лишь от позиции. Соответствующий контрпример был построен Н. Н. Субботиной [3]. Дальнейшее развитие идей стабильности привело к появлению теории минимаксных решений уравнений Гамильтона — Якоби, развитой в работах А. И. Субботина [4] и его сотрудников.

В теории неантагонистических дифференциальных игр доказательство существования равновесия по Нэшу в классе позиционных стратегий, предложенное А. Ф. Клейменовым, основано на конструкции универсальных стратегий Н. Н. Красовского [5] (см. также работу [6], где равновесие по Нэшу доказано в классе кусочно программных стратегий). Эта же техника позволяет описать множество выигрышей в ситуациях равновесия по Нэшу [5; 7]. К сожалению, построенные стратегии не являются универсальными; в частности, любое изменение начальной позиции приводит к новому множеству равновесий по Нэшу [5; 7]. Другой подход основан на системах уравнений типа Гамильтона — Якоби [8–11]. В рамках этого подхода могут

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00537) и Президиума РАН (проекты 12-П-101019 и 12-П-1-1012).

быть построены универсальные стратегии. Однако в настоящее время не доказана теорема существования решения системы уравнений типа Гамильтона — Якоби для общего случая. Отдельные случаи разобраны в работах [12–15].

В [16] стратегии управления с поводырем, предложенные Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным, были использованы в теории неантагонистических дифференциальных игр. Это позволило построить универсальные стратегии в неантагонистической дифференциальной игре двух лиц для любого наперед заданного компакта начальных позиций. В данной статье мы обобщаем результаты [16] на случай n игроков. Мы строим набор стратегий, обеспечивающий равновесие по Нэшу в любой позиции из заданного компакта. Соответствующая функция выигрыша является селектором многозначного отображения, удовлетворяющего некоторым условиям типа стабильности. Отметим, что для произвольного селектора многозначного отображения и компакта начальных значений существует как минимум одно равновесие по Нэшу. Мы рассматриваем случай разделенной динамики, т. е. каждый игрок напрямую воздействует лишь на свой собственный фазовый вектор.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 мы напоминаем определение стратегий управления с поводырем и даем определение равновесия по Нэшу в классе стратегий с поводырем. В разд. 3 мы строим равновесие по Нэшу в классе стратегий с поводырем на основе многозначного отображения, удовлетворяющего условиям стабильности, его селектора и компакта начальных позиций. Существование многозначного отображения с требуемыми свойствами доказано в разд. 4. Наконец, в разд. 5 обсуждается случай, когда существует векторозначная функция, удовлетворяющая условиям стабильности. Также мы сравниваем результат, получаемый в классе стратегий с поводырем, с результатом, получаемым при использовании позиционных стратегий, построенных на основе систем уравнений типа Гамильтона — Якоби.

2. Постановка задачи

Пусть динамика вектора x_i описывается уравнением

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_i), \quad t \in [0, T], \quad x_i \in \mathbb{R}^d, \quad u_i \in P_i. \quad (2.1)$$

Здесь переменная u_i — управление игрока i . Предполагается, что его цель — максимизировать терминальный выигрыш $\sigma_i(x_1(T), \dots, x_n(T))$, здесь n — число игроков.

Мы предполагаем, что множества P_i компактны, функции f_i и σ_i непрерывны. Кроме того, мы считаем, что функции f_i локально липшицевы и удовлетворяют условию подлинейного роста по $x_1, \dots, x_n$.

Обозначим через x и u векторы $(x_1, \dots, x_n)$ и $(u_1, \dots, u_n)$ соответственно. Также пусть $f(t, x, u)$ обозначает вектор $(f_1(t, x, u_1), \dots, f_n(t, x, u_n))$.

Обозначим

$$\mathcal{U}_i \triangleq \{u_i: [0, T] \rightarrow P_i \text{ измерима}\}, \quad \mathcal{U} \triangleq \{u: [0, T] \rightarrow P_1 \times \dots \times P_n \text{ измерима}\}.$$

Если $u \in \mathcal{U}$, (t^0, x^0) — начальная позиция, то обозначим через $x(\cdot, t^0, x^0, u)$ решение задачи Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x, u(t)), \quad x(t^0) = x^0. \quad (2.2)$$

Определим теперь стратегии управления с поводырем. Стратегии управления с поводырем являются обобщением позиционных стратегий. В этом случае управление формируется пошагово и на каждом шаге определяется реализовавшейся позицией и специальным вектором, называемым поводырем. Значения поводыря рассчитываются игроком. Формально стратегия управления с поводырем игрока i представляет собой тройку $U_i = (u_i(t, x, w), \psi_i(t^+, t, x, w_i), \chi_i(t^0, x^0))$. Здесь функция u_i определяет управление игрока i . Она зависит от текущей позиции (t, x) и от положения поводыря i -го игрока w_i . Значение функции

ψ_i — положение поводыря i -го игрока в момент t_+ при условии, что в момент t положение системы есть x , а положение поводыря i -го игрока — w_i . Функция χ_i инициализирует значение поводыря игрока i , если его начальное положение в момент времени t^0 есть x^0 .

Игрок i формирует свое управление следующим образом. Пусть (t^0, x^0) — начальная позиция, и пусть $\Delta = \{t^k\}_{k=0}^r$ — разбиение интервала $[t^0, T]$. Далее, предположим что игрок j ($j \neq i$) выбрал управление $u_j \in \mathcal{U}_j$. Обозначим через x^k положение системы в момент t^k , также обозначим через w_i^k положение поводыря i -го игрока в момент t^k . Движение системы, порожденное стратегией с поводырем i -го игрока U_i и управлениями всех остальных игроков u_j , $j \neq i$, есть решение задачи Коши

$$\frac{dx[t]}{dt} = f(t, x, u), \quad x(t^0) = x^0$$

при $u_i(t) = u_i(t^k, x^k, w_i^k)$ для $t \in [t^k, t^{k+1})$. Положение поводыря i -го игрока при этом определяется последовательно по правилу $w_i^{k+1} = \psi_i(t^{k+1}, t^k, x^k, w_i^k)$, $w_i^0 = \chi_i(t^0, x^0)$.

Пусть $\bar{U}$ — набор стратегий с поводырем $U_1, \dots, U_n$. Ниже мы рассматриваем два случая.

1. Каждый игрок i использует стратегию U_i , и все игроки выбирают общее разбиение Δ . Обозначим соответствующее движение через $x[\cdot, t^0, x^0, \bar{U}, \Delta]$.

2. Все игроки, кроме j -го, используют стратегии определяемые набором $\bar{U}$, и выберут одно и то же разбиение Δ , в то время как игрок j использует управление $u_j \in \mathcal{U}_j$. Это управление может быть произвольным, в частности оно может формироваться пошагово. Обозначим получившееся движение через $x[\cdot, t^0, x^0, \bar{U}|u_j, \Delta]$. Здесь аргумент $\bar{U}|u_j$ означает, что отклоняется лишь игрок j , при этом используя управление u_j .

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что набор стратегий $\bar{U}^*$ является равновесным по Нэшу в классе стратегий с поводырем на множестве $G \subset [0, T] \times \mathbb{R}^{dn}$, если для всех $(t^0, x^0) \in G$ и $j \in \overline{1, n}$ выполнено неравенство

$$\limsup_{\delta \downarrow 0} \{ \sigma_j(x[T, t^0, x^0, \bar{U}|u_j, \Delta]) : d(\Delta) \leq \delta, u_j \in \mathcal{U}_j \} \leq \liminf_{\delta \downarrow 0} \{ \sigma_j(x[T, t^0, x^0, \bar{U}, \Delta]) : d(\Delta) \leq \delta \}.$$

Если $\bar{U}^*$ равновесно по Нэшу, то вектор

$$\left(\liminf_{\delta \downarrow 0} \{ \sigma_j(x[T, t^0, x^0, \bar{U}, \Delta]) : d(\Delta) \leq \delta \} \right)_{j=1}^n$$

назовем равновесным по Нэшу выигрышем.

3. Многозначная функция цены

Пусть $u_j^* \in P_j$. Положим

$$\text{Sol}^{[j]}(t^0, x^0; u_j^*) \triangleq \text{cl}\{x(\cdot, t^0, x^0, u^1, \dots, u_j^*, \dots, u_n) : u_i \in \mathcal{U}_i, \quad i \neq j\},$$

$$\text{Sol}(t^0, x^0) \triangleq \text{cl}\{x(\cdot, t^0, x^0, u) : u \in \mathcal{U}\}.$$

Здесь cl обозначает замыкание в топологии равномерной сходимости в пространстве непрерывных функций из $[0, T]$ в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1. Пусть многозначная функция $S: [0, T] \times \mathbb{R}^{dn} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $S(t, x) = \{\sigma_1(x), \dots, \sigma_n(x)\}$.

2. Для всех $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{dn}$, $t_+ \in [t, T]$, $J \in S(t, x)$, $j \in \overline{1, n}$ и $u_j \in P_j$ существуют движение $y^{[j]}(\cdot) \in \text{Sol}^{[j]}(t, x; u_j)$ и вектор $J' \in S(t_+, y^{[j]}(t_+))$ такие, что $J_j \geq J'_j$.

3. Для всех $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{dn}$, $t_+ \in [t, T]$, $J \in S(t, x)$ существует движение $y^c(\cdot) \in \text{Sol}(t, x; u_j)$ такое, что $J \in S(t_+, y^c(t_+))$.

Тогда для любого компакта $G \subset [0, T] \times \mathbb{R}^{dn}$ и любого селектора $\hat{J}$ многозначного отображения S существует равновесие по Нэшу в классе стратегий с поводырем на G . Соответствующий равновесный по Нэшу выигрыш в позиции $(t^0, x^0) \in G$ равен $\hat{J}(t^0, x^0)$.

Конструкция равновесия по Нэшу основана на методе экстремального сдвига Н. Н. Красовского и А. И. Субботина. Обозначим через E множество позиций, достижимых из G :

$$E \triangleq \{x(t, t^*, x^*, u) : (t^*, x^*) \in G, t \in [t^*, T], u \in \mathcal{U}\}. \quad (3.1)$$

Пусть также $R = \text{diam}(E)$. Положим

$$K_i \triangleq \max\{\|f_i(t, x, u_i)\| : t \in [0, T], x \in E, u_i \in P_i\}. \quad (3.2)$$

Пусть L_i является константой Липшица функции f_i на $[0, T] \times E \times P_i$, т. е. для всех $t \in [0, T]$, $x', x'' \in E, u_i \in P_i$

$$\|f_i(t, x', u_i) - f_i(t, x'', u_i)\| \leq L_i \|x' - x''\|.$$

Обозначим $\beta_i = 2L_i$. Также положим

$$\varphi_i^*(\delta) \triangleq \sup \left\{ \|f_i(t', x, u_i) - f_i(t'', x, u_i)\| : t', t'' \in [0, T], |t' - t''| \leq \delta, x \in E, u_i \in P_i \right\}.$$

Отметим, что $\varphi_i^*(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Кроме того, обозначим $\varphi_i(\delta) = 4\varphi_i^*(\delta)R + 4K_i^2\delta$.

Для всех $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{dn}$, $t_+ > t$, $J \in S(t, x)$ обозначим через $b^c(\cdot, t_+, t, x, J)$ движение, удовлетворяющее третьему условию теоремы 1, т. е. $J \in S(t_+, b^c(t_+, t, x, J))$. Кроме того, при $j \in \overline{1, n}$, $u_j \in P_j$ выберем движение $b^{[j]}(\cdot, t_+, t, x, J, u_j)$ так, чтобы оно удовлетворяло условию 2 теоремы 1, т. е. множество $\{J' = (J'_1, \dots, J'_n) : J' \in S(t_+, b^{[j]}(t_+, t, x, J, u_j)), J'_j \leq J_j\}$ непусто. Если $t \in [0, T]$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^{nd}$, то обозначим через $\text{es}_i(t, x, z)$ управление u_i^* такое, что

$$\max_{u_i \in P_i} \langle z_i - x_i, f_i(t, x, u_i) \rangle = \langle z_i - x_i, f_i(t, x, u_i^*) \rangle.$$

Выберем $t_* \in [0, T]$, $x^*, y^* \in \mathbb{R}^{nd}$, $u_i^* = \text{es}_i(t_*, x^*, z^*)$. Пусть $x(\cdot)$ — решение задачи Коши

$$\dot{x}(t) \in \text{co}\{f(t, x(t), u_1, \dots, u_{i-1}, u_i^*, u_{i+1}, \dots, u_n) : u_j \in P_j, j \neq i\}, \quad x(t_*) = x^*,$$

и пусть $y(\cdot)$ — решение задачи Коши

$$\dot{y}(t) = \text{co}\{f(t, x(t), v_1, \dots, v_n) : v_j \in P_j\}, \quad y(t_*) = y^*.$$

Лемма 1. Для всех $t_+ > t$ справедлива оценка

$$\|y_i(t_+) - x_i(t_+)\|^2 \leq \|y^* - x^*\|^2(1 + \beta_i(t_+ - t_*)) + \varphi(t_+ - t_*)(t_+ - t_*).$$

Эта лемма является вариантом метода экстремального сдвига Н. Н. Красовского и А. И. Субботина [1].

Определим стратегии с поводырем U_i^* . Далее мы покажем, что набор стратегий $\bar{U}^* = (U_1^*, \dots, U_n^*)$ является равновесным по Нэшу.

Состояние поводыря игрока i — вектор, состоящий из следующих компонент: τ_i — предыдущий момент коррекции управления, $Y_i \in \mathbb{R}^n$ — вектор ожидаемых выигрышей, $w_i^{(c)} \in \mathbb{R}^{nd}$ — оценка положения системы в случае, когда все игроки используют равновесные по Нэшу стратегии, при $j \neq i$ число $d_{i,j} \in \mathbb{R}$ — накопленная ошибка к моменту τ_i по j -й координате, а

$w_i^{[j]} \in \mathbb{R}^{nd}$ — оценка положения системы в случае, если игрок j отклоняется. Далее мы обозначаем положение поводыря как вектор $w_i = (\tau_i, Y_i, w_i^{(c)}, (d_{i,j}, w_i^{[j]})_{j \neq i})$.

Напомним, что стратегия с поводырем U_i^* — это тройка

$$(u_i(t, x, w_i), \psi_i(t_+, t, x, w_i), \chi_i(t^0, x^0)).$$

Определим эти функции.

Значение функции $\chi_i(t^0, x^0)$ положим равным вектору w_i^0 со следующими компонентами: $\tau_i^0 = 0, Y_i^0 = \hat{J}(t^0, x^0), d_{i,j}^0 = 0, w_i^{(c),0} = w_i^{[j],0} = x$.

Пусть $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{dn}$ — некоторая позиция, пусть также поводырь i -го игрока — это вектор $w_i = (\tau_i, Y_i, w_i^{(c)}, (d_{i,j}, w_i^{[j]})_{j \neq i})$. Выберем опорную точку z_i по правилу: если для всех $l \neq i$

$$\|w_{i,l}^{(c)} - x_l\|^2 \leq d_{i,l}(1 + \beta_l(t - \tau_i)) + \varphi_l(t - \tau_i)(t - \tau_i),$$

то $z_i \triangleq w_i^{(c)}$; в противном случае $z_i \triangleq w_i^{[j]}$, здесь j — минимальный номер l такой, что

$$\|w_{i,l}^{(c)} - x_l\|^2 > d_{i,l}(1 + \beta_l(t - \tau_i)) + \varphi_l(t - \tau_i)(t - \tau_i).$$

Если $z_i = w_i^{(c)}$, то $Y_i^+ \triangleq Y_i$, если $z_i = w_i^{[j]}$ то пусть $Y_i^+ = (Y_{i,1}^+, \dots, Y_{i,n}^+)$ — элемент множества $S(t, w_i^{[j]})$ такой, что

$$Y_{i,j}^+ = \min\{J_j : J = (J_1, \dots, J_n) \in S(t, w_i^{[j]})\}.$$

Пусть $u_i^* \triangleq \text{es}_i(t, x, z_i)$ и $v_i^* \triangleq \text{es}_i(t, z_i, x)$.

Положим $u_i(t, x, w_i) \triangleq u_i^*$. Далее, $\psi_i(t_+, t, x, w_i) \triangleq w_i^+, w_i^+ = (\tau_i^+, Y_i^+, w_i^{(c),+}, \{d_{i,l}^+, w_i^{[j],+}\}_{j \neq i})$. Здесь

- $\tau_i^+ = t$;
- $w_i^{(c),+} = b^{(c)}(t_+, t_+, t, z_i, Y^+)$;
- $d_{i,l}^+ = \|z_{i,l} - x_j\|^2$;
- $w_i^{[j],+} = b^{[j]}(t_+, t_+, t, z_i, Y^+, v_j^*)$.

Лемма 2. Пусть $z_1 = w_1^{(c)} = \dots = z_n = w_n^{(c)}$, и пусть x^+ — положение системы в момент t_+ . Если каждый игрок i на отрезке $[t, t_+]$ использует управление u_i^* , то $w_1^{(c),+} = \dots = w_n^{(c),+}$ и

$$\|w_{i,l}^{(c),+} - x_l^+\|^2 \leq d_{i,l}^+(1 + \beta_l(t_+ - \tau_i^+)) + \varphi_l(t_+ - \tau_i^+)(t_+ - \tau_i^+).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первая часть леммы следует из выбора $w_i^{(c),+}$, вторая часть — из леммы 1 и выбора управлений u_i^* . $\square$

Лемма 3. Пусть x^+ — положение системы в момент t_+ . Предположим, что все точки z_i для $i \neq j$ совпадают. Пусть игроки i при $i \neq j$ используют на отрезке $[t, t_+]$ управления u_i^* . Тогда

1. Все точки $w_i^{(c),+}$ совпадают для $i \neq j$.
2. Точки $w_i^{[j],+}$ совпадают для $i \neq j$.
3. Для всех i и $l \neq j$ $\|w_{i,l}^{(c),+} - x_l^+\|^2 \leq d_{i,l}^+(1 + \beta_l(t_+ - \tau_i^+)) + \varphi_i(t_+ - \tau_i^+)(t_+ - \tau_i^+)$.
4. Для всех i, l $\|w_{i,l}^{[j],+} - x_l^+\|^2 \leq d_{i,l}^+(1 + \beta_l(t_+ - \tau_i^+)) + \varphi_i(t_+ - \tau_i^+)(t_+ - \tau_i^+)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое и второе утверждения леммы вытекают из определения векторов $w_i^{(c),+}$ и $w_i^{[j],+}$.

Третье утверждение леммы следует из леммы 1, выбора u_i^* и определения $w_i^{(c),+}$.

Четвертое утверждение леммы для $l \neq j$ выводятся из леммы 1 и выбора управления u_i^* . В самом деле, если $l = j$, то имеем, что $w_{i,j}^{[j],+} = y_j^{[j]}(t_+)$, здесь

$$\dot{y}_j^{[j]}(t) = f_j(t, y_1^{[j]}, \dots, y_n^{[j]}, v_j^*).$$

Из леммы 1 и правила выбора v_j^* получаем, что $\|w_{i,l}^{[j]} - x_l^+\|^2 \leq d_{i,l}^+(1 + \beta_j(t_+ - \tau_i^+)) + \varphi_j(t_+ - \tau_i^+)(t_+ - \tau_i^+)$. $\square$

Также нам понадобится следующая оценка. Пусть $\Delta = \{t^k\}_{k=0}^r$ — разбиение отрезка $[t^0, T]$, и пусть $\{\gamma_j^k\}_{k=0}^r$ — набор чисел такой, что

$$\gamma_j^k \leq \gamma_j^{k-1}(1 + \beta_j(t_k - t^{k-1})) + \varphi_j(t^k - t^{k-1}) \cdot (t^k - t^{k-1}). \quad (3.3)$$

Тогда

$$\gamma_j^k \leq [\gamma_j^0 + (1 + (t^k - t^0))\varphi_j(d(\Delta))] \exp \beta_j(t^k - t^0). \quad (3.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Пусть $(t^0, x^0) \in G$ — начальная позиция.

Вначале предположим, что все игроки используют стратегии, определяемые набором $\bar{U}^* = (U_1^*, \dots, U_n^*)$. Мы докажем равенство

$$\hat{J}_j(t^0, x^0) = \liminf_{\delta \downarrow 0} \{\sigma_j(x[T, t^0, x^0, \bar{U}, \Delta]) : d(\Delta) \leq \delta\}. \quad (3.5)$$

Пусть $\Delta = \{t^k\}_{k=0}^m$ — разбиение отрезка $[t^0, T]$. Обозначим состояние системы в момент t^k через $x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$. Далее, пусть $w_i^k = (\tau_i^k, Y_i^k, w_i^{(c),k}, (d_{i,j}^k, w_i^{[j],k})_{j \neq i})$ — положение поводыря i -го игрока. Пусть z_i^k — сопутствующая точка в момент t^k для игрока i , $z_i^k = (z_{1,i}^k, \dots, z_{n,i}^k)$.

По построению функции χ_i имеем, что $z_1^0 = w_1^{(c),0} = \dots = z_n^0 = w_n^{(c),0} = x^0$.

Используя лемму 2 последовательно, мы получаем

- 1) $w_i^{(c),k} = z_i^k, z_1^k = \dots = z_n^k$;
- 2) $\|z_{j,i}^k - x_i^k\|^2 \leq d_{j,i}^k(1 + \beta_j(t^k - \tau_i^k)) + \varphi_j(t^k - t^{k-1})(t^k - t^{k-1})$.

Используя оценку (3.4), получаем неравенство

$$\|z_{j,i}^m - x_j^m\|^2 \leq (t^m - t^0)\varphi_j(d(\Delta)) \exp[\beta_j(t^m - t^0)].$$

Обозначим

$$\kappa(\delta) = T^{1/2} \left[\varphi_1(\delta) \exp(\beta_1 T) + \dots + \varphi_n(\delta) \exp(\beta_n T) \right]^{1/2}.$$

Отметим, что $\kappa(\delta) \rightarrow 0$, при $\delta \rightarrow 0$. Имеем, что $\|z_i^m - x^m\| \leq \kappa(d(\Delta))$. Далее, пусть ϕ_j — модуль непрерывности функции σ_j . Имеем, что

$$|\sigma_j(z_i^m) - \sigma_j(x^m)| \leq \phi_j(\kappa(d(\Delta))). \quad (3.6)$$

Выбор $w_i^{(c),k}$ дает вложение $\hat{J}(t^0, x^0) = Y_i^k \in S(t^k, w_i^{(c),k})$. Из условия 1 теоремы 1 следует, что $\hat{J}_j = \sigma_j(t^n, w_i^{(c),m})$. Также $w_i^{(c),m} = z_i^m$. Отсюда и из (3.6) следует равенство (3.5).

Рассмотрим теперь случай, когда игрок j отклоняется. В этом случае мы докажем неравенство

$$\hat{J}_j(t^0, x^0) \leq \limsup_{\delta \downarrow 0} \left\{ \sigma_j(x[T, t^0, x^0, \bar{U}|u_j, \Delta]) : d(\Delta) \leq \delta, u_j \in \mathcal{U}_j \right\}. \quad (3.7)$$

Пусть $\Delta = \{t^k\}_{k=0}^m$ — разбиение отрезка $[t^0, T]$, и пусть $u_j \in \mathcal{U}_j$ — некоторое управление игрока j . Обозначим положение системы в момент t^k через x^k , положение поводыря i -го игрока через $w_i^k = (\tau_i^k, Y_i^k, w_i^{(c),k}, (d_{i,l}^k, w_i^{[l],k})_{l \neq i})$.

Используя лемму 3 последовательно, мы получаем, что для каждого $k = \overline{0, m}$ справедливы следующие утверждения:

1. Для $i \neq j$ выполнено одно из равенств: $z_i^k = w_i^{(c),k}$ или $z_i^k = w_i^{[j],k}$.
2. Для каждого k опорные точки z_i^k равны для всех $i \neq j$.
3. Для всех $i \neq j$ $\|z_{l,i}^k - x_l^k\|^2 \leq d_{i,l}^k(1 + \beta_l(t^k - \tau_i^k)) + \varphi_l(t^k - t^{k-1})(t^k - t^{k-1})$.

Отсюда

$$\|z_i^m - x^m\| \leq \kappa(d(\Delta)). \quad (3.8)$$

Пусть Ξ_i^k — вектор Y_i^+ при $t = \tau_k$, $t_+ = t^k$, $x = x^k$. Имеем, что $\Xi_{i,j}^k \leq Y_{i,j}^k$, $\Xi_i^k \in S(t^k, z_i^k)$ и для каждого k $\Xi_i^k = \Xi_l^i$, $i, l \neq j$.

Из условия 1 теоремы следует, что $\Xi_{i,j}^m = \sigma_j(z_i^m)$. Поэтому имеем, что

$$\hat{J}_j(t^0, x^0) = Y_{i,j}^0 \geq \Xi_{i,j}^0 = Y_{i,j}^1 \geq \Xi_i^1 \geq \dots Y_{i,j}^m \geq \Xi_{i,j}^m.$$

Отсюда и из (3.8) получаем, что

$$\hat{J}_j(t^0, x^0) \geq \sigma_j(x^{[j]}[T, t^0, x^0, \bar{U}|u_j, \Delta]) + \phi_j(\kappa(d(\Delta))).$$

Переходя к пределу при $d(\Delta)$, стремящемся к 0, заключаем, что выполнено неравенство (3.7).

Заключение теоремы следует из (3.5) и (3.7). $\square$

4. Существование многозначной функции цены

В настоящем разделе мы докажем существование многозначной функции, удовлетворяющей условиям теоремы 1. Для этого рассмотрим вспомогательную динамическую систему с дискретным временем и докажем существование многозначного отображения, удовлетворяющего некоторым условиям типа стабильности. Эта система получается дискретизацией исходной системы с шагом δ . Далее перейдем к пределу при $\delta \rightarrow 0$ и покажем существование многозначного отображения, удовлетворяющего условиям типа стабильности, в случае непрерывного времени.

4.1. Динамическая система с дискретным временем

Пусть N — некоторое натуральное число, и пусть $\delta^N \triangleq T/N$ — шаг по времени. Мы разбиваем отрезок $[0, T]$ равномерно и получаем разбиение $\Delta^N \triangleq \{t^{k,N}\}_{k=0}^N$ при $t^{k,N} = k\delta^N$.

Рассмотрим управляемую систему с дискретным временем

$$\xi^N(t^{k+1,N}) = \xi^N(t^{k,N}) + f^N(t^k, \xi^N(t^{k,N}), u^{k,N}). \quad (4.1)$$

Здесь $\xi^N(t^{k,N}) \in \mathbb{R}^{nd}$, $u^{k,N} = (u_1^{k,N}, \dots, u_n^{k,N}) \in P_1 \times \dots \times P_n$,

$$f^N(t^k, \xi, u) \triangleq \delta^N f(t^k, \xi, u).$$

Отметим, что система (4.1) получается из системы (2.2) при дискретизации с равномерным шагом и замораживании управления игроков на каждом шаге. Этот метод является аналогом метода Эйлера в случае управляемой системы.

Обозначим

$$\mathcal{U}_j^N \triangleq \left\{ u_j : [0, T] \rightarrow P_j : u_j(t) = u_j^{k,N} \in P \text{ при } t \in [t^{k,N}, t^{k+1,N}) \right\},$$

$$\mathcal{U}^N \triangleq \left\{ u : [0, T] \rightarrow P_1 \times \dots \times P_n : u(t) = u^{k,N} \in P \text{ при } t \in [t^{k,N}, t^{k+1,N}) \right\}.$$

Имеем, что $\mathcal{U}^N = \mathcal{U}_1^N \times \dots \times \mathcal{U}_n^N$.

Для $t_* \in \Delta^N$, $\xi^* \in \mathbb{R}^{nd}$ и управления $u \in \mathcal{U}^N$ обозначим через $\xi^N(\cdot, t_*, \xi^*, u, v): (\Delta^N \cap [t_*, T]) \rightarrow \mathbb{R}^n$ решение начальной задачи (4.1), $\xi^N(t_*) = \xi^*$.

Вначале оценим норму $\|\xi^N(t_+, t_*, \xi^*, u) - x(t_+, t_*, x^*, u)\|$.

Пусть $G \subset [0, T] \times \mathbb{R}^{dn}$ — компакт начальных позиций. Существует компакт $E' \subset \mathbb{R}^{nd}$ такой, что $x(t, t_*, x^*, u) \in E'$, и $\xi^N(t, t_*, x^*, u) \in E'$ при всех натуральных N , $(t_*, x^*) \in G$, $t, t_* \in \Delta^N$, $u \in \mathcal{U}^N$. Положим

$$K' \triangleq \max \left\{ \|f(t, x, u)\| : t \in [0, T], x \in E', u \in P_1 \times \dots \times P_n \right\}.$$

Обозначим через L' константу Липшица f на множестве $[0, T] \times E' \times P \times Q$: при всех $t \in [0, T]$, $x', x'' \in E'$, $u \in P$, $v \in Q$ имеем $\|f(t, x', u) - f(t, x'', u)\| \leq L'\|x' - x''\|$. Далее, примем

$$\varphi'(\delta) \triangleq \sup \left\{ \|f(t', x', u) - f(t'', x'', u)\| : t', t'' \in [0, T], x', x'' \in E', \right.$$

$$\left. |t' - t''| \leq \delta, \|x' - x''\| \leq K'\delta, u \in P \right\}.$$

Лемма 4. Если $t_*, t_+ \in \Delta^N$, $t_+ \geq t_*$, $(t_*, x^*), (t_*, \xi^*) \in G$, $u \in \mathcal{U}^N$, то

$$\|x(t_+, t_*, x^*, u) - \xi^N(t_+, t_*, \xi^*, u)\| \leq \|x_* - \xi_*\| \exp(2L'(t_+ - t_*)) + \varphi'(\delta^N) \exp(L'(t_+ - t_*)). \quad (4.2)$$

Доказательство. Пусть m и r — натуральные числа такие, что $t_* = t^{m,N}$, $t_+ = t^{r,N}$. Обозначим $x(\cdot) \triangleq x(\cdot, t_*, x_*, u, v)$, $x^k \triangleq x(t^{k,N}, t_*, x_*, u, v)$, $\xi^k \triangleq \xi^N(t^{k,N}, t_*, \xi_*, u, v)$. Имеем, что

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x_k + \int_{t^{k,N}}^{t^{k+1,N}} f(t, x(t), u^k) dt \\ &= x^k + \delta^N f(t^{k,N}, x^k, u^k) + \int_{t^{k,N}}^{t^{k+1,N}} [f(t, x(t), u^k) - f(t^{k,N}, x^k, u^k)] dt. \end{aligned}$$

Здесь u^k есть значение u на $[t^{k,N}, t^{k+1,N})$.

Далее,

$$\|x(t) - x^k\| \leq K'(t - t^{k,N}), \quad t \in [t^{k,N}, t^{k+1,N}].$$

Следовательно, выполнено неравенство

$$\int_{t^{k,N}}^{t^{k+1,N}} [f(t, x(t), u^k) - f(t^{k,N}, x^k, u^k)] dt \leq \delta \varphi'(\delta).$$

Отсюда

$$\|x^{k+1} - x^k - \delta^N f(t^{k,N}, x^k, u^k)\| \leq \delta \varphi'(\delta). \quad (4.3)$$

Далее, имеем

$$x^k + \delta^N f(t^{k,N}, x^k, u^k) - \xi^{k+1} = x^k - \xi^k + \delta^N [f(t^{k,N}, x^k, u^k) - f(t^{k,N}, \xi^k, u^k)].$$

Следовательно,

$$\|x^k + \delta^N f(t^{k,N}, x^k, u^k) - \xi^{k+1}\| \leq \|x^k - \xi^k\| + \delta^N L' \|x^k - \xi^k\|.$$

Из этого неравенства и оценки (4.3) влекут, что

$$\|x^{k+1} - \xi^{k+1}\| \leq \|x^k - \xi^k\| + \delta^N L' \|x^k - \xi^k\| + \delta^N \varphi(\delta^N).$$

Применяя последнее неравенство, последовательно получаем неравенство (4.2). $\square$

Докажем существование многозначного отображения, удовлетворяющего условиям, аналогичным условиям теоремы 1, в случае дискретного времени.

Теорема 2. Для каждого натурального числа N существует полунепрерывное сверху многозначное отображение $Z^N: \Delta^N \times \mathbb{R}^{nd} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $Z^N(T, \xi) = \{(\sigma_1(\xi), \dots, \sigma_n(\xi))\}$.
2. Для всех $(t_*, \xi^*) \in \Delta^N \times \mathbb{R}^{nd}$, $j \in \overline{1, n}$, $u_j \in P_j$, $Y \in Z^N(t_*, \xi^*)$ и $t_+ \in \Delta^N$, $t_+ > t_*$, существуют управления $u_i \in \mathcal{U}_i^N$, $i \neq j$, и вектор $Y' \in Z^N(t_+, \xi^N(t_+, t_*, \xi^*, u_1, \dots, u_n))$ такие, что $Y_j \geq Y'_j$.
3. Для всех $(t_*, \xi^*) \in \Delta^N \times \mathbb{R}^{nd}$, $Y \in Z^N(t_*, \xi^*)$ и $t_+ \in \Delta^N$, $t_+ > t_*$, существует управление $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{U}^N$ такое, что $Y \in Z^N(t_+, \xi^N(t_+, t_*, \xi^*, u, v))$.

Доказательство. При доказательстве мы фиксируем число N и будем опускать верхний индекс N . Обозначим

$$f^k(z, u) \triangleq \delta f(t^k, z, u).$$

Доказательство проводится обратной индукцией по k . При $k = N$ положим $Z(t^N, z) \triangleq \{\sigma_1(z), \dots, \sigma_n(z)\}$.

Пусть теперь $k \in \overline{0, N-1}$. Предположим, что значения $Z(t^{k+1}, z), \dots, Z(t^N, z)$ построены для всех $z \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, мы предполагаем, что $Z(t^{k+1}, \cdot), \dots, Z(t^N, \cdot)$ полунепрерывны сверху по включению. Для $j = \overline{1, n}$ определим

$$\varsigma_j^{k+1}(z) \triangleq \min\{Y_j : Y = (Y_1, \dots, Y_n) \in Z(t^{k+1}, z)\}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Из полунепрерывности по включению многозначного отображения $Z(t^{k+1}, \cdot)$ следует, что функции ς_{k+1}^i полунепрерывны снизу.

Положим

$$\begin{aligned} W^k(z) &\triangleq \bigcup_{u_i \in P_i, i=\overline{1, n}} Z(t^{k+1}, \xi(t^{k+1}, t^k, z, u_1, \dots, u_n)), \\ \varrho_i^k(z) &\triangleq \max_{u_j \in P_j} \min_{u_i \in P_i, i \neq j} \varsigma_j^{k+1}(\xi(t^{k+1}, t^k, z, u_1, \dots, u_n)), \end{aligned} \quad (4.4)$$

Многозначное отображение W^k полунепрерывно сверху по включению. Действительно, пусть $z^l \rightarrow z^*$ и пусть векторы $Y^l \in W^k(z^l)$ таковы, что $Y^l \rightarrow Y^*$. Имеем, что $Y^l \in Z(t^{k+1}, \xi(t^{k+1}, t^k, z^l, u_1^l, \dots, u_n^l))$ для некоторого $u_i^l \in P_i$. Без ограничения общности можно считать, что $(u_1^l, \dots, u_n^l) \rightarrow (u_1^*, \dots, u_n^*)$. Используя непрерывность функции f^k мы получаем, что $\xi(t^{k+1}, t^k, z^l, u_1^l, \dots, u_n^l) = z^l + f^k(z^l, u_1^l, \dots, u_n^l) \rightarrow \xi(t^{k+1}, t^k, z^*, u_1^*, \dots, u_n^*)$, при $l \rightarrow \infty$. Полунепрерывность сверху многозначной функции $Z(t^{k+1}, \cdot)$ влечет вложение $Y^* \in Z(t^{k+1}, \xi(t^{k+1}, t^k, z^*, u_1^*, \dots, u_n^*)) \subset W^k(z^*)$.

Покажем, что функции ϱ_k^i полунепрерывны снизу. Рассмотрим лишь случай $i = 1$. Для заданного управления $u_1 \in P_1$ рассмотрим функцию

$$z \mapsto \min_{u_i \in P_i, i \neq 1} \varsigma_1^{k+1}(\xi(t^{k+1}, t^k, z, u_1, \dots, u_n)).$$

Мы докажем, что эта функция полунепрерывна снизу, т. е. для любого z^* выполнено неравенство

$$\liminf_{z \rightarrow z^*} \min_{u_i \in P_i, i \neq 1} \varsigma_1^{k+1}(\xi(t^{k+1}, t^k, z, u_1, \dots, u_n)) \geq \min_{u_i \in P_i, i \neq 1} \varsigma_1^{k+1}(\xi(t^{k+1}, t^k, z^*, u_1, \dots, u_n)). \quad (4.5)$$

Пусть $\{z^l\}_{l=1}^\infty$ — минимизирующая последовательность

$$\liminf_{z \rightarrow z^*} \min_{u_i \in P_i, i \neq 1} \varsigma_1^{k+1}(\xi(t^{k+1}, t^k, z, u_1, \dots, u_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \min_{u_i \in P_i, i \neq 1} \varsigma_1^{k+1}(\xi(t^{k+1}, t^k, z^l, u_1, \dots, u_n)).$$

Пусть $u_i^l \in P_i$, $i \neq 1$ удовлетворяют условию

$$\varsigma_1^{k+1}(\xi(t^{k+1}, t^k, z^l, u_1, u_2^l, \dots, u_n^l)) = \min_{u_i \in P_i, i \neq 1} \varsigma_1^{k+1}(\xi(t^{k+1}, t^k, z^l, u_1, u_2, \dots, u_n)).$$

Отсюда заключаем, что

$$\liminf_{z \rightarrow z^*} \min_{u_i \in P_i, i \neq 1} \varsigma_1^{k+1}(\xi(t^{k+1}, t^k, z^l, u_1, \dots, u_n)) = \lim_{l \rightarrow \infty} \varsigma_1^{k+1}(\xi(t^{k+1}, t^k, z^l, u_1, u_2^l, \dots, u_n^l)). \quad (4.6)$$

Мы можем предполагать без потери общности, что для каждого $i = \overline{2, n}$ последовательность $\{u_i^l\}$ сходится к управлению $u_i^* \in P_i$. Из непрерывности функции $\xi(t^{k+1}, t^k, \cdot, u_1, \cdot, \dots, \cdot)$ и полунепрерывности снизу функции ς_1^{k+1} получаем, что

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} \varsigma_1^{k+1}(\xi(t^{k+1}, t^k, z^l, u_1, u_2^l, \dots, u_n^l)) &\geq \varsigma_1^{k+1}(\xi(t^{k+1}, t^k, z^*, u_1, u_2^*, \dots, u_n^*)) \\ &\geq \min_{u_i \in P_i, i \neq 1} \varsigma_1^{k+1}(\xi(t^{k+1}, t^k, z^*, u_1, u_2, \dots, u_n)). \end{aligned}$$

Это неравенство и неравенство (4.6) влекут неравенство (4.5).

Поскольку функция $z \mapsto \min_{u_i \in P_i, i \neq 1} \varsigma_1^{k+1}(\xi(t^{k+1}, t^k, z^*, u_1, u_2, \dots, u_n))$ полунепрерывна снизу для каждого $u \in P$, функция

$$\varrho_1^k(z) = \max_{u_1 \in P_1} \min_{u_i \in P_i, i \neq 1} \varsigma_1^{k+1}(\xi(t^{k+1}, t^k, z^*, u_1, u_2, \dots, u_n))$$

также полунепрерывна снизу.

Положим

$$Z(t^k, z) \triangleq \{(Y_1, Y_2) \in W^k(z) : Y_i \geq \varrho_i^k(z), \quad i = 1, 2\}. \quad (4.7)$$

Вначале мы покажем непустоту этого множества. Пусть $z \in \mathbb{R}^n$. Пусть также для каждого j u_j^* максимизирует правую часть (4.4). Выберем $Y = (Y_1, \dots, Y_n) \in Z(t^{k+1}, \xi(t^{k+1}, t^k, z, u_1^*, \dots, u_n^*))$. Имеем, что $Y \in W_k(z)$. Далее,

$$\varrho_i^k(z) \leq \varsigma_i^{k+1}(\xi(t^{k+1}, t^k, z, u_1^*, \dots, u_n^*)) \leq Y_i.$$

Откуда $Y = (Y_1, \dots, Y_n) \in Z(t^k, z)$.

Полунепрерывность по включению отображения $Z(t^k, \cdot)$ следует из (4.7), полунепрерывности отображения W^k и полунепрерывности снизу $\varrho_i^k(z)$.

Покажем, что многозначное отображение Z удовлетворяет условиям 1–3 теоремы.

Отметим, что условия 1 и 3 выполнены по построению. Докажем условие 2. Мы рассмотрим лишь случай для $j = 1$. Пусть $(t_*, \xi^*) \in \Delta^N \times \mathbb{R}^{nd}$, $t_+ \in \Delta^N$, $t_+ > t_*$, $u_j^* \in P_j$, $Y = (Y_1, \dots, Y_n) \in Z(t_*, \xi^*)$. Достаточно рассмотреть случай $t_* = t^k$, $t_+ = t^{k+1}$. По построению отображения Z имеем, что $Y_1 \geq \varrho_1^1(\xi^*)$. Из определения функции ϱ_1^1 (см. (4.4)) следует, что

$$Y_1 \geq \max_{u \in P} \min_{u_i \in P_i, i \neq 1} \varsigma_1^{k+1}(\xi(t^{k+1}, t^k, \xi_*, u_1, u_2, \dots, u_n)) \geq \min_{u_i \in P_i, i \neq 1} \varsigma_1^{k+1}(\xi(t^{k+1}, t^k, \xi_*, u_1^*, u_2, \dots, u_n)).$$

Пусть $u_i^* \in P_i$, $i = \overline{2, n}$ — управления такие, что

$$\min_{u_i \in P_i, i \neq 1} \varsigma_1^{k+1}(\xi(t^{k+1}, t^k, \xi_*, u_1^*, u_2, \dots, u_n)) = \varsigma_1^{k+1}(\xi(t^{k+1}, t^k, \xi_*, u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*)).$$

Из определения функции ς_1^{k+1} получаем, что существует вектор $Y' = (Y'_1, \dots, Y'_n) \in Z(t^{k+1}, \xi(t^{k+1}, t^k, \xi_*, u_1^*, \dots, u_n^*))$ такой, что $Y'_1 = \varsigma_1^{k+1}(\xi(t^{k+1}, t^k, \xi_*, u_1^*, \dots, u_n^*))$. Следовательно, $Y_1 \geq Y'_1$. Таким образом, условие 2 при $j = 1$ выполнено. $\square$

4.2. Системы с непрерывным временем

Теорема 3. *Существует непустозначное многозначное отображение $S: [0, T] \times \mathbb{R}^{dn} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее условиям теоремы 1.*

Доказательство теоремы 3 дается ниже.

Прежде всего, для каждого N определим многозначное отображение $S^N: [0, T] \times \mathbb{R}^{dn} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ по правилу

$$S^N(t, x) \triangleq \begin{cases} Z^N(t^{k,N}, x), & t \in (t^{k-1,N}, t^{k,N}), \quad k = \overline{1, N} \\ Z^N(t^{k,N}, x) \cup Z^N(t^{k+1,N}, x), & t = t^{k,N}, \quad k = \overline{0, N-1} \\ Z^N(t^{N,N}, x), & t = T. \end{cases} \quad (4.8)$$

График многозначного отображения S^N замкнут.

Обозначим $B(\nu) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^{nd}: \|x\| \leq \nu\}$. Для произвольного многозначного $\Sigma: [0, T] \times \mathbb{R}^{dn} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ положим

$$\text{Gr}_\nu \Sigma \triangleq \{(t, x, Y): \|x\| \leq \nu, Y \in \Sigma(t, x)\}.$$

Множества $\text{Gr}_\nu S^N$ компактны. В самом деле, примем

$$M_{i,\nu} \triangleq \max\{|\sigma_i(x(T, t_*, x^*, u, v))|: t_* \in [0, T], \|x^*\| \leq \nu, u_i \in \mathcal{U}_i^N\} < \infty.$$

Имеем, что $\text{Gr}_\nu S^N \subset [0, T] \times B(\nu) \times [-M_{1,\nu}, M_{1,\nu}] \times \dots \times [-M_{n,\nu}, M_{n,\nu}]$.

Рассмотрим расстояние по Хаусдорфу между компактными множествами $A, B \subset [0, T] \times \mathbb{R}^{dn} \times \mathbb{R}^n$

$$h(A, B) \triangleq \max \left\{ \max_{(t,x,Y) \in A} d((t, x, Y), B), \max_{(t,x,Y) \in B} d((t, x, Y), A) \right\}.$$

Здесь $d((t, x, Y), A)$ — расстояние от точки (t, x, Y) до множества A , порожденное нормой

$$\|(t, x, Y)\| = |t| + \|x\| + \|Y\|.$$

Поскольку для любого ν множество $[0, T] \times B(\nu+1) \times [-M_{1,\nu}, M_{1,\nu}] \times \dots \times [-M_{n,\nu}, M_{n,\nu}]$ компактно, используя [18, Theorem 4.18], мы приходим к выводу, что можно извлечь сходящуюся подпоследовательность из последовательности $\{\text{Gr}_{\nu+1} S^N\}_{N=1}^\infty$.

Используя диагональный процесс, мы можем построить подпоследовательность $\{N_l\}$ такую, что для любого ν существует предел $\lim_{l \rightarrow \infty} \text{Gr}_{\nu+1} S^{N_l} = R_\nu$. Можно выбрать последовательность $\{N_l\}$, удовлетворяющую свойству

$$h(\text{Gr}_{\nu+1} S^{N_l}, R_\nu) \leq 2^{-l} \text{ для } l \geq \nu.$$

Обозначим $\tilde{S}_l \triangleq S^{N_l}$.

Лемма 5. Пусть $Y^m \in \tilde{S}_{l_m}(t^m, x^m)$, $\|x^m\| \leq \nu + 1$, $(t^m, x^m) \rightarrow (t^*, x^*)$, $Y^m \rightarrow Y^*$ при $m \rightarrow \infty$. Тогда $(t^*, x^*, Y^*) \in R_\nu$.

Доказательство. Рассмотрим множество $R_\nu \cup \{(t^*, x^*, Y^*)\}$. Это множество замкнуто. Имеет место свойство

$$h(\text{Gr}_{\nu+1} \tilde{S}_{l_m}, R_\nu \cup \{(t^*, x^*, Y^*)\}) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \quad (4.9)$$

В самом деле, $d((t, x, Y), R_\nu \cup \{(t^*, x^*, Y^*)\}) \leq d((t, x, Y), R_\nu)$ для всех $(t, x, Y) \in \text{Gr}_{\nu+1} \tilde{S}_{l_m}$. Отсюда

$$\max_{(t,x,Y) \in \text{Gr}_{\nu+1} \tilde{S}_{l_m}} d((t, x, Y), R_\nu \cup \{(t^*, x^*, Y^*)\}) \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty. \quad (4.10)$$

Далее, имеет место следующая сходимость:

$$\max_{(t,x,Y) \in R_\nu \cup \{(t^*, x^*, Y^*)\}} \{d((t, x, Y), \text{Gr}_{\nu+1} \tilde{S}_{l_m})\} \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty.$$

Это и (4.10) дает (4.9).

Формула (4.9) означает, что $R_\nu \cup \{(t^*, x^*, Y^*)\} = \lim_{m \rightarrow \infty} \text{Gr}_{\nu+1} \tilde{S}_{l_m} = R_\nu$. Это свойство завершает доказательство. $\square$

Лемма 6. Для $r > \nu$ выполнено равенство

$$R_r \cap ([0, T] \times B(\nu) \times \mathbb{R}^n) = R_\nu \cap ([0, T] \times B(\nu) \times \mathbb{R}^n).$$

Доказательство. Пусть $(t, x, Y) \in R_r$, $\|x\| \leq \nu$ и $l \geq r$. Существует тройка $(\theta^l, y^l, \zeta^l) \in \text{Gr}_{r+1}\tilde{S}_l$ такая, что

$$|t - \theta^l| + \|x - y^l\| + \|Y - \zeta^l\| = d((t, x, Y), \text{Gr}_{r+1}\tilde{S}_l) \leq 2^{-l}. \quad (4.11)$$

Следовательно, $\|x - y^l\| \leq d((t, x, Y), \text{Gr}_{r+1}\tilde{S}_l) \leq 2^{-l}$. Имеем, что $\|y^l\| \leq \|x\| + 2^{-l} \leq \nu + 1$. Таким образом, $(\theta^l, y^l, \zeta^l) \in \text{Gr}_{\nu+1}\tilde{S}_l$. Из формулы (4.11) и леммы 5 следует, что $(t, x, Y) \in R_\nu$. Поскольку тройка (t, x, Y) удовлетворяет свойству $\|x\| \leq \nu$, мы заключаем, что

$$R_r \cap ([0, T] \times B(\nu) \times \mathbb{R}^n) \subset R_\nu \cap ([0, T] \times B(\nu) \times \mathbb{R}^n).$$

Обратное включение доказывается аналогично. $\square$

Определим многозначное отображение $\bar{S}: [0, T] \times \mathbb{R}^{dn} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ следующим правилом: для $\|x\| \leq \nu$

$$\bar{S}(t, x) \triangleq \{Y: (t, x, Y) \in R_\nu\}.$$

Отметим, что это определение корректно в силу леммы 6. Имеем, что $\text{Gr}_\nu \bar{S} = R_\nu \cap ([t^0, T] \times B(\nu) \times \mathbb{R}^n)$.

Доказательство теоремы 3. Для этого достаточно доказать, что отображение $\bar{S}$ непустозначно и удовлетворяет условиям теоремы 1.

Вначале мы покажем, что множества $\bar{S}(t, x)$ непусты. Пусть ν таково, что $\|x\| < \nu$, и пусть $Y^l \in \tilde{S}_l(t, x)$. Поскольку $\tilde{S}_l(t, x) \subset [-M_{1,\nu}, M_{1,\nu}] \times \dots \times [-M_{n,\nu}, M_{n,\nu}]$, существует подпоследовательность $\{Y^{l_m}\}_{m=1}^\infty$ сходящаяся к Y^* . По лемме 5 мы получаем, что $Y^* \in \bar{S}(t, x)$.

Докажем теперь, что многозначное отображение $\bar{S}$ удовлетворяет условиям теоремы 1.

Начнем с условия 1. Пусть $x^* \in \mathbb{R}^{nd}$. Выберем ν так, чтобы выполнялись условия

- 1) $x(t, T, x_*, u) \in B(\nu)$ для всех $t \in [0, T]$, $u \in \mathcal{U}$;
- 2) все z такие, что $x_* = \xi^N(T, t, z, u)$ при некоторых N , $t \in \Delta^N$, $u \in \mathcal{U}^N$, лежат в $B(\nu)$.

Определим K^ν правилом

$$K^\nu = \max \{ \|f(t, x, u)\| : t \in [0, T], x \in B(\nu + 1), u \in P \}.$$

Пусть N — натуральное число, $t_* \in \Delta^N$ и $\xi_* \in B(\nu)$. По условиям 1 и 3 теоремы 2 имеем, что если $Y = (Y_1, \dots, Y_n) \in Z^N(t_*, \xi_*)$, то существует $u \in \mathcal{U}^N$ такое, что

$$Y_i = \sigma_i(\xi^N(T, t_*, \xi_*, u)). \quad (4.12)$$

Мы получаем оценку

$$\|\xi_* - \xi^N(T, t_*, \xi_*, u, v)\| \leq K^\nu(T - t_*). \quad (4.13)$$

Пусть $J \in \bar{S}(T, x)$. Это означает, что существует последовательность $\{(t^l, x^l, Y^l)\}_{l=1}^\infty$ такая, что $Y^l \in \tilde{S}_l(t^l, x^l) = S^{N_l}(t_j, x_j)$, $t^l \rightarrow T$, $x^l \rightarrow x$, $Y^l \rightarrow J$ при $l \rightarrow \infty$. Пусть момент $\theta^l \in \Delta^{N_l}$ таков, что $Y^l \in Z^{N_l}(\theta^l, x^l)$ и $t_l \in (\theta^l - \delta^N, \theta^l]$. Объединяя это, (4.12) и (4.13), мы заключаем, что для любого l существует $\hat{x}^l \in B(\nu)$ такое, что $\|x^l - \hat{x}^l\| \leq K^\nu(T - t^l)$ и $Y_i^l = \sigma_i(\hat{x}^l)$, $i = \overline{1, n}$. Имеем, что $\hat{x}^l \rightarrow x$ при $l \rightarrow \infty$. Из непрерывности функции σ_i мы получаем, что

$$J_i = \lim_{l \rightarrow \infty} Y_i^l = \lim_{l \rightarrow \infty} \sigma_i(\hat{x}^l) = \sigma_i(x).$$

Проверим выполнение условия 2. Мы рассмотрим лишь случай $j = 1$. Пусть $(t^*, x^*) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{dn}$, $J = (J_1, \dots, J_n) \in \bar{S}(t^*, x^*)$, $u_j \in P_j$, $t_+ \in [t^*, T]$. Покажем существование движения $y^{[1]}(\cdot) \in \text{Sol}^{[1]}(t_*, x_*, u)$ такого, что $J'_1 \leq J_1$ для некоторого вектора $(J'_1, \dots, J'_n) \in \bar{S}(t_+, y^2(t_+))$.

Существует последовательность $\{(t^l, x^l, Y^l)\}_{l=1}^\infty$ такая, что $Y^l \in \tilde{S}_l(t^l, x^l) = S^{N_l}(t^l, x^l)$ и $t^l \rightarrow t^*$, $x^l \rightarrow x^*$, $Y^l \rightarrow J$, при $l \rightarrow \infty$. Пусть θ^l — элемент Δ^{N_l} со свойствами: $Y^l \in Z^{N_l}(\theta^l, x^l)$ и $t^l \in (\theta^l - \delta^N, \theta^l]$. Далее, пусть τ^l — наименьший элемент Δ^{N_l} такой, что $t_+ \leq \tau^l$.

Согласно условию 2 теоремы 2 для каждого l существуют управления $u_i^l \in \mathcal{U}_i^{N_l}$, $i \neq 1$, и векторы $\hat{Y}^l = (\hat{Y}_1^l, \dots, \hat{Y}_n^l)$ такие, что $\hat{Y}^l \in Z^{N_l}(\tau^l, \xi^{N_l}(\tau^l, \theta^l, x^l, u_1, u_2^l, \dots, u_n^l)) \subset \tilde{S}_l(\tau^l, \xi^{N_l}(\tau^l, \theta^l, x^l, u_1, u_2^l, \dots, u_n^l))$ и $\hat{Y}_1^l \leq Y_1^l$. По лемме 4 мы имеем, что

$$\|x(\tau^l, \theta^l, x^l, u_1, u_2^l, \dots, u_n^l) - \xi^{N_l}(\tau^l, \theta^l, x^l, u_1, u_2^l, \dots, u_n^l)\| \leq \varphi'(\delta^{N_l}) \exp(L'T).$$

Можно извлечь подпоследовательность $\{l_m\}_{m=1}^\infty$ такую, что

$$\{x(\tau^{l_m}, \theta^{l_m}, x^{l_m}, u_1, u_2^{l_m}, \dots, u_n^{l_m})\}_{m=1}^\infty$$

сходится к движению $y^{[1]}(\cdot)$, а $\{Y^{l_m}\}$ сходится к вектору $J' = (J'_1, \dots, J'_n)$. Имеем, что $y^{[1]}(\cdot) \in \text{Sol}^{[1]}(t^*, x^*, u_1)$. Лемма 5 влечет вложение $J' \in \bar{S}(t_+, y^{[1]}(t_+))$. Также мы имеем, что $J'_1 \leq J_1$. Это свойство завершает доказательство условия 2.

Условие 3 доказывается аналогично. $\square$

5. Векторозначные функции цены

Предложение 1. Пусть векторозначная функция $c = (c_1, \dots, c_n): [0, T] \times \mathbb{R}^{dn} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $c_i(T, x) = \sigma_i(x)$ для $i = 1, \dots, n$.
2. Для всех $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{dn}$, $t_+ \in [t, T]$, $j \in \overline{1, n}$ и $u_j \in P_j$ существует движение $y^{[j]}(\cdot) \in \text{Sol}^{[j]}(t, x; u_j)$ такое, что $c_j(t_+, y^{[j]}(t_+)) \leq c_j(t, x)$.
3. Для всех $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{dn}$, $t_+ \in [t, T]$ существует движение $y^c(\cdot) \in \text{Sol}(t, x)$ такое, что $c(t_+, y^c(t_+)) = c(t, x)$.

Тогда для каждого компакта $G \subset [0, T] \times \mathbb{R}^{dn}$ существует равновесие в классе стратегий с поводырем на множестве G такое, что соответствующий равновесный по Нэшу выигрыш игрока i в позиции $(t^0, x^0) \in G$ равен $c(t^0, x^0)$.

Предложение следует из теоремы 1. Условия предложения 1 можно переписать в инфинитезимальной форме. Если $x = (x_1, \dots, x_n)$, $s = (s_1, \dots, s_n)$ то определим функцию $H_i(t, x, s)$ правилом

$$H_i(t, x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_n) = \max_{u_i \in P_i} \min_{u_j \in P_j, j \neq i} \sum_{k=1}^n \langle s_k, f_k(t, x, u_k) \rangle.$$

Далее, пусть $\mathcal{F}(t, x) \triangleq \text{co}\{f(t, x, u_1, \dots, u_n): u_i \in P_i, i = \overline{1, n}\}$.

Определим модуль-производную функции c в позиции $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{dn}$ в направлении $w \in \mathbb{R}^{dn}$ по правилу

$$d_{\text{abs}} c(t, x; w) \triangleq \liminf_{\delta \downarrow 0, w' \rightarrow w} \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^n |c_i(t + \delta, x + \delta w) - c_i(t, x)|.$$

Второе условие предложения 1 можно переписать следующим образом: c_i — минимаксное (вязкостное) верхнее решение уравнения

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + H_i\left(t, x_1, \dots, x_n, \frac{\partial c_i}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial c_i}{\partial x_n}\right) = 0. \quad (5.1)$$

Третье условие предложения 1 эквивалентно следующему:

$$\inf_{w \in \mathcal{F}(t, x)} d_{\text{abs}} c(t, x, w) = 0. \quad (5.2)$$

Отмеченные эквивалентности доказаны в [19, следствие 2].

Сравним равновесия по Нэшу, которые получаются при использовании предложенной выше техники, равновесий по Нэшу, определяемых системами уравнений типа Гамильтона — Якоби [10].

Для $t \in [0, T]$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{nd}$, $p_i \in \mathbb{R}^d$ пусть $u_i^*(t, x, p)$ удовлетворяет условию

$$u_i^*(t, x, p_i) \in \operatorname{Argmax}\{\langle p_i, f_i(t, x, u_i) \rangle : u_i \in P_i\}.$$

Если $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^{nd}$, $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{nd}$, определим гамильтониан правилом

$$\mathcal{H}_i(t, x, s, p) = \sum_{i=1}^n \langle s_i, f_i(t, x, u_i(t, x, p_i)) \rangle.$$

В рассматриваемом случае система уравнений Гамильтона — Якоби (см. [10]) принимает вид

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} + \mathcal{H}_i\left(t, x_1, \dots, x_n, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}\right) = 0, \quad \varphi_i(T, x) = \sigma_i(x), \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.3)$$

Предложение 2. Если $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ — решение системы (5.3), то оно удовлетворяет условиям предложения 1.

Доказательство этого предложения следует из [19, предложение 2].

Покажем теперь, что равновесный по Нэшу выигрыш, определяемый предложением 1, может быть больше выигрыша, определяемого системой уравнений Гамильтона — Якоби. Для этого рассмотрим следующую дифференциальную игру. Пусть динамика игры определяется уравнениями $\dot{x}_i = u_i$, $u_i \in [-1, 1]$, $i = 1, 2$. Предположим, что выигрыш игрока 1 равен $\sigma_1(x_1, x_2) = x_2 - \varepsilon x_1$, в то время как выигрыш игрока 2 определяется функцией $\sigma_2(x_1, x_2) = x_1 - \varepsilon x_2$. Система уравнений типа Гамильтона — Якоби для данной дифференциальной игры следующая:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \right| + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \operatorname{sign}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\right) &= 0, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \right| + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \operatorname{sign}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Краевые условия: $\varphi_1(1, x_1, x_2) = x_2 - \varepsilon x_1$, $\varphi_2(1, x_1, x_2) = x_1 - \varepsilon x_2$.

Функции $\varphi_1(t, x_1, x_2) = x_2 - \varepsilon x_1 - (1 - \varepsilon)(1 - t)$, $\varphi_2(t, x_1, x_2) = x_1 - \varepsilon x_2 - (1 - \varepsilon)(1 - t)$ являются решением системы (5.4). Одновременно функции $c_1(t, x_1, x_2) = x_2 - \varepsilon x_1 + (1 - \varepsilon)(1 - t)$, $c_2(t, x_1, x_2) = x_1 - \varepsilon x_2 + (1 - \varepsilon)(1 - t)$ не удовлетворяют системе (5.4), но удовлетворяют условиям предложения 1. В самом деле, пусть (t^0, x_1^0, x_2^0) — начальная позиция и пусть u_1, u_2 — постоянные управления игроков 1 и 2 соответственно. Для того чтобы проверить второе условие при $i = 1$, выберем $y_1^{[1]} = x_1^0 + (t - t^0)u_1$, $y_2^{[1]} = x_2^0 - (t - t^0)$. Имеем, что

$$\begin{aligned} c_1(t_+, y_1^{[1]}(t_+), y_2^{[2]}) &= x_2^0 - (t_+ - t^0) - \varepsilon x_1^0 - \varepsilon(t - t^0)u_1 + (1 - \varepsilon)(1 - t_+) \\ &= x_2^0 - \varepsilon x_1^0 + (1 - \varepsilon)(1 - t^0) + (-2 + \varepsilon + \varepsilon u_1)(t_+ - t^0) \leq c_1(t^0, x_1^0, x_2^0). \end{aligned}$$

Второе условие при $i = 2$ может быть проверено таким же образом. Покажем справедливость третьего условия. Положим $y_1^c(t) = x_1^0 - (t - t^0)$, $y_2^c(t) = x_2^0 - (t - t^0)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} c_1(t_+, y_1^c(t_+), y_2^c(t_+)) &= x_2^0 + (t_+ - t^0) - \varepsilon x_1^0 - \varepsilon(t_+ - t^0) + (1 - \varepsilon)(1 - t_+) \\ &= x_2^0 - \varepsilon x_1^0 + (1 - \varepsilon)(1 - t^0) = c_1(t^0, x_1^0, x_2^0), \\ c_2(t_+, y_1^c(t_+), y_2^c(t_+)) &= x_1^0 + (t_+ - t^0) - \varepsilon x_2^0 - \varepsilon(t_+ - t^0) + (1 - \varepsilon)(1 - t_+) \\ &= x_1^0 - \varepsilon x_2^0 + (1 - \varepsilon)(1 - t^0) = c_2(t^0, x_1^0, x_2^0). \end{aligned}$$

Отметим, что для $t \in [0, 1)$ $c_i(t, x_1, x_2) > \varphi_i(t, x_1, x_2)$. Таким образом, метод, предложенный в настоящей статье, позволяет улучшить выигрыш обоих игроков по сравнению с ситуацией, когда игроки, используют равновесие по Нэшу, определяемое системой уравнений Гамильтона — Якоби.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 518 с.
3. **Субботина Н.Н.** Универсальные оптимальные стратегии в позиционных дифференциальных играх // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 11. С. 1890–1896.
4. **Субботин А. И.** Обобщенные решения дифференциальных уравнений 1-го порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2003. 336 с.
5. **Клейменов А.Ф.** Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург: Наука, 1993. 185 с.
6. **Кононенко А.Ф.** О равновесных позиционных стратегиях в неантагонистических дифференциальных играх // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231, вып. 2. С. 285–288.
7. **Чистяков С.В.** О бескоалиционных дифференциальных играх // Докл. АН СССР. Т. 259, вып. 5. С. 1052–1055.
8. **Case J.H.** Towards a theory of many players differential games // SIAM J. Control. 1969. Vol. 7. P. 179–197.
9. **Friedman A.** Differential games. N. Y.: Wiley, 1971. 368 p.
10. **Başar T., Olsder G.J.** Dynamic noncooperative game theory. Philadelphia, 1999. 519 p. (SIAM Series in Classics in Applied Mathematics 23).
11. **Buckdahn R., Cardaliaguet P., Quincampoix M.** Some recent aspects of differential game theory // Dyn. Games Appl. 2011. Vol. 1, no. 1. P. 74–114.
12. **Bressan A., Shen W.** Semi-cooperative strategies for differential games // Internat. J. Game Theory. 2004. Vol. 32, no. 4. P. 561–593.
13. **Bressan A., Shen W.** Small BV solutions of hyperbolic noncooperative differential games // SIAM J. Control Optim. 2004. Vol 43, no. 1. P. 194–215.
14. **Cardaliaguet P.** On the instability of the feedback equilibrium payoff in a nonzero-sum differential game on the line // Advances in dynamic game theory. Boston: Birkhäuser, 2007. P. 57–67. (Ann. Internat. Soc. Dynam. Games; vol. 9).
15. **Cardaliaguet P., Plaskacz S.** Existence and uniqueness of a Nash equilibrium feedback for a simple nonzero-sum differential game. Special anniversary issue. Part 2 // Internat. J. Game Theory. 2003. Vol. 32, no. 1. P. 33–71.
16. **Averboukh Yu.** Universal Nash equilibrium strategies for differential games // arXiv:1306.2297v1 [math.OC]. 2013. 23 p. URL: <http://arxiv.org/abs/1306.2297.pdf>.
17. **Aubin J.-P.** Viability theory. Basel: Birkhäuser, 1992. 570 p.
18. **Rockafellar R.T., Wets R.** Variational analysis. New York: Springer. 2009. 743 p. (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften; vol. 317).
19. **Авербух Ю.В.** Инфинитезимальная характеристика равновесия по Нэшу в дифференциальной игре многих лиц // Вест. Удмурт. ун-та. 2011. № 2. С. 3–11. (Математика. Механика. Компьютерные науки).

Авербух Юрий Владимирович

Поступила 30.04.2014

канд. физ.-мат. наук

старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

доцент

УралЭНИН Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: ayv@imm.uran.ru

УДК 517.97

MAXIMUM PRINCIPLE FOR INFINITE-HORIZON OPTIMAL CONTROL PROBLEMS UNDER WEAK REGULARITY ASSUMPTIONS¹

S. M. Aseev and V. M. Veliov

The paper deals with first order necessary optimality conditions for a class of infinite-horizon optimal control problems that arise in economic applications. Neither convergence of the integral utility functional nor local boundedness of the optimal control is assumed. Using the classical needle variations technique we develop a normal form version of the Pontryagin maximum principle with an explicitly specified adjoint variable under weak regularity assumptions. The result generalizes some previous results in this direction. An illustrative economical example is presented.

Keywords: infinite horizon, Pontryagin maximum principle, transversality conditions, weak regularity assumptions.

С. М. Асеев и В. М. Вельов. Принцип максимума для задач оптимального управления на бесконечном интервале времени при ослабленных предположениях регулярности.

Статья посвящена вопросам теории необходимых условий оптимальности первого порядка для класса задач оптимального управления на бесконечном интервале времени, возникающих в экономических приложениях. В задачах рассматриваемого класса интегральный функционал полезности может принимать бесконечные значения, а оптимальное управление – не обязательно ограниченное. Посредством классического метода игольчатых вариаций при ослабленных предположениях регулярности получен вариант принципа максимума Понтрягина в нормальной форме с однозначно определенной сопряженной переменной. Данный результат обобщает ряд предыдущих результатов в этом направлении. Рассмотрен экономический пример.

Ключевые слова: бесконечный горизонт, принцип максимума Понтрягина, условия трансверсальности, ослабленные предположения регулярности.

1. Introduction

Infinite-horizon optimal control problems arise in many fields of economics, in particular in problems of optimization of economic growth. Typically, the initial state is fixed and the terminal state (at infinity) is free in such problems, while the utility functional to be maximized is given by an improper integral on the time interval $[0, \infty)$.

It is well known that the infinite time-horizon may cause the appearance of various “pathological” phenomena in the relations of the corresponding general version of the Pontryagin maximum principle [15]. Although the state at infinity is not constrained, such problems could be abnormal ($\psi^0 = 0$ in this case) and the “standard” transversality conditions at infinity of the form

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0 \quad (1.1)$$

or

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \psi(t), x_*(t) \rangle = 0 \quad (1.2)$$

may be inconsistent with the core conditions of the maximum principle (the adjoint system and the maximum condition). Here $x_*(\cdot)$ is an optimal trajectory and $(\psi^0, \psi(\cdot))$ is a pair of adjoint variables corresponding to the optimal pair $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ according to the core conditions of the

¹The first author was supported in part by the Russian Foundation for Basic Research under grant No. 13-01-12446-ofi-m2. The second author was supported by the Austrian Science Foundation (FWF) under grant P 26640-N25.

maximum principle. Examples exhibiting pathologies of these types are given in [4; 10; 15; 18; 21]. These examples clearly demonstrate that general complementary conditions on the adjoint variables (if such exists) must differ from (1.1) and (1.2).

A considerable progress in understanding of the “right” form of such complementary conditions on the adjoint variables has been made in the last decade. In the case of autonomous problems with discounting it was proved in [3; 4] that if the discount rate is sufficiently large (this situation is referred in the literature as “the case of dominating discount”) then the maximum principle holds in normal form with the “right” adjoint variable $\psi(\cdot)$ specified by an explicit formula similar to the classical Cauchy formula for the solutions of systems of linear differential equations. In some situations this Cauchy type representation of $\psi(\cdot)$ implies transversality conditions at infinity of the form (1.1) or (1.2), and an even stronger exponential pointwise estimate for $\psi(\cdot)$ (see [4–6] for more details). Recently, the main constructions and results in [3; 4] were extended in [2; 9].

The approach used in [2–4; 9] is based on an appropriate *regularization* of the infinite-horizon problem, namely on its explicit approximation by a family of standard finite-horizon problems. However, there are inherent limitations for the applicability of this approach. In particular, application of the approximation techniques typically needs some uniformity of the convergence of the improper integral utility functional for all admissible controls (see e.g. condition (A3) in [2]) and boundedness of the optimal one (at least in a local sense). In many cases of interest regularity conditions of this type either fail or cannot be verified a priori. For instance, in problems without discounting and in models of endogenous economic growth (especially with declining discount rates) the corresponding integral utility functionals may diverge to infinity.

An alternative approach to derivation of first order necessary optimality conditions for infinite-horizon optimal problems, which is based on the classical needle variations technique, was recently developed in [6; 7]. The advantage of this approach is that typically it can be realized under less restrictive regularity assumptions than ones akin to the approximations based techniques. In particular, this approach can produce a complete set of necessary optimality conditions even in the case when the optimal objective value is infinite (see [6; 7]). A local modification of the notion of weakly overtaking optimality (see [10]) can be employed in this case. The normal form version of the maximum principle obtained in [6; 7] involves the same explicit single-valued representation for the adjoint variable $\psi(\cdot)$ as in [2–4; 9] but under weaker assumptions on the convergence of the improper integral utility functional. We mention that the same approach proved to be also productive for distributed control systems, as shown in [22] for a class of age-structured optimal control problems.

The main goal of the present paper is to extend the results obtained in [6; 7] to a more general class of infinite-horizon optimal control problems satisfying a weak regularity assumption. It should be emphasized that due to the economic nature of many optimal growth models the standard regularity assumptions that are common in the optimal control theory could be rather burdensome. In many cases of interest the improper integral utility functional could diverge to infinity, and natural admissible controls or the corresponding utility flows could not be a priori bounded (even locally). Notice, that the validity of the Pontryagin maximum principle in finite-horizon problems under weak regularity assumptions is well known (see [11, Theorem 5.2.1] and [12, Theorem 22.17]).

Another extension of the results in [6; 7] is that the objective integrand and the right-side of the differential equation defining the problem (control system) need not be continuous with respect to the control variable u . The Lebesgue–Borel measurability in (t, u) is required instead, which is useful in several economic models, where the objective integrand and the control system are discontinuous in u (for example, models in which fixed costs are involved).

The proof of the main result — Pontryagin’s maximum principle for infinite-horizon problems — adapts the one in [7] with some essential modifications that are needed because the weak regularity assumption in the present paper does not require local boundedness of the admissible (and the optimal) controls, and continuity of the data of the problem with respect to the control is also not required. The analysis is based on a modification of the classical needle variation technique.

The paper is organized as follows. In Section 2 we state the problem, formulate the weak regularity assumption and introduce the notion of optimality used in present paper. Section 3 presents the main result and its proof. In Section 4 we consider an illustrative economic example.

2. Statement of the problem and preliminary discussions

Let G be a nonempty open convex subset of $\mathbb{R}^n$ and let

$$f: [0, \infty) \times G \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{and} \quad f^0: [0, \infty) \times G \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1.$$

Throughout the paper we assume that for almost every $t \in [0, \infty)$ the derivatives $f_x(t, x, u)$ and $f_x^0(t, x, u)$ exist for all $(x, u) \in G \times \mathbb{R}^m$, and the functions $f(\cdot, \cdot, \cdot)$, $f^0(\cdot, \cdot, \cdot)$, $f_x(\cdot, \cdot, \cdot)$, and $f_x^0(\cdot, \cdot, \cdot)$ are Lebesgue–Borel (LB) measurable in (t, u) for every $x \in G$, and continuous in x for almost every $t \in [0, \infty)$ and every $u \in \mathbb{R}^m$.

The LB measurability in (t, u) [12, Definition 6.33] means that the functions (and the sets) to which the property applies are measurable with respect to the σ -algebra generated by the product of the Lebesgue σ -algebra on $[0, \infty)$ and the Borel σ -algebra on $\mathbb{R}^m$.

The LB measurability replaces the usual assumption of Lebesgue measurability in t and continuity in u of the functions involved in the assumption above. An important property is that for any function $g: [0, \infty) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ which is LB measurable, the superposition $t \mapsto g(t, u(t))$ with a Lebesgue measurable function $u: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ is Lebesgue measurable [12, Proposition 6.34]. In particular, this implies that the functions $t \mapsto f(t, x(t), u(t))$, $t \mapsto f_x(t, x(t), u(t))$, etc., that appear below with a continuous $x: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ and a Lebesgue measurable function $u: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$, are Lebesgue measurable on $[0, \infty)$.

Consider the following optimal control problem (P):

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^\infty f^0(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \max, \quad (2.3)$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0, \quad (2.4)$$

$$u(t) \in U(t), \quad (2.5)$$

where $x_0 \in G$ is a given initial state of the system and $U: [0, \infty) \mapsto 2^{\mathbb{R}^m}$ is a LB measurable multivalued mapping with non-empty values $U(t) \subset \mathbb{R}^m$, $t \geq 0$. The LB measurability of $U(\cdot)$ means that its graph, i.e. the set $\text{gr } U(\cdot) = \{(t, u) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^m : u \in U(t)\}$ is a LB measurable subset of $[0, \infty) \times \mathbb{R}^m$.

Since the utility functional (2.3) on an infinite horizon admits its values to be infinite, there are several concepts of optimality that can be used in the context of problem (P) (see, for example [10]). The one that we use in the present paper will be specified at the end of this section. Before that we make some preliminary considerations.

We consider any Lebesgue measurable function $u: [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^m$ satisfying condition (2.5) for all $t \geq 0$ as a *control*. If $u(\cdot)$ is a control then the corresponding *trajectory* is a locally absolutely continuous solution $x(\cdot)$ of the initial value problem (2.4), which is defined on some finite or infinite time interval $[0, \tau)$, $\tau > 0$, in G (if such solution exists). The local absolute continuity of $x(\cdot)$ means that $x(\cdot)$ is absolutely continuous on any compact time-interval $[0, T]$, $T > 0$, of its domain of definition $[0, \tau)$.

By definition, a pair $(x(\cdot), u(\cdot))$, where $u(\cdot)$ is a control and $x(\cdot)$ is the corresponding trajectory, is an *admissible pair* (in problem (P)), or a *process*, if the trajectory $x(\cdot)$ is defined on the whole infinite time interval $[0, \infty)$ and the function $t \mapsto f^0(t, x(t), u(t))$ is locally integrable on $[0, \infty)$.

(i.e. integrable on any finite time interval $[0, T]$, $T > 0$). Thus, for an arbitrary admissible pair $(x(\cdot), u(\cdot))$ and any $T > 0$ the integral

$$J_T(x(\cdot), u(\cdot)) := \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt$$

is finite.

Note, that if all functions $f(\cdot, \cdot, \cdot)$, $f^0(\cdot, \cdot, \cdot)$, $f_x(\cdot, \cdot, \cdot)$, and $f_x^0(\cdot, \cdot, \cdot)$ are locally bounded², then for any control $u(\cdot) \in L_{loc}^\infty[0, \infty)$ the corresponding trajectory $x(\cdot)$ exists (and is unique) in G on some maximal time interval $[0, \tau)$, $\tau > 0$ (see [1, Chapters 2.5.1–2.5.3]), and in the case $\tau = \infty$ the pair $(x(\cdot), u(\cdot))$ is admissible.

Now we recall two basic concepts of optimality used in the literature (see [10]).

In the first one, the integral in (2.3) is understood in improper sense, i.e. for arbitrary admissible pair $(x(\cdot), u(\cdot))$ by definition

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt,$$

if the limit exists.

Definition 2.1. *An admissible pair $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ is called strongly optimal in problem (P) if the corresponding integral in (2.3) converges (to a finite number) and for any other admissible pair $(x(\cdot), u(\cdot))$ we have*

$$J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \geq \limsup_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt.$$

In the second one, the integral in (2.3) is not necessary finite.

Definition 2.2. *An admissible pair $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ is called finitely optimal in problem (P) if for any $T > 0$ this pair (restricted to $[0, T]$) is optimal in the following optimal control problem (P_T) with fixed initial and final states:*

$$J_T(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \max,$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)), & x(0) &= x_0, & x(T) &= x_*(T), \\ u(t) &\in U(t). \end{aligned}$$

It is easy to see that the strong optimality implies the finite one.

The following weak regularity assumption plays a key role for the validity of the general version of the Pontryagin maximum principle for a finitely optimal process $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ in problem (P) (similar assumptions for problems with finite time-horizons one can find in [11, Chapter 5; [12], Hypotheses 22.25]). In fact, this assumption will be used later on for an arbitrarily fixed admissible pair $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$.

²The local boundedness of these functions of t , x and u (take $\phi(\cdot, \cdot, \cdot)$ as a representative) means that for every $T > 0$, every compact $D \subset G$ and every bounded set $V \subset \mathbb{R}^m$ there exists M such that $\|\phi(t, x, u)\| \leq M$ for almost all $t \in [0, T]$, and all $x \in D$ and $u \in V$.

Assumption (A1). *There are a continuous function $\gamma: [0, \infty) \mapsto (0, \infty)$ and a locally integrable function $\varphi: [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^1$, such that $\{x: \|x - x_*(t)\| \leq \gamma(t)\} \subset G$ for all $t \geq 0$, and for almost all $t \in [0, \infty)$ we have*

$$\max_{\{x: \|x - x_*(t)\| \leq \gamma(t)\}} \{ \|f_x(t, x, u_*(t))\| + \|f_x^0(t, x, u_*(t))\| \} \leq \varphi(t). \quad (2.6)$$

Notice, that due to the continuity of the functions $f_x(\cdot, \cdot, \cdot)$ and $f_x^0(\cdot, \cdot, \cdot)$ with respect to x , the maximum in (2.6) is achieved.

Assumption (A1) is implied by the following condition (see [12, Hypotheses 22.16]): there exist a constant $c \geq 0$, a locally integrable function $d: [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^1$ and a continuous function $\gamma: [0, \infty) \mapsto (0, \infty)$, $\{x: \|x - x_*(t)\| \leq \gamma(t)\} \subset G$, $t \geq 0$, such that for almost every $t \in [0, \infty)$ and all $x: \|x - x_*(t)\| \leq \gamma(t)$ we have

$$\|f_x(t, x, u_*(t))\| + \|f_x^0(t, x, u_*(t))\| \leq c \{ \|f(t, x, u_*(t))\| + |f^0(t, x, u_*(t))| \} + d(t).$$

We also mention that if $u_*(\cdot) \in L_{loc}^\infty[0, \infty)$, and the functions $f_x(\cdot, \cdot, \cdot)$ and $f_x^0(\cdot, \cdot, \cdot)$ are measurable in t , continuous in (x, u) and locally bounded, as in [6; 7], then assumption (A1) also holds true.

The following lemma will be used below.

Lemma 2.1. *Let $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ be an admissible pair for which (A1) is fulfilled. Then the function $k: [0, \infty) \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^1$ with values given for almost every $t \geq 0$ and all $v \in \mathbb{R}^m$ by the equality*

$$k(t, v) = \max_{\{x: \|x - x_*(t)\| \leq \gamma(t)\}} \{ \|f_x(t, x, v)\| + \|f_x^0(t, x, v)\| \} \quad (2.7)$$

is LB measurable. Moreover, the function $k(\cdot, u_*(\cdot))$ is locally integrable.

Proof. Since $\{x: \|x - x_*(t)\| \leq \gamma(t)\} \subset G$, $t \geq 0$, the set-valued mapping $t \mapsto F(t) = \{x: \|x - x_*(t)\| \leq \gamma(t)\}$ is compact convex valued and continuous, with $F(t) \subset G$, $t \geq 0$. Hence, there is a countable family $\{\xi_i(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ of continuous selectors of $F(\cdot)$ such that the set $\bigcup_{i=1}^\infty \xi_i(t)$ is dense in $F(t)$ for any $t \geq 0$. Hence, for almost every $t \geq 0$ and all $v \in \mathbb{R}^m$ we have

$$k(t, v) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \{ \|f_x(t, \xi_i(t), v)\| + \|f_x^0(t, \xi_i(t), v)\| \}.$$

Thus, the function $k(\cdot, \cdot)$ is LB measurable as a supremum of a countable family of LB measurable functions.

The last claim follows directly from assumption (A1), since $k(t, u_*(t)) \leq \varphi(t)$. $\square$

Define the Hamilton–Pontryagin function $\mathcal{H}: [0, \infty) \times G \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ for problem (P) in the usual way:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, x, u, \psi^0, \psi) &= \psi^0 f^0(t, x, u) + \langle f(t, x, u), \psi \rangle, \\ t &\in [0, \infty), \quad x \in G, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad \psi \in \mathbb{R}^n, \quad \psi^0 \in \mathbb{R}^1. \end{aligned}$$

In the normal case, where $\psi^0 = 1$, we simply write $\mathcal{H}(t, x, u, \psi)$ instead of $\mathcal{H}(t, x, u, 1, \psi)$.

Any finitely optimal process $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ satisfies the following general version of the maximum principle, which is proved in [15] under the *standard regularity conditions*. Namely, the proof given in [15] is valid if $u_*(\cdot) \in L_{loc}^\infty[0, \infty)$, $U(t) \equiv U$, $t \geq 0$, and the functions $f(\cdot, \cdot, \cdot)$, $f^0(\cdot, \cdot, \cdot)$, $f_x(\cdot, \cdot, \cdot)$ and $f_x^0(\cdot, \cdot, \cdot)$ are measurable in t , continuous in (x, u) , and locally bounded.

Theorem 2.1. *Let $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ be a finitely optimal admissible pair in problem (P) and let (A1) be fulfilled. Then there is a non-vanishing pair of adjoint variables $(\psi^0, \psi(\cdot))$, with $\psi^0 \geq 0$ and a locally absolutely continuous $\psi(\cdot): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, such that the core conditions of the maximum principle hold, i.e.*

(i) $\psi(\cdot)$ is a solution to the adjoint system

$$\dot{\psi}(t) = -\mathcal{H}_x(t, x_*(t), u_*(t), \psi^0, \psi(t)),$$

(ii) the maximum condition takes place:

$$\mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi^0, \psi(t)) \stackrel{a.e.}{=} \sup_{u \in U(t)} \mathcal{H}(t, x_*(t), u, \psi^0, \psi(t)).$$

The main points of the proof of this theorem coincide with those in the original proof of Halkin's result (see [15, Theorem 4.2]). Therefore we give only a sketch. Similarly to [15], the proof is based on the consideration of the family of auxiliary optimal control problems (P_T) on finite time intervals $[0, T]$, $T > 0$, appearing in Definition 2.2. The only difference is that the original proof of Halkin's theorem is based on the standard regularity assumptions. The finite optimality of the admissible pair $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ in problem (P) implies that on any finite time interval $[0, T]$, $T > 0$, the core conditions of the Pontryagin maximum principle for the process $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ hold with a corresponding non-vanishing pair of adjoint variables $\psi_T^0 \geq 0$, $\psi_T(\cdot)$. This implies the validity of the core conditions of the infinite-horizon maximum principle after taking a limit in the conditions of the maximum principle for these auxiliary problems (P_T) as $T \rightarrow \infty$ (see details in [10; 15]).

However, due to [11, Theorem 5.2.1], assumption (A1), together with Lemma 2.1, also implies the core conditions of the maximum principle for the process $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ which is optimal in all corresponding finite-horizon problems (P_T) on time intervals $[0, T]$, $T > 0$, with fixed endpoints (see Definition 2.2). Thus, the scheme of the proof of Theorem 4.2 in [15] can be reproduced with some minor modifications also for Theorem 2.1.

The next concept of optimality takes an intermediate place between the strong and the finite ones (see [10; 15]).

Definition 2.3. An admissible pair $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ is called weakly overtaking optimal if for arbitrary $\varepsilon > 0$, $T > 0$ and any other admissible pair $(x(\cdot), u(\cdot))$ there is a $T' > T$ such that

$$\int_0^{T'} f^0(t, x_*(t), u_*(t)) dt \geq \int_0^{T'} f^0(t, x(t), u(t)) dt - \varepsilon.$$

This concept of optimality appears to be the most useful among the numerous alternative definitions proposed in the context of economics (see [10]), therefore we adopt it in this paper. Similarly to [6; 7], because of the usage of needle variations, it turns out that Pontryagin's necessary optimality conditions obtained in the next section are valid even for a local version of the weak overtaking optimality. Namely, it is enough to test the optimal pair $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ against admissible pairs $(x(\cdot), u(\cdot))$ for which $u(\cdot)$ differs from $u_*(\cdot)$ only on a set of "small" measure.

Definition 2.4. An admissible pair $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ is called locally weakly overtaking optimal (LWOO) if there exists $\delta > 0$ such that for any other admissible pair $(x(\cdot), u(\cdot))$ satisfying

$$\text{meas} \{t \geq 0: u(t) \neq u_*(t)\} \leq \delta,$$

and for arbitrary $\varepsilon > 0$, $T > 0$ there is a $T' > T$ such that

$$\int_0^{T'} f^0(t, x_*(t), u_*(t)) dt \geq \int_0^{T'} f^0(t, x(t), u(t)) dt - \varepsilon.$$

Obviously, the property of local weak overtaking optimality is weaker than the property of weak overtaking optimality but it does not imply the finite optimality, in general. The property of local weak overtaking optimality should be compared with the corresponding “local” version of the property of finite optimality. However, as it can be shown any LWOO admissible pair $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ is locally finite optimal and Theorem 2.1 holds true since it is valid also in the case of locally finite optimal admissible pair $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$.

Notice, also that the concept of finite optimality is very weak. It can happen that even in simple situations this concept does not recognize strongly optimal pairs (which exist) in the set of all admissible ones (see discussion of Halkin’s example in [6].) In the next section we show that the concept of weak overtaking optimality (see Definition 2.3 and its local modification given in Definition 2.4) provides a reasonable compromise between the concepts of strong optimality (Definition 2.1) and finite optimality (Definition 2.2). On the one hand, this concept of optimality is general enough and applicable even in the situation of infinite optimal utility value, on the other hand, this concept of optimality still admits the development of complete versions of the maximum principle.

3. Maximum principle

This section presents the main result in the paper – a normal form version of the Pontryagin maximum principle with explicitly specified adjoint variable for the infinite-horizon problem (P) . The analysis is based on the notion of simple needle variation (see for example [1, Chapter 1.5.4]), using the weak regularity assumption (A1) and the following growth assumption for a given process $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$:

Assumption (A2). *There exist a number $\beta > 0$ and a nonnegative integrable function $\lambda : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^1$ such that for every $\zeta \in G$ with $\|\zeta - x_0\| < \beta$ equation (2.4) with $u(\cdot) = u_*(\cdot)$ and initial condition $x(0) = \zeta$ (instead of $x(0) = x_0$) has a solution $x(\zeta; \cdot)$ on $[0, \infty)$ in G , and*

$$\max_{x \in [x(\zeta; t), x_*(t)]} \left| \langle f_x^0(t, x, u_*(t)), x(\zeta; t) - x_*(t) \rangle \right| \stackrel{a.e.}{\leq} \|\zeta - x_0\| \lambda(t).$$

Here $[x(\zeta; t), x_*(t)] = \text{co} \{x(\zeta; t), x_*(t)\}$ denotes the line segment with vertices $x(\zeta; t)$ and $x_*(t)$.

This assumption was introduced in [7] as an invariant counterpart of the dominating discount condition in [3; 4; 6]. Notice that a locally bounded function $\lambda(\cdot)$ satisfying the inequality in (A2) always exists. The essence of (A2) is that such an *integrable* $\lambda(\cdot)$ does exist. Thus (A2) is an asymptotic assumption which complements in the infinite horizon case the local assumption (A1). It should be noted also that due to (A2) for any initial state $\zeta \in G$, $\|\zeta - x_0\| < \beta$, the function $t \mapsto f^0(t, x(\zeta; t), u_*(t))$ is locally integrable on $[0, \infty)$.

The following auxiliary statement is needed in order to apply theorems on existence, continuous dependence and differentiability with respect to initial data of the solution of a differential equation under assumption (A1) (see [1, Chapters 2.5.1–2.5.6]).

Lemma 3.1. *If $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ is a process and (A1) holds, then for every $x \in G$ for which the set $G_x := \{t \geq 0: \|x - x_*(t)\| \leq \gamma(t)\}$ is nonempty, the function $t \mapsto f(t, x, u_*(t))$ is locally integrable on G_x .*

Proof. Since $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ is a process, we have that $t \mapsto f(t, x_*(t), u_*(t))$ is locally integrable. For $t \in G_x$ define $\xi(t) = x - x_*(t)$. Then the function $\xi: G_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ is continuous, $\|\xi(t)\| \leq \gamma(t)$, $t \in G_x$, and

$$f(t, x, u_*(t)) = f(t, x_*(t) + \xi(t), u_*(t)) = f(t, x_*(t), u_*(t)) + \langle f_x(t, x_*(t) + \tilde{\xi}(t), u_*(t)), \xi(t) \rangle,$$

where $\tilde{\xi}: G_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ is measurable and $\|\tilde{\xi}(t)\| \leq \|\xi(t)\| \leq \gamma(t)$, $t \in G_x$. Now the statement follows from the local integrability of $t \mapsto f(t, x_*(t), u_*(t))$ on G_x and (A1). $\square$

Consider the following linear differential equation (the linearization of (2.4) along $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$):

$$\dot{y}(t) = f_x(t, x_*(t), u_*(t)) y(t), \quad t \geq 0. \quad (3.1)$$

Due to (A1), the partial derivative $f_x(\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ is measurable and locally integrable. Hence, for any given time $\tau \geq 0$ and vector $y_*(\tau) \in \mathbb{R}^n$ there is a unique (Carathéodory) solution $y(\cdot)$ of equation (3.1) with $y(\tau) = y_*(\tau)$, which is defined on the whole time interval $[0, \infty)$. Moreover,

$$y(t) = Y_*(t) Y_*^{-1}(\tau) y_*(\tau), \quad t \geq 0, \quad (3.2)$$

where $Y_*(\cdot)$ is the fundamental matrix solution of (3.1) normalized at $t = 0$. This means (see, for example [16, Chapter IV]) that the columns $\xi_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, n$, of the $(n \times n)$ -matrix function $Y_*(\cdot)$ are (linearly independent) solutions of (3.1) on $[0, \infty)$ that satisfy the initial conditions

$$\xi_i^j(0) = \delta_{i,j}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

where

$$\delta_{i,i} = 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{and} \quad \delta_{i,j} = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Analogously, consider the fundamental matrix solution $Z_*(\cdot)$ (normalized at $t = 0$) of the linear adjoint equation

$$\dot{z}(t) = -[f_x(t, x_*(t), u_*(t))]^* z(t).$$

Then

$$Z_*^{-1}(t) = [Y_*(t)]^*, \quad t \geq 0. \quad (3.3)$$

Lemma 3.2. *Let (A1) and (A2) be satisfied. Then the following estimation holds:*

$$\left\| [Y_*(t)]^* f_x^0(t, x_*(t), u_*(t)) \right\| \leq \sqrt{n} \lambda(t) \quad \text{for a.e. } t \geq 0. \quad (3.4)$$

Proof. Define $\zeta_i \in \mathbb{R}^n$ as the vector with components $\zeta_i^j = \delta_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, n$. Due to (A2) for every $\alpha \in (0, \beta)$ the solution $x(x_0 + \alpha \zeta_i; \cdot)$ of equation (2.4) with $u(\cdot) = u_*(\cdot)$ and initial condition $x(0) = x_0 + \alpha \zeta_i$ (instead of x_0) exists on $[0, \infty)$ and

$$\left| \langle f_x^0(t, x_*(t), u_*(t)), x(x_0 + \alpha \zeta_i; t) - x_*(t) \rangle \right| \stackrel{\text{a.e.}}{\leq} \alpha \lambda(t). \quad (3.5)$$

Due to Lemma 3.1 and the theorem on differentiation of the solution of a differential equation with respect to the initial conditions (see e.g. Chapter 2.5.6 in [1]), we get the following equality

$$x(x_0 + \alpha \zeta_i; t) = x_*(t) + \alpha \xi_i(t) + o_i(\alpha, t), \quad i = 1, \dots, n, \quad t \geq 0.$$

Here the vector functions $\xi_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, n$ are columns of $Y_*(\cdot)$, and for any $i = 1, \dots, n$ we have $\|o_i(\alpha, t)\|/\alpha \rightarrow 0$ as $\alpha \rightarrow 0$, uniformly with respect to t on any finite time interval $[0, T]$, $T > 0$. Then in view of (3.5) we get

$$\left| \left\langle f_x^0(t, x_*(t), u_*(t)), \xi_i(t) + \frac{o_i(\alpha, t)}{\alpha} \right\rangle \right| \stackrel{\text{a.e.}}{\leq} \lambda(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad t \geq 0.$$

Passing to the limit with $\alpha \rightarrow 0$ in the last inequality for a.e. $t \geq 0$ and $i = 1, \dots, n$ we get

$$\left| \langle f_x^0(t, x_*(t), u_*(t)), \xi_i(t) \rangle \right| \stackrel{\text{a.e.}}{\leq} \lambda(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad t \geq 0.$$

This implies (3.4). □

Due to (3.3) and Lemma 3.2 assumption (A2) implies that the function $\psi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ defined as

$$\psi(t) = Z_*(t) \int_t^\infty [Z_*(s)]^{-1} f_x^0(s, x_*(s), u_*(s)) ds, \quad t \geq 0. \quad (3.6)$$

is locally absolutely continuous. Indeed, the integral in (3.6) converges absolutely for any $t \geq 0$ due to the integrability of $\lambda(\cdot)$.

By a direct differentiation we verify that the so defined function $\psi(\cdot)$ satisfies on $[0, \infty)$ the adjoint system

$$\dot{\psi}(t) = -\mathcal{H}_x(t, x_*(t), u_*(t), \psi(t)).$$

(We remind that in the case $\psi^0 = 1$ we omit this variable in the Hamilton–Pontryagin function.)

The following result is a version of the Pontryagin maximum principle for infinite-horizon problem (P) under regularity assumption (A1) and growth assumption (A2).

Theorem 3.1. *Let $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ be a LWOO admissible pair in problem (P). Assume that (A1) and (A2) are satisfied. Then the vector function $\psi: [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^n$ defined by (3.6) is (locally) absolutely continuous and satisfies the core conditions of the normal form maximum principle, i.e.*

(i) $\psi(\cdot)$ is a solution to the adjoint system

$$\dot{\psi}(t) = -\mathcal{H}_x(t, x_*(t), u_*(t), \psi(t)), \quad (3.7)$$

(ii) the maximum condition takes place:

$$\mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi(t)) \stackrel{a.e.}{=} \sup_{u \in U(t)} \mathcal{H}(t, x_*(t), u, \psi(t)).$$

Proof. The local absolute continuity of the vector function $\psi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ defined by (3.6), and also that it satisfies (3.7) has already been proved. We shall prove condition (ii) *ad absurdum* by using a modified form of the simple needle variations of the control $u_*(\cdot)$.

Assume that condition (ii) fails. Then there are a set $\Omega \subset [0, \infty)$ of positive measure and an $\varepsilon > 0$ such that the multivalued mapping $\Gamma: \Omega \rightarrow 2^{\mathbb{R}^m}$, defined by equality

$$\Gamma(t) = \{u \in U(t): \mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi(t)) \leq \mathcal{H}(t, x_*(t), u, \psi(t)) - \varepsilon\}, \quad t \in \Omega,$$

has non-empty values, and its graph, i.e. the set

$$\text{gr } \Gamma(\cdot) = \{(t, u): t \in \Omega, u \in \Gamma(t)\}$$

is a LB measurable subset of $[0, \infty) \times \mathbb{R}^m$ since the function $t \mapsto \mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi(t))$ is Lebesgue measurable and the function $(t, u) \mapsto \mathcal{H}(t, x_*(t), u, \psi(t))$ is LB measurable. Due to the Yankov-von Neumann–Aumann selection theorem (see, for example [11, Theorem 4.1.1.; 17, Theorem 2.14]) there is a Lebesgue measurable selection of $\Gamma(\cdot)$, i.e. a Lebesgue measurable function $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ such that $v(t) \in \Gamma(t)$ for all $t \in \Omega$.

Due to [19, Chapter IX, Theorem 2] there is a $\tau \in \Omega$ which is a point of approximate continuity of the Lebesgue measurable functions $f(\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot))$, $f^0(\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot))$, $f(\cdot, x_*(\cdot), v(\cdot))$, $f^0(\cdot, x_*(\cdot), v(\cdot))$, $k(\cdot, v(\cdot))$ and $v(\cdot)$. Here $k(\cdot, \cdot)$ is the function defined in Lemma 2.1, and according to this lemma $k(\cdot, v(\cdot))$ is a measurable function.

This means (see [19, Chapter IX, §5]) that for each of these functions of t (take $\phi(\cdot)$ as a representative) there is a measurable set $\mathfrak{M} \subset [0, \tau]$ such that $\tau \in \mathfrak{M}$, $\phi(\cdot)$ is continuous at τ along $\mathfrak{M}$, and

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{\text{meas } \{\mathfrak{M} \cap (\tau - \alpha, \tau]\}}{\alpha} = 1.$$

Clearly, we may assume that $\mathfrak{M}$ is the same for all the above functions.

Further in the proof, we denote $v = v(\tau)$. Then

$$\mathcal{H}(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau), \psi(\tau)) \leq \mathcal{H}(\tau, x_*(\tau), v, \psi(\tau)) - \varepsilon. \quad (3.8)$$

For any $0 < \alpha \leq \tau$ define

$$u_\alpha(t) := \begin{cases} u_*(t), & t \notin (\tau - \alpha, \tau] \cap \mathfrak{M}, \\ v(t), & t \in (\tau - \alpha, \tau] \cap \mathfrak{M}. \end{cases} \quad (3.9)$$

The above defined control $u_\alpha(\cdot)$ is a modified version of the standard *simple variation* of $u_*(\cdot)$ commonly used in optimal control (see, for example [1, Chapter 1.5.4]). Denote by $x_\alpha(\cdot)$ the trajectory that corresponds to $u_\alpha(\cdot)$ (notice that $x_\alpha(\cdot)$ coincides with $x_*(\cdot)$ on $[0, \tau - \alpha]$).

According to Lemma 2.1, the function $t \mapsto k(t, u_*(t))$ is locally integrable. Moreover, the function $t \mapsto k(t, v(t))$ is continuous at τ along $\mathfrak{M}$. Hence, by construction (see (3.9)) for all sufficiently small $\alpha > 0$ the function $t \mapsto k(t, u_\alpha(t))$ is locally integrable on $[0, \infty)$, since $k(\cdot, u_\alpha(\cdot))$ coincides with $k(\cdot, v(\cdot))$ on the set $(\tau - \alpha, \tau] \cap \mathfrak{M}$ and coincides with $k(\cdot, u_*(\cdot))$ on its complement in $[0, \infty)$. Moreover, due to the continuity of $k(\cdot, v(\cdot))$ at τ along $\mathfrak{M}$ and $v(\tau) = v$, for all sufficiently small $\alpha > 0$ we have

$$k(t, v(t)) \leq k(\tau, v) + 1, \quad t \in (\tau - \alpha, \tau] \cap \mathfrak{M}.$$

Hence, for all sufficiently small $\alpha > 0$ we can estimate $k(\cdot, u_\alpha(\cdot))$ in the following way:

$$k(t, u_\alpha(t)) \leq k(t) := \max \{k(t, u_*(t)), k(\tau, v) + 1\}, \quad t \geq 0, \quad (3.10)$$

where $k(\cdot)$ is locally integrable on $[0, \infty)$.

The last estimate implies that for all sufficiently small $\alpha > 0$ the function $x_\alpha(\cdot)$ is defined at least on the time interval $[0, \tau]$. This fact follows from Lemma 3.1, the local existence theorem [1, Theorem 2.5.2.] and estimate (3.10). Due to this circumstance, estimate (3.10) and the property that τ is a point of approximate continuity of functions $f(\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot))$, $f(\cdot, x_*(\cdot), v(\cdot))$, $k(\cdot, v(\cdot))$ and $v(\cdot)$ and the equality $v(\tau) = v$, we obviously have

$$x_\alpha(\tau) - x_*(\tau) = \alpha [f(\tau, x_*(\tau), v) - f(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))] + o(\alpha), \quad (3.11)$$

where here and further $o(\alpha)$ denotes a function of $\alpha > 0$ that satisfies $\|o(\alpha)\|/\alpha \rightarrow 0$ as $\alpha \rightarrow 0$. Note that $o(\alpha)$ may depend on v and τ (which are fixed in the present consideration).

Denote by $y_*(\cdot)$ the solution of the linear equation (3.1) on $[0, \infty)$ with the condition

$$y(\tau) = f(\tau, x_*(\tau), v) - f(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)). \quad (3.12)$$

As argued above, for all sufficiently small $\alpha > 0$ the trajectory $x_\alpha(\cdot)$ corresponding to $u_\alpha(\cdot)$ exists at least on $[0, \tau]$ (and equals $x_*(t)$ for $t \in [0, \tau - \alpha]$) and from (3.11) we have that $\|x_*(\tau) - x_\alpha(\tau)\| \leq c' \alpha$ with some constant c' .

The following lemma provides the key tool for proving the maximum principle.

Lemma 3.3. *There is a number $\alpha_0 > 0$ such that for every $\alpha \in (0, \alpha_0]$ the following two properties hold:*

- (i) *for the control function $u_\alpha(\cdot)$ defined in (3.9) the corresponding trajectory $x_\alpha(\cdot)$ exists on $[0, \infty)$ and the pair $(x_\alpha(\cdot), u_\alpha(\cdot))$ is admissible;*
- (ii) *there is a constant $c \geq 0$ and a function $\sigma: (0, \alpha_0] \times [\tau, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ with $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sigma(\alpha, t) \rightarrow 0$ for any fixed $t \geq \tau$, such that for every $\alpha \in (0, \alpha_0]$ and $T > \tau$*

$$\begin{aligned} & \frac{J_T(x_\alpha(\cdot), u_\alpha(\cdot)) - J_T(x_*(\cdot), u_*(\cdot))}{\alpha} \\ &= \mathcal{H}(\tau, x_*(\tau), v, \psi(\tau)) - \mathcal{H}(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau), \psi(\tau)) + \eta(\alpha, T), \end{aligned} \quad (3.13)$$

where the function $\eta(\alpha, T)$ satisfies the following inequality for every $\tilde{T} \in [\tau, T]$:

$$|\eta(\alpha, T)| \leq \sigma(\alpha, \tilde{T}) + c \int_{\tilde{T}}^{\infty} \lambda(t) dt. \quad (3.14)$$

Proof of Lemma 3.3. Consider the Cauchy problem

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_*(t)), \quad x(\tau) = x_\alpha(\tau). \quad (3.15)$$

Due to Lemma 3.1 and the continuous dependence of the solution of a differential equation on the initial condition (see e.g. Chapter 2.5.5 in [1]), there is a sufficiently small $\alpha_0 > 0$ such that for all $\alpha \in (0, \alpha_0]$ the solution $\tilde{x}_\alpha(\cdot)$ of (3.15) exists on $[0, \tau]$ and $\|\tilde{x}_\alpha(0) - x_*(0)\| < \beta$. Then the first part of (A2) implies that the solution $\tilde{x}_\alpha(\cdot)$ exists in G on $[0, \infty)$. Thus for all $\alpha \in (0, \alpha_0]$ the solution $x_\alpha(\cdot)$ also exists on $[0, \infty)$, since $x_\alpha(t) = \tilde{x}_\alpha(t)$ for $t \geq \tau$. Due to (A2) the function $t \mapsto f^0(t, x_\alpha(t), u_\alpha(t))$ is locally integrable. Hence, $(x_\alpha(\cdot), u_\alpha(\cdot))$ is an admissible pair.

Due to Lemma 3.1 and the theorem on differentiability of the solution of a differential equation with respect to the initial conditions (see [1, Chapter 2.5.6]) the following representation holds:

$$\tilde{x}_\alpha(t) = x_*(t) + \alpha y_*(t) + o(\alpha, t), \quad t \geq 0, \quad (3.16)$$

where $y_*(\cdot)$ is the solution of the Cauchy problem (3.1), (3.12). Here $\|o(\alpha, t)\|/\alpha \rightarrow 0$ as $\alpha \rightarrow 0$ and the convergence is uniform in t on every finite interval $[\tau, T]$, $T > \tau$.

Let us prove that for any sufficiently small $\alpha > 0$ the following estimate holds:

$$\max_{x \in [x_\alpha(t), x_*(t)]} \left| \left\langle f_x^0(t, x, u_*(t)), y_*(t) + \frac{o(\alpha, t)}{\alpha} \right\rangle \right| \stackrel{a.e.}{\leq} c_1 \lambda(t), \quad t \geq \tau, \quad (3.17)$$

where $c_1 \geq 0$ is independent of α and t .

Due to (A2)

$$\max_{x \in [\tilde{x}_\alpha(t), x_*(t)]} \left| \left\langle f_x^0(t, x, u_*(t)), \tilde{x}_\alpha(t) - x_*(t) \right\rangle \right| \stackrel{a.e.}{\leq} \|\tilde{x}_\alpha(0) - x_*(0)\| \lambda(t), \quad t \geq 0.$$

Then using (3.16) we obtain that

$$\max_{x \in [\tilde{x}_\alpha(t), x_*(t)]} \left| \left\langle f_x^0(t, x, u_*(t)), \alpha y_*(t) + o(\alpha, t) \right\rangle \right| \stackrel{a.e.}{\leq} \|\alpha y_*(0) + o(\alpha, 0)\| \lambda(t).$$

Choosing $c_1 \geq \|y_*(0)\| + 1$, dividing by α and taking into account that $\tilde{x}_\alpha(t) = x_\alpha(t)$ for $t \geq \tau$ we obtain (3.17).

It is clear that τ is a point of approximate continuity also the function $t \mapsto f(t, x_*(t), u_\alpha(t))$ (with the same set $\mathfrak{M}$ and with $u_\alpha(\tau) = v(\tau) = v$) Therefore, we can represent

$$\int_{\tau-\alpha}^{\tau} f^0(t, x_\alpha(t), u_\alpha(t)) dt = \alpha f^0(\tau, x_\alpha(\tau), v) + \int_{\tau-\alpha}^{\tau} [f^0(t, x_\alpha(t), u_\alpha(t)) - f^0(t, x_*(t), u_\alpha(t))] dt + o(\alpha).$$

The integral in the right-hand side can be estimated in absolute value by

$$\int_{\tau-\alpha}^{\tau} k(t, u_\alpha(t)) \|x_\alpha(t) - x_*(t)\| dt \leq \int_{\tau-\alpha}^{\tau} k(t) c' \alpha dt \leq o(\alpha),$$

where we use that for an appropriate constant c' we have $\|x_\alpha(t) - x_*(t)\| \leq c' \alpha$ for $t \in [\tau - \alpha, \tau]$.

Using this and (3.16) (where $\tilde{x}_\alpha(t) = x_\alpha(t)$ for $t \geq \tau$) for all $\alpha \in (0, \alpha_0]$ we get

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} [J_T(x_\alpha(\cdot), u_\alpha(\cdot)) - J_T(x_*(\cdot), u_*(\cdot))] &= \frac{1}{\alpha} \int_{\tau-\alpha}^{\tau} f^0(t, x_\alpha(t), u_\alpha(t)) dt - \frac{1}{\alpha} \int_{\tau-\alpha}^{\tau} f^0(t, x_*(t), u_*(t)) dt \\ &+ \frac{1}{\alpha} \int_{\tau}^T [f^0(t, x_\alpha(t), u_*(t)) - f^0(t, x_*(t), u_*(t))] dt = f^0(\tau, x_*(\tau), v) - f^0(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) + \frac{o(\alpha)}{\alpha} \end{aligned}$$

$$+ \int_{\tau}^T \left\langle \int_0^1 f_x^0(t, x_*(t) + s(x_{\alpha}(t) - x_*(t)), u_*(t)) ds, y_*(t) + \frac{o(\alpha, t)}{\alpha} \right\rangle dt. \quad (3.18)$$

On the other hand, according to (3.2), (3.3), (3.12), and (3.6)

$$\begin{aligned} & \int_{\tau}^{\infty} \langle f_x^0(t, x_*(t), u_*(t)), y_*(t) \rangle dt \\ &= \left\langle Z_*(\tau) \int_{\tau}^{\infty} [Z_*(t)]^{-1} f_x^0(t, x_*(t), u_*(t)) dt, f(\tau, x_*(\tau), v) - f(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \right\rangle \\ &= \langle \psi(\tau), f(\tau, x_*(\tau), v) - f(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \rangle. \end{aligned}$$

Using this equality in (3.18) we obtain (3.13) with

$$\begin{aligned} \eta(\alpha, T) &:= \int_{\tau}^T \left\langle \int_0^1 f_x^0(t, x_*(t) + s(x_{\alpha}(t) - x_*(t)), u_*(t)) ds, y_*(t) + \frac{o(\alpha, t)}{\alpha} \right\rangle dt \\ &\quad - \int_{\tau}^{\infty} \langle f_x^0(t, x_*(t), u_*(t)), y_*(t) \rangle dt + \frac{o(\alpha)}{\alpha}. \end{aligned}$$

Let $\tilde{T}$ be any number between τ and T . Define

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha, \tilde{T}) &:= \left| \int_{\tau}^{\tilde{T}} \left\langle \int_0^1 f_x^0(t, x_*(t) + s(x_{\alpha}(t) - x_*(t)), u_*(t)) ds, y_*(t) + \frac{o(\alpha, t)}{\alpha} \right\rangle dt \right. \\ &\quad \left. - \int_{\tau}^{\tilde{T}} \langle f_x^0(t, x_*(t), u_*(t)), y_*(t) \rangle dt + \frac{o(\alpha)}{\alpha} \right|. \end{aligned}$$

Due to (A1), we apparently have for a fixed $\tilde{T}$ that $\sigma(\alpha, \tilde{T}) \rightarrow 0$ as $\alpha \rightarrow 0$. Moreover, due to (3.17) we have

$$\left| \int_{\tilde{T}}^T \left\langle \int_0^1 f_x^0(t, x_*(t) + s(x_{\alpha}(t) - x_*(t)), u_*(t)) ds, y_*(t) + \frac{o(\alpha, t)}{\alpha} \right\rangle dt \right| \leq c_1 \int_{\tilde{T}}^{\infty} \lambda(t) dt.$$

Moreover,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\tilde{T}}^{\infty} \langle f_x^0(t, x_*(t), u_*(t)), y_*(t) \rangle dt \right| \\ &= \left| \left\langle Z_*(\tau) \int_{\tilde{T}}^{\infty} [Z_*(t)]^{-1} f_x^0(t, x_*(t), u_*(t)) dt, f(\tau, x_*(\tau), v) - f(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \right\rangle \right| \\ &\leq \|Z_*(\tau)\| \left\| \int_{\tilde{T}}^{\infty} [Y_*(t)]^* f_x^0(t, x_*(t), u_*(t)) dt \right\| \|f(\tau, x_*(\tau), v) - f(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))\| \\ &\leq c_2 \int_{\tilde{T}}^{\infty} \lambda(t) dt, \end{aligned}$$

where in the last inequality we use Lemma 3.2.

Combining the above two inequalities and the definition of $\sigma(\alpha, \tilde{T})$ we obtain (3.14) with $c := c_1 + c_2$. $\square$

Now we continue with the proof of the theorem. Let us fix an arbitrary number $\varepsilon_0 > 0$, and let us choose the number $\tilde{T} > \tau$ in such a way that $\int_{\tilde{T}}^{\infty} \lambda(t) dt \leq \varepsilon_0$. According to Definition 2.4 for every $\alpha \in (0, \alpha_0] \cap (0, \delta]$, for $\varepsilon := \alpha^2$, and for the number $T = \tilde{T}$ there exists $T_\alpha \geq \tilde{T}$ such that

$$J_{T_\alpha}(x_\alpha(\cdot), u_\alpha(\cdot)) - J_{T_\alpha}(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \leq \alpha^2.$$

Then from (3.13) we obtain that

$$\mathcal{H}(\tau, x_*(\tau), v, \psi(\tau)) - \mathcal{H}(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau), \psi(\tau)) \leq \alpha - \eta(\alpha, T_\alpha).$$

Since $\tilde{T} \in [\tau, T_\alpha]$, we obtain from (3.14)

$$\mathcal{H}(\tau, x_*(\tau), v, \psi(\tau)) - \mathcal{H}(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau), \psi(\tau)) \leq \alpha + \sigma(\alpha, \tilde{T}) + c \int_{\tilde{T}}^{\infty} \lambda(t) dt \leq \alpha + \sigma(\alpha, \tilde{T}) + \varepsilon_0.$$

Passing to the limit with $\alpha \rightarrow 0$ and then taking into account that ε_0 was arbitrarily chosen, we obtain that

$$\mathcal{H}(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau), \psi(\tau)) \geq \mathcal{H}(\tau, x_*(\tau), v, \psi(\tau)).$$

This inequality contradicts (3.8), which completes the proof of the theorem. $\square$

4. Example

Here we apply Theorem 3.1 to a stylized (micro-level) economic model studied earlier in [6] by means of another version of the maximum principle.

Consider the following problem (P1):

$$J(K(\cdot), I(\cdot)) = \int_0^{\infty} e^{-\theta t} \left[e^{pt} (K(t))^\sigma - \frac{b}{2} (I(t))^2 \right] dt \rightarrow \max,$$

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) &= -\nu K(t) + I(t), & K(0) &= K_0, \\ I(t) &\geq 0. \end{aligned}$$

Here $K(t)$ is the capital stock at time t , $I(t)$ is the investment, $\nu > 0$ is the depreciation rate, $K_0 > 0$ is a given initial state, $\theta \geq 0$ is the discount rate, $p \geq 0$ is the (exogenous) exponential rate of technological advancement, $bI^2(t)$ ($b > 0$) is the cost of investment $I(t)$, and $\sigma \in (0, 1]$ defines the “production function”. We set $G = (0, \infty)$ and $U(t) \equiv [0, \infty)$, $t \geq 0$. As far as the utility functional admits its values to be infinite the optimality of an admissible pair $(K_*(\cdot), I_*(\cdot))$ in problem (P1) is understood in the sense of Definition 2.4.

Following [6], we transform the problem (P1) to an equivalent one by introducing the following variables

$$x(t) = e^{-\alpha t} K(t), \quad u(t) = e^{-\alpha t} I(t), \quad t \geq 0, \quad \text{with} \quad \alpha = \frac{p}{2 - \sigma}.$$

In terms of the new variables $x(\cdot)$ and $u(\cdot)$ the model takes the form of the following problem ($\tilde{P}1$):

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \left[(x(t))^\sigma - \frac{b}{2} (u(t))^2 \right] dt \rightarrow \max,$$

$$\dot{x}(t) = -(\nu + \alpha)x(t) + u(t), \quad x(0) = K_0, \quad (4.1)$$

$$u(t) \geq 0.$$

Here $\rho = \theta - 2\alpha$ is a new “discount rate” which can be even non-positive. As above we set $G = (0, \infty)$ and $U(t) \equiv [0, \infty)$, $t \geq 0$, and we are looking for an admissible LWOO control $u_*(\cdot)$ in problem $(\tilde{P}1)$. Obviously, $(\tilde{P}1)$ is a particular case of problem (P) .

Let $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ be a LWOO admissible pair (if it exists) in $(\tilde{P}1)$.

It can be directly shown that the optimal trajectory $x_*(\cdot)$ is uniformly positive, so there is a sufficiently small number $\eta > 0$ such that $x_*(t) \geq \eta$, $t \geq 0$.

In problem $(\tilde{P}1)$ functions $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ and $f^0(\cdot, \cdot, \cdot)$ are the following:

$$f(t, x, u) = -(\nu + \alpha)x + u, \quad f^0(t, x, u) = e^{-\rho t} \left[x^\sigma - \frac{b}{2}u^2 \right], \quad t \geq 0, \quad x \in G, \quad u \in \mathbb{R}^1.$$

Hence,

$$f_x(t, x, u) = -(\nu + \alpha), \quad f_x^0(t, x, u) = \frac{\sigma e^{-\rho t}}{x^{1-\sigma}}, \quad t \geq 0, \quad x \in G, \quad u \in \mathbb{R}^1, \quad (4.2)$$

and the assumption (A1) is satisfied with continuous function $\gamma(\cdot)$ and locally integrable function $\varphi(\cdot)$ defined as follows:

$$\gamma(t) \equiv \frac{\eta}{2}, \quad \varphi(t) = \nu + \alpha + \frac{2\sigma e^{-\rho t}}{\eta^{1-\sigma}}, \quad t \geq 0.$$

Consider condition (A2). For arbitrary $\zeta > 0$ the solution $x(\zeta; \cdot)$ of equation (4.1) with $u(\cdot) = u_*(\cdot)$ and initial condition $x(0) = \zeta$ (instead of $x(0) = x_0$) is defined on $(0, \infty)$ by

$$x(\zeta; t) = e^{-(\nu+\alpha)t} \zeta + e^{-(\nu+\alpha)t} \int_0^t e^{(\nu+\alpha)s} u_*(s) ds, \quad t \geq 0. \quad (4.3)$$

Here the integral in (4.3) is finite since $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ is a process and the integral appears also in the similar formula for $x_*(\cdot)$.

Set $\beta = \eta/2$. Then due to (4.2) and (4.3) for arbitrary $\zeta: |\zeta - x_0| < \beta$ we have

$$\begin{aligned} \max_{x \in [x(\zeta; t), x_*(t)]} \left| \langle f_x^0(t, x, u_*(t)), x(\zeta; t) - x_*(t) \rangle \right| &\stackrel{a.e.}{\leq} \|\zeta - x_0\| \frac{2\sigma e^{-\rho t} e^{-(\nu+\alpha)t}}{\eta^{1-\sigma}} \\ &= \frac{2\sigma \|\zeta - x_0\|}{\eta^{1-\sigma}} e^{-(\theta+\nu-\alpha)t}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Hence, if

$$\theta + \nu > \alpha \quad \left(= \frac{p}{2 - \sigma} \right). \quad (4.4)$$

then assumption (A2) is satisfied. In what follows we assume that this condition is fulfilled.³

Due to Theorem 3.1, the LWOO process $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ satisfies the core conditions of the maximum principle together with the adjoint variable $\psi(\cdot)$ defined as (see (3.6) and (4.2))

$$\psi(t) = e^{(\nu+\alpha)t} \int_t^\infty e^{-(\nu+\alpha)s} \frac{\sigma e^{-\rho s}}{(x_*(s))^{1-\sigma}} ds = \sigma e^{(\nu+\alpha)t} \int_t^\infty \frac{e^{-(\nu+\theta-\alpha)s}}{(x_*(s))^{1-\sigma}} ds, \quad t \geq 0. \quad (4.5)$$

³In the opposite case, i.e. when $\theta + \nu \leq \alpha$ there is no LWOO admissible pair $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ in problem $(\tilde{P}1)$, as it can be shown directly.

As far as $x_*(t) \geq \eta$, $t \geq 0$, equality (4.5) implies

$$\psi(t) \leq \frac{\sigma}{\eta^{1-\sigma}} e^{(\nu+\alpha)t} \int_t^\infty e^{-(\nu+\theta-\alpha)s} ds = \frac{\sigma}{\eta^{1-\sigma}(\nu+\theta-\alpha)} e^{-\rho t}, \quad t \geq 0. \quad (4.6)$$

On the other hand, as it is shown in [6], the following estimate holds true for the LWOO control $u_*(t)$:

$$u_*(t) \stackrel{a.e.}{\leq} M = \frac{4}{b} \frac{\sigma}{\eta^{1-\sigma}} \left(\frac{1}{\theta + \nu - \alpha} + 2 \right), \quad t \geq 0.$$

Due to (4.1), this estimate immediately implies that $x_*(\cdot)$ is uniformly bounded from above:

$$x_*(t) \leq \kappa = \max \left\{ K_0, \frac{M}{\nu + \alpha} \right\}, \quad t \geq 0.$$

Hence, due to (4.5) we get the opposite estimate for $\psi(\cdot)$:

$$\psi(t) \geq \frac{\sigma}{\kappa^{1-\sigma}} e^{(\nu+\alpha)t} \int_t^\infty e^{-(\nu+\theta-\alpha)s} ds = \frac{\sigma}{\kappa^{1-\sigma}(\nu+\theta-\alpha)} e^{-\rho t}, \quad t \geq 0. \quad (4.7)$$

Combing estimates (4.6) and (4.7) we get the following characterization of the asymptotic behavior of the adjoint variable $\psi(\cdot)$:

$$\frac{\sigma}{\kappa^{1-\sigma}(\nu+\theta-\alpha)} e^{-\rho t} \leq \psi(t) \leq \frac{\sigma}{\eta^{1-\sigma}(\nu+\theta-\alpha)} e^{-\rho t}, \quad t \geq 0. \quad (4.8)$$

Note, that due to (4.8) both the standard transversality conditions $\psi(t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$ and $\psi(t)x_*(t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$ are valid only if the discount rate $\rho = \theta - 2\alpha$ is positive, i.e. if $\alpha < \theta/2$.

In the case

$$\frac{\theta}{2} \leq \alpha < \theta + \nu,$$

the discount rate $\rho = \theta - 2\alpha$ is non-positive, and (4.8) implies that both these standard transversality conditions fail. In this case a solution with a finite objective value does not exist, although a LWOO solution exists, as it is shown in [6].

As far as $(\tilde{P}1)$ is an autonomous problem with exponential discounting $e^{-\rho t}$, $t \geq 0$, one can reformulate Theorem 3.1 in an equivalent way in terms of the current value adjoint variable $\xi(\cdot)$: $\xi(t) = e^{\rho t} \psi(t)$, $t \geq 0$.

Due to (4.5) the current value adjoint variable $\xi(\cdot)$ is defined by the following equality:

$$\xi(t) = \sigma e^{(\rho+\nu+\alpha)t} \int_t^\infty \frac{e^{-(\nu+\theta-\alpha)s}}{(x_*(s))^{1-\sigma}} ds, \quad t \geq 0, \quad (4.9)$$

and (see (4.8))

$$\frac{\sigma}{\kappa^{1-\sigma}(\nu+\theta-\alpha)} \leq \xi(t) \leq \frac{\sigma}{\eta^{1-\sigma}(\nu+\theta-\alpha)}, \quad t \geq 0.$$

Thus, although function $\psi(\cdot)$ can be unbounded (if $\rho = \theta - 2\alpha$ is negative, i.e. in the case $\alpha > \theta/2$), the corresponding current value adjoint variable $\xi(\cdot)$ is always bounded for all admissible values of the parameters (see (4.4)).

The current value adjoint system for problem $(\tilde{P}1)$ reads as

$$\dot{\xi}(t) = (\rho + \lambda)\xi(t) - \sigma x_*(t)^{\sigma-1} = (\nu + \theta - \alpha)\xi - \sigma x_*(t)^{\sigma-1} \quad (4.10)$$

and the maximum condition takes the form

$$u_*(t) \stackrel{a.e.}{=} \frac{1}{b} \xi(t), \quad t \geq 0. \quad (4.11)$$

Due to Theorem 3.1 and (4.4) the current value adjoint variable $\xi(\cdot)$ defined by (4.9) is the unique bounded solution of (4.10) while the LWOO control $u_*(\cdot)$ satisfies (4.11).

Thus we come up with the following system of equations determining the LWOO solution in problem ($\tilde{P}1$):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -(\nu + \alpha)x(t) + \frac{1}{b}\xi(t), & x(0) &= K_0, \\ \dot{\xi}(t) &= -\sigma x(t)^{\sigma-1} + (\nu + \theta - \alpha)\xi(t), & \xi(\cdot) &\text{ is bounded.}\end{aligned}$$

According to Theorem 3.1 this specific “boundary value problem” has a unique solution. This property makes it possible to apply standard methods of investigation, based on the fact that $(x(0), \xi(0)) = (K_0, \xi(0))$ must belong to the stable invariant manifold of the above system (see e.g. [14]).

In the particular case $\sigma = 1$ the solution is explicit. Noticing that $\alpha = p$ in this case we obtain:

$$\xi(t) \equiv \frac{1}{\nu + \theta - p}, \quad t \geq 0.$$

Hence, the LWOO optimal control for the original problem is

$$I(t) = \frac{e^{pt}}{b(\nu + \theta - p)}, \quad t \geq 0,$$

provided that $\theta + \nu > p$. We stress again that in the case $\theta + \nu \leq p$ a LWOO solution does not exist, and that in the case $\frac{\theta}{2} \leq p < \theta + \nu$ the LWOO solution produces infinite objective value, thus it has no “classical” meaning.

REFERENCES

1. **Alexeev V.M., Tikhomirov V.M., and Fomin S.V.** Optimal control. Moscow: Nauka, 1979. 430 p. (Plenum, New York, 1987).
2. **Aseev S.M., Besov K.O., and Kryazhimskii A.V.** Infinite-horizon optimal control problems in economics // Math. Surv. 2012. Vol. 67, no. 2. P. 195–253.
3. **Aseev S.M. and Kryazhimskii A.V.** The Pontryagin Maximum principle and transversality conditions for a class optimal control problems with infinite time horizons // SIAM J. Control Optim. 2004. Vol. 43, no. 3. P. 1094–1119.
4. **Aseev S.M. and Kryazhimskii A.V.** The Pontryagin maximum principle and optimal economic growth problems // Proc. Steklov Inst. Math. 2007. Vol. 257. P. 1–255.
5. **Aseev S.M. and Kryazhimskii A.V.** On a class of optimal control problems arising in mathematical economics // Proc. Steklov Inst. Math. 2008. Vol. 262. P. 1–16.
6. **Aseev S.M. and Veliov V.M.** Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems with dominating discount // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B Appl. Algorithms. 2012. Vol. 19, no. 1-2. P. 43–63.
7. **Aseev S.M. and Veliov V.M.** Needle variations in infinite-horizon optimal control // Variational and Optimal Control Problems on Unbounded Domains / eds. G. Wolansky and A. J. Zaslavski. Providence: Amer. Math. Soc, 2014. P. 1–17. (Contemporary Mathematics; vol. 619.)
8. **Barro R.J. and Sala-i-Martin X.** Economic growth. New York: McGraw Hill, 1995. 539 p.
9. **Besov K.O.** On necessary optimality conditions for infinite-horizon economic growth problems with locally unbounded instantaneous utility function // Proc. Steklov Inst. Math. 2014. Vol. 284. P. 50–80.
10. **Carlson D.A., Haurie A.B., and Leizarowitz A.** Infinite horizon optimal control. Deterministic and stochastic systems. Berlin: Springer, 1991. 332 p.
11. **Clarke F.H.** Optimization and nonsmooth analysis. New York: A Wiley, 1983. 308 p.
12. **Clarke F.** Functional analysis, calculus of variations and optimal control. London: Springer-Verlag, 2013. 591 p. (Graduate Texts in Mathematics; vol. 264.)
13. **Filippov A.F.** Differential equations with discontinuous right-hand sides. Moscow: Nauka, 1985. 225 p. (Kluwer, Dordrecht, 1988).

14. **Grass D., Caulkins J.P., Feichtinger G., Tragler G., and Behrens D.A.** Optimal control of nonlinear processes: with applications in drugs, corruption and terror. Berlin: Springer, 2008. 552 p.
15. **Halkin H.** Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons // *Econometrica*. 1974. Vol. 42. P. 267–272.
16. **Hartman P.** Ordinary differential equations. New York: J. Wiley & Sons, 1964. 612 p.
17. **Hu S. and Papageorgiou N.S.** Handbook of Multivalued Analysis. Volume I: Theory. Dordrecht: Kluwer, 1997. 980 p.
18. **Michel P.** On the transversality condition in infinite horizon optimal problems // *Econometrica*. 1982. Vol. 50. P. 975–985.
19. **Natanson I.P.** Theory of functions of a real variable. Moscow-Leningrad: GITTL, 1950. 399 p. (Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1955).
20. **Pontryagin L.S., Boltyanskij V.G., Gamkrelidze R.V., and Mishchenko E.F.** The mathematical theory of optimal processes. Moscow: Fizmatgiz, 1961. 393 p. (Pergamon, Oxford, 1964).
21. **Shell K.** Applications of Pontryagin's maximum principle to economics. Mathematical systems theory and economics, I. Berlin: Springer, 1969. P. 241–292 (Lect. Notes Oper. Res. Math. Econ.; vol. 11.)
22. **Skritek B. and Veliov V.M.** On the infinite-horizon optimal control of age-structured systems. Research Report 2014-03, ORCOS. Vienna: Vienna University of Technology, 2014. 26 p.
URL: http://orcos.tuwien.ac.at/fileadmin/t/orcos/Research_Reports/2014-03.pdf.

Received June 8, 2014

S.M. Aseev

Steklov Mathematical Institute, Gubkina str. 8, Moscow, 119991, Russia

International Institute for Applied Systems Analysis, Schlossplatz 1,

Laxenburg, A-2361, Austria

E-mail: aseev@mi.ras.ru

V. M. Veliov

Institute of Mathematical Methods in Economics, Vienna University of Technology,

Argentinierstr. 8/E105-4, A-1040 Vienna, Austria;

E-mail: veliov@tuwien.ac.at

УДК 517.977

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ НА МИНИМАКС ПОЗИЦИОННОГО ФУНКЦИОНАЛА¹

М. И. Гомоюнов, Д. В. Корнев, Н. Ю. Лукоянов

Рассматривается задача об управлении по принципу обратной связи движением линейной динамической системы на минимакс позиционного показателя качества в виде нормы совокупности отклонений движения в заданные моменты времени от заданных целевых точек. Задача формализуется как позиционная дифференциальная игра. Дан численный метод для приближенного нахождения функции цены этой игры и оптимальных (минимаксного и максиминного) законов управления. Метод основан на рекуррентной конструкции выпуклых сверху (вогнутых) оболочек вспомогательных программных функций. При этом используются “пиксельная” аппроксимация областей определения овыпукляемых функций и приближенное построение выпуклой сверху оболочки функции как нижней огибающей конечного набора опорных гиперплоскостей к ее подграфику.

Ключевые слова: оптимальное управление, дифференциальные игры, численные методы.

M. I. Gomoyunov, D. V. Kornev, N. Yu. Lukoyanov. On the numerical solution of a minmax control problem with a positional functional.

We consider a minmax feedback control problem for a linear dynamic system with a positional quality criterion, which is the norm of the set of deviations of the motion from given target points at given times. The problem is formalized as a positional differential game. A numerical method is given for finding an approximate value of the game and constructing an optimal (minmax and maxmin) control law. The method is based on the recursive construction of upper convex (concave) hulls of auxiliary program functions. In addition, we use the “pixel” approximation of the domains of convexified functions and the approximate construction of the upper convex hull of a function as the lower envelope of a finite set of support hyperplanes of its subgraph.

Keywords: optimal control, differential games, numerical methods.

Введение

Тематика статьи восходит к работам Н. Н. Красовского, посвященным исследованию позиционных дифференциальных игр с нетерминальными показателями качества, оценивающими движение конфликтно-управляемой динамической системы по совокупности состояний, реализовавшихся в некоторые заданные моменты времени (см., например, [1–4]).

Рассматривается задача об управлении по принципу обратной связи движением линейной по фазовому вектору динамической системы в условиях помех или противодействия. Качество процесса управления оценивается позиционным (в смысле [3, с. 43]) функционалом в виде нормы совокупности отклонений движения в заданные моменты времени от заданных целевых точек. В рамках теоретико-игрового подхода [1; 3] задача вкладывается в позиционную дифференциальную игру на минимакс-максимин этого функционала. Цель статьи — численный метод для приближенного нахождения функции цены этой игры и построения оптимальных (минимаксного и максиминного) законов управления.

Вопросам численного решения дифференциальных игр и смежных задач посвящены, например, работы [5–14]. Однако в основном в них рассматривались задачи, в которых качество процесса управления оценивается только по состоянию управляемой системы в конечный (терминальный) момент времени. Предлагаемый ниже численный метод ориентирован на решение

¹Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН “Динамические системы и теория управления” при финансовой поддержке УрО РАН (12-П-1-1002), а также при поддержке РФФИ (12-01-00290-а, 14-01-31319-мол_а).

линейно-выпуклых задач с по существу нетерминальными показателями качества. Его основу составляет процедура рекуррентного построения выпуклых сверху (вогнутых) оболочек вспомогательных программных функций. Процедура реализует идеи стохастического программного синтеза [1; 2; 15] и тесно связана с известными в теории дифференциальных игр попятными максиминными конструкциями (см., например, [16–20]). Она была предложена в работах [2; 21] и развивалась для различных задач, например, в [3; 4; 22; 23]. В наиболее завершенном виде эта процедура дана в [24]. В [25] доказана ее устойчивость по отношению к вычислительным и информационным погрешностям. В [26] намечен численный метод реализации этой процедуры посредством “пиксельной” аппроксимации областей определения овыпукляемых функций и приближенного построения выпуклой сверху оболочки функции как нижней огибающей конечного набора опорных гиперплоскостей к ее подграфику. В настоящей статье дается обобщение и обоснование данного численного метода.

1. Постановка задачи

Рассмотрим динамическую систему, движение которой описывается уравнением

$$dx/dt = A(t)x + f(t, u, v), \quad t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in P \subset \mathbb{R}^{n_u}, \quad v \in Q \subset \mathbb{R}^{n_v}. \quad (1.1)$$

Здесь t — время, x — фазовый вектор, u — вектор управления, v — вектор помехи; t_0 и ϑ — фиксированные моменты времени ($t_0 < \vartheta$); P и Q — компакты; $A(t)$ — непрерывная на $[t_0, \vartheta]$ матрица-функция; $f(t, u, v)$ — непрерывная на $[t_0, \vartheta] \times P \times Q$ вектор-функция.

Введем множество K возможных позиций $(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ системы (1.1):

$$K = \{(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n : \|x\| \leq (1 + R_0)e^{(t-t_0)\lambda} - 1\}, \quad (1.2)$$

$$R_0 > 0, \quad \lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}, \quad \lambda_1 = \max_{t \in [t_0, \vartheta]} \|A(t)\|, \quad \lambda_2 = \max_{(t, u, v) \in [t_0, \vartheta] \times P \times Q} \|f(t, u, v)\|,$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора и согласованная с ней норма матрицы.

Пусть $(t_*, x_*) \in K$, $t_* < \vartheta$. Допустимыми реализациями управления и помехи считаем измеримые по Борелю функции $u[t_*, \cdot] \vartheta = \{u(t) \in P, t_* \leq t < \vartheta\}$ и $v[t_*, \cdot] \vartheta = \{v(t) \in Q, t_* \leq t < \vartheta\}$. Из позиции (t_*, x_*) такие реализации единственным образом порождают движение системы (1.1) — абсолютно непрерывную функцию $x[t_*, \cdot] \vartheta = \{x(t) \in \mathbb{R}^n, t_* \leq t \leq \vartheta\}$, которая удовлетворяет равенству $x(t_*) = x_*$ и вместе с $u = u(t)$ и $v = v(t)$ почти всюду на $[t_*, \vartheta]$ удовлетворяет уравнению (1.1). При этом $(t, x(t)) \in K$ для любого $t \in [t_*, \vartheta]$.

Пусть заданы моменты времени $\vartheta_i \in [t_0, \vartheta] : \vartheta_i < \vartheta_{i+1}, i = \overline{1, N-1}, \vartheta_N = \vartheta$, а также $(d_i \times n)$ -матрицы $D_i, 1 \leq d_i \leq n$, векторы $c_i \in \mathbb{R}^n$ и нормы $\mu_i(l_i, \dots, l_N), (l_i, \dots, l_N) \in \mathbb{R}^{d_i} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_N}, i = \overline{1, N}$. Качество движения $x[t_*, \cdot] \vartheta$ оценивается показателем

$$\gamma = \gamma(x[t_*, \cdot] \vartheta) = \mu_{h(t_*)}(D_{h(t_*)}(x(\vartheta_{h(t_*)}) - c_{h(t_*)}), \dots, D_N(x(\vartheta_N) - c_N)), \quad (1.3)$$

где

$$h(t) = \min \{i = \overline{1, N} : \vartheta_i \geq t\}, \quad t \in [t_0, \vartheta]. \quad (1.4)$$

При этом предполагается, что существуют четные по ν функции $\sigma_i(l_i, \nu), (l_i, \nu) \in \mathbb{R}^{d_i} \times \mathbb{R}$, для которых справедливы равенства

$$\mu_i(l_i, \dots, l_N) = \sigma_i(l_i, \mu_{i+1}(l_{i+1}, \dots, l_N)), \quad (l_i, \dots, l_N) \in \mathbb{R}^{d_i} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_N}, \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (1.5)$$

Тогда [24] функции $\sigma_i(\cdot)$ будут нормами, а показатель γ будет позиционным [3, с. 43].

Задача управления состоит в том, чтобы доставить показателю γ как можно меньшее значение. В рамках теоретико-игрового подхода [1; 3] эта задача вкладывается в антагонистическую дифференциальную игру двух лиц (u — действие первого игрока, v — действие второго). Будем предполагать, что выполняется условие седловой точки для маленькой игры [1, с. 79]:

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle f(t, u, v), m \rangle = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle f(t, u, v), m \rangle, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad m \in \mathbb{R}^n, \quad (1.6)$$

где символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение векторов, и будем рассматривать дифференциальную игру в классах чистых позиционных стратегий

$$u(\cdot) = \{u(t, x, \varepsilon) \in P, t \in [t_0, \vartheta], x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0\}, \quad v(\cdot) = \{v(t, x, \varepsilon) \in Q, t \in [t_0, \vartheta], x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0\}.$$

Тогда [3, с. 71] в силу условия (1.6) и позиционности показателя качества (1.3) эта дифференциальная игра имеет цену $\rho(t, x)$, $(t, x) \in K$, и седловую точку, складывающуюся из минимаксной $u^0(\cdot)$ и максиминной $v^0(\cdot)$ стратегий.

В частности, это означает, что для любого числа $\zeta > 0$ найдутся такие число $\varepsilon_* > 0$ и функция $\delta_*(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$, что будет справедливо следующее утверждение.

Пусть зафиксированы значение $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$, позиция $(t_*, x_*) \in K$, $t_* < \vartheta$, и разбиение

$$\Delta_k\{\tau_j\} = \{\tau_j: \tau_1 = t_*, \tau_j < \tau_{j+1}, j = \overline{1, k}, \tau_{k+1} = \vartheta\} \quad (1.7)$$

отрезка времени $[t_*, \vartheta]$ с диаметром $\delta_k = \max_{j=\overline{1, k}}(\tau_{j+1} - \tau_j) \leq \delta_*(\varepsilon)$.

Тогда, с одной стороны, закон управления $\{u^0(\cdot), \varepsilon, \Delta_k\{\tau_j\}\}$, формирующий воздействия

$$u(t) = u^0(\tau_j, x(\tau_j), \varepsilon), \quad \tau_j \leq t < \tau_{j+1}, \quad j = \overline{1, k},$$

при любой допустимой реализации помехи $v[t_*[\cdot]\vartheta]$ будет обеспечивать неравенство

$$\gamma \leq \rho(t_*, x_*) + \zeta, \quad (1.8)$$

а с другой — закон $\{v^0(\cdot), \varepsilon, \Delta_k\{\tau_j\}\}$, формирующий воздействия помехи

$$v(t) = v^0(\tau_j, x(\tau_j), \varepsilon), \quad \tau_j \leq t < \tau_{j+1}, \quad j = \overline{1, k},$$

для всякой допустимой реализации управления $u[t_*[\cdot]\vartheta]$ будет обеспечивать неравенство

$$\gamma \geq \rho(t_*, x_*) - \zeta. \quad (1.9)$$

Данная работа посвящена численному методу приближенного нахождения цены игры $\rho(\cdot)$ и построения минимаксного, гарантирующего неравенство (1.8), и максиминного, гарантирующего неравенство (1.9), законов управления.

Отметим, что если условие (1.6) не выполняется, то рассматриваемый в работе метод применим для решения задачи, формализуемой в классах “стратегии — контрстратегии”, а также в классах смешанных стратегий (см. [27; 28], соответственно).

2. Вспомогательные построения

Как отмечалось во введении, основу рассматриваемого численного метода решения задачи (1.1), (1.3) составляет процедура [24] попятного построения выпуклых сверху оболочек вспомогательных программных функций. При этом для корректности метода важно, чтобы данные выпуклые оболочки были непрерывными, а их области определения были телесными в $\mathbb{R}^n$. Вообще говоря, эти свойства могут не выполняться. Однако, как будет видно ниже (см. разд. 3), выполнения этих свойств можно добиться при помощи следующего преобразования показателя качества (1.3).

Сначала, задавшись параметром $\alpha > 0$, определим нормы $\mu_N^{[\alpha]}(\cdot)$ и $\sigma_i^{[\alpha]}(\cdot)$, $i = \overline{1, N-1}$, так, чтобы для соответствующих сопряженных норм выполнялись равенства

$$\begin{aligned} \mu_N^{[\alpha]*}(l_N) &= \mu_N^*(l_N) + \alpha \|l_N\|, \quad l_N \in \mathbb{R}^{d_N}, \\ \sigma_i^{[\alpha]*}(l_i, \nu) &= \sigma_i^*(l_i, \nu) + \alpha \sqrt{\|l_i\|^2 + \nu^2}, \quad (l_i, \nu) \in \mathbb{R}^{d_i} \times \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, N-1}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Далее, обозначим

$$\tilde{d}_i = d_i, \quad \tilde{D}_i = D_i, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad \tilde{d}_N = n, \quad \tilde{D}_N = E,$$

где D_i — $(d_i \times n)$ -матрицы из (1.3), а E — единичная $(n \times n)$ -матрица, и, задавшись параметром $\beta > 0$, определим нормы $\mu_N^{[\alpha, \beta]}(\cdot)$ и $\sigma_i^{[\alpha, \beta]}(\cdot)$, $i = \overline{1, N-1}$, по формулам

$$\begin{aligned} \mu_N^{[\alpha, \beta]}(\tilde{l}_N) &= \sqrt{(\mu_N^{[\alpha]}(D_N \tilde{l}_N))^2 + \beta^2 \|\tilde{l}_N\|^2}, \quad \tilde{l}_N \in \mathbb{R}^{\tilde{d}_N}, \\ \sigma_i^{[\alpha, \beta]}(\tilde{l}_i, \nu) &= \sigma_i^{[\alpha]}(\tilde{l}_i, \nu) + \beta \sqrt{\|\tilde{l}_i\|^2 + \nu^2}, \quad (\tilde{l}_i, \nu) \in \mathbb{R}^{\tilde{d}_i} \times \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, N-1}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

после чего в согласии с соотношением (1.5) положим

$$\mu_i^{[\alpha, \beta]}(\tilde{l}_i, \tilde{l}_{i+1}, \dots, \tilde{l}_N) = \sigma_i^{[\alpha, \beta]}(\tilde{l}_i, \mu_{i+1}^{[\alpha, \beta]}(\tilde{l}_{i+1}, \dots, \tilde{l}_N)), \quad (\tilde{l}_i, \dots, \tilde{l}_N) \in \mathbb{R}^{\tilde{d}_i} \times \dots \times \mathbb{R}^{\tilde{d}_N}, \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Рассмотрим новый показатель качества

$$\gamma^{[\alpha, \beta]} = \gamma^{[\alpha, \beta]}(x[t_*[\cdot]\vartheta]) = \mu_{h(t_*)}^{[\alpha, \beta]}(\tilde{D}_{h(t_*)}(x(\vartheta_{h(t_*)}) - c_{h(t_*)}), \dots, \tilde{D}_N(x(\vartheta_N) - c_N)). \quad (2.3)$$

Можно показать, что найдется такое число $M > 0$, что, каковы бы ни были значения параметров $\alpha \in (0, 1]$ и $\beta \in (0, 1]$, для любого $i = \overline{1, N}$ будет выполняться оценка

$$|\mu_i^{[\alpha, \beta]}(\tilde{l}_i, \dots, \tilde{l}_N) - \mu_i(\tilde{l}_i, \dots, D_N \tilde{l}_N)| \leq M(\alpha + \beta) \|(\tilde{l}_i, \dots, \tilde{l}_N)\|, \quad (\tilde{l}_i, \dots, \tilde{l}_N) \in \mathbb{R}^{\tilde{d}_i} \times \dots \times \mathbb{R}^{\tilde{d}_N}.$$

Поэтому для любого числа $\xi > 0$ можно указать такие значения $\alpha_0 > 0$ и $\beta_0 > 0$, что для всякого движения $x[t_*[\cdot]\vartheta]$ системы (1.1), порожденного из позиции $(t_*, x_*) \in K$, $t_* < \vartheta$, допустимыми реализациями $u[t_*[\cdot]\vartheta]$ и $v[t_*[\cdot]\vartheta]$, будет справедливо неравенство

$$|\gamma^{[\alpha_0, \beta_0]}(x[t_*[\cdot]\vartheta]) - \gamma(x[t_*[\cdot]\vartheta])| \leq \xi. \quad (2.4)$$

Рассмотрим дифференциальную игру для системы (1.1) с показателем качества (2.3). Цену этой игры обозначим через $\rho^{[\alpha, \beta]}(t_*, x_*)$, $(t_*, x_*) \in K$. Вследствие оценки (2.4) имеем, что для любого числа $\xi > 0$ можно указать такие значения $\alpha_0 > 0$ и $\beta_0 > 0$, что для всякой позиции $(t_*, x_*) \in K$ будет выполняться неравенство

$$|\rho^{[\alpha_0, \beta_0]}(t_*, x_*) - \rho(t_*, x_*)| \leq \xi. \quad (2.5)$$

Таким образом, задавшись достаточно малыми значениями $\alpha_0 > 0$ и $\beta_0 > 0$, можно перейти от задачи (1.1), (1.3) к задаче (1.1), (2.3).

3. Базовая процедура

Пусть зафиксированы $\alpha_0 > 0$ и $\beta_0 > 0$. Применим к задаче (1.1), (2.3) при $\alpha = \alpha_0$ и $\beta \in (0, \beta_0]$ конструкции из [24; 25].

Положим

$$\sigma_N^{[\alpha_0, \beta]}(l_N, \nu) = \sqrt{(\mu_N^{[\alpha_0]}(l_N))^2 + \nu^2}, \quad (l_N, \nu) \in \mathbb{R}^{d_N} \times \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

$$L_i(\beta) = \{(l, \nu) \in \mathbb{R}^{d_i} \times \mathbb{R} : \sigma_i^{[\alpha_0, \beta]*}(l, \nu) \leq 1, \nu \geq 0\}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (3.2)$$

Сразу же отметим, что в силу соотношений (2.2) имеют место включения

$$L_i(\beta) \subset L_i(\beta_0) \subset [L_i(\beta)]^{\beta_0 - \beta}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (3.3)$$

Здесь и всюду далее через $[L]^\eta$, где $L \subset \mathbb{R}^d$ и $\eta > 0$, обозначаем замкнутую η -окрестность множества L в $\mathbb{R}^d$.

Пусть $t_* \in [t_0, \vartheta]$ и $\Delta_k\{\tau_j\}$ — разбиение отрезка времени $[t_*, \vartheta]$ вида (1.7), причем

$$\vartheta_i \in \Delta_k\{\tau_j\}, \quad i = \overline{h(t_*)}, N. \quad (3.4)$$

Пусть $X(t, \tau)$ — матрица Коши для уравнения $dx/dt = A(t)x$. Пусть $\eta_X \in (0, 1]$, и матрицы $Y(\vartheta_i, \vartheta)$, $i = \overline{1, N}$, и $Y(\vartheta, \tau_j)$, $j = \overline{1, k+1}$, удовлетворяют следующему условию.

(A1) Справедливы соотношения

$$\|Y(\vartheta_i, \vartheta) - X(\vartheta_i, \vartheta)\| \leq \eta_X, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad \|Y(\vartheta, \tau_j) - X(\vartheta, \tau_j)\| \leq \eta_X, \quad j = \overline{1, k},$$

$$Y(\vartheta_N, \vartheta) = Y(\vartheta, \tau_{k+1}) = E.$$

Определим множества $G_j^\pm(\beta) \subset \mathbb{R}^n$, $j = \overline{1, k+1}$, согласно рекуррентным соотношениям

$$G_{k+1}^+(\beta) = \{m \in \mathbb{R}^n : \|m\| \leq \beta\}, \quad (3.5)$$

$$G_j^-(\beta) = \begin{cases} G_j^+(\beta), & \tau_j \neq \vartheta_h, \\ \{m \in \mathbb{R}^n : M_h(m; \beta) \neq \emptyset\}, & \tau_j = \vartheta_h, \end{cases} \quad j = \overline{1, k+1}, \quad (3.6)$$

$$G_j^+(\beta) = G_{j+1}^-(\beta), \quad j = \overline{1, k}. \quad (3.7)$$

В (3.6) индекс $h = h(\tau_j)$ определяется согласно (1.4) и

$$M_h(m; \beta) = \left\{ (l, \nu, m_*) \in L_h(\beta) \times G_j^+(\beta) : m = \nu m_* + Y^T(\vartheta_h, \vartheta) D_h^T l \right\}. \quad (3.8)$$

Отметим, что для любого $j = \overline{1, k+1}$ множества $G_j^\pm(\beta)$ будут выпуклы и компактны в $\mathbb{R}^n$ и $0 \in G_j^\pm(\beta)$. Благодаря преобразованию (2.2) эти множества будут телесны в $\mathbb{R}^n$. Кроме того, можно указать такую константу $C_1 > 0$, что

$$\|m\| \leq C_1, \quad m \in G_j^\pm(\beta), \quad j = \overline{1, k+1}, \quad (3.9)$$

причем эта константа не зависит от выбора параметра $\beta \in (0, \beta_0]$, момента времени $t_* \in [t_0, \vartheta]$, разбиения (1.7), (3.4) и матриц $Y(\vartheta_i, \vartheta)$, $i = \overline{1, N}$, удовлетворяющих условию (A1).

Пусть $\eta_\psi > 0$, и для скалярных функций $\Delta\psi_j(m)$, $m \in \mathbb{R}^n$, $j = \overline{1, k}$, выполняется условие

(A2) Функции $\Delta\psi_j(m)$, $m \in \mathbb{R}^n$, непрерывны, $\Delta\psi_j(0) \geq 0$, и при $\|m\| \leq C_1$ имеют место оценки

$$\left| \Delta\psi_j(m) - \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle m, X(\vartheta, \tau) f(\tau, u, v) \rangle d\tau \right| \leq \eta_\psi, \quad j = \overline{1, k}.$$

Определим скалярные функции $\varphi_j^\pm(m; \beta)$, $m \in G_j^\pm(\beta)$, $j = \overline{1, k+1}$, по следующим соотношениям:

$$\varphi_{k+1}^+(m; \beta) = -\langle m, c_N \rangle, \quad m \in G_{k+1}^+(\beta), \quad (3.10)$$

$$\varphi_j^-(m; \beta) = \begin{cases} \varphi_j^+(m; \beta), & \tau_j \neq \vartheta_h, \\ \max [\nu \varphi_j^+(m_*; \beta) - \langle l, D_h c_h \rangle], & \tau_j = \vartheta_h, \end{cases} \quad m \in G_j^-(\beta), \quad j = \overline{1, k+1}, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \varphi_j^+(m; \beta) &= \{\psi_j(\cdot; \beta)\}_{G_j^+(\beta)}^*(m), \\ \psi_j(m; \beta) &= \varphi_{j+1}^-(m; \beta) + \Delta\psi_j(m), \quad m \in G_j^+(\beta), \quad j = \overline{1, k}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

В (3.11) максимум берется по $((l, \nu), m_*) \in M_h(m; \beta)$ и $h = h(\tau_j)$. В (3.12) символ $\{\psi(\cdot)\}_G^*$ означает выпуклую сверху оболочку функции $\psi(\cdot)$ на множестве G , т. е. минимальную вогнутую функцию, мажорирующую функцию $\psi(m)$ при $m \in G$.

Отметим, что в силу преобразования (2.1) множества

$$\tilde{B}_i^* = \{(\tilde{l}_i, \dots, \tilde{l}_N) \in \mathbb{R}^{\tilde{d}_i} \times \dots \times \mathbb{R}^{\tilde{d}_N} : \mu_i^{[\alpha_0, \beta]^*}(\tilde{l}_i, \dots, \tilde{l}_N) \leq 1\}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (3.13)$$

являются строго выпуклыми компактами, а стало быть, обладают P -свойством [29]. Поэтому при каждом фиксированном значении параметра $\beta \in (0, \beta_0]$ для любого $j = \overline{1, k+1}$ функции $\varphi_j^\pm(m; \beta)$, $m \in G_j^\pm(\beta)$, будут непрерывны [25, теорема 3].

Пусть $\eta_G > 0$ и множества $\tilde{G}_j^\pm \subset \mathbb{R}^n$, $j = \overline{1, k+1}$, удовлетворяют следующему условию.

(A3) Множества $\tilde{G}_j^\pm$, $j = \overline{1, k+1}$, являются компактами, и имеют место включения

$$\tilde{G}_j^\pm \subset G_j^\pm(\beta_0) \subset [\tilde{G}_j^\pm]^{\eta_G}, \quad j = \overline{1, k+1}.$$

Пусть $\eta_\varphi > 0$, и для скалярных функций $\tilde{\varphi}_j^\pm(m)$, $m \in \tilde{G}_j^\pm$, $j = \overline{1, k+1}$, выполнено условие

(A4) Функции $\tilde{\varphi}_j^\pm(m)$, $m \in \tilde{G}_j^\pm$, $j = \overline{1, k+1}$, непрерывны, и справедливы неравенства

$$|\tilde{\varphi}_j^\pm(m) - \varphi_j^\pm(m; \beta_0)| \leq \eta_\varphi, \quad m \in \tilde{G}_j^\pm, \quad j = \overline{1, k+1}.$$

Определим систему величин

$$e_j^\pm(x) = \max_{m \in \tilde{G}_j^\pm} [\langle m, Y(\vartheta, \tau_j)x \rangle + \tilde{\varphi}_j^\pm(m)], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, k+1}. \quad (3.14)$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Взяв постоянные R_0 и λ из (1.2), положим

$$\tilde{K} = \{(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n : \|x\| \leq (2 + R_0)e^{(t-t_0)\lambda} - 1\} \supset K,$$

$$r_j(\varepsilon) = e^{(\tau_j - t_0)\lambda} \sqrt{\varepsilon + (\tau_j - t_0)\varepsilon}, \quad j = \overline{1, k}.$$

Пусть $\eta_u > 0$ и стратегия управления $u_{\Delta_k}(\cdot)$ удовлетворяет следующему условию экстремального сдвига (см., например, [1, с. 236]) по отношению к величинам $e_j^+(\cdot)$ из (3.14):

(A5) Для любой позиции $(\tau_j, x) \in \tilde{K}$, $j = \overline{1, k}$, справедливы неравенства

$$\max_{v \in Q} \langle x - z_j^u(x, \varepsilon), f(\tau_j, u_{\Delta_k}(\tau_j, x, \varepsilon), v) \rangle \leq \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle x - z_j^u(x, \varepsilon), f(\tau_j, u, v) \rangle + \eta_u,$$

где

$$z_j^u(x, \varepsilon) = x - \frac{r_j(\varepsilon) Y^T(\vartheta, \tau_j) m_j^u(x, \varepsilon)}{\sqrt{1 + \|Y^T(\vartheta, \tau_j) m_j^u(x, \varepsilon)\|^2}},$$

$$m_j^u(x, \varepsilon) \in \arg \max_{m \in \tilde{G}_j^+} \left[\langle m, Y(\vartheta, \tau_j)x \rangle + \tilde{\varphi}_j^+(m) - r_j(\varepsilon) \sqrt{1 + \|Y^T(\vartheta, \tau_j)m\|^2} \right].$$

Пусть для каждого $j = \overline{1, k}$ значение $x(\tau_j)$ фазового вектора системы (1.1) измеряется с погрешностью $\eta_x > 0$, то есть для приближенных значений $y_j \in \mathbb{R}^n$ выполняется условие

(A6) Имеют место оценки

$$\|y_j - x(\tau_j)\| \leq \eta_x, \quad j = \overline{1, k}.$$

Рассмотрим закон $\{u_{\Delta_k}(\cdot), \varepsilon, \Delta_k\{\tau_j\}\}$, формирующий реализацию управления по правилу

$$u(t) = u_{\Delta_k}(\tau_j, y_j, \varepsilon), \quad \tau_j \leq t < \tau_{j+1}, \quad j = \overline{1, k}. \quad (3.15)$$

Следующие теоремы являются следствием результатов работы [25], если учесть непрерывность функций $\varphi_j^\pm(m; \beta_0)$, $m \in G_j^\pm(\beta_0)$, $j = \overline{1, k+1}$, а также соотношения (2.4) и (2.5).

Теорема 1. Для любого числа $\xi > 0$ можно указать значения параметров $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$ и число $\delta > 0$ так, что, каковы бы ни были момент времени $t_* \in [t_0, \vartheta]$ и разбиение $\Delta_k\{\tau_j\}$ вида (1.7), (3.4) с диаметром $\delta_k \leq \delta$, найдутся такие числа $\eta_X \in (0, 1]$, $\eta_\psi > 0$, $\eta_G > 0$ и $\eta_\varphi > 0$, что при условиях (A1)–(A4) для всякой позиции $(t_*, x_*) \in K$ будет справедливо неравенство

$$|e_1^-(x_*) - \rho(t_*, x_*)| \leq \xi.$$

Теорема 2. Для любого числа $\zeta > 0$ можно указать значения параметров $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$, число $\varepsilon^* > 0$ и функцию $\delta^*(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, так, что каковы бы ни были значение $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, момент времени $t_* \in [t_0, \vartheta]$ и разбиение $\Delta_k\{\tau_j\}$ вида (1.7), (3.4) с диаметром $\delta_k \leq \delta^*(\varepsilon)$, найдутся такие числа $\eta_X \in (0, 1]$, $\eta_\psi > 0$, $\eta_G > 0$, $\eta_\varphi > 0$, $\eta_u > 0$ и $\eta_x > 0$, что при условиях (A1)–(A6) закон управления $\{u_{\Delta_k}(\cdot), \varepsilon, \Delta_k\{\tau_j\}\}$ для всякой позиции $(t_*, x_*) \in K$ и любой допустимой реализации помехи $v[t_*[\cdot]\vartheta]$ будет обеспечивать неравенство (1.8).

Пусть $\eta_v > 0$ и стратегия формирования помехи $v_{\Delta_k}(\cdot)$ удовлетворяет следующему условию экстремального сдвига по отношению к величинам $e_j^+(\cdot)$ из (3.14):

(A7) Для любой позиции $(\tau_j, x) \in \tilde{K}$, $j = \overline{1, k}$, справедливы неравенства

$$\min_{u \in P} \langle z_j^v(x, \varepsilon) - x, f(\tau_j, u, v_{\Delta_k}(\tau_j, x, \varepsilon)) \rangle \geq \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle z_j^v(x, \varepsilon) - x, f(\tau_j, u, v) \rangle - \eta_v,$$

где

$$z_j^v(x, \varepsilon) = x + \frac{r_j(\varepsilon) Y^T(\vartheta, \tau_j) m_j^v(x, \varepsilon)}{\sqrt{1 + \|Y^T(\vartheta, \tau_j) m_j^v(x, \varepsilon)\|^2}},$$

$$m_j^v(x, \varepsilon) \in \arg \max_{m \in \tilde{G}_j^+} \left[\langle m, Y(\vartheta, \tau_j) x \rangle + \tilde{\varphi}_j^+(m) + r_j(\varepsilon) \sqrt{1 + \|Y^T(\vartheta, \tau_j) m\|^2} \right].$$

С учетом условия (A6) рассмотрим закон $\{v_{\Delta_k}(\cdot), \varepsilon, \Delta_k\{\tau_j\}\}$, формирующий реализацию помехи по правилу

$$v(t) = v_{\Delta_k}(\tau_j, y_j, \varepsilon), \quad \tau_j \leq t < \tau_{j+1}, \quad j = \overline{1, k}. \quad (3.16)$$

Теорема 3. Для любого числа $\zeta > 0$ можно указать значения параметров $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$, число $\varepsilon^* > 0$ и функцию $\delta^*(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, так, что, каковы бы ни были значение $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, момент времени $t_* \in [t_0, \vartheta]$ и разбиение $\Delta_k\{\tau_j\}$ вида (1.7), (3.4) с диаметром $\delta_k \leq \delta^*(\varepsilon)$, найдутся такие числа $\eta_X \in (0, 1]$, $\eta_\psi > 0$, $\eta_G > 0$, $\eta_\varphi > 0$, $\eta_v > 0$ и $\eta_x > 0$, что при условиях (A1)–(A4) и (A6), (A7) закон формирования помехи $\{v_{\Delta_k}(\cdot), \varepsilon, \Delta_k\{\tau_j\}\}$ для всякой позиции $(t_*, x_*) \in K$ и любой допустимой реализации управления $u[t_*[\cdot]\vartheta]$ будет обеспечивать неравенство (1.9).

Доказательство этой теоремы с понятными изменениями повторяет доказательство теоремы 2.

Отметим, что выполнение условий (A1), (A2) и (A5), (A7) обеспечивается стандартными численными методами. В следующих двух разделах описывается численный метод построения аппроксимаций $\tilde{G}_j^\pm$ и $\tilde{\varphi}_j^\pm(\cdot)$ множеств $G_j^\pm(\beta_0)$ (3.5)–(3.8) и функций $\varphi_j^\pm(\cdot; \beta_0)$ (3.10)–(3.12), которые удовлетворяют условиям (A3) и (A4) соответственно.

4. Аппроксимация множеств $G_j^\pm(\beta_0)$

Пусть зафиксированы значения параметров $\alpha_0 > 0$ и $\beta_0 > 0$, момент времени $t_* \in [t_0, \vartheta]$, разбиение $\Delta_k\{\tau_j\}$ вида (1.7), (3.4), а также матрицы $Y(\vartheta_i, \vartheta)$, $i = \overline{1, N}$, и $Y(\vartheta, \tau_j)$, $j = \overline{1, k+1}$, удовлетворяющие условию (A1). Пусть при $\beta \in (0, \beta_0]$ множества $G_j^\pm(\beta)$, $j = \overline{1, k+1}$, определены по соотношениям (3.5)–(3.8). Следующие два утверждения характеризуют зависимость этих множеств от параметра β . Отметим, что для утверждения 2 принципиально указанное в разд. 3 свойство телесности множеств $G_j^\pm(\beta_0)$ в $\mathbb{R}^n$.

Утверждение 1. Для любого $\eta > 0$ существует такое $\beta_* \in (0, \beta_0)$, что

$$G_j^\pm(\beta_0) \subset [G_j^\pm(\beta)]^\eta, \quad \beta \in [\beta_*, \beta_0), \quad j = \overline{1, k+1}.$$

Доказательство. Возьмем константу C_1 из (3.9). Обозначим

$$C_2 = \max_{i=\overline{1, N}} \|Y^T(\vartheta_i, \vartheta) D_i^T\|, \quad C_3 = \max_{(l, \nu) \in L_i(\beta_0), i=\overline{1, N}} \nu \geq 1. \quad (4.1)$$

Определим функции $\eta_j^\pm(\beta) > 0$, $\beta \in (0, \beta_0)$, $j = \overline{1, k+1}$, согласно соотношениям

$$\eta_{k+1}^+(\beta) = \beta_0 - \beta, \quad (4.2)$$

$$\eta_j^-(\beta) = \begin{cases} \eta_j^+(\beta), & \tau_j \neq \vartheta_h, \\ (C_1 + C_2)(\beta_0 - \beta) + C_3 \eta_j^+(\beta), & \tau_j = \vartheta_h, \end{cases} \quad h = h(\tau_j), \quad j = \overline{1, k+1}, \quad (4.3)$$

$$\eta_j^+(\beta) = \eta_{j+1}^-(\beta), \quad j = \overline{1, k}. \quad (4.4)$$

Выберем $\beta_* \in (0, \beta_0)$ так, чтобы выполнялось неравенство $\eta_1^-(\beta_*) \leq \eta$. Тогда по построению (4.2)–(4.4) для $\beta \in [\beta_*, \beta_0)$ имеем $\eta_j^\pm(\beta) \leq \eta$, $j = \overline{1, k+1}$. Поэтому достаточно проверить, что

$$G_j^\pm(\beta_0) \subset [G_j^\pm(\beta)]^{\eta_j^\pm(\beta)}, \quad j = \overline{1, k+1}.$$

В согласии с (3.5) и (4.2) получаем

$$G_{k+1}^+(\beta_0) = [G_{k+1}^+(\beta)]^{\beta_0 - \beta} = [G_{k+1}^+(\beta)]^{\eta_{k+1}^+(\beta)}. \quad (4.5)$$

Далее, по индукции пусть $j = \overline{1, k+1}$ и выполняется включение

$$G_j^+(\beta_0) \subset [G_j^+(\beta)]^{\eta_j^+(\beta)}. \quad (4.6)$$

Покажем справедливость включения

$$G_j^-(\beta_0) \subset [G_j^-(\beta)]^{\eta_j^-(\beta)}. \quad (4.7)$$

В случае $\tau_j \neq \vartheta_h$, $h = h(\tau_j)$, включение (4.7) вытекает непосредственно из соотношений (3.6), (4.3) и (4.6). Рассмотрим случай $\tau_j = \vartheta_h$. Для $m \in G_j^-(\beta_0)$ в соответствии с (3.6) и (3.8) возьмем $(l, \nu) \in L_h(\beta_0)$ и $m_* \in G_j^+(\beta_0)$ такие, что $m = \nu m_* + Y^T(\vartheta_h, \vartheta) D_h^T l$. Учитывая (3.3) и (4.6), выберем $(\tilde{l}, \tilde{\nu}) \in L_h(\beta)$ и $\tilde{m}_* \in G_j^+(\beta)$ так, чтобы $\|\tilde{l} - l\|^2 + |\tilde{\nu} - \nu|^2 \leq (\beta_0 - \beta)^2$ и $\|\tilde{m}_* - m_*\| \leq \eta_j^+(\beta)$. Положим $\tilde{m} = \tilde{\nu} \tilde{m}_* + Y^T(\vartheta_h, \vartheta) D_h^T \tilde{l}$. Тогда в согласии с (3.6) и (3.8) имеем $\tilde{m} \in G_j^-(\beta)$, и с учетом (4.3) справедлива оценка $\|\tilde{m} - m\| \leq \eta_j^-(\beta)$. Это завершает доказательство включения (4.7) в случае $\tau_j = \vartheta_h$. Теперь, если $j > 1$, из (4.7) в силу (3.7) и (4.4) выводим $G_{j-1}^+(\beta_0) \subset [G_{j-1}^+(\beta)]^{\eta_{j-1}^+(\beta)}$. Утверждение доказано.

Утверждение 2. Для любого $\beta \in (0, \beta_0)$ существует такое $\eta > 0$, что

$$[G_j^\pm(\beta)]^\eta \subset G_j^\pm(\beta_0), \quad j = \overline{1, k+1}.$$

Доказательство. Заметим, что достаточно показать включения $G_j^\pm(\beta) \subset \text{int } G_j^\pm(\beta_0)$, $j = \overline{1, k+1}$, где символ $\text{int } G$ означает внутренность множества $G \subset \mathbb{R}^n$.

В силу (4.5) имеем $G_{k+1}^+(\beta) \subset \text{int } G_{k+1}^+(\beta_0)$. Далее, по индукции пусть $j = \overline{1, k+1}$ и

$$G_j^+(\beta) \subset \text{int } G_j^+(\beta_0). \quad (4.8)$$

Покажем, что

$$G_j^-(\beta) \subset \text{int } G_j^-(\beta_0). \quad (4.9)$$

В случае $\tau_j \neq \vartheta_h$, $h = h(\tau_j)$, включение (4.9) вытекает из соотношений (3.6) и (4.8). Рассмотрим случай $\tau_j = \vartheta_h$. Обозначим через $\varrho(m^*|G)$, $m^* \in \mathbb{R}^n$, опорную функцию множества $G \subset \mathbb{R}^n$. Тогда [30, теорема 13.1] в силу включения (4.8) имеет место неравенство

$$\varrho(m^*|G_j^+(\beta)) < \varrho(m^*|G_j^+(\beta_0)), \quad m^* \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad (4.10)$$

а для доказательства включения (4.9) достаточно проверить неравенство

$$\varrho(m^*|G_j^-(\beta)) < \varrho(m^*|G_j^-(\beta_0)), \quad m^* \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \quad (4.11)$$

Учитывая (3.2), (3.6) и (3.8), можно показать, что справедливо равенство

$$\varrho(m^*|G_j^-(\beta)) = \sigma_h^{[\alpha_0, \beta]}(D_h Y(\vartheta_h, \vartheta)m^*, \varrho(m^*|G_j^+(\beta))), \quad m^* \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in (0, \beta_0]. \quad (4.12)$$

Так как в силу (2.2) и (3.1) функция $\sigma_h^{[\alpha_0, \beta]}(l, \nu)$, $(l, \nu) \in \mathbb{R}^{d_h} \times \mathbb{R}$, является строго возрастающей по ν при $\nu \geq 0$, то неравенство (4.11) следует непосредственно из соотношений (4.10) и (4.12). Далее, если $j > 1$, то из (4.9) с учетом (3.7) выводим $G_{j-1}^+(\beta) \subset \text{int } G_{j-1}^+(\beta_0)$. Утверждение доказано.

Перейдем к построению аппроксимаций множеств $G_j^\pm(\beta_0)$, $j = \overline{1, k+1}$, на основе “пиксельного” представления множеств в $\mathbb{R}^n$. Для заданного числа $\xi > 0$, играющего роль “размера пикселя”, рассмотрим отображение

$$\Pi_\xi m = \xi \text{round}(m/\xi), \quad m \in \mathbb{R}^n,$$

где $\text{round}(\cdot)$ — операция покоординатного округления до ближайшего целого числа. Отметим, что для любого множества $G \subset \mathbb{R}^n$ справедливы включения

$$\Pi_\xi G \subset [G]^{\xi\sqrt{n}/2}, \quad G \subset [\Pi_\xi G]^{\xi\sqrt{n}/2}. \quad (4.13)$$

Пусть $\beta \in (0, \beta_0)$, $\xi_L > 0$, и для множеств $L_i(\beta)$ из (3.2) заданы конечные аппроксимации $\tilde{L}_i(\beta)$, удовлетворяющие условию

$$\tilde{L}_i(\beta) \subset L_i(\beta) \subset [\tilde{L}_i(\beta)]^{\xi_L}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (4.14)$$

В согласии с рекуррентными соотношениями (3.5)–(3.8) определим конечные множества $\tilde{G}_j^\pm(\beta) \subset \mathbb{R}^n$, $j = \overline{1, k+1}$:

$$\tilde{G}_{k+1}^+(\beta) = \Pi_\xi \{m \in \mathbb{R}^n : \|m\| \leq \beta\}, \quad (4.15)$$

$$\tilde{G}_j^-(\beta) = \begin{cases} \tilde{G}_j^+(\beta), & \tau_j \neq \vartheta_h, \\ \Pi_\xi \{m \in \mathbb{R}^n : \tilde{M}_h(m; \beta) \neq \emptyset\}, & \tau_j = \vartheta_h, \end{cases} \quad h = h(\tau_j), \quad j = \overline{1, k+1}, \quad (4.16)$$

$$\tilde{G}_j^+(\beta) = \tilde{G}_{j+1}^-(\beta), \quad j = \overline{1, k}, \quad (4.17)$$

где

$$\tilde{M}_h(m; \beta) = \left\{ (l, \nu), m_* \in \tilde{L}_h(\beta) \times \tilde{G}_j^+(\beta) : m = \nu m_* + Y^T(\vartheta_h, \vartheta) D_h^T l \right\}. \quad (4.18)$$

Следующие два утверждения устанавливают связь между множествами $G_j^\pm(\beta)$ и $\tilde{G}_j^\pm(\beta)$.

Утверждение 3. Для любых $\beta \in (0, \beta_0)$ и $\eta > 0$ существует такое $\xi_* > 0$, что для всех $\xi \in (0, \xi_*]$ и $\xi_L > 0$ будут справедливы включения

$$\tilde{G}_j^\pm(\beta) \subset [G_j^\pm(\beta)]^\eta, \quad j = \overline{1, k+1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Взяв константу C_3 из (4.1), определим функции $\eta_j^\pm(\xi) > 0$, $\xi > 0$, $j = \overline{1, k+1}$, согласно соотношениям

$$\eta_{k+1}^+(\xi) = \xi\sqrt{n}/2, \quad (4.19)$$

$$\eta_j^-(\xi) = \begin{cases} \eta_j^+(\xi), & \tau_j \neq \vartheta_h, \\ C_3\eta_j^+(\xi) + \xi\sqrt{n}/2, & \tau_j = \vartheta_h, \end{cases} \quad h = h(\tau_j), \quad j = \overline{1, k+1}, \quad (4.20)$$

$$\eta_j^+(\xi) = \eta_{j+1}^-(\xi), \quad j = \overline{1, k}. \quad (4.21)$$

Выберем $\xi_* > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $\eta_1^-(\xi_*) \leq \eta$. Тогда в силу (4.19)–(4.21) для $\xi \in (0, \xi_*)$ получаем $\eta_j^\pm(\xi) \leq \eta$, $j = \overline{1, k+1}$. Поэтому достаточно проверить, что

$$\tilde{G}_j^\pm(\beta) \subset [G_j^\pm(\beta)]^{\eta_j^\pm(\xi)}, \quad j = \overline{1, k+1}.$$

Учитывая (3.5), (4.13), (4.15) и (4.19), имеем

$$\tilde{G}_{k+1}^+(\beta) = \Pi_\xi G_{k+1}^+(\beta) \subset [G_{k+1}^+(\beta)]^{\xi\sqrt{n}/2} = [G_{k+1}^+(\beta)]^{\eta_{k+1}^+(\xi)}.$$

Далее, по индукции пусть $j = \overline{1, k+1}$ и выполняется включение

$$\tilde{G}_j^+(\beta) \subset [G_j^+(\beta)]^{\eta_j^+(\xi)}. \quad (4.22)$$

Покажем справедливость включения

$$\tilde{G}_j^-(\beta) \subset [G_j^-(\beta)]^{\eta_j^-(\xi)}. \quad (4.23)$$

В случае $\tau_j \neq \vartheta_h$, $h = h(\tau_j)$, включение (4.23) следует из соотношений (3.6), (4.16), (4.20) и (4.22). Рассмотрим случай $\tau_j = \vartheta_h$. Для $m \in \tilde{G}_j^-(\beta)$ в соответствии с (4.16) и (4.18) возьмем $\tilde{m} \in \mathbb{R}^n$, $(\tilde{l}, \tilde{\nu}) \in \tilde{L}_h(\beta)$ и $\tilde{m}_* \in \tilde{G}_j^+(\beta)$ такие, что $m = \Pi_\xi \tilde{m}$ и $\tilde{m} = \tilde{\nu}\tilde{m}_* + Y^T(\vartheta_h, \vartheta)D_h^T\tilde{l}$. Учитывая (4.22), выберем $m_* \in G_j^+(\beta)$ так, чтобы $\|m_* - \tilde{m}_*\| \leq \eta_j^+(\xi)$. Положим $\hat{m} = \tilde{\nu}m_* + Y^T(\vartheta_h, \vartheta)D_h^T\tilde{l}$. Тогда, так как в силу (4.14) имеем $(\tilde{l}, \tilde{\nu}) \in L_h(\beta)$, то в согласии с (3.6) и (3.8) получаем $\hat{m} \in G_j^-(\beta)$ и с учетом (4.13) и (4.20) выводим

$$\|\hat{m} - m\| \leq \|\hat{m} - \tilde{m}\| + \|\tilde{m} - m\| \leq C_3\eta_j^+(\xi) + \xi\sqrt{n}/2 = \eta_j^-(\xi).$$

Таким образом, включение (4.23) имеет место и в случае $\tau_j = \vartheta_h$. Далее, если $j > 1$, из (4.23), если учесть (3.7), (4.17) и (4.21), получаем $\tilde{G}_{j-1}^+(\beta) \subset [G_{j-1}^+(\beta)]^{\eta_{j-1}^+(\xi)}$. Утверждение доказано.

Утверждение 4. Для любых $\beta \in (0, \beta_0)$ и $\eta > 0$ существуют такие $\xi_* > 0$ и $\xi_L > 0$, что для всех $\xi \in (0, \xi_*)$ будут справедливы включения

$$G_j^\pm(\beta) \subset [\tilde{G}_j^\pm(\beta)]^\eta, \quad j = \overline{1, k+1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Взяв константу C_1 из (3.9), а константы C_2 и C_3 — из (4.1), определим функции $\eta_j^\pm(\xi, \xi_L) > 0$, $\xi > 0$, $\xi_L > 0$, $j = \overline{1, k+1}$:

$$\eta_{k+1}^+(\xi, \xi_L) = \xi\sqrt{n}/2, \quad (4.24)$$

$$\eta_j^-(\xi, \xi_L) = \begin{cases} \eta_j^+(\xi, \xi_L), & \tau_j \neq \vartheta_h, \\ \xi\sqrt{n}/2 + (C_1 + C_2)\xi_L + C_3\eta_j^+(\xi, \xi_L), & \tau_j = \vartheta_h, \end{cases} \quad h = h(\tau_j), \quad j = \overline{1, k+1}, \quad (4.25)$$

$$\eta_j^+(\xi, \xi_L) = \eta_{j+1}^-(\xi, \xi_L), \quad j = \overline{1, k}. \quad (4.26)$$

Выберем $\xi_* > 0$ и $\xi_L > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $\eta_1^-(\xi_*, \xi_L) \leq \eta$. Тогда по построению (4.24)–(4.26) для $\xi \in (0, \xi_*]$ получаем $\eta_j^\pm(\xi, \xi_L) \leq \eta$, $j = \overline{1, k+1}$. Проверим, что

$$G_j^\pm(\beta) \subset [\tilde{G}_j^\pm(\beta)]^{\eta_j^\pm(\xi, \xi_L)}, \quad j = \overline{1, k+1}.$$

Учитывая (3.5), (4.13), (4.15) и (4.24), имеем

$$G_{k+1}^+(\beta) \subset [\Pi_\xi G_{k+1}^+(\beta)]^{\xi\sqrt{n}/2} = [\tilde{G}_{k+1}^+(\beta)]^{\eta_{k+1}^+(\xi, \xi_L)}.$$

Далее, по индукции пусть $j = \overline{1, k+1}$ и

$$G_j^+(\beta) \subset [\tilde{G}_j^+(\beta)]^{\eta_j^+(\xi, \xi_L)}. \quad (4.27)$$

Покажем, что

$$G_j^-(\beta) \subset [\tilde{G}_j^-(\beta)]^{\eta_j^-(\xi, \xi_L)}. \quad (4.28)$$

В случае $\tau_j \neq \vartheta_h$, $h = h(\tau_j)$, включение (4.28) вытекает из соотношений (3.6), (4.16), (4.25) и (4.27). Рассмотрим случай $\tau_j = \vartheta_h$. Для $m \in G_j^-(\beta)$ в соответствии с (3.6) и (3.8) возьмем $(l, \nu) \in L_h(\beta)$ и $m_* \in G_j^+(\beta)$ такие, что $m = \nu m_* + Y^T(\vartheta_h, \vartheta) D_h^T l$. Учитывая (4.14) и (4.27), выберем $(\tilde{l}, \tilde{\nu}) \in \tilde{L}_h(\beta)$ и $\tilde{m}_* \in \tilde{G}_j^+(\beta)$ так, чтобы $\|\tilde{l} - l\|^2 + |\tilde{\nu} - \nu|^2 \leq \xi_L^2$ и $\|\tilde{m}_* - m_*\| \leq \eta_j^+(\xi, \xi_L)$. Положим $\tilde{m} = \tilde{\nu} \tilde{m}_* + Y^T(\vartheta_h, \vartheta) D_h^T \tilde{l}$ и $\hat{m} = \Pi_\xi \tilde{m}$. Тогда в согласии с (4.16) и (4.18) имеем $\hat{m} \in \tilde{G}_j^-(\beta)$ и с учетом (4.13) и (4.25) получаем оценку

$$\|\hat{m} - m\| \leq \|\hat{m} - \tilde{m}\| + \|\tilde{m} - m\| \leq \xi\sqrt{n}/2 + (C_1 + C_2)\xi_L + C_3\eta_j^+(\xi, \xi_L) = \eta_j^-(\xi, \xi_L).$$

Таким образом, включение (4.28) доказано. Если $j > 1$, из соотношений (3.7), (4.17), (4.26) и (4.28) заключаем $G_{j-1}^+(\beta) \subset [\tilde{G}_{j-1}^+(\beta)]^{\eta_{j-1}^+(\xi, \xi_L)}$. Утверждение доказано.

Как следствие соотношений (3.3), (4.14) и утверждений 1–4 получаем следующий результат.

Лемма 1. Для любых $\eta_L > 0$ и $\eta_G > 0$ существуют такие $\beta \in (0, \beta_0)$, $\xi_* > 0$ и $\xi_L > 0$, что для всех $\xi \in (0, \xi_*]$ будут справедливы включения

$$\tilde{L}_i(\beta) \subset L_i(\beta_0) \subset [\tilde{L}_i(\beta)]^{\eta_L}, \quad i = \overline{1, N}; \quad (4.29)$$

$$\tilde{G}_j^\pm(\beta) \subset G_j^\pm(\beta_0) \subset [\tilde{G}_j^\pm(\beta)]^{\eta_G}, \quad j = \overline{1, k+1}. \quad (4.30)$$

Доказательство. Пусть $\beta_*^{(1)} \in (0, \beta_0)$ и $\xi_L^{(1)} > 0$ таковы, что $\beta_0 - \beta_*^{(1)} + \xi_L^{(1)} \leq \eta_L$. По $\eta_1 = \eta_G/2$ возьмем $\beta_*^{(2)} \in (0, \beta_0)$ из утверждения 1. Положим $\beta = \max\{\beta_*^{(1)}, \beta_*^{(2)}\}$. По β выберем $\eta_2 > 0$ в согласии с утверждением 2. Далее, по β и η_2 возьмем $\xi_*^{(1)} > 0$ из утверждения 3 и по β и η_1 выберем $\xi_*^{(2)} > 0$ и $\xi_L^{(2)} > 0$ в согласии с утверждением 4. Положим $\xi_* = \min\{\xi_*^{(1)}, \xi_*^{(2)}\}$, $\xi_L = \min\{\xi_L^{(1)}, \xi_L^{(2)}\}$. Тогда для $\xi \in (0, \xi_*]$ имеем

$$\tilde{L}_i(\beta) \subset L_i(\beta) \subset L_i(\beta_0) \subset [L_i(\beta)]^{\beta_0 - \beta} \subset [\tilde{L}_i(\beta)]^{\beta_0 - \beta + \xi_L} \subset [\tilde{L}_i(\beta)]^{\eta_L}, \quad i = \overline{1, N},$$

$$\tilde{G}_j^\pm(\beta) \subset [G_j^\pm(\beta)]^{\eta_2} \subset G_j^\pm(\beta_0) \subset [G_j^\pm(\beta)]^{\eta_G/2} \subset [\tilde{G}_j^\pm(\beta)]^{\eta_G}, \quad j = \overline{1, k+1}.$$

Лемма доказана.

5. Аппроксимация функций $\varphi_j^\pm(\cdot; \beta_0)$

Пусть зафиксированы значения параметров $\alpha_0 > 0$ и $\beta_0 > 0$, момент времени $t_* \in [t_0, \vartheta)$, разбиение $\Delta_k\{\tau_j\}$ вида (1.7), (3.4), а также матрицы $Y(\vartheta_i, \vartheta)$, $i = \overline{1, N}$, $Y(\vartheta, \tau_j)$, $j = \overline{1, k+1}$, и функции $\Delta\psi_j(\cdot)$, $j = \overline{1, k}$, удовлетворяющие условиям (A1) и (A2) соответственно. Пусть при $\beta \in (0, \beta_0]$ множества $G_j^\pm(\beta)$, $j = \overline{1, k+1}$, определены по соотношениям (3.5)–(3.8), а функции $\varphi_j^\pm(\cdot; \beta)$, $j = \overline{1, k+1}$, — по соотношениям (3.10)–(3.12).

Аппроксимация функций $\varphi_j^\pm(\cdot; \beta_0)$ опирается на следующий факт.

Утверждение 5. Для любых $j = \overline{1, k}$ и $\eta > 0$ существует такое $M_* > 0$, что для всех $M \geq M_*$ будет справедливо неравенство

$$\left| \min_{\|y\| \leq M} \left[\max_{m^* \in G_j^+(\beta_0)} [\psi_j(m^*; \beta_0) + \langle y, m^* \rangle] - \langle y, m \rangle \right] - \varphi_j^+(m; \beta_0) \right| \leq \eta, \quad m \in G_j^+(\beta_0). \quad (5.1)$$

Доказательство. Из (3.12) в силу [30, следствие 12.1.1] вытекает равенство

$$\varphi_j^+(m; \beta_0) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \left[\max_{m^* \in G_j^+(\beta_0)} [\psi_j(m^*; \beta_0) + \langle y, m^* \rangle] - \langle y, m \rangle \right], \quad m \in G_j^+(\beta_0), \quad (5.2)$$

из которого получаем, что для любого $M > 0$ выполняется неравенство

$$\varphi_j^+(m; \beta_0) - \min_{\|y\| \leq M} \left[\max_{m^* \in G_j^+(\beta_0)} [\psi_j(m^*; \beta_0) + \langle y, m^* \rangle] - \langle y, m \rangle \right] \leq 0, \quad m \in G_j^+(\beta_0).$$

Далее, от противного предположим, что существуют такие число $\eta_* > 0$ и последовательность $\{m_q\} \subset G_j^+(\beta_0)$, что для любого q имеет место неравенство

$$\min_{\|y\| \leq q} \left[\max_{m^* \in G_j^+(\beta_0)} [\psi_j(m^*; \beta_0) + \langle y, m^* \rangle] - \langle y, m_q \rangle \right] - \varphi_j^+(m_q; \beta_0) > \eta_*.$$

В силу компактности множества $G_j^+(\beta_0)$ можно считать, что $m_q \rightarrow m_0 \in G_j^+(\beta_0)$. Учитывая непрерывность функции $\varphi_j^+(m; \beta_0)$, $m \in G_j^+(\beta_0)$, выводим

$$\max_{m^* \in G_j^+(\beta_0)} [\psi_j(m^*; \beta_0) + \langle y, m^* \rangle] - \langle y, m_0 \rangle - \varphi_j^+(m_0; \beta_0) \geq \eta_*, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

откуда в силу (5.2) получаем противоречие с неравенством $\eta_* > 0$. Утверждение доказано.

Пусть $\beta \in (0, \beta_0)$, $\xi > 0$, $\xi_L > 0$ и заданы конечные множества $\tilde{L}_i(\beta)$, $i = \overline{1, N}$, удовлетворяющие условию (4.14). Определим множества $\tilde{G}_j^\pm(\beta)$, $j = \overline{1, k+1}$, в согласии с (4.15)–(4.18).

Пусть $r \in (0, 1)$. Обозначим

$$S(r) = \{(p, p_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|p\|^2 + p_{n+1}^2 = 1, p_{n+1} \geq r\}.$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} & \min_{(p, p_{n+1}) \in S(r)} \left[\max_{m^* \in G_j^+(\beta_0)} [\psi_j(m^*; \beta_0) + \langle \frac{p}{p_{n+1}}, m^* \rangle] - \langle \frac{p}{p_{n+1}}, m \rangle \right] \\ &= \min_{\|y\| \leq \sqrt{1/r^2 - 1}} \left[\max_{m^* \in G_j^+(\beta_0)} [\psi_j(m^*; \beta_0) + \langle y, m^* \rangle] - \langle y, m \rangle \right], \quad m \in G_j^+(\beta_0), \quad j = \overline{1, k}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Пусть $\xi_S > 0$ и для множества $S(r)$ задана конечная аппроксимация $\tilde{S}(r)$

$$\tilde{S}(r) \subset S(r) \subset [\tilde{S}(r)]^{\xi_S}. \quad (5.4)$$

Пусть $\omega > 0$ удовлетворяет неравенству

$$\xi\sqrt{n}/2 \leq \omega. \quad (5.5)$$

В соответствии с соотношениями (3.10)–(3.12) и (5.1), (5.3) определим функции $\tilde{\varphi}_j^\pm(m; \beta)$, $m \in \tilde{G}_j^\pm(\beta)$, $j = \overline{1, k+1}$:

$$\tilde{\varphi}_{k+1}^+(m; \beta) = -\langle m, c_N \rangle, \quad m \in \tilde{G}_{k+1}^+(\beta), \quad (5.6)$$

$$\tilde{\varphi}_j^-(m; \beta) = \begin{cases} \tilde{\varphi}_j^+(m; \beta), & \tau_j \neq \vartheta_h, \\ \max[\nu \tilde{\varphi}_j^+(m_*; \beta) - \langle l, D_h c_h \rangle], & \tau_j = \vartheta_h, \end{cases} \quad m \in \tilde{G}_j^-(\beta), \quad j = \overline{1, k+1}, \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_j^+(m; \beta) &= \min_{(p, p_{n+1}) \in \tilde{S}(r)} \left[\max_{m^* \in \tilde{G}_j^+(\beta)} [\tilde{\psi}_j(m^*; \beta) + \langle \frac{p}{p_{n+1}}, m^* \rangle] - \langle \frac{p}{p_{n+1}}, m \rangle \right], \\ \tilde{\psi}_j(m; \beta) &= \tilde{\varphi}_{j+1}^-(m; \beta) + \Delta \psi_j(m), \quad m \in \tilde{G}_j^+(\beta), \quad j = \overline{1, k}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

В (5.7) максимум берется по $((l, \nu), m_*) \in \tilde{M}_h(\tilde{m}; \beta)$: $\|\tilde{m} - m\| \leq \omega$, где множество $\tilde{M}_h(\tilde{m}; \beta)$ определяется в согласии с (4.18), и $h = h(\tau_j)$ из (1.4). Отметим, что в случае $\tau_j = \vartheta_h$ в силу (4.13), (4.16) и (5.5) для каждого $m \in \tilde{G}_j^-(\beta)$ найдется $\tilde{m} \in \mathbb{R}^n$: $\|\tilde{m} - m\| \leq \omega$ и $\tilde{M}_h(\tilde{m}; \beta) \neq \emptyset$.

Лемма 2. Для любого $\eta_\varphi > 0$ существуют такие $\omega > 0$, $r \in (0, 1)$, $\xi_S > 0$ и $\eta_L > 0$, $\eta_G > 0$, что для любых $\beta \in (0, \beta_0)$, $\xi > 0$ и $\xi_L > 0$, удовлетворяющих (4.29), (4.30) и (5.5), будут справедливы неравенства

$$|\tilde{\varphi}_j^\pm(m; \beta) - \varphi_j^\pm(m; \beta_0)| \leq \eta_\varphi, \quad m \in \tilde{G}_j^\pm(\beta), \quad j = \overline{1, k+1}. \quad (5.9)$$

Доказательство. Пусть C_1 — константа из (3.9), а C_2 и C_3 — константы из (4.1). Положим

$$C_4 = \max_{m \in G_j^\pm(\beta_0), j = \overline{1, k+1}} |\varphi_j^\pm(m; \beta_0)|, \quad C_5 = \max_{i = \overline{1, N}} \|D_i c_i\|.$$

Определим числа $\eta_j^\pm > 0$, $j = \overline{1, k+1}$:

$$\eta_1^- = \eta_\varphi, \quad (5.10)$$

$$\eta_j^+ = \begin{cases} \eta_j^-, & \tau_j \neq \vartheta_h, \\ \eta_j^- / (2C_3), & \tau_j = \vartheta_h, \end{cases} \quad h = h(\tau_j), \quad j = \overline{1, k+1}, \quad (5.11)$$

$$\eta_{j+1}^- = \eta_j^+ / 2, \quad j = \overline{1, k}. \quad (5.12)$$

Обозначим через $a_j^\pm(\cdot)$ модули непрерывности функций $\varphi_j^\pm(m; \beta_0)$, $m \in G_j^\pm(\beta_0)$, $j = \overline{1, k+1}$.

Выберем $\omega > 0$, исходя из условия

$$a_j^-(\omega) \leq \eta_j^- / 2, \quad \text{если } \tau_j = \vartheta_{h(\tau_j)}, \quad j = \overline{1, k+1}. \quad (5.13)$$

В согласии с утверждением 5, опираясь на равенства (5.3), выберем $r \in (0, 1)$ так, чтобы для любых $j = \overline{2, k+1}$ и $m \in G_{j-1}^+(\beta_0)$ выполнялись неравенства

$$\left| \min_{(p, p_{n+1}) \in S(r)} \left[\max_{m^* \in G_{j-1}^+(\beta_0)} [\psi_{j-1}(m^*; \beta_0) + \langle \frac{p}{p_{n+1}}, m^* \rangle] - \langle \frac{p}{p_{n+1}}, m \rangle \right] - \varphi_{j-1}^+(m; \beta_0) \right| \leq \eta_j^- / 3. \quad (5.14)$$

Выберем $\xi_S > 0$ так, чтобы для любых $j = \overline{2, k+1}$ и $(p^{(1)}, p_{n+1}^{(1)}) \in S(r)$, $(p^{(2)}, p_{n+1}^{(2)}) \in S(r)$, удовлетворяющих неравенству $\|p^{(1)} - p^{(2)}\|^2 + |p_{n+1}^{(1)} - p_{n+1}^{(2)}|^2 \leq \xi_S^2$, имела место оценка

$$2C_1 \left\| \frac{p^{(1)}}{p_{n+1}^{(1)}} - \frac{p^{(2)}}{p_{n+1}^{(2)}} \right\| \leq \eta_j^- / 3. \quad (5.15)$$

Далее, выберем $\eta_L > 0$ из условий

$$(C_1 + C_2)\eta_L \leq \omega/2; \quad (C_4 + C_5)\eta_L \leq \eta_j^-/4, \quad \text{если } \tau_j = \vartheta_{h(\tau_j)}, \quad j = \overline{1, k+1}. \quad (5.16)$$

Наконец, возьмем $\eta_G > 0$ так, чтобы выполнялись соотношения

$$C_3\eta_G \leq \omega/2; \quad C_3a_j^+(\eta_G) \leq \eta_j^-/4, \quad \text{если } \tau_j = \vartheta_{h(\tau_j)}, \quad j = \overline{1, k+1}, \quad (5.17)$$

и для любых $j = \overline{2, k+1}$ и $m_1 \in G_{j-1}^+(\beta_0)$, $m_2 \in G_{j-1}^+(\beta_0)$, удовлетворяющих неравенству $\|m_1 - m_2\| \leq \eta_G$, была справедлива оценка

$$|\psi_{j-1}(m_1; \beta_0) - \psi_{j-1}(m_2; \beta_0)| + \eta_G \sqrt{1/r^2 - 1} \leq \eta_j^-/3. \quad (5.18)$$

В силу (5.10)–(5.12) имеем $\eta_j^\pm \leq \eta_\varphi$, $j = \overline{1, k+1}$. Поэтому для доказательства леммы достаточно проверить неравенства $|\tilde{\varphi}_j^\pm(m; \beta) - \varphi_j^\pm(m; \beta_0)| \leq \eta_j^\pm$, $m \in \tilde{G}_j^\pm(\beta)$, $j = \overline{1, k+1}$.

Учитывая (3.10) и (5.6), получаем

$$|\tilde{\varphi}_{k+1}^+(m; \beta) - \varphi_{k+1}^+(m; \beta_0)| = 0 \leq \eta_{k+1}^+, \quad m \in \tilde{G}_{k+1}^+(\beta).$$

Далее, по индукции пусть $j = \overline{1, k+1}$ и выполняется неравенство

$$|\tilde{\varphi}_j^+(m; \beta) - \varphi_j^+(m; \beta_0)| \leq \eta_j^+, \quad m \in \tilde{G}_j^+(\beta). \quad (5.19)$$

Покажем справедливость неравенства

$$|\tilde{\varphi}_j^-(m; \beta) - \varphi_j^-(m; \beta_0)| \leq \eta_j^-, \quad m \in \tilde{G}_j^-(\beta). \quad (5.20)$$

В случае $\tau_j \neq \vartheta_h$, $h = h(\tau_j)$, неравенство (5.20) вытекает из соотношений (3.11), (5.7), (5.11) и (5.19). Рассмотрим случай $\tau_j = \vartheta_h$. Зафиксируем $m \in \tilde{G}_j^-(\beta)$. Так как в силу (4.30) имеем $m \in G_j^-(\beta_0)$, то в соответствии с (3.8) и (3.11) возьмем $(l^0, \nu^0) \in L_h(\beta_0)$ и $m_*^0 \in G_j^+(\beta_0)$ такие, что $m = \nu^0 m_*^0 + Y^T(\vartheta_h, \vartheta) D_h^T l^0$ и $\varphi_j^-(m; \beta_0) = \nu^0 \varphi_j^+(m_*^0; \beta_0) - \langle l^0, D_h c_h \rangle$. Учитывая (4.29) и (4.30), выберем $(\tilde{l}, \tilde{\nu}) \in \tilde{L}_h(\beta)$ и $\tilde{m}_* \in \tilde{G}_j^+(\beta)$ так, чтобы $\|\tilde{l} - l^0\|^2 + |\tilde{\nu} - \nu^0|^2 \leq \eta_L^2$ и $\|\tilde{m}_* - m_*^0\| \leq \eta_G$. Положим $\tilde{m} = \tilde{\nu} \tilde{m}_* + Y^T(\vartheta_h, \vartheta) D_h^T \tilde{l}$. Тогда в согласии с (4.18) имеем $((\tilde{l}, \tilde{\nu}), \tilde{m}_*) \in \tilde{M}_h(\tilde{m}; \beta)$, и с учетом (5.16) и (5.17) справедлива оценка $\|\tilde{m} - m\| \leq C_3\eta_G + (C_1 + C_2)\eta_L \leq \omega$. Таким образом, принимая во внимание сначала (5.7), (5.19), а затем (5.11), (5.16) и (5.17), получаем

$$\begin{aligned} \varphi_j^-(m; \beta_0) - \tilde{\varphi}_j^-(m; \beta) &\leq \nu^0 \varphi_j^+(m_*^0; \beta_0) - \langle l^0, D_h c_h \rangle - \tilde{\nu} \tilde{\varphi}_j^+(\tilde{m}_*; \beta) + \langle \tilde{l}, D_h c_h \rangle \\ &\leq C_3a_j^+(\eta_G) + C_3\eta_j^+ + (C_4 + C_5)\eta_L \leq \eta_j^-. \end{aligned} \quad (5.21)$$

С другой стороны, учитывая (4.18) и (5.7), возьмем $\tilde{m}^0 \in \mathbb{R}^n$, $(\tilde{l}^0, \tilde{\nu}^0) \in \tilde{L}_h(\beta)$ и $\tilde{m}_*^0 \in \tilde{G}_j^+(\beta)$ такие, что $\|\tilde{m}^0 - m\| \leq \omega$, $\tilde{m}^0 = \tilde{\nu}^0 \tilde{m}_*^0 + Y^T(\vartheta_h, \vartheta) D_h^T \tilde{l}^0$ и $\tilde{\varphi}_j^-(m; \beta) = \tilde{\nu}^0 \tilde{\varphi}_j^+(\tilde{m}_*^0; \beta) - \langle \tilde{l}^0, D_h c_h \rangle$. Так как в силу (4.29) и (4.30) имеем $(\tilde{l}^0, \tilde{\nu}^0) \in L_h(\beta_0)$ и $\tilde{m}_*^0 \in G_j^+(\beta_0)$, то в соответствии с (3.6) и (3.8) получаем $((\tilde{l}^0, \tilde{\nu}^0), \tilde{m}_*^0) \in M_h(\tilde{m}^0; \beta_0)$ и $\tilde{m}^0 \in G_j^-(\beta_0)$. В итоге, принимая во внимание сначала (3.11) и (5.19), а затем (5.11) и (5.13), выводим

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_j^-(m; \beta) - \varphi_j^-(m; \beta_0) &\leq \tilde{\nu}^0 \tilde{\varphi}_j^+(\tilde{m}_*^0; \beta) - \langle \tilde{l}^0, D_h c_h \rangle - \varphi_j^-(\tilde{m}^0; \beta_0) + a_j^-(\omega) \\ &\leq C_3\eta_j^+ + a_j^-(\omega) \leq \eta_j^-. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Неравенства (5.21) и (5.22) доказывают неравенство (5.20) в случае $\tau_j = \vartheta_h$.

Теперь, если $j > 1$, для $m \in \tilde{G}_{j-1}^+(\beta)$ согласно (4.30), (5.18) и (5.20) имеем

$$\left| \tilde{\varphi}_{j-1}^+(m; \beta) - \min_{(p, p_{n+1}) \in \tilde{S}(r)} \left[\max_{m^* \in G_{j-1}^+(\beta_0)} \left[\psi_{j-1}(m^*; \beta_0) + \left\langle \frac{p}{p_{n+1}}, m^* \right\rangle \right] - \left\langle \frac{p}{p_{n+1}}, m \right\rangle \right] \right| \leq 4\eta_j^-/3. \quad (5.23)$$

Кроме того, в силу (5.4) и (5.15) справедливо неравенство

$$\left| \min_{(p, p_{n+1}) \in \tilde{S}(r)} \left[\max_{m^* \in G_{j-1}^+(\beta_0)} [\psi_{j-1}(m^*; \beta_0) + \langle \frac{p}{p_{n+1}}, m^* \rangle] - \langle \frac{p}{p_{n+1}}, m \rangle \right] - \min_{(p, p_{n+1}) \in S(r)} \left[\max_{m^* \in G_{j-1}^+(\beta_0)} [\psi_{j-1}(m^*; \beta_0) + \langle \frac{p}{p_{n+1}}, m^* \rangle] - \langle \frac{p}{p_{n+1}}, m \rangle \right] \right| \leq \eta_j^- / 3. \quad (5.24)$$

Из соотношений (5.12), (5.14), (5.23) и (5.24) заключаем $|\tilde{\varphi}_{j-1}^+(m; \beta) - \varphi_{j-1}^+(m; \beta_0)| \leq \eta_{j-1}^+$, $m \in \tilde{G}_{j-1}^+(\beta)$. Лемма доказана.

Теорема 4. *Каковы бы ни были значения параметров $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$, момент времени $t_* \in [t_0, \vartheta]$, разбиение $\Delta_k\{\tau_j\}$ вида (1.7), (3.4), матрицы $Y(\vartheta_i, \vartheta)$, $i = \overline{1, N}$, $Y(\vartheta, \tau_j)$, $j = \overline{1, k+1}$, и функции $\Delta\psi_j(\cdot)$, $j = \overline{1, k}$, удовлетворяющие условиям (A1) и (A2) соответственно, для любых чисел $\eta_G > 0$ и $\eta_\varphi > 0$ существуют такие числа $\beta \in (0, \beta_0)$, $\xi > 0$, $\xi_L > 0$ и $\omega > 0$, $r \in (0, 1)$, $\xi_S > 0$, что для множеств $\tilde{G}_j^\pm(\beta)$, $j = \overline{1, k+1}$, определяемых соотношениями (4.15)–(4.18), будут выполняться включения (4.30), а для функций $\tilde{\varphi}_j^\pm(m; \beta)$, $m \in \tilde{G}_j^\pm(\beta)$, $j = \overline{1, k+1}$, определяемых соотношениями (5.6)–(5.8), будут справедливы неравенства (5.9). Таким образом, множества $\tilde{G}_j^\pm(\beta)$ и функции $\tilde{\varphi}_j^\pm(\cdot; \beta)$ будут удовлетворять условиям (A3) и (A4) соответственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость теоремы напрямую вытекает из лемм 1 и 2.

6. Пример

Пусть движение динамической системы описывается уравнением

$$\begin{cases} dx_1/dt = x_2 + v_1, \\ dx_2/dt = x_3 + u_1, \\ dx_3/dt = u_2 + v_2, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 4, \quad (6.1)$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

$$u = (u_1, u_2) \in P = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : |u_1| \leq 1, |u_2| \leq 3\} \subset \mathbb{R}^2,$$

$$v = (v_1, v_2) \in Q = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 : 2v_1^2 + v_2^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Заданы начальное условие $x(0) = (0, 0, 0)$ и показатель качества процесса управления

$$\gamma = \left(0.04 (x_3(1) - 1)^2 + 0.16 (x_2(2) - 2)^2 + 0.16 (x_1(3) - 3)^2 + (x_1(4) - 4)^2 + (x_2(4) - 4)^2 \right)^{1/2}. \quad (6.2)$$

Задача управления для системы (6.1) при показателе качества (6.2) решалась на основе описанного выше численного метода. Приведем результаты моделирования, полученные при выборе равномерного разбиения $\Delta_k\{\tau_j\}$ отрезка времени $[0, 4]$ с шагом $\delta_k = 0.005$, значения $\varepsilon = 0.05$ и подходящем подборе всех остальных параметров метода.

В согласии с теоремой 1 приближенно посчитанная величина цены дифференциальной игры (6.1), (6.2) составила $\rho = \rho(0, x(0)) \approx e_1^-(x(0)) \approx 0.874$.

На рис. 1 изображено движение системы (6.1), сформированное в результате совместного действия минимаксного закона управления $\{u_{\Delta_k}(\cdot), \varepsilon, \Delta_k\{\tau_j\}\}$ (3.15) и максиминного закона формирования помехи $\{v_{\Delta_k}(\cdot), \varepsilon, \Delta_k\{\tau_j\}\}$ (3.16). Белыми точками показаны значения компонент фазового вектора, по которым согласно (6.2) оценивается качество движения, черными

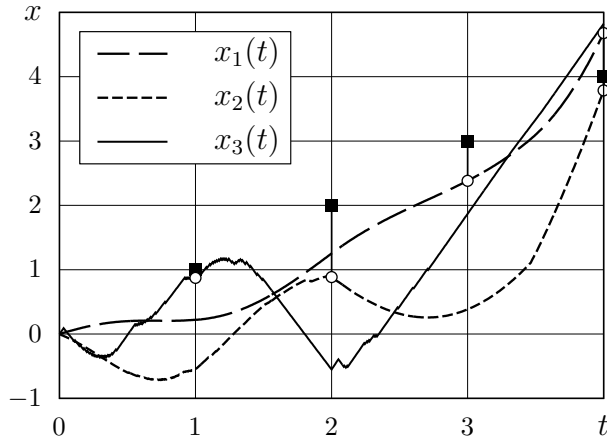


Рис. 1. Реализация движения при совместном действии минимаксного (3.15) и максиминного (3.16) законов управления: $\gamma \approx 0.876 \approx \rho$.

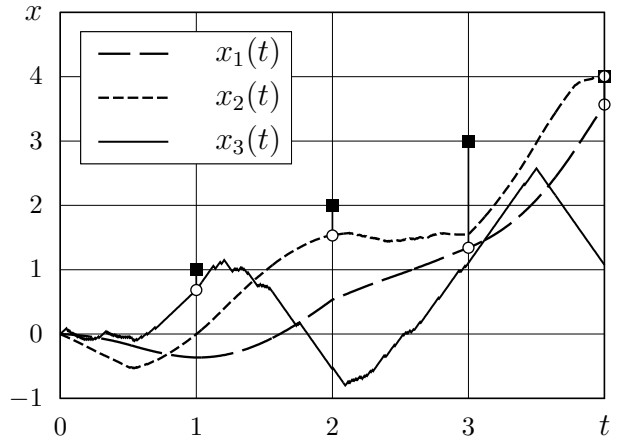


Рис. 2. Реализация движения при действии минимаксного закона управления (3.15) и закона формирования помехи (6.3): $\gamma \approx 0.816 < \rho$.

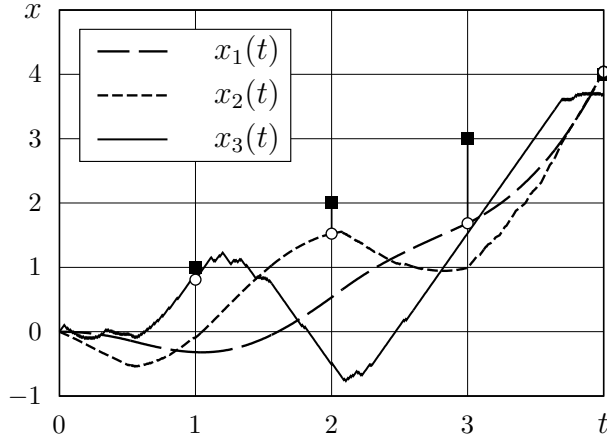


Рис. 3. Реализация движения при действии минимаксного закона управления (3.15) и нулевой помехи: $\gamma \approx 0.563 < \rho$.

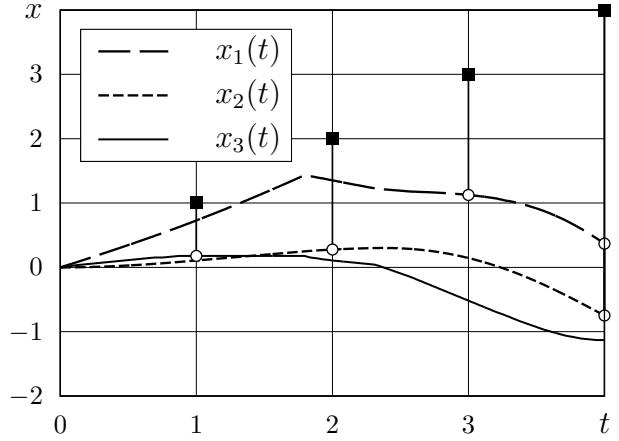


Рис. 4. Реализация движения при действии нулевого управления и максиминного закона формирования помехи (3.16): $\gamma \approx 6.066 > \rho$.

квадратами обозначены соответствующие цели. При этом для показателя качества (6.2) реализовалось значение

$$\gamma \approx \left(0.04 (0.125)^2 + 0.16 (1.115)^2 + 0.16 (0.616)^2 + (0.68)^2 + (0.213)^2 \right)^{1/2} \approx 0.876 \approx \rho.$$

На рис. 2 изображено движение системы (6.1), сформированное минимаксным законом управления $\{u_{\Delta_k}(\cdot), \varepsilon, \Delta_k\{\tau_j\}\}$ (3.15) в случае, когда значения помехи на каждом шаге разбиения $\Delta_k\{\tau_j\}$ выбирались из условия экстремального сдвига от ближайшей целевой точки

$$v(t) \in \operatorname{argmax}_{v \in Q} \min_{u \in P} (D_{h(\tau_j)}(x(\tau_j) - c_{h(\tau_j)}), D_{h(\tau_j)}f(\tau_j, u, v)), \quad \tau_j \leq t < \tau_{j+1}, \quad j = \overline{1, k}. \quad (6.3)$$

Здесь обозначения соответствуют общему случаю (1.1), (1.3). Реализовавшееся значение показателя качества (6.2)

$$\gamma \approx \left(0.04 (0.316)^2 + 0.16 (0.468)^2 + 0.16 (1.658)^2 + (0.432)^2 + (0.01)^2 \right)^{1/2} \approx 0.816 < \rho.$$

На рис. 3 изображено движение системы (6.1), сформированное при действии закона управления $\{u_{\Delta_k}(\cdot), \varepsilon, \Delta_k\{\tau_j\}\}$ (3.15) при нулевой помехе. Реализовавшееся значение показателя качества (6.2)

$$\gamma \approx \left(0.04(0.19)^2 + 0.16(0.477)^2 + 0.16(1.314)^2 + (0.04)^2 + (0.04)^2\right)^{1/2} \approx 0.563 < \rho.$$

На рис. 4 изображено движение системы (6.1), сформированное в результате действия нулевого управления и максиминного закона формирования помехи $\{v_{\Delta_k}(\cdot), \varepsilon, \Delta_k\{\tau_j\}\}$ (3.16). Соответствующее значение показателя качества (6.2)

$$\gamma \approx \left(0.04(0.822)^2 + 0.16(1.723)^2 + 0.16(1.874)^2 + (3.631)^2 + (4.748)^2\right)^{1/2} \approx 6.066 > \rho.$$

Кроме этого, моделировалось движение системы (6.1) при действии максиминного закона формирования помехи $\{v_{\Delta_k}(\cdot), \varepsilon, \Delta_k\{\tau_j\}\}$ (3.16), когда управляющие воздействия на каждом шаге разбиения $\Delta_k\{\tau_j\}$ выбирались из условия экстремального сдвига на ближайшую целевую точку

$$u(t) \in \operatorname{argmin}_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle D_{h(\tau_j)}(x(\tau_j) - c_{h(\tau_j)}), D_{h(\tau_j)}f(\tau_j, u, v) \rangle, \quad \tau_j \leq t < \tau_{j+1}, \quad j = \overline{1, k}.$$

В этом случае реализовалось следующее значение показателя качества (6.2):

$$\gamma \approx \left(0.04(0.007)^2 + 0.16(1.676)^2 + 0.16(3.91)^2 + (13.575)^2 + (16.027)^2\right)^{1/2} \approx 21.072 > \rho.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 516 с.
2. Красовский Н.Н., Решетова Т.Н. О программном синтезе гарантированного управления // Проблемы управления и теория информации. 1988. Т. 17, № 6. С. 333–343.
3. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. Control under Lack of Information. Berlin etc.: Birkhäuser, 1995. 322 p.
4. Красовский Н.Н., Лукоянов Н.Ю. Задача конфликтного управления с наследственной информацией // Прикладная математика и механика. 1996. Т. 60, Вып. 6. С. 885–900.
5. Исакова Е.А., Логунова Г.В., Пацко В.С. Построение стабильных мостов в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания // Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984. С. 127–158.
6. Тарасьев А.М., Успенский А.А., Ушаков В.Н. Конечно-разностный метод построения функции оптимального гарантированного результата // Гагаринские научные чтения по космонавтике и авиации. 1991: сб. тр. М.: Наука, 1992. С. 166–172.
7. Методы решения дифференциальных игр / Н.Л. Григоренко, Ю.Н. Киселев, Н.В. Лагунова, Д.Б. Силин [и др.] // Математическое моделирование. М.: Изд-во МГУ, 1993. Т. 1. С. 296–316.
8. Cardaliaguet P., Quincampoix M., Saint-Pierre P. Set-valued numerical analysis for optimal control and differential games // Stochastic and Differential Games: Theory and Numerical Methods / eds. Martino Bardi, T. E. S. Raghavan, T. Parthasarathy. Boston: Birkhäuser, 1999. P. 177–247. (Annals of the Int. Soc. of Dynamic Games; vol. 4.)
9. Bardi M., Falcone M., Soravia P. Numerical methods for pursuit-evasion games via viscosity solutions // Stochastic and Differential Games: Theory and Numerical Methods. Boston: Birkhauser, 1999. P. 105–175. (Ann. Internat. Soc. Dynam. Games; vol. 4.)
10. Алгоритмы численного решения линейных дифференциальных игр / Е.С. Половинкин, Г.Е. Иванов, М.В. Балашов, Р.В. Константинов [и др.] // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 95–122.
11. Михалев Д.К., Ушаков В.Н. О двух алгоритмах приближенного построения множества позиционного поглощения в игровой задаче сближения // Автоматика и телемеханика. 2007. № 11. С. 178–194.
12. Botkin N.D., Hoffmann K.-H., Turova V.L. Stable numeric schemes for solving Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs equation // SIAM J. Scientific Computing. 2011. Vol. 33, iss. 2. P. 992–1007.

13. **Иванов Г.Е., Казеев В.А.** Минимаксный алгоритм построения оптимальной стратегии управления в дифференциальной игре с липшицевой платой // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2011. Т. 51, № 4. С. 594–619.
14. **Двуреченский П.Е., Иванов Г.Е.** Алгоритмы вычисления операторов Минковского и их применение в дифференциальных играх // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2014. Т. 54, № 2. С. 224–255.
15. **Красовский Н.Н., Третьяков В.Е.** Стохастический программный синтез для позиционной дифференциальной игры // Докл. АН СССР. 1981. Т. 259, № 1. С. 24–27.
16. **Fleming W.H.** The convergence problem for differential games // J. Math. Anal. Appl. 1961. № 3. P. 102–116.
17. **Понтрягин Л.С.** О линейных дифференциальных играх 1. // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174, № 6. С. 1278–1280.
18. **Пшеничный Б.Н.** Структура дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1969. Т. 184, № 2. С. 285–287.
19. **Friedman A.** On the definition of differential games and the existence of value and of saddle points // J. Diff. Eq. 1970. Vol. 7. P. 69–91.
20. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
21. **Красовский А.Н.** Построение смешанных стратегий на основе стохастических программ // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51, вып. 2. С. 186–192.
22. **Локшин М.Д.** О дифференциальных играх с интегральными ограничениями на управляющие воздействия // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 1. С. 1952–1961.
23. **Лукоянов Н.Ю.** О задаче конфликтного управления при смешанных ограничениях на управляющие воздействия // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 9. С. 1473–1482.
24. **Лукоянов Н.Ю.** К вопросу вычисления цены дифференциальной игры для позиционного функционала // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, вып. 2. С. 188–198.
25. **Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю.** Об устойчивости одной процедуры решения задачи управления на минимакс позиционного функционала // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 68–82.
26. **Корнев Д.В.** О численном решении позиционных дифференциальных игр с нетерминальной платой // Автоматика и телемеханика. 2012. № 11. С. 60–75.
27. **Гомоюнов М.И., Корнев Д.В.** К вопросу вычисления цены дифференциальной игры в классе контрстратегий // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 1. С. 59–68.
28. **Корнев Д.В., Лукоянов Н.Ю.** О численном решении дифференциальных игр с нетерминальной платой в классах смешанных стратегий // Вестн. Удмурт. ун-та. 2013. № 3. С. 34–48. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
29. **Балашов М.В.** О P -свойстве выпуклых компактов // Мат. заметки. 2002. Т. 71, № 3. С. 323–333.
30. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.

Гомоюнов Михаил Игоревич

Поступила 23.04.2014

младший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com

Корнев Дмитрий Васильевич

ассистент

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: d.v.kornev@gmail.com

Лукоянов Николай Юрьевич

д-р физ.-мат. наук

зав. сектором

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: nyul@imm.uran.ru

УДК 517.977

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ОТРЕЗКЕ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ¹

А. Р. Данилин

Рассматривается задача оптимального управления решениями краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке при наличии малого параметра при второй производной. Управление скалярное и стеснено интегральным ограничением. Построено полное асимптотическое разложение в смысле Эрдейи по степеням малого параметра.

Ключевые слова: оптимальное управление, задача быстрогодействия, асимптотическое разложение, сингулярно возмущенные задачи, малый параметр.

A. R. Danilin. Asymptotic expansion of a solution to a singular perturbation optimal control problem on an interval with integral constraint.

A control problem for solutions of a boundary value problem for a second-order ordinary differential equation with a small parameter at the second derivative is considered on a closed interval. The control is scalar and subject to integral constraints. We construct a complete asymptotic expansion in powers of the small parameter in the Erdélyi sense.

Keywords: optimal control, time-optimal problem, asymptotic expansion, singular perturbation problems, small parameter.

Введение

Рассматривается задача оптимального управления [1–3] решениями краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке при наличии малого параметра при второй производной. Управление скалярное и стеснено интегральным ограничением, и критерий качества тоже интегральный. Данную задачу можно рассматривать и как частный случай общих задач управления, описанных в [4].

Получены общие теоремы об аппроксимации. Построено полное асимптотическое разложение в смысле Эрдейи [5] по степеням малого параметра.

В отличие от работы [6] здесь рассмотрены другие ограничения на управление. Это привело к более простому алгоритму построения асимптотики, но к более сложному обоснованию ее. В настоящей работе используются методы, развитые в [7–9].

1. Постановка задачи и основные соотношения

Рассматривается следующая задача оптимального управления:

$$\mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon := -\varepsilon^2 z_\varepsilon'' + b(x)z_\varepsilon' + a(x)z_\varepsilon = f + u_\varepsilon, \quad x \in [0, 1], z_\varepsilon \in H_0^1(0; 1), \quad (1.1)$$

$$u_\varepsilon \in \mathcal{U} := \{u(\cdot) \in L_2(0; 1) : \|u(\cdot)\| \leq 1\}, \quad (1.2)$$

$$J := \|z_\varepsilon(\cdot) - z_d(\cdot)\|^2 + \nu^{-1} \|u_\varepsilon(\cdot)\|^2 \rightarrow \inf. \quad (1.3)$$

¹Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проекты 13-01-00090, 14-01-00322) и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математических и физических науках” (при финансовой поддержке УрО РАН, проект № 12-П-1-1009).

Здесь $\|\cdot\|$ — норма в $L_2(0;1)$, $H_0^1(0;1)$ — соболевское пространство функций с нулевыми значениями на границе, а $\nu > 0$ — заданное число.

В дальнейшем через $\overset{\circ}{C}^{(n)}[0;1]$ будем обозначать пространство функций из $C^{(n)}[0;1]$ с нулевыми значениями на границе. Отметим, что в силу теорем вложения [10] пространство $H^1(0;1)$ вложено в $C[0;1]$, а $H_0^1(0;1)$ — в $\overset{\circ}{C}[0;1]$.

Предполагается, что функции $a(\cdot)$, $b(\cdot)$, $f(\cdot)$ и $z_d(\cdot)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} a(\cdot), b(\cdot), f(\cdot), z_d(\cdot) &\in C^\infty[0;1], \\ \forall x \in [0;1] \quad a(x) &\geq \alpha > 0, \quad b(x) \geq \alpha, \quad b'(x) \leq 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

а решение уравнения (1.1) понимается в слабом смысле

$$\forall Z \in H_0^1(0;1) \quad (\varepsilon^2 z'_\varepsilon, Z') + (bz'_\varepsilon, Z) + (az_\varepsilon, Z) = (f + u_\varepsilon, Z), \quad (1.5)$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(0;1)$.

Содержательно задача (1.1)–(1.3) состоит в том, чтобы привести управляемое состояние z_ε по возможности как можно ближе к некоторому заданному состоянию z_d , но с учетом затраченных на управление ресурсов.

Отметим, что если в задаче (1.1)–(1.3) перейти к новой независимой переменной $t := 1 - x$, то основное уравнение примет вид $\varepsilon^2 z''_\varepsilon + b(x)z'_\varepsilon - a(x)z_\varepsilon = -f - u_\varepsilon$. При этом, переходя от одного уравнения второго порядка к системе уравнений первого порядка, получим систему с “быстрыми и медленными” переменными

$$\dot{z} = y, \quad \varepsilon \dot{y} = az - by - u - f.$$

Для систем такого вида рассматривались как игровые задачи [11; 12], так и задачи оптимального управления с отличными от рассматриваемого в данной работе критерия качества (см. обзор [13]).

Критерий оптимальности в задаче (1.1)–(1.3) можно получить или из принципа максимума Понтрягина [3], либо из теории Лионса [4]. Для применения последней надо, чтобы квадратичная форма из (1.5)

$$(\mathcal{L}_\varepsilon Z, \mathcal{L}_\varepsilon Z) = (\varepsilon^2 Z', Z') + (bZ', Z) + (aZ, Z)$$

была коэрцитивна в $H_0^1(0;1)$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Поскольку $(bZ', Z) = -(Z, b'Z)/2$, то

$$(\mathcal{L}_\varepsilon Z, Z) = \varepsilon^2 \|Z\|^2 + ((a - b'/2)Z, Z) \stackrel{(1.4)}{\geq} \varepsilon^2 \|Z'\| + \alpha \|Z\| \geq \varepsilon^2 \|Z\|_{H_0^1(0;1)}. \quad (1.6)$$

Тем самым задача (1.1)–(1.3) разрешима единственным образом, и существует $p_\varepsilon \in H_0^1(0;1)$:

$$\mathcal{L}_\varepsilon^* p_\varepsilon := -\varepsilon^2 p''_\varepsilon - b(x)p'_\varepsilon + (a(x) - b'(x))p_\varepsilon = z_\varepsilon - z_d, \quad x \in [0, 1], \quad (1.7)$$

при этом

$$\forall v(\cdot) \in \mathcal{U} \quad (p_\varepsilon + \nu^{-1}u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) \geq 0 \quad (1.8)$$

(см. [4, гл. 2, соотношение (2.10)]).

Отметим, что

$$\forall v, w \in H_0^1(0;1) \quad (\mathcal{L}_\varepsilon v, w) \stackrel{(1.7)}{=} (v, \mathcal{L}_\varepsilon^* w). \quad (1.9)$$

Как было показано в [9], условие (1.8) эквивалентно следующему:

$$\exists \lambda_\varepsilon \in (0; \nu] : (u_\varepsilon = -\lambda_\varepsilon p_\varepsilon) \wedge (\lambda_\varepsilon \|p_\varepsilon\| \leq 1) \wedge ((\nu - \lambda_\varepsilon) \cdot (1 - \lambda_\varepsilon \|p_\varepsilon\|) = 0). \quad (1.10)$$

Таким образом, система оптимальности для задачи (1.1)–(1.3) имеет вид

$$\mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon + \lambda_\varepsilon p_\varepsilon = f, \quad \mathcal{L}_\varepsilon^* p_\varepsilon - z_\varepsilon = -z_d, \quad z_\varepsilon, p_\varepsilon \in H_0^1(0; 1). \quad (1.11)$$

с дополнительным условием (1.10).

Отметим, что хотя λ_ε и зависит от p_ε , однако пара функций $z_\varepsilon, p_\varepsilon$ является решением задачи (1.11) с константой λ_ε . Поэтому в силу свойств дифференциальных операторов второго порядка из условий (1.4) следует, что $z_\varepsilon, p_\varepsilon \in C^\infty[0; 1]$.

Целью данной работы является получение асимптотического разложения решения системы (1.11) при $\varepsilon \rightarrow +0$.

2. Априорные оценки

Рассмотрим подробнее краевую задачу для системы, зависящей от скалярного положительного параметра $\lambda > 0$:

$$\mathcal{L}_\varepsilon z + \lambda p = f, \quad \mathcal{L}_\varepsilon^* p - z = g, \quad f, g \in C^\infty[0; 1], \quad z, p \in \overset{o}{C}^{(2)}[0; 1]. \quad (2.1)$$

Часто мы будем рассматривать ее при условии

$$0 < \lambda_* \leq \lambda \leq \lambda^*. \quad (2.2)$$

Отметим, что решение задачи (2.1) есть функции, зависящие от параметров ε и λ .

В дальнейшем буквой K мы будем обозначать различные положительные константы, зависящие только от функций $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (1.4) и (2.2). Тогда задача (2.1) разрешима единственным образом при любых ε и λ и существует константа $K > 0$ такая, что

$$\max\{\varepsilon\|z'\|, \|z\|, \varepsilon\|p'\|, \|p\|\} \leq K(\|f\| + \|g\|). \quad (2.3)$$

Доказательство. Поскольку для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений справедлива альтернатива Фредгольма (см., например, [14, § 26]), то для доказательства теоремы достаточно получить указанные в ней априорные оценки.

Умножив скалярно первое равенство в (2.1) на p , получим

$$\lambda\|p\|^2 + \|z\|^2 \stackrel{(1.9)}{=} (f, p) - (g, z). \quad (2.4)$$

Отсюда в силу неравенства Коши — Буняковского

$$\lambda\|p\|^2 + \|z\|^2 \leq \|f\| \cdot \|p\| + \|g\| \cdot \|z\|.$$

Последнее соотношение есть квадратичное неравенство относительно $\|p\|$ и $\|z\|$. Но неотрицательные решения квадратичного неравенства

$$\beta_1^2 y_1^2 + \beta_2^2 y_2^2 \leq B_1 y_1 + B_2 y_2$$

с коэффициентами $\beta_i > 0$, $B_i \geq 0$, $i = 1, 2$, оцениваются следующим образом:

$$y_1 \leq \frac{B_1}{\beta_1^2} + \frac{B_2}{2\beta_1\beta_2}, \quad y_2 \leq \frac{B_2}{\beta_2^2} + \frac{B_1}{2\beta_1\beta_2}.$$

Поэтому

$$\|p\| \leq \frac{\|f\|}{\lambda} + \frac{\|g\|}{2\sqrt{\lambda}}, \quad \|z\| \leq \|g\| + \frac{\|f\|}{2\sqrt{\lambda}}.$$

Это с учетом (2.2) дает оценки (2.3) для $\|z\|$ и $\|p\|$.

Для получения оценок норм производных $\|z'\|$, $\|p'\|$ умножим скалярно первое равенство в (2.1) на z , а второе — на p . Тогда в силу (1.6) получим

$$\varepsilon^2 \|z'\|^2 + \alpha \|z\|^2 \leq \|f\| \cdot \|z\| + \lambda \|p\| \cdot \|z\|, \quad \varepsilon^2 \|p'\|^2 + \alpha \|p\|^2 \leq \|g\| \cdot \|p\| + \|z\| \cdot \|p\|, \quad (2.5)$$

откуда с учетом оценок для $\|z\|$ и $\|p\|$ следуют оставшиеся оценки. $\square$

Следствие 1. Если z_ε и p_ε — решение задачи (1.11), (1.10), то

$$\max\{\varepsilon \|z'_\varepsilon\|, \|z_\varepsilon\|, \varepsilon \|p'_\varepsilon\|, \|p_\varepsilon\|\} = O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.6)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В этом случае $0 < \lambda_\varepsilon \leq \nu$ и $\lambda_\varepsilon \|p_\varepsilon\| \leq 1$. Поэтому в силу (2.5) получим $\alpha \|z\| \leq \|f\| + 1 = O(1)$ и $\alpha \|p\| \leq \|g\| + \|z\| = O(1)$. Для получения оставшихся оценок надо еще раз надо применить (2.5) с учетом оценок для $\|z\|$ и $\|p\|$. $\square$

Теперь покажем, что при любом $\lambda > 0$ предельной при $\varepsilon \rightarrow 0$ для задачи (2.1) будет задача

$$\mathcal{L}_0 z_0 + \lambda p_0 = f, \quad \mathcal{L}_0^* p_0 - z_0 = g, \quad z_0(0) = 0, p_0(1) = 0, \quad f, g \in C^\infty[0; 1], \quad z, p \in C^{(2)}[0; 1], \quad (2.7)$$

где $\mathcal{L}_0 z_0 := b(x)z'_0 + a(x)z_0$, $\mathcal{L}_0^* p_0 := -b(x)p'_0 + (a(x) - b'(x))p_0$.

Отметим, что если $z_0, p_0 \in C^{(2)}[0; 1]$, $z_0(0) = 0$ и $p_0(1) = 0$, то $(\mathcal{L}_0 z_0, p_0) = (z_0, \mathcal{L}_0^* p_0)$, и для z_0, p_0 — решения задачи (2.7) — справедливо равенство, аналогичное (2.4),

$$\lambda \|p_0\|^2 + \|z_0\|^2 = (f, p_0) - (g, z_0), \quad (2.8)$$

а значит, и оценки для $\|z_0\|$ и $\|p_0\|$, подобные оценкам (2.3),

$$\max\{\|z_0\|, \|p_0\|\} \leq K(\|f\| + \|g\|). \quad (2.9)$$

Тем самым задача (2.7) разрешима единственным образом при любых f и g .

Из этих же оценок следует и разрешимость неоднородной граничной задачи, соответствующей задаче (2.7).

Теорема 2. Пусть выполнены условия (1.4). Тогда задача

$$\mathcal{L}_0 z + \lambda p = f, \quad \mathcal{L}_0^* p - z_0 = g, \quad z(0) = A, p(1) = B, \quad f, g \in C^\infty[0; 1], \quad z, p \in C^{(2)}[0; 1],$$

разрешима единственным образом при любых f, g, A и B . При этом

$$\max\{\|z\|, \|p\|\} \leq K(\|f\| + \|g\| + |A| + |B|).$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия (1.4). Если z, p — решение задачи (2.1), а z_0, p_0 — решение задачи (2.7) при одном и том же $\lambda > 0$, то

$$\|z - z_0\| = O(\sqrt{\varepsilon}), \quad \|p - p_0\| = O(\sqrt{\varepsilon}), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.10)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $Z := z - z_0$ и $P := p - p_0$. Тогда, вычитая из соответствующих равенств в (2.1) равенства из (2.7), получим

$$-\varepsilon^2 z'' + \mathcal{L}_0 Z + \lambda P = 0, \quad -\varepsilon^2 p'' + \mathcal{L}_0^* P - Z = 0.$$

Тогда в силу (2.8)

$$\|Z\|^2 + \lambda \|P\|^2 = \varepsilon^2 (z'', P) - \varepsilon^2 (p'', Z) = \varepsilon^2 (z'', p_0) - \varepsilon^2 (p'', z_0)$$

$$\stackrel{(2.6)}{=} \varepsilon^2 z'(0) \cdot p_0(0) - \varepsilon^2 z_0(1) \cdot p'(1) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Поэтому осталось показать, что

$$\varepsilon^2 z'(0) = O(\varepsilon), \quad \varepsilon^2 p'(1) = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Покажем истинность этого соотношения для $z'(0)$. Для $p'(1)$ рассуждения аналогичны.

Функция $\widehat{z}(x) := z'(x)$ является решением уравнения $\varepsilon^2 \widehat{z}' - b(x)\widehat{z} = F_\varepsilon(x)$, где F_ε — некоторая непрерывная на $[0; 1]$ функция и $\varepsilon \|\widehat{z}\| = O(1)$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда

$$\widehat{z}(x) = \exp(B(x)/\varepsilon^2) \cdot (C_\varepsilon + G_\varepsilon(x)).$$

Здесь

$$B(x) = \int_0^x b(\eta) d\eta \geq \alpha x, \quad G_\varepsilon(x) = \int_0^x \exp(-B(\eta)/\varepsilon^2) F_\varepsilon(\eta) d\eta.$$

Отметим, что существует $K > 0$ такое, что при всех $x \in [0; 1]$ справедливо неравенство

$$|G_\varepsilon(x)| \leq K\varepsilon^2 \quad \text{и} \quad \varepsilon z'(0) = \varepsilon \widehat{z}(0) = \varepsilon C_\varepsilon.$$

Предположим, что величина $\varepsilon C_\varepsilon$ не ограничена при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда найдется последовательность $\{\varepsilon_n\}$ такая, что $\varepsilon_n \rightarrow 0$ и $|\varepsilon_n C_{\varepsilon_n}| \geq 2$ при всех n . Тогда при всех $x \in [0; 1]$ получим

$$\varepsilon_n |\widehat{z}(x)| \geq \exp(B(x)/\varepsilon_n^2) \cdot 1 \geq \exp(\alpha x/\varepsilon_n^2) \implies \varepsilon_n \|\widehat{z}\| \geq \left(\frac{\varepsilon_n^2}{2\alpha} (\exp(\alpha/\varepsilon_n^2) - 1) \right)^{1/2},$$

что противоречит ограниченности $\varepsilon \|\widehat{z}\|$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. $\square$

В силу теорем о дифференцируемости систем обыкновенных дифференциальных уравнений по параметру существуют $Z_i := \frac{\partial^i z(\cdot; \lambda)}{\partial \lambda^i}$ и $P := \frac{\partial^i p(\cdot; \lambda)}{\partial \lambda^i}$, и они являются решением задачи

$$\mathcal{L}_\varepsilon Z_i + \lambda P_i = -iP_{i-1}, \quad \mathcal{L}_\varepsilon^* P_i - Z_i = 0, \quad Z_i, P_i \in \overset{\circ}{C}^{(2)}[0; 1], \quad i = 1, 2. \quad (2.11)$$

Здесь для единообразия $P_0 := p(\cdot; \lambda)$.

В силу (2.4) из (2.11) при $i = 1$ имеем $\lambda \|P_1\|^2 + \|Z_1\|^2 = -(p, P_1)$. С другой стороны, $\frac{d}{d\lambda}(\|p\|^2) = 2(p, P_1)$. Тем самым

$$\frac{d}{d\lambda}(\|p\|^2) = -2\lambda \|P_1\|^2 - 2\|Z_1\|^2 < 0. \quad (2.12)$$

Аналогично

$$\frac{d}{d\lambda}(\lambda^2 \|p\|^2) = 2\lambda \|p\|^2 + \lambda^2 \frac{d}{d\lambda}(\|p\|^2).$$

Но в силу первого равенства из (2.11) имеем $\|p\|^2 = \|\mathcal{L}_\varepsilon Z_1 + \lambda P_1\|^2 = \|\mathcal{L}_\varepsilon Z_1\|^2 + \lambda^2 \|P_1\|^2 + 2\lambda(\mathcal{L}_\varepsilon Z_1, P_1) \xrightarrow{(2.11), (2.12)}$

$$\frac{d}{d\lambda}(\lambda^2 \|p\|^2) = 2\lambda(\|\mathcal{L}_\varepsilon Z_1\|^2 + \|Z_1\|^2) > 0. \quad (2.13)$$

Наконец, в силу (2.11) при $i = 2$ имеем

$$\|\lambda P_2 + 2P_1\|^2 = -(\mathcal{L}_\varepsilon Z_2, \lambda P_2 + 2P_1) = -\lambda \|Z_2\|^2 - (Z_2, Z_1)$$

$$\implies \frac{d}{d\lambda}(\|Z_1\|^2) = -2(\|\lambda P_2 + 2P_1\|^2 + \lambda \|Z_2\|^2) < 0.$$

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 4. Пусть выполнены условия (1.4) и (2.2). Если $z(\cdot; \lambda)$, $p(\cdot; \lambda)$ — решение задачи (2.1), а $Z_1(\cdot; \lambda)$ — решение задачи (2.11) при одном и том же $\varepsilon > 0$, то $\|p(\cdot; \lambda)\|$ и $\|Z_1(\cdot; \lambda)\|$ строго убывают (как функции от λ), а $\lambda\|p(\cdot; \lambda)\|$ строго возрастает. $\square$

Аналогично доказывается и теорема о зависимости $\|p_0(\cdot; \lambda)\|$ и $\lambda\|p_0(\cdot; \lambda)\|$ от λ .

Теорема 5. Пусть выполнены условия (1.4) и (2.2). Если $z_0(\cdot; \lambda)$, $p_0(\cdot; \lambda)$ — решение задачи (2.7), то $\|p_0(\cdot; \lambda)\|$ убывают (как функции от λ), а $\lambda\|p_0(\cdot; \lambda)\|$ возрастает. $\square$

Следствием этих теорем является оценка величины $|\lambda_1 - \lambda_2|$ через $\left| \lambda_1 \|p(\cdot; \lambda_1)\| - \lambda_2 \|p(\cdot; \lambda_2)\| \right|$.

Теорема 6. Пусть выполнены условия (1.4). Тогда существует $K > 0$ такое, что

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in [\lambda_*; \lambda^*] \quad |\lambda_1 - \lambda_2| \leq K \left| \lambda_1^2 \|p(\cdot; \lambda_1)\|^2 - \lambda_2^2 \|p(\cdot; \lambda_2)\|^2 \right|. \quad (2.14)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу формулы конечных приращений Лагранжа получим

$$\begin{aligned} \left| \lambda_1^2 \|p(\cdot; \lambda_1)\|^2 - \lambda_2^2 \|p(\cdot; \lambda_2)\|^2 \right| &= |\lambda_1 - \lambda_2| \cdot \frac{d}{d\lambda} (\lambda^2 \|p\|^2) \Big|_{\bar{\lambda} \in [\lambda_*; \lambda^*]} \stackrel{(2.13)}{\geq} |\lambda_1 - \lambda_2| \cdot 2\bar{\lambda} \|Z_1(\cdot; \bar{\lambda})\|^2 \\ &\stackrel{\text{теор. 4}}{\geq} |\lambda_1 - \lambda_2| \cdot 2\lambda_* \|Z_1(\cdot; \lambda_*)\|^2 \stackrel{(2.10)}{=} |\lambda_1 - \lambda_2| \cdot 2\lambda_* (\|Z_{0,1}(\cdot; \lambda_*)\|^2 + O(\sqrt{\varepsilon})). \end{aligned}$$

Здесь $Z_{0,1}(\cdot; \lambda_*)$ — решение задачи $\mathcal{L}_0 Z_{0,1} + \lambda_* P_{0,1} = -p(\cdot; \lambda_*)$, $\mathcal{L}_0^* P_{0,1} - Z_{0,1} = 0$. $\square$

3. Предельная задача и аппроксимационные теоремы

Рассмотрим подробнее задачу (2.7).

Если $z_0(\cdot; \lambda)$, $p_0(\cdot; \lambda)$ есть решение задачи (2.7), то $\tilde{z} := \lambda z_0(\cdot; \lambda)$, $\tilde{p} := \lambda p_0(\cdot; \lambda)$ есть решение задачи $\mathcal{L}_0 \tilde{z} + \lambda \tilde{p} = \lambda f$, $\mathcal{L}_0^* \tilde{p} - \tilde{z} = \lambda g$. Поэтому в силу (2.9) справедливо соотношение $\|\tilde{p}\| \leq K\lambda(\|f\| + \|g\|) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$. Тем самым в силу теоремы 5

$$\{ \lambda \|p_0(\cdot; \lambda)\| : \lambda \in (0; \nu] \} = (0; \nu \|p_0(\cdot; \nu)\|).$$

Поэтому

$$(\nu \|p_0(\cdot; \nu)\| > 1) \implies (\exists! \lambda_0 \in (0; \nu) \quad \lambda_0 \|p_0(\cdot; \lambda_0)\| = 1). \quad (3.1)$$

Теорема 7. Пусть выполнены условия (1.4), а z_ε , p_ε — решение задачи (1.11), (1.10).

1. Если

$$\nu \|p_0(\cdot; \nu)\| < 1, \quad (3.2)$$

то при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\max\{\|z_\varepsilon - z_0(\cdot; \nu)\|, \|p_\varepsilon - p_0(\cdot; \nu)\|\} = O(\sqrt{\varepsilon}).$$

2. Если

$$\nu \|p_0(\cdot; \nu)\| > 1, \quad (3.3)$$

то при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\max\{\|z_\varepsilon - z_0(\cdot; \lambda_0)\|, \|p_\varepsilon - p_0(\cdot; \lambda_0)\|, |\lambda_\varepsilon - \lambda_0|\} = O(\sqrt{\varepsilon}),$$

где λ_0 определено в (3.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В первом случае функции $z(\cdot; \nu)$ и $p(\cdot; \nu)$ — решения задачи (2.1) с $\lambda = \nu$ — при достаточно малых $\varepsilon > 0$ удовлетворяют (1.11) и (1.10) с $\lambda_\varepsilon = \nu$, поскольку в силу (2.10) $\nu \|p(\cdot; \nu)\| \rightarrow \nu \|p_0(\cdot; \nu)\|$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Во втором случае при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполняется равенство $\lambda_\varepsilon \|p_\varepsilon\| = 1$. Действительно, в противном случае найдется последовательность $\{\varepsilon_n\}$ такая, что $\varepsilon_n \rightarrow 0$: $\lambda_{\varepsilon_n} \|p_{\varepsilon_n}\| < 1 \implies (\lambda_{\varepsilon_n} = \nu) \wedge (p_{\varepsilon_n} = p(\cdot; \nu)) \implies \lambda_{\varepsilon_n} \|p_{\varepsilon_n}\| = \nu \|p(\cdot; \nu)\| \rightarrow \nu \|p_0(\cdot; \nu)\| \leq 1$, а это противоречит условию теоремы.

Пусть $z(\cdot; \lambda)$ и $p(\cdot; \lambda)$ — решение задачи (2.1). В силу (2.14)

$$|\lambda_\varepsilon - \lambda_0| \leq K \left| 1 - \lambda_0^2 \|p(\cdot; \lambda_0)\|^2 \right| = K \left| \lambda_0^2 \|p_0(\cdot; \lambda_0) - \lambda_0^2 \|p(\cdot; \lambda_0)\|^2 \right| \stackrel{(2.10)}{=} O(\sqrt{\varepsilon}), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.4)$$

Функции $Z := z_\varepsilon - z(\cdot; \lambda_0)$ и $P := p_\varepsilon - p(\cdot; \lambda_0)$ удовлетворяют системе уравнений $\mathcal{L}_\varepsilon Z + \lambda_0 P = (\lambda_0 - \lambda_\varepsilon) \cdot p(\cdot; \lambda_0)$, $\mathcal{L}_\varepsilon^* P - Z = 0$. Теперь для завершения доказательства теоремы осталось применить (2.3), (2.6) и (3.4). $\square$

Итак, если выполнено соотношение (3.2), то задача (1.11), (1.10) есть краевая задача для линейной системы с $\lambda_\varepsilon = \nu$. В этом случае оценка (2.3) дает первую аппроксимационную теорему.

Теорема 8. Пусть выполнены условия (1.4) и $\tilde{z}_\gamma, \tilde{p}_\gamma \in C^2[0; 1]$ таковы, что

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\varepsilon \tilde{z}_\gamma + \nu \tilde{p}_\gamma &= f + f_\gamma, \quad \mathcal{L}_\varepsilon^* \tilde{p}_\gamma - \tilde{z}_\gamma = -z_d + g_\gamma, \quad f_\gamma, g_\gamma \in C^2[0; 1], \\ \max \{ \|f_\gamma\|, \|g_\gamma\|, |\tilde{z}_\gamma(0)|, |\tilde{z}_\gamma(1)|, |\tilde{p}_\gamma(0)|, |\tilde{p}_\gamma(1)| \} &= O(\varepsilon^\gamma), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\max \{ \varepsilon \|z'_\varepsilon - \tilde{z}'_\gamma\|, \varepsilon \|p'_\varepsilon - \tilde{p}'_\gamma\|, \|z_\varepsilon - \tilde{z}_\gamma\|, \|p_\varepsilon - \tilde{p}_\gamma\| \} = O(\varepsilon^\gamma), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сделаем замену

$$\hat{z}_\gamma(x) := \tilde{z}_\gamma(x) - (1-x)\tilde{z}_\gamma(0) - x\tilde{z}_\gamma(1), \quad \hat{p}_\gamma(x) := \tilde{p}_\gamma(x) - (1-x)\tilde{p}_\gamma(0) - x\tilde{p}_\gamma(1).$$

Тогда $\hat{z}_\gamma, \hat{p}_\gamma \in \overset{\circ}{C}^{(2)}[0; 1]$, а $Z_\gamma := z_\varepsilon - \hat{z}_\gamma$ и $P_\gamma := p_\varepsilon - \hat{p}_\gamma$ будут удовлетворять системе

$$\mathcal{L}_\varepsilon Z_\gamma + \nu P_\gamma = O(\varepsilon^\gamma), \quad \mathcal{L}_\varepsilon^* P_\gamma - Z_\gamma = O(\varepsilon^\gamma).$$

Применяя (2.3) и учитывая, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\|\tilde{z}_\gamma - \hat{z}_\gamma\| = O(\varepsilon^\gamma), \quad \|\tilde{p}_\gamma - \hat{p}_\gamma\| = O(\varepsilon^\gamma),$$

получим требуемую оценку. $\square$

В случае (3.3) аппроксимирующая задача несколько сложнее.

Теорема 9. Пусть выполнены условия (1.4) и $\tilde{z}_\gamma, \tilde{p}_\gamma \in C^2[0; 1]$, $\tilde{\lambda}_\gamma \in (0; \nu]$ таковы, что

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\varepsilon \tilde{z}_\gamma + \tilde{\lambda}_\gamma \tilde{p}_\gamma &= f + f_\gamma, \quad \mathcal{L}_\varepsilon^* \tilde{p}_\gamma - \tilde{z}_\gamma = -z_d + g_\gamma, \quad f_\gamma, g_\gamma \in C^2[0; 1], \\ \max \{ \|f_\gamma\|, \|g_\gamma\|, |\tilde{z}_\gamma(0)|, |\tilde{z}_\gamma(1)|, |\tilde{p}_\gamma(0)|, |\tilde{p}_\gamma(1)|, |1 - \tilde{\lambda}_\gamma| \|\tilde{p}_\gamma\| \} &= O(\varepsilon^\gamma), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\max \{ \varepsilon \|z'_\varepsilon - \tilde{z}'_\gamma\|, \varepsilon \|p'_\varepsilon - \tilde{p}'_\gamma\|, \|z_\varepsilon - \tilde{z}_\gamma\|, \|p_\varepsilon - \tilde{p}_\gamma\|, |\lambda_\varepsilon - \tilde{\lambda}_\gamma| \} = O(\varepsilon^\gamma), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и при доказательстве предыдущей теоремы, сначала перейдем к нулевым граничным условиям. Но теперь для невязок Z_γ и P_γ получим

$$\mathcal{L}_\varepsilon Z_\gamma + \lambda_\varepsilon P_\gamma = (\tilde{\lambda}_\gamma - \lambda_\varepsilon) \cdot \tilde{p}_\gamma + O(\varepsilon^\gamma), \quad \mathcal{L}_\varepsilon^* P_\gamma - Z_\gamma = O(\varepsilon^\gamma), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Тогда

$$|\tilde{\lambda}_\gamma - \lambda_\varepsilon| \leq K \left| \tilde{\lambda}_\gamma^2 \|\tilde{p}_\gamma + O(\varepsilon^\gamma)\|^2 - 1 \right| = K \left| \tilde{\lambda}_\gamma^2 \|\tilde{p}_\gamma\|^2 + \tilde{\lambda}_\gamma^2 O(\varepsilon^\gamma) + 2\tilde{\lambda}_\gamma \langle \tilde{p}_\gamma, O(\varepsilon^\gamma) \rangle - 1 \right| = O(\varepsilon^\gamma). \quad \square$$

4. Построение асимптотических разложений

Теоремы 8 и 9 показывают, что формальные асимптотические решения (Ф.А.Р. [7, введение]) по степеням ε задачи (1.11), (1.10) будут асимптотикой ее решения как в пространстве $H^1(0; 1)$, так и (в силу теоремы вложения) в $C[0; 1]$.

Ф.А.Р. задачи (1.11), (1.10) будем строить в виде суммы внешнего и двух внутренних разложений, коэффициенты которых будут экспоненциально убывающими функциями пограничных слоев в окрестностях точек $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ (см., например, [14, § 27]).

Внешнее разложение будем строить в виде

$$Z_\varepsilon := \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} z_k(x), \quad P_\varepsilon := \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} p_k(x), \quad \Lambda_\varepsilon := \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} \lambda_k, \quad (4.1)$$

где z_0 и p_0 — решение предельной задачи (теорема 7) в соответствующем случае. Отметим, что в случае (3.2) $\lambda_0 = \nu$ и $\lambda_k = 0$ при всех k .

В дальнейшем будем подробно рассматривать только случай (3.3), поскольку в случае (3.2) алгоритм построения Ф.А.Р. аналогичен, но без необходимости определения коэффициентов λ_k .

Коэффициенты рядов (4.1) удовлетворяют системе уравнений

$$\mathcal{L}_0 z_k + \lambda_0 p_k = -\lambda_k p_0 + \sum_{m=1}^{k-1} \lambda_{k-m} p_m + z_k'', \quad \mathcal{L}_0^* p_k - z_k = p_k'', \quad z_k(0) = A_k, \quad p_k(1) = B_k. \quad (4.2)$$

Пусть $\overset{\circ}{z}, \overset{\circ}{p}$ — решение задачи

$$\mathcal{L}_0 \overset{\circ}{z} + \lambda_0 \overset{\circ}{p} = -p_0, \quad \mathcal{L}_0^* \overset{\circ}{p} - \overset{\circ}{z} = 0, \quad \overset{\circ}{z}(0) = 0, \quad \overset{\circ}{p}(1) = 0.$$

Отметим, что

$$\overset{\circ}{z} = \frac{\partial}{\partial \lambda} z_0(\cdot; \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0}, \quad \overset{\circ}{p} = \frac{\partial}{\partial \lambda} p_0(\cdot; \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0}. \quad (4.3)$$

Тогда z_k и p_k имеют структуру

$$z_k = \overset{\circ}{z}_k + \lambda_k \overset{\circ}{z}, \quad p_k = \overset{\circ}{p}_k + \lambda_k \overset{\circ}{p}, \quad (4.4)$$

где $\overset{\circ}{z}_k$ и $\overset{\circ}{p}_k$ — решение системы (4.2) без слагаемого $(-\lambda_k p_0)$ с указанными граничными условиями A_k, B_k . В силу теоремы 2 функции $\overset{\circ}{z}_k$ и $\overset{\circ}{p}_k$ однозначно определяются предыдущими z_m, p_m ($m < k$) и числами A_k, B_k . При этом $z_k, p_k \in C^\infty[0; 1]$.

Внутреннее разложение будем строить в виде

$$W_{i,\varepsilon} := \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} W_{i,k}(\eta_i), \quad V_{i,\varepsilon} := \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} V_{i,k}(\eta_i), \quad \eta_i := (-1)^i \frac{x_i - x}{\varepsilon^2}, \quad i = 1, 2, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1. \quad (4.5)$$

В силу линейности системы (1.11) функции $W_{i,\varepsilon}$ и $V_{i,\varepsilon}$ будем строить как Ф.А.Р. задачи

$$W_{i,\varepsilon}'' - (-1)^{i+1} b(x_i - (-1)^i \varepsilon^2 \eta_i) W_{i,\varepsilon}' - \varepsilon^2 a(x_i - (-1)^i \varepsilon^2 \eta_i) W_{i,\varepsilon} - \varepsilon^2 \Lambda_\varepsilon V_{i,\varepsilon} = 0, \\ V_{i,\varepsilon}'' + (-1)^{i+1} b(x_i - (-1)^i \varepsilon^2 \eta_i) W_{i,\varepsilon}' - \varepsilon^2 a(x_i - (-1)^i \varepsilon^2 \eta_i) W_{i,\varepsilon} + \varepsilon^2 W_{i,\varepsilon} = 0.$$

Раскладывая функции $a(x)$ и $b(x)$ в окрестностях точек x_i в ряды Тейлора и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим уравнения для $W_{i,\varepsilon}$ и $V_{i,\varepsilon}$

$$W_{i,0}'' - (-1)^{i+1} b_i W_{i,0}' = 0, \quad V_{i,0}'' + (-1)^{i+1} b_i V_{i,0}' = 0, \\ W_{i,k}'' - (-1)^{i+1} b_i W_{i,k}' = F_k(\eta_i), \quad V_{i,k}'' + (-1)^{i+1} b_i V_{i,k}' = G_k(\eta_i), \quad (4.6)$$

где $b_i = b(x_i)$, а $F_k(\eta_i)$ и $G_k(\eta_i)$ — линейные комбинации (с известными коэффициентами) функций $\eta_i^{k-m}W'_{i,m}$, $\eta_i^{k-m}V'_{i,m}$, $\eta_i^{k-1-m}W_{i,m}$, $\eta_i^{k-1-m}V_{i,m}$, $\lambda_{k-1-m}V_{i,m}$, $m < k$.

Отметим, что структуры решений этих систем в классе ограниченных при $\varepsilon \rightarrow 0$ функций одинаковы и, вообще говоря, содержат многочлены от η_i . Однако в данной задаче удается построить согласованные (см. [7, формула (0.8)]) внешнее и внутренние разложения при помощи только экспоненциально убывающих функций от η_i .

В классе экспоненциально убывающих при $\eta_i \rightarrow +\infty$ функций решения задач (4.6) имеют вид

$$\begin{aligned} W_{1,0} &= 0, & W_{1,k} &= \exp(-b_1\eta_1)Q_{w,1,2k-2}, \\ V_{1,0} &= C_{1,0} \exp(-b_1\eta_1), & V_{1,k} &= \exp(-b_1\eta_1)(C_{1,k} + \eta_1 Q_{v,1,2k-2}), \\ W_{2,0} &= C_{2,0} \exp(-b_2\eta_2), & W_{2,k} &= \exp(-b_2\eta_2)(C_{2,k} + \eta_2 Q_{w,2,2k-2}), \\ V_{2,0} &= 0, & V_{2,k} &= \exp(-b_2\eta_2)Q_{v,2,2k-2}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где $Q_{\cdot,\cdot,2k-2}$ — многочлены степени $2k-2$ однозначно определяются предыдущими коэффициентами соответствующих внутренних разложений.

Константы A_k , B_k , A_k , $C_{i,k}$ и λ_k находятся из соотношений, обеспечивающих удовлетворение граничным условиям

$$z_k(x_i) + W_{i,k}(0) = 0, \quad p_k(x_i) + V_{i,k}(0) = 0 \quad (4.8)$$

и условиям аппроксимации величины $\lambda_\varepsilon \|p_\varepsilon\| = 1$

$$\lambda_\varepsilon^2 \|P_\varepsilon + V_{1,\varepsilon} + V_{2,\varepsilon}\|^2 = 1 + O(\varepsilon^{+\infty}), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.9)$$

Правая часть соотношения в (4.9) есть сумма произведений вида

$$\varepsilon^{2n} \lambda_{m_1} \lambda_{m_2} (p_{m_3} + V_{1,m_3} + V_{2,m_3}, p_{m_3} + V_{1,m_3} + V_{2,m_3}), \quad m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = n.$$

Но

$$(p_m, V_{i,m'}) = O(\varepsilon^2), \quad (V_{i,m}, V_{i,m'}) = O(\varepsilon^2), \quad (V_{1,m}, V_{2,m'}) = O(\varepsilon^{+\infty}), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

и все $(p_m, V_{i,m'})$ и $(V_{i,m}, V_{i,m'})$ разлагаются в степенные асимптотические ряды по $\{\varepsilon^{2k}\}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Таким образом, условие (4.9) с учетом равенства $\lambda_0 \|p_0\| = 1$ принимает вид

$$\lambda_k \|p_0\|^2 + \lambda_0(p_0, p_k) = \delta_k,$$

где δ_k — известная константа, определяемая предыдущими коэффициентами всех разложений. Учитывая (4.4), получим

$$\lambda_k \|p_0\|^2 + \lambda_0(p_0, \overset{o}{p}_k) + \lambda_0 \lambda_k(p_0, \overset{o}{p}) = \delta_k.$$

Используя формулы для $\frac{d}{d\lambda}(\lambda \|p_0(\cdot; \lambda)\|)$, аналогичные формулам (2.13), получим

$$\|p_0\|^2 + \lambda_0(p_0, \overset{o}{p}) \stackrel{(4.3)}{=} \|\mathcal{L}_0 \overset{o}{z}\|^2 + \lambda_0 \|\overset{o}{z}\|^2 > 0,$$

поэтому

$$\lambda_k = \frac{\delta_k - \lambda_0(p_0, \overset{o}{p}_k)}{\|\mathcal{L}_0 \overset{o}{z}\|^2 + \lambda_0 \|\overset{o}{z}\|^2}. \quad (4.10)$$

Опишем алгоритм определения коэффициентов всех разложений (4.1) и (4.5).

При $k = 0$ коэффициент $C_{1,0}$ определяется равенством $V_{1,0} + p_0(0) = 0$, т. е. $C_{1,0} = -p_0(0)$. Аналогично определяется и $C_{2,0} = -z_0(1)$.

Если при всех $m < k$ все коэффициенты уже определены, то следующие коэффициенты определяются так:

1. Сначала по $W_{1,k}$ и $V_{2,k}$ из (4.7) определяются $A_k = -W_{1,k}(0)$ и $B_k = -V_{2,k}(0)$, что полностью определяет функции $\overset{o}{z}_k$ и $\overset{o}{p}_k$.

2. По функции $\overset{o}{p}_k$ из (4.10) находится λ_k и тем самым полностью определяются функции z_k и p_k .

3. Наконец, по z_k и p_k однозначно находятся $C_{1,k} = -p_k(0)$ и $C_{2,k} = -z_k(1)$, по которым определяются функции $W_{2,k}$ и $V_{1,k}$.

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 10. Пусть выполнены условия (1.4), а z_ε , p_ε и λ_ε — решение задачи (1.11), (1.10). Тогда z_ε , p_ε и λ_ε разлагаются в ряды вида (4.1), (4.5)

$$z_\varepsilon = Z_\varepsilon + W_{1,\varepsilon} + W_{1,\varepsilon}, \quad p_\varepsilon = P_\varepsilon + V_{1,\varepsilon} + V_{1,\varepsilon}, \quad \lambda_\varepsilon = \Lambda_\varepsilon,$$

где все коэффициенты этих рядов однозначно находятся из (4.2), (4.4), (4.7), (4.8) и (4.10).

Эти разложения справедливы как в $H^1(0;1)$, так и в $C[0;1]$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
3. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
4. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями в частных производных. М.: Мир, 1972. 441 с.
5. Эрдейи А. Асимптотические разложения. М.: Физматгиз, 1962. 127 с.
6. Данилин А.Р., Коробицина Н.С. Асимптотические оценки решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления на отрезке с геометрическими ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 104–112.
7. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
8. Данилин А.Р. Аппроксимация сингулярно возмущенной эллиптической задачи оптимального управления // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 10. С. 3–12.
9. Данилин А.Р., Зорин А.П. Асимптотика решения задачи граничного оптимального управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 95–107.
10. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950. 255 с.
11. Красовский А.Н., Решетов В.М. Задача сближения — уклонения в системах с малым параметром при производных // Прикл. математика и механика. 1974. Т. 38, вып. 5. С. 771–779.
12. Субботина Н.Н. Асимптотика сингулярно возмущенных уравнений Гамильтона — Якоби // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, вып. 2. С. 220–230.
13. Дмитриев М.Г., Курина Г.А. Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–51.
14. Ильин А.М., Данилин А.Р. Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с.

Данилин Алексей Руфимович

Поступила 16.04.2014

д-р физ.-мат. наук

зав. отделом

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

профессор

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: dar@imm.uran.ru

УДК 517.929

**ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНАЯ ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ¹****Ю. Ф. Долгий**

Рассматривается задача оптимального управления на конечном интервале для систем дифференциальных уравнений с последействием и квадратичным критерием качества. Оптимальное управление формируется по принципу обратной связи. Используется постановка задачи в функциональном пространстве состояний. Показано, что коэффициенты оптимального управления определяются решением системы интегро-дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с последействием, оптимальное управление, квадратичный критерий качества.

Yu. F. Dolgii. Linear-quadratic control problem for systems of differential equations with aftereffect.

We consider an optimal control problem on a finite interval for systems of differential equations with aftereffect and quadratic quality criterion. A feedback optimal control is considered. The problem is formulated in a functional state space. It is shown that the coefficients of the optimal control are defined by a solution of a system of integro-differential equations.

Keywords: differential equations with aftereffect, optimal control, quadratic quality criterion.

1. Введение

При решении линейно-квадратичных задач для линейных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием Н. Н. Красовский предложил использовать квадратичные функционалы [1]. Предложенный подход использовался при решении линейно-квадратичных задач для линейных систем дифференциальных уравнений с сосредоточенными запаздываниями и с распределенными запаздываниями [1–9]. В функциональном пространстве состояний системы дифференциальных уравнений с последействием можно поставить в соответствие дифференциальное уравнение в банаховом пространстве [10]. Если в качестве функционального пространства состояний выбрать гильбертово пространство, то требуемый теорией линейно-квадратичной оптимизации функционал будет задаваться линейным непрерывным положительным оператором, действующим в этом пространстве. При этом рассматриваемый метод решения задачи оптимизации допускает обобщение на математические модели, описываемые дифференциальными уравнениями в гильбертовом пространстве [11; 12]. Задача определения коэффициентов аналитического представления квадратичного функционала может быть сведена к проблеме нахождения решения специальной определяющей системы обобщенных уравнений Риккати [1; 6; 9; 14; 15]. При построении оптимального управления возникают трудности, связанные с интегрированием определяющей системы обобщенных уравнений Риккати. Точные решения этой системы уравнений получены в рамках специальных постановок задач [13–15]. Аппроксимационная теория линейно-квадратичной оптимизации для систем дифференциальных уравнений с последействием развивалась в работах [3; 4; 16–22].

В настоящей работе для линейной автономной системы дифференциальных уравнений с последействием изучается задача линейно-квадратичной оптимизации. В качестве функционального пространства состояний выбирается сепарабельное гильбертово пространство. Ис-

¹Работа выполнена при поддержке программы Президиума РАН “Динамические системы и теория управления” (проект 12-П-1-1019) и гранта РФФИ (проект 13-01-00094а).

пользуется формулировка задачи линейно-квадратичной оптимизации в функциональном пространстве состояний. Показано, что задача определения коэффициентов представления оптимального управления может быть сведена к нахождению решения системы интегро-дифференциальных уравнений.

2. Функциональное пространство состояний

Объект управления описывается линейной системой дифференциальных уравнений с последствием

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-r}^0 d\eta(s)x(t+s) + Bu, \quad (2.1)$$

где $t \in (0, T]$, $x : [-r, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$; $u \in \mathbb{R}^m$ — управление; $r, T > 0$; B — постоянная матрица; матричнозначная функция η имеет ограниченную вариацию на $[-r, 0]$, $\eta(0) = 0$.

Требуется найти управление, формируемое по принципу обратной связи, которое для системы (2.1) минимизирует заданный критерий качества

$$J = x^\top(T)C_0x(T) + \int_0^T \left(x^\top(t)C_x x(t) + u^\top(t)C_u u(t) \right) dt, \quad (2.2)$$

где C_0 , C_x и C_u — положительно определенные матрицы.

При решении поставленной задачи удобно, следуя Н. Н. Красовскому [10], от конечномерной постановки задачи перейти к бесконечномерной, вводя с помощью формул $\mathbf{x}_t(\vartheta) = x(t+\vartheta)$, $\vartheta \in [-r, 0]$, $t \in [0, T]$, функциональные элементы для решений системы (2.1), принадлежащие сепарабельному гильбертовому пространству $\mathbb{H} = \mathbb{L}_2([-r, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^\top(0)\mathbf{x}(0) + \int_{-r}^0 \mathbf{y}^\top(\vartheta)\mathbf{x}(\vartheta)d\vartheta$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}$.

В функциональном пространстве состояний $\mathbb{H}$ системе (2.1) соответствует уравнение [10]

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}u, \quad t > 0,$$

где неограниченный оператор $\mathbf{A}$ задается формулами

$$(\mathbf{A}\mathbf{x})(\vartheta) = \frac{d\mathbf{x}(\vartheta)}{d\vartheta}, \vartheta \in [-r, 0), \quad (\mathbf{A}\mathbf{x})(0) = \int_{-r}^0 d\eta(s)\mathbf{x}(s)$$

и имеет область определения $\mathfrak{D}(\mathbf{A}) = \mathbb{W}_2^1([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, а ограниченный оператор $\mathbf{B} : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{H}$ — формулами $(\mathbf{B}u)(\vartheta) = 0$, $\vartheta \in [-r, 0)$, $(\mathbf{B}u)(0) = Bu$.

Допустимые управления $\mathbf{u}[t, \mathbf{x}]$, $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$, $t \in [0, T]$, системы (2.1), формируемые по принципу обратной связи, порождаются линейными непрерывными отображениями $\mathbf{u}[t, \mathbf{x}] = \mathcal{U}(t)\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$, $t \in [0, T]$, где линейные непрерывные операторы $\mathcal{U}(t)$, $t \in [0, T]$, действуют из пространства $\mathbb{H}$ в пространство $\mathbb{R}^m$ и их нормы $\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^m}$ непрерывно зависят от t на отрезке $[0, T]$.

В функциональном пространстве состояний $\mathbb{H}$ показатель качества (2.2) описывается формулой

$$J = \mathbf{x}_T^\top(0)C_0\mathbf{x}_T(0) + \int_0^T \left(\langle \mathbf{C}_x\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t \rangle + \mathbf{u}^\top[t, \mathbf{x}_t]C_u\mathbf{u}[t, \mathbf{x}_t] \right) dt,$$

где ограниченный самосопряженный оператор $\mathbf{C}_x : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ определяется формулами

$$(\mathbf{C}_x\mathbf{x})(\vartheta) = 0, \quad \vartheta \in [-r, 0), \quad (\mathbf{C}_x\mathbf{x})(0) = C_x\mathbf{x}(0).$$

При нахождении оптимального управления используется уравнение Беллмана [15]

$$\min_{u[t, \cdot]} \left(\left(\frac{dV(t, \mathbf{x}_t)}{dt} \right)_{\mathbf{x}_t = \mathbf{x}} + \langle \mathbf{C}_x \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \mathbf{u}^\top [t, \mathbf{x}] C_u \mathbf{u} [t, \mathbf{x}] \right) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}, \quad t \in [0, T],$$

в котором $V(t, \cdot)$ — квадратичный функционал, определяемый формулой $V(t, \mathbf{x}) = \langle \mathbf{U}(t) \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$, $t \in [0, T]$, и удовлетворяющий условию $V(T, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top(0) C_0 \mathbf{x}(0)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$. Здесь при каждом фиксированном $t \in [0, T]$ действующий в пространстве $\mathbb{H}$ оператор $\mathbf{U}(t)$ вполне непрерывен, самосопряжен и положителен. Отображение $t \rightarrow \mathbf{U}(t)$ непрерывно на отрезке $[0, T]$ в операторной топологии. Оптимальное управление определяется формулой [4]

$$\mathbf{u}^0[t, \mathbf{x}] = -C_u^{-1} B^\top (\mathbf{U}(t) \mathbf{x})(0), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}, \quad t \in [0, T],$$

в которой функция $\mathbf{U}(\cdot)$ удовлетворяет почти всюду дифференциальному операторному уравнению Риккати [4]

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} + \mathbf{U}\mathbf{A} + \mathbf{A}^*\mathbf{U} + \mathbf{C}_x - \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U} = 0, \quad t \in [0, T], \quad (2.3)$$

и краевым условиям

$$(\mathbf{U}(T)\mathbf{x})(\vartheta) = 0, \quad \vartheta \in [-r, 0), \quad (\mathbf{U}(T)\mathbf{x})(0) = C_0 \mathbf{x}(0), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}. \quad (2.4)$$

Здесь неограниченный сопряженный оператор $\mathbf{A}^*$ задается формулами

$$(\mathbf{A}^* \mathbf{y})(\vartheta) = -\frac{d\hat{\mathbf{y}}(\vartheta)}{d\vartheta}, \quad \vartheta \in [-r, 0), \quad (\mathbf{A}^* \mathbf{y})(0) = \hat{\mathbf{y}}(0),$$

где $\hat{\mathbf{y}}(\vartheta) = \mathbf{y}(\vartheta) - \eta^\top(\vartheta) \mathbf{y}(0)$, $\vartheta \in [-r, 0)$, $\hat{\mathbf{y}}(0) = \hat{\mathbf{y}}(-0)$, и имеет область определения $\mathfrak{D}(\mathbf{A}^*) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{H} : \hat{\mathbf{y}}(\cdot) \in \mathbb{W}_2^1([-r, 0], \mathbb{R}^n), \mathbf{y}(-r) = 0\}$, а ограниченный самосопряженный оператор $\mathbf{D} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ задается формулами $(\mathbf{D}\mathbf{x})(\vartheta) = 0$, $\vartheta \in [-r, 0)$, $(\mathbf{D}\mathbf{x})(0) = D\mathbf{x}(0)$, где $D = BC_u^{-1}B^\top$.

3. Определяющая система дифференциальных уравнений

Используя подход, предложенный в работе [15], задаем представление решения уравнения Риккати (2.3)

$$(\mathbf{U}(t)\mathbf{x})(\vartheta) = K(t, \vartheta, 0)\mathbf{x}(0) + \int_{-r}^0 K(t, \vartheta, s)\mathbf{x}(s)ds, \quad \vartheta \in [-r, 0], \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}, \quad t \in [0, T],$$

удовлетворяющее условиям:

- 1) для $t \in [0, T]$ имеем $K^\top(t, 0, 0) = K(t, 0, 0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, функция $K(\cdot, 0, 0) \in \mathbb{W}_2^1([0, T], \mathbb{R}^{n \times n})$;
- 2) для $t \in [0, T]$ и почти всех $\vartheta \in [-r, 0)$ имеем $K^\top(t, 0, \vartheta) = K(t, \vartheta, 0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, функция $K(t, \cdot, 0) \in \mathbb{L}_2([-r, 0], \mathbb{R}^{n \times n})$;
- 3) для $t \in [0, T]$ и почти всех точек $(\vartheta, s) \in [-r, 0) \times [-r, 0)$ имеем $K^\top(t, s, \vartheta) = K(t, \vartheta, s) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, и функция $K(t, \cdot, \cdot) \in \mathbb{L}_2([-r, 0) \times [-r, 0), \mathbb{R}^{n \times n})$.

Условия 1)–3) обеспечивают принадлежность операторов $\mathbf{U}(t)$, $t \in [0, T]$, к классу вполне непрерывных операторов Гильберта — Шмидта.

Лемма 1. Пусть выполнены условия 1)–3). Тогда матричнозначная функция K , определяющая решение уравнения Риккати (2.3), удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial \hat{K}(t, \vartheta, s)}{\partial t} + \frac{\partial \hat{K}(t, \vartheta, s)}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \hat{K}^\top(t, s, \vartheta)}{\partial s} + K(t, \vartheta, 0)DK(t, 0, s) + \eta^\top(\vartheta) \frac{\partial K^\top(t, s, 0)}{\partial t} = 0, \quad (3.1)$$

$$\vartheta, s \in [-r, 0), \quad t \in [0, T];$$

$$\frac{\partial \hat{K}(t, \vartheta, 0)}{\partial t} + \frac{\partial \hat{K}(t, \vartheta, 0)}{\partial \vartheta} + \eta^\top(\vartheta) \frac{\partial K(t, 0, 0)}{\partial t} - \hat{K}^\top(t, -0, \vartheta) + K(t, \vartheta, 0)DK(t, 0, 0) = 0, \quad (3.2)$$

$$\vartheta \in [-r, 0], \quad t \in [0, T];$$

$$\frac{\partial K(t, 0, 0)}{\partial t} + \hat{K}(t, -0, 0) + \hat{K}^\top(t, -0, 0) - K(t, 0, 0)DK(t, 0, 0) + C_x = 0, \quad t \in [0, T]; \quad (3.3)$$

$$\hat{K}(t, -r, s) + \eta^\top(-r)K(t, 0, s) = 0, \quad s \in [-r, 0], \quad t \in [0, T]; \quad (3.4)$$

$$K(T, 0, 0) = C_0, \quad K(T, \vartheta, s) = 0, \quad \vartheta \in [-r, 0], \quad s \in [-r, 0]. \quad (3.5)$$

Здесь $\hat{K}(t, \vartheta, s) = K(t, \vartheta, s) - \eta^\top(\vartheta)K(t, 0, s)$, $\vartheta \in [-r, 0]$, $s \in [-r, 0]$; для почти всех $s \in [-r, 0]$ функция $\hat{K}(\cdot, \cdot, s) \in \mathbb{W}_2^1([0, T] \times [-r, 0], \mathbb{R}^{n \times n})$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{y}(\vartheta) = (\mathbf{U}(t)\mathbf{x})(\vartheta) = K(t, \vartheta, 0)\mathbf{x}(0) + \int_{-r}^0 K(t, \vartheta, s)\mathbf{x}(s)ds$, $\vartheta \in [-r, 0]$, $t \in [0, T]$, $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$. Из определения множества $\mathfrak{D}(\mathbf{A}^*)$ следует, что при всех $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$ должны выполняться равенства

$$\mathbf{y}(-r) = (\mathbf{U}(t)\mathbf{x})(-r) = K(t, -r, 0)\mathbf{x}(0) + \int_{-r}^0 K(t, -r, s)\mathbf{x}(s)ds = 0, \quad t \in [0, T], \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}, \quad (3.6)$$

а также включения $\hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{W}_2^1([-r, 0], \mathbb{R}^{n \times n})$, где

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}}(\vartheta) &= (\mathbf{U}(t)\mathbf{x})(\vartheta) - \eta^\top(\vartheta)(\mathbf{U}(t)\mathbf{x})(0) \\ &= (K(t, \vartheta, 0) - \eta^\top(\vartheta)K(t, 0, 0))\mathbf{x}(0) + \int_{-r}^0 (K(t, \vartheta, s) - \eta^\top(\vartheta)K(t, 0, s))\mathbf{x}(s)ds, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$\vartheta \in [-r, 0]$, $\hat{\mathbf{y}}(0) = \hat{\mathbf{y}}(-0)$, $t \in [0, T]$, $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$. Тогда из (3.6) следует, что для $t \in [0, T]$, $s = 0$ и почти всех $s \in [-r, 0]$ имеем равенства $K(t, -r, s) = 0$, которые эквивалентны (3.4). Из (3.7) вытекает требуемая в утверждении гладкость функции $\hat{K}$. При выполнении этих условий операторы $\mathbf{A}^*\mathbf{U}(t)$, $\mathbf{U}(t)\mathbf{A}$ являются ограниченными в пространстве $\mathbb{H}$ и определяются формулами

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^*\mathbf{U}(t)\mathbf{x})(0) &= \hat{\mathbf{y}}(-0) = \hat{K}(t, -0, 0)\mathbf{x}(0) + \int_{-r}^0 \hat{K}(t, -0, s)\mathbf{x}(s)ds, \\ (\mathbf{A}^*\mathbf{U}(t)\mathbf{x})(\vartheta) &= -\frac{d\hat{\mathbf{y}}(\vartheta)}{d\vartheta} = -\frac{\partial \hat{K}(t, \vartheta, 0)}{\partial \vartheta}\mathbf{x}(0) - \int_{-r}^0 \frac{\partial \hat{K}(t, \vartheta, s)}{\partial \vartheta}\mathbf{x}(s)ds, \quad \vartheta \in [-r, 0], \\ (\mathbf{U}(t)\mathbf{A}\mathbf{x})(\vartheta) &= \hat{K}^\top(t, -0, \vartheta)\mathbf{x}(0) - \int_{-r}^0 \frac{\partial \hat{K}^\top(t, s, \vartheta)}{\partial \vartheta}\mathbf{x}(s)ds, \quad \vartheta \in [-r, 0], \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Указанная в утверждении определяющая система уравнений получена из тождества, в которое превращается уравнение Риккати (2.3) после подстановки представлений операторов $\mathbf{U}(t)\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^*\mathbf{U}(t)$, $\mathbf{U}(t)$, $t \in [0, T]$ и $\mathbf{D}$. Уравнения (3.5) находятся из краевых условий (2.4). $\square$

В работах [2; 6; 13–15] приводятся другие формы определяющих систем для операторного уравнения Риккати. Нахождение оптимального управления связано с интегрированием определяющей системы. Ее точные решения получены только в специальных случаях [13; 15]. Поэтому активно развивались аппроксимационные методы решения линейно-квадратичной

задачи оптимального управления для систем дифференциальных уравнений с последействием [3; 4; 16–22]. Другой подход связан с упрощением определяющей системы [2; 15]. В настоящей работе для линейно-квадратичной задачи оптимального управления системой дифференциальных уравнений с последействием реализуется подход, предложенный в [15] в задаче оптимальной стабилизации системы с последействием.

Вопросы существования и единственности оптимального управления исследовались в работах [2; 4]. В настоящей работе выполнены условия, гарантирующие существование единственного оптимального управления, и решается задача его конструктивного нахождения.

4. Определяющая система интегро-дифференциальных уравнений

Преобразование определяющей системы связано с интегрированием уравнений в частных производных, которое приводит к системе интегро-дифференциальных уравнений с обыкновенными производными.

Лемма 2. Пусть $X(t, \vartheta) = \hat{K}(t, \vartheta, 0)$, $\vartheta \in [-r, 0)$, $X(t, 0) = X(t, -0)$, $K_0(t) = K(t, 0, 0)$, $t \in [0, T]$. Тогда для решения $K(t, \vartheta, s)$, $t \in [0, T]$, $\vartheta, s \in [-r, 0]$, определяющей системы дифференциальных уравнений (3.1)–(3.4) справедливы формулы

$$K(t, \vartheta, s) = \Phi(t, \vartheta, s) + \eta^\top(\vartheta)X^\top(t, s) + X(t, \vartheta)\eta(s) + \eta^\top(\vartheta)K_0(t)\eta(s), \quad \vartheta, s \in [-r, 0), \quad (4.1)$$

$$K(t, \vartheta, 0) = X(t, \vartheta) + \eta^\top(\vartheta)K_0(t), \quad \vartheta \in [-r, 0), \quad K(t, 0, 0) = K_0(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4.2)$$

Здесь

$$\Phi^\top(t, \vartheta, s) = \Phi(t, s, \vartheta), \quad \vartheta, s \in [-r, 0), \quad t \in [0, T], \quad (4.3)$$

$$\Phi(t, \vartheta, s) = -X(t - s - r, \vartheta - s - r)\eta(-r) - \int_{-r}^s F(t - s + z, \vartheta - s + z, z)dz, \quad s + r \leq t \leq T, \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \Phi(t, \vartheta, s) = & \int_s^{s-\vartheta} F(t - s + z, z + \vartheta - s, z)dz - \frac{\partial X^\top(t - \vartheta, s - \vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{dK_0(t - \vartheta)}{dt}\eta(s - \vartheta) \\ & - X(t - \vartheta, -0)\eta(s - \vartheta) + K_0(t - \vartheta)D \left(X^\top(t - \vartheta, s - \vartheta) + K_0(t - \vartheta)\eta(s - \vartheta) \right), \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$0 \leq t < s + r, \quad -r \leq s \leq \vartheta < 0,$$

$$\begin{aligned} F(t, \vartheta, s) = & \left(\frac{\partial X(t, \vartheta)}{\partial t} + \frac{\partial X(t, \vartheta)}{\partial \vartheta} \right) \eta(s) + \eta^\top(\vartheta) \left(\frac{\partial X^\top(t, s)}{\partial t} + \frac{\partial X^\top(t, s)}{\partial s} \right) \\ & + \eta^\top(\vartheta) \frac{dK_0(t)}{dt} \eta(s) + \left(X(t, \vartheta) + \eta^\top(\vartheta)K_0(t) \right) D \left(X^\top(t, s) + K_0(t)\eta(s) \right), \end{aligned}$$

$$\vartheta, s \in [-r, 0), \quad t \in [0, T].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения функций $\hat{K}$, X и K_0 следует справедливость формулы (4.2). Введем матричнозначную функцию

$$\Phi(t, \vartheta, s) = \hat{K}(t, \vartheta, s) - \hat{K}(t, \vartheta, 0)\eta(s), \quad \vartheta, s \in [-r, 0), \quad t \in [0, T]. \quad (4.6)$$

Из определения функций $\hat{K}$, X , K_0 и Φ следует справедливость формулы (4.1).

Учитывая определение функции $\hat{K}$, имеем

$$\Phi(t, \vartheta, s) = K(t, \vartheta, s) - K(t, \vartheta, 0)\eta(s) - \eta^\top(\vartheta)K(t, 0, s) + \eta^\top(\vartheta)K(t, 0, 0)\eta(s),$$

$$\vartheta, s \in [-r, 0), \quad t \in [0, T].$$

Из последнего равенства и свойств 2), 3) функции K следует, что матричнозначная функция Φ удовлетворяет равенству (4.3). Из определения функции $\hat{K}$ следует, что при почти всех $s \in [-r, 0)$ отображение $\Phi(t, \cdot, s) \in \mathbb{W}_2^1([-r, 0), \mathbb{R}^{n \times n})$, а из (4.3) — что при почти всех $\vartheta \in [-r, 0)$ отображение $\Phi(t, \vartheta, \cdot) \in \mathbb{W}_2^1([-r, 0), \mathbb{R}^{n \times n})$.

Используя формулу (4.6), уравнение (3.1) преобразуем к виду

$$\frac{\partial \Phi(t, \vartheta, s)}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(t, \vartheta, s)}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \Phi(t, \vartheta, s)}{\partial s} + F(t, \vartheta, s) = 0, \quad \vartheta, s \in [-r, 0), \quad t \in [0, T]. \quad (4.7)$$

Это матричное уравнение распадается на независимые скалярные уравнения в частных производных первого порядка, определяющие элементы матричнозначной функции Φ . Учитывая условие (4.3), решение уравнения (4.7) можно искать в области $-r \leq s \leq \vartheta < 0$. Используя методы интегрирования скалярных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [23, § 53], находим

$$\Phi(t, \vartheta, s) = \Psi(t - s, \vartheta - s) - \int_{-r}^s F(t - s + z, \vartheta - s + z, z) dz, \quad -r \leq s \leq \vartheta < 0, \quad t \in [0, T], \quad (4.8)$$

где $\Psi(\cdot, \cdot) \in \mathbb{W}_2^1([0, T + r] \times [0, r), \mathbb{R}^{n \times n})$. Учитывая предыдущую формулу, определения функций Φ , $\hat{K}$ и условие (3.4), имеем

$$\Psi(t - s, \vartheta - s) = -X(t - s - r, \vartheta - s - r)\eta(-r), \quad -r \leq s \leq \vartheta < 0, \quad s + r \leq t \leq T.$$

Из формулы (4.8) следует, что решение уравнения (4.7) при $s + r \leq t \leq T$, $-r \leq s \leq \vartheta < 0$ определяется формулой (4.4).

Уравнение (3.2) перепишем в форме

$$\frac{\partial X(t, \vartheta)}{\partial t} + \frac{\partial X(t, \vartheta)}{\partial \vartheta} + \hat{f}(t, \vartheta) = 0, \quad (4.9)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{f}(t, \vartheta) &= \eta^\top(\vartheta) \frac{dK_0(t)}{dt} - \Phi^\top(t, -0, \vartheta) - \eta^\top(\vartheta) X^\top(t, -0) + \left(X(t, \vartheta) + \eta^\top(\vartheta) K_0(t) \right) D K_0(t), \\ &\vartheta \in [-r, 0), \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

При $0 \leq t < s + r$, $-r \leq \vartheta < 0$ имеем

$$\begin{aligned} \Phi^\top(t, -0, \vartheta) &= \frac{\partial X(t, \vartheta)}{\partial t} + \frac{\partial X(t, \vartheta)}{\partial \vartheta} + \eta^\top(\vartheta) \frac{dK_0(t)}{dt} \\ &- \eta^\top(\vartheta) X^\top(t, -0) + \left(X(t, \vartheta) + \eta^\top(\vartheta) K_0(t) \right) D K_0(t), \\ \Phi(t, -0, \vartheta) &= \Psi(t - \vartheta, -\vartheta) - \int_{-r}^{\vartheta} F(t - \vartheta + z, z - \vartheta, z) dz. \end{aligned}$$

Учитывая полученные равенства, находим

$$\begin{aligned} \Psi(t - s, \vartheta - s) &= \int_{-r}^{s - \vartheta} F(t - s + z, z + \vartheta - s, z) dz - \frac{\partial X^\top(t - \vartheta, s - \vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{dK_0(t - \vartheta)}{dt} \eta(s - \vartheta) \\ &- X(t - \vartheta, -0) \eta(s - \vartheta) + K_0(t - \vartheta) D \left(X^\top(t - \vartheta, s - \vartheta) + K_0(t - \vartheta) \eta(s - \vartheta) \right), \end{aligned}$$

$$0 \leq t < s + r, \quad -r \leq s \leq \vartheta < 0.$$

В результате получим (4.5). □

Теорема 1. *Функции K_0 и X удовлетворяют системе интегро-дифференциальных уравнений*

$$\frac{dK_0(t)}{dt} + X(t, -0) + X^\top(t, -0) - K_0(t)DK_0(t) + C_x = 0, \quad t \in [0, T], \quad K_0(T) = C_0, \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} X(t, \vartheta) = & -\eta^\top(-r)K_0(t - \vartheta - r) - \int_{-r}^{\vartheta} \left(\eta^\top(z) \frac{dK_0(t - \vartheta + z)}{dz} - X(t - \vartheta - r, -r)\eta(-r - z) \right) dz \\ & - \int_{-r}^{\vartheta} \left(X(t - \vartheta + z, z) + \eta^\top(z)K_0(t - \vartheta + z) \right) DK_0(t - \vartheta + z) dz \\ & + \int_{-r}^{\vartheta} \int_{-r}^z \left(d\eta^\top(z_1)X^\top(t - \vartheta + z_1, z_1 - z) + X(t - \vartheta + z_1, z_1)d\eta(z_1 - z) \right) dz \\ & - \int_{-r}^{\vartheta} \int_{-r}^z \left(X(t - \vartheta + z_1, z_1) + \eta^\top(z_1)K_0(t - \vartheta + z_1) \right) D \\ & \times \left(X^\top(t - \vartheta + z_1, z_1 - z) + K_0(t - \vartheta + z_1)\eta(z_1 - z) \right) dz_1 dz \\ & - \int_{-r}^{\vartheta} \int_{-r}^z \eta^\top(z_1) \frac{dK_0(t - \vartheta + z_1)}{dz_1} \eta(z_1 - z) dz_1 dz, \quad \vartheta + r \leq t \leq T, \quad -r \leq \vartheta < 0, \quad (4.11) \\ & \eta^\top(\vartheta - s - r)X^\top(T - s - r, -r) - \int_{-r}^s \eta^\top(\vartheta - s + z) \frac{dK_0(T - s + z)}{dz} \eta(z) dz \\ & + \int_{-r}^s \left(X(T - s + z, \vartheta - s + z)d\eta(z) + d\eta^\top(\vartheta - s + z)X^\top(T - s + z, z) \right) \\ & - \int_{-r}^s \left(X(T - s + z, \vartheta - s + z) + \eta^\top(\vartheta - s + z)K_0(T - s + z) \right) D \\ & \times \left(X^\top(T - s + z, z) + K_0(T - s + z)\eta(z) \right) dz + \eta^\top(\vartheta)C_0\eta(s) = 0, \\ & -r \leq s \leq \vartheta < 0. \quad (4.12) \end{aligned}$$

Решение $K_0(t)$, $X(t, \vartheta)$, $\vartheta \in [-r, 0]$, $t \in [0, T]$, системы уравнений (4.10)–(4.12) по формулам (4.1), (4.2) определяет решение $K(t, \vartheta, s)$, $t \in [0, T]$, $\vartheta, s \in [-r, 0]$, системы дифференциальных уравнений (3.1)–(3.4), для которого удовлетворяются краевые условия (3.5) при выполнении $\det \eta(-r) \neq 0$.

Доказательство. Используя уравнение (3.3) и краевое условие (3.5) при $\vartheta = s = 0$, получим (4.10).

Если в определении функции $\hat{f}$ при $\vartheta + r \leq t \leq T$, $-r \leq \vartheta < 0$ учесть представление функции

$$\Phi(t, -0, \vartheta) = -X(t - \vartheta - r, -\vartheta - r)\eta(-r) - \int_{-r}^{\vartheta} F(t - \vartheta + z, -\vartheta + z, z) dz, \quad \vartheta + r \leq t \leq T, \quad -r \leq \vartheta < 0,$$

получаемое из формулы (4.4), то уравнение (4.9) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\partial X(t, \vartheta)}{\partial t} + \frac{\partial X(t, \vartheta)}{\partial \vartheta} + f(t, \vartheta) = 0, \quad \vartheta + r \leq t \leq T, \quad -r \leq \vartheta < 0. \quad (4.13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f(t, \vartheta) = & \eta^\top(\vartheta) \frac{dK_0(t)}{dt} - X(t - \vartheta - r, -r) \eta(-r - \vartheta) + \left(X(t, \vartheta) + \eta^\top(\vartheta) K_0(t) \right) D K_0(t) \\ & - \int_{-r}^{\vartheta} \left(d\eta^\top(z) X^\top(t - \vartheta + z, z - \vartheta) + X(t - \vartheta + z, z) d\eta(z - \vartheta) \right) + \int_{-r}^{\vartheta} \eta^\top(z) \frac{dK_0(t - \vartheta + z)}{dz} \eta(z - \vartheta) dz \\ & + \int_{-r}^{\vartheta} \left(X(t - \vartheta + z, z) + \eta^\top(z) K_0(t - \vartheta + z) \right) D \left(X^\top(t - \vartheta + z, z - \vartheta) + K_0(t - \vartheta + z) \eta(z - \vartheta) \right) dz, \\ & \vartheta + r \leq t \leq T, \quad -r \leq \vartheta < 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Интегрируя уравнение в частных производных (4.13), находим

$$X(t, \vartheta) = \psi(t - \vartheta) - \int_{-r}^{\vartheta} f(t - \vartheta + z, z) dz, \quad \vartheta + r \leq t \leq T, \quad -r \leq \vartheta < 0, \quad (4.15)$$

где $\psi(\cdot) \in \mathbb{W}_2^1([r, T + r], \mathbb{R}^{n \times n})$. Учитывая (3.4), из (4.15) получим $X(t, -r) = \psi(t + r) = -\eta^\top(-r) K_0(t)$, $t \in [0, T]$. Отсюда $\psi(t - \vartheta) = -\eta^\top(-r) K_0(t - \vartheta - r)$ при $t \in [\vartheta + r, T]$, $\vartheta \in [-r, 0]$. В результате находим

$$X(t, \vartheta) = -\eta^\top(-r) K_0(t - \vartheta - r) - \int_{-r}^{\vartheta} f(t - \vartheta + z, z) dz, \quad t \in [\vartheta + r, T], \quad \vartheta \in [-r, 0]. \quad (4.16)$$

Подставляя в (4.16) представление функции f , определяемое формулой (4.14), получим интегральное уравнение (4.11).

Используя формулу (4.4), определение функции Φ и краевое условие (3.5) при $-r \leq s \leq \vartheta < 0$, получим уравнение (4.12).

Из формул (4.1), (4.2) следует отмеченная в формулировке теоремы связь решения системы уравнений (4.10)–(4.12) с решением системы дифференциальных уравнений (3.1)–(3.4).

Справедливость для решения $K(t, \vartheta, s)$, $t \in [0, T]$, $\vartheta, s \in [-r, 0]$, системы дифференциальных уравнений (3.1)–(3.4) краевого условия (3.5) при $\vartheta = s = 0$ следует из краевого условия $K_0(T) = C_0$. Полагая в уравнении (4.12) $s = -r$, получим $X(T, \vartheta) = -\eta^\top(\vartheta) C_0$, $-r \leq \vartheta < 0$. Тогда справедливость для решения системы дифференциальных уравнений (3.1)–(3.4) краевого условия (3.5) при $s = 0$ и $-r \leq \vartheta < 0$ следует из формулы (4.2), а справедливость для решения системы дифференциальных уравнений (3.1)–(3.4) краевого условия (3.5) при $-r \leq s \leq \vartheta < 0$ следует из формул (4.1), (4.4). $\square$

5. Пошаговая процедура для определяющей системы уравнений

Для упрощения нахождения решения системы интегро-дифференциальных уравнений (4.10), (4.12), (4.11) можно предложить пошаговую процедуру. При ее описании будем полагать, что $T = (M + 1)r$.

Введем обозначения $K_{0n}(\tau) = K_0(nr + \tau)$, $X_n(\tau, \vartheta) = X(nr + \tau, \vartheta)$, $0 \leq \tau \leq r$, $0 \leq n \leq M$.

Теорема 2. Функции K_{0n}, X_n , $0 \leq n \leq M$, удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{dK_{0n}(\tau)}{d\tau} - K_{0n}(\tau)DK_{0n}(\tau) + X_n(\tau, -0) + X_n^\top(\tau, -0) + C_x = 0, \quad \tau \in [0, r], \quad 0 \leq n \leq M,$$

$$K_{0n}(r) = K_{0n+1}(0), \quad 0 \leq n \leq M-1, \quad K_{0M}(r) = C_0,$$

$$\begin{aligned} X_0(\tau, \vartheta) = & -\eta^\top(-r)K_{00}(\tau - \vartheta - r) - \int_{-r}^{\vartheta} \eta^\top(z) \frac{dK_{00}(\tau - \vartheta + z)}{dz} dz \\ & - \int_{-r}^{\vartheta} \left(X_0(\tau - \vartheta + z, z) + \eta^\top(z)K_{00}(\tau - \vartheta + z) \right) DK_{00}(\tau - \vartheta + z) dz \\ & + \int_{-r}^{\vartheta} X_0(\tau - \vartheta - r, -r) \eta(-r - z) dz - \int_{-r}^{\vartheta} \int_{-r}^z \eta^\top(z_1) \frac{dK_{00}(\tau - \vartheta + z_1)}{dz_1} \eta(z_1 - z) dz_1 \\ & + \int_{-r}^{\vartheta} \int_{-r}^z \left(d\eta^\top(z_1) X_0^\top(\tau - \vartheta + z_1, z_1 - z) + X_0(\tau - \vartheta + z_1, z_1) d\eta(z_1 - z) \right) dz \\ & - \int_{-r}^{\vartheta} \int_{-r}^z \left(X_0(\tau - \vartheta + z_1, z_1) + \eta^\top(z_1)K_{00}(\tau - \vartheta + z_1) \right) D \\ & \times \left(X_{0n}^\top(\tau - \vartheta + z_1, z_1 - z) + K_{00}(\tau - \vartheta + z_1) \eta(z_1 - z) \right) dz_1, \end{aligned}$$

$$r + \vartheta \leq \tau \leq r, \quad -r \leq \vartheta < 0,$$

$$\begin{aligned} X_n(\tau, \vartheta) = & -\eta^\top(-r)K_{0n}(\tau - \vartheta - r) - \int_{-r}^{\vartheta} \eta^\top(z) \frac{dK_{0n}(\tau - \vartheta + z)}{dz} dz \\ & - \int_{-r}^{\vartheta} \left(X_n(\tau - \vartheta + z, z) + \eta^\top(z)K_{0n}(\tau - \vartheta + z) \right) DK_{0n}(\tau - \vartheta + z) dz \\ & + \int_{-r}^{\vartheta} X_n(\tau - \vartheta - r, -r) \eta(-r - z) dz - \int_{-r}^{\vartheta} \int_{-r}^z \eta^\top(z_1) \frac{dK_{0n}(\tau - \vartheta + z_1)}{dz_1} \eta(z_1 - z) dz_1 \\ & + \int_{-r}^{\vartheta} \int_{-r}^z \left(d\eta^\top(z_1) X_n^\top(\tau - \vartheta + z_1, z_1 - z) + X_n(\tau - \vartheta + z_1, z_1) d\eta(z_1 - z) \right) dz \\ & - \int_{-r}^{\vartheta} \int_{-r}^z \left(X_n(\tau - \vartheta + z_1, z_1) + \eta^\top(z_1)K_{0n}(\tau - \vartheta + z_1) \right) D \\ & \times \left(X_n^\top(\tau - \vartheta + z_1, z_1 - z) + K_{0n}(\tau - \vartheta + z_1) \eta(z_1 - z) \right) dz_1, \end{aligned}$$

$$r + \vartheta \leq \tau \leq r, \quad -r \leq \vartheta < 0, \quad 1 \leq n \leq M,$$

$$\begin{aligned}
X_n(\tau, \vartheta) = & -\eta^\top(-r)K_{0n-1}(\tau - \vartheta) - \int_{-r}^{\vartheta-\tau} \eta^\top(z) \frac{dK_{0n-1}(\tau - \vartheta + z + r)}{dz} dz \\
& - \int_{-r}^{\vartheta-\tau} \left(X_{n-1}(\tau - \vartheta + z + r, z) + \eta^\top(z)K_{0n-1}(\tau - \vartheta + z + r) \right) DK_{0n-1}(\tau - \vartheta + z + r) dz \\
& + \int_{-r}^{\vartheta} X_{n-1}(\tau - \vartheta, -r) \eta(-r - z) dz - \int_{-r}^{\vartheta-\tau} \int_{-r}^z \eta^\top(z_1) \frac{dK_{0n-1}(\tau - \vartheta + z_1 + r)}{dz_1} \eta(z_1 - z) dz_1 \\
& - \int_{\vartheta-\tau}^{\vartheta} \int_{-r}^z \eta^\top(z_1) \frac{dK_{0n}(\tau - \vartheta + z_1)}{dz_1} \eta(z_1 - z) dz_1 - \int_{\vartheta-\tau}^{\vartheta} \eta^\top(z) \frac{dK_{0n}(\tau - \vartheta + z)}{dz} dz \\
& + \int_{\vartheta-\tau}^{\vartheta} \left(X_n(\tau - \vartheta + z, z) + \eta^\top(z)K_{0n}(\tau - \vartheta + z) \right) DK_{0n}(\tau - \vartheta + z) dz \\
& + \int_{-r}^{\vartheta-\tau} \int_{-r}^z \left(d\eta^\top(z_1)X_{n-1}^\top(\tau - \vartheta + z_1 + r, z_1 - z) + X_{n-1}(\tau - \vartheta + z_1 + r, z_1) d\eta(z_1 - z) \right) dz \\
& + \int_{\vartheta-\tau}^{\vartheta} \int_{-r}^z \left(d\eta^\top(z_1)X_n^\top(\tau - \vartheta + z_1, z_1 - z) + X_n(\tau - \vartheta + z_1, z_1) d\eta(z_1 - z) \right) dz \\
& - \int_{-r}^{\vartheta-\tau} \int_{-r}^z \left(X_{n-1}(\tau - \vartheta + z_1 + r, z_1) + \eta^\top(z_1)K_{0n-1}(\tau - \vartheta + z_1 + r) \right) D \\
& \times \left(X_{n-1}^\top(\tau - \vartheta + z_1 + r, z_1 - z) + K_{0n-1}(\tau - \vartheta + z_1 + r) \eta(z_1 - z) \right) dz_1 dz \\
& - \int_{\vartheta-\tau}^{\vartheta} \int_{-r}^z \left(X_n(\tau - \vartheta + z_1, z_1) + \eta^\top(z_1)K_{0n}(\tau - \vartheta + z_1) \right) D \\
& \times \left(X_n^\top(\tau - \vartheta + z_1, z_1 - z) + K_{0n}(\tau - \vartheta + z_1) \eta(z_1 - z) \right) dz_1 dz,
\end{aligned}$$

$$0 \leq \tau < r + \vartheta, \quad -r \leq \vartheta < 0, \quad 1 \leq n \leq M,$$

$$\begin{aligned}
& \eta^\top(\vartheta + \tau - r)X_M^\top(\tau, -r) - \int_{-r}^{-\tau} \eta^\top(\vartheta + \tau + z) \frac{dK_{0M}(r + \tau + z)}{dz} \eta(z) dz \\
& + \int_{-r}^{-\tau} \left(X_M(r + \tau + z, \vartheta + \tau + z) d\eta(z) + d\eta^\top(\vartheta + \tau + z) X_M^\top(r + \tau + z, z) \right) \\
& - \int_{-r}^{-\tau} \left(X_M(r + \tau + z, \vartheta + \tau + z) + \eta^\top(\vartheta + \tau + z) K_{0M}(r + \tau + z) \right) D \\
& \times \left(X_M^\top(r + \tau + z, z) + K_{0M}(r + \tau + z) \eta(z) \right) dz + \eta^\top(\vartheta) C_0 \eta(-\tau) = 0,
\end{aligned}$$

$$-\vartheta \leq \tau \leq r, \quad -r \leq \vartheta < 0.$$

Доказательство. С учетом введенных обозначений справедливость утверждения следует из теоремы 1. $\square$

В определяющей системе уравнений, описанной в теореме 2, можно выделить замкнутую рекуррентную подсистему уравнений для функций K_{0n} , X_n , $1 \leq n \leq M$, решения которой будут зависеть от функций K_{00} , X_0 . После нахождения этого решения функции K_{00} , X_0 могут быть найдены из последнего и первых двух уравнений определяющей системы уравнений, описанной в теореме 2.

Отметим, что при $T \neq (M + 1)r$ для системы определяющих уравнений можно также предложить пошаговую процедуру, но ее описание будет сложнее.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н. Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздываниями времени // Прикл. математика и механика 1962. Т. 26, вып. 1. С. 39–51.
2. Delfour M.C., Mitter S.R. Contrallability, observability and optimal feedback control of hereditary differential systems // SIAM J. Control Optim. 1972. Vol. 10, no. 2. P. 298–328.
3. Delfour M.C. The linear quadratic optimal control problem for hereditary differential systems: theory and numerical solution // Appl. Math. Optim. 1977. Vol. 3, no. 2/3. P. 101–162.
4. Gibson J.S. Linear-quadratic optimal control of hereditary differential systems: infinite dimensional Riccati equations and numerical approximations // SIAM J. Control Optim. 1983. Vol. 21, no. 5. P. 95–135.
5. Красовский Н.Н. Об оптимальном регулировании в линейных системах с запаздыванием времени // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4, № 2. С. 295–302.
6. Янушевский Р.Т. Управление объектами с запаздыванием. М.: Наука, 1978. 416 с.
7. Fiagbedzi Y.A., Pearson A.E. Feedback stabilization of linear autonomous time lag system // IEEE Trans. Automat. Control. 1986. Vol. 31. P. 847–855.
8. Pandolfi L. Stabilization of neutral functional differential equations // J. Optimization Theory and Appl. 1976. Vol. 20, no. 2. P. 191–204.
9. Delfour M.C., McCalla C., Mitter S.K. Stability and the infinite-time quadratic cost problem for linear hereditary differential systems // SIAM J. Control. 1975. Vol. 13, no. 1. P. 48–88.
10. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
11. Datko R. A linear control problem in an abstract Hilbert space // J. Diff. Eq. 1971. Vol. 9, no. 2. P. 346–359.
12. Datko R. Unconstrained control problems with quadratic cost // SIAM J. Control Optim. 1973. Vol. 11, no. 1. P. 32–52.
13. Колмановский В.Б. Точные формулы в задаче управления некоторыми системами с последействием // Прикл. математика и механика. 1973. Т. 37, вып. 2. С. 228–235.
14. Ким А.В., Ложников А.Б. Линейно-квадратичные задачи управления для систем с последействием. Точные решения // Автоматика и телемеханика. 2000. № 7. С. 15–31.
15. Долгий Ю.Ф. К стабилизации линейных автономных систем дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2007. № 10. С. 92–105.
16. Красовский Н.Н. Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, вып. 4. С. 716–724.
17. Красовский Н.Н., Осипов Ю.С. О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1963. № 6. С. 3–15.
18. Осипов Ю.С. О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 5. С. 605–618.
19. Маркушин Е.М., Шиманов С.Н. Приближенное решение задачи аналитического конструирования для систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1968. № 3. С. 13–20.
20. Быков Д.С., Долгий Ю.Ф. Канонические аппроксимации в задаче оптимальной стабилизации автономных систем с последействием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 20–34.
21. Быков Д.С., Долгий Ю.Ф. Оценка точности аппроксимаций оптимального стабилизирующего управления системы с запаздыванием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 38–47.

22. **Delfour M.C.** The linear-quadratic optimal control problem with delays in state and control variables: a state space approach // SIAM J. Control Optim. 1986. Vol. 24, no. 5. P. 838–883.
23. **Петровский И.Г.** Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.; Л.: ГИТТЛ, 1952. 232 с.

Долгий Юрий Филиппович

Поступила 15.05.14

д-р физ.-мат. наук, профессор

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: Yuri.Dolgii@imm.uran.ru

УДК 517.9

**ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ
СТАЦИОНАРНОЙ РЕАКЦИИ-КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ¹****А. И. Короткий, Ю. В. Стародубцева**

Исследуются прямые и обратные граничные задачи для моделей стационарной реакции-конвекции-диффузии. Прямая задача состоит в нахождении решения соответствующей краевой задачи при заданных данных на границе области изменения независимой переменной. Особенность прямой задачи состоит в неоднородности и нерегулярности смешанных граничных данных. Указываются условия разрешимости и устойчивости прямой задачи. Обратная граничная задача состоит в нахождении некоторых следов от решения соответствующей краевой задачи при заданных обычных и дополнительных данных на некоторой части границы области изменения независимой переменной. Особенность обратной задачи состоит в ее некорректности. Разработаны регуляризирующие методы и алгоритмы решения обратной задачи.

Ключевые слова: прямая задача, смешанное граничное условие, слабое решение, устойчивость, обратная задача, регуляризация, итерационные методы.

A. I. Korotkii, Yu. V. Starodubtseva. Direct and inverse boundary value problems for models of stationary reaction-convection-diffusion.

Direct and inverse boundary value problems for models of stationary reaction-convection-diffusion are investigated. The direct problem consists in finding a solution of the corresponding boundary value problem for given data on the boundary of the domain of the independent variable. The peculiarity of the direct problem consists in the inhomogeneity and irregularity of mixed boundary data. Solvability and stability conditions are specified for the direct problem. The inverse boundary value problem consists in finding some traces of the solution of the corresponding boundary value problem for given standard and additional data on a certain part of the boundary of the domain of the independent variable. The peculiarity of the inverse problem consists in the ill-posedness of this problem. Regularizing methods and solution algorithms are developed for the inverse problem.

Keywords: direct problem, mixed boundary condition, weak solution, stability, inverse problem, regularization, iterative methods.

Введение

В работе изучаются прямые и обратные граничные задачи для моделей стационарной реакции-конвекции-диффузии. Такие модели часто используются при исследовании различных гидродинамических и тепловых процессов, в частности, при описании процессов распространения примесей в атмосфере и водоемах, при моделировании загрязнения грунтовых вод, при описании диффузии электрически заряженных примесей в твердом теле (такие процессы исследуются в микроэлектронике) [1–3].

Прямая задача состоит в нахождении решения соответствующей краевой задачи при известных данных на границе области изменения независимой пространственной переменной (области протекания процесса). Обратная граничная задача состоит в нахождении решения соответствующей краевой задачи при известных данных на некоторой части границы области изменения независимой пространственной переменной (на той части границы, где прямое измерение этого решения возможно) и взятии подходящего следа от этого решения на другой части границы области изменения независимой пространственной переменной (на той части границы, где прямое измерение этого решения по каким-либо причинам невозможно). При

¹Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математических и физических науках” при поддержке УРО РАН (проект 12-П-1-1009) и поддержана РФФИ (проект 14-01-00155).

этом предполагается, что на той части границы, где заданы исходные краевые условия (на которой прямые измерения возможны), заданы некоторые дополнительные граничные условия. Математическая постановка прямой задачи приводит к смешанной краевой задаче для эллиптического уравнения второго порядка. Математическая постановка обратной задачи приводит к обобщенной задаче Коши для эллиптического уравнения второго порядка. Особенность прямой задачи состоит в неоднородности и нерегулярности смешанных граничных данных. Граничные данные не являются гладкими, и их нельзя, вообще говоря, продолжить внутрь области так, чтобы продолжение было достаточно гладким и его можно было бы использовать для переброски граничных данных в уравнение. Особенность обратной задачи состоит в ее некорректности.

Для прямой задачи вводится понятие слабого решения, доказываются его существование и единственность. Доказано, что прямая задача является корректно поставленной, установлены соответствующие априорные оценки на решение и непрерывная зависимость решения от граничных данных и правой части основного уравнения.

Доказано, что обратная задача оказывается некорректно поставленной, она неустойчива по граничным данным. Разработаны регуляризирующие методы и алгоритмы решения обратной задачи, являющиеся модификациями известных методов Ньютона — Канторовича, Ландвебера, Левенберга — Марквардта [4; 5]. Приводятся результаты численного моделирования решения обратной задачи, показывающие работоспособность построенных алгоритмов.

Ранее в работах [6; 7] аналогичные прямые и обратные граничные задачи изучались для моделей стационарной тепловой конвекции высоковязкой жидкости.

1. Постановка прямой граничной задачи

Охарактеризуем сначала содержательную сторону задачи. В некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m = 2, 3$, содержащей неоднородную сплошную среду, находящуюся под воздействием некоторых внутренних и внешних определяющих состояние среды факторов (режимов), рассматривается установившееся (стационарное) распределение температуры (или концентрации какого-либо вещества среды). Математическая модель распределения температуры (концентрации рассматриваемого вещества среды) в области Ω представляет собой смешанную краевую задачу для уравнения реакции-конвекции-диффузии [1–3; 8–11]

$$L T \equiv \operatorname{div} (k \nabla T) - (\mathbf{u}, \nabla T) + q T = f, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.1)$$

$$T = v, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (1.2)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = w, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2, \quad (1.3)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ — точка пространства $\mathbb{R}^m$; $\mathbf{u} = (u_1(\mathbf{x}), \dots, u_m(\mathbf{x}))$ — заданный вектор скорости движения среды в точках $\mathbf{x}$ области Ω , удовлетворяющий условию $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ в области Ω (условие несжимаемости среды) и условию $\mathbf{u} = 0$ на границе Γ области Ω (условие прилипания среды на неподвижной границе Γ); $T = T(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, — температура (концентрация рассматриваемого вещества) среды в области Ω ; $k = k(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, — заданный коэффициент теплопроводности (диффузии) среды в области Ω ; $q = q(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, — заданный коэффициент реакции в точках области Ω , характеризующий скорость образования или стока тепла (вещества) в результате химических превращений; $f = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, — заданная объемная плотность образования или стока тепла (вещества) в области Ω ; $v = v(\mathbf{x})$ и $w = w(\mathbf{x})$ — заданные функции, определенные на частях Γ_1 и Γ_2 границы Γ области Ω соответственно, характеризующие внешние факторы (режимы) взаимодействия среды, находящейся внутри области Ω , с окружающей средой (функция $v = v(\mathbf{x})$ характеризует заданное распределение температуры (концентрации вещества) на Γ_1 , функция $w = w(\mathbf{x})$ характеризует заданное распределение потока тепла (концентрации вещества) на Γ_2 , $\Gamma = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$); $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали в точках границы Γ области Ω .

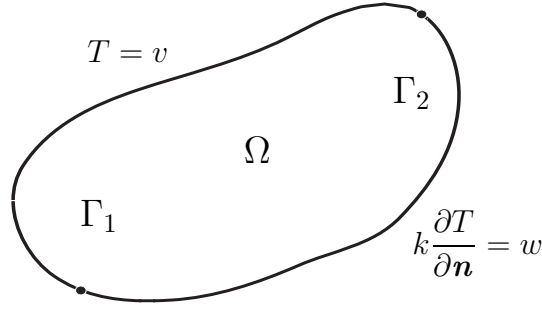


Рис. 1. Иллюстрация к постановке прямой задачи.

Прямая граничная задача состоит в нахождении распределения температуры (концентрации вещества) T в области Ω в результате решения краевой задачи (1.1)–(1.3).

Эту задачу иногда кратко будем называть прямой задачей (рис. 1).

Уточним постановку прямой задачи.

Будем считать, что Ω является ограниченной областью в $\mathbb{R}^m$ (т. е. является ограниченным открытым связным множеством в $\mathbb{R}^m$) и обладает некоторой регулярностью. Пусть область Ω принадлежит одному из следующих классов областей. Первый класс $\mathcal{O}_1$ составляют гладкие области класса C^2 [9, с. 31; 12, с. 9; 13, с. 67]. Второй класс $\mathcal{O}_2$ составляют области, удовлетворяющие следующим трем условиям из [9]: условию 1 [9, с. 212, 30] (условие строгой липшицевости области; произвольная выпуклая область является строго липшицевой [9, с. 31]); условию 2 [9, с. 212] (условие равномерной ограниченности собственных чисел соответствующей квадратичной формы) и условию $\mathfrak{R}$ [9, с. 222] (условие сильной разрешимости, т. е. разрешимости в пространстве Соболева $W_2^2(\Omega)$ соответствующей задачи Пуассона с гладкими правыми частями и смешанными однородными граничными условиями, которые в данном случае соответствуют условиям (1.2)–(1.3)). Второй класс $\mathcal{O}_2$ содержит в себе области, являющиеся выпуклыми многоугольниками (при $n = 2$) или выпуклыми многогранниками (при $n = 3$). Части Γ_1 и Γ_2 границы Γ считаются открытыми и регулярными на Γ [11, с. 28], причем $\text{mes } \Gamma_1 > 0$. Указанные классы областей Ω достаточно широки для приложений. В [8–14] описаны различные подклассы областей, содержащиеся в указанных классах. Если не оговорено специально, то считается, что область Ω принадлежит любому из указанных классов областей.

Далее в тексте будут использоваться пространства Лебега $L_p(\Omega)$, $L_p(\Gamma)$, $L_p(\Gamma_1)$, $L_p(\Gamma_2)$, $p \geq 1$, пространства Соболева $W_p^l(\Omega)$, $p \geq 1$, $l \geq 1$, [8–14], а также их векторные аналоги $\mathbf{L}_p(\Omega)$, $\mathbf{L}_p(\Gamma)$, $\mathbf{L}_p(\Gamma_1)$, $\mathbf{L}_p(\Gamma_2)$, $\mathbf{W}_p^l(\Omega)$, нормы в которых определяются обычным образом [9, с. 467; 10, с. 34]. Кроме того, будут использоваться гильбертовы пространства [10, с. 41]

$$\mathbf{H}(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{W}_2^1(\Omega) : \mathbf{u} = 0 \text{ на } \Gamma, \text{ div } \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega \right\},$$

$$G_1(\Omega) = \left\{ g \in W_2^1(\Omega) : g = 0 \text{ на } \Gamma_1 \right\},$$

$$G_2(\Omega) = \left\{ g \in W_2^2(\Omega) : g = 0 \text{ на } \Gamma_1, \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ на } \Gamma_2 \right\}.$$

В пространствах $G_1(\Omega)$ и $G_2(\Omega)$ будут использоваться скалярные произведения и нормы пространств $W_2^1(\Omega)$ и $W_2^2(\Omega)$ соответственно или эквивалентные им нормы.

Пусть далее для определенности

$$k \in C^1(\overline{\Omega}), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\Omega), \quad q \in L_\infty(\Omega), \quad f \in L_2(\Omega), \quad v \in L_2(\Gamma_1), \quad w \in L_2(\Gamma_2);$$

$$0 < \mu_1 \leq k(\mathbf{x}) \leq \mu_2, \quad \mathbf{x} \in \overline{\Omega}, \quad \mu_1 = \text{const} \leq \mu_2 = \text{const};$$

$$\| \mathbf{u}(\mathbf{x}) \|_{\mathbb{R}^m} \leq \mu_3, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mu_3 = \text{const} \geq 0;$$

$$0 \leq q(\mathbf{x}) \leq \mu_4, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mu_4 = \text{const} \geq 0.$$

Все рассматриваемые в работе числовые величины и пространства считаются вещественными, измеримость и интегрируемость понимаются по Лебегу, определения используемых пространств имеются в [8–14].

При указанных условиях на параметры краевой задачи (1.1)–(1.3) она может не иметь классического и обобщенного (из пространства $W_2^1(\Omega)$) решения. Введем понятие слабого решения краевой задачи (1.1)–(1.3), следуя [15; 16].

Умножим равенство (1.1) на пробную функцию $g \in G_1(\Omega)$, результат проинтегрируем по области Ω . Применим формулу интегрирования по частям [8, с. 75; 9, с. 70], перебросив часть производных с функции T на функцию g , получим равенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_1} k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} g \, d\Gamma + \int_{\Gamma_2} k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} g \, d\Gamma - \int_{\Omega} k (\nabla T, \nabla g) \, dx \\ &= \int_{\Gamma} T (\mathbf{u}, \mathbf{n}) g \, d\Gamma - \int_{\Omega} T (g \operatorname{div} \mathbf{u} + (\mathbf{u}, \nabla g)) \, dx - \int_{\Omega} q T g \, dx + \int_{\Omega} f g \, dx. \end{aligned}$$

Учитывая граничные свойства функций T , g , $\mathbf{u}$ и соленоидальность векторного поля $\mathbf{u}$, имеем

$$\int_{\Gamma_2} w g \, d\Gamma - \int_{\Omega} k (\nabla T, \nabla g) \, dx = - \int_{\Omega} T (\mathbf{u}, \nabla g) \, dx - \int_{\Omega} q T g \, dx + \int_{\Omega} f g \, dx. \quad (1.4)$$

Применим еще раз формулу интегрирования по частям ко второму слагаемому в левой части равенства (1.4), считая $g \in G_2(\Omega)$, выводим

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_2} w g \, d\Gamma - \int_{\Gamma_1} T k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_2} T k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \, d\Gamma + \int_{\Omega} T \operatorname{div} (k \nabla g) \, dx \\ &= - \int_{\Omega} T (\mathbf{u}, \nabla g) \, dx - \int_{\Omega} q T g \, dx + \int_{\Omega} f g \, dx. \end{aligned}$$

Учитывая граничные свойства функций T и g , получим

$$\int_{\Omega} T (\operatorname{div} (k \nabla g) + (\mathbf{u}, \nabla g) + q g) \, dx = \int_{\Gamma_1} v k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_2} w g \, d\Gamma + \int_{\Omega} f g \, dx. \quad (1.5)$$

Для функций $T \in L_2(\Omega)$ и $g \in G_2(\Omega)$ все элементы в равенстве (1.5) определены корректно, интегралы существуют и конечны.

Слабым решением краевой задачи (1.1)–(1.3) назовем функцию $T \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному равенству (1.5) для любой функции $g \in G_2(\Omega)$.

Из способа введения слабого решения краевой задачи (1.1)–(1.3) вытекают следующие факты. Если краевая задача (1.1)–(1.3) допускает классическое решение, то, с одной стороны, классическое решение этой краевой задачи, принадлежащее соответствующему пространству Соболева, является и ее сильным решением из пространства $W_2^2(\Omega)$, и ее обобщенным решением из пространства $W_2^1(\Omega)$, и ее слабым решением из пространства $L_2(\Omega)$. С другой стороны, достаточно гладкое и принадлежащее соответствующему пространству Соболева слабое решение краевой задачи (1.1)–(1.3) будет являться и ее обобщенным решением, и ее сильным решением, и ее классическим решением. Соответствующие обоснования эквивалентности решений аналогичны [8–10; 12].

Наряду с поставленной прямой задачей, так же как и при изучении обратных задач, могут рассматриваться такие их варианты, в которых граница Γ разделена на большее конечное число частей, на каждой из которых задается граничное условие первого, второго или третьего рода. Такие варианты задач изучаются совершенно аналогично и результаты в таких задачах также получаются аналогичными.

2. Разрешимость и устойчивость прямой граничной задачи

Слабую разрешимость краевой задачи (1.1)–(1.3) установим методом транспонирования [15–17]. Докажем предварительно несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 2.1. Пусть X — линейное подмножество банахова пространства Y , Z — гильбертово пространство, $\mathcal{L}$ — взаимно однозначное линейное отображение X на Z такое, что $\mathcal{L}^{-1}$ непрерывно. Тогда для любого линейного непрерывного функционала $\mathcal{F} \in Y^*$ существует единственный элемент $T \in Z$ такой, что

$$\langle T, \mathcal{L}g \rangle_Z = \mathcal{F}g \quad \forall g \in X,$$

при этом

$$\|T\|_Z = \|\mathcal{F} \circ \mathcal{L}^{-1}\|_{Z^*} \leq \|\mathcal{F}\|_{Y^*} \|\mathcal{L}^{-1}\|_{\mathfrak{L}(Z;Y)}.$$

Доказательство. Рассмотрим линейный непрерывный функционал $\mathcal{F} \circ \mathcal{L}^{-1} \in Z^*$. По теореме Рисса [18, с. 177] о представлении линейного непрерывного функционала над гильбертовым пространством существует единственный элемент $T \in Z$ такой, что

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{L}^{-1}(h) = \langle T, h \rangle_Z \quad \forall h \in Z.$$

Обозначим $\mathcal{L}^{-1}(h) = g \in X$, тогда $h = \mathcal{L}g$ и

$$\langle T, \mathcal{L}g \rangle_Z = \mathcal{F}g \quad \forall g \in X.$$

Равенство $\|T\|_Z = \|\mathcal{F} \circ \mathcal{L}^{-1}\|_{Z^*}$ следует из теоремы Рисса, неравенство $\|\mathcal{F} \circ \mathcal{L}^{-1}\|_{Z^*} \leq \|\mathcal{F}\|_{Y^*} \|\mathcal{L}^{-1}\|_{\mathfrak{L}(Z;Y)}$ следует из определений суперпозиции (произведения) операторов и нормы оператора [18, с. 211]. Здесь $\mathfrak{L}(Z;Y)$ — банахово пространство всех линейных непрерывных операторов из Z в Y . $\square$

Равенство (1.5) можно записать в виде

$$\langle T, \mathcal{L}g \rangle_{L_2(\Omega)} = \mathcal{F}g,$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}g &= \operatorname{div}(k \nabla g) + (\mathbf{u}, \nabla g) + qg, \\ \mathcal{F}g &= \int_{\Gamma_1} v k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} w g d\Gamma + \int_{\Omega} f g dx. \end{aligned}$$

Чтобы воспользоваться леммой 2.1 для исследования вопроса о разрешимости прямой задачи, следует положить $Z = L_2(\Omega)$, $Y = G_2(\Omega)$; X должно быть множеством решений $g = g_\psi$ краевой задачи

$$\mathcal{L}g = \psi, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{2.1}$$

$$g = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \tag{2.2}$$

$$k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2, \tag{2.3}$$

полученным, когда функция ψ пробегает все множество $Z = L_2(\Omega)$, т. е.

$$X = \left\{ g = g_\psi : \psi \in Z \right\};$$

$\mathcal{L}$ должно быть отображением, которое ставит в соответствие элементу $g = g_\psi \in X$ элемент $\psi \in Z$, соответствующий данному решению $g = g_\psi$. Решение краевой задачи (2.1)–(2.3) следует понимать в сильном смысле как элемент пространства $G_2(\Omega)$, удовлетворяющий уравнению (2.1) почти всюду на Ω , а равенствам (2.2) и (2.3) удовлетворяющий в смысле равенства

соответствующих следов. Тогда из линейности краевой задачи (2.1)–(2.3) будет следовать, что операторы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^{-1}$ будут линейными операторами из X в Z и из Z в X соответственно, X будет линейным подмножеством Y . Из определения оператора $\mathcal{L}$ и условий, наложенных на его коэффициенты, следует также [9, гл. 1, § 2], что $\mathcal{L}(X) \subseteq \mathcal{L}(Y) \subseteq Z$. Чтобы оператор $\mathcal{L}$ взаимно однозначно отображал X на Z и оператор $\mathcal{L}^{-1}$ был непрерывным, достаточно, чтобы краевая задача (2.1)–(2.3) для любой функции $\psi \in Z$ имела единственное решение $g = g_\psi \in X$ и чтобы это решение удовлетворяло априорной оценке $\|g\|_{G_2(\Omega)} \leq \kappa \|\psi\|_{L_2(\Omega)}$.

Покажем, что так введенные множества, пространства и операторы определены корректно и удовлетворяют всем условиям леммы 2.1.

Лемма 2.2. *Функционал $\mathcal{F}$ линеен и непрерывен на $Y = G_2(\Omega)$, т. е.*

$$\mathcal{F} \in Y^*,$$

при этом

$$\|\mathcal{F}\|_{Y^*} \leq \nu_1 \|v\|_{L_2(\Gamma_1)} + \nu_2 \|w\|_{L_2(\Gamma_2)} + \|f\|_{L_2(\Omega)},$$

где ν_1, ν_2 — некоторые неотрицательные числа, определяемые по известным параметрам задачи и не зависящие от оцениваемых и оценивающих величин, входящих в оценку.

Доказательство. Линейность функционала $\mathcal{F}$ следует из линейности интегралов по интегрантам и линейности операций дифференцирования. Непрерывность функционала $\mathcal{F}$ следует из теорем вложения [8, гл. 1, § 7, 8; 9, гл. 2, § 2; 12, гл. 3] и следующих оценок:

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}g| &\leq \left| \int_{\Gamma_1} v k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \right| + \left| \int_{\Gamma_2} w g d\Gamma \right| + \left| \int_{\Omega} f g dx \right| \\ &\leq \sup_{\mathbf{x} \in \Gamma_1} |k(\mathbf{x})| \|v\|_{L_2(\Gamma_1)} \left\| \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{L_2(\Gamma_1)} + \|w\|_{L_2(\Gamma_2)} \|g\|_{L_2(\Gamma_2)} + \|f\|_{L_2(\Omega)} \|g\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq k_2 \|v\|_{L_2(\Gamma_1)} \|\nabla g\|_{L_2(\Gamma_1)} + \|w\|_{L_2(\Gamma_2)} \gamma_1 \|g\|_{W_2^1(\Omega)} + \|f\|_{L_2(\Omega)} \|g\|_{W_2^1(\Omega)} \\ &\leq k_2 \|v\|_{L_2(\Gamma_1)} \gamma_2 \|g\|_{W_2^2(\Omega)} + \|w\|_{L_2(\Gamma_2)} \gamma_1 \|g\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(\Omega)} \|g\|_{W_2^2(\Omega)} \\ &\leq \gamma \|g\|_{W_2^2(\Omega)} = \gamma \|g\|_Y, \end{aligned}$$

где γ_1, γ_2 — некоторые неотрицательные числа, определяемые из теорем вложения и не зависящие от оцениваемых величин,

$$\gamma = k_2 \gamma_2 \|v\|_{L_2(\Gamma_1)} + \gamma_1 \|w\|_{L_2(\Gamma_2)} + \|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Из итоговой оценки $|\mathcal{F}g| \leq \gamma \|g\|_Y$ следует, что $\mathcal{F} \in Y^*$.

Из полученной выше цепочки неравенств следует также оценка

$$\|\mathcal{F}\|_{Y^*} \leq \gamma = \nu_1 \|v\|_{L_2(\Gamma_1)} + \nu_2 \|w\|_{L_2(\Gamma_2)} + \|f\|_{L_2(\Omega)},$$

где $\nu_1 = k_2 \gamma_2$, $\nu_2 = \gamma_1$. □

Осталось проверить, что линейный оператор $\mathcal{L}$ осуществляет взаимно однозначное отображение линейного подмножества $X \subseteq Y = G_2(\Omega)$ на $Z = L_2(\Omega)$ и $\mathcal{L}^{-1}$ непрерывен. Докажем сначала, что оператор $\mathcal{L}$ осуществляет взаимно однозначное отображение X на Z . Это доказательство будет проводиться в два этапа. На первом этапе докажем, что для любой функции $\psi \in Z$ краевая задача (2.1)–(2.3) имеет единственное обобщенное решение g_ψ из пространства $G_1(\Omega)$. На втором этапе докажем, что обобщенное решение g_ψ на самом деле будет элементом пространства $Y = G_2(\Omega)$ и единственным сильным решением краевой задачи (2.1)–(2.3).

Введем понятие обобщенного решения краевой задачи (2.1)–(2.3) из пространства $G_1(\Omega)$. Оно вводится аналогично [8–12]. Умножим равенство (2.1) на пробную функцию $\omega \in G_1(\Omega)$, результат проинтегрируем по области Ω , применим формулу интегрирования по частям [8, с. 75; 9, с. 70], перебросив часть производных с функции g на функцию ω , получим равенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_1} k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \omega d\Gamma + \int_{\Gamma_2} k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \omega d\Gamma - \int_{\Omega} k (\nabla g, \nabla \omega) dx \\ & + \int_{\Gamma} g(\mathbf{u}, \mathbf{n}) \omega d\Gamma - \int_{\Omega} g (\omega \operatorname{div} \mathbf{u} + (\mathbf{u}, \nabla \omega)) dx + \int_{\Omega} q g \omega dx = \int_{\Omega} \psi \omega dx. \end{aligned}$$

Учитывая граничные свойства функций g , ω , $\mathbf{u}$ и соленоидальность векторного поля $\mathbf{u}$, получим равенство

$$- \int_{\Omega} k (\nabla g, \nabla \omega) dx - \int_{\Omega} g (\mathbf{u}, \nabla \omega) dx + \int_{\Omega} q g \omega dx = \int_{\Omega} \psi \omega dx.$$

Перепишем это равенство в виде

$$B(g, \omega) = F(\omega), \quad (2.4)$$

где

$$B(g, \omega) = \int_{\Omega} k (\nabla g, \nabla \omega) dx + \int_{\Omega} g (\mathbf{u}, \nabla \omega) dx - \int_{\Omega} q g \omega dx, \quad F(\omega) = - \int_{\Omega} \psi \omega dx.$$

Для функций $g \in G_1(\Omega)$ и $\omega \in G_1(\Omega)$ все элементы в равенстве (2.4) определены корректно, интегралы существуют и конечны.

Обобщенным решением краевой задачи (2.1)–(2.3) из пространства $G_1(\Omega)$ назовем всякую функцию $g \in G_1(\Omega)$, удовлетворяющую равенству (2.4) для любой функции $\omega \in G_1(\Omega)$.

Из способа введения обобщенного решения краевой задачи (2.1)–(2.3) следует, что, с одной стороны, классическое решение краевой задачи (2.1)–(2.3) является ее обобщенным решением, с другой стороны, достаточно гладкое обобщенное решение краевой задачи (2.1)–(2.3) будет классическим решением этой задачи. Соответствующие обоснования эквивалентности решений аналогичны [8–12].

Лемма 2.3. Краевая задача (2.1)–(2.3) имеет единственное обобщенное решение g из пространства $G_1(\Omega)$, при этом

$$\|g\|_{G_1(\Omega)} \leq \nu \|\psi\|_{L_2(\Omega)},$$

где ν — некоторое неотрицательное число, определяемое по известным параметрам задачи и не зависящее от оцениваемых и оценивающих величин, входящих в оценку.

Доказательство. Для доказательства леммы воспользуемся теоремой Лакса — Мильграма [19, с. 386], примененной к равенству (2.4). Правая часть в (2.4) является линейной непрерывной формой на $G_1(\Omega)$:

$$|F(\omega)| = \left| \int_{\Omega} \psi \omega dx \right| \leq \|\psi\|_{L_2(\Omega)} \|\omega\|_{L_2(\Omega)} \leq \|\psi\|_{L_2(\Omega)} \|\omega\|_{W_2^1(\Omega)}.$$

Левая часть в (2.4) определяет билинейную непрерывную коэрцитивную форму на $G_1(\Omega) \times G_1(\Omega)$. Проверим непрерывность билинейной формы

$$|B(g, \omega)| = \left| \int_{\Omega} k (\nabla g, \nabla \omega) dx \right| + \left| \int_{\Omega} g (\mathbf{u}, \nabla \omega) dx \right| + \left| \int_{\Omega} q g \omega dx \right|$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \mu_2 \int_{\Omega} |(\nabla g, \nabla \omega)| dx + \|g\|_{L_2(\Omega)} \|(\mathbf{u}, \nabla \omega)\|_{L_2(\Omega)} + \mu_4 \|g\|_{L_2(\Omega)} \|\omega\|_{L_2(\Omega)} \\
 &\leq \mu_2 \|\nabla g\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla \omega\|_{L_2(\Omega)} + \|g\|_{L_2(\Omega)} \mu_3 \|\nabla \omega\|_{L_2(\Omega)} + \mu_4 \|g\|_{W_2^1(\Omega)} \|\omega\|_{W_2^1(\Omega)} \\
 &\leq (\mu_2 + \mu_3 + \mu_4) \|g\|_{W_2^1(\Omega)} \|\omega\|_{W_2^1(\Omega)}.
 \end{aligned}$$

Проверим коэрцитивность билинейной формы. Предварительно заметим, что

$$\int_{\Omega} g(\mathbf{u}, \nabla g) dx = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{u}, \mathbf{n}) g^2 d\Gamma = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 B(g, g) &= \int_{\Omega} k(\nabla g, \nabla g) dx + \int_{\Omega} q g^2 dx \\
 &\geq \mu_1 \int_{\Omega} (\nabla g, \nabla g) dx = \frac{\mu_1}{2} \int_{\Omega} (\nabla g, \nabla g) dx + \frac{\mu_1}{2} \int_{\Omega} (\nabla g, \nabla g) dx \\
 &\geq \frac{\mu_1}{2} \int_{\Omega} (\nabla g, \nabla g) dx + \frac{\mu_1}{2} c_{\Omega}^{-2} \int_{\Omega} g^2 dx \geq \min \left\{ \frac{\mu_1}{2}, \frac{\mu_1}{2} c_{\Omega}^{-2} \right\} \|g\|_{W_2^1(\Omega)}^2 = C \|g\|_{W_2^1(\Omega)}^2,
 \end{aligned}$$

где $C = \min \left\{ 2^{-1} \mu_1, 2^{-1} \mu_1 c_{\Omega}^{-2} \right\}$, c_{Ω} — константа из неравенства Пуанкаре — Фридрихса [8, с. 62, 116; 19, с. 195, 344; 20, с. 360, 361, 374].

Таким образом, в силу теоремы Лакса — Мильграма получаем существование единственного обобщенного решения g краевой задачи (2.1)–(2.3) из пространства $G_1(\Omega)$, при этом снова в силу теоремы Лакса — Мильграма при $\nu = C^{-1}$ имеем оценку

$$\|g\|_{G_1(\Omega)} = \|g\|_{W_2^1(\Omega)} \leq \nu \|\psi\|_{L_2(\Omega)}. \quad \square$$

Лемма 2.4. Любое обобщенное решение g краевой задачи (2.1)–(2.3) из пространства $G_1(\Omega)$ является элементом пространства $G_2(\Omega)$ и является единственным сильным решением этой краевой задачи, при этом

$$\|g\|_{G_2(\Omega)} \leq \varkappa \|\psi\|_{L_2(\Omega)},$$

где $\varkappa$ — некоторое неотрицательное число, определяемое по известным параметрам задачи и не зависящее от оцениваемых и оценивающих величин, входящих в оценку.

Доказательство. В случае $\Gamma_1 = \Gamma$ утверждение леммы доказано в [8, гл. 2, § 7; 9, гл. 3, § 9]. В случае $\Gamma_1 \subset \Gamma$, $\text{mes } \Gamma_1 > 0$, для класса областей $\mathcal{O}_1$ и некоторых других классов областей типа “криволинейного цилиндра”, утверждение леммы доказано в [21], для класса областей $\mathcal{O}_2$ оно доказывается аналогично [8; 9]. $\square$

Лемма 2.5. Оператор $\mathcal{L}$ осуществляет взаимно однозначное линейное отображение X на Z . При этом оператор $\mathcal{L}^{-1}$ непрерывен и

$$\|\mathcal{L}^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z;Y)} \leq \varkappa.$$

Доказательство. Утверждение леммы непосредственно следует из леммы 2.4 и рассуждений, приведенных перед леммой 2.2. $\square$

Теорема 2.1. Для любых $v \in L_2(\Gamma_1)$, $w \in L_2(\Gamma_2)$, $f \in L_2(\Omega)$ краевая задача (1.1)–(1.3) имеет единственное слабое решение $T \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющее оценке

$$\begin{aligned}
 \|T\|_{L_2(\Omega)} &\leq \|\mathcal{F}\|_{Y^*} \|\mathcal{L}^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z;Y)} \leq C_1 \|v\|_{L_2(\Gamma_1)} + C_2 \|w\|_{L_2(\Gamma_2)} + C_3 \|f\|_{L_2(\Omega)}, \\
 C_1 &= \varkappa \nu_1, \quad C_2 = \varkappa \nu_1, \quad C_3 = \varkappa.
 \end{aligned}$$

Доказательство. Утверждение теоремы следует из лемм 2.1–2.5. $\square$

3. Постановка обратной граничной задачи

Охарактеризуем с содержательной точки зрения обратную граничную задачу, соответствующую прямой граничной задаче. Как и прежде, в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m = 2, 3$, содержащей неоднородную сплошную среду, находящуюся под воздействием некоторых внутренних и внешних определяющих состояние среды факторов (режимов), рассматривается установившееся (стационарное) распределение температуры (или концентрации какого-либо вещества среды). Предположим, что граница Γ области Ω условно разделена на две части Γ_1 и Γ_2 . Считается, что на части Γ_1 границы возможно прямое измерение необходимых параметров среды (например, температуры или концентрации вещества, потока тепла или потока вещества). На части Γ_2 границы прямое измерение необходимых параметров среды невозможно, но знание этих параметров крайне необходимо.

Обратная граничная задача состоит в нахождении необходимых параметров сплошной среды на части Γ_2 границы Γ по всей совокупности граничных данных, имеющихся на части Γ_1 границы Γ , при учете соответствующей модели, описывающей состояние среды в области Ω .

Для определенности будем считать, что на части Γ_1 границы задаются и известны температура (концентрация вещества) $T = v$ и тепловой поток (поток вещества) $k \partial T / \partial \mathbf{n} = \varphi$. Модель распределения температуры (концентрации вещества) в области Ω описывается стационарным уравнением реакции-конвекции-диффузии (1.1). Искомыми величинами могут быть температура (концентрация вещества) T на части Γ_2 границы, или тепловой поток (поток вещества) $k \partial T / \partial \mathbf{n}$ на Γ_2 , или одновременно то и другое. Будем считать для определенности, что искомой величиной является температура (концентрация вещества) T на части Γ_2 границы Γ . Варианты задачи с другими искомыми величинами можно изучать совершенно аналогично. Это связано с тем, что обратные граничные задачи можно решить в два этапа. На первом этапе (одинаковом для всех вариантов искомым величин) решается краевая задача (обобщенная задача Коши)

$$LT = f, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.1)$$

$$T = v, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (3.2)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \varphi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1. \quad (3.3)$$

На втором этапе по найденному решению $T = T(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, находятся или след $T|_{\Gamma_2}$, или след $k \partial T / \partial \mathbf{n}|_{\Gamma_2}$, или одновременно то и другое. Итак, для определенности далее будем рассматривать следующий вариант обратной граничной задачи.

Обратная граничная задача состоит в нахождении температуры (концентрации вещества) $T|_{\Gamma_2}$ на части Γ_2 границы Γ в результате решения краевой задачи (3.1)–(3.3).

Эту задачу иногда кратко будем называть обратной задачей (рис. 2).

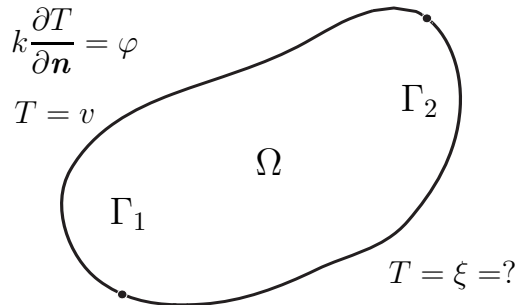


Рис. 2. Иллюстрация к постановке обратной задачи.

Уточним постановку обратной задачи.

Будем считать, что все величины и параметры в обратной задаче (в краевой задаче (3.1)–(3.3)) удовлетворяют тем же условиям, каким удовлетворяли эти величины и параметры в прямой задаче и $\varphi \in L_2(\Gamma_1)$.

При указанных условиях на параметры краевой задачи (3.1)–(3.3) она может не иметь классического и обобщенного (из пространства $W_2^1(\Omega)$) решения. Введем понятие слабого решения краевой задачи (3.1)–(3.3).

Введем в рассмотрение гильбертовы пространства

$$G_3(\Omega) = \left\{ g \in W_2^1(\Omega) : g = 0 \text{ на } \Gamma_2 \right\},$$

$$G_4(\Omega) = \left\{ g \in W_2^2(\Omega) : g = 0 \text{ на } \Gamma_2, \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ на } \Gamma_2 \right\}.$$

В пространствах $G_3(\Omega)$ и $G_4(\Omega)$ будут использоваться скалярные произведения и нормы пространств $W_2^1(\Omega)$ и $W_2^2(\Omega)$ соответственно или эквивалентные им нормы.

Умножим равенство (3.1) на пробную функцию $g \in G_3(\Omega)$ и результат проинтегрируем по области Ω . Применим формулу интегрирования по частям [8, с. 75; 9, с. 70] и перебросим часть производных с функции T на функцию g , получим равенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_1} k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} g d\Gamma + \int_{\Gamma_2} k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} g d\Gamma - \int_{\Omega} k (\nabla T, \nabla g) dx \\ &= \int_{\Gamma} T(\mathbf{u}, \mathbf{n}) g d\Gamma - \int_{\Omega} T \left(g \operatorname{div} \mathbf{u} + (\mathbf{u}, \nabla g) \right) dx - \int_{\Omega} q T g dx + \int_{\Omega} f g dx. \end{aligned}$$

Учитывая граничные свойства функций T , g , $\mathbf{u}$ и соленоидальность векторного поля $\mathbf{u}$, имеем

$$\int_{\Gamma_1} \varphi g d\Gamma - \int_{\Omega} k (\nabla T, \nabla g) dx = - \int_{\Omega} T(\mathbf{u}, \nabla g) dx - \int_{\Omega} q T g dx + \int_{\Omega} f g dx. \quad (3.4)$$

Применим еще раз формулу интегрирования по частям ко второму слагаемому в левой части равенства (3.4), считая $g \in G_4(\Omega)$, выводим

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_1} \varphi g d\Gamma - \int_{\Gamma_1} T k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} T k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + \int_{\Omega} T \operatorname{div} (k \nabla g) dx \\ &= - \int_{\Omega} T(\mathbf{u}, \nabla g) dx - \int_{\Omega} q T g dx + \int_{\Omega} f g dx. \end{aligned}$$

Учитывая граничные свойства функций T и g , получим

$$\int_{\Omega} T \left(\operatorname{div} (k \nabla g) + (\mathbf{u}, \nabla g) + q g \right) dx = \int_{\Gamma_1} v k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \varphi g d\Gamma + \int_{\Omega} f g dx. \quad (3.5)$$

Для функций $T \in L_2(\Omega)$ и $g \in G_4(\Omega)$ все элементы в равенстве (3.5) определены корректно, интегралы существуют и конечны.

Слабым решением краевой задачи (3.1)–(3.3) назовем всякую функцию $T \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному равенству (3.5) для любой функции $g \in G_4(\Omega)$.

Из способа введения слабого решения краевой задачи (3.1)–(3.3) вытекают следующие факты. Если краевая задача (3.1)–(3.3) допускает классическое решение, то, с одной стороны, классическое решение этой краевой задачи, принадлежащее соответствующему пространству

Соболева, является и ее сильным решением из пространства $W_2^2(\Omega)$, и ее обобщенным решением из пространства $W_2^1(\Omega)$, и ее слабым решением из пространства $L_2(\Omega)$. С другой стороны, достаточно гладкое слабое решение краевой задачи (3.1)–(3.3) будет являться и ее обобщенным решением, и ее сильным решением, и ее классическим решением. Соответствующие обоснования эквивалентности решений аналогичны [8–12]. Слабое решение краевой задачи (3.1)–(3.3) введено аналогично слабому решению прямой задачи.

Таким образом, обратная граничная задача состоит в нахождении слабого решения краевой задачи (3.1)–(3.3) и взятии следа $T|_{\Gamma_2}$.

Если ввести в рассмотрение оператор

$$A : L_2(\Gamma_2) \ni \xi \longrightarrow k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_1}, \quad (3.6)$$

где T — решение краевой задачи

$$LT = f, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.7)$$

$$T = v, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (3.8)$$

$$T = \xi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2, \quad (3.9)$$

то обратная задача сводится к решению операторного уравнения

$$A\xi = \varphi. \quad (3.10)$$

Отметим предварительно следующие моменты. Обратная граничная задача поставлена пока формально, поскольку еще ничего не сказано о разрешимости краевой задачи (3.1)–(3.3) и о существовании следа $T|_{\Gamma_2}$. Для любых функций $v \in L_2(\Gamma_1)$ и $\xi \in L_2(\Gamma_2)$ по теореме 2.1 краевая задача (3.7)–(3.9) имеет единственное слабое решение $T \in L_2(\Omega)$, которое может не иметь подходящего следа $k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_1}$. Краевая задача (3.1)–(3.3), вообще говоря, может не иметь слабого решения при любых $v \in L_2(\Gamma_1)$ и $\varphi \in L_2(\Gamma_1)$. Утверждения о единственности решения задачи (3.1)–(3.3) известны лишь для некоторых частных случаев [5, с. 254].

Хорошо известно [8–10; 12–14], что функция $T \in L_2(\Omega)$ может не иметь следов $T|_{\Gamma_1} \in L_2(\Gamma_1)$, $T|_{\Gamma_2} \in L_2(\Gamma_2)$ и тем более следов $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_1} \in L_2(\Gamma_1)$, $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_2} \in L_2(\Gamma_2)$. Чтобы сделать постановки обратных граничных задач корректными, можно было бы поступить следующим образом. Используемые здесь следы принадлежат более широким пространствам (пространствам функционалов, пространствам Соболева с отрицательными показателями [11; 13; 15; 16]), и поэтому можно было бы поставить обратные граничные задачи с использованием этих пространств. Однако практическая и компьютерная реализация методов решения обратных задач стала бы тогда чрезвычайно трудной и громоздкой. Поэтому будем придерживаться в данной работе другого подхода. Будем считать, как это иногда делается [3; 5], что параметры краевых задач принадлежат некоторым подпространствам используемых пространств, при привлечении которых соответствующие следы существуют, постановки задач корректны, разрабатываемые методы и алгоритмы осуществимы.

4. Некорректность обратной граничной задачи

Хорошо известны примеры Адамара, показывающие, что рассматриваемая обратная граничная задача является, вообще говоря, некорректной (неустойчивой) [5].

Покажем некоторые варианты неустойчивости обратной граничной задачи в общем случае. Предварительно докажем, что оператор (3.6) решения прямой задачи является вполне непрерывным [18, с. 222, 230]. Отсюда следует, что такой оператор не может иметь непрерывного (ограниченного [18, с. 209]) обратного оператора [18, с. 222, 228].

Теорема 4.1. *Если $v_i \rightharpoonup v_0$ слабо в $L_2(\Gamma_1)$, $w_i \rightharpoonup w_0$ слабо в $L_2(\Gamma_2)$, $f_i \rightharpoonup f_0$ слабо в $L_2(\Omega)$, то $T_i = T[v_i, w_i, f_i] \rightarrow T_0 = T[v_0, w_0, f_0]$ сильно в $L_2(\Omega)$ при $i \rightarrow \infty$, где $T = T[v, w, f]$ — слабое решение краевой задачи (1.1) – (1.3).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть заданы произвольные последовательности $\{v_i\} \subset L_2(\Gamma_1)$, $\{w_i\} \subset L_2(\Gamma_1)$, $\{f_i\} \subset L_2(\Omega)$, удовлетворяющие условиям теоремы. Слабо сходящиеся в нормированных пространствах последовательности ограничены [18, с. 183]. Тогда из результатов теоремы 2.1 следует ограниченность последовательности слабых решений $\{T_i\}$ в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$. В гильбертовом пространстве из ограниченной последовательности всегда можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность [18, с. 230]. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что сама последовательность $\{T_i\}$ слабо в $L_2(\Omega)$ сходится к некоторому элементу $T_0 \in L_2(\Omega)$. Предельный переход в тождестве (1.5), записанном для решения T_i , позволяет заключить, что $T_0 = T[v_0, w_0, f_0]$. Рассмотрим краевую задачу (2.1)–(2.3) с $\psi = T_i$. По лемме 2.4 эта краевая задача имеет единственное сильное решение $g = g_i \in G_2(\Omega)$, причем последовательность этих решений $\{g_i\}$ ограничена в гильбертовом пространстве $G_2(\Omega)$. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что последовательность $\{g_i\}$ слабо в $G_2(\Omega)$ сходится к некоторому элементу $g_0 \in G_2(\Omega)$, являющемуся решением краевой задачи (2.1)–(2.3) при $\psi = T_0$. Запишем тождество (1.5) для решения T_i при $g = g_i$:

$$\int_{\Omega} T_i^2 dx = \int_{\Gamma_1} v_i k \frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} w_i g_i d\Gamma + \int_{\Omega} f_i g_i dx. \quad (4.1)$$

Из теорем вложения [8–10; 12–14] следует, что

$$\frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{n}} \rightarrow \frac{\partial g_0}{\partial \mathbf{n}} \text{ сильно в } L_2(\Gamma_1), \quad g_i \rightarrow g_0 \text{ сильно в } L_2(\Gamma_2), \quad g_i \rightarrow g_0 \text{ сильно в } L_2(\Omega).$$

Выполнив предельный переход в равенстве (4.1), получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} T_i^2 dx &= \int_{\Gamma_1} v_i k \frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} w_i g_i d\Gamma + \int_{\Omega} f_i g_i dx \\ &\rightarrow \int_{\Gamma_1} v_0 k \frac{\partial g_0}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} w_0 g_0 d\Gamma + \int_{\Omega} f_0 g_0 dx = \int_{\Omega} T_0^2 dx, \end{aligned}$$

т. е.

$$\|T_i\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow \|T_0\|_{L_2(\Omega)}.$$

В гильбертовом пространстве из слабой сходимости и сходимости норм следует сильная сходимость $T_i \rightarrow T_0$ сильно в $L_2(\Omega)$. $\square$

Допустим, что Ξ и Θ — некоторые подпространства пространств $L_2(\Gamma_2)$ и $L_2(\Omega)$ соответственно, $\mathcal{T}$ — оператор решения $\mathcal{T} : \Xi \ni \xi \rightarrow \mathcal{T}\xi \in \Theta$, где $\mathcal{T}\xi$ — решение задачи (3.7)–(3.9), Υ — оператор конормального дифференцирования $\Upsilon : \Theta \ni T \rightarrow \Upsilon T = k \partial T / \partial \mathbf{n} |_{\Gamma_1} \in L_2(\Gamma_1)$. Если один из операторов $\mathcal{T}$ или Υ вполне непрерывен, а другой ограничен, то их произведение (суперпозиция) есть вполне непрерывный оператор [18, с. 227] и, следовательно, не имеет ограниченного обратного оператора.

5. Численное моделирование решения обратной задачи

В работах [22; 23] кратко описаны методы Ландвебера, Левенберга — Марквардта, Ньютона — Канторовича решения рассматриваемой обратной задачи. Опишем подробнее метод Ньютона — Канторовича и приведем результаты численного моделирования этим методом.

Классическая схема метода Ньютона — Канторовича для решения операторного уравнения

$$A(\xi) = \varphi,$$

приводит к итерационной последовательности [18, с. 470; 4, с. 71]

$$\xi_{i+1} = \xi_i - [A'(\xi_i)]^{-1} (A(\xi_i) - \varphi), \quad i = 0, 1, \dots,$$

где $A'(\xi_i)$ — производная Фреше оператора A в точке ξ_i .

Для решения обратной задачи (3.1)–(3.3), записанной в форме операторного уравнения (3.10), предлагается воспользоваться следующей модификацией этого метода:

$$\xi_{i+1} = \xi_i - \beta_i [A'(\xi_i)]_{\alpha_i}^{-1} (A(\xi_i) - \varphi), \quad i = 0, 1, \dots, \quad (5.1)$$

где $[A'(\xi_i)]_{\alpha}^{-1}$ — некоторая подходящая регуляризация обратного оператора $[A'(\xi_i)]^{-1}$, $\alpha = \alpha_i$ — параметр регуляризации, β_i — весовой коэффициент (шаг спуска).

Значение производной Фреше A' в точке ξ на элементе ζ вычисляется по формуле

$$A'(\xi)\zeta = k \frac{\partial T_{\zeta}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_1},$$

где T_{ζ} — решение краевой задачи

$$L T_{\zeta} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (5.2)$$

$$T_{\zeta} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (5.3)$$

$$T_{\zeta} = \zeta, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2. \quad (5.4)$$

Оператор $[A'(\xi)]_{\alpha}^{-1}$ действует следующим образом:

$$[A'(\xi)]_{\alpha}^{-1}(\psi) = T_{\alpha} \Big|_{\Gamma_2},$$

где T_{α} — решение краевой задачи

$$L T_{\alpha} = \alpha \frac{\partial^4 T_{\alpha}}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (5.5)$$

$$T_{\alpha} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (5.6)$$

$$k \frac{\partial T_{\alpha}}{\partial \mathbf{n}} = \psi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1. \quad (5.7)$$

Краевая задача (5.5)–(5.7) представляет собой регуляризацию квазиобращением краевой задачи (5.2)–(5.4). Параметр $\alpha = \alpha_i$ на i -м шаге в (5.1) находится квазиоптимальным способом [2; 24] из условия минимума нормы разности

$$\|T_{\alpha_{s+1}}|_{\Gamma_2} - T_{\alpha_s}|_{\Gamma_2}\|_{L_2(\Gamma_2)} \rightarrow \min: s = \overline{0, S-1} \quad (\alpha_s = \alpha_0 b^s, \quad 0 < b < 1).$$

Параметр $\beta = \beta_i$ на i -м шаге в (5.1) находится в результате решения одномерной задачи

$$\|A(\xi_i - \beta [A'(\xi_i)]_{\alpha_i}^{-1} (A(\xi_i) - \varphi)) - \varphi\|_{L_2(\Gamma_2)} \rightarrow \min: \beta > 0.$$

Алгоритм заканчивает работу при выполнении условия $\|A(\xi_i) - \varphi\|_{L_2(\Gamma_2)} < \varepsilon_0$, где ε_0 — некоторое заранее заданное малое положительное число.

При численном моделировании полагалось $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2)$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, $\Gamma_1 = \{(x_1, x_2) \in \Gamma: x_2 = 0\}$, $\Gamma_2 = \{(x_1, x_2) \in \Gamma: x_2 = l_2\}$, $\Gamma_3 = \{(x_1, x_2) \in \Gamma: x_1 = 0, x_1 = l_1\}$. На границе Γ_1 требуется найти режим $T|_{\Gamma_1} = \xi$, на границе Γ_2 известны режим $T|_{\Gamma_2} = 0$ и поток $k \partial T / \partial \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = \varphi$, на Γ_3 фиксировано условие $\partial T / \partial \mathbf{n}|_{\Gamma_3} = 0$.

В вычислительных экспериментах фиксировались параметры $l_1 = l_2 = 1$, $k = 1$, $q = 0.1$, $f = 0$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $u_1 = -2x_1(1-x_1)(1-2x_1)x_2^2(1-x_2)^2$, $u_2 = 2x_2(1-x_2)(1-2x_2)x_1^2(1-x_1)^2$.

Для ускорения счета при численном решении задачи (5.5)–(5.7) использовался постоянный параметр $\alpha = 0.05$. Краевые задачи (5.2)–(5.4), (5.5)–(5.7) решались методом установления с использованием монотонной устойчивой неявной разностной схемы [3, § 9.1.4, 9.2.1, 13.4.3] на равномерной сетке 20×20 .

Рассчитывались задачи по восстановлению двух граничных режимов: гладкого режима $\xi^{(1)}(x_1) = \cos(2\pi x_1)$, $x_1 \in [0, 1]$, и разрывного режима $\xi^{(2)}(x_1) = 0.5$, если $x_1 \in [0, 0.1]$; $\xi^{(2)}(x_1) = x_1 + 0.4$, если $x_1 \in [0.1, 0.5]$; $\xi^{(2)}(x_1) = 0.9 - x_1$, если $x_1 \in [0.5, 0.9]$; $\xi^{(2)}(x_1) = 0$, если $x_1 \in [0.9, 1]$.

На рис. 3–6 представлены результаты восстановления гладкого граничного режима, на рис. 7–10 представлены результаты восстановления разрывного граничного режима. На рис. 3 и рис. 7 представлены распределения температуры (концентрации), соответствующие искомым граничным режимам; на рис. 4, 8 сплошной линией обозначено точное решение, штриховой — первая итерация, пунктирной — конечная итерация; на рис. 5, 9 сплошная линия — невязка (значения откладываются на левой вертикальной оси), пунктирная линия — относительная погрешность (значения откладываются на правой вертикальной оси); на рис. 6, 10 приведены распределения температуры (концентрации), соответствующие восстановленным граничным режимам. В табл. 1 и 2 представлены результаты восстановления искомого режима для нескольких промежуточных и конечной итераций.

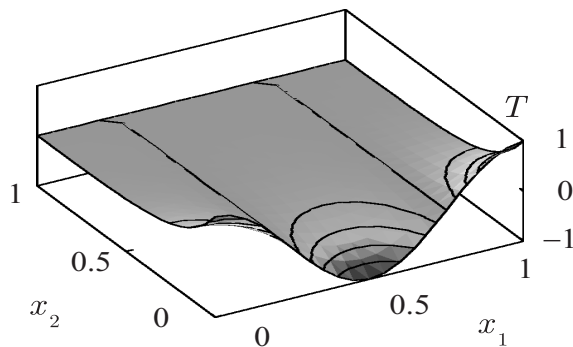


Рис. 3.

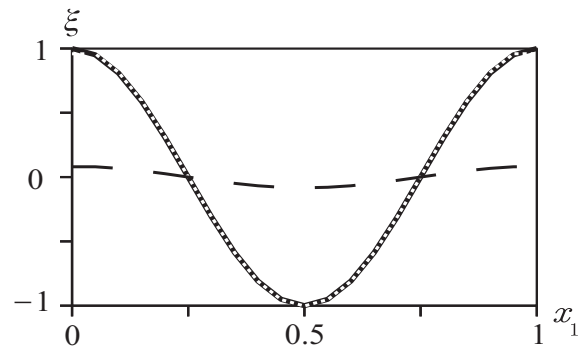


Рис. 4.

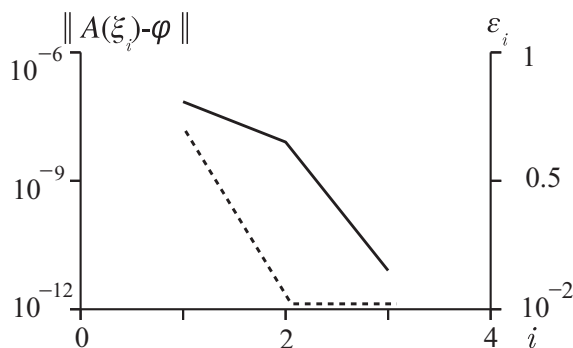


Рис. 5.

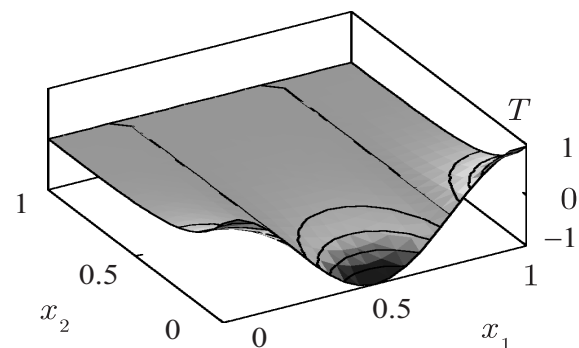


Рис. 6.

Таблица 1

Восстановление гладкого граничного режима

i	1	3
$\ A(\xi_i) - \varphi\ $	7×10^{-8}	8.1×10^{-12}
$\ \xi_i - \xi^{(1)}\ $	6.8×10^{-1}	1.3×10^{-2}
ε_i	9.1×10^{-1}	1.83×10^{-2}
β_i	1.9	1.8×10

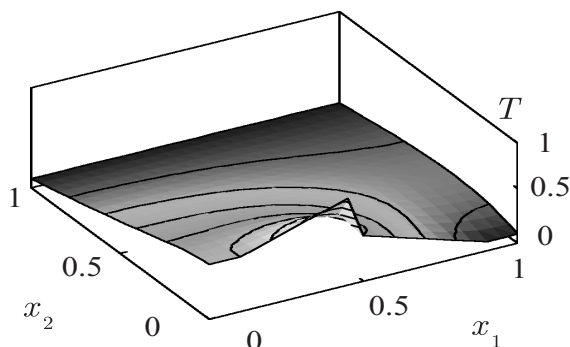


Рис. 7.

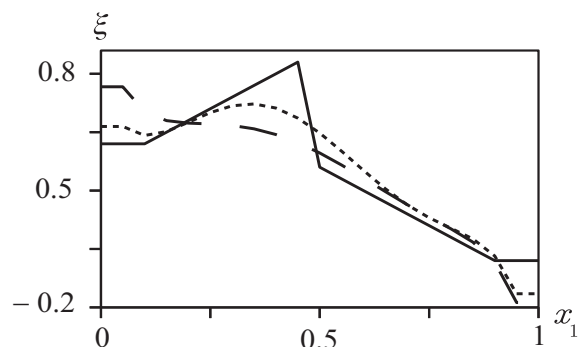


Рис. 8.

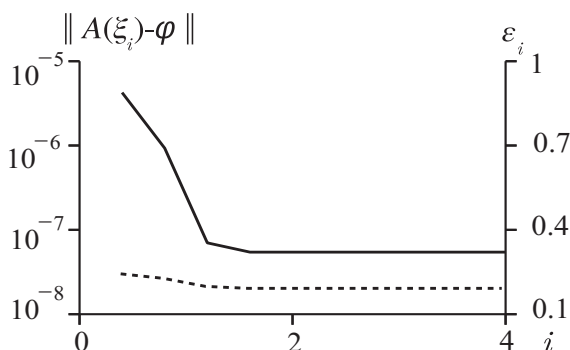


Рис. 9.

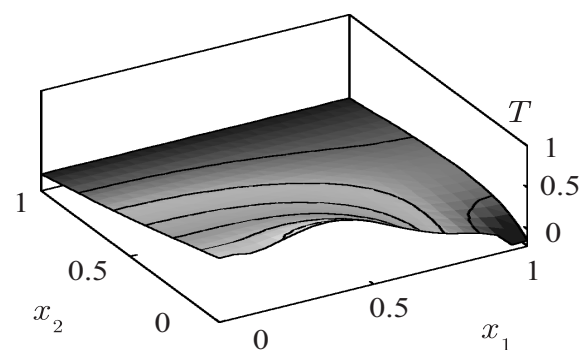


Рис. 10.

Т а б л и ц а 2

Восстановление разрывного граничного режима

i	1	3	6	9
$\ A(\xi_i) - \varphi\ $	4.2×10^{-6}	7×10^{-8}	5.4×10^{-8}	5.4×10^{-8}
$\ \xi_i - \xi^{(2)}\ $	1.5×10^{-1}	9.8×10^{-2}	9.4×10^{-2}	9.4×10^{-2}
ε_i	2.5×10^{-1}	2×10^{-1}	1.9×10^{-1}	1.9×10^{-1}
β_i	1.2×10	1.7×10	4.1×10^{-5}	4.1×10^{-5}

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 319 с.
2. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с.
3. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Едиториал УРСС, 2004. 478 с.
4. Васин В.В., Еремин И.И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2006. 210 с.
5. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское науч. изд-во, 2009. 457 с.
6. Короткий А.И., Ковтунов Д.А. Реконструкция граничных режимов // Тр. Междунар. семинара "Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби". Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. ун-та, 2006. Т. 2. С. 82–91.
7. Короткий А.И., Ковтунов Д.А. Реконструкция граничных режимов в обратной задаче тепловой конвекции высоковязкой жидкости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 2. С. 88–97.
8. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.

9. **Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
10. **Ладыженская О.А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Физматлит, 1961. 203 с.
11. **Алексеев Г.В., Терешко Д.А.** Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2008. 365 с.
12. **Михайлов В.П.** Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 392 с.
13. **Adams R.A.** Sobolev spaces. N. Y.: Acad. Press, 1975. 268 p.
14. **Соболев С.Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 336 с.
15. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
16. **Фурсиков А.В.** Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999. 352 с.
17. **Lukaszewicz G., Rojas-Medar M., Santos M.** Stationary micropolar fluid flows with boundary data in L_2 // J. Math. Anal. Appl. 2002. Vol. 271, no. 1. P. 91–107.
18. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
19. **Ректорис К.** Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 590 с.
20. **Смирнов В.И.** Курс высшей математики. Т. 5. М.: Физматлит, 1959. 657 с.
21. **Villamizar-Rao E.J., Rodriguez-Bellido M.F., Rojas-Medar M.A.** The Boussinesq system with mixed nonsmooth boundary data // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 2006. Vol. 343, no. 3. P. 191–196.
22. **Короткий А.И., Стародубцева Ю.В.** Реконструкция граничных режимов в модели реакции-конвекции-диффузии // Вест. Ижевского гос. техн. ун-та. 2013. Т. 59, № 3. С. 146–149.
23. **Стародубцева Ю.В.** Прямые и обратные граничные задачи для моделей реакции-конвекции-диффузии // Вестн. Тамбовского ун-та. 2013. Т. 18, вып. 5. С. 2692–2693. (Естественные и технические науки.)
24. **Тихонов А.Н., Гласко В.Б.** Применение метода регуляризации в нелинейных задачах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1965. Т. 5. № 3. С. 463–473.

Короткий Александр Илларионович

Поступила 21.03.2014

д-р физ.-мат. наук, профессор

зав. отделом

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: korotkii@imm.uran.ru

Стародубцева Юлия Владимировна

старший программист

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: starodubtsevayv@yandex.ru

УДК 517.977

УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ В ЭВОЛЮЦИОННЫХ ИГРАХ¹**Н. А. Красовский, А. В. Кряжимский, А. М. Тарасьев**

Современные методы теории управления и конструкции обобщенных минимаксных решений уравнений Гамильтона — Якоби применяются к игре с ненулевой суммой, в которой рассматривается взаимодействие двух больших групп участников в рамках экономических или биологических эволюционных моделей. Случайные контакты между участниками из различных групп происходят в соответствии с управляемым динамическим процессом, который может быть интерпретирован как система дифференциальных уравнений Колмогорова. Коэффициенты уравнений не фиксируются заранее и могут выбираться как управляющие параметры по принципу обратной связи. Функции выигрыша участников определяются предельными функционалами на бесконечном горизонте. Рассматривается понятие динамического равновесия по Нэшу в классе управляемых обратных связей. Предлагается решение, основанное на максимизации гарантированных выигрышей. Гарантирующие стратегии конструируются в рамках теории обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби. Аналитические формулировки получены для соответствующих функций цены. Генерируется равновесная траектория и исследуются ее свойства. Рассматриваемый подход обеспечивает новые качественные свойства равновесных траекторий в эволюционных играх.

Ключевые слова: теория игр, алгоритмы поиска равновесия.

N. A. Krasovskiy, A. V. Kryazhimskiy, A. M. Tarasyev. Hamilton–Jacobi equations in evolutionary games.

Advanced methods of the theory of optimal control and generalized minimax solutions of Hamilton–Jacobi equations are applied to a nonzero sum game between two large groups of agents in the framework of economic and biological evolutionary models. Random contacts of agents from different groups happen according to a control dynamic process which can be interpreted as Kolmogorov’s differential equations. Coefficients of equations are not fixed a priori and can be chosen as control parameters on the feedback principle. Payoffs of coalitions are determined by the limit functionals on infinite horizon. The notion of a dynamical Nash equilibrium is considered in the class of control feedbacks. A solution is proposed basing on feedbacks maximizing with the guarantee the own payoffs. Guaranteed feedbacks are constructed in the framework of the theory of generalized solutions of Hamilton–Jacobi equations. The analytical formulas are obtained for corresponding value functions. The equilibrium trajectory is generated and its properties are investigated. The considered approach provides new qualitative results for the equilibrium trajectory in evolutionary games.

Keywords: game theory, algorithms of equilibrium search.

Введение

В работе рассматривается модель эволюционной игры с ненулевой суммой между двумя группами участников в рамках теории дифференциальных игр [1;2]. Используются некоторые идеи и подходы неантагонистических дифференциальных игр [3]. Рассматриваются конструкции и методы анализа эволюционных игр, предложенные в работе [4]. Внимание сконцентрировано на построении динамического равновесия по Нэшу с гарантирующими стратегиями игроков, которые максимизируют соответствующие функции выигрыша. Строятся разрешающие траектории, которые дают результат, лучший по сравнению с классическими моделями, например, моделями с репликаторной динамикой.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 13-01-12446-офи-м2, 13-01-00685), проекта РФФИ № 14-00-90408-Укр-а и проекта НАН Украины № 03-01-14, проекта РФФИ № 14-01-00486-а, а также проектов УРО РАН 12-П-1-1002, 12-П-1-1012, 12-П-6-1038, 12-С-7-1001, программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.А03.21.0006 от 27.08.2013) и Международного института прикладного системного анализа (IIASA).

Динамика игрового взаимодействия соответствует дифференциальным играм [1–5] и эволюционным игровым моделям [6–11]. Работа посвящена приложению теории обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби [12; 13] к анализу эволюционных игр. Результаты работы были анонсированы в [14].

Предполагается, что случайные взаимодействия между участниками представлены управляемым динамическим процессом, при котором соответствующие вероятности формируют фазовый вектор. Роль управляющих параметров играют информационные сигналы для участников. Такая динамика может быть интерпретирована как обобщение известных уравнений Колмогорова, которые применяются в некоторых стохастических моделях математической экономики и теории очередей. Обобщение состоит во введении управляющих параметров вместо фиксированных параметров, описывающих входящие и исходящие потоки внутри групп. Считается, что процесс эволюционирует на бесконечном интервале времени. Выигрыши участников в каждом раунде специфицируются матрицей выигрышей. Выигрыши групп определяются как среднее значение выигрышей участников. Рассматриваются различные типы этих средних значений: терминальные — для фиксированного времени, мультитерминальные — для временного интервала и мультитерминальные — для предела на бесконечном интервале времени. Заметим, что игра с ненулевой суммой была проанализирована [11] с дисконтированными интегральными функционалами выигрыша. Мультитерминальные функционалы связаны с концепцией, которая принимает во внимание не только локальные терминальные интересы групп, но ориентирована также на изменения в будущем.

Вводится понятие динамического равновесия по Нэшу в классе стратегий управления по принципу обратной связи. Заметим, что обратные связи, генерируемые классической стратегией “наказания” в статических биматричных играх, являются естественным примером равновесия по Нэшу в динамическом плане. Природа таких ответных реакций антагонистична: они минимизируют выигрыш соперника, не максимизируя свой.

Предлагается иной подход, основанный на концепции “гарантии” и обеспечивающий более хорошие результаты, нежели классические решения. Такие новые решения генерируются в рамках теории позиционных дифференциальных игр и вовлекают гарантирующие обратные связи во вспомогательных играх с нулевой суммой [2; 3]. Такие игры с нулевой суммой рассматриваются в рамках теории минимаксных решений уравнений Гамильтона — Якоби [12; 13; 15]. Для аналитического построения функции цены и оптимальных гарантирующих ответных реакций используются как методы теории дифференциальных игр [2; 3], так и конструкции теории выживаемости [16]. Проверяются соответствующие необходимые и достаточные условия, которые формулируются в терминах сопряженных производных [15]. Синтез гарантирующих обратных связей для управляющих параметров определяется кривыми переключения с одной характеристики уравнения Гамильтона — Якоби на другую и задается структурой функций цены. Отметим, что аналогичные идеи численного построения решения используются в работах [17; 18].

Качественное поведение предложенных равновесных решений, порожденных гарантирующим синтезом, существенно отличается от траекторий эволюционных игр, представленных в классических моделях с динамическим репликатором. Напомним, что такие траектории, как правило, сходятся к статическому равновесию по Нэшу или циркулируют в его окрестности [8]. Новые равновесные решения не являются гладкими и имеют переключения по характеристикам уравнений Гамильтона — Якоби. В отличие от классических траекторий они расположены в пересечении областей, для которых величины выигрышей игроков лучше соответствующих величин выигрышей, рассчитанных для статического равновесия по Нэшу. Предложенные равновесные решения не сходятся к статическому равновесию по Нэшу, а их предельные значения выигрышей лучше, чем в точке равновесия по Нэшу. Рассмотренные примеры динамических игр показывают, что предложенные равновесные траектории сходятся к точкам пересечения синтезированных кривых переключения, т. е. к “новым” точкам равновесия с лучшим индексом выигрышей.

1. Эволюционная игра. Динамическое равновесие по Нэшу

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, которая описывает динамику поведения двух групп (коалиций)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + u \\ \dot{y} &= -y + v.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Здесь параметр x , $0 \leq x \leq 1$, есть вероятность того, что произвольно выбранный игрок из первой группы придерживается первой стратегии (соответственно $(1 - x)$ есть вероятность того, что он придерживается второй стратегии). Параметр y , $0 \leq y \leq 1$, означает вероятность выбора первой стратегии игроком из второй коалиции (соответственно, $(1 - y)$ — вероятность того, что он придерживается второй стратегии). Управляющие параметры u и v удовлетворяют условиям $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$ и могут быть интерпретированы как сигналы, рекомендуемые смену стратегий игроками.

Отметим, что основания для динамики (1.1) и ее свойства были рассмотрены в [4; 11]. В этой динамике обобщаются дифференциальные уравнения Колмогорова в предположении, что коэффициенты входящих и исходящих потоков внутри коалиций участников не заданы априори и могут быть сконструированы в управляемом процессе по принципу обратной связи.

В качестве интерпретации динамики (1.1) рассмотрим игровое взаимодействие двух больших групп фирм-участников (или их инвестиций) на двух рынках. Пусть x (y) — часть средств, которую игроки первой (второй) коалиции (это может быть финансовая или промышленная группа) инвестируют в первый рынок (это может быть валютный рынок, рынок товаров или инновационных технологий [10]). Предположим, что активность коалиций на рынке регулируется управляющим органом. Используя управляющие параметры u и v , управляющий орган может влиять на распределение средств x и y . Динамика этого влияния описывается системой (1.1) и обеспечивает некоторую инертность игроков по отношению к управляющим сигналам u , v , тогда как скорость $\dot{x}$, $\dot{y}$ изменения пропорций капитала x , y не прямо пропорциональна сигналам, а зависит от размеров этих пропорций.

Предположим, что выигрыши игроков из первой (второй) коалиции описываются матрицей $A = a_{ij}$ ($B = b_{ij}$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим, например, для игры фирм на двух рынках следующие ситуации, которые будем называть почти антагонистическими. Предположим, что первый рынок является более прибыльным для инвестиций, нежели второй. Фирмы первой коалиции сильнее, чем фирмы второй коалиции. Они стремятся захватить оба рынка. Фирмы второй коалиции стараются избежать взаимодействий с фирмами первой коалиции на одном и том же рынке.

Терминальные функции выигрыша коалиций определяются как математическое ожидание соответствующих матриц A , B и могут быть интерпретированы как “локальные” интересы коалиций

$$\begin{aligned}g_A(x(T), y(T)) \\ = a_{11}x(T)y(T) + a_{12}x(T)(1 - y(T)) + a_{21}(1 - x(T))y(T) + a_{22}(1 - x(T))(1 - y(T)) \\ = C_A x(T)y(T) - \alpha_1 x(T) - \alpha_2 y(T) + a_{22}.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Функция g_B для матрицы B определяется аналогично. Здесь параметры C_A , α_1 , α_2 определены в соответствии с классической теорией биматричных игр (см. [10]):

$$C_A = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}, \quad \alpha_1 = a_{22} - a_{12}, \quad \alpha_2 = a_{22} - a_{21}.$$

Коэффициенты C_B , β_1 , β_2 для матрицы B определяются по аналогичной схеме.

“Глобальные” интересы J_A^∞ первой коалиции определяются как многозначные (двузначные) функции, образованные нижними и верхними пределами средних значений

$$\begin{aligned} J_A^\infty &= [J_A^-, J_A^+], \\ J_A^- &= J_A^-(x(\cdot), y(\cdot)) = \liminf_{t \rightarrow \infty} g_A(x(t), y(t)), \\ J_A^+ &= J_A^+(x(\cdot), y(\cdot)) = \limsup_{t \rightarrow \infty} g_A(x(t), y(t)), \end{aligned} \quad (1.3)$$

посчитанных для траекторий $(x(\cdot), y(\cdot))$ системы (1.1). Для второй коалиции “глобальные” интересы J_B^∞ определяются симметричным образом.

Рассмотрим эволюционную игру с ненулевой суммой с динамикой (1.1) и глобальными выигрышами, заданными по схеме (1.3). В теории дифференциальных игр (см. [2; 3]) существует подход для построения равновесных решений из класса стратегий, определенных по принципу обратной связи $U = u(t, x, y, \varepsilon)$, $V = v(t, x, y, \varepsilon)$, для игр с ненулевой суммой. Такой подход основан на решении вспомогательных игр с нулевой суммой. В связи с нашей постановкой задачи мы рассматриваем игры с нулевыми суммами для функционалов $J_A^-, J_A^+, J_B^-, J_B^+$. Известно, что задачи с нулевой суммой могут быть решены в рамках теории дифференциальных игр, и решение для гарантирующих стратегий может быть получено в рамках принципа динамического программирования. Такой принцип требует нахождения функций цены, которые являются обобщенными решениями уравнений Гамильтона — Якоби, т.е. задача сводится к решению уравнений в частных производных первого порядка.

Следуя [3; 4], представим определение динамического равновесия по Нэшу из класса позиционных стратегий (обратных связей) $U = u(t, x, y, \varepsilon)$, $V = v(t, x, y, \varepsilon)$ для игры с ненулевой суммой с заданной динамикой и многозначными функционалами выигрыша.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $\varepsilon > 0$ и $(x_0, y_0) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Пара обратных связей $U^0 = u^0(t, x, y, \varepsilon)$, $V^0 = v^0(t, x, y, \varepsilon)$ называется равновесием по Нэшу в начальной точке (x_0, y_0) , если для любых других обратных связей $U = u(t, x, y, \varepsilon)$, $V = v(t, x, y, \varepsilon)$ выполняются следующие условия: для всех траекторий

$$(x^0(\cdot), y^0(\cdot)) \in X(x^0, y^0, U^0, V^0), (x_1(\cdot), y_1(\cdot)) \in X(x^1, y^1, U, V^0), (x_2(\cdot), y_2(\cdot)) \in X(x^2, y^2, U^0, V)$$

выполняются неравенства

$$J_A^-(x^0(\cdot), y^0(\cdot)) \geq J_A^+(x_1(\cdot), y_1(\cdot)) - \varepsilon, \quad J_B^-(x^0(\cdot), y^0(\cdot)) \geq J_B^+(x_2(\cdot), y_2(\cdot)) - \varepsilon. \quad \square$$

Для построения желаемых равновесных обратных связей U^0, V^0 используем подход [3]. В соответствии с таким подходом мы выстраиваем равновесие с помощью оптимальных обратных связей для дифференциальных игр $\Gamma_A = \Gamma_A^- \cup \Gamma_A^+$ и $\Gamma_B = \Gamma_B^- \cup \Gamma_B^+$ с выигрышами J_A^∞ и J_B^∞ . В игре Γ_A первая коалиция гарантированно максимизирует функционал $J_A^-(x(\cdot), y(\cdot))$, используя обратную связь $U = u(t, x, y, \varepsilon)$, а вторая коалиция старается, напротив, минимизировать функционал $J_A^+(x(\cdot), y(\cdot))$, используя обратную связь $V = v(t, x, y, \varepsilon)$. Наоборот, в игре Γ_B вторая коалиция гарантированно максимизирует функционал $J_B^-(x(\cdot), y(\cdot))$, а первая коалиция минимизирует функционал $J_B^+(x(\cdot), y(\cdot))$.

Введем следующие обозначения. Обратные связи, решающие соответственно задачу гарантированной максимизации функционалов выигрыша J_A^-, J_B^- , обозначим $u_A^0 = u_A^0(t, x, y, \varepsilon)$ и $v_B^0 = v_B^0(t, x, y, \varepsilon)$. Заметим, что такие обратные связи представляют гарантированную максимизацию выигрышей коалиций в длительной перспективе и могут называться “позитивными”. Через $u_B^0 = u_B^0(t, x, y, \varepsilon)$ и $v_A^0 = v_A^0(t, x, y, \varepsilon)$ обозначим обратные связи, наиболее неблагоприятные для противоположных коалиций; а именно, те, которые минимизирует функционал выигрыша J_B^+, J_A^+ соответственно противоположных коалиций. Назовем такие обратные связи “наказывающими”.

Заметим, что негибкие решения отмеченных проблем могут быть получены в рамках классической теории биматричных игр. В самом деле, предположим для определенности (хотя это

и не существенно для построения решений в общем случае), что выполнены условия

$$\begin{aligned} C_A > 0, \quad 0 < x_A = \frac{\alpha_2}{C_A} < 1, \quad 0 < y_A = \frac{\alpha_1}{C_A} < 1, \\ C_B < 0, \quad 0 < x_B = \frac{\beta_2}{C_B} < 1, \quad 0 < y_B = \frac{\beta_1}{C_B} < 1. \end{aligned}$$

Предложение 1. Дифференциальные игры Γ_A^-, Γ_A^+ (Γ_B^-, Γ_B^+) имеют равные значения

$$v_A^- = v_A^+ = v_A = \frac{a_{22}C_A - \alpha_1\alpha_2}{C_A}, \quad v_B^- = v_B^+ = v_B = \frac{b_{22}C_B - \beta_1\beta_2}{C_B}$$

ет для произвольного начального положения $(x_0, y_0) \in [0, 1] \times [1, 0]$. Эти значения могут быть гарантированы “позитивными” обратными связями $u_A^{\text{cl}}, v_B^{\text{cl}}$, соответствующими классическим решениям x_A, y_B

$$u_A^{\text{cl}}(x, y) = \begin{cases} 0, & x_A < x \leq 1 \\ 1, & 0 \leq x < x_A \\ [0, 1], & x = x_A \end{cases}, \quad v_B^{\text{cl}}(x, y) = \begin{cases} 0, & y_B < y \leq 1 \\ 1, & 0 \leq y < y_B \\ [0, 1], & y = y_B \end{cases}.$$

“Наказывающие” обратные связи определяются формулами

$$u_B^{\text{cl}}(x, y) = \begin{cases} 0, & x_B < x \leq 1 \\ 1, & 0 \leq x < x_B \\ [0, 1], & x = x_B \end{cases}, \quad v_A^{\text{cl}}(x, y) = \begin{cases} 0, & y_A < y \leq 1 \\ 1, & 0 \leq y < y_A \\ [0, 1], & y = y_A \end{cases}$$

и соответствуют классическим статическим решениям x_B, y_A , которые генерируют статическое равновесие по Нэшу $NE = (x_B, y_A)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о этого утверждения обосновывается прямой подстановкой стратегий $u_A^{\text{cl}}, v_B^{\text{cl}}$ и стратегий $u_B^{\text{cl}}, v_A^{\text{cl}}$ в динамику (1.1). $\square$

З а м е ч а н и е 1. Значения функций выигрыша $g_A(x, y), g_B(x, y)$ совпадают в точках $(x_A, y_B), (x_B, y_A)$

$$g_A(x_A, y_B) = g_A(x_B, y_A) = v_A, \quad g_B(x_A, y_B) = g_B(x_B, y_A) = v_B.$$

Точка $NE = (x_B, y_A)$ — “взаимно наказывающее” равновесие по Нэшу, а точка x_A, y_B не обладает равновесными свойствами в соответствующей статической игре. $\square$

Построим пару обратных связей, которые составляют равновесие по Нэшу. Для этого соединим “позитивные” обратные связи u_A^0, v_B^0 и “наказывающие” обратные связи u_B^0, v_A^0 .

Выберем начальное положение $(x_0, y_0) \in [0, 1] \times [0, 1]$ и параметр точности $\varepsilon > 0$. Выберем траекторию $(x^0(\cdot), y^0(\cdot)) \in X(x_0, y_0, U_A^0(\cdot), v_B^0(\cdot))$, сгенерированную “позитивными” обратными связями $u_A^0 = U_A^0(t, x, y, \varepsilon)$ и $v_B^0 = v_B^0(t, x, y, \varepsilon)$. Возьмем $T_\varepsilon > 0$ такое, что

$$g_A(x^0(t), y^0(t)) > J_A^-(x^0(\cdot), y^0(\cdot)) - \varepsilon, \quad g_B(x^0(t), y^0(t)) > J_B^-(x^0(\cdot), y^0(\cdot)) - \varepsilon, \quad t \in [T_\varepsilon, +\infty].$$

Обозначим через $u_A^\varepsilon(t): [0, T_\varepsilon] \rightarrow [0, 1]$, $v_B^\varepsilon(t): [0, T_\varepsilon] \rightarrow [0, 1]$ пошаговую реализацию стратегий v_A^0, v_B^0 такую, что соответствующий пошаговый механизм $(x_\varepsilon(\cdot), y_\varepsilon(\cdot))$ удовлетворяет условию

$$\max_{t \in [0, T_\varepsilon]} \|(x^0(t), y^0(t)) - (x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))\| < \varepsilon.$$

Из результатов работы [3] следует, что пара обратных связей $U^0 = u^0(t, x, y, \varepsilon)$, $V^0 = v^0(t, x, y, \varepsilon)$, соединяющая вместе “позитивные” обратные связи u_A^0, v_B^0 и “наказывающие” обратные связи u_B^0, v_A^0 в соответствии с соотношениями

$$U^0 = \begin{cases} u_A^\varepsilon(t), & \text{если } \|(x, y) - (x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))\| < \varepsilon, \\ u_B^0(x, y) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$V^0 = \begin{cases} v_B^\varepsilon(t), & \text{если } \|(x, y) - (x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))\| < \varepsilon, \\ v_A^0(x, y) & \text{в противном случае} \end{cases}$$

является динамическим ε -равновесием по Нэшу.

Заметим, что число ε может быть интерпретировано как параметр “доверия” коалиций друг другу или как уровень “риска”, который коалиции допускают в игре.

Ниже конструируются гибкие “позитивные” обратные связи, которые генерируют траектории $(x^\Pi(\cdot), y^\Pi(\cdot))$, сводящие к “лучшим” положениям, чем негибкое динамическое равновесие (x_B, y_A) , (x_A, y_B) по обоим критериям $J_A^\infty(x^\Pi(\cdot), y^\Pi(\cdot)) \geq v_A$, $J_B^\infty(x^\Pi(\cdot), y^\Pi(\cdot)) \geq v_B$.

2. Дифференциальная игра с терминальным функционалом

В этом разделе рассматривается вспомогательная терминальная дифференциальная игра с нулевой суммой с динамикой (1.1) и функционалами выигрыша вида (1.2). Дальнейшие решения терминальных дифференциальных игр используются для построения предвидящих обратных связей путем расчета нижней оболочки мультитерминальных функционалов. Функции цены $w_i(T, t, x, y)$, $i = 1, 2$, терминальных игр определяются как величины соответствующих максимин (минимаксов)

$$w_1(T, t_0, x_0, y_0) = \max_{u(t, x, y)} \min_{(x_1(\cdot), y_1(\cdot))} g_A(x_1(T), y_1(T)) = \min_{v(t, x, y)} \max_{(x_2(\cdot), y_2(\cdot))} g_A(x_2(T), y_2(T)),$$

$$w_2(T, t_0, x_0, y_0) = \max_{v(t, x, y)} \min_{(x_2(\cdot), y_2(\cdot))} g_B(x_2(T), y_2(T)) = \min_{u(t, x, y)} \max_{(x_1(\cdot), y_1(\cdot))} g_B(x_1(T), y_1(T))$$

для каждого начального положения (t_0, x_0, y_0) . Здесь траектории $(x_1(\cdot), y_1(\cdot))$ генерируются управлениями обратными связями $u(t, x, y, \varepsilon)$ и произвольными поведением $v(t)$. Траектории $(x_2(\cdot), y_2(\cdot))$ генерируются управлениями обратными связями $v(t, x, y, \varepsilon)$ и произвольными поведением $u(t)$ из начального положения (t_0, x_0, y_0) .

Функции цены $w_i(T, t, x, y)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют принципу динамического программирования, который подразумевает существование неувеличивающихся и неуменьшающихся направлений, достижимых для динамической системы в каждой текущей позиции (так называемые качества u и v стабильности функции цены). В точках, где функции цены дифференцируемы, эти качества переходят в частные дифференциальные уравнения первого порядка Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{\partial w_1}{\partial x} x - \frac{\partial w_1}{\partial y} y + \max_{0 \leq u \leq 1} \frac{\partial w_1}{\partial x} u + \min_{0 \leq v \leq 1} \frac{\partial w_1}{\partial y} v = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} - \frac{\partial w_2}{\partial x} x - \frac{\partial w_2}{\partial y} y + \max_{0 \leq u \leq 1} \frac{\partial w_2}{\partial x} u + \min_{0 \leq v \leq 1} \frac{\partial w_2}{\partial y} v = 0. \quad (2.2)$$

Функция цены $w_i(T, t, x, y)$, $i = 1, 2$, удовлетворяет также краевому условию, когда $t = T$:

$$w_1(T, T, x, y) = g_A(x, y), \quad w_2(T, T, x, y) = g_B(x, y). \quad (2.3)$$

Рассмотрим терминальные краевые задачи (2.1)–(2.3) для функций цены $w_1(T, t, x, y)$, $w_2(T, t, x, y)$. Известно [12; 13], что функция цены $w_1(T, t, x, y)$ совпадает с обобщенным решением этой задачи, которое является единственным и определяется терминальным краевым значением (2.3) и парой дифференциальных неравенств для сопряженных производных D^*w_1 и D_*w_1 , соответствующих уравнению Гамильтона — Якоби (2.1)

$$D^*w_1(T, t, x, y)|(s) \geq H(x, y, s), \quad D_*w_1(T, t, x, y)|(s) \leq H(x, y, s), \quad (2.4)$$

$$(t, x, y) \in [t_0, T] \times (0, 1) \times (0, 1), \quad s = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Сопряженные производные D^*w_1 и D_*w_1 и Гамильтониан H заданы формулами [15]

$$D^*w_1(T, t, x, y)|(s) = \sup_{h \in \mathbb{R}^2} (\langle s, h \rangle - \partial_- w_1(T, t, x, y)|(1, h)),$$

$$D_*w_1(T, t, x, y)|(s) = \inf_{h \in \mathbb{R}^2} (\langle s, h \rangle - \partial_+ w_1(T, t, x, y)|(1, h)),$$

$$H(x, y, s) = -s_1x - s_2y + \max_{0 \leq u \leq 1} s_1u + \min_{0 \leq v \leq 1} s_2v.$$

Выражения $\partial_- w_1(T, t, x, y)|(1, h)$, $\partial_+ w_1(T, t, x, y)|(1, h)$ обозначают производные функции цены w_1 в точке (t, x, y) по направлению $(1, h)$, $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\partial_- w_1(T, t, x, y)|(1, h) = \liminf_{\delta \downarrow 0} \frac{w_1(T, t + \delta, x + \delta h_1, y + \delta h_2) - w_1(T, t, x, y)}{\delta},$$

$$\partial_+ w_1(T, t, x, y)|(1, h) = \limsup_{\delta \downarrow 0} \frac{w_1(T, t + \delta, x + \delta h_1, y + \delta h_2) - w_1(T, t, x, y)}{\delta}.$$

Для кусочно-гладкой функции цены w_1 производные по направлению и сопряженные производные могут быть вычислены в рамках негладкого и выпуклого анализа. Предположим, что в окрестности $(t, x, y) \in O_\varepsilon(t_*, x_*, y_*)$ функция w_1 задана формулами

$$w_1(T, t, x, y) = \min_{i \in I} \max_{j \in J} \varphi_{ij}(T, t, x, y) = \max_{j \in J} \min_{i \in I} \varphi_{ij}(T, t, x, y).$$

Производные по направлению в этом случае определяются соотношениями

$$\partial w_1(T, t_*, x_*, y_*)(h) = \min_{i \in I} \max_{j \in J} (a_{ij} + \langle b_{ij}, h \rangle) = \max_{j \in J} \min_{i \in I} (a_{ij} + \langle b_{ij}, h \rangle),$$

$$a_{ij} = \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial t}, \quad b_{ij} = \left(\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} \right).$$

Введем обозначения

$$C = \bigcap_{i \in I} B_i, \quad B_i = \text{co}\{b_{ij} : j \in J\}, \quad D = \bigcap_{j \in J} B_j, \quad B_j = \text{co}\{b_{ij} : i \in I\}.$$

Сопряженные производные определяются соотношениями

$$D^*w_1(T, t_*, x_*, y_*)(s) = \begin{cases} \max_{i \in I} \min_{j \in J} \left\{ -\sum \lambda_j(s) a_{ij} \right\}, & s \in C, \\ +\infty, & s \notin C, \end{cases}$$

$$D_*w_1(T, t_*, x_*, y_*)(s) = \begin{cases} \min_{j \in J} \max_{i \in I} \left\{ -\sum \lambda_i(s) a_{ij} \right\}, & s \in D, \\ -\infty, & s \notin D. \end{cases}$$

Здесь коэффициенты $\lambda_j(s)$ удовлетворяют условиям

$$\sum_{j \in J} \lambda_j(s) b_{ij} = s, \quad \lambda_j(s) \geq 0, \quad \sum_{j \in J} \lambda_j(s) = 1.$$

Решение краевой задачи $w_1(T, t, x, y)$ (2.1), (2.3) представляет собой кусочно-гладкую функцию и состоит из пяти гладких функций $\varphi_k(T, t, x, y)$, $k = 1, \dots, 5$. Формулы для гладких компонент $\varphi_k(T, t, x, y)$, $k = 1, \dots, 5$, могут быть получены с помощью методов характеристик для соответствующих линейных уравнений Гамильтона — Якоби, которые возникают из нелинейных (2.1) заменой различных комбинаций экстремальных значений 0 и 1 на выражения $\max$ и $\min$. Укажем формулы для этих функций:

$$\varphi_1(T, t, x, y) = C_A e^{2(t-T)} xy - \alpha_1 e^{t-T} x - \alpha_2 e^{t-T} y + a_{22}, \quad (2.5)$$

$$\varphi_2(T, t, x, y) = C_A e^{2(t-T)} xy - \alpha_1 e^{t-T} x - (C_A e^{2(t-T)} + (\alpha_2 - C_A) e^{(t-T)}) y + \alpha_1 e^{(t-T)} + a_{12}, \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \varphi_3(T, t, x, y) &= C_A e^{2(t-T)} xy - (C_A e^{2(t-T)} + (\alpha_1 - C_A) e^{(t-T)}) x \\ &- (C_A e^{2(t-T)} + (\alpha_2 - C_A) e^{(t-T)}) y + C_A e^{2(t-T)} + (\alpha_1 + \alpha_2 - 2C_A) e^{(t-T)} + a_{11}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \varphi_4(T, t, x, y) &= C_A e^{2(t-T)} xy - (C_A e^{2(t-T)} + (\alpha_1 - C_A) e^{(t-T)}) x \\ &- \alpha_2 e^{t-T} y + \alpha_2 e^{t-T} + a_{21}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\varphi_5(T, t, x, y) = \frac{a_{22}C_A - \alpha_1\alpha_2}{C_A} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{C_A} = \frac{D_A}{C_A} = v_A.$$

Функции $\varphi_k, k = 1, \dots, 5$, склеиваются вместе на четырех линиях $L_m = L_m(T, t), m = 1, \dots, 4$,

$$L_1 = \{(x, y): x_1(T, t) \leq x \leq 1, y = y_2(T, t)\},$$

$$L_2 = \{(x, y): x = x_1(T, t), y_1(T, t) \leq y \leq 1\},$$

$$L_3 = \{(x, y): 0 \leq x \leq x_2(T, t), y = y_1(T, t)\},$$

$$L_4 = \{(x, y): x = x_2(T, t), 0 \leq y \leq y_2(T, t)\}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} x_1(T, t) &= \max \left\{ 0, 1 - \left(1 - \frac{\alpha_2}{C_A} \right) e^{(T-t)} \right\}, & x_2(T, t) &= \max \left\{ 1, \frac{\alpha_2}{C_A} e^{(T-t)} \right\}, \\ y_1(T, t) &= \max \left\{ 0, 1 - \left(1 - \frac{\alpha_1}{C_A} \right) e^{(T-t)} \right\}, & y_2(T, t) &= \max \left\{ 1, \frac{\alpha_1}{C_A} e^{(T-t)} \right\}. \end{aligned}$$

Предложение 2. Функция цены $w_1(T, t, x, y)$ определяется соотношением

$$w_1(T, t, x, y) = \varphi_k(T, t, x, y), \quad (x, y) \in D_k(T, t), \quad k = 1, \dots, 5. \quad (2.9)$$

Здесь области $D_k = D_k(T, t), k = 1, \dots, 5$, заданы неравенствами

$$\begin{aligned} D_1(T, t) &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]: x_2(T, t) \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq y_2(T, t)\}, \\ D_2(T, t) &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]: x_1(T, t) \leq x \leq 1, y_2(T, t) \leq y \leq 1\}, \\ D_3(T, t) &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]: 0 \leq x \leq x_1(T, t), y_1 \leq y \leq 1(T, t)\}, \\ D_4(T, t) &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]: 0 \leq x \leq x_2(T, t), 0 \leq y \leq y_1(T, t)\}, \\ D_5(T, t) &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]: x_1(T, t) \leq x \leq x_2(T, t), y_1(T, t) \leq y \leq y_2(T, t)\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Доказательство проводится прямой проверкой дифференциальных неравенств в необходимых и достаточных условиях (2.3), (2.4) для функции $w_1(T, t, x, y)$, определенной формулами (2.9), (2.10) (см. подробнее [14]). $\square$

3. Дифференциальная игра с мультитерминальным функционалом

В предыдущем разделе мы получили решение для вспомогательной терминальной краевой задачи (2.1), (2.3). Решение этой задачи (функция цены) $w_1(T, t, x, y)$ зависит от терминального момента T . Конечно, такое решение неприемлемо в эволюционном смысле, потому что мы получаем “хороший” результат в момент времени T , но не в другое время, включая бесконечность. Поэтому, здесь мы сконструируем функцию цены для дифференциальной игры с мультитерминальным функционалом выигрыша

$$G_A(x(\cdot), y(\cdot)) = \inf_{t_0 \leq t < +\infty} g_A(x(t), y(t)). \quad (3.1)$$

Функционал (3.1) определяет принцип предвидения, так как принимает во внимание будущие положения $g_A(x(t), y(t))$, начиная от времени t_0 , заканчивая $+\infty$.

Используя результаты, полученные в теории дифференциальных игр [2] и в теории выживаемости [16], можно доказать, что дифференциальная игра с нулевой суммой с динамикой (1.1) и функционалом (3.1) имеет цену. Более точно, справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Существует седловая точка, определяющая стационарную функцию цены*

$$\begin{aligned} \sup_{u(t,x,y,\varepsilon)} \inf_{(x_1(\cdot), y_1(\cdot))} \inf_{s \in [t_0, +\infty]} g_A(x_1(s), y_1(s)) &= \inf_{v(t,x,y,\varepsilon)} \sup_{(x_2(\cdot), y_2(\cdot))} \inf_{s \in [t_0, +\infty]} g_A(x_2(s), y_2(s)) \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \min_{v(t,x,y,\varepsilon)} \max_{(x_2(\cdot), y_2(\cdot))} \min_{s \in [t_0, T]} g_A(x_2(s), y_2(s)) \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \max_{u(t,x,y,\varepsilon)} \min_{(x_1(\cdot), y_1(\cdot))} \min_{s \in [t_0, T]} g_A(x_1(s), y_1(s)) = w_A(t_0, x_0, y_0) = w_A(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Здесь траектории $(x_1(\cdot), y_1(\cdot))$, $(x_2(\cdot), y_2(\cdot))$ генерируются из начального положения (t_0, x_0, y_0) обратными связями $u(t, x, y, \varepsilon)$, $v(t, x, y, \varepsilon)$ максимизирующих и минимизирующих игроков соответственно и произвольными управлениями их оппонентов.

Доказательство следует из теоремы об альтернативе [2], стационарного свойства динамики (1.1), конечности величин функционала G_A (3.1) и может быть выведено через понятие выживаемости ядра [16]. Схема доказательства следующая.

В общем случае имеют место условия

$$\begin{aligned} \sup_{u(t,x,y,\varepsilon)} \inf_{(x_1(\cdot), y_1(\cdot))} \inf_{s \in [t_0, +\infty]} g_A(x_1(s), y_1(s)) &\leq \inf_{v(t,x,y,\varepsilon)} \sup_{(x_2(\cdot), y_2(\cdot))} \inf_{s \in [t_0, +\infty]} g_A(x_2(s), y_2(s)) \\ &\leq \lim_{T \rightarrow +\infty} \min_{v(t,x,y,\varepsilon)} \max_{(x_2(\cdot), y_2(\cdot))} \min_{s \in [t_0, T]} g_A(x_2(s), y_2(s)) \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \max_{u(t,x,y,\varepsilon)} \min_{(x_1(\cdot), y_1(\cdot))} \min_{s \in [t_0, T]} g_A(x_1(s), y_1(s)) = w_A(t, x, y). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Можно проверить следующие свойства функции $w_A(t, x, y)$.

Свойство 1. Функция w_A стационарна

$$w_A(t, x, y) = w_A(s, x, y) = w_A(x, y), \quad (x_i, y_i) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Свойство 2. Функция w_A удовлетворяет условию Липшица

$$|w_A(x_1, y_1) - w_A(x_2, y_2)| \leq K(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|), \quad (x_i, y_i) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad i = 1, 2.$$

Свойство 3. Функция w_A мажорируется выигрышем g_A

$$w_A(x, y) \leq g_A(x, y), \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]. \quad (3.3)$$

Свойство 4. Функция w_A является максимальной функцией, которая удовлетворяет условию (3.3) и принципу динамического программирования. Свойства u -стабильности и v -стабильности могут быть представлены как

$$\min_{0 \leq v \leq 1} \max_{0 \leq u \leq 1} \partial_+ w_A(x, y) |(-x + u, -y + v) \geq 0, \quad (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1), \quad (3.4)$$

$$\max_{0 \leq u \leq 1} \min_{0 \leq v \leq 1} \partial_- w_A(x, y) |(-x + u, -y + v) \geq 0, \quad (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1). \quad (3.5)$$

Свойство 5. Свойства u -стабильности (3.4) и v -стабильности (3.5) могут быть переписаны [15] в терминах сопряженных производных

$$D_* w_A(x, y) | (s) \leq H(x, y, s), \quad (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1), \quad s = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (3.6)$$

$$D^*w_A(x, y)|(s) \geq H(x, y, s), \quad (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1), \quad w_A(x, y) < g_A(x, y), \quad s = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (3.7)$$

Учитывая свойства стабильности и используя концепцию стратегии “экстремального сдвига” [1], можно доказать, что соответствующие траектории обеспечивают значение функционала G_A (3.1) на $[t_0, +\infty)$, равное значению функции w_A . Следовательно, все неравенства в (3.2) превращаются в равенства, и этот факт доказывает теорему. $\square$

Для описания аналитического решения игры представим гладкие компоненты φ_1 (2.5), φ_3 (2.7) функции цены w_1 (2.9) в терминах параметра времени $s = t - T$. Построим нижние огибающие этих гладких компонент, которые представляют мультитерминальные интересы игроков. При построении огибающей ψ_A^1 для компоненты φ_1 необходимо посчитать производную по параметру s , приравнять ее к нулю, найти корень полученного уравнения и подставить этот корень в компоненту φ_1 . Окончательно получаем

$$\psi_A^1(x, y) = \varphi_1(s, x, y) = a_{22} - \frac{(\alpha_1 x + \alpha_2 y)^2}{4C_A xy}.$$

Аналогично для компоненты φ_3 получим ее нижнюю огибающую ψ_A^2 по параметру s

$$\psi_A^2(x, y) = \varphi_3(s, x, y) = a_{11} - \frac{((C_A - \alpha_1)(1 - x) + (C_A - \alpha_2)(1 - y))^2}{4C_A(1 - x)(1 - y)}.$$

Подобным образом определим нижние огибающие ψ_A^3 , ψ_A^4 компонент ϕ_2 (2.6), ϕ_4 (2.8)

$$\begin{aligned} \psi_A^3(x, y) &= C_A xy - \alpha_1 x - \alpha_2 y + a_{22}, \\ \psi_A^4(x, y) &= \frac{a_{22}C_A - \alpha_1\alpha_2}{C_A} = v_A. \end{aligned}$$

Гладкие функции ψ_A^i , $i = 1, \dots, 4$, склеиваются на линиях K_A^j , $j = 1, \dots, 5$,

$$\begin{aligned} K_A^1 &= \left\{ (x, y): x = \frac{\alpha_2}{C_A}, 0 \leq y \leq 1 \right\}, \\ K_A^2 &= \left\{ (x, y): \frac{\alpha_2}{C_A} \leq x \leq 1, \frac{\alpha_1}{C_A} \leq y \leq 1, y = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} x \right\}, \\ K_A^3 &= \left\{ (x, y): 0 \leq x \leq \frac{\alpha_2}{C_A}, 0 \leq y \leq \frac{\alpha_1}{C_A}, y = -\frac{(C_A - \alpha_1)}{(C_A - \alpha_2)}(1 - x) + 1 \right\}, \\ K_A^4 &= \left\{ (x, y): \frac{\alpha_2}{C_A} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{\alpha_1}{C_A}, y = \frac{\alpha_1 x}{2C_A x - \alpha_2} \right\}, \\ K_A^5 &= \left\{ (x, y): 0 \leq x \leq \frac{\alpha_2}{C_A}, \frac{\alpha_1}{C_A} \leq y \leq 1, y = -\frac{(C_A - \alpha_1)(1 - x)}{2C_A(1 - x) - (C_A - \alpha_2)} + 1 \right\}. \end{aligned}$$

Приведем аналитическое описание функции цены w_A [19].

Утверждение 1. При $C_A > 0$ функция цены $(x, y) \mapsto w_A(x, y)$ определяется как

$$w_A(x, y) = \psi_A^i(x, y), \quad \text{если } (x, y) \in E_A^i, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (3.8)$$

Здесь области E_A^i , $i = 1, \dots, 4$, задаются следующим образом:

$$E_A^1 = \left\{ (x, y): \frac{\alpha_2}{C_A} \leq x \leq 1, \frac{\alpha_1 x}{2C_A x - \alpha_2} \leq y \leq \frac{\alpha_1}{\alpha_2} x \right\},$$

$$\begin{aligned}
E_A^2 &= \left\{ (x, y): 0 \leq x \leq \frac{\alpha_2}{C_A}, -\frac{(C_A - \alpha_1)}{(C_A - \alpha_2)}(1 - x) + 1 \leq y \leq -\frac{(C_A - \alpha_1)(1 - x)}{2C_A(1 - x) - (C_A - \alpha_2)} + 1 \right\}, \\
E_A^3 &= E_A^{31} \cup E_A^{32}, \\
E_A^{31} &= \left\{ (x, y): \frac{\alpha_2}{C_A} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{\alpha_1 x}{2C_A x - \alpha_2} \right\}, \\
E_A^{32} &= \left\{ (x, y): 0 \leq x \leq \frac{\alpha_2}{C_A}, -\frac{(C_A - \alpha_1)(1 - x)}{2C_A(1 - x) - (C_A - \alpha_2)} + 1 \leq y \leq 1 \right\}, \\
E_A^4 &= E_A^{41} \cup E_A^{42}, \\
E_A^{41} &= \left\{ (x, y): \frac{\alpha_2}{C_A} \leq x \leq 1, \frac{\alpha_1}{\alpha_2} x \leq y \leq 1 \right\}, \\
E_A^{42} &= \left\{ (x, y): 0 \leq x \leq \frac{\alpha_2}{C_A}, 0 \leq y \leq -\frac{(C_A - \alpha_1)}{(C_A - \alpha_2)}(1 - x) + 1 \right\}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Доказательство. Краевое условие очевидно выполнено, так как функции $\psi_A^i, i = 1, \dots, 4$, являются нижними огибающими конечного решения $w_1(T, t, x, y)$, и, следовательно,

$$\psi_A^i(x, y) \leq \phi_i(t, x, y) \leq g_A(x, y), \quad i = 1, \dots, 4, \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1].$$

Проверим, что дифференциальные неравенства (3.6), (3.7) выполняются для функции w_A . Можно доказать, что функции $\psi_A^i, i = 1, 2, 4$, удовлетворяют уравнению Гамильтона — Якоби во внутренних точках областей $E_A^i, i = 1, 2, 4$. Можно также проверить, что функция ψ_A^3 (3.21) совпадает с краевой функцией g_A и удовлетворяет неравенству

$$-\frac{\partial \psi_A^3}{\partial x}x - \frac{\partial \psi_A^3}{\partial y}y + \max \left\{ 0, \frac{\partial \psi_A^3}{\partial x} \right\} + \min \left\{ 0, \frac{\partial \psi_A^3}{\partial y} \right\} \geq 0$$

во внутренних точках области E_A^3 .

Остается проверить дифференциальные неравенства (3.6), (3.7) на линиях склейки $K_A^j, j = 1, \dots, 5$. Сделаем это, например, на линиях K_A^2, K_A^3 . В точках линии K_A^2 функции ψ_A^1 и ψ_A^4 непрерывно склеиваются. Вычислим частные производные этих функций

$$\frac{\partial \psi_A^1}{\partial x} = \frac{\alpha_1^2 x^2 - \alpha_2^2 y^2}{4C_A x^2 y}, \quad \frac{\partial \psi_A^1}{\partial y} = \frac{\alpha_1^2 x^2 - \alpha_2^2 y^2}{4C_A x y^2 y}, \quad \frac{\partial \psi_A^4}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi_A^4}{\partial y} = 0.$$

Легко заметить, что эти производные равны нулю на линии K_A^2 :

$$\frac{\partial \psi_A^1}{\partial x} = \frac{\partial \psi_A^4}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi_A^1}{\partial y} = \frac{\partial \psi_A^4}{\partial y} = 0.$$

Другими словами, функции ψ_A^1 и ψ_A^4 гладко склеиваются вместе. Следовательно, неравенства (3.6), (3.7) на K_A^2 превращаются в равенство. Аналогично можно доказать гладкое склеивание функций ψ_A^2, ψ_A^4 на линии K_A^3 .

Рассмотрим линию K_A^4 , на которой функции ψ_A^1 и ψ_A^3 склеены вместе. Можно проверить, что склеивание гладкое, так как для частных производных на линии K_A^4 имеем соотношения

$$\frac{\partial \psi_A^1}{\partial x} = \frac{\partial \psi_A^3}{\partial x} = \frac{\alpha_1(\alpha_2 - C_A x)}{2C_A x - \alpha_2}, \quad \frac{\partial \psi_A^1}{\partial y} = \frac{\partial \psi_A^3}{\partial y} = C_A x - \alpha_2.$$

Подобным способом можно проверить гладкость функции w_A на линии K_A^5 .

Вдоль линии K_A^1 склеиваются функции ψ_A^3 и ψ_A^4 . Их производные на K_A^1 определяются как

$$\frac{\partial \psi_A^3}{\partial x} = C_A y - \alpha_1, \quad \frac{\partial \psi_A^4}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi_A^3}{\partial y} = \frac{\partial \psi_A^4}{\partial y} = 0.$$

Отметим, что неравенство (3.7) на линии K_A^1 проверять не надо, так как выполнены соотношения $w_A = \psi_A^3 = \psi_A^4 = g_A$. Необходимо проверить только условие (3.6). Можно проверить, что в окрестности точек линии K_A^1 функция w_A задается операцией минимума

$$w_A(x, y) = \min\{\psi_A^3(x, y), \psi_A^4(x, y)\}.$$

Следовательно, для точек $(x, y) \in K_A^1$ получим

$$\begin{aligned} \partial w_A(x, y)|(h_1, h_2) &= \min\{0, (C_A y - \alpha_1)h_1\}, \\ D_* w_A(x, y)|(s_1, s_2) &= \begin{cases} 0, & s_1 = \lambda(C_A y - \alpha_1), s_2 = 0, \\ -\infty & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь $0 \leq \lambda \leq 1$. Для точек $(x, y) \in K_A^1$ и векторов $s = (s_1, s_2)$, $s_1 = \lambda(C_A y - \alpha_1)$, $s_2 = 0$ гамильтониан $H(x, y, s)$ определяется соотношением

$$H(x, y, s) = -s_1 x + \max\{0, s_1\} = \begin{cases} -s_1 x, & s_1 \leq 0, \\ s_1(1 - x) & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (3.11)$$

Очевидно, что для этих величин гамильтониан (3.11) больше или равен нижней сопряженной производной (3.10). Следовательно, неравенство (3.6) на линии K_A^1 доказано.

Таким образом, мы доказали, что функция w_A (3.8), (3.9) является функцией цены в игре с мультитерминальным функционалом. $\square$

З а м е ч а н и е 3. В области E_A^4 выполняются следующие соотношения

$$g_A(x, y) \geq w_A(x, y) = v_A.$$

З а м е ч а н и е 4. Позиционная стратегия $U_A^0 = u_A^0(x, y)$, соответствующая функции цены w_A (см. соотношения (4.1)), обеспечивает выживаемость траекторий $(x(\cdot), y(\cdot))$ системы (1.1) в области E_A^4 .

З а м е ч а н и е 5. При $C_A < 0$ функция цены $(x, y) \mapsto w_A(x, y)$ определяется аналогично.

З а м е ч а н и е 6. Для матрицы B функция цены w_B и области E_B могут быть построены аналогично.

4. Гибкие “позитивные” управления по принципу обратной связи

Дадим описание гибких “позитивных” управлений по принципу обратной связи $u_A^0 = u_A^{\text{fl}} = u_A^{\text{fl}}(x, y)$, которые решают задачу гарантирующей максимизации для мультитерминального функционала $G_A(x_1(\cdot), y_1(\cdot))$ (3.1) на траекториях $(x_1(\cdot), y_1(\cdot))$ системы (1.1). Это управление строится по принципу “экстремального сдвига” в направлении градиента (обобщенного градиента) функции цены w_A .

Отметим, что частная производная $\partial w_A / \partial x$ функции цены w_A меняет свой знак на линиях K_A^2 и K_A^3 . Поэтому оптимальное управление по принципу обратной связи u_A^0 имеет следующую структуру (см., например, [2]). Управляющий параметр $u_A^{\text{fl}} = u_A^{\text{fl}}(x, y)$ равен нулю, если текущая позиция $(x, y) = (x_1(t), y_1(t))$ лежит справа от линии $K_A = K_A^2 \cup K_A^3$, равен единице, если текущая позиция лежит слева от этой линии, и может принимать произвольные значения в точках линии K_A . А именно, если $C_A > 0$, то

$$u_A^0 = u_A^{\text{fl}} = u_A^{\text{fl}}(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in D_A^1, \\ 1, & (x, y) \in D_A^2, \\ [0, 1], & (x, y) \in K_A. \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned}
D_A^1 &= D_A^{11} \cup D_A^{12}, \\
D_A^{11} &= \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y < \frac{\alpha_1}{\alpha_2} x, \quad y \geq \frac{\alpha_1}{C_A} \right\}, \\
D_A^{12} &= \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y < -\frac{(C_A - \alpha_1)}{(C_A - \alpha_2)}(1 - x) + 1, \quad y \leq \frac{\alpha_1}{C_A} \right\}, \\
D_A^2 &= D_A^{21} \cup D_A^{22}, \\
D_A^{21} &= \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y > \frac{\alpha_1}{\alpha_2} x, \quad y \geq \frac{\alpha_1}{C_A} \right\}, \\
D_A^{22} &= \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y > -\frac{(C_A - \alpha_1)}{(C_A - \alpha_2)}(1 - x) + 1, \quad y \leq \frac{\alpha_1}{C_A} \right\}, \\
K_A &= K_A^2 \cup K_A^3, \\
K_A^2 &= \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} x, \quad y \geq \frac{\alpha_1}{C_A} \right\}, \\
K_A^3 &= \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y = -\frac{(C_A - \alpha_1)}{(C_A - \alpha_2)}(1 - x) + 1, \quad y \leq \frac{\alpha_1}{C_A} \right\}.
\end{aligned}$$

Если $C_A < 0$, то гибкое “позитивное” управление по принципу обратной связи u_A^{Π} имеет аналогичную структуру.

Задача гарантированной оптимизации мультитерминального функционала $G_B(x_2(\cdot), y_2(\cdot))$ для второй коалиции решается аналогично.

Оптимальные управления $u_A^{\Pi}(x, y)$ (4.1) гарантируют, что текущий выигрыш первой коалиции становится при длительном сроке не хуже, чем цена $v_A = D_A/C_A$ матричной игры с нулевой суммой для матрицы A . Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Для любого начального положения $(x_0, y_0) \in [0, 1] \times [0, 1]$ и любой траектории

$$(x_1(\cdot), y_1(\cdot)) \in X(x_0, y_0, u_A^{\Pi}), \quad x_1(t_0) = x_0, \quad y_1(t_0) = y_0, \quad t_0 = 0,$$

генерированной оптимальным управлением $u_A^{\Pi} = u_A^{\Pi}(x, y)$, существует конечное время $t_s \in [0, T_A]$

$$T_A = \ln \left(\max \left\{ \frac{C_A}{\alpha_2}, \frac{C_A}{C_A - \alpha_2} \right\} \right),$$

в которое траектория $(x_1(\cdot), y_1(\cdot))$ входит в область E_A^4 (см. (3.9))

$$(x_1(t_s), y_1(t_s)) \in E_A^4,$$

где функция цены w_A равна значению v_A матричной игры

$$w_A(x_1(t_s), y_1(t_s)) = v_A,$$

и остается в области E_A^4 на интервале времени $[t_s, +\infty)$ (и, следовательно, на интервале времени $[T_A, +\infty)$). Поэтому в соответствии с определением функции цены w_A имеет место следующее неравенство:

$$g_A(x_1(t), y_1(t)) \geq v_A, \quad t \geq t_s,$$

и, в частности,

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} g_A(x_1(t), y_1(t)) \geq v_A.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что область E_A^4 (см. (3.9)) имеет непустые пересечения со всеми линиями L_λ , $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$L_\lambda = \{(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) : y = \lambda\}.$$

Следовательно, любая возможная траектория $(x_1(\cdot), y_1(\cdot))$, сгенерированная оптимальным управлением с обратной связью u_A^{fl} (величина которого равна нулю или единице), пересекает эту область E_A^4 . Поэтому проекция скорости на линиях L_λ для таких траекторий не равна нулю и сохраняет знак до момента пересечения траектории с областью E_A^4 . $\square$

Аналогичное утверждение может быть доказано для игры с матрицей B .

Утверждение 3. Пересечение E^0 множеств E_A^4 и E_B^4 непусто, т. е. $E^0 = E_A^4 \cap E_B^4 \neq \emptyset$, и, следовательно, оптимальные стратегии $u_A^{\text{fl}}, v_B^{\text{fl}}$ генерируют траекторию $(x^{\text{fl}}(\cdot), y^{\text{fl}}(\cdot))$, которая входит в пересечение E^0 и остается в нем на интервале времени $[T^0, +\infty)$, $T^0 = \max\{T_A, T_B\}$. В множестве E^0 выполняются неравенства

$$g_A(x^{\text{fl}}(t), y^{\text{fl}}(t)) \geq v_A, \quad g_B(x^{\text{fl}}(t), y^{\text{fl}}(t)) \geq v_B, \quad t \in [T^0, +\infty).$$

Поэтому множество E^0 можно назвать благоприятной областью для обеих коалиций.

5. Равновесие по Нэшу с гибкими “позитивными” управлениями

Построим пару управлений для равновесия по Нэшу, склеив вместе гибкие “позитивные” управления $u_A^0 = u_A^{\text{fl}}, v_B^0 = v_B^{\text{fl}}$ и “наказывающие” управления $u_B^0 = u_B^{\text{cl}}, v_A^0 = v_A^{\text{cl}}$. Выберем начальное положение $(x_0, y_0) \in [0, 1] \times [0, 1]$ и параметр точности $\varepsilon > 0$. Зафиксируем траекторию $(x^{\text{fl}}(\cdot), y^{\text{fl}}(\cdot)) \in X(x_0, y_0, u_A^{\text{fl}}(\cdot), v_B^{\text{fl}}(\cdot))$, генерируемую гибкими “позитивными” управлениями u_A^{fl} и v_B^{fl} . Возьмем момент времени $T_\varepsilon > 0$ такой, что

$$g_A(x^{\text{fl}}(t), y^{\text{fl}}(t)) > J_A^-(x^{\text{fl}}(\cdot), y^{\text{fl}}(\cdot)) - \varepsilon, \quad g_B(x^{\text{fl}}(t), y^{\text{fl}}(t)) > J_B^-(x^{\text{fl}}(\cdot), y^{\text{fl}}(\cdot)) - \varepsilon, \quad t \in [T_\varepsilon, +\infty).$$

Обозначим символом $u_A^{fl, \varepsilon}(t): [0, T_\varepsilon] \rightarrow [0, 1]$, $v_B^{fl, \varepsilon}(t): [0, T_\varepsilon] \rightarrow [0, 1]$ пошаговые реализации стратегий $u_A^{\text{fl}}, v_B^{\text{fl}}$ такие, что соответствующее пошаговое движение $(x_\varepsilon^{\text{fl}}(\cdot), y_\varepsilon^{\text{fl}}(\cdot))$ удовлетворяет условию

$$\max_{t \in [0, T_\varepsilon]} \|(x^{\text{fl}}(t), y^{\text{fl}}(t)) - (x_\varepsilon^{\text{fl}}(t), y_\varepsilon^{\text{fl}}(t))\| < \varepsilon.$$

Применяя конструкцию построения равновесия по Нэшу из [3], получаем следующий результат.

Утверждение 4. Пара управлений $U^0 = u^0(t, x, y, \varepsilon)$, $V^0 = v^0(t, x, y, \varepsilon)$, склеенных вместе гибкими “позитивными” управлениями $u_A^{\text{fl}}, v_B^{\text{fl}}$ и “наказывающими” управлениями $u_B^{\text{cl}}, v_A^{\text{cl}}$,

$$U^0 = u^0(t, x, y, \varepsilon) = \begin{cases} u_A^{fl, \varepsilon}(t), & \|(x, y) - (x_\varepsilon^{\text{fl}}(t), y_\varepsilon^{\text{fl}}(t))\| < \varepsilon, \\ u_B^{\text{cl}}(x, y) & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (5.2)$$

$$V^0 = v^0(t, x, y, \varepsilon) = \begin{cases} v_B^{fl, \varepsilon}(t), & \|(x, y) - (x_\varepsilon^{\text{fl}}(t), y_\varepsilon^{\text{fl}}(t))\| < \varepsilon, \\ v_A^{\text{cl}}(x, y) & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (5.3)$$

составляет динамическое ε -равновесие по Нэшу.

Напомним, что траектория $(x_\varepsilon^{\text{fl}}(\cdot), y_\varepsilon^{\text{fl}}(\cdot))$ является ядром динамического равновесия по Нэшу. Поэтому ее можно назвать равновесной траекторией. Она сгенерирована гарантирующими управлениями u_A^{fl} и v_B^{fl} и обеспечивает лучшие значения обоих функционалов выигрыша, чем статическое равновесие по Нэшу, порожденное гарантирующими стратегиями.

Представляет интерес вопрос о качественном поведении траекторий, сгенерированных гибкими “позитивными” управлениями, которые формируют базис для динамического равновесия по Нэшу (5.2), (5.3). Из полученных выше результатов вытекает следующее утверждение.

Утверждение 5. Значения функционалов выигрыша J_A^-, J_B^- на произвольной траектории $(x^{\Pi}(\cdot), y^{\Pi}(\cdot))$, генерированной гибким “позитивным” управлением по принципу обратной связи u_A^{Π}, v_B^{Π} , не хуже, чем значения этих функционалов на любой траектории, сходящейся к статическому равновесию по Нэшу $(x_B, y_A) = (\beta_2/C_B, \alpha_1/C_A)$, при котором компоненты коалиционных распределений являются неблагоприятными для противоположной коалиции. Более того, траектории $(x^{\Pi}(\cdot), y^{\Pi}(\cdot))$ попадают в благоприятную область E^0 и остаются в ней на бесконечном интервале времени. Возможны следующие варианты качественного поведения траектории $(x^{\Pi}(\cdot), y^{\Pi}(\cdot))$ в области E^0 :

- она может сходиться к пересечению линий K_A, K_B ;
- она может приближаться к точкам, расположенным на границе квадрата (в случае, когда пересечение линий K_A, K_B пусто);
- она может приближаться к неантагонистическому статическому равновесию по Нэшу (в случае, когда такое равновесие существует);
- она может просто циркулировать в области E^0 .

6. Примеры равновесных траекторий в эволюционных биматричных играх

Рассмотрим в первом примере матрицы выигрышей двух игроков на финансовом рынке, которые отражают данные по рынкам акций (см. [20]) и облигаций в США (см. [21]). Матрица A отвечает поведению торговцев, которые играют на повышение курса и называются “быками”. Матрица B соответствует поведению торговцев, которые играют на понижение курса и называются “медведями”. Параметры матриц означают доходность акций и облигаций, выраженные в виде процентных ставок. Приведем матрицы A, B и их основные “игровые” параметры:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 1.75 & 3 \end{pmatrix}, & B &= \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 10 & 0.5 \end{pmatrix}, \\
 C_A &= a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = 11.25, \\
 \alpha_1 &= a_{22} - a_{12} = 3, & \alpha_2 &= a_{22} - a_{21} = 1.25, \\
 x_A &= \frac{\alpha_2}{C_A} = 0.11, & y_A &= \frac{\alpha_1}{C_A} = 0.27, \\
 C_B &= b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = -17.5, \\
 \beta_1 &= b_{22} - b_{12} = -2.5, & \beta_2 &= b_{22} - b_{21} = -9.5, \\
 x_B &= \frac{\beta_2}{C_B} = 0.54, & y_B &= \frac{\beta_1}{C_B} = 0.14.
 \end{aligned}$$

На рис. 1 показаны ситуация равновесия по Нэшу NE , линии переключения KA и KB , точка рыночного равновесия в их пересечении ME , начальные точки I_1, I_2, I_3 и равновесные траектории T_1, T_2, T_3 , сходящиеся к рыночному равновесию. Видно, что новая точка равновесия ME существенно отличается от точки статического равновесия по Нэшу NE и значение обоих функционалов выигрыша g_A и g_B в новой точке лучше, чем в старой.

Во втором примере рассматривается ситуация координационной игры. Напомним, что в таких играх функции выигрышей игроков не являются прямо противоположными и подразумевают скоординированные решения. Например, такая ситуация описывает процесс инвестирования в два альтернативных проекта.

Пусть выбор первой строки первым игроком означает инвестирование в первый проект, а второй строки — во второй проект. При этом выбор первого столбца вторым игроком означает инвестирование им в первый проект, а второго столбца — во второй проект. Матрицы выигрышей первого и второго игрока задаются следующими параметрами:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 6 & 20 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

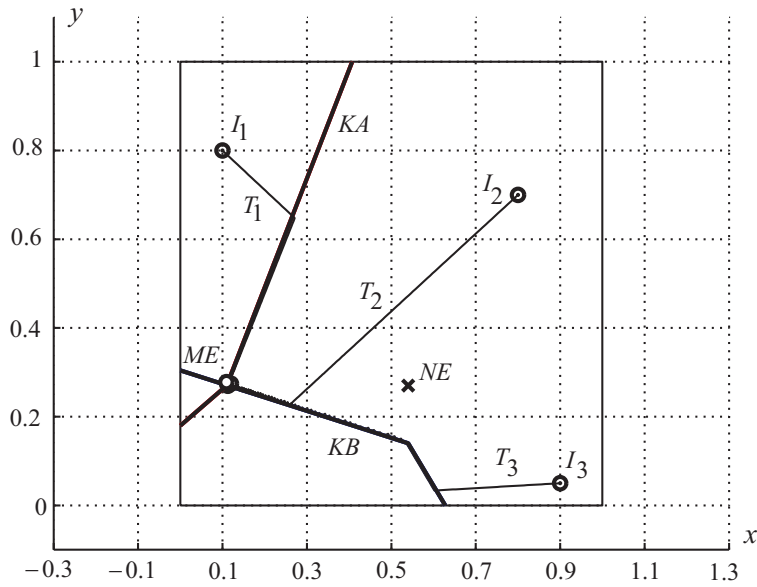


Рис. 1. Траектории рыночного равновесия в случае одной ситуации по Нэшу.

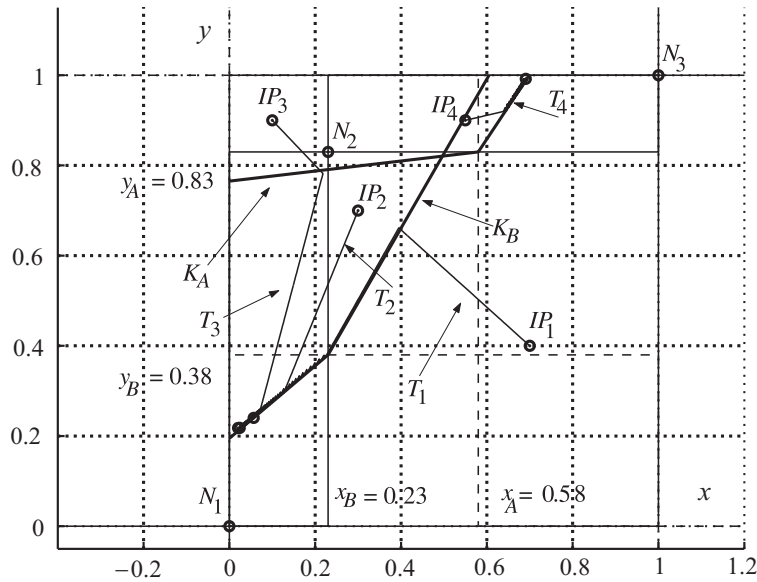


Рис. 2. Траектории рыночного равновесия в случае трех точек Нэша.

Значения параметров этих матриц предполагают, что оба игрока значительно выигрывают, если вкладываются в один проект, и ничего не выигрывают, или выигрывают мало, если вкладываются в разные проекты.

Параметры статической биматричной игры определяются соотношениями

$$C_A = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = 24,$$

$$\alpha_1 = a_{22} - a_{12} = 20, \quad \alpha_2 = a_{22} - a_{21} = 14,$$

$$x_A = \frac{\alpha_2}{C_A} = 0.58, \quad y_A = \frac{\alpha_1}{C_A} = 0.83,$$

$$C_B = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = 26,$$

$$\beta_1 = b_{22} - b_{12} = 10, \quad \beta_2 = b_{22} - b_{21} = 6,$$

$$x_B = \frac{\beta_2}{C_B} = 0.23, \quad y_B = \frac{\beta_1}{C_B} = 0.38.$$

На рис. 2 показан случай с тремя ситуациями равновесия по Нэшу $N1$, $N2$, $N3$. В этом случае, в отличие от предыдущего, линии переключения KA и KB сопряжены с одной и той же парой вершин квадрата с координатами $(0, 0)$ и $(1, 1)$. Точка пересечения линий переключения имеется, но она не является точкой притяжения равновесных траекторий. Показаны равновесные траектории T_1, T_2, T_3, T_4 , которые стартуют в начальных точках I_1, I_2, I_3, I_4 , лежащих в различных начальных областях. Их поведение можно охарактеризовать следующим образом. Они встречаются с линиями переключения KA или KB , а затем скользят вдоль них до тех пор, пока не достигнут границ квадрата, где заканчивают движение.

Значения функционалов выигрыша g_A и g_B в точках окончания равновесных траекторий T_1, T_2, T_3, T_4 лучше, чем значения этих функционалов в точке статического равновесия $N2$. Что же касается значений функционалов в точках статического равновесия $N1, N3$, то здесь нет однозначного доминирования в сравнении с точками окончания равновесных траекторий T_1, T_2, T_3, T_4 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. **Клейменов А.Ф.** Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург, Наука, 1993. 185 с.
4. **Кряжковский А.В., Осипов Ю.С.** О дифференциально-эволюционных играх // Тр. МИАН. 1995. Т. 211. С. 257–287.
5. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 390 с.
6. **Friedman D.** Evolutionary games in economics, *Econometrica*. 1991. Vol. 59, no. 3. P. 637–666.
7. **Intriligator M.** Mathematical optimization and economic theory. N. Y.: Prentice-Hall, 1971. 529 p.
8. **Hofbauer J., Sigmund K.** The theory of evolution and dynamic systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press., 1988. 341 p.
9. **Basar T., Olsder G.J.** Dynamic noncooperative game theory. London, N. Y.: Acad. Press, 1982. 430 p.
10. **Воробьев Н.Н.** Теория игр для экономистов-кибернетиков. М.: Наука, 1985. 272 с.
11. **Tarasyev A.M.** A differential model for a 2×2 evolutionary game dynamics. Laxenburg, 1994. 32 p. (IIASA Working Paper WP-94-63.)
12. **Субботин А.И.** Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.: Наука, 1991. 214 с.
13. **Crandall M.G., Lions P.L.** Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1983. Vol. 277, no. 4. P. 1–42.
14. **Kryazhinskii A.V., Tarasyev A.M.** Equilibrium and guaranteeing solutions in evolutionary nonzero sum games. Laxenburg, 1998. 52 p. (IIASA Interim Report IR-98-003).
15. **Субботин А.И., Тарасьев А.М.** Сопряженные производные функции цены дифференциальной игры // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283, № 3. С. 559–564.
16. **Aubin J.-P.** A survey of viability theory // *SIAM J. Control Optim.* 1990. Vol. 28, no. 4. P. 749–788.
17. **Красовский Н.А., Тарасьев А.М.** Поиск точки максимума векторного критерия с декомпозиционными свойствами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 167–182.
18. **Красовский Н.А., Тарасьев А.М.** Декомпозиционный алгоритм поиска равновесия в динамической игре // Мат. теория игр и ее прил. 2011. Т. 3, № 4. С. 49–88.
19. **Tarasyev A.M.** Analytic solutions for evolutionary nonzero sum games // *Dynamics and Control* / eds. G. Leitmann, F.E. Udwardia and A.V. Kryazhinskii. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 1999. P. 139–149. (Stability and Control: Theory, Methods, and Applications; vol. 9).

20. CNN Money [e-resource]. URL: <http://money.cnn.com/> .
21. Рынок Форекс [Электронный ресурс]: Графики доходности облигаций.
URL: <http://www.fxstreet.ru.com/charts/bond-yield/> .

Красовский Николай Андреевич
аспирант

Поступила 27.02.2014

Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина
e-mail: nkrasovskiy@gmail.com

Кряжимский Аркадий Викторович
академик РАН

главный науч. сотрудник

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
Международный институт прикладного системного анализа (IIASA)
e-mail: kryazhim@gmail.com, kryazhim@iiasa.ac.at

Тарасьев Александр Михайлович

д-р физ.-мат. наук

зав. сектором

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
профессор

Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина,
Международный институт прикладного системного анализа (IIASA)
e-mail: tam@imm.uran.ru, tarasiev@iiasa.ac.at

УДК 517.977

ПРОГРАММНЫЙ КРИТЕРИЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ПОЗИЦИОННОГО НАВЕДЕНИЯ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ. ЛИНЕЙНЫЕ УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ¹

А. В. Кряжимский, Н. В. Стрелковский

Метод пакетов программ представляет собой инструмент проверки разрешимости задач гарантирующего позиционного управления в условиях неполной информации о наблюдаемых состояниях. В настоящей работе метод конкретизируется применительно к задаче о гарантированном позиционном наведении линейной управляемой системы на выпуклое целевое множество в предписанный момент времени. Наблюдаемый сигнал о состояниях системы предполагается линейным, множество ее допустимых начальных состояний — конечным. Устанавливается эквивалентность рассматриваемой задачи задаче о программном наведении расширенной линейной управляемой системы на расширенное выпуклое целевое множество. С помощью теоремы об отделимости выпуклых множеств выписывается критерий разрешимости, сводящийся к решению конечномерной задачи оптимизации. Рассматривается иллюстрирующий пример.

Ключевые слова: управление, неполная информация, линейные системы.

A. V. Kryazhimskiy, N. V. Strelkovskiy. An open-loop criterion for the solvability of a closed-loop guidance problem with incomplete information. Linear control systems.

The method of open-loop control packages is a tool for stating the solvability of guaranteed closed-loop control problems under incomplete information on the observed states. In this paper, the method is specified for the problem of guaranteed closed-loop guidance of a linear control system to a convex target set at a prescribed point in time. It is assumed that the observed signal on the system's states is linear and the set of its admissible initial states is finite. It is proved that the problem under consideration is equivalent to the problem of open-loop guidance of an extended linear control system to an extended convex target set. Using a separation theorem for convex sets, a solvability criterion is derived, which reduces to a solution of a finite-dimensional optimization problem. An illustrative example is considered.

Keywords: control, incomplete information, linear systems.

Введение

Настоящая работа следует в русле теории позиционного управления, развитой школой Н. Н. Красовского [1–10] и посвящена изучению метода пакетов программ [11–13] — инструмента анализа задач гарантирующего позиционного управления в условиях неполной информации о состояниях управляемой системы. Метод восходит к технике неупреждающих стратегий (квазистратегий) из теории дифференциальных игр [8; 14–17], в его основе — утверждение об эквивалентности задач гарантирующего управления, поставленных в классе позиционных стратегий и в классе пакетов программ, интерпретируемых как идеализированные процедуры управления. Пакет программ — это семейство программных управлений, параметризованное допустимыми начальными состояниями и обладающее свойством неупреждаемости по отношению к реализациям неполного сигнала о наблюдаемых состояниях. Последнее свойство имеет, вообще говоря, характер функционального ограничения и в общем случае не позволяет трактовать пакет программ как объект, идентичный программному управлению. Тем не менее пакеты программ структурно значительно ближе к программным управлениям, чем позиционные стратегии, и анализ разрешимости задачи управления в классе пакетов программ в принципе близок к анализу разрешимости задачи о программном управлении — простейшей с точки зрения теории позиционного управления.

¹Работа поддержана РФФИ (проект 14-11-00539).

В данной работе мы выделяем случай, когда задача об управлении в классе пакетов программ (эквивалентная задаче о гарантирующем позиционном управлении) равносильна задаче о программном управлении. Случай характеризуется линейностью управляемой системы, линейностью наблюдаемого сигнала и конечностью множества допустимых начальных состояний системы. Для определенности мы рассматриваем задачу о гарантированном наведении системы на выпуклое целевое множество в фиксированный момент времени. Упомянутая выше задача о программном управлении ставится для расширенной линейной управляемой системы, которая составлена из экземпляров исходной системы, параметризованных допустимыми начальными состояниями. Каждая система-экземпляр исходит из соответствующего допустимого начального состояния и управляется по отвечающей этому начальному состоянию программе из выбранного пакета программ, трактуемого как расширенное программное управление. Свойство неупреждаемости пакета программ при этом трансформируется в стандартные выпуклые (нестационарные) поточечные ограничения на расширенные управления. Тем самым расширенная задача сводится к хорошо изученной задаче о наведении линейной системы на выпуклое целевое множество в классе программных управлений с выпуклыми поточечными ограничениями. Для этой задачи с помощью теоремы об отделимости выпуклых множеств выписывается критерий разрешимости, сводящийся к решению конечномерной задачи оптимизации.

В разд. 1 вводятся основная задача о гарантированном позиционном наведении и сопутствующая ей задача о наведении в классе пакетов программ (задача пакетного наведения). В разд. 2 дается описание пакетов программ, позволяющее трактовать их как расширенные программные управления с поточечными ограничениями. В разд. 3 вводится задача о программном наведении расширенной системы (расширенная задача наведения) и устанавливается ее эквивалентность задаче пакетного наведения. В разд. 4 выводится критерий разрешимости расширенной задачи наведения. В разд. 5 рассматривается иллюстрирующий пример.

Всюду в работе $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в конечномерном евклидовом пространстве; элементы последнего считаются векторами-столбцами.

1. Задача позиционного наведения с неполной информацией.

Задача пакетного наведения

Рассмотрим управляемую линейную динамическую систему, описываемую обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u + c(t); \quad (1.1)$$

здесь t — время, меняющееся на ограниченном отрезке $[t_0, \vartheta]$ ненулевой длины, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы в момент времени t , $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — значение управляющей функции в этот момент, $A(\cdot), B(\cdot), c(\cdot)$ — непрерывные функции, определенные на $[t_0, \vartheta]$ и принимающие значения соответственно в нормированном пространстве $(n \times n)$ -матриц, нормированном пространстве $(n \times m)$ -матриц и пространстве $\mathbb{R}^n$. Пусть $P \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклый компакт, описывающий *мгновенный ресурс* управления. Под *программным управлением (программой)* понимаем, как обычно, всякую измеримую по Лебегу функцию $u(\cdot): [t_0, \vartheta] \rightarrow P$. Множество всех программ обозначим $\mathcal{U}$. Для всякой точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и всякой программы $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ решение (по Каратеодори) дифференциального уравнения (1.1), определенное на отрезке $[t_0, \vartheta]$ и удовлетворяющее начальному условию $x_0(t_0) = x_0$, называем *движением* системы из начального состояния x_0 под действием программы $u(\cdot)$; будем обозначать его $x(\cdot | x_0, u(\cdot))$.

Пусть задано конечное множество $X_0 \subset \mathbb{R}^n$. Будем считать, что управляющей стороне априори известно, что начальное состояние системы содержится в X_0 , но само это начальное состояние не известно. Будем называть X_0 множеством *допустимых начальных состояний*. Пусть также задано выпуклое замкнутое *целевое* множество $M \subset \mathbb{R}^n$. Пусть, наконец, задана

непрерывная функция $Q(\cdot)$ на $[t_0, \vartheta]$, принимающая значения в нормированном пространстве матриц размерности $q \times n$ (*матрица-функция наблюдения*).

Стоящая перед управляющей стороной *задача гарантированного позиционного наведения* состоит в формировании такой программы управления, которая гарантирует попадание состояния $x(\vartheta)$ системы в конечный момент ϑ в заранее заданную сколь угодно малую окрестность целевого множества M . В процессе движения управляющая сторона формирует искомую программу позиционно (по принципу обратной связи), получая в каждый текущий момент t времени сигнал $y(t) = Q(t)x(t)$ о состоянии $x(t)$ системы в этот момент. Формально, решение задачи ищется в классе позиционных стратегий управления с памятью. В соответствии со стандартным формализмом теории гарантирующего управления позиционная стратегия управления с памятью позволяет управляющей стороне корректировать значения управляющей программы $u(\cdot)$ в заранее заданные моменты $t_0 < t_1 < \dots < t_s = \vartheta$. В каждый момент t_i ($i = 0, \dots, s-1$) значения $u(t)$ управляющей программы для $t \in [t_i, t_{i+1})$ определяются в зависимости от истории $t \mapsto y(t)$ наблюдения на $[t_0, t_i]$ и истории $t \mapsto u(t)$ управления на $[t_0, t_i]$ (при $i = 0$ история управления отсутствует). Задача гарантированного позиционного наведения состоит, таким образом, в том, чтобы по произвольному наперед заданному $\varepsilon > 0$ выбрать такую позиционную стратегию управления с памятью, что, каково бы ни было начальное состояние x_0 системы из множества X_0 допустимых начальных состояний, движение $x(\cdot)$ системы, соответствующее выбранной позиционной стратегии и исходящее в момент t_0 из состояния x_0 , в момент ϑ приходит в состояние $x(\vartheta)$, принадлежащее ε -окрестности целевого множества M . Точная постановка задачи (допускающая также наличие малых помех в канале наблюдения) дана в [11; 12]; здесь мы ее не воспроизводим.

В [13] необходимые и достаточные условия разрешимости задачи гарантированного позиционного наведения описаны в терминах программных конструкций — идеализированных пакетов программ [12] и квазипакетов программ [13]. Приведем соответствующие определения, следуя [13].

Введем фундаментальную матрицу $F(\cdot, \cdot)$ однородной системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t).$$

Для каждого $x_0 \in X_0$ будем обозначать

$$g_{x_0}(t) = Q(t)F(t, t_0)x_0 \quad (t \in [t_0, \vartheta]);$$

функцию $g_{x_0}(\cdot)$ будем называть *однородным сигналом*, соответствующим допустимому начальному состоянию x_0 . Однородный сигнал, соответствующий какому-либо допустимому начальному состоянию, будем называть просто *однородным сигналом*. Множество всех допустимых начальных состояний x_0 , соответствующих однородному сигналу $g(\cdot)$ до момента времени $\tau \in [t_0, \vartheta]$, обозначим $X_0(\tau|g(\cdot))$; таким образом,

$$X_0(\tau|g(\cdot)) = \{x_0 \in X_0 : g(\cdot)|_{[t_0, \tau]} = g_{x_0}(\cdot)|_{[t_0, \tau]}\}; \quad (1.2)$$

здесь и далее $g(\cdot)|_{[t_0, \tau]}$, где $\tau \in [t_0, \vartheta]$, — сужение однородного сигнала $g(\cdot)$ на отрезок $[t_0, \tau]$.

З а м е ч а н и е 1. Ясно, что для каждого однородного сигнала $g(\cdot)$ множество $X_0(\tau|g(\cdot))$ сужается при увеличении τ : $X_0(\tau''|g(\cdot)) \subset X_0(\tau'|g(\cdot))$ для всех $\tau', \tau'' \in [t_0, \vartheta]$ таких, что $\tau' \leq \tau''$.

Семейство $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ программ называем *пакетом программ*, если оно удовлетворяет следующему *условию неупреждаемости*: для любых однородного сигнала $g(\cdot)$, момента $\tau \in [t_0, \vartheta]$ и допустимых начальных состояний $x'_0, x''_0 \in X_0(\tau|g(\cdot))$ при всех $t \in [t_0, \tau]$ выполняется равенство $u_{x'_0}(t) = u_{x''_0}(t)$.

З а м е ч а н и е 2. Приведенное выше определение в работе [13] (см. следствие 2.1) выступает в качестве критерия того, что семейство программ, параметризованное допустимыми

начальными состояниями, является идеализированным пакетом программ в смысле определения из [12]. Последнее определение мы для краткости опускаем; также для краткости используем термин “пакеты программ” вместо “идеализированные пакеты программ”.

Говорим, что пакет $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ программ является *наводящим*, если для всякого допустимого начального состояния $x_0 \in X_0$ движение из x_0 , соответствующее программе $u_{x_0}(\cdot)$, принимает значение в момент ϑ в целевом множестве M : $x(\vartheta|x_0, u_{x_0}(\cdot)) \in M$. Если существует наводящий пакет программ, говорим, что *разрешима задача пакетного наведения*.

В [13, теорема 2.1] установлено, что интересующая нас задача гарантированного позиционного наведения разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача пакетного наведения (в [13] последняя задача выступает, как “точная идеализированная задача пакетного наведения”). В связи с этим сосредоточимся на выводе условий разрешимости задачи пакетного наведения.

2. Характеризация пакетов программ

Далее G — множество всех однородных сигналов. Для произвольного однородного сигнала $g(\cdot)$ введем серию обозначений. Введем множество

$$G_0(g(\cdot)) = \left\{ g'(\cdot) \in G : \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (g'(t_0 + \varepsilon) - g(t_0 + \varepsilon)) = 0 \right\}$$

всех однородных сигналов, совпадающих с $g(\cdot)$ в правосторонней окрестности начального момента t_0 , и момент времени

$$\tau_1(g(\cdot)) = \max \left\{ \tau \in (t_0, \vartheta] : \max_{g'(\cdot) \in G_0(g(\cdot))} \max_{t \in (t_0, \tau]} |g'(t) - g(t)| = 0 \right\}$$

назовем *первым моментом расслоения* однородного сигнала $g(\cdot)$.

З а м е ч а н и е 3. Ясно, что если $\tau_1(g(\cdot)) < \vartheta$, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдется однородный сигнал $g'(\cdot) \in G_0(g(\cdot))$ такой, что $g'(t) \neq g(t)$ при некотором $t \in (\tau_1(g(\cdot)), \tau_1(g(\cdot)) + \varepsilon]$.

Если $\tau_1(g(\cdot)) < \vartheta$, введем множество

$$G_1(g(\cdot)) = \left\{ g'(\cdot) \in G_0(g(\cdot)) : \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (g'(\tau_1(g(\cdot)) + \varepsilon) - g(\tau_1(g(\cdot)) + \varepsilon)) = 0 \right\}$$

всех однородных сигналов из $G_0(g(\cdot))$, совпадающих с $g(\cdot)$ в правосторонней окрестности момента $\tau_1(g(\cdot))$ (заметим, что вложение $G_1(g(\cdot)) \subset G_0(g(\cdot))$ с необходимостью строгое), и момент времени

$$\tau_2(g(\cdot)) = \max \left\{ \tau \in (\tau_1(g(\cdot)), \vartheta] : \max_{g'(\cdot) \in G_1(g(\cdot))} \max_{t \in (\tau_1(g(\cdot)), \tau]} |g'(t) - g(t)| = 0 \right\};$$

назовем *вторым моментом расслоения* однородного сигнала $g(\cdot)$. Вообще, если для некоторого номера $i \geq 1$ определены строго убывающая последовательность $G_0(g(\cdot)), \dots, G_{i-1}(g(\cdot))$ множеств однородных сигналов и в случае $i > 1$ строго возрастающая последовательность $\tau_1(g(\cdot)), \dots, \tau_i(g(\cdot))$ моментов из $(t_0, \vartheta]$ (*моментов расслоения* однородного сигнала $g(\cdot)$ от первого до i -го), то введем множество

$$G_i(g(\cdot)) = \left\{ g'(\cdot) \in G_{i-1}(g(\cdot)) : \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (g'(\tau_i(g(\cdot)) + \varepsilon) - g(\tau_i(g(\cdot)) + \varepsilon)) = 0 \right\}$$

всех однородных сигналов из $G_{i-1}(g(\cdot))$, совпадающих с $g(\cdot)$ в правосторонней окрестности момента $\tau_i(g(\cdot))$, и момент времени

$$\tau_{i+1}(g(\cdot)) = \max \left\{ \tau \in (\tau_i(g(\cdot)), \vartheta] : \max_{g'(\cdot) \in G_i(g(\cdot))} \max_{t \in (\tau_i(g(\cdot)), \tau]} |g'(t) - g(t)| = 0 \right\}$$

назовем $(i + 1)$ -м моментом расслоения однородного сигнала $g(\cdot)$. Ввиду конечности множества всех однородных сигналов для каждого однородного сигнала $g(\cdot)$ существует номер $k_{g(\cdot)} \geq 1$ такой, что $\tau_{k_{g(\cdot)}}(g(\cdot)) = \vartheta$; при этом в случае $k_{g(\cdot)} > 1$ выполняются неравенства $t_0 < \tau_1(g(\cdot)) < \dots < \tau_{k_{g(\cdot)}}(g(\cdot))$ и строгие вложения $G_{k_{g(\cdot)}-1}(g(\cdot)) \subset \dots \subset G_0(g(\cdot))$. Наконец, введем множество

$$T(g(\cdot)) = \{\tau_j(g(\cdot)) : j = 1, \dots, k_{g(\cdot)}\}$$

всех моментов расслоения однородного сигнала $g(\cdot)$.

Справедлива следующая характеристика пакетов программ.

Лемма 1. Семейство $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ программ является пакетом программ тогда и только тогда, когда для всякого однородного сигнала $g(\cdot)$, всякого момента $\tau \in T(g(\cdot))$ и всяких начальных состояний $x'_0, x''_0 \in X_0(\tau|g(\cdot))$ при всех $t \in [t_0, \tau]$ выполняется равенство $u_{x'_0}(t) = u_{x''_0}(t)$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть семейство $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ является пакетом программ. Тогда оно удовлетворяет условию неупреждаемости, откуда сразу следует, что оно обладает свойством, указанным в лемме.

Достаточность. Пусть семейство $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ обладает свойством, указанным в лемме. Проверим, что оно удовлетворяет условию неупреждаемости. Возьмем произвольные однородный сигнал $g(\cdot)$, момент $\tau \in (t_0, \vartheta]$ и начальные состояния $x'_0, x''_0 \in X_0(\tau|g(\cdot))$. Поскольку $\tau_{k_{g(\cdot)}}(g(\cdot)) = \vartheta$, множество всех $\bar{\tau} \in T(g(\cdot))$ таких, что $\bar{\tau} \geq \tau$, непусто. Пусть $\tau_i(g(\cdot))$, где $i \in \{1, \dots, k_{g(\cdot)}\}$, — наименьший элемент этого множества. Допустим, $i > 1$. Тогда $\tau > \tau_{i-1}(g(\cdot))$. Отсюда и из того, что $g_{x'_0}(t) = g_{x''_0}(t) = g(t)$ для всех $t \in [t_0, \tau]$, по определению i -го момента $\tau_i(g(\cdot))$ расслоения однородного сигнала $g(\cdot)$, получаем, что $g_{x'_0}(t) = g_{x''_0}(t) = g(t)$ для всех $t \in [t_0, \tau_i(g(\cdot))]$. По предположенному свойству семейства $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ равенство $u_{x'_0}(t) = u_{x''_0}(t)$ выполняется при всех $t \in [t_0, \tau_i(g(\cdot))]$ и, следовательно, при всех $t \in [t_0, \tau]$. В случае $i = 1$ получаем то же, меняя в вышеприведенном рассуждении $\tau_{i-1}(g(\cdot))$ на t_0 . Таким образом, семейство $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ удовлетворяет условию неупреждаемости. Доказательство закончено.

Уточним характеристику пакетов программ, данную в лемме 1. Введем множество

$$T = \bigcup_{g(\cdot) \in G} T(g(\cdot)) \quad (2.1)$$

всех моментов расслоения всех однородных сигналов. Пусть K — количество элементов множества T и $T = \{\tau_1, \dots, \tau_K\}$, где $\tau_1 < \dots < \tau_K$ (очевидно, $K \leq \sum_{g(\cdot) \in G} k_{g(\cdot)}$). Для каждого $k = 1, \dots, K$ множество

$$\mathcal{X}_0(\tau_k) = \{X_0(\tau_k|g(\cdot)) : g(\cdot) \in G\}$$

назовем *кластерной позицией* в момент τ_k , а каждый его элемент — *кластером начальных состояний* в этот момент.

З а м е ч а н и е 4. Ясно, что для каждого $k = 1, \dots, K$ кластеры начальных состояний в момент τ_k образуют разбиение множества X_0 всех допустимых начальных состояний, т.е.

$$X_0 = \bigcup_{X_{0k} \in \mathcal{X}_0(\tau_k)} X_{0k}, \quad X'_{0k} \cap X''_{0k} = \emptyset \quad (X'_{0k}, X''_{0k} \in \mathcal{X}_0(\tau_k), X'_{0k} \neq X''_{0k}).$$

Из леммы 1 вытекает следующая характеристика пакетов программ.

Лемма 2. Семейство $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ программ является пакетом программ тогда и только тогда, когда для всякого $k = 1, \dots, K$, всякого кластера $X_{0k} \in \mathcal{X}_0(\tau_k)$ и любых начальных состояний $x'_0, x''_0 \in X_{0k}$ выполняется равенство $u_{x'_0}(t) = u_{x''_0}(t)$ при всех $t \in (\tau_{k-1}, \tau_k]$ в случае $k > 1$ и при всех $t \in [t_0, \tau_1]$ в случае $k = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ – пакет программ. Возьмем произвольные $k = 1, \dots, K$, $\bar{X}_{0k} \in \mathcal{X}_0(\tau_k)$ и начальные состояния $x'_0, x''_0 \in \bar{X}_{0k}$. По определению кластерной позиции $\mathcal{X}_0(\tau_k)$ имеем $\bar{X}_{0k} = \bar{X}_0(\tau_k|g(\cdot))$ для некоторого однородного сигнала $g(\cdot)$. Тогда по лемме 1 равенство $u_{x'_0}(t) = u_{x''_0}(t)$ выполняется при всех $t \in [t_0, \tau_k]$, в частности при всех $t \in (\tau_{k-1}, \tau_k]$ в случае $k > 1$.

Достаточность. Пусть семейство $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ программ обладает свойством, указанным в формулировке леммы. Возьмем произвольные однородный сигнал $g(\cdot)$, момента $\tau \in T(g(\cdot))$ и начальные состояния $x'_0, x''_0 \in X_0(\tau|g(\cdot))$. Согласно лемме 1 достаточно показать, что при всех $t \in [t_0, \tau]$ выполняется равенство $u_{x'_0}(t) = u_{x''_0}(t)$. Покажем это. Так как $T(g(\cdot)) \subset T$ (см. (2.1)), то $\tau = \tau_j$ при некотором $j \in \{1, \dots, K\}$. Возьмем произвольное $k \in \{1, \dots, j\}$. В соответствии с замечанием 1 $X_0(\tau|g(\cdot)) = X_0(\tau_j|g(\cdot)) \subset X_0(\tau_k|g(\cdot))$, следовательно, $x'_0, x''_0 \in X_0(\tau_k|g(\cdot))$. По определению кластерной позиции $\mathcal{X}_0(\tau_j)$ имеем $X_0(\tau_k|g(\cdot)) \in \mathcal{X}_0(\tau_j)$. Значит, по свойству семейства $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$, указанному в формулировке леммы, $u_{x'_0}(t) = u_{x''_0}(t)$ при всех $t \in (\tau_{k-1}, \tau_k]$ в случае $k > 1$ и при всех $t \in [t_0, \tau_1]$ в случае $k = 1$. Ввиду произвольности $k \in \{1, \dots, j\}$ заключаем, что при всех $t \in [t_0, \tau_j] = [t_0, \tau]$ выполняется равенство $u_{x'_0}(t) = u_{x''_0}(t)$.

3. Расширенная задача программного наведения

Лемма 2 позволяет трактовать пакеты программ как программные управления, принимающие значения в некотором расширенном пространстве и подчиненные поточечным (геометрическим) ограничениям на значения. Уточним сказанное. Обозначим через $\mathcal{P}$ множество всех семейств $(u_{x_0})_{x_0 \in X_0}$ векторов из мгновенного ресурса управления P . Всякую измеримую функцию $t \mapsto (u_{x_0}(t))_{x_0 \in X_0}: [t_0, \vartheta] \mapsto \mathcal{P}$ будем называть *расширенной программой*; измеримость указанной функции понимается в том смысле, что для каждого $x_0 \in X_0$ функция $t \mapsto u_{x_0}(t): [t_0, \vartheta] \mapsto P$ измерима по Лебегу или, что то же, является программой. Всякое семейство $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ программ будем отождествлять с расширенной программой $t \mapsto (u_{x_0}(t))_{x_0 \in X_0}$; наоборот, всякую расширенную программу $t \mapsto (u_{x_0}(t))_{x_0 \in X_0}$ будем отождествлять с семейством $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ программ. В соответствии с этой договоренностью для всякой расширенной программы $t \mapsto (u_{x_0}(t))_{x_0 \in X_0}$ будем использовать также обозначение $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$.

Для каждого $k = 1, \dots, K$ обозначим через $\mathcal{P}_k$ множество всех семейств $(u_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{P}$ таких, что для всякого кластера $X_{0k} \in \mathcal{X}_0(\tau_k)$ и любых начальных состояний $x'_0, x''_0 \in X_{0k}$ выполняется равенство $u_{x'_0} = u_{x''_0}$. Расширенную программу $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ назовем *допустимой*, если для каждого $k = 1, \dots, K$ выполняется $(u_{x_0}(t))_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{P}_k$ при всех $t \in (\tau_{k-1}, \tau_k]$ в случае $k > 1$ и при всех $t \in [t_0, \tau_1]$ в случае $k = 1$; множество $\mathcal{P}_k$ будем называть *допустимым расширенным ресурсом* (управления) на полуинтервале $(\tau_{k-1}, \tau_k]$ в случае $k > 1$ и на отрезке $[t_0, \tau_1]$ в случае $k = 1$.

Лемма 2 допускает следующую очевидную перефразировку.

Лемма 3. *Расширенная программа $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ является пакетом программ тогда и только тогда, когда она допустима.*

Значения расширенных программ (семейства векторов из множества P) будем далее рассматривать, как элементы подходящего конечномерного гильбертова пространства. Через $\mathcal{R}_j$ ($j = 1, 2, \dots$) будем обозначать конечномерное гильбертово пространство всех семейств $(r_{x_0})_{x_0 \in X_0}$ из $\mathbb{R}^j$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{R}_j}$ вида

$$\langle (r'_{x_0})_{x_0 \in X_0}, (r'_{x_0})_{x_0 \in X_0} \rangle_{\mathcal{R}_j} = \sum_{x_0 \in X_0} \langle r'_{x_0}, r'_{x_0} \rangle$$

$$((r'_{x_0})_{x_0 \in X_0}, (r''_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{R}_j).$$

З а м е ч а н и е 5. Очевидно, при упорядочивании элементов множества X_0 всех допустимых начальных состояний пространство $\mathcal{R}_j$ может быть взаимно однозначным образом, с сохранением значений скалярного произведения, отображено на евклидово пространство $\mathbb{R}^{Nj}$, где N — количество элементов множества X_0 . Таким образом, анализ объектов пространства $\mathcal{R}_j$ может быть легко перенесен в пространство $\mathbb{R}^{Nj}$. Мы таким переносом не пользуемся, избегая осложняющей операции упорядочивания допустимых начальных состояний.

Для каждого непустого множества $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}_j$ ($j = 1, 2, \dots$) стандартным образом введем в рассмотрение его *нижнюю* опорную функцию $\rho^-(\cdot|\mathcal{E}) : \mathcal{R}_j \mapsto \mathbb{R}^1$ и *верхнюю* опорную функцию $\rho^+(\cdot|\mathcal{E}) : \mathcal{R}_j \mapsto \mathbb{R}^1$:

$$\begin{aligned}\rho^-((l_{x_0})_{x_0 \in X_0}|\mathcal{E}) &= \inf_{(e_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{E}} \langle (l_{x_0})_{x_0 \in X_0}, (e_{x_0})_{x_0 \in X_0} \rangle_{\mathcal{R}_j}, \\ \rho^+((l_{x_0})_{x_0 \in X_0}|\mathcal{E}) &= \sup_{(e_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{E}} \langle (l_{x_0})_{x_0 \in X_0}, (e_{x_0})_{x_0 \in X_0} \rangle_{\mathcal{R}_j} \\ &\quad ((l_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{R}_j).\end{aligned}$$

Далее трактуем расширенные программы как отображения из $[t_0, \vartheta]$ в $\mathcal{R}_m$. Ниже нам потребуются выражения для значений нижних опорных функций допустимых расширенных ресурсов $\mathcal{P}_k$ ($k = 1, \dots, K$) в пространстве $\mathcal{R}_m$.

З а м е ч а н и е 6. Легко видеть, что для каждого $k = 1, \dots, K$ множество $\mathcal{P}_k$ есть выпуклый компакт в $\mathcal{R}_m$.

Далее $\rho^-(\cdot|P)$ — нижняя опорная функция мгновенного ресурса управления P в $\mathbb{R}^m$:

$$\rho^-(l|P) = \min_{u \in P} \langle l, u \rangle \quad (l \in \mathbb{R}^m).$$

Лемма 4. Пусть $k \in \{1, \dots, K\}$. Нижняя опорная функция допустимого расширенного ресурса $\mathcal{P}_k$ имеет вид

$$\begin{aligned}\rho^-((l_{x_0})_{x_0 \in X_0}|\mathcal{P}_k) &= \sum_{X_{0k} \in \mathcal{X}_0(\tau_k)} \rho^- \left(\sum_{x_0 \in X_{0k}} l_{x_0} \mid P \right) \\ &\quad ((l_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{R}_m).\end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(l_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{R}_m$. Кластеры $X_{0k} \in \mathcal{X}_0(\tau_k)$ образуют разбиение множества X_0 (см. замечание 4), и $\mathcal{P}_k$ есть по определению множество всех $(u_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{P}$ таких, что для всякого $X_{0k} \in \mathcal{X}_0(\tau_k)$ и любых $x'_0, x''_0 \in X_{0k}$ выполняется $u_{x'_0} = u_{x''_0} = u_{X_{0k}}$. С учетом этого имеем

$$\begin{aligned}\rho^-((l_{x_0})_{x_0 \in X_0}|\mathcal{P}_k) &= \min_{(u_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{P}_k} \sum_{x_0 \in X_0} \langle l_{x_0}, u_{x_0} \rangle \\ &= \min_{(u_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{P}_k} \sum_{X_{0k} \in \mathcal{X}(\tau_k)} \sum_{x_0 \in X_{0k}} \langle l_{x_0}, u_{x_0} \rangle \\ &= \min_{\bar{u}_{X_{0k}} \in P} \sum_{X_{0k} \in \mathcal{X}(\tau_k)} \left\langle \bar{u}_{X_{0k}}, \sum_{x_0 \in X_{0k}} l_{x_0} \right\rangle \\ &= \sum_{X_{0k} \in \mathcal{X}_0(\tau_k)} \rho^- \left(\sum_{x_0 \in X_{0k}} l_{x_0} \mid P \right).\end{aligned}$$

Введем в рассмотрение *расширенную систему*, состоящую из экземпляров системы (1.1), параметризованных допустимыми начальными состояниями; экземпляр, параметризованный

допустимым начальным состоянием x_0 , имеет x_0 в качестве начального состояния и подвержен управляющему воздействию по некоторой программе $u_{x_0}(\cdot)$. Таким образом, расширенная система имеет вид

$$\dot{x}_{x_0}(t) = A(t)x_{x_0}(t) + B(t)u_{x_0}(t) + c(t), \quad x_{x_0}(t_0) = x_0 \\ (x_0 \in X_0).$$

Семейства $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ программ, применяемых для управления расширенной системой, стесним классом всех допустимых расширенных программ. За фазовое пространство расширенной системы примем пространство $\mathcal{R}_n$. В соответствии со сказанным для каждой допустимой расширенной программы $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ под соответствующим ей движением расширенной системы будем понимать функцию $t \mapsto (x(t|x_0, u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0} : [t_0, \vartheta] \mapsto \mathcal{R}_n$, которую не будем отличать от семейства $(x(\cdot|x_0, u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$.

Расширенным целевым множеством назовем множество $\mathcal{M}$ всех семейств $(z_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{R}_n$ таких, что $z_{x_0} \in M$ для всех $x_0 \in X_0$. Будем говорить, что допустимая расширенная программа $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ является *наводящей для расширенной системы*, если соответствующее ей движение расширенной системы в момент ϑ принимает значение в расширенном целевом множестве: $(x(\vartheta|x_0, u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{M}$. Будем говорить, что *разрешима расширенная задача программного наведения*, если существует допустимая расширенная программа, являющаяся наводящей для расширенной системы.

Вернемся к интересующей нас задаче пакетного наведения для исходной системы (1.1). Справедлива следующая теорема — основной результат настоящей работы.

Теорема 1. 1) *Задача пакетного наведения разрешима тогда и только тогда, когда разрешима расширенная задача программного наведения.*

2) *Допустимая расширенная программа является наводящим пакетом программ тогда и только тогда, когда она является наводящей для расширенной системы.*

До к а з а т е л ь с т в о. Утверждение 1 есть прямое следствие утверждения 2. Докажем утверждение 2. По лемме 3 расширенная программа $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ является пакетом программ тогда и только тогда, когда она допустима. По определению допустимая расширенная программа $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ является наводящим пакетом программ тогда и только тогда, когда $x(\vartheta|x_0, u_{x_0}(\cdot)) \in M$ для всех $x_0 \in X_0$ или, что то же, $(x(\vartheta|x_0, u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{M}$; последнее равносильно тому, что допустимая расширенная программа $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ является наводящей для расширенной системы.

4. Критерий разрешимости

В соответствии с теоремой 1 условия разрешимости задачи пакетного наведения (или, что то же, задачи гарантированного позиционного наведения при неполной информации) сводятся к условиям разрешимости расширенной задачи программного наведения. Расширенная система, для которой поставлена расширенная задача программного наведения, имеет большую размерность, чем исходная система (1.1), однако структурно весьма проста: она представляет собой хорошо изученную задачу программного наведения линейной управляемой системы на выпуклое целевое множество в заданный момент времени при выпуклых поточечных (геометрических) ограничениях на программные управления (см. [1]). Условия разрешимости такой задачи получаются применением теоремы об отделимости выпуклых множеств и сводятся к решению конечномерной задачи оптимизации. Ниже мы воспроизведем соответствующую конструкцию применительно к расширенной задаче программного наведения.

Пусть $\mathcal{A}$ — область достижимости расширенной системы в момент ϑ :

$$\mathcal{A} = \{(x(\vartheta|x_0, u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0} : (u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{U}\}, \quad (4.1)$$

где $\mathcal{U}$ — множество всех допустимых расширенных программ.

Лемма 5. *Множество $\mathcal{A}$ есть выпуклый компакт в $\mathcal{R}_n$.*

Доказательство. Будем трактовать $\mathcal{U}$ как подмножество пространства $L_2([t_0, \vartheta], \mathcal{R}_m)$ (см., напр., [18, разд. I.5]). В силу равномерной ограниченности и выпуклости допустимых расширенных ресурсов $\mathcal{P}_k$, ограничивающих значения допустимых расширенных программ на $(\tau_{k-1}, \tau_k]$ при $k > 1$ и на $[t_0, \tau_1]$ при $k = 1$ ($k = 1, \dots, K$), множество $\mathcal{U}$ ограничено и выпукло. Отсюда следует, что множество $\mathcal{A}$ ограничено и выпукло в $\mathcal{R}_n$. Для завершения доказательства осталось показать, что $\mathcal{A}$ замкнуто в $\mathcal{R}_n$. Покажем это. Возьмем произвольную последовательность $(x_i)_{i=1}^\infty$ из $\mathcal{A}$, сходящуюся в $\mathcal{R}_n$ к некоторой точке $x \in \mathcal{R}_n$. Требуется проверить, что $x \in \mathcal{A}$. Имеем $x_i = (x(\vartheta|x_0, u_{i x_0}(\cdot)))_{x_0 \in X_0}$ при некоторых $(u_{i x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{U}$ ($i = 1, 2, \dots$). Поскольку ограниченное в $L_2([t_0, \vartheta], \mathcal{R}_m)$ множество $\mathcal{U}$ слабо компактно в этом пространстве, из последовательности $((u_{i x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0})_{i=1}^\infty$ можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся в $L_2([t_0, \vartheta], \mathcal{R}_m)$ к некоторой функции $t \mapsto (u_{x_0}(t))_{x_0 \in X_0}$ из этого пространства. Избегая переобозначений, будем считать, что данным свойством сходимости обладает сама последовательность $((u_{i x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0})_{i=1}^\infty$. Тогда, ввиду того что $(u_{i x_0}(t))_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{P}_k$ при всех $t \in (\tau_{k-1}, \tau_k]$ для $k > 1$ и всех $t \in [t_0, \tau_1]$ для $k = 1$ ($k = 1, \dots, K$) и вследствие того что, как отмечено в замечании 6, множества $\mathcal{P}_k$ являются выпуклыми компактами в $\mathcal{R}_m$, для каждого $k = 2, \dots, K$ при почти всех $t \in (\tau_{k-1}, \tau_k]$ выполняется $(u_{x_0}(t))_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{P}_k$ и при почти всех $t \in [t_0, \tau_1]$ выполняется $(u_{x_0}(t))_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{P}_1$. Следовательно, изменением значений функции $t \mapsto (u_{x_0}(t))_{x_0 \in X_0}$ на множестве нулевой меры мы можем превратить ее в допустимую расширенную программу, далее обозначаемую $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$, с сохранением свойства слабой сходимости к ней в $L_2([t_0, \vartheta], \mathcal{R}_m)$ последовательности $((u_{i x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0})_{i=1}^\infty$. Используя последнюю сходимость и представление состояний $x(\vartheta|x_0, u_{i x_0}(\cdot))$ ($i = 1, 2, \dots$) и $x(\vartheta|x_0, u_{x_0}(\cdot))$ ($x_0 \in X_0$) по формуле Коши, получаем, что $x_i = (x(\vartheta|x_0, u_{i x_0}(\cdot)))_{x_0 \in X_0} \rightarrow (x(\vartheta|x_0, u_{x_0}(\cdot)))_{x_0 \in X_0}$ в $\mathcal{R}_n$. Следовательно, $x = (x(\vartheta|x_0, u_{x_0}(\cdot)))_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{A}$. Замкнутость $\mathcal{A}$ в $\mathcal{R}_n$ показана.

С использованием лемм 4 и 5 получим наш окончательный результат (см. ниже теорему 2). Далее полагаем $\tau_0 = t_0$. Для каждого $(l_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{R}_n$ положим

$$\begin{aligned} \gamma((l_{x_0})_{x_0 \in X_0}) &= \sum_{x_0 \in X_0} \langle l_{x_0}, F(\vartheta, t_0)x_0 \rangle \\ &+ \sum_{k=1}^K \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \sum_{X_{0k} \in \mathcal{X}_0(\tau_k)} \rho^- \left(\sum_{x_0 \in X_{0k}} B^*(s) F^*(\vartheta, s) l_{x_0} | P \right) ds \\ &+ \int_{t_0}^{\vartheta} \left\langle \sum_{x_0 \in X_0} l_{x_0}, F(\vartheta, s)c(s) \right\rangle ds \\ &- \sum_{x_0 \in X_0} \rho^+(l_{x_0} | M); \end{aligned} \quad (4.2)$$

здесь $*$ означает транспонирование. Пусть $\mathcal{S}$ — какое-либо подмножество пространства $\mathcal{R}_n$, которое содержит образ единичной сферы в $\mathcal{R}_n$ при ее, вообще говоря, неравномерном растяжении вдоль всех направлений, т. е. такое, что при некоторых положительных r_1 и $r_2 \geq r_1$ для каждой точки z единичной сферы в $\mathcal{R}_n$ найдется $r \in [r_1, r_2]$, для которого $rz \in \mathcal{S}$.

Теорема 2. *Каждая из трех задач — (i) расширенная задача программного наведения, (ii) задача пакетного наведения и (iii) задача гарантированного позиционного наведения — разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{(l_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{S}} \gamma((l_{x_0})_{x_0 \in X_0}) \leq 0. \quad (4.3)$$

Доказательство. В соответствии с теоремой 1 и упомянутыми ранее результатами работы [13, теорема 2.1] указанные выше задачи разрешимы или не разрешимы одновременно. Проверим, что (4.3) является критерием разрешимости первой из них — расширенной

задачи программного наведения. Ясно, что данная задача разрешима тогда и только тогда, когда непусто пересечение области достижимости $\mathcal{A}$ и расширенного целевого множества $\mathcal{M}$. Поскольку расширенное целевое множество $\mathcal{M}$, в силу выпуклости и замкнутости целевого множества M , выпукло и замкнуто в $\mathcal{R}_n$ и область достижимости $\mathcal{A}$ по лемме 5 есть выпуклый компакт в $\mathcal{R}_n$, то критерием непустоты пересечения $\mathcal{A} \cap \mathcal{M}$ выступает отсутствие вектора, отделяющего $\mathcal{A}$ от $\mathcal{M}$; точнее, пересечение $\mathcal{A} \cap \mathcal{M}$ непусто тогда и только тогда, когда для каждого $(l_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{R}_n$ справедливо неравенство $\rho^-((l_{x_0})_{x_0 \in X_0} | \mathcal{A}) \leq \rho^+((l_{x_0})_{x_0 \in X_0} | \mathcal{M})$ или, что то же,

$$\sup_{(l_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{R}_n} [\rho^-((l_{x_0})_{x_0 \in X_0} | \mathcal{A}) - \rho^+((l_{x_0})_{x_0 \in X_0} | \mathcal{M})] \leq 0.$$

В силу положительной однородности нижней опорной функции $\rho^-(\cdot | \mathcal{A})$ множества $\mathcal{A}$ и верхней опорной функции $\rho^+(\cdot | \mathcal{M})$ множества $\mathcal{M}$ и свойств множества $\mathcal{S}$ записанное выше неравенство равносильно неравенству

$$\sup_{(l_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{S}} [\rho^-((l_{x_0})_{x_0 \in X_0} | \mathcal{A}) - \rho^+((l_{x_0})_{x_0 \in X_0} | \mathcal{M})] \leq 0. \quad (4.4)$$

Дадим выражения для значений функций $\rho^-(\cdot | \mathcal{A})$ и $\rho^+(\cdot | \mathcal{M})$. Возьмем произвольный элемент $(l_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{R}_n$. Из определения области достижимости $\mathcal{A}$ (см. (4.1)), привлекая формулу Коши для представления движений системы (1.1), имеем

$$\begin{aligned} \rho^-((l_{x_0})_{x_0 \in X_0} | \mathcal{A}) &= \inf_{(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{U}} \sum_{x_0 \in X_0} \langle l_{x_0}, x(\vartheta | x_0, u_{x_0}(\cdot)) \rangle \\ &= \sum_{x_0 \in X_0} \langle l_{x_0}, F(\vartheta, t_0)x_0 \rangle + a + \int_{t_0}^{\vartheta} \left\langle \sum_{x_0 \in X_0} l_{x_0}, F(\vartheta, t)c(t) \right\rangle dt, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \inf_{(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{U}} \sum_{x_0 \in X_0} \int_{t_0}^{\vartheta} \left\langle l_{x_0}, F(\vartheta, t)B(t)u_{x_0}(t) \right\rangle dt \\ &= \inf_{(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{U}} \sum_{k=1}^K \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \left\langle \sum_{x_0 \in X_0} B^*(t)F^*(\vartheta, t)l_{x_0}, u_{x_0}(t) \right\rangle dt. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что значения допустимых расширенных программ на $(\tau_{k-1}, \tau_k]$ при $k > 1$ и на $[t_0, \tau_1]$ при $k = 1$ ограничены допустимым расширенным ресурсом $\mathcal{P}_k$ ($k = 1, \dots, K$), и используя лемму 4, имеем

$$\begin{aligned} a &= \inf_{(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{U}} \sum_{k=1}^K \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \langle (B^*(t)F^*(\vartheta, t)l_{x_0})_{x_0 \in X_0}, (u_{x_0}(t))_{x_0 \in X_0} \rangle_{\mathcal{R}_m} dt \\ &= \sum_{k=1}^K \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \rho^-((B^*(t)F^*(\vartheta, t)l_{x_0})_{x_0 \in X_0} | \mathcal{P}_k) dt \\ &= \sum_{k=1}^K \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \sum_{X_{0k} \in \mathcal{X}_0(\tau_k)} \rho^- \left(\sum_{x_0 \in X_{0k}} B^*(t)F^*(\vartheta, t)l_{x_0} \mid \mathcal{P}_k \right) dt. \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в (4.5), получаем

$$\begin{aligned}
 \rho^-((l_{x_0})_{x_0 \in X_0} | \mathcal{A}) &= \sum_{x_0 \in X_0} \langle l_{x_0}, F(\vartheta, t_0)x_0 \rangle \\
 &+ \sum_{k=1}^K \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \sum_{X_{0k} \in \mathcal{X}_0(\tau_k)} \rho^- \left(\sum_{x_0 \in X_{0k}} B^*(t) F^*(\vartheta, t) l_{x_0} \mid P \right) dt \\
 &+ \int_{t_0}^{\vartheta} \left\langle \sum_{x_0 \in X_0} l_{x_0}, F(\vartheta, t) c(t) \right\rangle dt.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Далее, расширенное целевое множество $\mathcal{M}$ есть по определению совокупность всех семейств $(z_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{R}_n$ таких, что $z_{x_0} \in M$ для всех $x_0 \in X_0$. Поэтому

$$\begin{aligned}
 \rho^+((l_{x_0})_{x_0 \in X_0} | \mathcal{M}) &= \sup_{(z_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{M}} \sum_{x_0 \in X_0} \langle l_{x_0}, z_{x_0} \rangle \\
 &= \sum_{x_0 \in X_0} \sup_{z_{x_0} \in M} \langle l_{x_0}, z_{x_0} \rangle \\
 &= \sum_{x_0 \in X_0} \rho^+(l_{x_0} | M).
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Сопоставляя (4.6) и (4.7) с (4.2), видим, что

$$\rho^-((l_{x_0})_{x_0 \in X_0} | \mathcal{A}) - \rho^+((l_{x_0})_{x_0 \in X_0} | \mathcal{M}) = \gamma((l_{x_0})_{x_0 \in X_0}).$$

Поскольку данное равенство справедливо при произвольном $(l_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{R}_n$, записанный выше критерий (4.4) разрешимости расширенной задачи программного наведения имеет вид (4.3). Доказательство окончено.

Проверка критерия разрешимости (4.3) сводится к решению задачи максимизации функции $\gamma(\cdot)$ на множестве $\mathcal{S}$; последнее может быть выбрано в достаточно широких пределах, с тем, чтобы облегчить решение задачи (в частности, если $\mathcal{S}$ выбрано выпуклым, то задача (4.3) превращается в задачу выпуклой оптимизации, что может быть удобным с точки зрения численных методов).

З а м е ч а н и е 7. Пусть множество $\mathcal{S}$ выбрано замкнутым и целевое множество M является цилиндрическим с ограниченным основанием, т.е. $M = \{z + w : z \in M_0, w \in L_*\}$, где M_0 — выпуклый компакт, содержащийся в некотором подпространстве L пространства $\mathbb{R}^n$ и L_* — подпространство $\mathbb{R}^n$, ортогональное L . Тогда критерий (4.3) разрешимости задачи гарантированного позиционного наведения, задачи пакетного наведения и расширенной задачи программного наведения эквивалентен неравенству

$$\max_{(l_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{S}_0} \gamma((l_{x_0})_{x_0 \in X_0}) \leq 0, \tag{4.8}$$

где $\mathcal{S}_0$ — множество всех $(l_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{S}$ таких, что $l_{x_0} \in L$ для всех $x_0 \in X_0$. Это следует из того, что $\rho^+(l | M) = \infty$ при $l \notin L$, из вида функции $\gamma(\cdot)$ (см. (4.2)), компактности и замкнутости множества $\mathcal{S}_0$ в $\mathcal{R}_n$ и непрерывности функции $\gamma(\cdot)$ на $\mathcal{S}_0$ (последнее обеспечивает достижимость максимума, записанного в (4.8)).

5. Пример

Рассмотрим динамическую систему, описывающую движение материальной точки единичной массы по прямой под действием переменной управляющей силы:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = u(t); \quad (5.1)$$

здесь координаты $x_1(t)$ и $x_2(t)$ фазового вектора $x(t) = (x_1, x_2(t))^*$ системы (напомним, что $*$ — знак транспонирования) характеризуют соответственно геометрическое положение точки на прямой в момент t и ее скорость в этот момент. Значения $u(t)$ управляющих силовых воздействий ограничены отрезком $[-1, 1]$. Таким образом, в данном примере система (1.1) имеет вид (5.1), $n = 2$, $m = 1$ и $P = [-1, 1]$. Положим $[t_0, \vartheta] = [0, 2]$. Примем, что множество допустимых начальных состояний состоит из двух различных точек:

$$X_0 = \{(x'_{01}, x''_{02})^*, (x''_{01}, x'_{02})^*\}.$$

Пусть на отрезке времени $[0, 1]$ состояния системы наблюдению не доступны, а на полуотрезке $(1, 2]$ они наблюдаются в полной мере. Этому соответствуют двумерный сигнал

$$(y_1(t), y_2(t))^* = \begin{cases} (0, 0)^*, & t \in [0, 1], \\ (t-1)t(x_1(t), x_2(t))^*, & t \in (1, 2], \end{cases}$$

о текущем состоянии $(x_1(t), x_2(t))^*$ системы, реализуемый при (2×2) -матрице-функции $Q(\cdot)$ наблюдения вида

$$Q(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1], \\ (t-1)E, & t \in (1, 2], \end{cases}$$

где E — единичная (2×2) -матрица. Цель управления состоит в том, чтобы, используя наблюдаемые значения сигнала, сформировать программу управления материальной точкой, которая обеспечивала бы в момент 2 попадание ее геометрической координаты в отрезок $[-a, a]$, где $a \geq 0$. Таким образом, целевое множество имеет вид

$$M = \{(x_1, x_2)^* \in \mathbb{R}^2: |x_1| \leq a\}.$$

Конкретизируем критерий (4.3) разрешимости задачи о гарантированном позиционном наведении. Фундаментальная матрица $F(\cdot, \cdot)$ однородной системы, соответствующей системе (5.1), и матрица $B(\cdot)$ коэффициентов при управляющем воздействии имеют вид

$$F(t, s) = \begin{pmatrix} 1 & t-s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t, s \in [0, 2]).$$

Однородные сигналы, соответствующие допустимым начальным состояниям $x'_0 = (x'_{01}, x'_{02})^*$ и $x''_0 = (x''_{01}, x''_{02})^*$, имеют соответственно вид

$$g_{x'_0}(t) = Q(t)F(t, 0)x'_0 = \begin{cases} (0, 0)^*, & t \in [0, 1], \\ ((t-1)(x'_{01} + tx'_{02}), (t-1)x'_{02})^*, & t \in (1, 2], \end{cases} \quad (5.2)$$

$$g_{x''_0}(t) = Q(t)F(t, 0)x''_0 = \begin{cases} (0, 0)^*, & t \in [0, 1], \\ ((t-1)(x''_{01} + tx''_{02}), (t-1)x''_{02})^*, & t \in (1, 2]. \end{cases} \quad (5.3)$$

Поскольку по предположению $x'_0 \neq x''_0$, $\tau_1 = 1$ есть первый момент расслоения каждого из этих однородных сигналов; при этом второй момент расслоения каждого из них есть конечный момент 2, число K моментов расслоения однородных сигналов равно 2, кластерная позиция $\mathcal{X}_0(1)$ в момент 1 содержит единственное множество X_0 , а кластерная позиция $\mathcal{X}_0(2)$ в момент 2 содержит два одноточечных множества, $\{x'_0\}$ и $\{x''_0\}$.

Пусть $\mathcal{S}$ есть множество всех (двуэлементных) семейств $((l'_{01}, l'_{02}), (l''_{01}, l''_{02})) \in \mathcal{R}_2$ таких, что выполняется одно из четырех соотношений:

$$\begin{aligned} |l'_{01}| &= 1, & |l''_{01}| &\leq 1, & |l'_{02}| &\leq 1, & |l''_{02}| &\leq 1; \\ |l'_{01}| &\leq 1, & |l''_{01}| &= 1, & |l'_{02}| &\leq 1, & |l''_{02}| &\leq 1; \\ |l'_{01}| &\leq 1, & |l''_{01}| &\leq 1, & |l'_{02}| &= 1, & |l''_{02}| &\leq 1; \\ |l'_{01}| &\leq 1, & |l''_{01}| &\leq 1, & |l'_{02}| &\leq 1, & |l''_{02}| &= 1. \end{aligned}$$

Так как множество M — цилиндрическое с ограниченным основанием, а именно, $M = \{((x_1, 0)^* + (0, x_2)^* : |x_1| \leq a, x_2 \in \mathbb{R}^1)\}$, то, в соответствии с замечанием 7, критерий (4.3) разрешимости задачи гарантированного позиционного наведения, задачи пакетного наведения и расширенной задачи программного наведения равносильны неравенству

$$\max_{((l'_{01}, l'_{02}), (l''_{01}, l''_{02})) \in \mathcal{S}_0} \gamma(((l'_{01}, l'_{02}), (l''_{01}, l''_{02}))) \leq 0,$$

где $\mathcal{S}_0$ — множество всех $((l'_{01}, l'_{02}), (l''_{01}, l''_{02})) \in \mathcal{S}$ таких, что $l'_{02} = l''_{02} = 0$. Перепишем последнее неравенство в упрощенных обозначениях:

$$\gamma^0 = \max_{((l', 0), (l'', 0)) \in \mathcal{S}_0} \gamma(((l', 0), (l'', 0)))) \leq 0. \quad (5.4)$$

С учетом того что при произвольном действительном l имеем $\rho^+((l, 0)^* | M) = a|l|$ и $\rho^-((l, 0)^* | P) = -|l|$, при произвольных действительных l', l'' формула (4.2) для значений функции $\gamma(\cdot)$ дает

$$\begin{aligned} \gamma(((l', 0), (l'', 0)))) &= l'z' + l''z'' - \int_0^1 (2-t)|l' + l''|dt - \int_1^2 (2-t)|l'|dt - \int_1^2 (2-t)|l''|dt - a|l'| - a|l''| \\ &= l'z' + l''z'' - \frac{3}{2}|l' + l''| - \left(\frac{1}{2} + a\right)|l'| - \left(\frac{1}{2} + a\right)|l''|, \end{aligned}$$

где $z' = x'_{01} + 2x'_{02}$, $z'' = x''_{01} + 2x''_{02}$.

Легко видеть, что функция $\gamma((\cdot, 0), (\cdot, 0))$ вогнута на множестве $\mathcal{S}_0$, следовательно, она достигает на нём глобального максимума. В данном случае проверку критерия разрешимости достаточно провести на множествах

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0^{+2} &= \{(l', l'') : l' = 1, l'' \in [-1, 1]\}, \\ \mathcal{S}_0^{-2} &= \{(l', l'') : l' = -1, l'' \in [-1, 1]\}, \\ \mathcal{S}_0^{1+} &= \{(l', l'') : l' \in [-1, 1], l'' = 1\}, \\ \mathcal{S}_0^{1-} &= \{(l', l'') : l' \in [-1, 1], l'' = -1\}. [2ex] \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \max \left\{ \max_{l', l'' \in \mathcal{S}_0^{+2}} \gamma(((l', 0), (l'', 0)))) , \max_{l', l'' \in \mathcal{S}_0^{-2}} \gamma(((l', 0), (l'', 0)))) , \right. \\ &\quad \left. \max_{l', l'' \in \mathcal{S}_0^{1+}} \gamma(((l', 0), (l'', 0)))) , \max_{l', l'' \in \mathcal{S}_0^{1-}} \gamma(((l', 0), (l'', 0)))) \right\}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $z' = 3$, $z'' = 0$, $a = 1$. Тогда

$$\begin{aligned}\max_{l', l'' \in S_0^{+2}} \gamma((l', 0), (l'', 0)) &= \max_{l', l'' \in S_0^{+2}} \frac{3}{2} (1 - |1 + l''| - |l''|) = 0, \\ \max_{l', l'' \in S_0^{-2}} \gamma((l', 0), (l'', 0)) &= - \max_{l', l'' \in S_0^{-2}} \frac{3}{2} (3 + |-1 + l''| + |l''|) = -6, \\ \max_{l', l'' \in S_0^{1+}} \gamma((l', 0), (l'', 0)) &= \max_{l', l'' \in S_0^{1+}} \frac{3}{2} (2l' - |l' + 1| - |l'| - 1) = -3, \\ \max_{l', l'' \in S_0^{1-}} \gamma((l', 0), (l'', 0)) &= \max_{l', l'' \in S_0^{1-}} \frac{3}{2} (2l' - |l' - 1| - |l'| - 1) = 0.\end{aligned}$$

Легко видеть, что $\gamma_0 = 0$, стало быть, критерий разрешимости (5.4) выполняется.

Укажем наводящий пакет программ. Согласно лемме 2 двуэлементное семейство $(u_{x'_0}(\cdot), u_{x''_0}(\cdot))$ программ является пакетом программ тогда и только тогда, когда $u_{x'_0}(t) = u_{x''_0}(t)$ при всех $t \in [0, \tau_1] = [0, 1]$. Для произвольного пакета программ $(u_{x'_0}(\cdot), u_{x''_0}(\cdot))$ первые координаты состояний $x(2|x'_0, u_{x'_0}(\cdot)) = (x_1(2|x'_0, u_{x'_0}(\cdot)), x_2(2|x_0, u_{x'_0}(\cdot))^*)$ и $x(2|x''_0, u_{x''_0}(\cdot)) = (x_1(2|x'_0, u_{x''_0}(\cdot)), x_2(2|x_0, u_{x''_0}(\cdot))^*)$ системы (5.1) имеют вид

$$\begin{aligned}x_1(2|x'_0, u_{x'_0}(\cdot)) &= z' + \int_0^1 (2-t) u_{x'_0, x'_0}(t) dt + \int_1^2 (2-t) u_{x'_0}(t) dt, \\ x_1(2|x''_0, u_{x''_0}(\cdot)) &= z'' + \int_0^1 (2-t) u_{x'_0, x''_0}(t) dt + \int_1^2 (2-t) u_{x''_0}(t) dt,\end{aligned}$$

где $u_{x'_0, x''_0}(t)$ — общее значение программ $u_{x'_0}(\cdot)$ $u_{x''_0}(\cdot)$ в момент $t \in [0, 1]$. Пусть

$$u_{x'_0}(t) = -1 \quad (t \in [0, 2]), \quad u_{x''_0}(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, 1], \\ 1, & t \in (1, 2]. \end{cases} \quad (5.5)$$

Имеем

$$x_1(2|x'_0, u_{x'_0}(\cdot)) = 3 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 = a, \quad x_1(2|x''_0, u_{x''_0}(\cdot)) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -1 = -a.$$

Очевидно, что пакет программ $(u_{x'_0}(\cdot), u_{x''_0}(\cdot))$ является наводящим.

Отправляясь от наводящего пакета программ $(u_{x'_0}(\cdot), u_{x''_0}(\cdot))$, зададим некоторый позиционный способ управления системой (5.1), стартующей в момент 0 из не известного управляющей стороне (по крайней мере, до момента 1 начала поступления сигнала) истинного начального состояния $x_0 = (x_{01}, x_{02})^* \in X_0 = \{x'_0, x''_0\}$. отождествим себя с управляющей стороной. Отметим произвольно малое $\varepsilon > 0$. До начала движения принимаем решение применять к системе управляющее воздействие $u^0(t) = -1$ в каждый момент $t \in [0, 1 + \varepsilon]$. В момент $1 + \varepsilon$ производим следующие действия. Отмечаем какой-либо (прошлый) момент $t_1 \in (1, 1 + \varepsilon)$. Рассматриваем значение $y(t_1) = Q(t_1)x(t_1)$ сигнала об истинном состоянии $x(t_1)$ системы в этот момент; по формуле Коши имеем

$$y(t_1) = Q(t_1)F(t_1, 0)x_0 + Q(t_1) \int_0^{t_1} F(t_1, s)B(s)u^0(s)ds.$$

Находим вектор

$$w(t_1) = y(t_1) - Q(t_1) \int_0^{t_1} F(t_1, s)B(s)u^0(s)ds.$$

Очевидно (см. (5.2), (5.3)),

$$w(t_1) = Q(t_1)F(t_1, 0)x_0 = g_{x_0}(t_1) = ((t_1 - 1)(x_{01} + t_1 x_{02}), (t_1 - 1)x_{02})^*.$$

Поскольку $x'_0 \neq x''_0$, то $g_{x'_0}(t_1) \neq g_{x''_0}(t_1)$ и, стало быть, верно одно из двух: $w(t_1) = g_{x'_0}(t_1)$ либо $w(t_1) = g_{x''_0}(t_1)$. Если $w(t_1) = g_{x'_0}(t_1)$, принимаем решение применять к системе в каждый момент $t \in [1 + \varepsilon, 2)$ управляющее воздействие $u_{x'_0}(t) = -1$; если $w(t_1) = g_{x''_0}(t_1)$, принимаем решение применять к системе в каждый момент $t \in [1 + \varepsilon, 2]$ управляющее воздействие $u_{x''_0}(t) = 1$.

Реализуемое в результате такого способа управления программное управление $u(\cdot)$ имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, 1 + \varepsilon), \\ u_{x_0}(t), & t \in [1 + \varepsilon, 2]. \end{cases}$$

Обращаясь к (5.5), в случае $x_0 = x'_0$ получаем $u(\cdot) = u_{x'_0}(\cdot)$ и в случае $x_0 = x''_0$ получаем $u(t) = u_{x''_0}(t)$ для всех $t \in [0, 2] \setminus [1, 1 + \varepsilon)$. Таким образом, первая координата $x_1(\cdot)$ истинного движения $x(\cdot) = x(\cdot | x_0, u(\cdot))$ системы в случае $x_0 = x'_0$ есть $x'_1(\cdot) = x_1(\cdot | x'_0, u_{x'_0}(\cdot))$, а в случае $x_0 = x''_0$ отличается от $x''_1(\cdot) = x_1(\cdot | x''_0, u_{x''_0}(\cdot))$ в равномерной метрике не более чем на ε ; последнее следует из представлений

$$x_1(t) = z'' + \int_0^t (t-s)u(s)ds, \quad x''_1(t) = z'' + \int_0^t (t-s)u_{x''_0}(s)ds \quad (t \in [0, 2])$$

и вида программ $u(\cdot)$ и $u_{x''_0}(\cdot)$ (см. (5.5)). Так как пакет программ $(u_{x'_0}(\cdot), u_{x''_0}(\cdot))$ наводящий, имеем $x'_1(2), x''_1(2) \in [-a, a] = [-1, 1]$. Значит, с необходимостью $x_1(2) \in [-a - \varepsilon, a + \varepsilon] = [-1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$. Мы получили, что описанный позиционный способ управления с неполной информацией, построенный с помощью наводящего пакета программ $(u_{x'_0}(\cdot), u_{x''_0}(\cdot))$, гарантирует наведение системы (5.1) в момент 2 на ε -окрестность целевого множества M .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 516 с.
4. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Game-theoretical control problems. N. Y.: Springer Verlag, 1988. 517 с.
5. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. Control under lack of information. Boston: Birkhäuser, 1995. 322 p.
6. Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
7. Subbotin A.I. Generalized solutions of first-order PDEs. Boston: Birkhäuser, 1995. 312 p.
8. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
9. Красовский Н.Н., Осипов Ю.С. Задача управления с неполной информацией // Механика тверд. тела. 1973. № 4. С. 5–14.
10. Куржанский А.Б. О синтезе управлений по результатам наблюдений // Прикл. математики и механика. 2004. Т. 68, № 4. С. 547–563.
11. Осипов Ю.С. Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61. Вып. 4(370). С. 25–76.
12. Кряжковский А.В., Осипов Ю.С. Идеализированные пакеты программ и задачи позиционного управления с неполной информацией // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 139–157.

13. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О разрешимости задач гарантирующего управления для частично наблюдаемых линейных динамических систем // Тр. МИАН. 2012. Т. 277. С. 152–167.
14. **Elliott R.J., Kalton N.** Values in differential games // Bull. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 78, no. 3. P. 427–431.
15. **Roxin E.** Axiomatic approach in differential games // J. Opt. Theory Appl. 1969. Vol. 3. P. 156–163.
16. **Rull-Nardzevski C.** A theory of pursuit and evasion. Advances in game theory. Princeton: Princeton Univ. Press, 1964. P. 113–126.
17. **Quincampoix M., Veliov V.** Optimal control of uncertain systems with incomplete information for the disturbances // SIAM J. Control Optim. 2005. Vol. 43, no. 4. P. 1373–1399.
18. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями, М.: Наука, 1977. 624 с.

Кряжимский Аркадий Викторович

Поступила 03.05.2014

д-р физ.-мат. наук, академик РАН

Математический ин-т им. В. А. Стеклова РАН, Москва,

Международный институт прикладного системного анализа, Лаксенбург, Австрия

e-mail: kryazhim@mi.ras.ru

Стрелковский Никита Витальевич

аспирант

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,

Международный институт прикладного системного анализа, Лаксенбург, Австрия

УДК 517.977

МНОЖЕСТВА РАЗРЕШИМОСТИ В ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ДВУМЯ ДОГОНЯЮЩИМИ И ОДНИМ УБЕГАЮЩИМ¹

С. С. Кумков, С. Ле Менек, В. С. Пацко

В работе рассматривается дифференциальная игра с двумя догоняющими и одним убегающим. Динамика каждого из объектов описывается линейной стационарной системой общего вида со скалярным управляющим воздействием. Платой является минимум из двух одномерных промахов между первым преследователем и убегающим и между вторым преследователем и убегающим. Промахи подсчитываются в фиксированные заранее моменты времени. Описывается способ построения множеств уровня функции цены (множеств разрешимости игровой задачи). Для случая “сильных” преследователей даются способы построения оптимальных стратегий. Приведены результаты моделирования. Исследуемая антагонистическая игра может быть полезной при изучении заключительной стадии космического преследования, в которое вовлечены два преследующих объекта и один убегающий.

Ключевые слова: дифференциальные игры, линейная динамика, функция цены, оптимальное управление обратной связи

S. S. Kumkov, S. Le Menek, V. S. Patsko. Solvability sets in a pursuit game with two pursuers and one evader.

We consider a differential game with two pursuers and one evader. The dynamics of each object is described by a linear stationary system in general form with a scalar control. The payoff is the minimum of two one-dimensional misses between the first pursuer and the evader and between the second pursuer and the evader. Misses are counted at fixed times. An algorithm for constructing level sets of the value function (solvability sets of the game problem) is described. For the case of “strong” pursuers we give methods for the construction of optimal strategies. Numerical results are presented. This zero-sum game can be useful for studying the concluding stage of a space pursuit involving two pursuing objects and one evading object.

Keywords: differential games, linear dynamics, value function, optimal feedback control.

1. Введение

В работах [1–3] исследованы дифференциальные игры с двумя преследователями P_1 , P_2 и одним убегающим E . Три объекта перемещаются по прямой Oz ; символами z_{P_1} , z_{P_2} , z_E обозначаются их координаты на этой прямой. В назначенный заранее момент T_1 измеряется расстояние $|z_{P_1}(T_1) - z_E(T_1)|$ между преследователем P_1 и убегающим E , а в момент T_2 — расстояние $|z_{P_2}(T_2) - z_E(T_2)|$ между преследователем P_2 и убегающим E . Платой φ в игре является минимум из этих двух расстояний:

$$\varphi = \min\{|z_{P_1}(T_1) - z_E(T_1)|, |z_{P_2}(T_2) - z_E(T_2)|\}. \quad (1.1)$$

Первый игрок, объединяющий двух преследователей, минимизирует значение платы. Вторым игроком, отождествляемым с убегающим, максимизирует плату.

В [1–3] рассматривается следующее описание динамики объектов:

$$\begin{aligned} \ddot{z}_{P_i} &= a_{P_i}, & \dot{a}_{P_i} &= (u_i - a_{P_i})/l_{P_i}, & |u_i| &\leq \mu_i, & a_{P_i}(t_0) &= 0, & i &= 1, 2; \\ \ddot{z}_E &= a_E, & \dot{a}_E &= (v - a_E)/l_E, & |v| &\leq \nu, & a_E(t_0) &= 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Постоянные времени l_{P_1} , l_{P_2} , l_E показывают, как управляющие воздействия u_1 , u_2 , v влияют на формируемые ускорения.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-96055) и программы Президиума РАН “Динамические системы и теория управления” (проект 12-П-1-1002).

Дифференциальные игры с динамикой (1.2) и функцией платы (1.1) могут быть истолкованы [1] как простейшие модельные постановки, возникающие при изучении нелинейных задач преследования в верхних слоях атмосферы с двумя догоняющими и одним убегающим. Момент T_1 (момент T_2) при этом интерпретируется как момент встречи на номинальных движениях преследователя P_1 (преследователя P_2) и убегающего E .

В литературе по задачам преследования один-на-один (далее 1×1) рассматривались и другие варианты описания объектов с линейной динамикой. Например, в статье [4] исследовались задачи со следующей динамикой преследователя:

$$\begin{aligned}\ddot{z}_P &= a_P, \\ \ddot{a}_P &= -\omega^2 a_P - \zeta \dot{a}_P + u, \quad |u| \leq \mu.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Здесь, в отличие от (1.2), динамика сервомеханизмов описывается дифференциальным уравнением второго порядка, соответствующим колебательному контуру с собственной частотой ω и вязким трением с коэффициентом ζ .

В статье [5] изучались игры 1×1 в случае, когда управляющее воздействие создается за счет отклонения аэродинамических рулей. Описание динамики выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\ddot{z}_P &= a_P + d_P u, \\ \dot{a}_P &= ((1 - d_P)u - a_P)/l_P, \quad |u| \leq \mu.\end{aligned}\tag{1.4}$$

Параметр d_P определяется положением аэродинамических рулей. Его положительные (отрицательные) значения соответствуют ситуации, когда рули расположены в носовой (хвостовой) части объекта. Величина l_P , как и выше, означает постоянную времени.

Чтобы в задаче 2×1 с двумя догоняющими и одним убегающим охватить варианты динамики (1.2)–(1.4), в данной работе мы рассматриваем более общую постановку, в которой линейная динамика каждого из трех объектов описывается своим векторным дифференциальным уравнением со скалярным управляющим воздействием, ограниченным по модулю. Первая компонента фазового вектора каждого объекта имеет смысл координаты положения объекта на прямой. Это позволяет рассматривать функцию платы в виде (1.1).

Изучаемая задача относится к проблемам группового преследования-убегания с линейной динамикой участвующих объектов. Соответствующие задачи, как правило, являются очень трудными из-за большой размерности фазового вектора и невыпуклости функции платы. Поэтому в теории дифференциальных игр развиваются специфические методы [6–8], позволяющие при наложении дополнительных предположений решать такие задачи.

В данной работе всего два преследователя и один убегающий. При этом вид функции платы допускает переход к эквивалентной дифференциальной игре с двумерной фазовой переменной. Фактически, такая эквивалентная игра и исследуется в работе.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 дается постановка задачи. В разд. 3 осуществляется переход к эквивалентной дифференциальной игре второго порядка по фазовой переменной. В разд. 4 приводится краткое описание численной процедуры приближенного построения множеств уровня функции цены (множеств разрешимости). Раздел 5 посвящен результатам численного построения множеств разрешимости для нескольких вариантов задач с объектами, имеющими динамику вида (1.2)–(1.4). В разд. 6 анализируется вид оптимальной стратегии первого игрока (который объединяет преследователей P_1 и P_2) для случая, когда каждый из преследователей “сильнее” убегающего по своим динамическим возможностям. Представлено также описание оптимальной стратегии второго игрока. Результаты моделирования движений для случая сильных преследователей даны в разд. 7. Раздел 8 представляет собой заключение.

2. Постановка задачи

Пусть движения преследователей P_1 , P_2 и убегающего E описываются в векторной форме соотношениями

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_{P_i} &= A_{P_i} \mathbf{z}_{P_i} + B_{P_i} u_i, & |u_i| &\leq \mu_i, & \mathbf{z}_{P_i} &\in \mathbb{R}^{n_i}, & i = 1, 2; \\ \dot{\mathbf{z}}_E &= A_E \mathbf{z}_E + B_E v, & |v| &\leq \nu, & \mathbf{z}_E &\in \mathbb{R}^{n_E}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь u_1 , u_2 , v — скалярные управляющие воздействия; A_{P_1} , A_{P_2} , A_E — квадратные матрицы; B_{P_1} , B_{P_2} , B_E — матрицы-столбцы. Пусть z_{P_i} , $i = 1, 2$, z_E — первые компоненты векторов $\mathbf{z}_{P_i}$, $i = 1, 2$, $\mathbf{z}_E$.

Зафиксируем два момента T_1 и T_2 . Функцию платы введем в виде (1.1). Рассмотрим антагонистическую дифференциальную игру: первый игрок, используя управления u_1 , u_2 , минимизирует плату φ , второй игрок при помощи управления v максимизирует значение платы. Предполагаем, что оба игрока в процессе движения знают точные значения всех фазовых координат. Требуется предложить метод построения множеств уровня функции цены (множеств разрешимости) и исследовать возможности построения оптимальных стратегий игроков, устойчивых по отношению к малым измерительным ошибкам.

Условимся, что игра рассматривается при $t_0 \in [\bar{t}, \hat{T}]$, где $\hat{T} = \min\{T_1, T_2\}$, $\bar{t} < \hat{T}$. Для определенности считаем $T_1 \geq T_2$.

3. Двумерная эквивалентная игра

Обозначим символом $x_i(t)$, $i = 1, 2$, значение разности $z_E - z_{P_i}$, спрогнозированное с текущего момента t и текущих состояний $\mathbf{z}_E(t)$, $\mathbf{z}_{P_i}(t)$ на момент T_i при условии, что в системе (2.1) на промежутке $[t, T_i]$ действуют нулевые управления игроков. Имеем

$$x_i(t) = X_E^1(T_i, t) \mathbf{z}_E(t) - X_{P_i}^1(T_i, t) \mathbf{z}_{P_i}(t), \quad i = 1, 2. \quad (3.1)$$

Здесь верхний индекс 1 означает первые строки фундаментальных матриц Коши $X_{P_i}(T_i, t)$, $X_E(T_i, t)$, которые соответствуют матрицам A_{P_i} , A_E и записаны для моментов T_i , t . Поскольку матрицы A_{P_i} , A_E не зависят от времени t , то матрицы $X_{P_i}(T_i, t)$, $X_E(T_i, t)$ зависят только от разности $T_i - t$. Величины $x_i(t)$, $i = 1, 2$, в западной литературе часто называют *zero-effort miss coordinates* [9]. Подчеркнем, что $x_i(T_i) = z_E(T_i) - z_{P_i}(T_i)$.

Дифференцируя по t значения $x_i(t)$, получаем

$$\dot{x}_i(t) = X_E^1(T_i, t) B_E v - X_{P_i}^1(T_i, t) B_{P_i} u_i, \quad |u_i| \leq \mu_i, \quad |v| \leq \nu, \quad t \leq T_i, \quad i = 1, 2. \quad (3.2)$$

Из результатов теории дифференциальных игр следует (см., например, [10; 11]), что дифференциальная игра с динамикой (3.2) и платой

$$\varphi = \min\{|x_1(T_1)|, |x_2(T_2)|\} \quad (3.3)$$

имеет цену и эквивалентна (по значению функции цены) дифференциальной игре с динамикой (2.1) и платой (1.1). Вычисления в рамках динамики (3.2) более удобны, поскольку размерность фазового вектора $x = (x_1, x_2)^T$ равна двум и фазовый вектор x не входит в правую часть системы (3.2). Здесь и ниже символ $\top$ означает операцию транспонирования.

Имея значение $V(t, x)$ функции цены V игры (3.2), (3.3) в позиции (t, x) , получаем равное ему значение $\mathbf{V}(t, \mathbf{z}_{P_1}, \mathbf{z}_{P_2}, \mathbf{z}_E)$ функции цены $\mathbf{V}$ в игре (2.1), (1.1) для любой позиции $(t, \mathbf{z}_{P_1}, \mathbf{z}_{P_2}, \mathbf{z}_E)$, связанной с позицией (t, x) формулой (3.1). Соотношение (3.1) используем также, когда говорим о связи стратегий игроков в играх (3.2), (3.3) и (2.1), (1.1).

Анализируя вид системы (3.2), отметим, что управление u_i влияет только на изменение координаты x_i . В то же время от управления v зависит изменение обеих координат x_1 , x_2 .

При этом, если $T_1 = T_2$, то в выражениях для $\dot{x}_1(t)$ и $\dot{x}_2(t)$ первое слагаемое одинаково. Динамика (3.2) симметрична относительно начала координат плоскости x_1, x_2 . Симметричными относительно нуля являются также ограничения на управления игроков и множества уровня (множества Лебега) функции платы. Следствием этого является симметрия относительно начала координат временных сечений $W_c(t)$ множеств уровня $W_c = \{(t, x): V(t, x) \leq c\}$, $c \geq 0$, функции цены. Множество W_c также является *множеством разрешимости* с показателем c . Это максимальное множество в пространстве t, x , из любой точки которого первый игрок гарантирует окончание игры со значением платы φ не более, чем c . По терминологии книг [10; 11] W_c — максимальный u -стабильный мост, соответствующий числу c .

Скалярные величины $X_E^1(T_i, t)B_E$ и $X_{P_i}^1(T_i, t)B_{P_i}$ обозначим через $E_i(t)$ и $D_i(t)$, $i = 1, 2$. Пусть

$$E(t) = \begin{pmatrix} E_1(t) \\ E_2(t) \end{pmatrix}, \quad D(t) = \begin{pmatrix} -D_1(t) & 0 \\ 0 & -D_2(t) \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда система (3.2) в векторной форме при $t \leq \hat{T} = T_2$ запишется в виде

$$\dot{x} = D(t)u + E(t)v, \quad |u_1| \leq \mu_1, \quad |u_2| \leq \mu_2, \quad |v| \leq v. \quad (3.4)$$

На промежутке $(T_2, T_1]$ при описании динамики системы в соотношении (3.4) рассматриваем только первую строчку для $\dot{x}_1$.

4. Численное построение множеств уровня функции цены

Для линейных дифференциальных игр общего вида с геометрическими ограничениями $u \in \mathcal{P}$, $v \in \mathcal{Q}$ на управления игроков, фиксированным моментом окончания T и непрерывной функцией платы φ , зависящей от двух компонент фазового вектора в момент окончания, разработаны [12–14] эффективные процедуры попятного построения множеств уровня функции цены (множеств разрешимости). Стандартный подход заключается в следующем. Просчитывая две соответствующие строки фундаментальной матрицы Коши, переходим к эквивалентной дифференциальной игре с динамикой вида (3.4). Зафиксировав разбиение промежутка $[\bar{t}, T]$ моментами $t_N = T, t_{N-1}, \dots$ и выбрав многоугольную аппроксимацию $\widetilde{M}_c$ множества уровня $M_c = \{x: \varphi(x) \leq c\}$ функции платы φ (если M_c уже является многоугольным множеством, то можно положить $\widetilde{M}_c = M_c$), последовательно, “пятясь” от множества $\widetilde{W}_c(t_N) = \widetilde{M}_c$, строятся многоугольные множества $\widetilde{W}_c(t_{N-1}), \widetilde{W}_c(t_{N-2}), \dots$, аппроксимирующие t -сечения $W_c(t_{N-1}), W_c(t_{N-2}), \dots$ множества уровня W_c функции цены. При этом “замораживаем” динамику на промежутках $[t_{k+1}, t_k)$ выбранного разбиения:

$$\dot{x} = D(t_{k+1})u + E(t_{k+1})v, \quad t \in [t_{k+1}, t_k), \quad u \in \widetilde{\mathcal{P}}, \quad v \in \widetilde{\mathcal{Q}}.$$

Здесь $\widetilde{\mathcal{P}}, \widetilde{\mathcal{Q}}$ — выпуклые многогранные (многоугольные) аппроксимации множеств $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ геометрических ограничений на управления игроков. Эти множества могут быть и отрезками. Операцию перехода от множества $\widetilde{W}_c(t_{k+1})$ к $\widetilde{W}_c(t_k)$ подбираем так, чтобы получаемые множества $\widetilde{W}_c(t_k)$ хорошо аппроксимировали идеальные сечения $W_c(t_k)$.

Если множество M_c выпукло, то известно, что при любом $t \leq T$ идеальное множество $W_c(t)$ также выпукло. В алгоритме попятного перехода от $\widetilde{W}_c(t_{k+1})$ к $\widetilde{W}_c(t_k)$ можно использовать формулу

$$\widetilde{W}_c(t_k) = (\widetilde{W}_c(t_{k+1}) + (-\Delta t_k)D(t_{k+1})\widetilde{\mathcal{P}}) \overset{*}{\circ} \Delta t_k E(t_{k+1})\widetilde{\mathcal{Q}}, \quad \Delta t_k = t_{k+1} - t_k, \quad (4.1)$$

где символ $+$ означает алгебраическую сумму (сумму Минковского), а $\overset{*}{\circ}$ означает геометрическую разность (разность Минковского) двух множеств. А именно:

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{a + b: a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}, \quad \mathcal{A} \overset{*}{\circ} \mathcal{B} = \bigcap_{b \in \mathcal{B}} (\mathcal{A} - b).$$

Если множество M_c не является выпуклым, но выпукло замыкание его дополнения $M'_c = \text{cl}(\mathbb{R}^2 \setminus M_c)$, то начинаем попятные построения от многоугольной аппроксимации множества M'_c . При этом в попятной процедуре используем формулу, аналогичную (4.1), но только исходным на каждом шаге берем множество $\widetilde{W}'_c(t_{k+1})$, а получаем $\widetilde{W}'_c(t_k)$. При этом, чтобы построить множество $\widetilde{W}'_c(t_k)$, используем множество $(-\Delta t_k)E(t_{k+1})\widetilde{\mathcal{Q}}$ вместо множества $(-\Delta t_k)D(t_{k+1})\widetilde{\mathcal{P}}$ и множество $\Delta t_k D(t_{k+1})\widetilde{\mathcal{P}}$ вместо $\Delta t_k E(t_{k+1})\widetilde{\mathcal{Q}}$. Множество $\widetilde{W}_c(t_k)$ является замыканием дополнения к получаемому множеству $\widetilde{W}'_c(t_k)$: $\widetilde{W}_c(t_k) = \text{cl}(\mathbb{R}^2 \setminus \widetilde{W}'_c(t_k))$.

Специфика геометрии плоскости заключается в том, что для произвольного многоугольного множества его граница склеена из участков локальной “выпуклости” и “вогнутости”, причем соседние участки имеют ребро зацепления. Используем это, когда вводим оператор перехода от $\widetilde{W}_c(t_{k+1})$ к $\widetilde{W}_c(t_k)$.

Предположим, что в процессе попятных построений множества $\widetilde{W}_c(t_{k+1})$ или $\widetilde{W}'_c(t_{k+1})$ распадутся на непересекающиеся многоугольные множества (в рассматриваемой в статье задаче такое происходит с множеством $\widetilde{W}_c(t)$ в случае “слабых” преследователей и с множеством $\widetilde{W}'_c(t)$ в случае “сильных” преследователей). Тогда на дальнейших шагах попятной процедуры ведется независимый пересчет этих выпуклых множеств до момента их исчезновения или обратного слияния.

С точки зрения численных построений, в нашей задаче нет существенных усложнений в случае $T_1 \neq T_2$. В самом деле, пусть $T_1 > T_2$. Тогда на интервале $(T_2, T_1]$ в системе (3.4) при построении множеств $\widetilde{W}_c(t_k)$ принимаем во внимание только динамику переменной x_1 . При этом терминальное множество в момент T_1 берется в виде $M_c(T_1) = \{(x_1, x_2) : |x_1| \leq c\}$. Когда попятные построения доходят до момента T_2 , то полученное на этот момент множество $\widetilde{W}_c(T_2 + 0)$ объединяется с терминальным множеством, связанным со вторым преследователем, т. е.

$$\widetilde{W}_c(T_2) = \widetilde{W}_c(T_2 + 0) \cup \{(x_1, x_2) : |x_2| \leq c\}.$$

Дальнейшие построения ведутся от этого множества.

5. Результаты численных построений

Индивидуальной игрой преследователя P_i против убегающего E (будем кратко обозначать ее $P_i - E$) назовем игру 1×1 , в которой динамика задается соотношениями (2.1) при взятом значении i (т. е. $i = 1$ или $i = 2$). Функция платы имеет вид $\varphi = |z_{P_i}(T_i) - z_E(T_i)|$. Соответствующая одномерная эквивалентная игра описывается соотношением (3.2) при том же значении i и платой $\varphi = |x_i(T_i)|$.

$$1. \text{ Для } t \in [\bar{t}, T_i] \text{ положим } \gamma_i(t) = \int_t^{T_i} (\mu_i |D_i(s)| - \nu |E(s)|) ds, \quad i = 1, 2.$$

Кривая $t \mapsto \gamma_i(t)$, $t \in [\bar{t}, T_i]$, выходящая в момент T_i из нуля, строится в обратном времени $\tau_i = T_i - t$. Зададим минимальное число $\check{c}_i \geq 0$ так, чтобы $\check{c}_i + \gamma_i(t) \geq 0$ при всех $t \in [\bar{t}, T_i]$. Тогда кривая $t \mapsto \check{c}_i + \gamma_i(t)$ определяет верхнюю границу множества $W_{\check{c}_i, i}$ разрешимости с показателем $\check{c}_i$ в индивидуальной игре $P_i - E$, причем $W_{\check{c}_i, i} \neq \emptyset$ при всех $t \in [\bar{t}, T_i]$. Нижняя граница множества $W_{\check{c}_i, i}$ определяется графиком функции $t \mapsto -\check{c}_i - \gamma_i(t)$. Если $c > \check{c}_i$, то множество разрешимости $W_{c, i}$ содержит в себе множество $W_{\check{c}_i, i}$. Его верхняя (нижняя) граница отличается от верхней (нижней) границы множества $W_{\check{c}_i, i}$ сдвигом вверх (вниз) на величину $c - \check{c}_i$. Если $0 \leq c < \check{c}_i$, то верхнюю границу множества разрешимости $W_{c, i}$ строим в обратном времени лишь до первого момента t_* прямого времени такого, что $c + \gamma_i(t_* - 0) < 0$. Нижняя граница симметрична верхней относительно оси времени.

2. Рассмотрим случай, когда поведение убегающего описывается системой вида (1.2), поведение преследователей P_1, P_2 — системой вида (1.4). Используя обозначения системы (2.1),

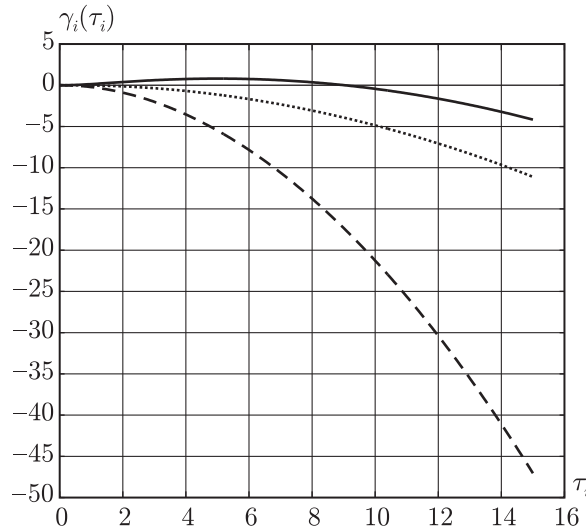


Рис. 1. Кривые γ_i для трех вариантов динамики: $d < 0$ (пунктирная линия); $d = 0$ (точечная линия); $d > 0$ (сплошная линия).

получаем

$$A_{P_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/l_{P_i} \end{pmatrix}, \quad B_{P_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ d_{P_i} \\ (1 - d_{P_i})/l_{P_i} \end{pmatrix}, \quad A_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/l_E \end{pmatrix}, \quad B_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/l_E \end{pmatrix},$$

$$|u_i| \leq \mu_i, \quad i = 1, 2, \quad |v| \leq \nu.$$

Пусть преследователи P_1 и P_2 одинаковые (т.е. имеют одинаковые параметры динамики) и $T_1 = T_2 = T$. Выберем параметры

$$\mu_1 = \mu_2 = 0.9, \quad \nu = 1, \quad l_{P_1} = l_{P_2} = 1/0.9, \quad l_E = 1, \quad T = 15.$$

Вначале считаем, что $d_{P_1} = d_{P_2} = d = 0$. Тогда каждый из объектов имеет динамику первого порядка по управлению. При этом для выбранных параметров выполнены соотношения

$$\frac{\mu_i}{\nu} = \frac{0.9}{1} < 1, \quad \frac{\mu_i}{\nu} \cdot \frac{l_E}{l_{P_i}} = \frac{0.9}{1} \cdot \frac{1}{1/0.9} = 0.81 < 1, \quad i = 1, 2,$$

что соответствует, по терминологии работы [15], случаю “слабых” преследователей. В индивидуальных играх 1×1 между P_i и E , $i = 1, 2$, кривая γ_i , определяющая характер множества разрешимости $W_{c,i}$, имеет вид, как на рис. 1 (точечная линия). Трехмерное множество разрешимости W_c для $c = 2.0$ в игре 2×1 показано на рис. 2б. Отметим, что в случае слабых преследователей $W_0(t) = \emptyset$ при любом $t < T$, т.е. отсутствуют начальные позиции, для которых первый игрок может гарантировать точную поимку.

Пусть теперь $d > 0$. Для $d = 0.5$ кривая γ_i также изображена на рис. 1 (сплошная линия). Трехмерное множество разрешимости $W_{2,0}$ показано на рис. 2в. Мы видим, что оно больше аналогичного множества при $d = 0$. На рис. 3 показано трехмерное множество W_c , соответствующее $c = 0$. Из любой начальной позиции в этом множестве первый игрок гарантирует нулевой промах, т.е. точную поимку.

Наконец, пусть $d = -0.5 < 0$. В этом случае опять $W_0(t) = \emptyset$ при $t < T$. Кривая γ_i изображена на рис. 1 штриховой линией. Трехмерное множество разрешимости $W_{2,0}$ показано на рис. 2а.

Рисунки 2 и 3 сделаны в одном и том же масштабе и с одной точки зрения.

Таким образом, при помощи эффективного численного алгоритма можно анализировать и сравнивать различные варианты множеств разрешимости.

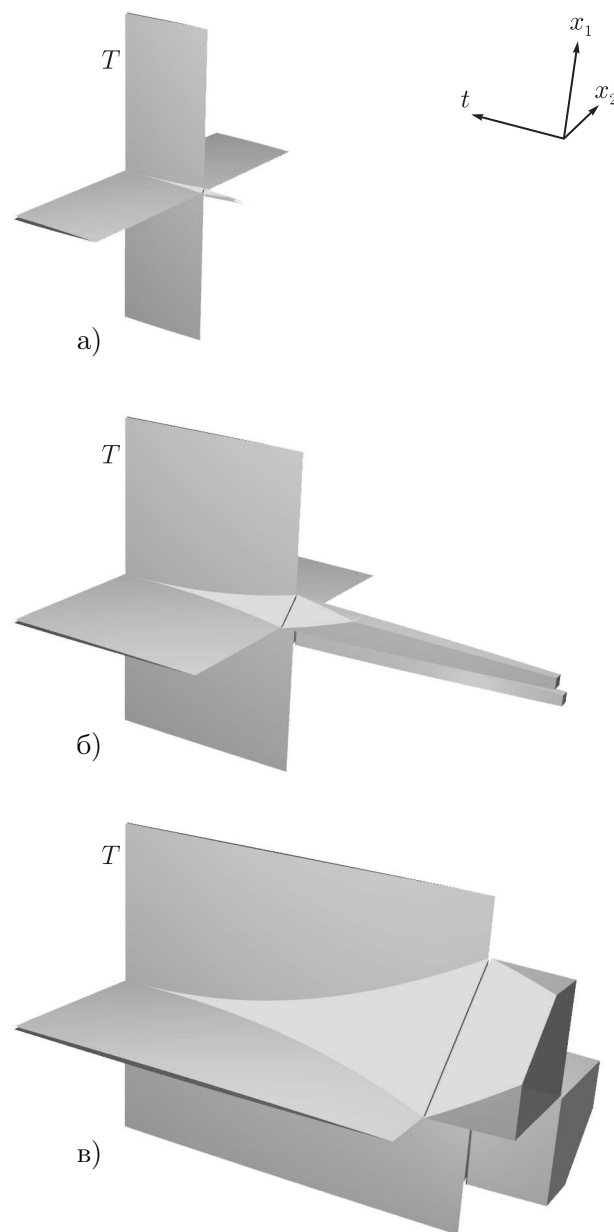


Рис. 2. Множества разрешимости для трех вариантов динамики, $c = 2.0$: а) $d < 0$, б) $d = 0$, в) $d > 0$.

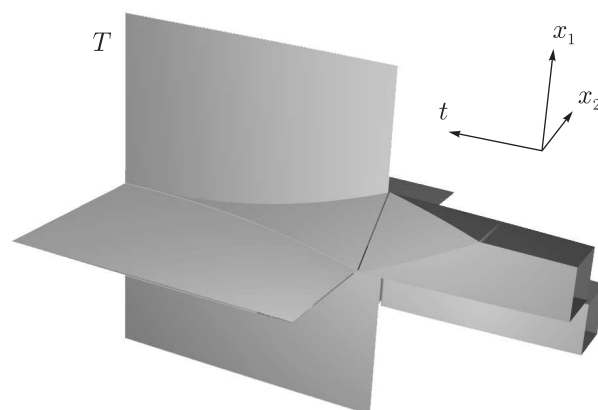


Рис. 3. Зона захвата с нулевым промахом (множество разрешимости для $c = 0$) для случая $d > 0$.

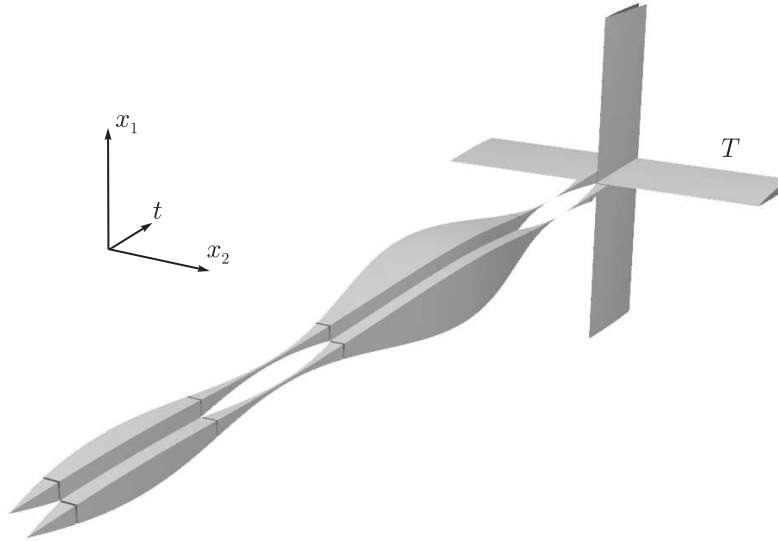


Рис. 4. Множество разрешимости с несколькими “узкими шейками”.

3. Обращаясь к динамике вида (1.3) для преследователей, приведем пример “экзотического” множества разрешимости в игре 2×1 . Считаем, что убегающий имеет динамику вида (1.2). В обозначениях системы (2.1) получаем

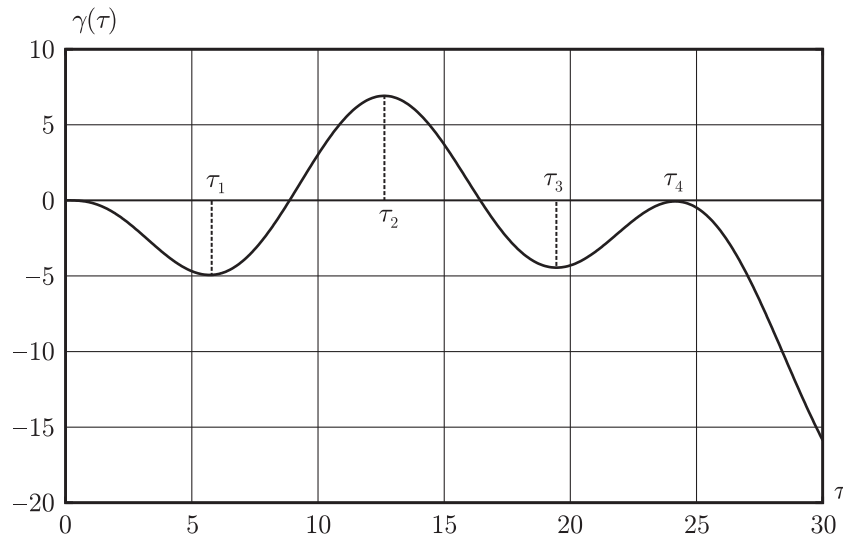
$$A_{P_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_{P_i}^2 & -\zeta_{P_i} \end{pmatrix}, \quad B_{P_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/l_E \end{pmatrix}, \quad B_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/l_E \end{pmatrix},$$

$$|u_i| \leq \mu_i, \quad i = 1, 2, \quad |v| \leq \nu.$$

Пусть

$$\mu_1 = \mu_2 = 0.3, \quad \nu = 1.3, \quad \omega_{P_1} = \omega_{P_2} = 0.5, \quad \zeta_{P_1} = \zeta_{P_2} = 0.0025, \quad l_E = 1.0, \quad T_1 = T_2 = 30.$$

На рис. 4 показано множество разрешимости W_c для $c = 2.1$. Его “необычность” связана с наличием двух промежутков времени с “узкими шейками”. Ранее для трехмерных множеств

Рис. 5. Кривая γ для примера с двумя промежутками с “узкими шейками”.

разрешимости в модельных задачах космического преследования в [2; 14] были построены примеры с одним таким промежутком. В случае игры 1×1 вида (1.3) для преследователя и вида (1.2) для убегающего возможность ситуации с несколькими промежутками “узких шеек” была предсказана в [4].

График функции $\gamma(\tau) = \gamma_1(\tau) = \gamma_2(\tau)$ (в обратном времени τ) для рассматриваемого примера приведен на рис. 5. Видно, что каждый из преследователей имеет меньшие динамические возможности, чем убегающий, на промежутках обратного времени $[0, \tau^1]$, $[\tau^2, \tau^3]$ и $[\tau^4, T]$ — на этих промежутках функция γ убывает. На промежутках $[\tau^1, \tau^2]$ и $[\tau^3, \tau^4]$ функция γ возрастает, что соответствует превосходству динамических возможностей преследователей над убегающим. Таким образом, имеем переменное преимущество догоняющих над убегающим. Промежутки времени, содержащие “узкие шейки” трехмерного множества разрешимости, расположены около моментов τ^1 и τ^3 .

6. Случай сильных преследователей

Будем называть преследователя P_i *сильным* по отношению к убегающему E , если для всех $t \in (\bar{t}, T_i)$ выполнено неравенство $\gamma_i(t) > 0$. Это означает, что множество разрешимости $W_{0,i}$ в индивидуальной игре $P_i - E$ имеет непустые невырожденные сечения $W_{0,i}(t)$ при всех $t \in (\bar{t}, T_i)$. В этом разделе предположим, что каждый из преследователей сильнее убегающего.

Очевидно, что при $c \geq 0$ и $t \in [\bar{t}, \hat{T}]$ справедливо вложение

$$\{x: x_1 \in W_{c,1}(t)\} \cup \{x: x_2 \in W_{c,2}(t)\} \subset W_c(t).$$

Поскольку в случае сильных преследователей для каждого $i = 1, 2$ множество $W_{c,i}(t)$ представляет собой отрезок, симметричный относительно нуля, то множество $\text{cl}(\mathbb{R}^2 \setminus W_c(t))$ распадается на четыре выпуклых подмножества $W_c^j(t)$, $j = \text{I, II, III, IV}$, каждое в своем квадранте. Мы можем рассматривать развитие во времени любого из таких множеств независимо от других. Например, множество W_c^{I} есть максимальный v -стабильный мост, обрывающийся в момент $\hat{T}$ на выпуклом множестве $\{x: x_1 \geq \gamma_1(\hat{T}) + c, x_2 \geq c\}$. Для построения множеств W_c^j разумно применить попятные процедуры построения максимальных v -стабильных мостов с выпуклыми t -сечениями. Можно использовать и теоретические факты, связанные с такими мостами. В частности, поскольку функция $V(\hat{T}, \cdot)$ вогнута на множестве $W_0^j(\hat{T})$, то и функция $V(t, \cdot)$ при $t \in [\bar{t}, \hat{T}]$ является вогнутой на $W_0^j(t)$. Специфическое свойство нашей задачи состоит в том, что на краях любой горизонтальной или вертикальной прямой функция $V(t, \cdot)$ постоянна. Таким образом, в случае сильных преследователей для любой горизонтальной или вертикальной прямой значение $V(t, x)$ равно нулю на пересечении этой прямой с множеством $W_0(t)$ и монотонно возрастает при удалении точки x от отрезка пересечения, а далее становится постоянной.

6.1. Оптимальное управление первого игрока

1. Положим $u_1^* = \mu_1 \text{sign } D_1(t)$ справа от вертикальной оси и $u_1^* = -\mu_1 \text{sign } D_1(t)$ слева от нее, т. е. $u_1^* = \mu_1 \text{sign}(D_1(t) \cdot x_1)$. Следовательно, в каждый момент t берем ось x_2 в качестве линии переключения управления u_1 . Аналогично, примем ось x_1 в качестве линии переключения управления u_2 : выше оси положим $u_2^* = \mu_2 \text{sign } D_2(t)$, ниже — $u_2^* = -\mu_2 \text{sign } D_2(t)$, т. е. $u_2^* = \mu_2 \text{sign}(D_2(t) \cdot x_2)$. Указанный способ задания управления первого игрока обеспечивает в позиции (t, x) направление вектора $(-D_1(t), 0)^\top u_1^*$ $((0, -D_2(t))^\top u_2^*)$ в системе (3.4) на точку минимума сужения функции цены $V(t, \cdot)$ на горизонтальную (вертикальную) прямую, проходящую через точку x . Минимум сужения равен нулю и реализуется на оси x_2 (x_1). Опираясь на такое свойство, покажем, что введенный очень простой способ $u^*(t, x)$ управления первого игрока по принципу обратной связи является оптимальным в случае сильных преследователей.

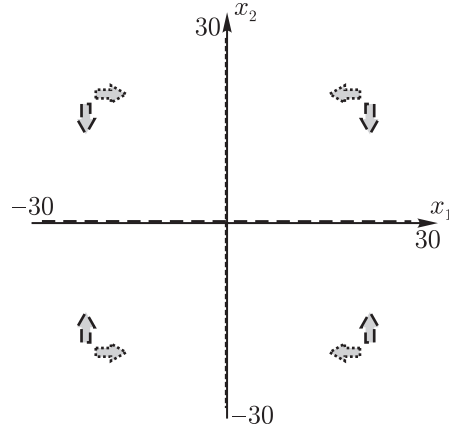


Рис. 6. Оптимальный синтез управления первого игрока.

Оптимальный синтез показан на рис. 6. Стрелки с точечной границей указывают направление вектора $(-D_1(t), 0)^\top u_1^*$, стрелки со штриховой границей — вектора $(0, -D_2(t))^\top u_2^*$.

Докажем оптимальность введенного способа управления первого игрока и его устойчивость по отношению к информационным ошибкам.

2. Вначале рассмотрим случай, когда $T_1 = T_2$. Обозначим $T = T_1 = T_2$.

Заметим, что константа Липшица $L(t)$ функции $x \mapsto V(t, x)$ для любого $t \leq T$ равна 1. Это следует из известного факта [16, с. 110–111], что константа Липшица функции $x \mapsto V(t, x)$ в игре с динамикой вида (3.4) и фиксированным моментом окончания совпадает с константой Липшица терминальной функции платы. В нашем случае терминальная функция платы подсчитывается в момент T и равна $\min\{|x_1|, |x_2|\}$. Ее константа Липшица есть 1.

Обозначим через K_i максимальное значение величины $|D_i(t)|$ на промежутке $[\bar{t}, T]$. Пусть σ_i — оценка сверху модуля производной функции $t \mapsto D_i(t)$ на промежутке $[\bar{t}, T]$.

Введем множество

$$\mathcal{M}_\varepsilon = \{(x_1, x_2) : |x_1| \leq \varepsilon\} \cup \{(x_1, x_2) : |x_2| \leq \varepsilon\}.$$

Отметим что, неравенство $u^*(t, x) \neq u^*(t, x + \zeta)$ возможно лишь при $x \in \mathcal{M}_\varepsilon$.

Предположим, что первый игрок применяет стратегию u^* в дискретной схеме управления с шагом Δ . Пусть он измеряет положение системы (3.4) с ошибкой, не превосходящей по модулю величины $\varepsilon \geq 0$. Это означает, что если действительное положение системы (3.4) в некоторый момент t_s дискретной схемы есть $x(t_s)$, то измерение дает первому игроку положение $x(t_s) + \zeta(t_s)$, где $|\zeta(t_s)| \leq \varepsilon$, и его управление вырабатывается в виде $u^*(t_s, x(t_s) + \zeta(t_s))$.

Функции $D_1(t)$ и $D_2(t)$ — аналитические. Поэтому каждая из них либо не имеет нулей на промежутке $[\bar{t}, T]$, либо количество нулей конечно (случай тождественного равенства нулю невозможен). Обозначим количество нулей этих функций на отрезке $[\bar{t}, T]$ через m_1 и m_2 соответственно. Рассмотрим три случая.

1) Для любого момента $t \in [t_s, t_s + \eta]$, где t_s — некоторый момент дискретной схемы, а $\eta \in [0, \Delta]$, имеем $x(t) \notin \mathcal{M}_\varepsilon$, и на промежутке $[t_s, t_s + \eta]$ нет нулей функций $D_1(t)$ и $D_2(t)$.

2) Для любого момента $t \in [t_s, t_s + \eta]$, где t_s — некоторый момент дискретной схемы, а $\eta \in [0, \Delta]$, имеем $x(t) \notin \mathcal{M}_\varepsilon$, и на промежутке $[t_s, t_s + \eta]$ по крайней мере одна из функций $D_1(t)$, $D_2(t)$ имеет хотя бы один нуль.

3) На некотором промежутке времени $[t^\sharp, t_s + \Delta]$, где t_s — момент дискретной схемы, $t^\sharp \in [t_s, t_s + \Delta]$, управления u_1 и u_2 первого игрока произвольны.

Для указанных случаев справедливы следующие оценки приращения функции цены. В первом случае получаем

$$V(t_s + \eta, x(t_s + \eta)) \leq V(t_s, x(t_s)). \quad (6.1)$$

Пусть, для определенности, во втором случае функция $D_1(t)$ имеет хотя бы один нуль на промежутке $[t_s, t_s + \eta]$, а функция $D_2(t)$ нулей не имеет. Тогда справедлива оценка

$$V(t_s + \eta, x(t_s + \eta)) \leq V(t_s, x(t_s)) + 2\mu_1\sigma_1\eta^2.$$

Если на промежутке $[t_s, t_s + \eta]$ есть нули обеих функций $D_1(t)$ и $D_2(t)$, то оценка изменения функции цены записывается в виде

$$V(t_s + \eta, x(t_s + \eta)) \leq V(t_s, x(t_s)) + \sum_i 2\mu_i\sigma_i\eta^2. \quad (6.2)$$

Наконец, в третьем случае

$$V(t_s + \Delta, x(t_s + \Delta)) \leq V(t_s^\sharp, x(t_s^\sharp)) + \sum_i 2\mu_i K_i \Delta. \quad (6.3)$$

Подчеркнем, что приведенные оценки не зависят от реализации $v(\cdot)$ управления второго игрока.

Поясним, как доказывается, например, оценка (6.2). Пусть $v(\cdot)$ — реализация управления второго игрока на промежутке $[t_s, t_s + \eta]$. По предположению, движение $x(t)$ на $[t_s, t_s + \eta]$ идет вне множества $\mathcal{M}_\varepsilon$. Стало быть, оно проходит в одном из квадрантов плоскости x_1, x_2 .

Разобьем отрезок $[t_s, t_s + \eta]$ с некоторым шагом δ на F частей так, чтобы на любом промежутке $[t_s + k\delta, t_s + (k+1)\delta]$, $k = 0, \dots, F-1$, любое движение системы (3.4) с начальной точкой $x(t_s + k\delta)$ оставалось в рассматриваемом квадранте. Положим $c_k = V(t_s + k\delta, x(t_s + k\delta))$.

Используя свойство стабильности множества W_{c_k} , на основе управления $v(\cdot)$ второго игрока на промежутке $[t_s + k\delta, t_s + (k+1)\delta]$ выберем программное управление $u_k(\cdot)$ первого игрока, которое при начальной точке $x(t_s + k\delta)$ и взятом $v(\cdot)$ обеспечивает включение $x_k(t_s + (k+1)\delta) \in W_{c_k}(t_s + (k+1)\delta)$. Рассмотрим программное управление $\bar{u}_k(\cdot)$, первая компонента которого совпадает с первой компонентой управления $u_k(\cdot)$, а вторая тождественно равняется $\mu_2 \text{sign}(D_2(t_s)x(t_s))$. Тогда движение $\bar{x}_k(\cdot)$ в силу управления $\bar{u}_k(\cdot)$ первого игрока и управления $v(\cdot)$ второго, выходящее из точки $x(t_s + k\delta)$, также обеспечивает включение $\bar{x}_k(t_s + (k+1)\delta) \in W_{c_k}(t_s + (k+1)\delta)$. Это происходит из-за монотонности функции цены по переменной x_2 в рассматриваемом квадранте.

По предположению значение $D_1(\tilde{t})$ в некоторый момент $\tilde{t} \in [t_s, t_s + \eta]$ равно нулю. Следовательно, $|D_1(t)| \leq \sigma_1\eta$ при любом $t \in [t_s, t_s + \eta]$. Имеем

$$\left| \int_{t_s + k\delta}^{t_s + (k+1)\delta} (D_1(t)u_1^*(t_s, x(t_s)) - D_1(t)\bar{u}_{k,1}(t)) dt \right| \leq 2\mu_1\sigma_1\eta\delta.$$

Отсюда

$$|x(t_s + (k+1)\delta) - \bar{x}_k(t_s + (k+1)\delta)| \leq 2\mu_1\sigma_1\eta\delta.$$

Поскольку управление $\bar{u}_k(\cdot)$ удовлетворяет условию стабильности, то

$$V(t_s + (k+1)\delta, \bar{x}_k(t_s + (k+1)\delta)) \leq V(t_s + k\delta, x(t_s + k\delta)),$$

и значит

$$V(t_s + (k+1)\delta, x(t_s + (k+1)\delta)) \leq V(t_s + k\delta, x(t_s + k\delta)) + 2\mu_1\sigma_1\eta\delta.$$

Суммируя такие оценки при $k = 0, \dots, F-1$, получаем

$$V(t_s + \eta, x(t_s + \eta)) \leq V(t_s, x(t_s + \eta)) + 2\mu_1\sigma_1\eta\delta F = V(t_s, x(t_s + \eta)) + 2\mu_1\sigma_1\eta^2.$$

3. Рассмотрим движение $t \mapsto x(t)$ системы (3.4) на промежутке $[t_0, T]$, $t_0 \in [\bar{t}, T]$, в силу стратегии u^* первого игрока с шагом Δ дискретной схемы при некоторой реализации $v(\cdot)$ управления второго игрока.

Если $x(t) \notin \mathcal{M}_\varepsilon$ для любого $t \in [t_0, T]$, то с учетом оценок (6.1), (6.2) получаем

$$V(T, x(T)) \leq V(t_0, x(t_0)) + \sum_i 2\mu_i m_i \sigma_i \Delta^2. \quad (6.4)$$

Пусть $x(\tilde{t}) \in \mathcal{M}_\varepsilon$ для некоторого момента $\tilde{t} \in [t_0, T]$. Обозначим через $\tilde{t}$ наибольший из таких моментов. Если $\tilde{t} = T$, то $V(T, x(T)) \leq \varepsilon$.

Считаем, что $\tilde{t} < T$. Тогда на интервале $(\tilde{t}, T]$ точка $x(t)$ находится вне множества $\mathcal{M}_\varepsilon$. Рассмотрим интервал $[t_s, t_s + \Delta)$ дискретной схемы, где индекс s такой, что $\tilde{t} \in [t_s, t_s + \Delta)$. На момент $t_s + \Delta$ в силу (6.3) имеем

$$V(t_s + \Delta, x(t_s + \Delta)) \leq V(\tilde{t}, x(\tilde{t})) + \sum_i 2\mu_i K_i \Delta.$$

Дальнейшее приращение функции цены на промежутке $[t_s + \Delta, T]$ в силу (6.1), (6.2) оценивается неравенством

$$V(T, x(T)) \leq V(t_s + \Delta, x(t_s + \Delta)) + \sum_i 2\mu_i m_i \sigma_i \Delta^2.$$

Поскольку $x(\tilde{t}) \in \mathcal{M}_\varepsilon \subset W_\varepsilon(\tilde{t})$, то $V(\tilde{t}, x(\tilde{t})) \leq \varepsilon$. В целом, для этого случая имеем следующую оценку приращения функции цены:

$$V(T, x(T)) \leq \varepsilon + \sum_i 2K_i \mu_i \Delta + \sum_i 2m_i \mu_i \sigma_i \Delta^2. \quad (6.5)$$

Собирая оценки (6.4) и (6.5), когда движение $x(t)$ проходит вне множества $\mathcal{M}_\varepsilon$ и когда заходит в него, получаем

$$V(T, x(T)) \leq \max \left\{ V(t_0, x(t_0)) + \sum_i 2\mu_i m_i \sigma_i \Delta^2, \varepsilon + \sum_i 2\mu_i K_i \Delta + \sum_i 2\mu_i m_i \sigma_i \Delta^2 \right\}. \quad (6.6)$$

Таким образом, доказано следующее

Утверждение 1. Пусть первый игрок применяет стратегию u^* в дискретной схеме управления с шагом $\Delta > 0$ при измерительных ошибках, не превосходящих $\varepsilon \geq 0$. Тогда для любой начальной позиции $(t_0, x(t_0))$, $t_0 \in [t, T)$, и любой допустимой реализации $v(\cdot)$ управления второго игрока значение функции цены в конечный момент T удовлетворяет неравенству (6.6).

Это утверждение характеризует оптимальность стратегии u^* и ее устойчивость по отношению к малым ошибкам измерения фазового состояния системы (3.4).

4. Пусть $T_1 \neq T_2$. Как было оговорено ранее, полагаем $T_1 > T_2$. Константа Липшица $L(t)$ функции $x \mapsto V(t, x)$ для любого $t \leq T_1$ равна 1. В самом деле, если $t \in (T_2, T_1]$, значение $V(t, x)$ определяется платой $|x_1(T_1)|$. Ее константа Липшица есть 1. Стало быть, $L(t) = 1$ при $t \in (T_2, T_1]$. Если $t \leq T_2$, то значение $V(t, x)$ вычисляется как значение функции цены в игре с фиксированным моментом окончания T_2 и платой $\min\{V(T_2 + 0, x), |x_2|\}$. Поскольку константа Липшица такой платы тоже равна 1, то $L(t) = 1$ при $t \leq T_2$.

Теперь определим множество $\mathcal{M}_\varepsilon$ как полосу полуширины ε около оси x_2 при $t \in (T_2, T_1]$ и как крест (как это делалось выше) при $t \leq T_2$.

Справедливо утверждение, аналогичное утверждению 1. Различие в том, что на интервале $(T_2, T_1]$ работает только управление u_1^* первого игрока. Имеют место оценки, аналогичные оценкам из доказательства утверждения 1. Вначале они записываются для промежутка $[t_0, T_2]$, затем для полуинтервала $(T_2, T_1]$.

6.2. Оптимальное управление второго игрока

В случае сильных преследователей при дополнительном предположении $T_1 = T_2 = T$ нетрудно найти и оптимальный способ v^* управления второго игрока.

1. Поскольку $T_1 = T_2$, то $E_1(t) = E_2(t)$. Следовательно, вектор $E(t)$ при $E(t) \neq 0$ направлен по биссектрисе первого и третьего квадрантов. Отсюда получаем, что в первом квадранте оптимальное управление v^* вычисляется по формуле $v^* = \nu \operatorname{sign} E_1(t)$. Такое управление направляет вектор $E(t)v^*$, приложенный к текущей точке $x(t)$, в сторону увеличения цены игры. В третьем квадранте оптимальное управление v^* задается формулой $v^* = -\nu \operatorname{sign} E_1(t)$. Во втором квадранте при любом фиксированном $t \in [\bar{t}, T]$ множества $\mathcal{W}_c^{\text{II}}(t)$ отличаются для любых двух значений c_1 и c_2 только сдвигом вдоль биссектрисы второго и четвертого квадрантов. Каждое из множеств $\mathcal{W}_c^{\text{II}}(t)$ имеет на своей границе полубесконечную горизонтальную сторону, полубесконечную вертикальную сторону и отрезок, параллельный биссектрисе первого и третьего квадрантов (то есть параллельный вектору $E(t)$ при $E(t) \neq 0$), соединяющий начала этих лучей. Длина такого наклонного отрезка при фиксированном t одна и та же для всех $c \geq 0$ и равна $2\nu \int_t^T |E(\vartheta)| d\vartheta$. Проведем через точки середин наклонных отрезков луч и соединим его начало с началом координат. В четвертом квадранте строится аналогичный луч, параллельный биссектрисе этого квадранта. Соединим отрезком его начальную точку с началом координат.

В целом, получаем ломаную, состоящую из двух лучей и отрезка, соединяющего их начальные точки и проходящего через начало координат. Обозначим ее $\pi^{(2)}(3, t)$ и назовем линией переключения второго игрока. В качестве двух других линий переключения $\pi^{(2)}(1, t)$ и $\pi^{(2)}(2, t)$ возьмем горизонтальную и вертикальную оси. Оптимальный синтез управления второго игрока для некоторого момента t показан на рис. 7. Стрелками отмечено направление вектора $E(t)v^*$ в шести клетках, на которые разделяется плоскость x_1, x_2 тремя линиями переключения. Во втором и четвертом квадрантах управление $v^*(t, x)$ второго игрока выбирается так, чтобы направлять вектор $E(t)v^*$ к линии $\pi^{(2)}(3, t)$, т. е. к точке максимума сужения функции цены в соответствующем квадранте на прямую, проходящую через положение x параллельно вектору $E(t)$.

Если преследователи сильные и одинаковые, то линия переключения $\pi^{(2)}(3, t)$ не зависит от времени и совпадает с биссектрисой второго и четвертого квадрантов.

2. Обозначим через K_E максимальное значение величины $|E(t)|$ на промежутке $[\bar{t}, T]$. Пусть σ_E — оценка сверху модуля производной функции $t \mapsto E(t)$ на промежутке $[\bar{t}, T]$. Обозначим

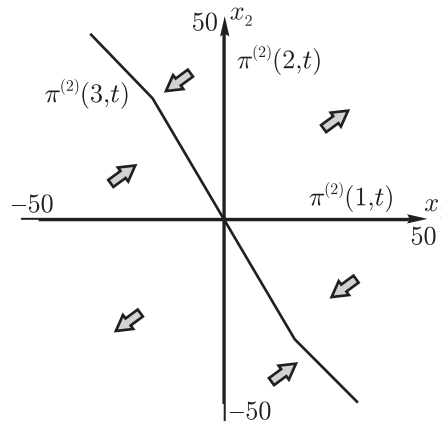


Рис. 7. Оптимальный синтез управления второго игрока.

через m_E количество моментов времени на отрезке $[\bar{t}, T]$ таких, что $E(t) = 0$. Положим

$$\pi_\varepsilon^{(2)}(3, t) = \text{cl}(O(\varepsilon, \pi^{(2)}(3, t)) \setminus W_\varepsilon(t)).$$

Здесь $O(\varepsilon, A)$ — открытая ε -окрестность множества A .

Для момента t , такого что $E(t) \neq 0$, и произвольной точки x символом $\mathcal{A}(x)$ обозначим прямую, проходящую через x параллельно вектору $E(t)$. Прямая $\mathcal{A}(x)$ параллельна биссектрисе первого и третьего квадрантов. Если x принадлежит второму или четвертому квадранту, то максимум сужения функции цены на пересечение прямой $\mathcal{A}(x)$ со вторым и четвертым квадрантом достигается в точке на линии $\pi^{(2)}(3, t)$. Значение этого максимума обозначим $\mathcal{V}(t, x)$.

Рассмотрим несколько характерных случаев движения системы (3.4) в силу стратегии v^* второго игрока (если не указано иное), применяемой в дискретной схеме с шагом Δ , и некоторого управления $u(\cdot)$ первого игрока.

1) Для любого момента $t \in [t_s, t_s + \eta]$, где t_s — некоторый момент дискретной схемы, $\eta \in [0, \Delta]$, имеем $x(t) \notin W_\varepsilon(t) \cup \pi_\varepsilon^{(2)}(3, t)$, и на промежутке $[t_s, t_s + \eta]$ нет нулей функции $E(t)$.

2) Для любого момента $t \in [t_s, t_s + \eta]$, где t_s — некоторый момент дискретной схемы, $\eta \in [0, \Delta]$, имеем $x(t) \notin W_\varepsilon(t) \cup \pi_\varepsilon^{(2)}(3, t)$, и на промежутке $[t_s, t_s + \eta]$ функция $E(t)$ имеет хотя бы один нуль.

3) На некотором промежутке времени $[t^\sharp, t_s + \Delta]$, где t_s — момент дискретной схемы, $t^\sharp \in [t_s, t_s + \Delta]$, управление v второго игрока произвольно.

4) Предположим, что выполнено соотношение $\varepsilon < V(t_0, x(t_0)) - 2\nu m_E \sigma_E \Delta^2$ и момент $\tilde{t}$ такой, что $x(\tilde{t}) \in \pi_\varepsilon^{(2)}(3, t)$.

Для указанных случаев верны следующие оценки изменения функции цены. В первом случае имеем

$$V(t_s + \eta, x(t_s + \eta)) \geq V(t_s, x(t_s)). \quad (6.7)$$

Во втором случае справедлива оценка

$$V(t_s + \eta, x(t_s + \eta)) \geq V(t_s, x(t_s)) - 2\nu \sigma_E \eta^2. \quad (6.8)$$

Оценка для третьего случая имеет вид

$$V(t_s + \Delta, x(t_s + \Delta)) \geq V(t^\sharp, x(t^\sharp)) - 2\nu K_E \Delta.$$

Наконец, для четвертого случая соответствующая оценка записывается в виде

$$V(\tilde{t}, x(\tilde{t})) \geq V(t_0, x(t_0)) - \varepsilon. \quad (6.9)$$

Приведем доказательство оценки (6.9). Пусть $u(\cdot)$ — некоторая реализация управления первого игрока на промежутке $[t_0, \tilde{t}]$.

Если $x(t_0)$ принадлежит первому или третьему квадранту, а по предположению $x(\tilde{t}) \in \pi_\varepsilon^{(2)}(3, t)$ (т.е. точка $x(\tilde{t})$ лежит во втором или четвертом квадранте), то существует момент $\hat{t} \in (t_0, \tilde{t})$ такой, что $x(\hat{t}) \in W_\varepsilon(\hat{t})$. Пусть это первый момент входа движения $x(t)$ в $W_\varepsilon(t)$. В силу оценок (6.7) и (6.8) имеем $V(\hat{t}, x(\hat{t})) \geq V(t_0, x(t_0)) - 2\nu m_E \sigma_E \Delta^2$. Учитывая предположение случая 4), получаем $V(\hat{t}, x(\hat{t})) > \varepsilon$, т.е. $x(\hat{t}) \notin W_\varepsilon(\hat{t})$. Пришли к противоречию.

Предположим теперь, что $x(t_0)$ принадлежит второму или четвертому квадранту; пусть, для определенности, второму. Положим $c_0 = V(t_0, x(t_0))$. Используя свойство стабильности множества $\mathcal{W}_{c_0}^\Pi$, по управлению $u(\cdot)$ первого игрока на промежутке $[t_0, \tilde{t}]$ выберем программное управление $v_{\text{st}}(\cdot)$ второго игрока, которое при начальной точке $x(t_0)$ и рассматриваемом управлении $u(\cdot)$ порождает движение $x_{\text{st}}(\cdot)$ такое, что $x_{\text{st}}(\tilde{t}) \in \mathcal{W}_{c_0}^\Pi(\tilde{t})$. Стало быть, точка $x_{\text{st}}(\tilde{t})$ находится во втором квадранте, и выполнено неравенство $V(\tilde{t}, x_{\text{st}}(\tilde{t})) \geq V(t_0, x(t_0))$. Рассмотрим прямую $\mathcal{A}(x(\tilde{t}))$. По определению, она проходит через точку $x(\tilde{t})$; на ней также лежит точка $x_{\text{st}}(\tilde{t})$. Последнее следует из того, что вектор

$$x(\tilde{t}) - x_{\text{st}}(\tilde{t}) = \int_{t_0}^{\tilde{t}} (E(t)v(t) - E(t)v_{\text{st}}(t)) dt = \int_{t_0}^{\tilde{t}} E(t)(v(t) - v_{\text{st}}(t)) dt$$

параллелен биссектрисе первого и третьего квадрантов. Так как $x(\tilde{t}) \in \pi_\varepsilon^{(2)}(3, t)$, то $x(\tilde{t})$ находится тоже во втором квадранте и $V(\tilde{t}, x(\tilde{t})) \geq \mathcal{V}(\tilde{t}, x(\tilde{t})) - \varepsilon$. Поскольку $\mathcal{V}(\tilde{t}, x(\tilde{t})) \geq V(\tilde{t}, x_{st}(\tilde{t}))$ (из определения $\mathcal{V}$) и $V(\tilde{t}, x_{st}(\tilde{t})) \geq V(t_0, x(t_0))$ (обосновано выше), то $\mathcal{V}(\tilde{t}, x(\tilde{t})) \geq V(t_0, x(t_0))$. В результате имеем оценку (6.9).

3. Получим оценку значения $V(T, x(T))$ функции цены в конечной точке движения $x(t)$, выходящего в момент t_0 из точки $x(t_0)$ под воздействием стратегии v^* второго игрока, применяемой в дискретной схеме с шагом Δ , и некоторой реализации управления $u(\cdot)$ первого игрока. Предположим, что $V(t_0, x(t_0)) > 0$. Пусть известно или само значение $V(t_0, x(t_0))$, или его оценка снизу $\bar{V}(t_0, x(t_0)) > 0$. Выберем значения $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{\Delta}$ так, чтобы

$$3\bar{\varepsilon} + 2\nu K_E \bar{\Delta} + 2\nu m_E \sigma_E \bar{\Delta}^2 \leq \bar{V}(t_0, x(t_0)). \quad (6.10)$$

Пусть $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}]$, $\Delta \in (0, \bar{\Delta}]$. В каждый момент t_s дискретной схемы управление второго игрока формируется в виде $v^*(t_s, x(t_s) + \zeta(t_s))$, $|\zeta(t_s)| \leq \varepsilon$.

Если точка $x(t)$ при $t \in [t_0, T]$ не попадает в множество $\pi_\varepsilon^{(2)}(3, t)$, то при всех $t \in [t_0, T]$ имеем $x(t) \notin W_\varepsilon(t)$. Факт попадания с учетом оценок (6.7), (6.8) противоречил бы неравенству $V(t_0, x(t_0)) - 2\nu m_E \sigma_E \Delta^2 \geq 3\bar{\varepsilon}$. Поэтому в момент T получаем оценку

$$V(T, x(T)) \geq V(t_0, x(t_0)) - 2\nu m_E \sigma_E \Delta^2.$$

Пусть теперь $x(t) \in \pi_\varepsilon^{(2)}(3, t)$ при некотором $t \in [t_0, T]$. Обозначим через $\tilde{t}$ наибольший из таких моментов. С учетом оценки (6.9) имеем $V(\tilde{t}, x(\tilde{t})) \geq V(t_0, x(t_0)) - \varepsilon$ (предположение о применимости этой оценки выполнено в силу выбора величин ε и Δ). Следовательно,

$$V(\tilde{t}, x(\tilde{t})) \geq 2\bar{\varepsilon} + 2\nu K_E \bar{\Delta} + 2\nu m_E \sigma_E \bar{\Delta}^2.$$

Поэтому в момент $\tilde{t}$ точка $x(\tilde{t})$ находится вне $W_\varepsilon(\tilde{t})$, и в силу рассуждений, аналогичных изложенным в предыдущем абзаце, $x(t) \notin W_\varepsilon(t)$ при всех $t \in (\tilde{t}, T]$. Стало быть, в момент T выполнено неравенство

$$V(T, x(T)) \geq V(t_0, x(t_0)) - \varepsilon - 2\nu K_E \Delta - 2\nu m_E \sigma_E \Delta^2. \quad (6.11)$$

Отсюда получаем, что итоговая оценка имеет вид (6.11).

Таким образом, доказано следующее

Утверждение 2. Предположим, что $V(t_0, x(t_0)) > 0$ и для этого значения известна оценка снизу $\bar{V}(t_0, x(t_0)) > 0$. Пусть значения $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{\Delta}$ выбраны так, что выполнено неравенство (6.10). Пусть второй игрок применяет стратегию v^* в дискретной схеме управления с шагом $\Delta \in (0, \bar{\Delta}]$ при измерительных ошибках, не превосходящих $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}]$. Тогда для любой допустимой реализации $u(\cdot)$ управления первого игрока значение функции цены в конечный момент T удовлетворяет неравенству (6.11).

Это утверждение характеризует оптимальность стратегии v^* и ее устойчивость по отношению к малым ошибкам измерения фазового состояния системы (3.4). В отличие от утверждения 1 относительно стратегии первого игрока, ограничения $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{\Delta}$ на величины информационной погрешности ε и шага Δ дискретной схемы зависят от значения цены в начальной позиции.

7. Моделирование движений

В целях наглядного представления результатов моделирования рассмотрим движение преследователей P_1 , P_2 и убегающего E на плоскости. Эту плоскость будем называть *исходное геометрическое пространство*. Предположим, что в процессе движения горизонтальная составляющая вектора скорости каждого объекта остается постоянной. Пусть величины этих

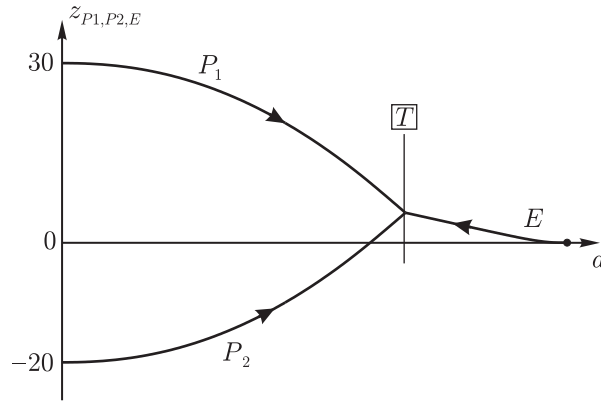


Рис. 8. Траектории объектов в геометрическом пространстве; оптимальные управления игроков; не очень большие начальные боковые отклонения.

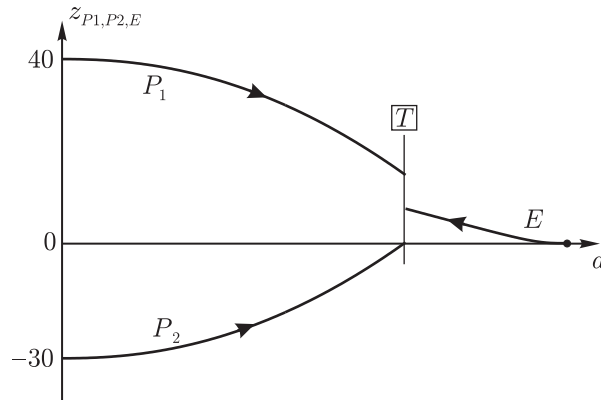


Рис. 9. Траектории объектов в геометрическом пространстве; оптимальные управления игроков; большие начальные боковые отклонения.

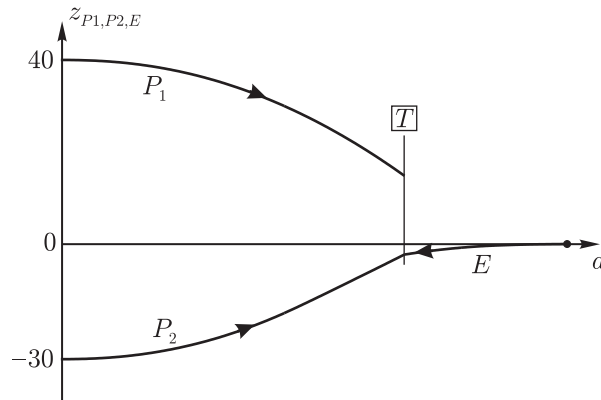


Рис. 10. Траектории объектов в геометрическом пространстве; оптимальные управления преследователей, случайное управление убегающего; большие начальные боковые отклонения.

составляющих таковы, что моменты горизонтального расхождения объектов P_1 , E и объектов P_2 , E одинаковы и равны T . Таким образом, управляющие воздействия влияют лишь на смещение по вертикали. Динамика бокового движения описывается соотношениями (2.1); результирующий промах задается формулой (1.1). На рис. 8–10 горизонтальная ось обозначена символом d . Координата d показывает продольное положение объектов.

Для моделирования движений возьмем систему, для которой были посчитаны множества разрешимости, изображенные на рис. 2в и 3. Поведение убегающего описывается динамикой вида (1.2), поведение одинаковых преследователей — динамикой вида (1.4).

Параметры игры выберем следующим образом:

$$\mu_1 = \mu_2 = 0.9, \quad \nu = 1, \quad l_{P_1} = l_{P_2} = 1/0.9, \quad d_{P_1} = d_{P_2} = 0.5, \quad l_E = 1, \quad T = 8.$$

Начальные боковые скорости, ускорения и фазовые переменные более высокого порядка полагаются нулевыми:

$$\dot{z}_{P_1}^0 = \dot{z}_{P_2}^0 = \dot{z}_E^0 = 0, \quad \ddot{z}_{P_1}^0 = \ddot{z}_{P_2}^0 = 0, \quad a_{P_1}^0 = a_{P_2}^0 = a_E^0 = 0.$$

Начальный момент времени $t_0 = 0$.

Отметим, что мы выбрали момент окончания $T = 8$ так, чтобы на промежутке $[t_0, T]$ каждый из преследователей был сильнее убегающего (см. сплошную линию на рис. 1).

Считаем, что свое оптимальное управление игроки строят на основе линий переключения, описанных в предыдущем разделе. При этом они используют точное знание фазовых координат всех объектов.

В первом варианте начальные боковые координаты объектов взяты в виде $z_{P_1} = 30$, $z_{P_2} = -20$, $z_E = 0$. Получающиеся траектории изображены на рис. 8. Имеет место точная поимка убегающего обоими преследователями.

Для второго варианта пусть $z_{P_1} = 40$, $z_{P_2} = -30$, $z_E = 0$ (рис. 9). В этом примере начальные боковые отклонения преследователей от убегающего слишком велики: преследователи не могут обеспечить нулевую плату в момент T .

В третьем варианте начальные боковые координаты объектов такие же, как и во втором. Однако теперь убегающий управляется случайным образом: в начале каждого шага дискретной схемы управления он случайным образом выбирает свое управление из отрезка $[-\nu, \nu]$ и держит его постоянным в течение шага дискретной схемы. Преследователи управляются оптимально на основе линий переключения. Получающиеся траектории для некоторой реализации управления убегающего приведены на рис. 10. Здесь убегающий ловится вторым преследователем.

8. Заключение

В современной литературе по теории управления, посвященной задачам преследования в верхних слоях атмосферы, описаны различные варианты динамики перехода от заданного командного сигнала к физическому ускорению объекта. Аналитическое исследование игровых задач при этом часто становится весьма трудным или даже невозможным. В статье в рамках задачи с двумя догоняющими и одним убегающим рассмотрена понятная процедура численного конструирования множеств уровня функции цены (множеств разрешимости) при весьма общем задании линейной динамики объектов. Приведены примеры численного построения множеств разрешимости. В случае “сильных” преследователей найдены оптимальные управления по принципу обратной связи. Для других случаев задача эффективного построения оптимальных управлений игроков представляется существенно более сложной.

Авторы благодарят Д.А. Серкова за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Le Ménec S.** Linear differential game with two pursuers and one evader // Ann. Internat. Soc. Dynam. Games. Boston: Birkhäuser, 2011. Vol. 11: Advances in dynamic games. P. 209–226.
2. Model problem in a line with two pursuers and one evader / S.A. Ganebny, S.S. Kumkov, S. Le Ménec, V.S. Patsko // Dyn. Games Appl. 2012. № 2. P. 228–257.
3. Study of linear game with two pursuers and one evader: Different strength of pursuers / S.A. Ganebny, S.S. Kumkov, S. Le Ménec, V.S. Patsko // Ann. Internat. Soc. Dynam. Games. Boston: Birkhäuser, 2012. Vol. 12: Advances in dynamic games. P. 269–292.

4. **Shinar J., Glizer V.Y., Turetsky V.** The effect of pursuer dynamics on the value of linear pursuit-evasion games with bounded controls // *Ann. Internat. Soc. Dynam. Games*. Boston: Birkhäuser, 2013. Vol. 13: Advances in dynamic games. P. 313–350.
5. **Shima T.** Capture conditions in a pursuit-evasion game between players with biproper dynamics // *J. Optim. Theory Appl.* 2005. Vol. 126, no. 3. P. 503–528.
6. **Чикрий А.А.** Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 384 с.
7. **Григоренко Н.Л.** Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 197 с.
8. **Благодатских А.И., Петров Н.Н.** Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 2009. 266 с.
9. **Shinar J., Medinah M., Biton M.** Singular surfaces in a linear pursuit-evasion game with elliptical vectograms // *J. Optim. Theory Appl.* 1984. Vol. 43, no. 3. P. 431–456.
10. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
11. **Krasovskii N.N., Subbotin A.I.** Game-theoretical control problems. New York: Springer-Verlag, 1988. 517 p.
12. **Исакова Е.А., Логунова Г.В., Пацко В.С.** Построение стабильных мостов в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания // *Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр* / ред. А.И. Субботин, В.С. Пацко; Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР. Свердловск, 1984. С. 127–158.
13. **Patsko V.S., Turova V.L.** Level sets of the value function in differential games with the homicidal chauffeur dynamics // *Int. Game Theory Rev.* 2001. Vol. 3, no. 1. P. 67–112.
14. **Kumkov S.S., Patsko V.S., Shinar J.** On level sets with “narrow” throats in linear differential games // *Int. Game Theory Rev.* 2005. Vol. 7, no. 3. P. 285–312.
15. **Shima T., Shinar J.** Time-varying linear pursuit-evasion game models with bounded controls // *J. Guid. Contr. Dyn.* 2002. Vol. 25, no. 3. P. 425–432.
16. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 285 с.

Кумков Сергей Сергеевич

Поступила 03.06.2014

канд. физ.-мат. наук,

старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: sskumk@gmail.com

Ле Менек Стефан (Le Ménec Stéphane)

Ph.D., руководитель проектов

EADS / MBDA France, Париж, Франция

e-mail: stephane.le-menec@mbda-systems.com

Пацко Валерий Семенович

канд. физ.-мат. наук

зав. сектором

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: patsko@imm.uran.ru

УДК 517.977

О ЗАДАЧЕ ГРУППОВОГО УПРАВЛЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ПРЕПЯТСТВИЙ¹

А. Б. Куржанский

Статья посвящена задаче координированного целевого управления группой управляемых систем, совершающих совместное движение к целевому множеству в условиях нестолкновения ее элементов. По ходу движения члены группы должны находиться внутри виртуального эллипсоидального контейнера, который совершает эталонное движение, уклоняясь от заранее известных препятствий. Приводится общая схема решений, основанная на разбиении основной задачи на вспомогательные, с указанием методов их решения и координации этих решений на заключительном этапе.

Ключевые слова: групповое управление, стая, целевое множество, эллипсоидальная траектория, эталонное движение, нестолкновение, препятствия, координация.

A. B. Kurzhanskii. On a group control problem under obstacle avoidance.

We consider the problem of coordinated goal-oriented target control for a group of control systems that are to realize a joint movement towards a given target set under collision avoidance. The members of the group are obliged to lie within a virtual ellipsoidal container, which performs a reference motion while also avoiding external obstacles specified in advance. We describe a general solution scheme based on decomposing the main problem into auxiliary subproblems, for which we indicate solution methods as well as the necessity of coordinating these solutions at the final stage.

Keywords: group control, flocking, target set, ellipsoidal trajectory, reference motion, collision avoidance, obstacles, coordination.

Введение

В данной статье приводится схема решения задачи о синтезе управлений для набора из m однотипных управляемых систем (“стаи”), нацеленных на совместное достижение заданного целевого множества. По ходу движения к цели элементы стаи должны быть не слишком близки, избегая столкновений, но и не слишком далеки друг от друга, чтобы обеспечить одновременное прибытие к цели, а также гарантировать надежный обмен данными о своих текущих положениях на основе беспроводных средств связи. Подобные движения достигаются при помощи виртуального эллипсоидального контейнера $E_c[t]$, в котором элементы стаи должны находиться во время движения. Для обеспечения нестолкновений элементов стаи предполагается, что каждый из ее элементов является центром шара с радиусом безопасности $r > 0$ и внутренности шаров не должны пересекаться. Таким образом, элементы рассматриваемого “группового движения” должны передвигаться, сохраняя свойство стаи — находиться внутри контейнера $E_c[t]$ в условиях взаимного нестолкновения. Конструируемое движение при этом осложнено присутствием заданных постоянных препятствий, столкновения с которыми также следует избегать. Последнее обеспечивается реконфигурацией контейнера при прохождении препятствия с сохранением своего объема или иного размера, например, определенных соотношений между его полуосями.

Решение задачи строится следующим образом. Вначале конструируется движение центра $q(t)$ эллипсоида $E_c[t]$, затем движение всего эллипсоида к целевому множеству, при этом избегаются препятствия. Вычисленная заранее эллипсоидальная траектория образует *эталонное движение*, которое должно быть совместно отслежено элементами стаи, совершающими реальные управляемые движения.

¹Работа поддержана грантами РФФИ (проект 12-01-00261а) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-2692.2014.1).

Далее решение разбивается на части: сбор m систем в стаю к началу движения, дальнейшее продвижение стаи к цели до встречи с препятствиями, прохождение участка с препятствиями и, наконец, совместное движение к цели к заданному времени.

Полученные решения достигаются путем построения соответствующих прямых и попятных трубок достижимости как для эталонного движения, так и для элементов стаи (“групповой достижимости”). Такие движения моделируются на основе гамильтонова формализма в форме соответствующих уравнений динамического программирования с дальнейшим использованием вычислений, основанных на теории двойственности выпуклого анализа и методов решения минимаксных задач [1–6]. Среди решений задач группового управления в иных постановках отметим [7–11].

1. Координированные движения. Задача группового управления

Рассмотрим уравнения совместных движений набором однотипных управляемых систем

$$\ddot{x} = \mathbf{f}(t, x, \dot{x}, u), \quad x \in \mathbb{R}^{nm}, \quad n \leq 3, \quad u \in \mathbb{R}^{pm}, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{f}(t, x, \dot{x}, u) = \{f(t, x^{(1)}, \dot{x}^{(1)}, u^{(1)}), \dots, f(t, x^{(m)}, \dot{x}^{(m)}, u^{(m)})\},$$

$$x = \{x^{(1)}, \dots, x^{(m)}\}, \quad u = \{u^{(1)}, \dots, u^{(m)}\}.$$

$$x^{(j)} = \begin{pmatrix} x_1^{(j)} \\ \vdots \\ x_n^{(j)} \end{pmatrix}, \quad u^{(j)} = \begin{pmatrix} u_1^{(j)} \\ \vdots \\ u_p^{(j)} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$f(t, x^{(j)}, \dot{x}^{(j)}, u^{(j)}) = \begin{pmatrix} f_1(t, x^{(j)}, \dot{x}^{(j)}, u^{(j)}) \\ \vdots \\ f_n(t, x^{(j)}, \dot{x}^{(j)}, u^{(j)}) \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}\}, \quad \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2n \times m}, \quad \mathbf{x}^{(j)} \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \mathbf{x}^{(j)'} = \{x^{(j)'}_1, \dot{x}^{(j)'}_1\},$$

где штрих означает транспонирование. Тогда

$$x^{(j)} = H\mathbf{x}^{(j)}, \quad \dot{x}^{(j)} = \dot{H}\mathbf{x}^{(j)}, \quad H = \{I, \mathcal{O}\}, \quad \dot{H} = \{\mathcal{O}, I\}, \quad H, \dot{H} \in \mathbb{R}^{n \times 2n},$$

I — единичная матрица, $\mathcal{O}$ — нулевая матрица соответствующих размеров.

Обозначим также

$$X = H\mathbf{X}, \quad \dot{X} = \dot{H}\mathbf{X}.$$

Уравнение (1) отражает совместное движение m систем с фазовыми векторами $x^{(j)}$, $\dot{x}^{(j)} \in \mathbb{R}^n$ и управлениями $u^{(j)} \in \mathbb{R}^p$, $p \leq n$, $j = 1, \dots, m$, подверженными жестким геометрическим ограничениям

$$u^{(j)} \in \mathcal{P}^{(j)}, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2)$$

или $u \in \mathcal{P}$, где $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}^{(1)}, \dots, \mathcal{P}^{(m)}\}$.

Здесь и далее

$$f(t, \mathbf{x}^{(j)}, u^{(j)}) = f(t, x^{(j)}, \dot{x}^{(j)}, u^{(j)}) = A(t)x^{(j)} + C(t)\dot{x}^{(j)} + B(t)u^{(j)}$$

с непрерывными коэффициентами $A(t), C(t), B(t)$.

Множества $\mathcal{P}^{(j)} \subset \mathbb{R}^m$ полагаем выпуклыми и компактными.

О п р е д е л е н и е 1. Решение $x(t)$ системы (1), описываемое m траекториями $x^{(j)}(t)$, называется *групповым движением* на интервале $t \in [\tau, \vartheta]$, если справедливы следующие ограничения:

$$\gamma^2 \leq d^2(x^{(j)}(t), x^{(k)}(t)), \quad j = 1, \dots, m; \quad j < k \leq m, \quad (3)$$

$$x^{(j)}(t) \in E_c[t] = \mathcal{E}(q(t), Q(t)) \subset \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4)$$

Здесь $d(q, q_0)$ — евклидово расстояние, символ

$$\mathcal{E}(q, Q) = \{q_0 \in \mathbb{R}^n: \langle q_0 - q, Q^{-1}(t)(q_0 - q) \rangle \leq 1\}, \quad Q = Q' > 0,$$

означает невырожденный эллипсоид в $\mathbb{R}^n$ с *центром* q и *матрицей конфигурации* Q [12]. Непрерывные функции $q(t), Q(t)$ предполагаются кусочно-непрерывно дифференцируемыми.

Будем далее говорить, что составляющие группового движения (т.е. выполняющие условия (3), (4)) образуют “стаю”.

Ограничение (3) обеспечивает *нестолкновение* членов стаи, тогда как условие (4) — их *взаимную близость*. Эти условия должны быть согласованы. Тогда эллипсоид $E_c[t] = \mathcal{E}(q(t), Q(t))$ будет изображать *виртуальный контейнер*, содержащий совокупное групповое движение в условиях нестолкновения его составляющих при обеспечении их взаимной близости.

Далее полагаем, что эллипсоид $\mathcal{E}_c[t]$ в определении 1 ограничен неравенствами

$$k_-^2 \leq \text{vol}(\mathcal{E}(q(t), Q(t))) \leq k_+^2 \quad (5)$$

по объему $\text{vol } \mathcal{E}$ либо

$$k_{Q-}^2 \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j(Q(t)) = \text{tr}(Q'(t)Q(t)) \leq k_{Q+}^2 \quad (6)$$

по сумме квадратов полуосей. Символ $\text{tr } Q$ означает след матрицы Q , $\lambda_j(Q(t))$ — ее собственные числа.

Чтобы обеспечить нестолкновение элементов стаи, находящейся в $E_c[t]$, здесь указаны внутренние ограничения k_-^2, k_{Q-}^2 . Вместе с внешними k_+^2, k_{Q+}^2 они реализуют требование сохранять размеры эллипсоида в предписанных пределах вдоль реализуемого движения.

Пусть эллипсоид $\mathcal{M} = \mathcal{E}(m_f, M) \subseteq \mathbb{R}^n$ означает *целевое множество*, $\mathcal{M}_\varepsilon$ — его окрестность, непересекающиеся эллипсоиды

$$\mathcal{E}(z^{(i)}, Z^{(i)}), \quad i = 1, \dots, i_z,$$

— постоянные *препятствия* на пути группового движения.

Параметры $q(t), Q(t)$ предполагаются управляемыми в силу уравнений вида

$$\dot{q} = v(t), \quad \langle v(t), v(t) \rangle \leq \mu^2(t), \quad (7)$$

$$\dot{Q}(t) = T(t)Q(t) + Q(t)T'(t) + B(t)V(t)B'(t), \quad \text{tr } V'(t)V(t) \leq \nu^2(t), \quad (8)$$

при $Q(t_0) = Q_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Здесь и далее угловые скобки обозначают скалярное произведение векторов. Функции $\mu^2(t), \nu^2(t)$ и матрицы $T(t)$ полагаются кусочно-непрерывными, с конечным числом разрывов первого рода.

Таким образом, $\mathcal{E}(q(t), Q(t)) = E_c[t]$ изображает виртуальное движение, реализуемое эллипсоидальнозначной траекторией, где $v(t) \in \mathbb{R}^n$ — управление траекторией центра $q(t)$, $V(t)$ — управление матрицей конфигураций $Q(t)$. При этом управление $v(t)$ ответственно за направление движения эллипсоида, управление $V(t)$ — за его конфигурацию и ориентацию. Оно, в частности, должно обеспечивать прохождение $E_c[t]$ между препятствиями без нарушения требуемых размеров за счет реконфигурации матрицы $Q(t)$. Поясним последнее обстоятельство.

Для обеспечения условия (3) каждая траектория отдельного движения $x^{(i)}(t)$ представлена в виде подвижного шара $\mathcal{B}_r(x^{(i)}(t))$ с центром $x^{(i)}(t)$ и радиусом r (“радиусом безопасности”). При этом размер эллипсоида $E_c[t]$ должен гарантировать включение в него m непересекающихся шаров радиуса r . (Касание шаров не запрещено).

Выбор матрицы $T(t)$ в уравнении (8) прокомментирован ниже в разд. 5.

Пусть даны два выпуклых компактных множества $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$. Обозначим расстояние между ними как

$$D(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) = \inf\{\|z^* - z^{**}\| \mid z^* \in \mathcal{X}_1, z^{**} \in \mathcal{X}_2\}.$$

В настоящей статье это определение используется для эллипсоидов и в частности для шаров вида $\mathcal{B}_r(x)$. Тогда условие (3) может быть заменено на следующее:

$$\begin{aligned} & \mathbf{D}[x^{(j)}, x^{(i)}](t) \\ &= D(\mathcal{B}_{r-\varepsilon}(x^{(j)}(t)), \mathcal{B}_{r-\varepsilon}(x^{(k)}(t))) > 0 \quad \forall \varepsilon \in (0, r), \quad j \neq k, \quad j, k = 1, \dots, m; \quad 2r \geq \gamma > 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Условие (4) включения отдельных движений в контейнер заменяется на более сильное

$$\mathcal{B}_r(x^{(j)}(t)) \subset \mathcal{E}(q(t), Q(t)) = E_c[t], \quad j = 1, \dots, m. \quad (10)$$

Множество всех возможных значений $X(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, удовлетворяющих условию (10), далее обозначено как $\mathcal{D}_+(t)$; тех, которые удовлетворяют (9), — как $\mathcal{D}_-$ и тех, которые удовлетворяют обоим условиям, — как $\mathcal{D}(t)$.

Для указанной выше модели будем рассматривать задачу целевого управления следующего вида. Эллипсоид $E_c[t]$ должен реализовать движение в течение интервала $[t_0, \vartheta]$ от своего начального состояния $E_c[t] = \mathcal{E}(q(t_0), Q(t_0))$ до конечного $E_c[\vartheta] = \mathcal{E}(q(\vartheta), Q(\vartheta)) \subseteq \mathcal{M}_\varepsilon$, маневрируя между известными препятствиями $\mathcal{E}(z^{(i)}, Z^{(i)})$, $i = 1, \dots, i_z$. При этом он должен сохранять свои размеры, чтобы объять все m непересекающиеся шаровые движения $\mathcal{B}_r(x^{(i)}(t))$, обеспечивая таким образом свойства стаи. При этом имеется в виду, что в начальный момент t_0 рассматриваемые движения уже образуют стаю. В указанных условиях для непересечения $E_c[t]$ с препятствиями решение задачи управления его движением должно допускать реконфигурацию контейнера $E_c[t]$ при заданных выше ограничениях. Следовательно, реализации движений непересекающихся шаров $\mathcal{B}_r(x^{(j)}(t))$ внутри контейнера должны быть согласованы как с движением $E_c[t]$, так и между собой. Ввиду сказанного членам стаи по ходу движения к цели будет необходимо обмениваться информацией о своем текущем положении. Иными словами, рассматриваемые движения должны быть *координированы*. В настоящей статье задача синтеза координированных управлений рассматривается при полной информации о текущих координатах для всех задействованных движений.

Перейдем к строгой постановке задачи.

2. Основная задача

Приступая к решению, перепишем систему (1) в новых обозначениях. Поскольку каждый член группы движений, обозначенный ранее как $\mathbf{x}^{(j)}$, удовлетворяет линейному уравнению вида

$$\dot{\mathbf{x}}_1^{(j)} = \mathbf{x}_2^{(j)}, \quad \dot{\mathbf{x}}_2^{(j)} = f(t, \mathbf{x}^{(j)}, u), \quad \mathbf{x}_1^{(j)} = x^{(j)}, \quad \mathbf{x}_2^{(j)} = \dot{x}^{(j)}, \quad j = 1, \dots, m,$$

система (1) фактически допускает представление в виде матричного уравнения.

Действительно, обозначим

$$F(t)\mathbf{X} = \{F(t)\mathbf{x}^{(1)}, \dots, F(t)\mathbf{x}^{(m)}\}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & I \\ A(t) & C(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}(t)u = \{\mathcal{O}, B(t)u\}', \quad B(t)u = \{B(t)u^{(1)}, \dots, B(t)u^{(m)}\},$$

где

$$B(t)u \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad B(t) \in \mathbb{R}^{n \times p}, \quad u^{(j)} \in \mathbb{R}^p, \quad j = 1, \dots, m.$$

Тогда исходная система примет вид

$$\dot{\mathbf{X}} = F(t)\mathbf{X} + \mathbf{B}(t)u. \quad (11)$$

Обозначим скалярное произведение матриц A, B как $[A, B] = \text{tr} A'B$ (см. [14]).

Основная задача (ОЗ) (*О групповом целевом управлении*).

(i) Даны промежуток времени $[t_0, \vartheta]$, число $\varepsilon > 0$, эллипсоид $E_c[t_0] = \mathcal{E}(q(t_0), Q(t_0))$ объема (5) (либо размеров (6)) и начальная позиция $\{t_0, \mathbf{X}\}$, $X = X(t_0) \in \mathcal{D}[t_0]$. Требуется найти программные управления $v(t), V(t)$ и позиционные управления $u^{(j)}(t, \mathbf{X})$, которые приводят систему $\mathcal{B}_r(x^{(i)}(t))$, $i = 1, \dots, m$, (стаю с динамикой (11) и ограничениями (2)) во множество $\mathcal{E}(q(\vartheta), Q(\vartheta)) \subset \mathcal{M}_\varepsilon$ при ограничениях $X(t) \in \mathcal{D}(t), t \in [t_0, \vartheta]$, и

$$[\dot{X}(t_0), \dot{X}(t_0)] \leq \sigma_0^2, \quad [\dot{X}(\vartheta), \dot{X}(\vartheta)] \leq \sigma_\vartheta^2, \quad (12)$$

при дополнительных условиях (5) либо (6). Здесь целевое множество

$$\mathcal{M}_\varepsilon = \{q, Q : \langle q - m_f, q - m_f \rangle + [Q - M, Q - M] \leq \varepsilon^2, \quad M = M' > 0\}. \quad (13)$$

(ii) Решить предыдущую задачу (i) при $\varepsilon = \min$.

(iii) Решить задачи (i), (ii) при дополнительных внешних фазовых ограничениях

$$D(E_c[t], \mathcal{E}(z^{(i)}, Z^{(i)})) \geq r, \quad \mathcal{E}(z^{(i)}, Z^{(i)}) \cap \mathcal{M}_\varepsilon = \emptyset, \quad \varepsilon > 4r, \quad i = 1, \dots, i_z. \quad (14)$$

Заметим далее, что в данной статье решение основной задачи достигается путем комбинации решений нескольких подзадач. Поскольку в постановке основной задачи предполагается, что в начале t_0 группового движения совокупная система уже удовлетворяет условию стаи, то изложение решения начнем с задачи С о сборе движений в стаю к этому моменту. Тогда будет сформирована начальная позиция процесса, эллипсоид $E_c[t_0] = \mathcal{E}(q(t_0), Q(t_0))$. Далее следует решить задачу ЭД о конструировании виртуального эллипсоидального движения, исходящего из $E_c[t_0]$ и достигающего включения $E_c[\vartheta] \subseteq \mathcal{M}_\varepsilon$ — попадания в предписанное целевое множество в силу уравнения (10) при условии (5) либо (6). Затем следует задача, состоящая в управлении стаей $\{\mathcal{B}_r(x^{(j)}(t)), j = 1, \dots, m\}$ внутри движущегося виртуального контейнера $E_c[t]$ с соблюдением условия стаи (9), (10) при его движении и ее перестраиванием с этой целью при его реконфигурации. Полученные решения аккумулируются в заключительной фазе ОЗ о решении Основной задачи — позиционном целевом координированном управлении стаей при наличии препятствий.

3. Сбор движений в стаю

Задача С (*О сборе в стаю*).

Пусть задана исходная позиция $\{\tau, \mathbf{X}(\tau)\}$, где $H\mathbf{X}(\tau) \in \mathcal{D}_-$. Задан также эллипсоид $E_c[t_0] = \mathcal{E}(q(t_0), Q(t_0))$, $t_0 > \tau$. Требуется найти управления $u^{(j)}(t, \mathbf{X})$, которые переводят систему (1) (или, что тоже самое, систему (11)) из позиции $\mathbf{X}(\tau)$ в позицию $\mathbf{X}(t_0)$, обеспечивающую включения $\mathcal{B}_r(x^{(j)}(t_0)) \subset E_c(t_0)$ для всех $j = 1, \dots, m$ при условии, что включения $H\mathbf{X}(t) \in \mathcal{D}_-$ были справедливы при всех $t \in [\tau, t_0]$.

Итак, имеем матрицу $\mathbf{X}(\tau) = \mathbf{X}_\tau$, составленную из начальных векторов $\mathbf{x}^{(j)}(\tau)$ вместе с насаженными на них шарами $\mathcal{B}_r(H\mathbf{x}^{(j)}(\tau))$ радиуса r , $j = 1, \dots, m$. Эти шары удовлетворяют неравенствам (9):

$$\mathbf{D}[x^{(j)}, x^{(k)}](t) > 0 \quad \forall j \neq k, \quad j, k = 1, \dots, m. \quad (15)$$

Также дан эллипсоид $E_c[t_0] = \mathcal{E}(q(t_0), Q(t_0))$. Наша задача состоит в обеспечении условия

$$\mathcal{B}_r(H\mathbf{x}^{(j)}(t_0)) \subset E_c[t_0], \quad j = 1, \dots, m. \quad (16)$$

При этом неравенства вида (15) должны соблюдаться уже при всех $t \in [\tau, t_0]$.

Введем понятие *опорной функции* множества $\rho(p|\mathcal{Q}) = \sup\{\langle p, q \rangle \mid q \in \mathcal{Q}\}$, применяя его к выпуклым компактам $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$ [5; 12]. В терминах выпуклого анализа условие (16) переписывается в виде

$$\psi(H\mathbf{x}^{(j)}(t_0)) = \max_{l \in \mathbb{R}^n: \|l\|=1} \left(\langle l, H\mathbf{x}^{(j)}(t_0) \rangle + r\|l\| - \rho(l \mid E_c[t_0]) \right) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (17)$$

Условия нестолкновения (9) для каждой пары $j, k = 1, \dots, m; k > j$, могут быть записаны как

$$\|x^{(j)}(t) - x^{(k)}(t)\|^2 - 4r^2 = \max \left\{ \langle \lambda^{(jk)}(t), x^{(j)}(t) - x^{(k)}(t) \rangle - 1/4 \langle \lambda^{(jk)}(t), \lambda^{(jk)}(t) \rangle^2 \right\} - 4r^2 \geq 0, \\ t \in [\tau, t_0],$$

где максимум вычисляется по всем возможным множителям $\lambda^{(jk)}(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [\tau, t_0]$, которые могут быть выбраны среди элементов множества $\mathcal{L}$ липшицевых функций.

Последнее условие можно выписать в интегральной форме [13]:

$$\exists \lambda^{(jk)}(\cdot) \in \mathcal{L} : \Psi(\tau, t_0, \lambda^{(jk)}(\cdot), \mu_{jk}(\cdot)) - 4r^2 \geq 0 \quad \forall \mu_{jk} \in \mathbf{V}_+[\tau, t_0], \quad (18)$$

где

$$\Psi(\tau, t_0, \mu_{jk}(\cdot), \lambda^{(jk)}(\cdot)) = \int_{\tau}^{t_0} \left(\langle \lambda^{(jk)}(t), x^{(j)}(t) - x^{(k)}(t) \rangle - 1/4 \langle \lambda^{(jk)}(t), \lambda^{(jk)}(t) \rangle^2 \right) d\mu_{jk}(t).$$

Здесь $\mathbf{V}_+[\tau, t_0]$ — множество всех скалярных неубывающих неотрицательных функций единичной вариации, рассматриваемых на промежутке $[\tau, t_0]$.

Найдем условия разрешимости задачи С.

Задача РС (О разрешимости задачи сбора в стаю).

Пусть задан интервал $[\tau, t_0]$ и функции

$$\varphi(\mathbf{X}) = \max \left\{ \max_{j=1, \dots, m} \psi(H\mathbf{x}^{(j)}), [\dot{H}\mathbf{X}, \dot{H}\mathbf{X}] - \delta^2 \right\},$$

$$\mathcal{V}(\mathbf{X}) = \max_{j \leq k} \{4r^2 - \|H\mathbf{x}^{(j)} - H\mathbf{x}^{(k)}\|^2\}, \quad j, k = 1, \dots, m.$$

Требуется найти множество

$$\mathcal{W}[\tau] = \left\{ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2n \times m} : \exists u(\cdot) \Rightarrow \mathcal{V}(\mathbf{X}(t)) \leq 0 \quad \forall t \in [\tau, t_0]; \varphi(\mathbf{X}(t_0)) \leq 0 \mid \mathbf{X}(\tau) = \mathbf{X} \right\}.$$

Множество $\mathcal{W}[\tau]$ состоит из всех начальных позиций $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\tau)$, для которых задача С имеет решение при некотором допустимом управлении $u(\cdot)$. Заметим, что множество $\{\mathbf{X} : \mathcal{V}(\mathbf{X}) \leq 0\}$ является невыпуклым, что приводит, вообще говоря, к невыпуклости множества $\mathcal{W}[\tau]$. Отметим также, что ввиду отсутствия возмущений в рассматриваемой модели оно не зависит от того, в каком классе управлений (программных или позиционных) оно определено.

Подойдем к задаче РС, записав ее условия в интегральной форме. Опираясь на соотношения (17), (18), рассмотрим функцию цены, выписанную при помощи формул выпуклого анализа:

$$\mathcal{V}_C(\tau, \mathbf{X}) = \min_{u(\cdot)} \max_{\alpha_{jk}, \beta_i} \max_{\mu_{jk}(\cdot)} \min_{\lambda^{(jk)}(\cdot)} \left(\sum_{i=1}^m \beta_i \psi(x^{(i)}(t_0)) + \beta_0 \left([\dot{X}(t_0), \dot{X}(t_0)] - \delta^2 \right) \right)$$

$$+ \sum_{j < k} \alpha_{jk} \left(4r^2 - \int_{\tau}^{t_0} (\langle \lambda^{(jk)}(t), x^{(j)}(t) - x^{(k)}(t) \rangle - 1/4 \langle \lambda^{(jk)}(t), \lambda^{(jk)}(t) \rangle^2) d\mu_{jk}(t) \right) \quad (19)$$

при условии $\mathbf{X}(\tau) = \mathbf{X}$ и ограничении $\alpha_{jk}, \beta_i \geq 0$, $\sum_{j < k} \alpha_{jk} + \sum_{i=0}^m \beta_i = 1$, $j, k = 1, \dots, m$.

Тогда имеет место

Утверждение 1. *Справедливо условие*

$$\mathcal{W}_C[\tau] = \{\mathbf{X}: \mathcal{V}_C(\tau, \mathbf{X}) \leq 0\}.$$

Непустота множества есть необходимое и достаточное условие разрешимости задачи РС.

Вычисление функции цены $\mathcal{V}_C(\tau, \mathbf{X})$ и нахождение соответствующих оптимальных управлений $u^0 = u^0(t, \mathbf{X})$ можно также осуществить, используя технику уравнений Гамильтона — Якоби — Беллмана (ГЯБ), опираясь на подход работы [17] (см. также [18, статья 18]).

Отметим, что при этом функция u^0 может оказаться многозначной: $u^0 = U^0(t, \mathbf{X})$. Тогда следует обсудить существование решения соответствующего дифференциального включения

$$\dot{\mathbf{X}} \in \mathbf{F}(t)\mathbf{X} + \mathbf{B}(t)U^0(t, \mathbf{X}), \quad \mathbf{X}(\tau) = \mathbf{X}_\tau,$$

а именно, либо указать теорему существования этого решения, либо перейти к так называемым конструктивным движениям, аппроксимирующим динамику процесса (см. [2]).

Предложенные соотношения дают общую схему решения задачи о сборе в стаю. Собравшись в стаю, обсуждаемая группа систем должна совершать движение, следуя к предписанному целевому множеству, оставаясь стаей и огибая заданные препятствия. Для обеспечения такого реального движения далее вводится виртуальное движение эллипсоидальной трубки, находясь внутри которой, стая сможет достичь целевого множества. При продвижении среди препятствий сечение эллипсоидальной трубки может подлежать реконфигурации, чтобы избежать пересечения с ними.

4. Управление эллипсоидальным контейнером в условиях препятствий

Рассмотрим систему (7), (8) с управлениями $v(t), V(t)$, порождающую эллипсоидальное движение $E_c[t] = \mathcal{E}(q(t), Q(t))$. Пусть даны целевое множество $\mathcal{M}_\varepsilon$ в виде окрестности эллипсоида $E_M = \mathcal{E}(m_f, M)$ в пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n}$, (см. (13)) и внешние препятствия в виде непересекающихся эллипсоидов $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ в пространстве $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Эллипсоид $E_c[t]$ будет далее играть роль *виртуального контейнера*, содержащего управляемую стаю, совершающую совместное движение к целевому множеству и не пересекающуюся с внешними препятствиями.

Определим матрицы $\mathbf{Q} = \{q, Q\}$, $\mathbf{M} = \{m_f, M\}$ размеров $n \times (n + 1)$.

Задача ЭД (Об управлении эллипсоидальной трубкой траекторий).

(i) При заданных на интервале $[t_0, \vartheta]$ уравнениях (7), (8), начальном множестве $E_c[t_0]$, целевом множестве E_M , условии (12), а также препятствиях $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$, $D(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \geq 3r$, найти управления $v(t), V(t)$, переводящие эллипсоид $E_c[t]$ из состояния $E_c[t_0]$ в $E_c[\vartheta] \subseteq \mathcal{M}_\varepsilon$, при ограничениях $D(E_c[t], \mathcal{E}_i) \geq r$, $i = 1, 2$, $t \in [t_0, \vartheta]$ и ограничениях (5) или (6) на размер $E_c[t]$.

(ii) Решить задачу (i) на минимум функционала ($\alpha, \beta \geq 0$)

$$\begin{aligned} & \Psi(t_0, \mathbf{Q} \mid \alpha, \beta, v(\cdot), V(\cdot)) \\ &= \alpha \int_{t_0}^{\vartheta} (\langle v(t), v(t) \rangle + [V(t), V(t)]) dt + \beta (\langle q(\vartheta) - m_f, q(\vartheta) - m_f \rangle + [Q(\vartheta) - M, Q(\vartheta) - M]) \end{aligned}$$

- (iii) Решить задачу (i) при целевом множестве $\mathcal{M}_\varepsilon$, (13), и дополнительных ограничениях (a)

$$\int_{t_0}^{\vartheta} (\langle v(t), v(t) \rangle + [V(t), V(t)]) dt \leq \mu^2,$$

(b)

$$\langle v(t), v(t) \rangle \leq \mu^2, \quad [V(t), V(t)] \leq \nu^2.$$

Опуская вначале наличие внешних препятствий, введем функцию цены для задачи ЭД, (i), (ii). Имеем

$$V_E(t_0, \mathbf{Q} \mid \alpha, \beta) = \min_{v(\cdot), V(\cdot)} \alpha \left\{ \int_{t_0}^{\vartheta} (\langle v(t), v(t) \rangle + [V(t), V(t)]) dt \right. \\ \left. + \beta (\langle q(\vartheta) - m_f, q(\vartheta) - m_f \rangle + [Q(\vartheta) - M, Q(\vartheta) - M]) \mid \mathbf{Q}(t_0) = \{q(t_0), Q(t_0)\} \right\} \quad (20)$$

при краевом условии

$$V_E(\vartheta, \mathbf{Q} \mid \alpha, \beta) = \beta [\mathbf{Q}(\vartheta) - \mathbf{M}, \mathbf{Q}(\vartheta) - \mathbf{M}]. \quad (21)$$

Уравнения эллипсоидального контейнера $E[t]$ можно представить в матричном виде как

$$\dot{\mathbf{Q}} = \{q, T(t)Q + QT(t)\} + \{v, B(t)VB'(t)\}$$

при начальном условии $\mathbf{Q}(t_0) = \{q(t_0), Q(t_0)\}$.

Для нахождения соответствующего уравнения Гамильтона—Якоби—Беллмана воспользуемся теорией линейных операторов над пространством матриц [15] и схемами работы [16]. Тогда будем иметь

$$\partial V_E / \partial \mathbf{Q} = \{\partial V_E / \partial q, \partial V_E / \partial Q\},$$

откуда далее выводим

$$\partial V_E / \partial t + [\partial V_E / \partial \mathbf{Q}, \{q, T(t)Q + QT(t)\}] \\ + \min_{v, V} \left\{ [\partial V_E / \partial \mathbf{Q}, \{v, B(t)VB'(t)\}] + \alpha (\langle v, v \rangle + [V, V]) \right\} = 0 \quad (22)$$

при краевом условии (21).

Функцию $V_E(t_0, \mathbf{Q} \mid \alpha, \beta)$, следуя стандартной процедуре, можно искать в виде

$$V_E(t_0, \mathbf{Q} \mid \alpha, \beta) = [\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^*(t), \mathbf{P}(t)(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^*(t))] + \gamma^2(t),$$

где $\mathbf{P}(t)$ — оператор над пространством $(n+1) \times (n+1)$ -матриц, вследствие чего

$$\{v, B(t)V\} = -1/2 \{\partial V_E / \partial q, B(t) \partial V_E / \partial Q\}. \quad (23)$$

Вычисление параметров $\mathbf{P}(t \mid \alpha, \beta)$, $\mathbf{Q}^*(t \mid \alpha, \beta)$, $\gamma^2(t \mid \alpha, \beta)$ здесь аналогично [16].

При фиксированных α, β получаем эллипсоиды

$$\mathcal{W}_E(t_0 \mid \alpha, \beta) = \{\mathbf{Q} : V_E(t_0, \mathbf{Q} \mid \alpha, \beta) \leq 1\}.$$

Рассмотрим теперь задачу ЭД (iii) при ограничении (a) в отсутствии препятствий. Тогда функцией цены для этой задачи будет

$$V_E(t_0, \mathbf{Q}) = \max_{\alpha, \beta} V_E(t_0, \mathbf{Q} \mid \alpha, \beta),$$

по всем $\{\alpha, \beta \geq 0: \alpha\mu^{-2} + \beta\varepsilon^{-2} = 1\}$. Максимизаторы α^*, β^* этой задачи следует далее подставить в формулу (23) для получения соответствующего управления. Полученные решения будут тогда зависеть от μ, ε .

Область разрешимости задачи ЭД (iii) (a) будет иметь вид

$$\mathcal{W}(t_0) = \bigcap \left\{ \mathcal{W}_E(t_0 \mid \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \geq 0: \alpha\mu^{-2} + \beta\varepsilon^{-2} = 1 \right\}.$$

Условие $\mathcal{W}(t_0) \neq \emptyset$ позволяет при фиксированном μ найти множество $\{\varepsilon\}$, для которых решение существует. Среди них, наконец, можно указать минимальное ε^0 .

Для рассмотрения препятствий введем функцию $\mathbf{D}_{ri}[t] = D^2(E_c[t], \mathcal{E}_i) - r^2$, $i = 1, 2$, обозначив $\mathbf{D}_{ri}^+[t] = \mathbf{D}_{ri}[t]$, при $\mathbf{D}_{ri}[t] > 0$ и $\mathbf{D}_{ri}^+[t] = 0$ в противном случае. Ограничимся задачей с двумя внешними ограничениями $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$. Тогда в задаче (i) будем учитывать дополнительное ограничение

$$\mathbf{D}_{r1}^+[t] \geq 0, \mathbf{D}_{r2}^+[t] \geq 0 \quad \forall t \in [t_0, \vartheta],$$

эквивалентное условию

$$\min \left\{ \alpha_o(t)\mathbf{D}_{r1}^+[t] + \beta_o(t)\mathbf{D}_{r2}^+[t] \mid \alpha_o(t) + \beta_o(t) = 1, \alpha_o(t), \beta_o(t) \geq 0 \right\} \geq 0. \quad (24)$$

С этой целью к подынтегральной функции выражения (20) следует добавить слагаемое $-(\alpha_o(t)\mathbf{D}_{r1}^+[t] + \beta_o(t)\mathbf{D}_{r2}^+[t])$ и повторить указанную выше процедуру, сохранив уравнение (22) и краевое условие (21). Дополнительные множители $\alpha_o(t), \beta_o(t)$ вычисляются из условия (24) с дальнейшей дополнительной минимизацией функционала (20) по указанным $\alpha_o(t), \beta_o(t)$. При ограничениях (iii)(a) функции $\alpha_o(t), \beta_o(t) \geq 0$ берутся по сути из того же класса, что и в предыдущей задаче (ii), но теперь они зависят от времени.

Вычисление соответствующей функции цены $V_O(t_0, \mathbf{Q})$ можно получить методами выпуклого анализа, следуя работе [17], с использованием матричных вычислений, аналогичных указанным в [16]. В данном случае множество $\mathcal{W}_O[t_0]$ разрешимости задачи (iii)(a) будет состоять из всех эллипсоидов $E_c[t_0] = \mathcal{E}(q, Q)$, для которых выполняется условие $V_O(t_0, \mathbf{Q}) \leq 0$.

При заданном начальном состоянии $E_c[t_0] \subseteq \mathcal{W}_O[t_0]$ и найденной трубке $\mathcal{W}_O[t], t \in [t_0, \vartheta]$, искомое управление $\{v, V\}$ определяться из условия модифицированного “прицеливания” траектории $E_c[t]$ на $\mathcal{W}_O[t]$, аналогичного задаче целевого управления для изолированных траекторий.

Решение предыдущей задачи требует достаточно обременительных вычислений. Последнее, в частности, объясняется тем, что по ходу прогонки трубки $E_c[t]$ между препятствиями $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$, может потребоваться ее реконфигурация с сохранением размеров (5) или (6). Остановимся подробнее на этом обстоятельстве, применяя дополнительные соображения.

5. Эталонное эллипсоидальное движение в условиях препятствий

Указанное выше решение задачи ЭД приводит к функции $E_c[t]$ — траектории движения виртуального контейнера, находясь внутри которого стая $\mathbf{X}[t]$ совершает движение к цели $\mathcal{M}$. Один из подходов к решению основной задачи состоит в том, чтобы сконструировать движение $E_c[t]$ заранее, считая далее, что оно является эталонным. Задача стаи будет таким образом состоять в *групповом отслеживании* данного *эталонного движения*. Остановимся на особенностях этого движения, связанной с его реконфигурацией, полагая, что по-прежнему имеются два препятствия, и учитывая ранее указанные условия задачи.

Конструирование движения $E_c[t]$ проведем в два этапа: вначале определим эталонную траекторию $q(t)$, учитывая препятствия, затем перейдем к траектории $\mathcal{E}(q(t), Q(t))$, учитывая найденные свойства $q(t)$.

Вычисляя расстояние $D(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \geq 3r$, будем иметь

$$\delta_0 = D(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \max_l \left\{ \langle l, z_1 - z_2 \rangle - \langle l, Z_1 l \rangle^{1/2} - \langle l, Z_2 l \rangle^{1/2} \mid \langle l, l \rangle^{1/2} \leq 1 \right\}.$$

Пусть единственный оптимизатор этой задачи есть l^0 . Тогда $\delta_0 = \|d^1 - d^2\|$, где

$$\langle -l^0, d^1 \rangle = \langle l^0, Z_1 l^0 \rangle^{1/2}, \quad \langle -l^0, d^2 \rangle = \langle l^0, Z_2 l^0 \rangle^{1/2}, \quad d^1 \in \mathcal{E}_1, \quad d^2 \in \mathcal{E}_2.$$

Обозначив $d^0 = d^1 - d^2$, $d^* = d^2 + d^0/2$, рассмотрим гиперплоскости

$$\mathcal{H}_z = \{x: \langle x - d^*, d^0 \rangle = 0\}, \quad \mathcal{H}_1 = \{x: \langle x - d^1, d^0 \rangle = 0\}, \quad \mathcal{H}_2 = \{x: \langle x - d^2, d^0 \rangle = 0\}.$$

Эти гиперплоскости параллельны и ортогональны d^0 , причем $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ суть опорные гиперплоскости к $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$, а $\mathcal{H}_z$ расположено посередине. Поэтому будем требовать, чтобы эталонная векторная траектория $q(t)$, соединяющая начальное положение $q(t_0)$ с окрестностью целевого вектора $q(\vartheta) = m$, при прохождении между препятствиями касалась плоскости $\mathcal{H}_z$. Тогда соответствующие полуоси эллипсоида $E_c[t] = \mathcal{E}(q(t), Q(t))$ будут не длиннее $\delta/2$.

Интервал времени, когда подобная ситуация может реализоваться, может быть определен при помощи *барьерных гиперплоскостей*

$$\mathcal{H}_b^- = \{q: \langle q, h_b \rangle = c_b^-\}, \quad \mathcal{H}_b^+ = \{q: \langle q, h_b \rangle = c_b^+\}, \quad c_b^- < c_b^+.$$

Эти плоскости выбраны так, чтобы прогонка сквозь препятствия происходила между ними и вне этих плоскостей препятствия можно было игнорировать, а именно, при $\langle q, h_b \rangle \leq c_b^-$, $\langle q, h \rangle \geq c_b^+$ было бы $D(E_c[t], \mathcal{E}_i) > 0$, $i = 1, 2$.

Обозначив $\mathcal{H}_{bz}^- = \mathcal{H}_b^- \cap \mathcal{H}_z$, $\mathcal{H}_{bz}^+ = \mathcal{H}_b^+ \cap \mathcal{H}_z$, потребуем, чтобы эталонная траектория $q(t)$ удовлетворяла условиям

$$q(t_0) = q_0, \quad q(t_s^-) \in \mathcal{H}_{zb}^-, \quad q(t_s^+) \in \mathcal{H}_{zb}^+, \quad q(t) \in \mathcal{H}_z, \quad t \in [t_s^-, t_s^+]. \quad (25)$$

Моменты времени t_s^-, t_s^+ можно вычислить заранее, значения $q(t_s^-)$, $q(t_s^+)$ — по ходу реализации при помощи решения задачи оптимизации, минимизируя, например, длину всего пути или времени в пути вдоль траектории $q(t)$. Поскольку выбор ограничения μ на управление v находится в нашем распоряжении, условия (25) разрешимы. Вычисление значений t_s^-, t_s^+ вместе с управлением $v(\cdot)$ составляет стандартную задачу теории управления. Значение конечного момента времени ϑ можно далее согласовать со временем исполнения реализуемого движения $\mathbf{X}(t)$.

Перейдем к обсуждению траектории $E_c[t] = \mathcal{E}(q(t), Q(t))$, зная $q(t) = q_r(t)$ и полагая $x \in \mathbb{R}^3$. Начнем с положительно определенной матрицы $Q(t_0) = \{q^{(1)}(t_0), q^{(2)}(t_0), q^{(3)}(t_0)\}$, приняв, что она диагональна и состоит из столбцов вида $q^{(i)}(t_0) = \beta_{ii}^2(t_0)\mathbf{e}^{(i)}$, где $\mathbf{e}^{(i)}$ — единичные орты в $\mathbb{R}^n$ и $\beta_{11}^2 \geq \beta_{22}^2 \geq \beta_{33}^2$. Собственные числа $Q(t_0)$ суть $\lambda_i(t_0) = \beta_{ii}^2$. Для реконфигурации движения $E_c[t]$ вдоль своего движения необходимо обсудить соответствующие преобразования вектора $q(t)$ и матрицы $Q(t)$. Рассмотрим два отображения.

Первое из них определяется ротационной матрицей $R(t, t_0)$: полагаем $q(t) = R(t, t_0)q(t_0)$, $Q_R(t) = R'(t, t_0)Q(t_0)R(t, t_0)$. Данное преобразование сохраняет собственные значения $\lambda_i(t) = \lambda_i(t_0)$, объем $\text{vol}(E_c(t))$ и след $\sum_i \lambda_i(t_0)$. Тогда $E_c[t]$ превращается в $E_R[t] = \mathcal{E}(q(t), Q_R(t))$ с тем же объемом $\text{vol}(E_c(t)) = \text{vol}(E_R(t))$.

Второе преобразование — растяжение-сжатие при помощи матрицы $S = S(t, t_0)$, положительной, диагональной, с коэффициентами $\tau_{ii}^2 > 0$. Тогда $SQ(t) = Q_S(t)$ остается диагональной, но с элементами $\tau_{ii}^2 \beta_{ii}^2$. Эллипсоид $E_R[t]$ преобразуется в $E_S[t] = \mathcal{E}(q(t), Q_S(t))$. Чтобы сохранить объем $\text{vol} E_R[t]$, следует соблюсти условие

$$\text{vol} E_R[t] = \prod_i \beta_{ii}^2 = \prod_i \beta_{ii}^2 \tau_{ii}^2 = \text{vol} E_S[t]. \quad (26)$$

Для критерия (6) следует соблюсти условие

$$\text{tr}(Q'_R(t)Q_R(t)) = \sum_{i=1}^n \beta_{ii}^2 = \sum_{i=1}^n \beta_{ii}^2 \tau_{ii}^2 = \text{tr}(Q'_S(t)Q_S(t)). \quad (27)$$

При прохождении минимального расстояния δ_0 между препятствиями в момент $t = t^*$ эллипсоид $E_c[t] = E_S[t]$ должен быть перестроен согласно преобразованиям

$$E_S[t^*] = \mathcal{E}(q(t^*), Q_S(t^*)) = \mathcal{E}(R(t^*, t_0)q(t_0), S(t^*, t_0)R(t^*, t_0)Q(t_0)R(t^*, t_0)S(t^*, t_0))$$

с сохранением условий (5) либо (6). В этом случае в момент $t = t^*$ главная ось должна быть ориентирована вдоль направления $\dot{q}(t^*)$, а вторая — вдоль $d_0(t^*)$, имея ввиду, что

$$\langle \dot{q}(t^*), d_0(t^*) \rangle = 0.$$

Соответствующие единичные орты будут $\mathbf{e}_Q^{(1)}(t^*) = \dot{q}(t^*)/\|\dot{q}(t^*)\|^{-1}$, $\mathbf{e}_Q^{(2)}(t^*) = d_0(t^*)/\|d_0(t^*)\|^{-1}$ при третьем $\mathbf{e}_Q^{(3)}(t^*)$, возникающем автоматически. Длина второй полуоси должна быть не более $\delta_0/2 > r$. Остальные длины определяются из (26) либо (27).

Отметим, что при $n = 3$ матрица $R(t, t_0)$, при поворотах $\mathbf{e}_Q^{(1)}, \mathbf{e}_Q^{(2)}$ против часовой стрелки, может быть выбрана в виде

$$R(t, t_0) = \begin{pmatrix} \cos \varphi(t - t_0) & -\sin \varphi(t - t_0) & 0 \\ \sin \varphi(t - t_0) & \cos \varphi(t - t_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\varphi(t - t_0)$ — угол между $\mathbf{e}_Q^{(1)}(t)$ and $\mathbf{e}_Q^{(1)}(t_0)$, а также между $\mathbf{e}_Q^{(2)}(t)$ и $\mathbf{e}_Q^{(2)}(t_0)$. Эта матричная функция непрерывна по t, t_0 . Реализация данного преобразования может осуществляться путем выбора матрицы $T(t)$ в уравнении (8), играющей роль дополнительного управления.

Движение эллипсоида $E_c[t] = \mathcal{E}(q(t), Q(t))$ при заранее построенных барьерных гиперплоскостях $\mathcal{H}_b^-, \mathcal{H}_b^+$ можно искать в классе следующих движений:

(i) из $E_c[t] = E_c[t_0]$ в $E_c[t] = E_c[t_s^-] \subset \mathcal{H}_b^-$ — непрерывная реконфигурация, добиваясь к моменту t_s^- ориентации $Q(t_s^-)$ вдоль осей $\mathbf{e}_Q^{(1)}(t_s^-), \mathbf{e}_Q^{(2)}(t_s^-), \mathbf{e}_Q^{(3)}(t_s^-)$ при выбранных согласно (26) либо (27) числах β_{ii} , $i = 1, \dots, 3$.

(ii) из $E_c[t_s^-]$ в $E_c[t_s^+]$ при $t_* \in (t_s^-, t_s^+)$ — сохранение конфигурации $\beta_{11}(t)\mathbf{e}_Q^{(1)}(t)$ вдоль $\dot{q}(t)$, $\beta_{22}(t)\mathbf{e}_Q^{(2)}(t)$ вдоль $d_0(t^*)$ и $\beta_{33}(t)\mathbf{e}_Q^{(3)}(t)$, соответственно, при всех $t \in [t_s^-, t_s^+]$.

(iii) из $E_c[t_s^+]$ в $E_c[\vartheta]$ при $t \in [t_s^+, \vartheta]$ — реконфигурация $E_c[t_s^+]$ в направлении $\mathcal{M} = \mathcal{E}(m_f, M)$ для обеспечения включения $E_c[\vartheta] \subseteq \mathcal{M}_\varepsilon$ при гарантированном $\varepsilon > 0$ или оптимальном ε^0 .

6. Разрешимость основной задачи.

Синхронизация движений контейнера и стаи

Как уже говорилось выше, решение основной задачи заключается в конструировании движения стаи $\mathcal{B}_r(x^{(j)})$ внутри виртуального контейнера, совершающего управляемое движение к целевому множеству $\mathcal{M}_\varepsilon$. В связи с этим, одним из первых является вопрос о разрешимости поставленной задачи ОЗ. Обсудим этот вопрос.

Разрешимость задачи С о сборе в стаю вытекает из непустоты множества $\mathcal{W}_C[\tau]$ разрешимости этой задачи. Согласно утверждению 1 последнее имеет вид

$$\mathcal{W}_C[\tau] = \{\mathbf{X}: \mathcal{V}_C(\tau, \mathbf{X}) \leq 0\},$$

где $\mathcal{V}_C$ — функция цены (19).

Утверждение 2. *Задача С имеет решение из позиции $\{\tau, \mathbf{X}\}$ в том и только том случае, когда $\mathbf{X} \in \mathcal{W}_C[\tau]$.*

При управляемости заданной системы (стаи) и заданном эллипсоиде $E_c[t_0]$ непустота $\mathcal{W}_C[\tau]$ может обеспечиваться путем согласования (синхронизации) времени $t_0 - \tau$ процесса с размерами ограничений (2) на управления $u^{(j)}$.

Для разрешимости задачи о движении стаи на промежутке $[t_0, \vartheta]$ внутри контейнера $E_c[t]$ необходима *совместная синхронизация* времен движения контейнера $\mathcal{E}(0, Q(t))$ на участках

$$[t_0, t_s^-], [t_s^-, t_s^+], [t_s^+, \vartheta] \quad (28)$$

(а) со временем движения эталонной траектории $q(t)$ на этих участках,

(б) со временами перестройки стаи внутри изменяющегося по форме эллипсоида $\mathcal{E}(0, Q(t))$ по ходу своего движения на тех же участках.

Последнее достигается за счет вариации ограничений $\mu^2(t), \nu^2(t)$ на управления $v(t), V(t)$. Поскольку движение $E_c[t]$ является виртуальным, этими вариациями в процессе решения можно распоряжаться свободно. Подробное описание решения подобных задач требует отдельных публикаций.

7. Решение основной задачи

Переходя к заключительной части статьи, можно сразу написать выражение для функции цены основной задачи. Однако такой путь потребует обременительных операций и удлиняет вычисления. Ввиду сказанного обратимся к следующему пути.

Рассмотрим решение основной задачи для случая, когда $2r < \delta_0 < 3r$ (между препятствиями проходит только один шар). Предполагая, что интервалы (28) уже согласованы и плоскости $\mathcal{H}_b^-, \mathcal{H}_b^+$ определены, поделим задачу на три части. Вначале обсудим прохождение стаи из $E_c[t_0]$ через плоскость $H_b^- \subset \mathbb{R}^3$, отслеживая движение своего центра $q(t)$. Пусть t_s^- — момент попадания центра $q(t_s^-)$ эллипсоида $E_c[t] = \mathcal{E}(q(t), Q(t))$ на эту плоскость: $E_c[t] = E_c[t_s^-]$. Тогда при $t > t_s^-$ траектория $q(t)$ будет лежать на плоскости $\mathcal{H}_z$, а эллипсоид $\mathcal{E}(0, Q(t))$ — между плоскостями $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$. В рассматриваемом случае все шары $\mathcal{B}_r(x^{(j)})$ будут располагаться на $\mathcal{H}_z$, не выходя за пределы сечения $E_c[t] \cap \mathcal{H}_z$.

Эллипсоид $E_c[t]$ в момент t_s^- должен быть уже сориентирован вдоль осей $\mathbf{e}_Q^{(1)}(t_s^-), \mathbf{e}_Q^{(2)}(t_s^-), \mathbf{e}_Q^{(3)}(t_s^-)$, и его конфигурация $\{\mathcal{E}(0, Q(t_s^-)), q(t_s^-) \in \mathcal{H}_b^- \cap \mathcal{H}_z\}$ заранее определена матрицей $Q(t_s^-) = Q_*(t_s^-)$. Сформулируем первую часть общей задачи.

Задача ОЗ-1.

Перевести систему из исходной позиции

$$\{\mathbf{X}(t_0), H\mathbf{X}(t_0) \in \mathcal{D}(t_0), \dot{x}^{(j)}(t_0) \in \mathcal{B}_\sigma(\dot{q}(t_0)), j = 1, \dots, m\}$$

в позицию $\mathbf{X}(t_0)$, в которой

$$x^{(j)}(t_s^-) \in \mathcal{E}(q(t_s^-), Q(t_s^-)) + \mathcal{B}_\varepsilon(0), \quad q(t_s^-) \in \mathcal{H}_b^- \cap \mathcal{H}_z, \quad \dot{x}^{(j)}(t_s^-) \in \mathcal{B}_\sigma(\dot{q}(t_s^-)), \quad \dot{q}(t_s^-) \in \mathcal{H}_z,$$

при ограничениях (2) на управления и дополнительным фазовым ограничением вида

$$H\mathbf{X}(t) \in \mathcal{D}(t), \quad t \in [t_0, t_s^-],$$

на координаты.

Для промежутка $[t_s^-, t_s^+]$ имеем вторую часть общей задачи.

Задача ОЗ-2.

Перевести систему из исходной позиции

$$\{\mathbf{X}(t_s^-), H\mathbf{X}(t_s^-) \in \mathcal{D}(t_s^-), \dot{x}^{(j)}(t_s^-) \in \mathcal{B}_\sigma(\dot{q}(t_s^-))\}$$

в позицию

$$\{\mathbf{X}(t_s^+), H\mathbf{X}(t_s^+) \in \mathcal{H}_b^+, \dot{x}^{(j)}(t_s^+) \in \mathcal{B}_\sigma(\dot{q}_r(t_s^+)), j = 1, \dots, m\}$$

при ограничениях (2) на управления и дополнительным фазовым ограничением вида

$$x^{(j)}(t) \in E_c[t] \cap \mathcal{H}_z, \quad H\mathbf{X}(t) \in \mathcal{D}(t) \quad \forall j = 1, \dots, m, \quad t \in [t_s^-, t_s^+],$$

на координаты и

$$\dot{x}^{(j)}(t) \in \mathcal{B}_\sigma(\dot{q}(t)) \quad \forall j = 1, \dots, m, \quad t \in [t_s^-, t_s^+],$$

на скорости стаи.

Здесь траектория $q(t)$ должна лежать на плоскости $\mathcal{H}_z$, а ориентация эллипсоида $E_c[t]$ реализована вдоль векторов $\mathbf{e}_Q^{(1)}(t_s^-), \dots, \mathbf{e}_Q^{(3)}(t_s^-)$, как указано выше. Расположение стаи внутри $E_c[t]$ будет зафиксировано при $t = t_s^-$ и жестко зафиксировано относительно изменяющегося направления главной оси в плоскости $\mathcal{H}_z$ при движении по промежутку $t \in [t_s^-, t_s^+]$.

Переходя к промежутку $[t_s^+, \vartheta]$, имеем заключительную часть общей задачи.

Задача ОЗ-3.

Перевести систему из начального множества $E_c[t_s^+] \subset \mathcal{H}_b^+$, содержащего все шары

$$\mathcal{B}_r^{(j)}(x^{(j)}(t_s^+))$$

при $x^{(j)}(t_s^+) \in \mathcal{B}_\sigma(\dot{q}(t_s^+))$, в целевое положение

$$E_c[\vartheta] \subset \mathcal{M}_\varepsilon$$

при условиях

$$\mathcal{B}_r^{(j)}(x^{(j)}(\vartheta)) \subset E_c[\vartheta]$$

и ограничениях

$$x^{(j)}(t) \in D(t), \quad t \in [t_s^+, \vartheta], \quad \dot{x}^{(j)}(\vartheta) \in \mathcal{B}_\sigma(\dot{q}(\vartheta)),$$

где ε, σ заданы, $j = 1, \dots, m$. Здесь имеет место выравнивание (“консенсус”) по скоростям.

Таким образом, совокупное решение общей задачи получается путем суперпозиции решений для указанных трех ее частей по схеме

$$E_c[t_0] \Rightarrow E_c[t_s^-] \Rightarrow E_c[t_s^+] \Rightarrow E_c[\vartheta].$$

Эти решения достигаются по схемам работ [3; 17; 16]. В задаче синтеза управлений для элементов стаи, совершающих движение внутри контейнера $E_c[t]$ дополнительно используются работы [19; 20]. Доказательства существования решений возникающих дифференциальных включений опираются на работу [21], при необходимости перехода к вязкостным решениям уравнений типа Гамильтона — Якоби — Беллмана — на работы [2; 22; 23].

8. Заключение

В данной статье приведена общая схема решения задачи целевого управления стаей систем, совершающих совместное движение в условиях препятствий, с использованием виртуальной эталонной траектории — эллипсоидальной трубки. Приведен перечень промежуточных задач, на которые предлагается разбить решение совокупной задачи. Решения таких подзадач опираются на методы, развитые под влиянием работ Н. Н. Красовского и его школы [24; 25]. Их детальное описание выходит далеко за пределы и размеры данной статьи, оно требует отдельной серии публикаций. Особенное внимание в развитии рассмотренной темы может быть уделено моделям группового наблюдения и группового синтеза при неопределенности (см. [26; 2; 16]) и сложных фазовых ограничениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
2. **Krasovskii N.N., Subbotin A.N.** Game-theoretical control problems. New York; Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1988. 517 p.
3. **Kurzhanski A.B., Varaiya P.** Dynamic optimization for reachability problems // J. Optim. Theory Appl. 2001. Vol. 108, no. 2. P. 227–251.
4. Nonsmooth analysis and control theory / F.H. Clarke, Yu.S. Ledyaev, R.J. Stern, P.R. Wolenski. New York: Springer-Verlag, 1998. 276 p. (Graduate Texts in Mathematics; vol. 178).
5. **Rockafellar R.T., Wets R.J-B.** Variational analysis. 2nd printing. New York: Springer, 2004. 733 p. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; vol. 317).
6. **Демьянов В.Ф.** Минимакс: дифференцируемость по направлениям. Л.: Изд-во ЛГУ, 1974. 112 с.
7. Collision avoidance for multiple agent systems / D.E. Chang, S. Shadden, J.E. Marsden, R. Olfati-Saber // Proc. of 42nd IEEE Conference on Decision and Control. Maui, Hawai, 2003. Vol. 1. P. 539–543.
8. **Junge O., Ober-Bloebaum S.** Optimal reconfiguration of formation flying satellites // Proc. of 44th IEEE Conference on Decision and Control, and European Control Conference (ECC). Seville, 2005. P. 66–71.
9. **Somasundaram K., Baras J.S.** Evolutionary dynamics of collaborative environments with heterogeneous agents // Proc. of the Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 09). Thessaloniki, 2009. P. 121–125.
10. **Olfati-Saber R.** Flocking for multi-agent dynamic systems : algorithms and theory // IEEE Trans. Automatic Control. 2006. Vol. 51, no. 3. P. 401–420.
11. **Куржанский А.Б.** Задача группового управления. Общие соотношения // Докл. РАН. 2009. Т. 426, № 1. С. 20–25.
12. **Kurzhanski A.B., Valyi I.** Ellipsoidal calculus for estimation and control. Laxenburg; Boston: Birkhauser, 1997. 321 p.
13. **Гусев М.И., Куржанский А.Б.** К оптимизации управляемых систем при наличии ограничений. I, II // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 9. С. 1591–1602; № 10. С. 1789–1800.
14. **Беллман Р.** Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 368 с.
15. **Тыртышников Е.Е.** Матричный анализ и линейная алгебра. М.: Физматлит, 2007. 372 с.
16. **Куржанский А.Б., Месяц А.И.** Управление эллипсоидальными траекториями. Теория и вычисления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2014. Т. 54, № 3. С. 404–414.
17. **Kurzhanski A.B., Mitchell I.M., Varaiya P.** Optimization techniques for state -constrained control and obstacle problems // Proc. of the 6th IFAC Symposium NOLCOS-2004. Stuttgart, 2004. P. 813–818.
18. **Куржанский А.Б.** Избранные труды А.Б.Куржанского. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2009. 755 с.
19. **Куржанский А.Б.** Задача управления по результатам измерений // Прикл. математика и механика. 2004. Т. 68, № 4. С. 487–501.
20. **Kurzhanski A.B.** On the problem of measurement feedback control: Ellipsoidal Techniques // Advances in Control, Communication Networks and Transportation Systems / ed. E.H. Abed. Boston: Birkhauser Boston, 2005. P. 21–38. (Systems Control Found. Appl.).
21. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 255 с.
22. **Crandall M.G., Evans L.C., Lions P.-L.** Some properties of viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. Vol. 282, no. 2. P. 487–502.
23. **Fleming W.H., Soner H.M.** Controlled Markov processes and viscosity solutions. New York; Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1993. 428 p.
24. К 80-летию Н. Н. Красовского / Д.В. Аносов [и др.] // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 11. С. 1443–1456.
25. К восьмидесятипятилетию Николая Николаевича Красовского / Д.В. Аносов [и др.] // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 10. С. 1371–1377.
26. **Basar T., Olsder G.** Dynamic noncooperative game theory. London; New York: Acad. Press, 1995. 519 с.

Куржанский Александр Борисович
академик РАН, д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: kurzhans@mail.ru, kurzhans@cs.msu.su

Поступила 07.07.2014

УДК 517.977

**ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕКОНСТРУКЦИИ ВХОДНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ
В ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ¹****В. И. Максимов**

Рассматривается задача восстановления входного воздействия линейного дифференциального уравнения с запаздыванием. Указывается устойчивый к помехам алгоритм ее решения. Алгоритм основан на известном в теории гарантированного управления принципе экстремального сдвига.

Ключевые слова: реконструкция, система с запаздыванием.

V. I. Maksimov. On an input recovery problem in a linear delay system.

We consider the problem of recovering the input of a linear differential equation with delay and propose a solution algorithm that is stable to perturbations. The algorithm is based on the extremal shift principle known in the theory of guaranteed control.

Keywords: reconstruction, delay system.

1. Введение

Работа посвящена приложению одного из основополагающих методов теории гарантированного управления — принципа экстремального сдвига — к задаче динамической реконструкции входного воздействия линейной системы с последействием. В созданной Н.Н. Красовским [1] и его последователями теории гарантированного управления указанный принцип играет исключительно важную роль. Принцип экстремального сдвига является базой позиционных решений антагонистических дифференциальных игр, составляет основу процедуры управления с поводирем. Идея экстремального сдвига является эффективной и при решении задач устойчивого динамического обращения [2–4]. Обсуждаемую в данной работе постановку указанной задачи характеризует одна принципиальная особенность: мы полагаем, что фазовые состояния заданной системы измеряются неточно, вследствие чего точное решение невозможно, поэтому мы допускаем приближенное решение. Для того чтобы обеспечить свойство приближенного восстановления входа, мы используем “стабилизирующее” управление с обратной связью. При формировании этого управления опираемся на принцип экстремального сдвига, локально регуляризованный с помощью известного в теории некорректных задач метода сглаживающего функционала (метода Тихонова) [5]. Следует отметить, что для систем дифференциальных уравнений с запаздыванием метод экстремального сдвига впервые был изложен в работах [6; 7].

2. Постановка задачи

Рассматривается система, описываемая линейным дифференциальным уравнением с последействием

$$\dot{q}(t) = L(q_t(s)) + B_0 v(t) + F(t), \quad t \in T = [t_0, \vartheta], \quad (2.1)$$

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 13-01-00110-а), программы Президиума РАН (проект 12-П-1-1019) и Урало-Сибирского проекта 12-С-1-1017.

$$L(q_t(s)) = \sum_{j=0}^l A_j q(t - \nu_j) + \int_{-\nu_l}^0 A_*(s) q(t + s) ds,$$

с начальным условием

$$q(t_0) = \varphi^0, \quad q(t_0 + s) = \varphi^1(s) \quad \text{при п.в. } s \in [-\nu_l, 0].$$

Здесь $0 \leq t_0 < \vartheta < +\infty$, $q(t) \in \mathbb{R}^n$, $v(t) \in \mathbb{R}^N$, $\varphi^0 \in \mathbb{R}^n$, $\varphi^1(\cdot) \in L_2([-\nu_l, 0]; \mathbb{R}^n)$, $0 = \nu_0 < \nu_1 < \dots < \nu_l < +\infty$, $q_t(s): s \rightarrow q(t + s)$, $-\nu_l \leq s \leq 0$, A_j , $j \in [0 : l]$, — $n \times n$ -матрицы, B_0 — матрица размерности $n \times N$, элементы матричной функции $s \rightarrow A_*(s)$, $s \in [-\nu_l, 0]$, суммируемы с квадратом, $F(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^n)$ — заданная функция.

Суть обсуждаемой в настоящей работе задачи состоит в следующем. В дискретные, достаточно частые, моменты времени

$$\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m \quad (\tau_0 = t_0, \tau_m = \vartheta, \tau_{i+1} = \tau_i + \delta)$$

измеряются состояния $q(\tau_i) = q(\tau_i; t_0, q^0(s), v(\cdot))$ системы (2.1), порождаемые неизвестным входом $v(\cdot)$. Здесь $q^0(s) \in X$ — начальное состояние (2.1): $q^0(0) = \varphi^0$, $q^0(s) = \varphi^1(s)$ при п.в. $s \in [-\nu_l, 0]$, $X = \mathbb{R}^n \times L_2([-\nu_l, 0]; \mathbb{R}^n)$ — гильбертово пространство пар со скалярным произведением

$$(x, y)_X = (x^0, y^0)_n + \int_{-\nu_l}^0 (x^1(s), y^1(s))_n ds,$$

$x = \{x^0, x^1(s)\}$, $y = \{y^0, y^1(s)\}$, и нормой $|\cdot|_X$, символ $(\cdot, \cdot)_n$ означает скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$. Решения системы (2.1) понимаются в смысле Каратеодори. Состояния $q(\tau_i)$ измеряются с ошибкой. Результаты измерений — векторы $\xi_i^h \in \mathbb{R}^n$ — удовлетворяют неравенствам

$$|q(\tau_i) - \xi_i^h|_n \leq h. \quad (2.2)$$

Величина $h \in (0, 1)$ характеризует точность измерения. Символ $|x|_n$ означает евклидову норму вектора $x \in \mathbb{R}^n$. Требуется указать алгоритм, позволяющий синхронно с развитием процесса осуществлять восстановление неизвестного входного воздействия $v = v(\cdot)$. Таким образом, рассматривается задача построения алгоритма, который по текущим измерениям величин $q(\tau_i)$ в “реальном времени” формирует (по принципу обратной связи) некоторую функцию (трактуемую в дальнейшем как управление) $u = u^h(\cdot)$, являющуюся приближением $v(\cdot)$. Ниже считаем, что начальное состояние $q^0(s)$ известно неточно, т.е. известно некоторое состояние $y^{0h}(s) = \{y^{0h}, y^{1h}(s)\} \in X$ со свойством

$$|y^{0h}(s) - q^0(s)|_X \leq Ch, \quad (2.3)$$

где $C = \text{const} > 0$.

В случае, когда на возмущения наложены априорные ограничения в виде компакта, т.е. $v(t) \in P$ при п.в. $t \in T$ ($P \subset \mathbb{R}^N$ — выпуклый компакт), обсуждаемая ниже задача может быть решена с помощью метода, описанного в работах [2; 4]. В настоящей статье мы рассмотрим случай, когда подобные ограничения отсутствуют, т.е. истинное $(v(\cdot))$ возмущение является элементом пространства $L_2(T; \mathbb{R}^N)$. Никакой иной информации о функции $v(\cdot)$ не требуется. При этом мы указываем алгоритм решения, который основан на подходящей модификации принципа экстремального сдвига, локально регуляризованного по методу сглаживающего функционала. При обосновании основного утверждения работы существенную роль будет играть полугрупповая трактовка решения системы (2.1). Относительно других алгоритмов динамической реконструкции систем с последствием см. обзорную работу [8], а также более поздние статьи [9–14].

3. Описание метода решения задачи

Изложим основные конструкции используемого в настоящей работе метода решения рассматриваемой задачи.

Пусть $U(q(\cdot))$ — множество всех входов $u(\cdot) \in U_T = L_2(T; \mathbb{R}^N)$, совместимых с $q(\cdot)$, т. е.

$$U(q(\cdot)) = \{u(\cdot) \in U_T: q(\cdot; t_0, q^0(s), u(\cdot)) = q(\cdot)\},$$

Ξ_T — множество измерений, т. е. множество всех кусочно-постоянных функций $\xi(\cdot): T \rightarrow \mathbb{R}^N$, $\Xi(q(\cdot), h)$ — множество всех h -точных результатов измерений, т. е. множество всех функций $\xi_h(\cdot) \in \Xi_T$, удовлетворяющих (2.2) при $\xi_i^h = \xi_h(\tau_i)$.

Вводится вспомогательная система M (называемая моделью), которая описывается некоторым уравнением (его вид уточним ниже). Траектория модели зависит от управления $u^h(\cdot)$ (подлежащего формированию). Эта траектория обозначается символом

$$y^h(\cdot) = y^h(\cdot; t_0, y_0^h(s), u^h(\cdot)) \in C(T; \mathbb{R}^n). \quad (3.1)$$

Начальное состояние модели $y_0^h(s)$ — известное приближенное значение начального состояния системы (2.1), удовлетворяющее (2.3).

Правило выбора управления $u^h(\cdot)$ (при каждом $h \in (0, 1)$) в модели отождествляется с парой $S_h = (\Delta_h, \mathcal{U}_h)$, где

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h} \quad (3.2)$$

— равномерное разбиение отрезка T на полуинтервалы $[\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$, $\tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta$, $\delta = \delta(h)$, $\tau_{h,0} = 0$, $\tau_{h,m_h} = \vartheta$, $\mathcal{U}_h$ — отображение, ставящее в соответствие каждой тройке $(\tau_i, \xi_i^h, y^h(\tau_i))$, $i \in [0 : m_h - 1]$ функцию

$$u_{\tau_i, \tau_{i+1}}^h(\cdot) = \mathcal{U}_h(\tau_i, \xi_i^h, y^h(\tau_i)) \in L_2([\tau_i, \tau_{i+1}]; \mathbb{R}^N). \quad (3.3)$$

Здесь $\tau_i = \tau_{h,i}$, $y^h(\tau_i) = y^h(\tau_i; t_0, y_0^h(s), u^h(\cdot))$, $\xi_i^h = \xi_h(\tau_i)$, $\xi_h(\cdot) \in \Xi(q(\cdot), h)$, символ $v_{a,b}(\cdot)$ означает сужение функции $v(\cdot)$ на полуинтервал $[\tau_i, \tau_{i+1})$. Таким образом, тройка $(M, \Delta_h, \mathcal{U}_h)$ для каждого $h \in (0, 1)$ определяет некоторый алгоритм D_h на пространстве измерений $(D_h: \Xi_T \mapsto U_T)$, формирующий выход $u^h(\cdot) = D_h \xi(\cdot)$ согласно принципу обратной связи (3.1)–(3.3). Этот алгоритм отождествляется с тройкой $(M, \Delta_h, \mathcal{U}_h)$.

Заметим, что в рассматриваемом нами случае выполнено следующее

У с л о в и е 1. Множество $U_*(q(\cdot))$ всех входов минимальной $L_2(T; \mathbb{R}^N)$ -нормы, порождающих решение $q(\cdot)$, состоит из одного элемента: $U_*(q(\cdot)) = \{u_*(\cdot; q(\cdot))\}$.

Таким образом

$$u_*(\cdot; q(\cdot)) = \arg \min\{|u(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^N)}: u(\cdot) \in U(q(\cdot))\}.$$

Семейство алгоритмов D_h , $h \in (0, 1)$, действующих из Ξ_T в U_T , называется *регуляризирующим*, если оно обладает следующим свойством:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup \left\{ |D_h \xi_h(\cdot) - u_*(\cdot; q(\cdot))|_{L_2(T; \mathbb{R}^N)}: \xi_h(\cdot) \in \Xi(q(\cdot), h) \right\} = 0.$$

Наша цель состоит в построении регуляризирующего семейства алгоритмов

$$D_h = (M, \Delta_h, \mathcal{U}_h), \quad h \in (0, 1), \quad (3.4)$$

вида (3.1)–(3.3).

После того как модель (3.1) и ее начальное состояние выбраны, работа алгоритма D_h осуществляется по следующей схеме. До начального момента $t_0 = 0$ фиксируется погрешность h ,

а также разбиение $\Delta = \Delta_h = \{\tau\}_{i=0}^{m_h}$, (3.2) отрезка T . На i -м шаге алгоритма, осуществляемом на промежутке времени $[\tau, \tau_{i+1}]$, выполняются следующие операции. Сначала измеряется (с ошибкой) фазовое состояние $q(\tau)$, т.е. находится элемент $\xi_i^h \in \mathbb{R}^n$ со свойством (2.2). Затем по правилу (3.3) определяется управление в модели. После этого вместо траектории $y^h(t)$, $t \in [t_0, \tau_i]$, формируется фазовая траектория $y^h(t)$, $t \in (\tau_i, \tau_{i+1}]$ (т.е. осуществляется коррекция памяти).

Правило построения семейства алгоритмов D_h основано на теореме 1, приведенной ниже. Фиксируем семейство разбиений Δ_h вида (3.2). Пусть на декартовом произведении $C(T; \mathbb{R}^n) \times C(T; \mathbb{R}^n)$ задано семейство функционалов $\Lambda_h^0(\cdot, \cdot)$.

О п р е д е л е н и е 1 [3]. Семейство D_h , $h \in (0, 1)$, (3.4) позиционных алгоритмов моделирования называется Λ_h^0 -устойчивым, если существуют функции $k_1(\cdot)$, $k_2(\cdot)$, $k_3(\cdot): [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ такие, что

$$k_1(h) \rightarrow 0, \quad k_2(h) \rightarrow 1, \quad k_3(h) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0,$$

и для всякого измерения $\xi_h(\cdot) \in \Xi(q(\cdot), h)$ выполняются неравенства

$$\Lambda_h^0(q(\cdot), y^h(\cdot)) \leq k_1(h), \quad (3.5)$$

$$|u^h(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^N)}^2 \leq k_2(h) |u_*(\cdot; q(\cdot))|_{L_2(T; \mathbb{R}^N)} + k_2(h). \quad (3.6)$$

Здесь $u^h(\cdot) = D_h \xi_h(\cdot)$, $y^h(\cdot)$ — траектория модели, порожденная алгоритмом D_h и измерением $\xi_h(\cdot)$. Справедлива

Теорема 1 [3, теорема 3.2]. Пусть семейство D_h позиционных алгоритмов моделирования

- а) Λ_h^0 -устойчиво,
- б) для любых $h_k > 0$ ($h_k \rightarrow 0+$ при $k \rightarrow \infty$), $\xi_{h_k}(\cdot) \in \Xi(q(\cdot), h_k)$, $y^{h_k}(\cdot) = y^{h_k}(\cdot; t_0, y_0^{h_k}(s), u^{h_k}(\cdot))$, $u^{h_k}(\cdot) = D_{h_k} \xi_{h_k}(\cdot)$, условия

$$u^{h_k}(\cdot) \rightarrow v(\cdot) \quad \text{слабо в} \quad L_2(T; \mathbb{R}^N), \quad \Lambda_{h_k}^0(q(\cdot), y^{h_k}(\cdot)) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty$$

влекут включение $v(\cdot) \in U(q(\cdot))$. Тогда семейство алгоритмов D_h , $h \in (0, 1)$, является регуляризирующим.

4. Алгоритм решения

Итак, укажем алгоритм решения рассматриваемой задачи. Пусть взято семейство разбиений отрезка T

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,0} = 0, \quad \tau_{h,m_h} = \vartheta, \quad \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta(h), \quad \delta(h) \in (0, 1),$$

а также некоторая функция $\alpha(h) \in (0, 1)$, где $h \in (0, 1)$.

В качестве модели возьмем “копию” заданной системы, а именно, систему того же вида

$$\dot{y}^h(t) = L(y_t^h(s)) + B_0 u^h(t) + F(t), \quad t \in T, \quad (4.1)$$

с начальным условием

$$y^h(t_0) = y^{0h}, \quad y^h(t_0 + s) = y^{1h}(s) \quad \text{при п.в.} \quad s \in [-\nu_l, 0].$$

Здесь $y^h(t) \in \mathbb{R}^n$, $u^h(t) \in \mathbb{R}^N$, $y^{01} \in \mathbb{R}^n$, $y^{1h}(s) \in L_2([-\nu_l, 0]; \mathbb{R}^n)$.

До начала работы алгоритма фиксируем величину $h \in (0, 1)$ и разбиение Δ_h . Работу алгоритма разобьем на $m - 1$ ($m = m_h$) однотипных шагов. В течение i -го шага, осуществляемого

на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, выполняются следующие операции. Сначала в момент τ_i вычисляется вектор

$$u_i^h = \alpha^{-1} \exp(-\omega \tau_{i+1}) B'_0(\xi_i^h - y^h(\tau_i)), \quad (4.2)$$

где

$$\alpha = \alpha(h), \quad \omega = 2 \left(\frac{l+1}{2} + |A_0| + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^l |A_j|^2 + \frac{1}{2} \int_{-\nu_l}^0 |A_*(\tau)|^2 d\tau \right).$$

Здесь и всюду ниже штрих означает транспонирование, а символ $|A|$ означает евклидову норму матрицы A . Затем на вход системы (2.1) подается управление

$$u^h(t) = \mathcal{U}_h(\tau_i, \xi_i^h, y^h(\tau_i)) = u_i^h, \quad t \in \delta_i. \quad (4.3)$$

Под действием этого управления система (4.1) переходит из состояния $y^h(\tau_i + s)$, $s \in [-\nu_l, 0]$, в состояние $y^h(\tau_{i+1} + s) = y(\tau_{i+1} + s; \tau_i, y^h(\tau_i + s), u_i^h)$, $s \in [-\nu_l, 0]$. Работа алгоритма заканчивается в момент ϑ .

Пусть семейство разбиений Δ_h , $h \in (0, 1)$, отрезка T и функция $\alpha(h)$ обладают следующими свойствами:

$$h\delta^{-1}(h) \leq C_0 \text{ при } h \in (0, 1), \quad \delta(h)\alpha^{-3}(h) \rightarrow 0, \quad \alpha(h) \rightarrow 0, \quad \delta(h) \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0+. \quad (4.4)$$

Здесь C_0 — постоянная, не зависящая от $h \in (0, 1)$. В дальнейшем, не нарушая общности, считаем, что при $h \in (0, 1)$ имеет место включение $\delta(h)\alpha^{-3}(h) \in (0, 1)$. Семейство функционалов $\Lambda_h^0(\cdot, \cdot)$ зададим следующим образом:

$$\Lambda_h^0(x(\cdot), y(\cdot)) = \max_{i \in [0:m_h]} |x(\tau_{h,i}) - y(\tau_{h,i})|_n^2 \quad \forall x(\cdot), y(\cdot) \in C(T; \mathbb{R}^n).$$

Имеет место

Теорема 2. Пусть выполнены соотношения (2.3), (4.4). Тогда равномерно по всем $h \in (0, 1)$ верны неравенства (3.5), (3.6), в которых

$$k_1(h) = d_1(\alpha(h) + \delta(h)), \quad k_2(h) = 1 + \delta^{2/3}(h)\alpha^{-1}(h),$$

$$k_3(h) = d_2 \left\{ \alpha(h) + \left(\frac{\delta(h)}{\alpha^3(h)} \right)^{2/3} \right\},$$

где $d_1 = \text{const} > 0$, $d_2 = \text{const} > 0$ — постоянные, не зависящие от $h \in (0, 1)$, $\alpha = \alpha(h) \in (0, 1)$ и $\delta = \delta(h) \in (0, 1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как известно [15; 16], уравнение (2.1) порождает C_0 -полугруппу линейных ограниченных операторов $\mathcal{X}(t)$, $t \geq 0$, определяемых следующим образом. Пусть $s_0(\cdot)$ — единственное решение на T матричного дифференциально-функционального уравнения

$$\frac{ds_0(t)}{dt} = A_0 s_0(t) + \sum_{j=1}^l A_j s_0(t - \nu_j) + \int_{-\nu_l}^0 A_*(s) s_0(t + s) ds \quad \text{при п.в. } t \in T$$

с начальным условием $s_0(t) = E$ (единичная $n \times n$ -матрица) при $t \leq 0$; $B_* : L_2([-\nu_l, 0]; \mathbb{R}^n) \rightarrow L_2([-\nu_l, 0]; \mathbb{R}^n)$ — оператор вида

$$(B_* \varphi)(\tau) = \sum_{j=1}^l A_j \chi_{[-\nu_j, 0]}(\tau) \varphi(-\nu_j - \tau) + \int_{-\nu_l}^0 A_*(\xi) \varphi(\xi - \tau) d\xi \quad \text{при п.в. } \tau \in [-\nu_l, 0],$$

$\chi_{[a,b]}(\cdot)$ — характеристическая функция интервала $[a, b]$; оператор $F_* : X \rightarrow X$ задается формулой

$$(F_*\varphi)^0 = \varphi^0 \in \mathbb{R}^n, \quad (F_*\varphi)^1 = B_*\varphi^1 \in L_2([-\nu_l, 0]; \mathbb{R}^n) \quad (\varphi = \{\varphi^0, \varphi^1(s)\} \in X).$$

Тогда [16, с. 903]

$$\mathcal{X}(t)\varphi = G_t F_*\varphi + S(t)\varphi, \quad (4.5)$$

где $G_t : X \rightarrow X$ и $S(t) : X \rightarrow X$ задаются соотношениями

$$(G_t\varphi)^0 = (G_t\varphi)^1(0), \quad (G_t\varphi)^1(\tau) = s_0(t+\tau)\varphi^0 + \int_{-\nu_l}^0 s_0(t+\tau+\xi)\varphi^1(\xi) d\xi \quad \text{при } \tau \in [-\nu_l, 0], \quad (4.6)$$

$$(S(t)\varphi)^0 = 0, \quad (S(t)\varphi)^1(\tau) = \varphi(t+\tau)\chi_{[-\nu_l, -t]}(\tau) \quad \text{при } \tau \in [-\nu_l, 0].$$

Пусть $U = \mathbb{R}^N$, $q(\cdot; t_0, \{\varphi^0, \varphi^1(s)\}, v(\cdot))$ ($v(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^N)$) — единственное решение уравнения (2.1) в смысле Каратеодори, а $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, v(\cdot))$ — слабое решение абстрактного дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t) + f(t), \quad t \in T = [t_0, \vartheta], \quad x(t_0) = x_0, \quad (4.7)$$

в пространстве $(X, |\cdot|_X)$. В (4.7) полагаем $x_0 = \{\varphi^0, \varphi^1(s)\} \in X$, $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ — инфинитезимальный генератор C_0 -полугруппы $\mathcal{X}(t) : X \rightarrow X$, оператор $B \in \mathcal{L}(U; X)$ имеет вид

$$Bu = \{B_0u, 0\} \quad (u \in \mathbb{R}^N, 0 \in L_2([-\nu_l, 0]; \mathbb{R}^n)), \quad f(t) = \{F(t), 0\}. \quad (4.8)$$

Слабым решением уравнения (4.7), отвечающим управлению $v(\cdot) \in L_2(T; U)$ и начальному состоянию $x(t_0) = x_0$, называется непрерывная функция $x(t) : T \rightarrow X$, задаваемая равенством

$$x(t) = \mathcal{X}(t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \mathcal{X}(t - \tau)\{Bv(\tau) + f(\tau)\} d\tau.$$

Заметим, что генератор A задается следующим образом [16, предложение 2.1]:

$$D(A) = \left\{ \varphi = \{\varphi^0, \varphi^1(s)\} \in X : \varphi^1(s) \in W^{1,2}([-\nu_l, 0]; \mathbb{R}^n), \varphi^1(0) = \varphi^0 \right\},$$

$$A(\varphi) = \{L(\varphi^1), \dot{\varphi}^1\}, \quad \varphi = \{\varphi^0, \varphi^1(s)\} \in D(A).$$

Здесь $W^{1,2}([-\nu_l, 0]; \mathbb{R}^n)$ — пространство абсолютно непрерывных функций, производные которых являются элементами пространства $L_2([-\nu_l, 0]; \mathbb{R}^n)$. Для любых $x_0 = \{\varphi^0, \varphi^1(s)\} \in X$, $v(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^N)$ и $t \in T$ справедливо равенство

$$x(t; t_0, x_0, v(\cdot)) = \left\{ q(t; t_0, \{\varphi^0, \varphi^1(s)\}, v(\cdot)), q(t+s; t_0, \{\varphi^0, \varphi^1(s)\}, v(\cdot)) \right\}.$$

В таком случае

$$x^h(t) = \left\{ y^h(t; t_0, \{\varphi^0, \varphi^1(s)\}, u^h(\cdot)), y^h(t+s; t_0, \{\varphi^0, \varphi^1(s)\}, u^h(\cdot)) \right\}, \quad (4.9)$$

где $y^h(\cdot)$ — решение уравнения (4.1), порожденное управлением $u^h(\cdot)$, вычисляемым по формулам (4.2), (4.3); $x^h(\cdot)$ — решение уравнения (4.7) при $v = u^h(\cdot)$. В пространстве X введем норму $|\cdot|_2$, эквивалентную норме $|\cdot|_X$,

$$|\{\varphi^0, \varphi^1(s)\}|_2 = \left(|\varphi^0|_n^2 + \int_{-\nu_l}^0 |\varphi^1(\tau)|_n^2 g(\tau) d\tau \right)^{1/2}, \quad \{\varphi^0, \varphi^1(s)\} \in X, \quad (4.10)$$

где

$$g(\tau) = j \text{ при } j \in (-\nu_{l-j+1}, -\nu_{l-j}), \quad j \in [1 : l].$$

Скалярное произведение, отвечающее этой норме, имеет вид

$$(\{\varphi^0, \varphi^1(s)\}, \{\bar{\varphi}^0, \bar{\varphi}^1(s)\})_2 = (\varphi^0, \bar{\varphi}^0)_n + \int_{-\nu_l}^0 (\varphi^1(\tau), \bar{\varphi}^1(\tau))_n g(\tau) d\tau.$$

Известно [15, лемма 2.3], что при таком выборе нормы в пространстве X полугруппа $\mathcal{X}(t)$, $t \in T$, ω -диссипативна, т. е. удовлетворяет неравенству

$$|\mathcal{X}(t)z|_2 \leq \exp(0.5\omega t)|z|_2 \quad (\forall z \in X). \quad (4.11)$$

Оценим изменение функционала

$$\varepsilon_h(t) = \lambda_h(t) + \alpha \int_{t_0}^t \{|u^h(\tau)|_N^2 - |v(\tau)|_N^2\} d\tau, \quad (4.12)$$

где

$$\lambda_h(t) = \exp(-\omega t)|x^h(t) - w(t)|_2^2,$$

$w(\cdot)$ — решение уравнения

$$\dot{w}(t) = Aw(t) + Bv(t) + f(t)$$

с начальным условием $w(t_0) = q_0(s) = \{\varphi^0, \varphi^1(s)\}$. Таким образом

$$w(t) = \{q(t; t_0, q_0(s), v(\cdot)), q(t + s; t_0, q_0(s), v(\cdot))\}. \quad (4.13)$$

Заметим, что при $t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$,

$$w(t) = \mathcal{X}(t - \tau_i)w(\tau_i) + \int_{\tau_i}^t \mathcal{X}(t - \tau)\{Bv(\tau) + f(\tau)\} d\tau, \quad (4.14)$$

$$x^h(t) = \mathcal{X}(t - \tau_i)x^h(\tau_i) + \int_{\tau_i}^t \mathcal{X}(t - \tau)\{Bu^h(\tau) + f(\tau)\} d\tau.$$

Учитывая равенства (4.14), легко видеть, что при всех $i \in [0 : m - 1]$ верна оценка

$$\varepsilon_h(\tau_{i+1}) \leq \exp(-\omega\tau_{i+1})|x^h(\tau_i) - w(\tau_i)|_2^2 + \lambda_i + \mu_i + \alpha \int_{t_0}^{\tau_{i+1}} \{|u^h(\tau)|_N^2 - |v(\tau)|_N^2\} d\tau, \quad (4.15)$$

где

$$\lambda_i = 2 \left(S_i, \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau) B \{u^h(\tau) - v(\tau)\} d\tau \right)_2, \quad (4.16)$$

$$\mu_i = \delta \exp(-\omega\tau_{i+1}) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau) B (u^h(\tau) - v(\tau))|_2^2 d\tau, \quad \delta = \tau_{i+1} - \tau_i, \quad (4.17)$$

$$S_i = \exp(-\omega\tau_{i+1}) \mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau_i) (x^h(\tau_i) - w(\tau_i)). \quad (4.18)$$

Из (4.15) в силу неравенства $\exp(-\omega\delta) \leq 1$ следует оценка

$$\varepsilon_h(\tau_{i+1}) \leq \varepsilon_h(\tau_i) + \lambda_i + \mu_i + \alpha \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{|u^h(\tau)|_N^2 - |v(\tau)|_N^2\} d\tau. \quad (4.19)$$

Рассмотрим величину λ_i (см. (4.16)). Учитывая (4.5), (4.6), (4.8), заключаем, что при $t \in [0, \delta]$, $\delta \leq \nu_l$, справедливо равенство

$$\mathcal{X}(t)Bu = \{s_0(t)B_0u, s_0(t+\tau)B_0u\chi_{[-t,0]}(\tau)\} \in X, \quad (4.20)$$

где

$$s_0(t+\tau)B_0u\chi_{[-t,0]}(\tau) = \begin{cases} s_0(t+\tau)B_0u & \text{при } \tau \in [-t, 0], \\ 0 & \text{при } \tau \in [-\nu_l, -t). \end{cases}$$

В свою очередь ввиду (4.8), (4.10) и (4.20) верно неравенство ($t \in [0, \delta]$)

$$|\mathcal{X}(t)Bu - Bu|_2 \leq c_* \left\{ |(s_0(t) - E)B_0u|_n + \left(\int_{-t}^0 |s_0(t+\tau)B_0u|_n^2 d\tau \right)^{1/2} \right\},$$

где E — единичная матрица соответствующей размерности, c_* — постоянная, не зависящая от t, u , которая может быть выписана в явном виде. Учитывая свойства матриц системы (2.1), а также тот факт, что функция $s_0(\cdot)$ является решением соответствующего матричного уравнения (см. начало доказательства теоремы), заключаем: все элементы $s_0(\cdot)$ являются функциями, суммируемыми с квадратом. Отсюда и из последнего неравенства следует

$$|\mathcal{X}(t)Bu - Bu|_2 \leq c_0 t^{1/2} |B_0u|_n. \quad (4.21)$$

Пусть символ $\Xi_\delta(q(\cdot), h)$ означает множество функций $\xi(\cdot): [t_0 - \nu_l, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ следующей структуры:

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \varphi^1(t - t_0) && \text{при } t \in [t_0 - \nu_l, t_0), \\ \xi(t) &= \xi_i^h && \text{при } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in [0 : m - 2], \\ \xi(t) &= \xi_{m-1}^h && \text{при } t \in [\tau_{m-1}, \vartheta]. \end{aligned}$$

Для каждого элемента $\xi(\cdot) \in \Xi_\delta(q(\cdot), h)$ и каждого номера $i \in [0 : m - 1]$ введем обозначение

$$\xi^h(\tau_i) = \{\xi_i^h, \xi(\tau_i + s)\} \in X.$$

В таком случае, учитывая (4.11), (4.21), при $\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ имеем

$$|(\tilde{s}_i, \mathcal{X}(\tau_i - \tau)Bu)_2 - (\tilde{s}_i, Bu)_2| \leq c_0 |\tilde{s}_i|_2 \delta^{1/2} |B_0u|_n \leq C_1 |s_i|_2 \delta^{1/2} |B_0u|_n. \quad (4.22)$$

Здесь

$$\tilde{s}_i = \mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau_i)s_i, \quad s_i = x^h(\tau_i) - \xi^h(\tau_i). \quad (4.23)$$

Символом $z(t) = z(t; z_0) \in \mathbb{R}^n$ ($z_0 = \{z^0, z_0(s)\} \in X$) обозначим решение (в смысле Каратеодори) системы

$$\dot{z}(t) = L(z_t), \quad t \geq 0,$$

с начальным условием $z(0) = z^0$, $z(s) = z_0(s)$ при п.в. $s \in [-\nu_l, 0]$. Нетрудно видеть, что верны неравенства

$$\begin{aligned} |z(t)|_n &\leq C_2 |z_0|_2, \\ |z(t) - z(0)|_n &\leq C_3 t^{1/2} |z_0|_2, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Воспользовавшись равенствами $(\tilde{s}_i, Bu)_2 = (z(\delta; s_i), B_0 u)_n$, $(s_i, Bu)_2 = (z(0; s_i), B_0 u)_n$, выводим, учитывая (4.24),

$$|(\tilde{s}_i, Bu)_2 - (s_i, Bu)_2| \leq |z(\delta; s_i) - z(0; s_i)|_n |B_0 u|_n \leq C_3 \delta^{1/2} |s_i|_2 |B_0 u|_n. \quad (4.25)$$

Из (2.2), (4.22), (4.25) получаем при $\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$

$$|(\tilde{s}_i, \mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau)Bu)_2 - (s_i, Bu)_2| \leq C_4 |s_i|_2 \delta^{1/2} |B_0 u|_n \leq C_5 \delta^{1/2} (\lambda_h^{1/2}(\tau_i) + h) |B_0 u|_n. \quad (4.26)$$

Учитывая неравенства

$$|x^h(\tau_i) - w(\tau_i) - s_i|_X = |\xi^h(\tau_i) - w(\tau_i)|_X \leq C_6(h + \delta),$$

вытекающие из (2.2), (4.9), (4.10), (4.13), устанавливаем (см. (4.18), (4.23)) оценку

$$|S_i - \exp(-\omega\tau_{i+1})\tilde{s}_i|_2 \leq C_7(h + \delta). \quad (4.27)$$

В силу (4.11), (4.20) справедлива оценка ($\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$)

$$|\mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau)Bu|_2 \leq C_8 |B_0 u|_n. \quad (4.28)$$

Объединив (4.27) и (4.28), получаем при $\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$

$$\left| (S_i, \mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau)Bu)_2 - \exp(-\omega\tau_{i+1})(\tilde{s}_i, \mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau)Bu)_2 \right| \leq C_9(h + \delta) |B_0 u|_n. \quad (4.29)$$

В таком случае из (4.26), (4.29) выводим (при $\delta \in (0, 1)$)

$$\begin{aligned} & \left| (S_i, \mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau)Bu)_2 - \exp(-\omega\tau_{i+1})(s_i, Bu)_2 \right| \\ & \leq C_5 \delta^{1/2} \exp(-\omega\tau_{i+1}) \lambda_h^{1/2}(\tau_i) |B_0 u|_n + C_9(h + \delta) |B_0 u|_n \quad \forall u \in \mathbb{R}^N. \end{aligned} \quad (4.30)$$

В свою очередь, воспользовавшись (4.16) и (4.30), устанавливаем оценку

$$\begin{aligned} \lambda_i &= 2 \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left\{ (S_i, \mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau)B\{u^h(\tau) - v(\tau)\})_2 - \exp(-\omega\tau_{i+1})(s_i, B\{u^h(\tau) - v(\tau)\})_2 \right\} d\tau \\ & \quad + 2 \exp(-\omega\tau_{i+1}) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (s_i, B\{u^h(\tau) - v(\tau)\})_2 d\tau \\ & \leq 2 \exp(-\omega\tau_{i+1}) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (s_i, B\{u^h(\tau) - v(\tau)\})_2 d\tau + \rho_i, \end{aligned} \quad (4.31)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_i &= C_{10} \left\{ \delta^{1/2} \lambda_h^{1/2}(\tau_i) + h + \delta \right\} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |B_0\{u^h(\tau) - v(\tau)\}|_n d\tau \\ & \leq C_{11} \left\{ \delta \lambda_h(\tau_i) + h^2 + \delta \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (|u^h(\tau)|_N^2 + |v(\tau)|_N^2) d\tau + \delta^2 \right\}. \end{aligned}$$

Далее, имеем (см. (4.17))

$$\mu_i \leq C_{12} \delta \exp(-\omega\tau_{i+1}) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{ |u^h(\tau)|_N^2 + |v(\tau)|_N^2 \} d\tau. \quad (4.32)$$

Заметим, что вектор u_i^h (см. (4.2), (4.8), (4.13), (4.23)) находится из условия

$$u_i^h = \arg \min \{2 \exp(-\omega \tau_{i+1})(s_i, Bu)_2 + \alpha |u|_N^2 : u \in \mathbb{R}^N\}. \quad (4.33)$$

Следовательно, в силу (4.31), (4.33)

$$\lambda_i + \alpha \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{|u^h(\tau)|_N^2 - |v(\tau)|_N^2\} d\tau \leq \rho_i. \quad (4.34)$$

Таким образом, из (4.19), (4.32), (4.34) выводим

$$\varepsilon_h(\tau_{i+1}) \leq \varepsilon_h(\tau_i) + C_{13} \left\{ \delta \lambda_h(\tau_i) + h^2 + \delta \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (|u^h(\tau)|_N^2 + |v(\tau)|_N^2) d\tau + \delta^2 \right\},$$

т. е.

$$\lambda_h(\tau_{i+1}) \leq (1 + C_{13}\delta)\lambda_h(\tau_i) + C_{13} \left\{ h^2 + \delta \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (|u^h(\tau)|_N^2 + |v(\tau)|_N^2) d\tau + \delta^2 \right\} + \alpha \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |v(\tau)|_N^2 d\tau.$$

Из (2.2) и правила определения u_i^h (см. (4.2)) вытекает

$$|u_i^h|_N^2 \leq 2b^2 \exp(-2\omega \tau_{i+1})(\lambda_h(\tau_i) + h^2)\alpha^{-2} \leq C_{14}(\lambda_h(\tau_i) + h^2)\alpha^{-2}, \quad (4.35)$$

где b — евклидова норма матрицы B_0 . Кроме того, ввиду (2.3) верно неравенство

$$\lambda_h(t_0) \leq C_{15}h^2. \quad (4.36)$$

Учитывая вытекающее из (4.35) неравенство

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u^h(\tau)|_N^2 d\tau \leq C_{16}\delta(\lambda_h(\tau_i) + h^2)\alpha^{-2},$$

устанавливаем (при $\delta(h) \in (0, 1)$, $\delta(h)\alpha^{-2}(h) \leq C_*$) соотношение

$$\lambda_h(\tau_{i+1}) \leq (1 + C_{17}\delta)\lambda_h(\tau_i) + C_{18} \left\{ h^2 + (\alpha + \delta) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |v(\tau)|_N^2 d\tau \right\}. \quad (4.37)$$

Из (4.37) в силу [17, лемма 1] имеем

$$\lambda_h(\tau_{i+1}) \leq C_{19} \left\{ \lambda_h(t_0) + \alpha + \delta + h^2\delta^{-1} \right\}. \quad (4.38)$$

Учитывая (4.36), а также соотношение $h\delta^{-1}(h) \leq C_0$ при $h \in (0, 1)$ (см. (4.4)), выводим из (4.38)

$$\lambda_h(\tau_i) \leq C_{20}(\delta + \alpha), \quad i \in [0 : m]. \quad (4.39)$$

Отсюда следует справедливость неравенства (3.5) при $k_1(h)$, указанного в формулировке теоремы. Первая часть теоремы доказана. Проверим вторую. Нетрудно видеть, что верны неравенства

$$\delta^{1/2}\lambda_h^{1/2}(\tau_i) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |B_0\{u^h(\tau) - v(\tau)\}|_n d\tau \leq \delta^{4/3}\lambda_h(\tau_i) + 0.25|B_0|^2\delta^{2/3} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{|u^h(\tau)|_n^2 + |v(\tau)|_n^2\} d\tau, \quad (4.40)$$

$$h \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |B_0\{u^h(\tau) - v(\tau)\}|_n d\tau \leq h^2 \delta^{1/3} + 0.25|B_0|^2 \delta^{2/3} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{|u^h(\tau)|_n^2 + |v(\tau)|_n^2\} d\tau, \quad (4.41)$$

$$\delta \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |B_0\{u^h(\tau) - v(\tau)\}|_n d\tau \leq \delta^{7/3} + 0.25|B_0|^2 \delta^{2/3} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{|u^h(\tau)|_n^2 + |v(\tau)|_n^2\} d\tau. \quad (4.42)$$

Учитывая (4.19), (4.31), (4.32), (4.33), (4.40)–(4.42), будем иметь

$$\varepsilon_h(\tau_{i+1}) \leq \varepsilon_h(\tau_i) + C_{21} \left\{ \delta^{4/3} \lambda_h(\tau_i) + h^2 \delta^{1/3} + \delta^{2/3} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (|u^h(\tau)|_N^2 + |v(\tau)|_N^2) d\tau + \delta^{7/3} \right\}. \quad (4.43)$$

В свою очередь, воспользовавшись (4.39), получаем

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u^h(\tau)|_N^2 d\tau \leq C_{22} \frac{\delta(\delta + \alpha)}{\alpha^2}. \quad (4.44)$$

Просуммировав (4.43) по i от 0 до j , будем иметь в силу (4.36), (4.39), (4.44)

$$\varepsilon(\tau_{j+1}) \leq C_{23} h^2 + C_{24} \left\{ \delta^{1/3}(\delta + \alpha) + h^2 \delta^{-2/3} + \delta^{2/3} \frac{\delta + \alpha}{\alpha^2} + \delta^{2/3} \int_{t_0}^{\tau_{j+1}} |v(\tau)|_N^2 d\tau + \delta^{4/3} \right\}. \quad (4.45)$$

Учитывая соотношение $\delta(h)\alpha^{-3}(h) \leq 1$, заключаем

$$\delta^{2/3} \frac{\delta + \alpha}{\alpha^3} \leq \delta^{2/3} + \left(\frac{\delta}{\alpha^3} \right)^{2/3} \leq 2 \left(\frac{\delta}{\alpha^3} \right)^{2/3},$$

В таком случае из (4.45) выводим ($j \in [0 : m - 1]$, $m = m_h$, $\alpha = \alpha(h)$, $\delta = \delta(h)$)

$$\int_{t_0}^{\tau_{j+1}} |u^h(\tau)|_N^2 d\tau \leq \{1 + \delta^{2/3} \alpha^{-1}\} \int_{t_0}^{\tau_{j+1}} |v(\tau)|_N^2 d\tau + d_2 \left\{ \alpha + \left(\frac{\delta}{\alpha^3} \right)^{2/3} \right\}.$$

Отсюда следует неравенство (3.6). Теорема доказана.

Из теоремы 2 вытекает

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда семейство алгоритмов D_h вида (4.1), (3.2), (3.3), (4.3), (4.2) является регуляризирующим.

5. Оценка скорости сходимости алгоритма

При некоторых дополнительных условиях может быть выписана оценка скорости сходимости (см. ниже теорему 3). Установим эту оценку. Для этого нам понадобится следующая

Лемма [2; 3, с. 54]. Пусть $u(\cdot) \in L_\infty(T_*; \mathbb{R}^n)$, $v(\cdot) \in W(T_*; \mathbb{R}^n)$, $T_* = [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$,

$$\left| \int_a^t u(\tau) d\tau \right|_n \leq \varepsilon, \quad |v(t)|_n \leq K \quad \forall t \in T_*.$$

Тогда при всех $t \in T_*$ верно неравенство

$$\left| \int_a^t (u(\tau), v(\tau))_n d\tau \right| \leq \varepsilon(K + \text{var}(T_*; v(\cdot))).$$

Здесь символ $\text{var}(T_*; v(\cdot))$ означает вариацию функции $v(\cdot)$ на отрезке T_* , а символ $W(T_*; \mathbb{R}^n)$ — множество функций $y(\cdot) : T_* \rightarrow \mathbb{R}^n$ с ограниченной вариацией.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 2, $n = N$, B — обратимая матрица, $v(\cdot) \in W(T; \mathbb{R}^n)$ и $\text{var}_{t \in T} |v(t)| \leq d$. Тогда справедлива оценка

$$|v(\cdot) - u^h(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^n)}^2 \leq K(h),$$

где

$$K(h) = C\{k_3(h) + |1 - k_2(h)|\},$$

постоянная C зависит от d и $\text{var}(T; v(\cdot))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользовавшись (4.14), нетрудно видеть, что при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i \in [0 : m - 1]$ верны неравенства

$$\lambda_h^{1/2}(t) \leq c_0 \left\{ \lambda_h^{1/2}(\tau_i) + \int_{\tau_i}^t (|u_i^h|_n + |v(\tau)|_n) d\tau \right\}. \quad (5.1)$$

Кроме того, в силу (4.2), (4.39), учитывая (4.4), имеем

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u_i^h|_n d\tau \leq c_1 \delta \alpha^{-1} (h + \lambda_h^{1/2}(\tau_i)) \leq c_2 \delta \alpha^{-1} (\delta + \alpha)^{1/2}, \quad \alpha = \alpha(h), \quad \delta = \delta(h). \quad (5.2)$$

В таком случае из (5.1), (5.2), учитывая неравенства $\delta \alpha^{-1} \leq c_3 \alpha$ и $\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |v(\tau)|_n d\tau \leq c_4 \delta^{1/2}$ (для любых $i \in [0 : m - 1]$), получаем при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$

$$|z(t)|_n \leq c_5 \lambda_h^{1/2}(t) \leq c_6 \{\lambda_h(\tau_i) + \alpha\}^{1/2} \leq c_7 \alpha^{1/2},$$

где $z(t) = y^h(t) - q(t)$. Заметим, что для любых $t_1, t_2 \in T_*$, $t_1 < t_2$ верно неравенство

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_1}^{t_2} B(v(t) - u^h(t)) dt \right|_n &= \left| \int_{t_1}^{t_2} \{\dot{q}(\tau) - \dot{y}^h(\tau) + L(y_\tau^h(s)) - L(q_\tau(s))\} d\tau \right|_n \\ &\leq |z(t_2) - z(t_1)|_n + c_8 \int_{t_1 - \nu_l}^{t_2} |z(\tau)|_n d\tau. \end{aligned}$$

Воспользовавшись теоремой 2, получаем

$$\begin{aligned} |v(\cdot) - u^h(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^n)}^2 &\leq 2|v(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^n)}^2 - 2 \int_{t_0}^{\vartheta} (v(\tau), u^h(\tau))_n d\tau \\ &\quad + k_3(h) + |1 - k_2(h)| \int_{t_0}^{\vartheta} |v(\tau)|_n^2 d\tau \\ &= 2 \int_{t_0}^{\vartheta} (B^{-1}v(\tau), B(v(\tau) - u^h(\tau)))_n d\tau + k_3(h) + |1 - k_2(h)| \int_{t_0}^{\vartheta} |v(\tau)|_n^2 d\tau. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Утверждение теоремы следует из (5.3) и леммы. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры М., 1974. 458 с.
2. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Basel: Gordon and Breach Sci. Publ., 1995. 625 p.
3. Максимов В.И. Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2000. 305 с.
4. Осипов Ю.С., Кряжковский А.В., Максимов В.И. Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2011. 291 с.
5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1978. 285 с.
6. Красовский Н.Н., Осипов Ю.С. Линейные дифференциально-разностные игры // Докл. АН СССР. 1971. Т. 197, № 4. С. 777–780.
7. Осипов Ю.С. Дифференциальные игры для систем с запаздыванием // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196, № 4. С. 779–782.
8. Максимов В.И. Метод функций Ляпунова в задачах реконструкции входов систем с последействием // Современная математика и ее приложения. 2005. Т. 26. С. 78–95.
9. Близоруква М.С., Максимов В.И. Об одном алгоритме реконструкции траектории и управления в системе с запаздыванием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 109–122.
10. Blizorukova M. On an algorithm for dynamic reconstruction in systems with delay in control // IFIP International Federation for Information Processing. 2013. Vol. 391. P. 225–234. (System modeling and optimization: CSMO 2011).
11. Максимов В.И. О применении конечномерных управляемых моделей к задаче реконструкции входа в линейной системе с запаздыванием // Тр. Ин-та математики и механики. 2013. Т. 19, № 1. С. 196–204.
12. Maksimov V.I. On an algorithm of the dynamic reconstruction of inputs in systems with time delay // Int. J. Advances Appl. Math. Mech. 2013. Vol. 1, no. 2. P. 121–127.
13. Кузьмина Н.А., Максимов В.И. О реконструкции управлений при изменении части координат нелинейной динамической системы с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 8. С. 1177–1190.
14. Акса Н., Berezansky L., Maksimov V. On tracking trajectory and control of a linear hereditary system // Functional Differ. Eq. 2011. Vol. 18, no. 1–2. P. 13–28.
15. Banks H. T., Kappel F. Spline approximation for functional-differential equations // J. Differ. Equat. 1979. Vol. 34, no. 3. P. 406–522.
16. Bernier C., Manitius A. On semigroups in $\mathbb{R}^n \times L^p$ corresponding to differential equations with delays // Canad. J. Math. 1978. Vol. 14. P. 897–914.
17. Максимов В.И. Об отслеживании траектории динамической системы // Прикл. математика и механика. 2011. Т. 75, № 6. С. 951–960.

Максимов Вячеслав Иванович

Поступила 14.03.2014

д-р физ.-мат. наук

зав. отделом

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина

e-mail: maksimov@imm.uran.ru

УДК 519.83

ДВУХУРОВНЕВАЯ КООПЕРАЦИЯ В КОАЛИЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ¹

Л. А. Петросян, Е. В. Громова

В работе рассматривается дифференциальная игра с предписанной продолжительностью, в которой задано коалиционное разбиение множества игроков. Кооперативная игра строится в два этапа. На первом этапе игры игроки (коалиции) максимизируют суммарный выигрыш, распределяя его затем согласно вектору Шепли. На втором этапе игры происходит распределение компонент вектора Шепли внутри фиксированных коалиций. В работе изучается вопрос динамической устойчивости предложенного двухуровневого кооперативного решения. Данная задача решается при помощи механизма процедуры распределения дележа. Полученные результаты проиллюстрированы на примере дифференциальной игры сокращения вредных выбросов.

Ключевые слова: кооперативные дифференциальные игры, вектор Шепли, процедура распределения дележа, динамическая устойчивость.

L. A. Petrosyan, E. V. Gromova. Two-level cooperation in coalitional differential games. We consider a differential game with prescribed duration and given coalitional partition of the set of players. The cooperative game proceeds in two stages. At the first stage the players (coalitions) maximize the total payoff and then distribute it according to the Shapley value. At the second stage the components of the Shapley value are distributed inside fixed coalitions. We study the time consistency of the proposed two-level cooperative solution. The problem is solved by means of an imputation distribution procedure. The results are illustrated by a differential game of emission reduction.

Keywords: cooperative differential games, Shapley value, imputation distribution procedure, time consistency.

Введение

Основной задачей, которая решается в теории кооперативных игр, является построение принципов оптимальности, согласно которым заработанный совместными усилиями игроков суммарный выигрыш будет распределяться среди участников кооперативного соглашения. Построение схем распределения суммарного выигрыша основано на использовании аппарата так называемых характеристических функций, которые могут быть определены различным образом. Классический способ построения характеристической функции, удовлетворяющей условию супераддитивности, был описан в работе [10], однако в последнее время появился ряд работ, в которых при определении характеристической функции как “силы” коалиции игроков требование супераддитивности не рассматривается [6; 11]. В данной работе, однако, под характеристической функцией будет пониматься функция множества, удовлетворяющая классическому свойству супераддитивности, но построенная нестандартным способом.

Кроме того, при рассмотрении кооперативных решений в динамике появляется дополнительная проблема, а именно проблема динамической устойчивости выбранного игроками принципа оптимальности. В общем случае кооперативные соглашения являются нереализуемыми на всем промежутке игры, что впервые было замечено в работе [3]. В работе [4] был найден путь к решению проблемы динамической неустойчивости принципов оптимальности в кооперативных дифференциальных играх, а именно предложено использовать механизм процедуры распределения дележа, т. е. правила, согласно которому компоненты дележей для игроков распределяются во времени.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке Санкт-Петербургского государственного университета в рамках научного проекта 9.38.245.2014.

В настоящей статье аппарат процедуры распределения дележа развит для построения динамически устойчивых решений на примере вектора Шепли в двухуровневой коалиционной дифференциальной игре.

Следует заметить, что уровень строгости решений дифференциальных игр, базирующихся на решении уравнения Гамильтона — Якоби — Айзекса — Беллмана, ограничивается областью фазовых переменных, для которых указанное уравнение имеет смысл. Строгое обоснование решений может быть получено с использованием фундаментальных результатов Н.Н. Красовского и его учеников. Именно на основе формализации дифференциальной игры, предложенной Н.Н. Красовским, оказывается возможным связать дескриптивную теорему о значении игры и ситуации равновесия с обобщенным минимаксным решением уравнения Гамильтона — Якоби — Айзекса — Беллмана (см. [2]). Это замечание относится и к неантагонистическим дифференциальным играм, рассмотренным в данной работе, для которых подобные результаты еще не получены, но их получение является лишь делом времени.

1. Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальную игру n лиц $\Gamma(x_0; T - t_0)$ с предписанной продолжительностью $T - t_0$ и начальным состоянием x_0 . Динамика игры задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u_1, \dots, u_n), \quad x \in \mathbb{R}^p, \quad u_i \in U_i \subset \text{comp } \mathbb{R}^{k_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in [t_0, T], \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Предполагается, что система дифференциальных уравнений (1.1) удовлетворяет условиям существования, единственности и продолжимости решений для любого набора измеримых управлений $u_1(\cdot), \dots, u_n(\cdot)$, а именно: 1) функция f непрерывна на множестве $\mathbb{R}^p \times U_1 \times \dots \times U_n$, 2) функция f удовлетворяет условию Липшица по x с постоянной κ_1 : $\|f(x', u_1, \dots, u_n) - f(x'', u_1, \dots, u_n)\| \leq \kappa_1 \|x' - x''\|$ для всех $x', x'' \in \mathbb{R}^p$, 3) $\|f(x, u_1, \dots, u_n)\| \leq \kappa_2(1 + \|x\|)$ для всех $(x, u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^p \times U_1 \times \dots \times U_n$.

Полагаем, что выигрыш i -го игрока определяется следующим образом:

$$K_i(x_0, T - t_0, u_1, \dots, u_n) = \int_{t_0}^T h_i(x(\tau), u_1(\tau), \dots, u_n(\tau)) d\tau, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.2)$$

где $h_i(x, u_1, \dots, u_n)$ представляет собой непрерывную функцию и $x(t)$ — решение задачи Коши для системы (1.1) при управлении $(u_1(t), \dots, u_n(t))$.

Обозначим множество игроков через $N = \{1, \dots, n\}$. Пусть $S = \{S_1, \dots, S_l\}$ — некоторое заданное коалиционное разбиение множества игроков N , т. е.

$$\bigcup_{i=1}^l S_i = N, \quad S_i \cap S_j = \emptyset \quad \forall i \neq j.$$

Выигрыш коалиции $S_k, k = 1, \dots, l$ определяется как сумма выигрышей игроков, входящих в коалицию:

$$H_{S_k}(x_0, T - t_0, u_1, \dots, u_n) = \sum_{i \in S_k} \int_{t_0}^T h_i(x(\tau), u_1(\tau), \dots, u_n(\tau)) d\tau, \quad (1.3)$$

где $x(t)$ — решение задачи (1.1) для управлений $u = (u_1(t), \dots, u_n(t)) = (u_{S_1}(t), \dots, u_{S_l}(t)); u_{S_k}(t) = \{u_i(t), i \in S_k\}$.

Рассмотрим следующий кооперативный двухуровневый вариант игры. На первом уровне игры под игроками будем понимать коалиции $S_1, \dots, S_l$, которые максимизируют суммарный выигрыш

$$\sum_{k=1}^l H_{S_k}(x_0, T - t_0, u_1, \dots, u_n). \quad (1.4)$$

Предположим, что существует набор управлений $\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n) = (\bar{u}_{S_1}, \dots, \bar{u}_{S_l})$, доставляющий максимум выражению (1.4). Траекторию $\bar{x}(t)$, $t \in [t_0, T]$, являющуюся решением задачи (1.1) при управлении $\bar{u}$, будем называть *кооперативной траекторией*.

Будем предполагать, что распределение между игроками суммарного выигрыша (1.4) осуществляется согласно вектору Шепли

$$Sh(x_0, T - t_0, \{i\}) = \sum_{\substack{K \subset N \\ i \in K}} \frac{(n-k)!(k-1)!}{n!} [V(K, x_0, T - t_0) - V(K \setminus \{i\}, x_0, T - t_0)], \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.5)$$

где $V(K, x_0, T - t_0)$, $K \subset N$, — характеристическая функция в игре $\Gamma(x_0; T - t_0)$, удовлетворяющая условиям

$$V(\emptyset, x_0, T - t_0) = 0,$$

$$V(S_1 \cup S_2, x_0, T - t_0) \geq V(S_1, x_0, T - t_0) + V(S_2, x_0, T - t_0); \quad \forall S_1, S_2 \subset N, \quad S_1 \cap S_2 = \emptyset. \quad (1.6)$$

Условие (1.6) принято называть *условием супераддитивности* [1].

При таком разделе суммарного выигрыша (1.4) k -й игрок (коалиция S_k) получает компоненту дележа, вычисляемую как

$$Sh(x_0, T - t_0, S_k) = \sum_{\substack{M \subset S \\ S_k \in M}} \frac{(l-m)!(m-1)!}{l!} [V(M, x_0, T - t_0) - V(M \setminus S_k, x_0, T - t_0)], \quad k = 1, \dots, l, \quad (1.7)$$

для которой выполняется условие

$$\sum_{k=1}^l Sh(x_0, T - t_0, S_k) = V\left(\bigcup_{i=1}^l S_k, x_0, T - t_0\right) = V(N, x_0, T - t_0). \quad (1.8)$$

На первом этапе игры в выражении (1.7) для вектора Шепли используется характеристическая функция $V(M, x_0, T - t_0)$, $M \subset S$, которая определяется классическим образом как значение антагонистической игры между коалицией M , действующей в качестве первого игрока, и коалицией $S \setminus M$, выступающей в качестве второго игрока. Доказано [5], что построенная таким образом характеристическая функция удовлетворяет условию супераддитивности (1.6).

Отметим, однако, что для динамических игр выполнение условия супераддитивности не гарантирует сохранения кооперации на всем промежутке игры. Развитию игры во времени соответствует движение вдоль кооперативной траектории $\bar{x}(t)$, на которой по определению игроки получают наибольший суммарный выигрыш. При этом движение вдоль кооперативной траектории еще не обеспечивает сохранение кооперации. Действительно, при движении вдоль $\bar{x}(t)$ игроки попадают в подыгры с текущими начальными состояниями, в которых один и тот же игрок имеет различные возможности. Поэтому, в некоторый момент ϑ может возникнуть ситуация, когда решение текущей игры $\Gamma(\bar{x}(\vartheta), \vartheta)$ будет неоптимальным в смысле первоначально выбранного принципа оптимальности (в нашем случае вектора Шепли). В этот момент перед игроками встанет вопрос о целесообразности использования выбранного кооперативного соглашения, что означает динамическую неустойчивость вектора Шепли и всего движения по кооперативной траектории $\bar{x}(t)$.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть вектор-функция $\beta(t)$ с компонентами $\beta_k(t)$, $k = 1, \dots, l$, такова, что компоненты вектора Шепли $Sh(x_0, T - t_0) = \{Sh(x_0, T - t_0, S_k)\}_{k=1, \dots, l}$

в игре $\Gamma(x_0; T - t_0)$ представимы в виде

$$Sh(x_0, T - t_0, S_k) = \int_{t_0}^T \beta_k(\tau) d\tau, \quad \forall k = 1, \dots, l. \quad (1.9)$$

Тогда вектор-функцию $\beta(t) = \{\beta_k(t)\}_{k=1, \dots, l}$ будем называть *процедурой распределения дележа* (ПРД).

Определение ПРД для игр с фиксированной продолжительностью было введено в работе [4]. ПРД определяет правило, по которому компоненты дележа $\{Sh(x_0, T - t_0, S_k)\}_{k=1, \dots, l}$ распределяются во времени на промежутке $[t_0, T]$.

О п р е д е л е н и е 2. Вектор Шепли $Sh(x_0, T - t_0) = \{Sh(x_0, T - t_0, S_k)\}_{k=1, \dots, l}$ назовем динамически устойчивым, если существует такая вектор-функция $\beta(t) = \{\beta_k(t)\}_{k=1, \dots, l}$, что для любого момента времени $t \in [t_0, T]$ компоненты вектора Шепли $Sh(x_0, T - t_0, S_k)$, $k = 1, \dots, l$, представимы в виде

$$Sh(x_0, T - t_0, S_k) = \int_{t_0}^t \beta_k(\tau) d\tau + Sh(\bar{x}(t), T - t, S_k), \quad (1.10)$$

где $\{Sh(\bar{x}(t), T - t, S_k)\}$ — вектор Шепли, рассчитанный в подыгре $\Gamma(\bar{x}(t); T - t)$ согласно ПРД $\{\beta_k(t)\}$, $t \in [t_0, T]$.

Дифференцируя (1.10) по t , получим

$$\beta_k(t) = -\frac{d}{dt} Sh(\bar{x}(t), T - t, S_k). \quad (1.11)$$

На втором уровне кооперации распределим компоненту дележа $Sh(x_0, T - t_0, S_k)$ внутри коалиции S_k . Для этого определим характеристическую функцию $W(x_0, T - t_0, M)$, где $M \subset S_k \in S$. Пусть, как и раньше, $\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n) = (\bar{u}_{S_1}, \dots, \bar{u}_{S_l})$ есть оптимальное управление игроков, полученное на первом уровне кооперации. Характеристическую функцию $W(x_0, T - t_0, M)$ определим следующим неклассическим образом, а именно

$$W(x_0, T - t_0, M) = \min_{u_i, i \in S_k \setminus M} \sum_{j \in M} K_j(x_0, T - t_0, \bar{u}_{(N \setminus S_k) \cup M}, u_i) \cdot \frac{Sh(x_0, T - t_0, S_k)}{\sum_{q \in S_k} K_q(x_0, T - t_0, \bar{u})}, \quad (1.12)$$

где $M \subset S$, $M \neq \emptyset$, $\bar{u}_{(N \setminus S_k) \cup M} = \{\bar{u}_i, i \in (N \setminus S_k) \cup M\}$, $\bar{u}_i$ — оптимальные управления.

Очевидно, что построенная таким образом характеристическая функция $W(x_0, T - t_0, S_k) = Sh(x_0, T - t_0, S_k)$, $k = 1, \dots, l$, и $W(x_0, T - t_0, S_k)$ супераддитивна.

Утверждение 1. *Характеристическая функция, построенная по формуле (1.12), является супераддитивной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\tilde{W}(x_0, T - t_0, M) = \min_{u_i, i \in S_k \setminus M} \sum_{j \in M} K_j(x_0, T - t_0, \bar{u}_{(N \setminus S_k) \cup M}, u_i).$$

Поскольку функция $\tilde{W}(x_0, T - t_0, M)$ отличается от $W(x_0, T - t_0, M)$ на постоянный и положительный множитель, все результаты, полученные для первой функции, будут верны и для второй.

По определению

$$\begin{aligned} \tilde{W}(x_0, T - t_0, M_1 \cup M_2) &= \min_{u_i,} \sum_{j \in (M_1 \cup M_2)} K_j(x_0, T - t_0, \bar{u}_{(N \setminus S_k) \cup (M_1 \cup M_2)}, u_i) \\ &= \min_{u_i,} \left(\sum_{j \in M_1} K_j(x_0, T - t_0, \bar{u}_{(N \setminus S_k) \cup (M_1 \cup M_2)}, u_i) + \sum_{j \in M_2} K_j(x_0, T - t_0, \bar{u}_{(N \setminus S_k) \cup (M_1 \cup M_2)}, u_i) \right). \end{aligned}$$

Очевидно, что минимум суммы двух функций больше либо равен сумме минимумов этих функций, взятых отдельно. Кроме того, если множество управлений, по которым берется минимум, увеличивается, то результат может только уменьшиться. Следовательно, должно выполняться

$$\begin{aligned} &\tilde{W}(x_0, T - t_0, M_1 \cup M_2) \\ &= \min_{u_i,} \left(\sum_{j \in M_1} K_j(x_0, T - t_0, \bar{u}_{(N \setminus S_k) \cup (M_1 \cup M_2)}, u_i) + \sum_{j \in M_2} K_j(x_0, T - t_0, \bar{u}_{(N \setminus S_k) \cup (M_1 \cup M_2)}, u_i) \right) \\ &\geq \min_{u_i,} \sum_{j \in M_1} K_j(x_0, T - t_0, \bar{u}_{(N \setminus S_k) \cup (M_1 \cup M_2)}, u_i) \\ &\quad + \min_{u_i,} \sum_{j \in M_2} K_j(x_0, T - t_0, \bar{u}_{(N \setminus S_k) \cup (M_1 \cup M_2)}, u_i) \\ &\geq \min_{u_i,} \sum_{j \in M_1} K_j(x_0, T - t_0, \bar{u}_{(N \setminus S_k) \cup M_1}, u_i) + \min_{u_i,} \sum_{j \in M_2} K_j(x_0, T - t_0, \bar{u}_{(N \setminus S_k) \cup M_2}, u_i) \\ &= \tilde{W}(x_0, T - t_0, M_1) + \tilde{W}(x_0, T - t_0, M_2). \end{aligned}$$

Полученное неравенство влечет

$$W(x_0, T - t_0, M_1 \cup M_2) \geq W(x_0, T - t_0, M_1) + W(x_0, T - t_0, M_2),$$

что доказывает утверждение. $\square$

Используя характеристическую функцию (1.12), можно построить любой принцип оптимальности кооперативной теории, в частности, вектор Шепли. Обозначим его через $\tilde{S}h_i(x_0, T - t_0, S_k)$, $i \in S_k$. Используя вектор Шепли $\{\tilde{S}h_i(x_0, T - t_0, S_k)\}_{i \in S_k}$, определим процедуру распределения дележа на втором уровне кооперации $\gamma_i^k(\tau)$ условием

$$\tilde{S}h_i(x_0, t - t_0, S_k) = \int_{t_0}^t \gamma_i^k(\tau) d\tau, \quad (1.13)$$

Аналогично тому, как это было сделано на первом уровне, получаем, что для обеспечения динамической устойчивости вектора Шепли, определенного на втором уровне, должно выполняться условие

$$\tilde{S}h_i(x_0, T - t_0, S_k) = \int_{t_0}^t \gamma_i^k(\tau) d\tau + \tilde{S}h_i(\bar{x}(t), T - t, S_k), \quad (1.14)$$

где $i \in S_k, k = 1, \dots, l$ и $t \in [t_0, T]$. Соответственно $\gamma_i^k(t)$ определяется как

$$\gamma_i^k(t) = -\frac{d}{dt} \tilde{S}h_i(\bar{x}(t), T - t, S_k),$$

где $i \in S_k, k = 1, \dots, l$.

Поскольку

$$\sum_{i \in S_k} \tilde{S}h_i(\bar{x}(t), T - t, S_k) = Sh(\bar{x}(t), T - t, S_k), \quad (1.15)$$

то, продифференцировав обе части выражения (1.15), получим

$$\sum_{i \in S_k} \gamma_i^k(\tau) = \beta_k(\tau). \quad (1.16)$$

Формула (1.16) есть фактически уравнение баланса для мгновенных выплат, т.е. верно следующее утверждение.

Утверждение 2. При динамически устойчивом распределении вектора Шепли во времени мгновенные выплаты игрокам-коалициям равны сумме мгновенных выплат игрокам, входящим в эти коалиции. $\square$

2. Дифференциальная игра управления вредными выбросами в атмосферу

2.1. Модель игры

В качестве примера рассмотрим теоретико-игровую модель управления вредными выбросами в атмосферу [8; 11]. В игре принимают участие 3 игрока (фирмы, страны), каждый из которых имеет промышленное производство на своей территории. Предполагается, что объем производства прямо пропорционален вредным выбросам u_i . Таким образом, стратегией игрока является выбор объема вредных выбросов $u_i \in [0; u_i^{\max}]$. В данном примере будем искать решение в классе позиционных стратегий $u_i(t, x)$.

Динамика изменения общего уровня загрязнения $x(t)$ задается уравнением

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^3 u_i(t) - \delta x(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

где δ — коэффициент абсорбции, соответствующий естественному очищению атмосферы.

Доход игрока i в момент времени t определяется по формуле

$$R(u_i(t)) = c_i u_i(t) - \frac{1}{2} u_i^2(t).$$

Каждый игрок несет расходы, связанные с устранением загрязнений. Мгновенный выигрыш (полезность) игрока i равен $R(u_i(t)) - k_i x(t)$, $k_i > 0$.

Без ограничения общности будем предполагать, что момент начала игры $t_0 = 0$.

Тогда выигрыш i -го игрока имеет вид

$$K_i(0, x_0, u_1, u_2, u_3) = \int_0^T (R_i(u_i(\tau)) - k_i x(\tau)) d\tau. \quad (2.1)$$

Предположим, что выполняется следующее условие регулярности:

$$\frac{\sum_{j=1}^3 k_j}{\delta} \leq c_i \leq u_i^{\max}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.2)$$

2.2. Первый уровень кооперации

Рассмотрим случай, когда множество игроков разбито на две коалиции: $N = S_1 \cup S_2 = \{1\} \cup \{2, 3\}$. Выигрыш коалиции $S_k, k = 1, 2$ определяется как сумма выигрышей игроков, входящих в коалицию:

$$\begin{aligned} H_{S_1}(x_0, T - t_0, u_1, \dots, u_n) &= K_1(0, x_0, u_1, u_2, u_3), \\ H_{S_2}(x_0, T - t_0, u_1, \dots, u_n) &= K_2(0, x_0, u_1, u_2, u_3) + K_3(0, x_0, u_1, u_2, u_3). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Рассмотрим кооперативный двухуровневый вариант игры. На первом уровне игры под игроками будем понимать коалиции S_1, S_2 , которые максимизируют суммарный выигрыш

$$\sum_{k=1}^2 H_{S_k}(x_0, T - t_0, u_1, \dots, u_n). \quad (2.4)$$

Для определения управлений $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) = (\bar{u}_{S_1}, \bar{u}_{S_2})$, доставляющих максимум выражению (2.4), запишем уравнение Гамильтона — Якоби — Беллмана

$$-V_t^{123} = \max_{u_i} \left\{ -k_{123}x + \sum_{i=1}^3 c_i u_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 u_i^2 + V_x^{123} \sum_{i=1}^3 u_i - \delta x V_x^{123} \right\}, \quad (2.5)$$

где V_t^{123} и V_x^{123} — частные производные функции Беллмана $V^{123}(x, t)$, $k_{123} = \sum_{i=1}^3 k_i$.

Максимизирующее управление найдем из выражения $c_i - u_i + V_x = 0$, откуда следует $\bar{u}_i = c_i + V_x$. После подстановки $\bar{u}_i$ в (2.5) получаем

$$-V_t = -k_{123}x + \frac{1}{2} \hat{c}_{123} + c_{123}V_x + \frac{3}{2}V_x^2 - \delta x V_x, \quad (2.6)$$

где $c_{123} = \sum_{i=1}^3 c_i$ и $\hat{c}_{123} = \sum_{i=1}^3 c_i^2$.

Предположим, что функция Беллмана имеет вид $V(x, t) = A(t)x + B(t)$ [7; 9], тогда соответствующие частные производные будут записываться следующим образом: $V_t = \dot{A}(t)x + \dot{B}(t)$ и $V_x = A(t)$. Подставляя эти выражения в (2.6) и группируя подобные слагаемые, получаем систему двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{A}(t) = \delta A(t) + k_{123}, \\ \dot{B}(t) = -\frac{1}{2} \hat{c}_{123} - c_{123}A(t) - \frac{3}{2}A^2(t) \end{cases} \quad (2.7)$$

с краевыми условиями $A(T) = B(T) = 0$. Решение системы (2.7) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} A(t) &= -\frac{k_{123}}{\delta} [1 + e^{-\delta T} e^{\delta t}] \\ B(t) &= \frac{\alpha_0(T - t) - \alpha_1(e^{-2\delta(T-t)} - 1) + \alpha_2(e^{-\delta(T-t)} - 1)}{4\delta^3}, \end{cases}$$

где $\alpha_0 = 2d(\hat{c}_{123}d^2 - 2c_{123}dk_{123} + 3k_{123}^2)$, $\alpha_1 = -3k_{123}^2$, $\alpha_2 = 4k_{123}(3k_{123} - c_{123}d)$.

Таким образом, оптимальные управления $\bar{u}_i$ имеют вид $\bar{u}_i = c_i - \frac{k_{123}}{\delta} [1 - e^{-\delta T} e^{\delta t}]$. Отметим, что выполнение условия (2.2) гарантирует принадлежность оптимального управления $\bar{u}_i$ интервалу $[0, u_i^{\max}]$.

Для определения компоненты вектора Шепли каждой коалиции необходимо построить соответствующие характеристические функции $V^1(x_0, t)$ и $V^{23}(x_0, t)$. Так, для второй коалиции, $S_2 = \{2, 3\}$,

$$V^{23} = \max_{u_2, u_3} \min_{u_1} (K_2 + K_3).$$

Запишем соответствующее уравнение Гамильтона — Якоби — Беллмана

$$-V_t^{23} = \max_{u_2, u_3} \min_{u_1} \left\{ -k_{23}x + \sum_{i=2}^3 c_i u_i - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^3 u_i^2 + V_x^{23} \sum_{i=1}^3 u_i - \delta x V_x^{23} \right\}, \quad (2.8)$$

где V_t^{23} и V_x^{23} — частные производные функции Беллмана $V^{23}(x, t)$, $k_{23} = \sum_{i=1}^3 k_i$.

Максимизирующие управления имеют вид $u_i^o = c_i + V_x$, $i = 2, 3$, а минимизирующее управление определяется как

$$u_1^o = \begin{cases} 0, & V_x \geq 0 \\ u_1^{\max}, & V_x < 0. \end{cases}$$

После подстановки найденных управлений в (2.8) получаем

$$-V_t = -k_{23}x + \frac{1}{2}\hat{c}_{23} + c_{23}V_x + V_x^2 - \delta x V_x + V_x u_1^o, \quad (2.9)$$

где $c_{23} = \sum_{i=2}^3 c_i$ и $\hat{c}_{23} = \sum_{i=2}^3 c_i^2$.

Выберем функцию Беллмана в виде $V^{23}(x, t) = A^{23}(t)x + B^{23}(t)$ [7]. Тогда $V_t^{23} = \dot{A}^{23}(t)x + \dot{B}^{23}(t)$ и $V_x^{23} = A^{23}(t)$. После подстановки частных производных в (2.9) и приведения подобных слагаемых получается система двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{A}^{23}(t) = \delta A^{23}(t) + k_{23}, \\ \dot{B}^{23}(t) = -\frac{1}{2}\hat{c}_{23} - c_{23}A^{23}(t) - (A^{23}(t))^2 - A^{23}(t)u_1^o \end{cases} \quad (2.10)$$

с краевыми условиями $A^{23}(T) = B^{23}(T) = 0$. Анализируя решение первого дифференциального уравнения, заключаем, что $A(t) \leq 0$ для всех $t \in [t_0, T]$ и, следовательно, $u_1^o = u_1^{\max}$. Можно легко показать, что выполнение условия (2.2) гарантирует выполнение требования $\bar{u}_i \in [0, u_i^{\max}]$, $i = 2, 3$.

Аналогично находится характеристическая функция для коалиции $S_1 = \{1\}$.

Компонента вектора Шепли для коалиции $S_2 = \{2, 3\}$ определяется следующим образом:

$$Sh(\bar{x}(t), T - t, S_2) = \frac{1}{2} [V^{123}(t, \bar{x}(t)) - V^1(t, x)] + \frac{1}{2} [V^{23}(t, x)]. \quad (2.11)$$

Подставив в (2.11) решения дифференциальных уравнений (2.7) и (2.10), можно выписать в явном виде формулу, показывающую изменение вектора Шепли вдоль кооперативной траектории $\bar{x}(t)$:

$$\begin{aligned} Sh(\bar{x}(t), T - t, S_2) = & \frac{1}{24\delta^3} \left(\alpha_0(t)\bar{x}(t) + \alpha_1 + \alpha_2(t)e^{-\delta(T-t)} \right. \\ & \left. + \alpha_3(e^{-\delta(T-t)} - 1) + \alpha_4 e^{-2\delta(T-t)} + \alpha_5(t) \right), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_0(t) = & \left(-24\delta^2 k_{23} - 12\delta^3 k_1 t + 12\delta^2 (k_1 + 2k_{23})e^{-\delta(T-t)} + 12T\delta^2 (\delta - 1)k_1 \right), \\ \alpha_1 = & -66k_1 k_{23} - 45k_{23}^2 - 12k_1^2, \\ \alpha_2(t) = & 12(5k_{123}^2 - 3k_1^2 - 2k_1 k_{23}) - 24(T - t)\delta k_1 k_{123}, \\ \alpha_3 = & -12\delta(c_1 k_{23} + 2c_{23} k_{123}) - 12\delta(k_{123} u_1^{\max} - k_1 u_2^{\max} - k_1 u_3^{\max}), \\ \alpha_4 = & 3k_1^2 - 15k_{123}^2, \\ \alpha_5(t) = & 30(T - t)\delta k_{123}^2 - 12T\hat{c}_{23}\delta^3(t - 1) - 12(T - t)^2\delta^2 k_1 k_{123} + 4(T - t)^3\delta^3 k_1^2 - 6(T - t)\delta k_1^2 \\ & - 12(T - t)\delta^2(c_1 k_{23} + 2c_{23} k_{123}) + 6(T - t)^2 c_{23} \delta^3 - 12(T - t)\delta^2(k_{123} u_1^{\max} - k_1(u_2^{\max} + u_3^{\max})) \end{aligned}$$

$$+ 6(T-t)^2 \delta^3 k_1 u_1^{\max}.$$

Кооперативная траектория $\bar{x}(t)$, соответствующая оптимальным управлениям $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$, имеет вид

$$\bar{x}(t) = \frac{c_{123}}{\delta} + e^{-\delta t} \left(x_0 - \frac{c_{123}}{\delta} + \frac{3e^{-T\delta} (2e^{T\delta} - 1) k_{123}}{2\delta^2} \right) - \frac{3e^{-\delta t} e^{-\delta(T-t)} (2e^{\delta(T-t)} - 1) k_{123}}{2\delta^2}.$$

Соответственно, подставив в (2.12) $\bar{x}(t)$ и продифференцировав по t , получаем процедуру распределения дележа для коалиции $\{2, 3\}$ согласно формуле (1.11)

$$\beta_{23}(t) = -\frac{d}{dt} Sh(\bar{x}(t), T-t, S_2) = -\frac{1}{4\delta^3} \left(\alpha_0(t) + \alpha_1(t)e^{-\delta(T-t)} + \alpha_2 e^{-2\delta(T-t)} - \alpha_3(t)e^{-2T\delta} \right),$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_0(t) &= -(5k_{123}^2 - k_1^2)\delta + 2 \left(k_{123}u_1^{\max} - k_1u_2^{\max} - k_1u_3^{\max} + (T-t)k_1k_{123} + c_1k_{23} + c_{23}k_{123} \right) \delta^2 \\ &\quad - 2 \left((T-t)^2 k_1^2 + (T-t)c_{23}k_1 + (T-t)k_1u_1^{\max} + c_2^2 + c_3^2 \right) \delta^3, \\ \alpha_1(t) &= (10k_{123}^2 - 2k_1^2)\delta - 2c_1\delta^2 k_{23} - 4c_{23}\delta^2 k_{123} - 2\delta^2 (k_{123}u_1^{\max} - k_1u_2^{\max} - k_1u_3^{\max}) - 4(T-t)\delta^2 k_1k_{123}, \\ \alpha_2 &= -(5k_{123}^2 - k_1^2)\delta, \\ \alpha_3(t) &= \left((2k_{123} - k_1)(1 - e^{T\delta - \delta t}) + (T-t)\delta k_1 e^{T\delta - \delta t} \right) \\ &\quad \times \left(3k_{123}(1 + e^{2\delta t}) - 2(3k_{123} - c_{123}\delta)e^{T\delta} - 2\delta^2 x_0 e^{T\delta} \right). \end{aligned}$$

Для вычисления компоненты вектора Шепли $Sh(\bar{x}(t), T-t, S_1)$ можно воспользоваться условием (1.8):

$$Sh(\bar{x}(t), T-t, S_1) = V^{123}(t, \bar{x}(t)) - Sh(\bar{x}(t), T-t, S_2).$$

Соответственно процедура распределения дележа $\beta_1(t)$ получается из (1.11).

2.3. Второй уровень кооперации

На втором уровне необходимо разделить выигрыш между участниками коалиции $S_2 = \{2, 3\}$. Для этого мы решаем вспомогательные задачи

$$\tilde{W}(x_0, T-t_0, \{M\}) = \min_{u_i, i \in S_2 \setminus M} \sum_{i \in M} K_i(x_0, T-t_0, \bar{u}_{(N \setminus S_2) \cup M}, u_i) \quad (2.13)$$

при условии, что $\bar{u}_{(N \setminus S_2) \cup M} = \{\bar{u}_j, j \in (N \setminus S_2) \cup M\}$, где $\bar{u}_j$ — оптимальные решения, полученные на первом уровне кооперации.

Пусть $M = \{2\}$. Тогда можно записать уравнение

$$-\tilde{W}_t^2 = \min_{u_3} \left\{ k_2 x + c_2 u_2 - \frac{1}{2} u_2^2 + \tilde{W}_x^2 u_3 + \tilde{W}_x^2 (\bar{u}_1 + \bar{u}_2) - \delta x \tilde{W}_x^2 \right\}, \quad (2.14)$$

где минимизирующая стратегия $\bar{u}_3$ определяется следующим образом:

$$u_3^o = \begin{cases} 0, & \tilde{W}_x^2 \geq 0 \\ u_3^{\max}, & \tilde{W}_x^2 < 0. \end{cases}$$

Учитывая, что $\bar{u}_1 = c_1 + A^{123}(t)$ и $\bar{u}_2 = c_2 + A^{123}(t)$, можно переписать (2.14) как

$$-\tilde{W}_t^2 = -k_2 x + \frac{1}{2} c_2^2 - \frac{1}{2} (A^{123}(t))^2 + \tilde{W}_x^2 \bar{u}_3 + \tilde{W}_x^2 (c_{12} + 2A^{123}(t)) - \delta x \tilde{W}_x^2. \quad (2.15)$$

Пусть, как и прежде, характеристическая функция $\tilde{W}^2(t, x)$ имеет вид $\tilde{W}^2(t, x) = C^2(t)x + D(t)^2$. Тогда решение (2.15) сводится к решению двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{C}^2(t) = \delta C^2(t) + k_2, \\ \dot{D}^2(t) = -\frac{1}{2}c_2^2 + \frac{1}{2}(A^{123}(t))^2 - D^2(t)(c_{12} + 2A^{123}(t)) - D^2(t)u_3^o. \end{cases} \quad (2.16)$$

Решение первого уравнения имеет вид $C^2(t) = -\frac{1}{d}(k_2 - k_2 e^{-T\delta} e^{\delta t})$. Поскольку из решения следует, что $C^2(t) \leq 0 \forall t \in [0, T]$, минимизирующее управление u_3^o выбирается равным $u_3^{\max}$. Далее, решение второго уравнения находится в виде

$$D^2(t) = \frac{1}{4\delta^3}(\alpha_0 - \alpha_1 e^{-d(T-t)} - \alpha_2 e^{-2d(T-t)}),$$

где $\alpha_0 = 2Tc_2^2\delta^3 - 4Tc_2\delta^2k_{123} + 4c_2\delta k_{123} + 2Tdk_{123}^2 - 3k_{123}^2 - 2\delta t(k_{123} - c_2d)^2$,

$$\alpha_1 = 4k_{123}(k_{123} - c_2d),$$

$$\alpha_2 = (k_1 + k_2 + k_3)^2.$$

Аналогично определяется функция $\tilde{W}^3$. Теперь характеристические функции $W(x_0, T - t_0, \{2\})$ и $W(x_0, T - t_0, \{3\})$ могут быть определены следующим образом:

$$\begin{aligned} W(x_0, T - t_0, \{2\}) &= \tilde{W}(x_0, T - t_0, \{2\}) \frac{Sh(x_0, T - t_0, S_2)}{K_2(x_0, T - t_0, \bar{u}) + K_3(x_0, T - t_0, \bar{u})} \\ &= \min_{u_3} K_2(x_0, T - t_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2, u_3) \frac{Sh(x_0, T - t_0, S_2)}{K_2(x_0, T - t_0, \bar{u}) + K_3(x_0, T - t_0, \bar{u})}, \\ W(x_0, T - t_0, \{3\}) &= \tilde{W}(x_0, T - t_0, \{3\}) \frac{Sh(x_0, T - t_0, S_2)}{K_2(x_0, T - t_0, \bar{u}) + K_3(x_0, T - t_0, \bar{u})} \\ &= \min_{u_2} K_3(x_0, T - t_0, \bar{u}_1, u_2, \bar{u}_3) \frac{Sh(x_0, T - t_0, S_2)}{K_2(x_0, T - t_0, \bar{u}) + K_3(x_0, T - t_0, \bar{u})}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

В выражениях для характеристических функций $W(x_0, T - t_0, \{2\})$ и $W(x_0, T - t_0, \{3\})$ в (2.17) значения выигрышей 2-го и 3-го игроков для оптимальных управлений $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} K_2(\bar{x}(t), T - t, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) &= \frac{1}{2} \left[Tc_2 \left(c_2 - \frac{k_{123}(1 - e^{-T\delta} e^{\delta t})}{\delta} \right) - T \left(c_2 - \frac{k_{123}(1 - e^{-T\delta} e^{\delta t})}{\delta} \right)^2 - T^2 k_2 \right. \\ &\quad \left. + 2Tk_2 \left(\frac{e^{-T\delta} 3k_{123}}{\delta^2} - \frac{e^{-T\delta} k_{123}}{\delta} - t(c_{123} + k_{123}) + \frac{e^{-\delta(T-t)} k_{123}}{\delta} + \frac{3e^{-\delta(T-t)} (\delta t e^{\delta(T-t)} - 1) k_{123}}{\delta^2} \right) \right], \\ K_3(\bar{x}(t), T - t, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) &= \frac{1}{2} \left[Tc_3 \left(c_3 - \frac{k_{123}(1 - e^{-T\delta} e^{\delta t})}{\delta} \right) - T \left(c_3 - \frac{k_{123}(1 - e^{-T\delta} e^{\delta t})}{\delta} \right)^2 - T^2 k_3 \right. \\ &\quad \left. + 2Tk_3 \left(\frac{e^{-T\delta} 3k_{123}}{\delta^2} - \frac{e^{-T\delta} k_{123}}{\delta} - t(c_{123} + k_{123}) + \frac{e^{-\delta(T-t)} k_{123}}{\delta} + \frac{3e^{-\delta(T-t)} (\delta t e^{\delta(T-t)} - 1) k_{123}}{\delta^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Используя полученные характеристические функции $W(x_0, T - t_0, \{2\})$ и $W(x_0, T - t_0, \{3\})$, можно записать компоненты вектора Шепли для участников коалиции $S_2 = \{2, 3\}$:

$$\begin{aligned} \tilde{Sh}_2(\bar{x}(t), T - t, S_2) &= \frac{1}{2} [Sh(\bar{x}(t), T - t, S_2) - W(\bar{x}(t), T - t, \{3\})] + \frac{1}{2} [W(\bar{x}(t), T - t, \{2\})], \\ \tilde{Sh}_3(\bar{x}(t), T - t, S_2) &= \frac{1}{2} [Sh(\bar{x}(t), T - t, S_2) - W(\bar{x}(t), T - t, \{2\})] + \frac{1}{2} [W(\bar{x}(t), T - t, \{3\})] \end{aligned}$$

и соответствующие ПРД:

$$\begin{aligned} \gamma_2^2 &= -\frac{d}{dt} \tilde{Sh}_2(\bar{x}(t), T - t, S_2), \\ \gamma_3^2 &= -\frac{d}{dt} \tilde{Sh}_3(\bar{x}(t), T - t, S_2). \end{aligned}$$

Заключение

В работе рассмотрено построение кооперативного решения в двухуровневой коалиционной игре. На первом этапе кооперации в качестве игроков рассматриваются фиксированные коалиции, а заработанный всеми игроками максимальный выигрыш распределяется между коалициями согласно вектору Шепли. На втором этапе полученные коалициями компоненты вектора Шепли распределяются внутри самих коалиций также согласно вектору Шепли. Отметим, что на первом уровне игры характеристическая функция задается классическим образом (как значение вспомогательной антагонистической игры), а на втором уровне характеристическая функция определяется нестандартным образом. Для построенного кооперативного решения исследуется вопрос его динамической устойчивости, причем решение данной задачи осуществляется при помощи механизма процедуры распределения дележа для каждого уровня игры. В качестве иллюстрации предложенного алгоритма решения проблемы динамической устойчивости рассматривается пример дифференциальной игры трех лиц [8; 11] для случая фиксированного коалиционного разбиения множества игроков.

Авторы благодарят профессора А. Ф. Клейменова за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Воробьев Н.Н.** Теория игр для экономистов-кибернетиков. М: Наука, 1985. 272 с.
2. **Красовский Н.Н., Котельникова А.Н.** О дифференциальной игре на перехват // Тр. МИАН. 2010. Т. 268. С. 168–214.
3. **Петросян Л.А.** Устойчивость решений в дифференциальных играх со многими участниками // Вест. ЛГУ. 1977. № 4. С. 46–52.
4. **Петросян Л.А., Данилов Н.Н.** Устойчивые решения неантагонистических дифференциальных игр с транзитивными выигрышами // Вест. ЛГУ. 1979. № 1. С. 46–54.
5. **Петросян Л.А., Данилов Н.Н.** Кооперативные дифференциальные игры и их приложения. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1985. 273 с.
6. **Шевкопляс Е.В.** Устойчивая кооперация в дифференциальных играх со случайной продолжительностью // Мат. теория игр и ее приложения. 2010. Т 2, № 3. С. 79–105.
7. **Basar T., Olsder G.J.** Dynamic noncooperative game theory. 2nd ed. 1999. 511 p. (SIAM Classics in Applied Math. 1998, no. 28.)
8. **Breton M., Zaccour G., Zahaf M.** A differential game of joint implementation of environmental projects// Automatica J. IFAC. 2005. Vol. 41, no. 10. P. 1737–1749.
9. **Engwerda J.** LQ dynamic optimization and differential games. Chichester: John Wiley & Sons, 2005. 510 p.
10. **Neumann J., Morgenstern O.** Theory of games and economic behavior. Princeton: Princeton University Press, 1947.
11. **Petrosyan L., Zaccour G.** Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction // J. Econom. Dynam. Control. 2003. Vol. 27, no. 3. P. 381–398.

Петросян Леон Аганесович
д-р физ.-мат. наук, профессор,
зав. кафедрой
Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: decan@apmath.spbu.ru

Поступила 30.04.2014

Громова Екатерина Викторовна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: e.shevkoplyas@apmath.spbu.ru

УДК 517.977

О НЕУЛУЧШАЕМОСТИ СТРАТЕГИЙ С ПОЛНОЙ ПАМЯТЬЮ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ ГАРАНТИРОВАННОГО РЕЗУЛЬТАТА¹

Д. А. Серков

Рассматривается задача оптимизации гарантированного результата для управляемой системы, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением, и функционала качества, непрерывно зависящего от траектории системы. Значения управления и помехи удовлетворяют компактным геометрическим ограничениям. Предполагается также, что реализация помехи стеснена некоторым неизвестным функциональным ограничением из заданного семейства ограничений, компактных в пространстве Лебега.

В статье приводится доказательство анонсированного ранее результата о том, что в данной задаче оптимальный гарантированный результат в классе стратегий с полной памятью совпадает со значением оптимального гарантированного результата в классе квазистратегий.

Ключевые слова: оптимальный гарантированный результат, стратегии с полной памятью, функционально ограниченные помехи, квазистратегии.

D. A. Serkov. On the unimprovability of full-memory strategies in problems of guaranteed result optimization.

A problem of guaranteed result optimization is considered for a control system described by an ordinary differential equation and for a performance functional that depends continuously on the trajectory of the system. The values of the control and of the disturbance satisfy compact geometric constraints. It is also assumed that the realization of the disturbance is subject to an unknown functional constraint from a given set of constraints that are compact in a Lebesgue space.

It is shown that the optimal guaranteed result in the class of full-memory strategies in this problem coincides with the value of the optimal guaranteed result in the class of quasi-strategies.

Keywords: optimal guaranteed result, full-memory control strategies, functionally constrained disturbances, quasi-strategies.

Введение

Работа лежит в русле исследований по теории позиционных дифференциальных игр, проводимых школой Н. Н. Красовского (см. [1–4] и библи. в этих работах), и посвящена случаю управления при “нейтральной” помехе, т. е. при помехе, не связанной в своих проявлениях с действиями управляющей стороны и состоянием управляемой системы. Конструкция предложенной разрешающей стратегии основывается на принципе экстремального сдвига [1; 2]. В формальной постановке свойство нейтральности помехи выражается теми или иными дополнительными функциональными ограничениями. Простейшим примером такого ограничения является предположение о программном характере помехи, т. е. о том, что помеха задана некоторой неизвестной фиксированной функцией времени.

В работе [5] было введено понятие “неулучшаемости” класса стратегий, означающее равенство оптимальных гарантированных результатов, достигаемых в этом классе и в классе квазистратегий — неупреждающих программных откликов на реализации помех (см. [4, с. 24]), и для одного класса систем показана неулучшаемость позиционных стратегий с полной памятью в предположении, что помехи содержатся в некотором заранее не определенном множестве, компактном в пространстве L_p . В работе [6] было продолжено изучение задачи в постановке [5]

¹Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН “Динамические системы и теория управления” при финансовой поддержке УрО РАН (проект №12-П-1-1002), а также при поддержке РФФИ (проект 12-01-00290-а).

и получены новые условия неулучшаемости. В [7, теорема 2] был анонсирован результат, усиливающий утверждения из [5] (в части вопросов неулучшаемости) и [6]: при помехах, стесненных ограничениями, связанными с компактностью в L_p , неулучшаемость стратегий с полной памятью имеет место без каких-либо дополнительных предположений, отличных от классических условий существования, единственности и продолжимости решений дифференциальных уравнений, описывающих динамику управляемой системы. В данной статье приводится полное доказательство этого результата.

1. Постановка задачи

Пусть управляемая система описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(\tau) = f(\tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau)), \quad \tau \in T := [t_0, \vartheta] \subset \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

и начальным условием $x(t_0) = z_0 \in G_0 \subset \mathbb{R}^n$, где “:=” означает “равно по определению”. Реализации управления $u(\cdot)$ и помехи $v(\cdot)$ предполагаются измеримыми по Лебегу функциями, удовлетворяющими геометрическим ограничениям $u(\tau) \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^p$, $v(\tau) \in \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^q$, $\tau \in T$. Множества G_0 , $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ предполагаются компактными в соответствующих евклидовых пространствах. Через $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ обозначим множества всех таких реализаций управления и помехи, соответственно. В отношении функции $f(\cdot)$ будем предполагать, что она

- определена и непрерывна по совокупности аргументов в области $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$;
- локально липшицева по второй переменной: для любого компактного подмножества $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ найдется константа $L_f(S) \geq 0$ такая, что $\|f(\tau, x_1, u, v) - f(\tau, x_2, u, v)\| \leq L_f(S)\|x_1 - x_2\|$, $(\tau, x_1), (\tau, x_2) \in S, u \in \mathcal{P}, v \in \mathcal{Q}$;
- удовлетворяет условию подлинейного роста: при некоторой $K \geq 0$ выполнены неравенства $\|f(\tau, x, u, v)\| \leq K(1 + \|x\|)$, $(\tau, x, u, v) \in T \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$.

При этих условиях решение в смысле Каратеодори задачи Коши (1.1) существует на всем интервале $[t_0, \vartheta]$ при любых реализациях управления $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ и помехи $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ [8, гл. 2]. Для всех $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ обозначим $x(\cdot, t_*, z_*, u(\cdot), v(\cdot))$ решение в смысле Каратеодори задачи (1.1) с начальным условием $x(t_*) = x_*$.

Выделим компактное в $\mathbb{R}^{n+1}$ подмножество G расширенного фазового пространства системы (1.1), содержащее все движения, начинающиеся из G_0 :

$$G := \text{cl}_{T \times \mathbb{R}^n} \left\{ (\tau, x) \in T \times \mathbb{R}^n \mid x = x(\tau, t_0, z_0, u(\cdot), v(\cdot)), z_0 \in G_0, u(\cdot) \in \mathcal{U}, v(\cdot) \in \mathcal{V} \right\},$$

здесь и далее $\text{cl}_X Z$ обозначает замыкание множества $Z \subseteq X$ в топологии пространства X .

Для произвольных $(t_*, z_*) \in G$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ и $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ обозначим

$$X(t_*, z_*, \mathcal{U}, v(\cdot)) := \text{cl}_{C([t_*, \vartheta]; \mathbb{R}^n)} \left\{ x(\cdot, t_*, z_*, u(\cdot), v(\cdot)) \mid u(\cdot) \in \mathcal{U} \right\},$$

$$X(z_0, \mathcal{U}, v(\cdot)) := X(t_0, z_0, \mathcal{U}, v(\cdot)), \quad X(G_0) := \text{cl}_{C(T; \mathbb{R}^n)} \bigcup_{\substack{z_0 \in G_0 \\ v(\cdot) \in \mathcal{V}}} X(z_0, \mathcal{U}, v(\cdot)),$$

где $C([t_*, \vartheta]; \mathbb{R}^n)$ — множество всех непрерывных функций из $[t_*, \vartheta]$ в $\mathbb{R}^n$ с нормой равномерной сходимости.

Множество $\Delta := (\tau_i)_{i \in 0..n_\Delta}$, где $\tau_0 = t_0$, $\tau_{i-1} < \tau_i$, $\tau_{n_\Delta} = \vartheta$, назовем *разбиением* интервала T . Множество всех таких разбиений обозначим Δ_T . Для любых $\Delta \in \Delta_T$ и $t \in T$ определим

$$i_t := \max_{\substack{i \in 0..n_\Delta \\ \tau_i \leq t}} i, \quad d(\Delta) := \min_{i \in 1..(n_\Delta-1)} \tau_i - \tau_{i-1}, \quad D(\Delta) := \max_{i \in 1..n_\Delta} \tau_i - \tau_{i-1}.$$

Заметим, что всякое разбиение $\Delta := (\tau_i)_{i \in 0..n_\Delta}$ можно “проредить” до некоторого разбиения $\Delta' \in \Delta_T$ такого, что полученное разбиение будет удовлетворять условиям $\Delta' \subseteq \Delta$,

$D(\Delta')/d(\Delta') \leq 3$ и $D(\Delta') \leq 3D(\Delta)$. Процедуру перехода от Δ к Δ' с указанными свойствами можно определить, например, так: $\Delta' := \{\tau'_{n_{\Delta}}, \tau'_i := \operatorname{argmin}\{\tau \in \Delta \mid \tau \geq i2D(\Delta)\}, i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq (\vartheta - t_0)/(2D(\Delta))\}$.

Назовем *обратной связью с полной памятью* на разбиении $\Delta = (\tau_i)_{i \in 0..n_{\Delta}}$ (см. [5]) и обозначим $\mathbf{U}^{\Delta} := (\mathbf{U}_i^{\Delta})_{i \in 0..(n_{\Delta}-1)}$ всякое конечное семейство операторов вида

$$\mathbf{U}_i^{\Delta}: C([t_0, \tau_i], \mathbb{R}^n) \mapsto \mathcal{U}|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}, \quad i \in 0..(n_{\Delta} - 1);$$

символами $\mathcal{U}|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}$ обозначено множество сужений элементов из $\mathcal{U}$ на интервал $[\tau_i, \tau_{i+1}]$. Назовем *стратегией с полной памятью* и обозначим $\mathbb{U}$ семейство $(\mathbf{U}^{\Delta})_{\Delta \in \Delta_T}$ обратных связей с полной памятью, заданных на всех разбиениях $\Delta \in \Delta_T$. Множество всех стратегий (управления) с полной памятью обозначим $\mathbf{S}$.

Определим *пошаговое движение* $x(\cdot) := x(\cdot, z_0, \mathbf{U}^{\Delta}, v(\cdot)) \in X(z_0, \mathcal{U}, v(\cdot))$ и *реализацию управления* $u(\cdot) := u(\cdot, z_0, \mathbf{U}^{\Delta}, v(\cdot)) \in \mathcal{U}$, порожденные из начального состояния $z_0 \in G_0$ обратной связью $\mathbf{U}^{\Delta} = (\mathbf{U}_i^{\Delta}(\cdot))_{i \in 0..(n_{\Delta}-1)}$ при помехе $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, следующими условиями:

$$x(t) = x(t, t_0, z_0, u(\cdot), v(\cdot)), \quad u(\cdot)|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]} = \mathbf{U}_i^{\Delta}(x(\cdot)|_{[t_0, \tau_i]}), \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

Пусть имеются $z_0 \in G_0$, $\mathbb{U} \in \mathbf{S}$ и $\mathbf{V} \subseteq \mathcal{V}$. Определим пучок движений $X(z_0, \mathbb{U}, \mathbf{V})$ как множество всех элементов $x(\cdot) \in C(T; \mathbb{R}^n)$, для которых найдутся последовательности

$$(z_{0k}, v_k(\cdot), \Delta_k, \mathbf{U}^{\Delta_k})_{k \in \mathbb{N}}, \quad (z_{0k}, v_k(\cdot), \Delta_k, \mathbf{U}^{\Delta_k}) \in G_0 \times \mathbf{V} \times \Delta_T \times \mathbb{U}, \quad k \in \mathbb{N},$$

удовлетворяющие условиям $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{0k} = z_0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} D(\Delta_k) = 0$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(\cdot) - x(\cdot, z_{0k}, \mathbf{U}^{\Delta_k}, v_k(\cdot))\|_{C(T; \mathbb{R}^n)} = 0.$$

Для $z_0 \in G_0$ и $\mathbb{U} \in \mathbf{S}$ положим

$$\mathcal{X}_c(z_0, \mathbb{U}) := \bigcup_{\mathbf{V} \in \mathbf{comp}_{L_p}(\mathcal{V})} X(z_0, \mathbb{U}, \mathbf{V}), \quad \mathcal{X}_p(z_0, \mathbb{U}) := \bigcup_{v(\cdot) \in \mathcal{V}} X(z_0, \mathbb{U}, \{v(\cdot)\});$$

$\mathbf{comp}_{L_p}(\mathcal{V})$ — семейство всех $L_p(T; \mathbb{R}^q)$ -компактных подмножеств $\mathcal{V}$.

Качество движения будем оценивать функционалом $\gamma(\cdot): C(T; \mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{R}$, непрерывным в равномерной норме пространства $C(T; \mathbb{R}^n)$.

Для начального состояния z_0 определим величину $\Gamma_c(z_0, \mathbb{U})$ гарантированного результата стратегии $\mathbb{U} \in \mathbf{S}$ и величину оптимального гарантированного результата $\Gamma_c(z_0)$ в классе $\mathbf{S}$ при L_p -компактных ограничениях на помеху:

$$\Gamma_c(z_0, \mathbb{U}) := \sup_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_c(z_0, \mathbb{U})} \gamma(x(\cdot)), \quad \Gamma_c(z_0) := \inf_{\mathbb{U} \in \mathbf{S}} \Gamma_c(z_0, \mathbb{U}).$$

Также для начального состояния z_0 определим величину $\Gamma_p(z_0, \mathbb{U})$ гарантированного результата стратегии $\mathbb{U} \in \mathbf{S}$ и величину оптимального гарантированного результата $\Gamma_p(z_0)$ в классе $\mathbf{S}$ при программных ограничениях на помеху:

$$\Gamma_p(z_0, \mathbb{U}) := \sup_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_p(z_0, \mathbb{U})} \gamma(x(\cdot)), \quad \Gamma_p(z_0) := \inf_{\mathbb{U} \in \mathbf{S}} \Gamma_p(z_0, \mathbb{U}).$$

Введем в рассмотрение квазистратегии: следуя [4, с. 24], назовем *квазистратегией* всякое отображение $\alpha(\cdot): \mathcal{V} \mapsto \mathcal{U}$ такое, что для любых $\tau \in T$, $v(\cdot), v'(\cdot) \in \mathcal{V}$, удовлетворяющих $v(\cdot)|_{[t_0, \tau]} = v'(\cdot)|_{[t_0, \tau]}$, выполняется $\alpha(v(\cdot))|_{[t_0, \tau]} = \alpha(v'(\cdot))|_{[t_0, \tau]}$. Далее $\mathbf{Q}$ обозначает множество всех квазистратегий. Для начального состояния $z_0 \in G_0$ определим величины

$$\Gamma_q(z_0, \alpha(\cdot)) := \sup_{v(\cdot) \in \mathcal{V}} \gamma(x(\cdot, t_0, z_0, \alpha(v(\cdot)), v(\cdot))), \quad \Gamma_q(z_0) := \inf_{\alpha(\cdot) \in \mathbf{Q}} \Gamma_q(z_0, \alpha(\cdot))$$

гарантированного результата квазистратегии $\alpha(\cdot)$ и оптимального гарантированного результата в классе $\mathbf{Q}$.

2. Результаты

В [7] было описано семейство $(\mathbb{U}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ стратегий из $\mathbf{S}$, которые обеспечивают заявленный результат [7, теорема 2].

Теорема 1. *Для любого $z_0 \in G_0$ справедливы равенства*

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma_c(z_0, \mathbb{U}_\varepsilon) \leq \Gamma_Q(z_0), \quad (2.1)$$

$$\Gamma_Q(z_0) = \Gamma_P(z_0) = \Gamma_c(z_0).$$

С учетом легко проверяемых неравенств $\Gamma_Q(z_0) \leq \Gamma_P(z_0) \leq \Gamma_c(z_0)$ равенства второй части теоремы следуют из неравенства (2.1), доказательством которого мы и займемся.

Напомним кратко определение стратегии $\mathbb{U}_\varepsilon$ для $\varepsilon \in (0, 1)$. Обозначим $(u_j^\varepsilon)_{j \in 1..n_\varepsilon}$ некоторую ε -сеть в компакте $\mathcal{P}$, и пусть $\Delta := (\tau_i)_{i \in 0..n_\Delta}$ — произвольное разбиение интервала T . Без ограничения общности считаем, что для разбиения Δ выполняется неравенство $D(\Delta) / d(\Delta) \leq 3$ (при необходимости “прорежаем” разбиение Δ указанным способом). Обозначим

$$\tau'_i := \tau_i - \varepsilon d(\Delta), \quad i \in 1..(n_\Delta - 1), \quad (2.2)$$

зададим дополнительные моменты разбиения интервала T

$$\tau'_{ij} := \tau'_i + \frac{j(\tau_i - \tau'_i)}{n_\varepsilon}, \quad j \in 0..n_\varepsilon, \quad i \in 1..(n_\Delta - 1), \quad (2.3)$$

(благодаря (2.2) $\tau'_{ij} \in (\tau_{i-1}, \tau_i]$) и для произвольного $x(\cdot) \in C(T; \mathbb{R}^n)$ зададим величины

$$d_{ij}(x(\cdot)) := \frac{x(\tau'_{ij}) - x(\tau'_{i(j-1)})}{\tau'_{ij} - \tau'_{i(j-1)}}, \quad j \in 1..n_\varepsilon, \quad i \in 1..(n_\Delta - 1).$$

Зафиксируем некоторые $u_* \in \mathcal{P}$, $v_* \in \mathcal{Q}$ и определим обратную связь с полной памятью $\mathbb{U}_\varepsilon^\Delta = (\mathbb{U}_{\varepsilon i}^\Delta(\cdot))_{i \in 0..(n_\Delta - 1)}$ на разбиении Δ индуктивно по $i \in 0..(n_\Delta - 1)$.

База индукции: для всех $x_0(\cdot) \in C([t_0, \tau_0], \mathbb{R}^n)$ положим

$$y_0(\tau_0) = x_0(\tau_0), \quad \bar{v}_0 := v_*, \quad u_0 := u_*, \quad (2.4)$$

$$\mathbb{U}_{\varepsilon 0}^\Delta(x_0(\cdot))(t) := \begin{cases} u_0, & t \in [\tau_0, \tau'_1), \\ u_j^\varepsilon, & t \in [\tau'_{1(j-1)}, \tau'_{1j}), \quad j \in 1..n_\varepsilon. \end{cases} \quad (2.5)$$

Шаг индукции: если при некотором $i \in 1..(n_\Delta - 1)$ для всех $x_{i-1}(\cdot) \in C([t_0, \tau_{i-1}], \mathbb{R}^n)$ определены значения $\mathbb{U}_{\varepsilon(i-1)}^\Delta(x_{i-1}(\cdot))$ и элементы $y_{i-1}(\tau_k) \in \mathbb{R}^n$, $u_{i-1} \in \mathcal{P}$, $\bar{v}_{i-1} \in \mathcal{Q}$, то для любых $x_i(\cdot) \in C([t_0, \tau_i], \mathbb{R}^n)$ положим

$$y_i(\tau) = y_{i-1}(\tau_{i-1}) + \int_{\tau_{i-1}}^{\tau} f(t, y_i(t), u_{i-1}, \bar{v}_{i-1}) dt, \quad \tau \in [\tau_{i-1}, \tau_i], \quad (2.6)$$

$$\bar{v}_i \in \operatorname{argmin}_{v \in \mathcal{Q}} \max_{j \in 1..n_\varepsilon} \|d_{ij}(x_i(\cdot)) - f(\tau_i, x_i(\tau_i), u_j^\varepsilon, v)\|, \quad (2.7)$$

$$u_i \in \operatorname{argmin}_{u \in \mathcal{P}} \langle y_i(\tau_i) - w(\tau_i \mid \tau_i, y_i(\cdot)), f(\tau_i, y_i(\tau_i), u, \bar{v}_i) \rangle, \quad (2.8)$$

$$\mathbb{U}_{\varepsilon i}^\Delta(x_i(\cdot))(t) := \begin{cases} u_i, & t \in [\tau_i, \tau'_{i+1}), \\ u_j^\varepsilon, & t \in [\tau'_{(i+1)(j-1)}, \tau'_{(i+1)j}), j \in 1..n_\varepsilon. \end{cases} \quad (2.9)$$

Здесь $w(\cdot|\tau, y(\cdot)) \in \mathcal{W}(y(t_0))|_{[t_0, \tau]}$ — проекции элементов $y(\cdot) \in C([t_0, \tau], \mathbb{R}^n)$ на сужения “целевых” множеств $\mathcal{W}(z)$ на отрезок $[t_0, \tau]$:

$$w(\cdot|\tau, y(\cdot)) \in \operatorname{argmin}_{w(\cdot) \in \mathcal{W}(y(t_0))|_{[t_0, \tau]}} \|w(\cdot) - y(\cdot)\|_{C([t_0, \tau], \mathbb{R}^n)}, \quad (2.10)$$

$$\mathcal{W}(z) := \bigcap_{\delta > 0} \operatorname{cl}_{C(T; \mathbb{R}^n)} \left\{ \bigcup_{\substack{\Gamma_Q(z, \alpha(\cdot)) \\ \leq \Gamma_Q(z) + \delta}} \mathcal{X}(z, \alpha(\cdot)) \right\}, \quad z \in G_0. \quad (2.11)$$

Обратная связь с полной памятью $\mathbf{U}_\varepsilon^\Delta$ определена на произвольном разбиении $\Delta \in \Delta_T$. Тем самым и стратегия $\mathbb{U}_\varepsilon := (\mathbf{U}_\varepsilon^\Delta)_{\Delta \in \Delta_T}$ определена для всех $\varepsilon \in (0, 1)$.

Обозначим $\bar{v}(\cdot) \in \mathcal{V}$ помеху, восстановленную в процессе управления:

$$\bar{v}(t) := \bar{v}_{it}, \quad t \in T. \quad (2.12)$$

В конструкции стратегии $\mathbb{U}_\varepsilon$ имеются два места, представляющие трудности при численной реализации такой процедуры управления. Первое связано с вычислением проекций движений y -модели на “целевые” множества (см. (2.11), (2.10)). На идейном уровне эта задача сводится к задаче вычисления градиента цены “нижней” (максиминной) игры в текущем фазовом состоянии управляемой системы (или ее аппроксимации). Несмотря на известную сложность этой задачи, во многих важных случаях найдены эффективные методы ее решения. Отметим лишь наиболее известные: программные конструкции в случаях регулярности программного максимина [2; 4] и их обобщения в методе программных итераций [9–12], метод стохастического программного синтеза [3; 13] и тесно связанный с ним метод выпуклых сверху оболочек вспомогательных программных функций [14–16].

Второй трудностью при реализации стратегии $\mathbb{U}_\varepsilon$ является неограниченный и достаточно быстрый рост множества $(u_j^\varepsilon)_{j \in 1..n_\varepsilon}$ при уменьшении параметра ε : $n_\varepsilon \sim 1/\varepsilon^n$. Это ведет к значительному росту размерности задачи динамического обращения (2.7). Однако в достаточно широких классах систем этой трудности можно избежать [17].

3. Доказательства

Для доказательства теоремы нам потребуются дополнительные обозначения и леммы. Следуя [2], назовем множество $W \subseteq C(T; \mathbb{R}^n)$ u -стабильным, если для произвольных $[\tau_*, \tau^*] \subseteq T$, $v_* \in \mathcal{Q}$, $x_*(\cdot) \in W|_{[t_0, \tau_*]}$ существует решение $x(\cdot)$ дифференциального включения

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau) \in \mathcal{F}_u(\tau, x(\tau), v_*) & \text{для п.в. } \tau \in [\tau_*, \tau^*], \\ x(\tau_*) = x_*(\tau_*), \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_u(\tau, x, v) := \operatorname{co}_{\mathbb{R}^n} \{f \in \mathbb{R}^n : f = f(\tau, x, u, v), u \in \mathcal{P}\}$$

такое, что выполняется включение $(x_*, x)_{\tau_*}(\cdot) \in W|_{[t_0, \tau^*]}$. Здесь

$$(x_*, x)_{\tau_*}(t) := \begin{cases} x_*(t), & t \in [t_0, \tau_*], \\ x(t), & t \in [\tau_*, \tau^*], \end{cases}$$

а $\operatorname{co}_{\mathbb{R}^n} A$ обозначает выпуклую замкнутую оболочку множества $A \subset \mathbb{R}^n$. $\operatorname{co}_{\mathbb{R}^n} A$ обозначает выпуклую замкнутую оболочку множества $A \subset \mathbb{R}^n$. Для всех $c \in [1/2, +\infty)$, $\tau \in \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ обозначим

$$I_c(\tau) := \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b > a, \frac{\max\{|b - \tau|, |a - \tau|\}}{b - a} \leq c \right\},$$

$$A'_c := \left\{ \tau \in \mathbb{R} \mid \lim_{\substack{a, b \rightarrow \tau \\ (a, b) \in I_c(\tau)}} \frac{\lambda(A \cap [a, b])}{b - a} = 1 \right\}.$$

Лемма 1. Для произвольного измеримого по Лебегу множества $A \subseteq \mathbb{R}$ и $c \in [1/2, +\infty)$ справедливы равенства

$$\lambda(A \Delta A'_c) := \lambda((A \setminus A'_c) \cup (A'_c \setminus A)) = 0.$$

Элементы множества A'_c называют *точками плотности* множества A .

Доказательство леммы проводится стандартными в математическом анализе средствами. Для случая $c = 1/2$, $(\tau - a = b - \tau)$ доказательство этой леммы приводится в [18, гл IX, § 6]. $\square$

Лемма 2. Для любых $c \in [1/2, +\infty)$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ и п.в. $\tau \in T$ верно равенство

$$\lim_{\substack{a, b \rightarrow \tau \\ (a, b) \in I_c(\tau)}} \sup_{\substack{u \in \mathcal{P} \\ x(\cdot) \in X(G_0)}} \left\| (b - a)^{-1} \int_{[a, b]} f(s, x(s), u, v(s)) ds - f(\tau, x(\tau), u, v(\tau)) \right\| = 0.$$

Доказательство леммы 2 повторяет доказательство [19, лемма 5.4] с той лишь разницей, что вместо используемого в этом доказательстве утверждения 5.1 следует применить лемму 1. $\square$

Для следующих двух лемм зафиксируем $\varepsilon > 0$, $z_0 \in G_0$ и $x_0(\cdot) \in \mathcal{X}_c(z_0, \mathbb{U}_\varepsilon)$. Исходя из определения множества $\mathcal{X}_c(z_0, \mathbb{U}_\varepsilon)$ проверяется существование $v_0(\cdot) \in \mathcal{V}$ и последовательности

$$(z_{0k}, v_k(\cdot), \Delta_k, \mathbf{U}_\varepsilon^{\Delta_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset G_0 \times \mathcal{V} \times \Delta_T \times \mathbb{U}_\varepsilon$$

таких, что $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{0k} = z_0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} D(\Delta_k) = 0$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_0(\cdot) - x_k(\cdot)\|_{C(T; \mathbb{R}^n)} = 0, \quad (3.1)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|v_0(\cdot) - v_k(\cdot)\|_{L_2(T; \mathbb{R}^n)} = 0, \quad (3.2)$$

где $x_k(\cdot) := x(\cdot, z_{0k}, \mathbf{U}_\varepsilon^{\Delta_k}, v_k(\cdot))$.

Из условия (3.2), в силу известного утверждения о сходимости по мере измеримых функций [8, теорема I.4.18] и при необходимости переходя к подпоследовательности, получим соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_k(\tau) = v_0(\tau) \quad \text{при п.в. } \tau \in T. \quad (3.3)$$

Введем обозначения $u_k(\cdot) := u(\cdot, z_{0k}, \mathbf{U}_\varepsilon^{\Delta_k}, v_k(\cdot))$ для всех $k \in \mathbb{N}$, а также для дополнительных моментов (2.3), участвующих в определениях (2.5), (2.9):

$$\tau'_{kij} := \tau'_{ki} + \frac{j(\tau_{ki} - \tau'_{ki})}{n_\varepsilon}, \quad \tau'_{ki} := \tau_{ki} - \varepsilon d(\Delta_k), \quad j \in 0..n_\varepsilon, \quad i \in 1..(n_{\Delta_k} - 1). \quad (3.4)$$

В соответствии с (2.6) определим движения y -модели

$$y_k(\tau) = z_{0k} + \int_{t_0}^{\tau} f(s, y_k(s), \bar{u}_k(s), \bar{v}_k(s)) ds, \quad \tau \in T,$$

где

$$\bar{v}_k(t) := \bar{v}_{ki_t}, \quad \bar{u}_k(t) := u_{ki_t}, \quad t \in T, \quad k \in \mathbb{N},$$

а величины в правых частях присвоений заданы выражениями (2.7), (2.8) для соответствующего разбиения Δ_k .

Для любых $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$ и выбранной ε -сети $(u_j^\varepsilon)_{j \in 1..n_\varepsilon}$ введем фактор-множество $\mathcal{Q}_{tx\varepsilon}$ множества $\mathcal{Q}$, порожденное отношением эквивалентности $\sim_{tx\varepsilon}$:

$$(v_1 \sim_{tx\varepsilon} v_2) \Leftrightarrow ((\forall j \in 1..n_\varepsilon) f(t, x, u_j^\varepsilon, v_1) = f(t, x, u_j^\varepsilon, v_2)).$$

Также для любых $(t, x, u) \in T \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{P}$ обозначим $\mathcal{Q}_{txu}$ фактор-множество множества $\mathcal{Q}$, порожденное отношением эквивалентности $\sim_{txu}: (v_1 \sim_{txu} v_2) \Leftrightarrow (f(t, x, u, v_1) = f(t, x, u, v_2))$. Для выбранных $x_0(\cdot) \in \mathcal{X}_c(z_0, \mathbb{U}_\varepsilon)$, $v_0(\cdot) \in \mathcal{V}$ и любого $t \in T$ обозначим q_t^ε , q_t^u классы эквивалентности, удовлетворяющие соответственно отношениям

$$v_0(t) \in q_t^\varepsilon \in \mathcal{Q}_{tx_0(t)\varepsilon}, \quad v_0(t) \in q_t^u \in \mathcal{Q}_{tx_0(t)u}. \quad (3.5)$$

При этом для всех $t \in T$ выполнены равенства

$$q_t^\varepsilon = \bigcap_{j \in 1..n_\varepsilon} q_t^{u_j^\varepsilon}. \quad (3.6)$$

Лемма 3. Для п.в. $\tau \in T$ выполняются равенства

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{d}_{\mathbb{R}^n}^H(\{\bar{v}_k(\tau)\}, q_\tau^\varepsilon) = 0. \quad (3.7)$$

Здесь и далее $\mathbf{d}_X^H(A, B) := \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|_X$ — хаусдорфово отклонение в пространстве X .

Доказательство. Для всех $k \in \mathbb{N}$, $j \in 1..n_\varepsilon$ и $\tau \in [\tau_{k1}, \vartheta]$ обозначим

$$x_{k0}(\cdot) := x(\cdot, t_0, z_{0k}, u_k(\cdot), v_0(\cdot)),$$

$$D_{kj}(\tau) := \frac{x_k(\tau'_{ki\tau j}) - x_k(\tau'_{ki\tau(j-1)})}{\tau'_{ki\tau j} - \tau'_{ki\tau(j-1)}} = \int_{\tau'_{ki\tau(j-1)}}^{\tau'_{ki\tau j}} \frac{f(s, x_k(s), u_k(s), v_k(s))}{\tau'_{ki\tau j} - \tau'_{ki\tau(j-1)}} ds.$$

Для дальнейшего заметим, что в принятых обозначениях при всех $k \in \mathbb{N}$, $j \in 1..n_\varepsilon$ и $\tau \in T$ выполняются соотношения $u_k(\tau) = u_j^\varepsilon$, $\tau \in [\tau'_{ki\tau(j-1)}, \tau'_{ki\tau j}]$,

$$\bar{v}_k(\tau) \in \operatorname{argmin}_{v \in \mathcal{Q}} \max_{j \in 1..n_\varepsilon} \|D_{kj}(\tau) - f(\tau_{ki\tau}, x_k(\tau_{ki\tau}), u_j^\varepsilon, v)\|.$$

Кроме того, в силу сходимости (3.2) выполняется равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k(\cdot) - x_{k0}(\cdot)\|_{C(T; \mathbb{R}^n)} = 0$.

1. Оценим величину

$$\|D_{kj}(\tau) - f(\tau, x_k(\tau), u_j^\varepsilon, v_k(\tau))\| = \left\| \int_{\tau'_{ki\tau(j-1)}}^{\tau'_{ki\tau j}} \frac{f(s, x_k(s), u_j^\varepsilon, v_k(s))}{\tau'_{ki\tau j} - \tau'_{ki\tau(j-1)}} ds - f(\tau, x_k(\tau), u_j^\varepsilon, v_k(\tau)) \right\|.$$

Прибавим и вычтем в подынтегральном выражении величины

$$\frac{f(s, x_k(s), u_j^\varepsilon, v_0(s))}{\tau'_{ki\tau j} - \tau'_{ki\tau(j-1)}}, \quad \frac{f(s, x_{k0}(s), u_j^\varepsilon, v_0(s))}{\tau'_{ki\tau j} - \tau'_{ki\tau(j-1)}} \text{ и } f(\tau, x_{k0}(\tau), u_j^\varepsilon, v_0(\tau)),$$

продолжаем оценки:

$$\begin{aligned} \|D_{kj}(\tau) - f(\tau, x_k(\tau), u_j^\varepsilon, v_k(\tau))\| &\leq \int_{\tau'_{ki\tau(j-1)}}^{\tau'_{ki\tau j}} \left\| \frac{f(s, x_k(s), u_j^\varepsilon, v_k(s)) - f(s, x_k(s), u_j^\varepsilon, v_0(s))}{\tau'_{ki\tau j} - \tau'_{ki\tau(j-1)}} \right\| ds \\ &+ \int_{\tau'_{ki\tau(j-1)}}^{\tau'_{ki\tau j}} \left\| \frac{f(s, x_k(s), u_j^\varepsilon, v_0(s)) - f(s, x_{k0}(s), u_j^\varepsilon, v_0(s))}{\tau'_{ki\tau j} - \tau'_{ki\tau(j-1)}} \right\| ds \\ &+ \left\| \int_{\tau'_{ki\tau(j-1)}}^{\tau'_{ki\tau j}} \frac{f(s, x_{k0}(s), u_j^\varepsilon, v_0(s))}{\tau'_{ki\tau j} - \tau'_{ki\tau(j-1)}} ds - f(\tau, x_{k0}(\tau), u_j^\varepsilon, v_0(\tau)) \right\| \\ &+ \|f(\tau, x_{k0}(\tau), u_j^\varepsilon, v_0(\tau)) - f(\tau, x_k(\tau), u_j^\varepsilon, v_k(\tau))\|. \end{aligned}$$

Обозначим $\mu_v(\cdot)$ модуль непрерывности $f(\cdot)$ по четвертому аргументу

$$\mu_v(\delta) := \max_{\substack{|v-v'|\leq\delta \\ (\tau,x)\in G \\ u\in\mathcal{P}, v, v'\in\mathcal{Q}}} \|f(\tau, x, u, v) - f(\tau, x, u, v')\|, \quad \lim_{\delta\rightarrow+0} \mu_v(\delta) = 0$$

и воспользуемся свойствами равномерной непрерывности и липшицевости правой части системы (1.1) в области $G \times \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$, продолжаям оценки:

$$\begin{aligned} \|D_{kj}(\tau) - f(\tau, x_k(\tau), u_j^\varepsilon, v_k(\tau))\| &\leq \int_{\tau'_{ki\tau(j-1)}}^{\tau'_{ki\tau j}} \frac{\mu_v(\|v_k(s) - v_0(s)\|) + L_f(G)\|x_k(s) - x_{k0}(s)\|}{\tau'_{ki\tau j} - \tau'_{ki\tau(j-1)}} ds \\ &\quad + \left\| \int_{\tau'_{ki\tau(j-1)}}^{\tau'_{ki\tau j}} \frac{f(s, x_{k0}(s), u_j^\varepsilon, v_0(s))}{\tau'_{ki\tau j} - \tau'_{ki\tau(j-1)}} ds - f(\tau, x_{k0}(\tau), u_j^\varepsilon, v_0(\tau)) \right\| \\ &\quad + L_f(G)\|x_k(\tau) - x_{k0}(\tau)\| + \mu_v(\|v_k(\tau) - v_0(\tau)\|) \\ &\leq \left\| \int_{\tau'_{ki\tau(j-1)}}^{\tau'_{ki\tau j}} \frac{f(s, x_{k0}(s), u_j^\varepsilon, v_0(s))}{\tau'_{ki\tau j} - \tau'_{ki\tau(j-1)}} ds - f(\tau, x_{k0}(\tau), u_j^\varepsilon, v_0(\tau)) \right\| \\ &\quad + \int_{\tau'_{ki\tau(j-1)}}^{\tau'_{ki\tau j}} \frac{\mu_v(\|v_k(s) - v_0(s)\|)}{\tau'_{ki\tau j} - \tau'_{ki\tau(j-1)}} ds + 2L_f(G)\|x_k(\cdot) - x_{k0}(\cdot)\|_{C(T; \mathbb{R}^n)} + \mu_v(\|v_k(\tau) - v_0(\tau)\|). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &\left\| D_{kj}(\tau) - f(\tau, x_k(\tau), u_j^\varepsilon, v_k(\tau)) \right\| \\ &\leq \left\| \int_{\tau'_{ki\tau(j-1)}}^{\tau'_{ki\tau j}} \frac{f(s, x_{k0}(s), u_j^\varepsilon, v_0(s))}{\tau'_{ki\tau j} - \tau'_{ki\tau(j-1)}} ds - f(\tau, x_{k0}(\tau), u_j^\varepsilon, v_0(\tau)) \right\| + \Psi_{2kj}(\tau), \quad (3.8) \end{aligned}$$

где

$$\Psi_{2kj}(\tau) := \int_{\tau'_{ki\tau(j-1)}}^{\tau'_{ki\tau j}} \frac{\mu_v(\|v_k(s) - v_0(s)\|)}{\tau'_{ki\tau j} - \tau'_{ki\tau(j-1)}} ds + 2L_f(G)\|x_k(\cdot) - x_{k0}(\cdot)\|_{C(T; \mathbb{R}^n)} + \mu_v(\|v_k(\tau) - v_0(\tau)\|).$$

По определению (3.4) дополнительных моментов $\tau'_{ki\tau(j-1)}, \tau'_{ki\tau j}$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \max\{|\tau'_{ki\tau(j-1)} - \tau|, |\tau'_{ki\tau j} - \tau|\} &= \tau - \tau'_{ki\tau(j-1)} \leq \varepsilon d(\Delta_k) + D(\Delta_k), \\ \tau'_{ki\tau j} - \tau'_{ki\tau(j-1)} &= \frac{\varepsilon d(\Delta_k)}{n_\varepsilon}, \quad \tau \in T, \quad k \in \mathbb{N}, \quad j \in 1..n_\varepsilon, \end{aligned}$$

из которых для всех $\tau \in T$, $k \in \mathbb{N}$, $j \in 1..n_\varepsilon$ следуют неравенства

$$\frac{\max\{|\tau'_{ki\tau(j-1)} - \tau|, |\tau'_{ki\tau j} - \tau|\}}{\tau'_{ki\tau j} - \tau'_{ki\tau(j-1)}} \leq \frac{n_\varepsilon(\varepsilon d(\Delta_k) + D(\Delta_k))}{\varepsilon d(\Delta_k)} \leq n_\varepsilon \left(1 + \frac{3}{\varepsilon}\right) := c_\varepsilon \in [1/2, +\infty).$$

Таким образом,

$$\tau'_{ki_\tau(j-1)}, \tau'_{ki_\tau j} \in I_{c_\varepsilon}(\tau), \quad \tau \in [\tau_{k1}, \vartheta], \quad k \in \mathbb{N}, \quad j \in 1..n_\varepsilon. \quad (3.9)$$

Из этих соотношений в силу леммы 2 при п.в. $\tau \in T$ получим сходимость

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{j \in 1..n_\varepsilon} \left\| \int_{\tau'_{ki_\tau(j-1)}}^{\tau'_{ki_\tau j}} \frac{f(s, x_{k0}(s), u_j^\varepsilon, v_0(s))}{\tau'_{ki_\tau j} - \tau'_{ki_\tau(j-1)}} ds - f(\tau, x_{k0}(\tau), u_j^\varepsilon, v_0(\tau)) \right\| = 0. \quad (3.10)$$

Понятно, что из сходимостей (3.1) и (3.3) получим сходимость к нулю второго и третьего слагаемых в $\Psi_{2kj}(\tau)$ при п.в. $\tau \in T$ и $k \rightarrow \infty$. Оценим первое слагаемое.

В силу теоремы Егорова для произвольного $\xi > 0$ найдется измеримое подмножество $E_\xi \subset T$ такое, что $\lambda(T \setminus E_\xi) \leq \xi$ и на множестве E_ξ имеет место равномерная сходимость

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k(\cdot) - v_0(\cdot)\|_{C(E_\xi, \mathbb{R}^q)} = 0. \quad (3.11)$$

Обозначим $E'_{\xi\varepsilon}$ множество точек плотности при параметре $c := c_\varepsilon$. В силу свойств таких множеств (см. теорему 1, с. 209) будет выполняться неравенство $\lambda(T \setminus E'_{\xi\varepsilon}) \leq \xi$. Оценим первое слагаемое в $\Psi_{2kj}(\tau)$ при $\tau \in E'_{\xi\varepsilon}$ и $k \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\tau'_{ki_\tau(j-1)}}^{\tau'_{ki_\tau j}} \frac{\mu_v(\|v_k(s) - v_0(s)\|)}{\tau'_{ki_\tau j} - \tau'_{ki_\tau(j-1)}} ds &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_{[\tau'_{ki_\tau(j-1)}, \tau'_{ki_\tau j}] \cap E_\xi} \frac{\mu_v(\|v_k(s) - v_0(s)\|)}{\tau'_{ki_\tau j} - \tau'_{ki_\tau(j-1)}} ds \right. \\ &+ \left. \int_{[\tau'_{ki_\tau(j-1)}, \tau'_{ki_\tau j}] \setminus E_\xi} \frac{\mu_v(\|v_k(s) - v_0(s)\|)}{\tau'_{ki_\tau j} - \tau'_{ki_\tau(j-1)}} ds \right) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\mu_v(\|v_k(\cdot) - v_0(\cdot)\|_{C(E_\xi, \mathbb{R}^q)}) \right. \\ &+ \left. \mu_v(\|v_k(\cdot) - v_0(\cdot)\|_{C(T, \mathbb{R}^q)}) \left(1 - \frac{\lambda([\tau'_{ki_\tau(j-1)}, \tau'_{ki_\tau j}] \cap E_\xi)}{\tau'_{ki_\tau j} - \tau'_{ki_\tau(j-1)}} \right) \right). \end{aligned}$$

В последнем выражении первое слагаемое стремится к нулю благодаря (3.11), а второе — в силу оценок (3.9), выбора $\tau \in E'_{\xi\varepsilon}$ и определения множества $E'_{\xi\varepsilon}$. Мы показали, что для всех $\tau \in T$ за исключением множества точек сколь угодно малой меры имеет место сходимость

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Psi_{2kj}(\tau) = 0. \quad (3.12)$$

Отношения (3.8), (3.10), (3.12) при п.в. $\tau \in T$ ведут к равенству

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{j \in 1..n_\varepsilon} \|D_{kj}(\tau) - f(\tau, x_k(\tau), u_j^\varepsilon, v_k(\tau))\| = 0, \quad (3.13)$$

из которого опять в силу сходимостей (3.1), (3.3) и равномерной непрерывности правой части (1.1) в области $G \times \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ следует равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{j \in 1..n_\varepsilon} \|D_{kj}(\tau) - f(\tau, x_0(\tau), u_j^\varepsilon, v_0(\tau))\| = 0 \quad \text{при п.в. } \tau \in T. \quad (3.14)$$

2. Из непрерывности функции $f(\tau, x, u, v)$ в области $G \times \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ и равностепенной по $k \in \mathbb{N}$ непрерывной зависимости решений $x_k(\cdot)$ от $\tau \in T$ следует существование функции $\psi(\cdot) : (0, 1) \mapsto (0, +\infty)$ вида $\psi(\delta) := \sup_{\substack{u \in \mathcal{P}, v \in \mathcal{Q}, k \in \mathbb{N} \\ \tau, \tau' \in T, |\tau - \tau'| \leq \delta}} \|f(\tau', x_k(\tau'), u, v) - f(\tau, x_k(\tau), u, v)\| \leq \psi(|\tau' - \tau|)$ такой, что $\lim_{\delta \rightarrow +0} \psi(\delta) = 0$. Отсюда при любом $k \in \mathbb{N}$ и $\tau \in T$ получим неравенства

$$\max_{j \in 1..n_\varepsilon} \|D_{kj}(\tau) - f(\tau, x_k(\tau), u_j^\varepsilon, \bar{v}_k(\tau))\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \max_{j \in 1..n_\varepsilon} \|D_{kj}(\tau) - f(\tau_{ki_\tau}, x_k(\tau_{ki_\tau}), u_j^\varepsilon, \bar{v}_k(\tau_{ki_\tau}))\| + \psi(|\tau - \tau_{ki_\tau}|) \\
&\leq \min_{v \in \mathcal{Q}} \max_{j \in 1..n_\varepsilon} \|D_{kj}(\tau) - f(\tau_{ki_\tau}, x_k(\tau_{ki_\tau}), u_j^\varepsilon, v)\| + \psi(|\tau - \tau_{ki_\tau}|) \\
&\leq \min_{v \in \mathcal{Q}} \max_{j \in 1..n_\varepsilon} \|D_{kj}(\tau) - f(\tau, x_k(\tau), u_j^\varepsilon, v)\| + 2\psi(|\tau - \tau_{ki_\tau}|) \\
&\leq \max_{j \in 1..n_\varepsilon} \|D_{kj}(\tau) - f(\tau, x_k(\tau), u_j^\varepsilon, v_k(\tau))\| + 2\psi(|\tau - \tau_{ki_\tau}|). \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Первое неравенство опирается также на тождество $\bar{v}_k(\tau) = \bar{v}_k(\tau_{ki_\tau})$, $\tau \in T$, $k \in \mathbb{N}$ (см. (2.12)).

Из (3.13), (3.14), (3.15) и сходимостей (3.1), (3.3) при п.в. $\tau \in T$ следует соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{j \in 1..n_\varepsilon} \|f(\tau, x_0(\tau), u_j^\varepsilon, v_0(\tau)) - f(\tau, x_0(\tau), u_j^\varepsilon, \bar{v}_k(\tau))\| = 0. \tag{3.16}$$

Из равенства (3.16), рассуждая от противного, получим искомое соотношение (3.7): пусть для момента $\tau \in T$ выполняется равенство (3.16), а (3.7) неверно. Тогда найдется подпоследовательность $(\bar{v}_{k_l}(\tau))_{l \in \mathbb{N}}$ такая, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \bar{v}_{k_l}(\tau) = \bar{v} \notin q_\tau^\varepsilon. \tag{3.17}$$

Из непрерывности $f(\cdot)$ и (3.16) при всех $j \in 1..n_\varepsilon$ получим равенства $f(\tau, x_0(\tau), u_j^\varepsilon, v_0(\tau)) = f(\tau, x_0(\tau), u_j^\varepsilon, \bar{v})$, из которых следуют отношения $\bar{v} \underset{\tau x_0(\tau) u_j^\varepsilon}{\sim} v_0(\tau)$, $j \in 1..n_\varepsilon$, эквивалентные в совокупности (см. (3.6)) включению $\bar{v} \in q_\tau^\varepsilon$, что противоречит (3.17). Соотношение (3.7) установлено. $\square$

Лемма 4. Для любой позиции $z \in G_0$ множество $\mathcal{W}(z)$ компактно в $C(T, \mathbb{R}^n)$, u -стабильно, изменяется полунепрерывно сверху по включению при изменении параметра $z \in G_0$ и удовлетворяет соотношениям

$$\max_{w(\cdot) \in \mathcal{W}(z)} \gamma(w(\cdot)) = \Gamma_Q(z), \quad z \in \mathcal{W}(z)|_{t_0}, \quad z \in G_0. \tag{3.18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Компактность множества $\mathcal{W}(z)$ следует из замкнутости этого множества в $C(T, \mathbb{R}^n)$, включения $\mathcal{W}(z) \subset X(G_0)$ и компактности в $C(T, \mathbb{R}^n)$ множества $X(G_0)$. Соотношения (3.18) следуют из определения множества $\mathcal{W}(z)$ и непрерывности функционала качества $\gamma(\cdot)$. Также на основании непрерывности функционала $\gamma(\cdot)$ стандартными рассуждениями проверяется свойство полунепрерывности сверху по включению отображения $G_0 \ni z \mapsto \mathcal{W}(z) \in 2^{C(T; \mathbb{R}^n)}$. Доказательство свойства u -стабильности повторяет рассуждения из [19, лемма 5.1]. $\square$

Лемма 5. Семейство стратегий $(\mathbb{U}_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$, заданное выражениями (2.4)–(2.9), удовлетворяет равенствам

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{d}_{C(T; \mathbb{R}^n)}^H(\mathcal{X}_C(z_0, \mathbb{U}_\varepsilon), \mathcal{W}(z_0)) = 0, \quad z_0 \in G_0. \tag{3.19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Из u -стабильности множества $\mathcal{W}(z)$ и включения $z \in \mathcal{W}(z)|_{t_0}$ следует неравенство $\mathcal{W}(z)|_{[t_0, \tau]} \neq \emptyset$, $\tau \in T$. И, значит, с учетом компактности в $C(T; \mathbb{R}^n)$ множеств $\mathcal{W}(z)$ проекции (2.10) на это множество корректно определены.

2. Выполнено равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{d}_{C(T, \mathbb{R}^n)}^H(\{y_k(\cdot)\}, \mathcal{W}(x_k(t_0))) = 0. \tag{3.20}$$

Доказательство равенства (3.20) следует схеме рассуждений из леммы 96.1, (см. [2, с. 432]): справедливость (3.20) (так же, как и справедливость оценки (96.10) [2, с. 434]) следует из двух фактов, которые имеют место в рассматриваемом случае:

- u -стабильности множеств $W(z_{0k})$ (лемма 4);
- оценки расхождения управляемой системы (1.1) и решения подходящего дифференциального включения при экстремальном прицеливании.

Сформулируем эту оценку в действующих обозначениях: при всех $k \in \mathbb{N}$ и $i \in 0..(k-1)$ для любого решения $w_*(\cdot) \in C([\tau_*, \tau^*], \mathbb{R}^n)$ дифференциального включения

$$\begin{cases} \dot{w}_*(\tau) \in \mathcal{F}_u(\tau, w_*(\tau), \bar{v}_{ki}) & \text{для п.в. } \tau \in [\tau_{ki}, \tau_{k(i+1)}], \\ w_*(\tau_{ki}) = w_{ki}(\tau_{ki}) \end{cases} \quad (3.21)$$

справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \|w_*(\tau) - y_k(\tau)\|^2 &\leq \|w_{ki}(\tau_{ki}) - y_k(\tau_{ki})\|^2(1 + \beta(\tau - \tau_{ki})) + (\tau - \tau_{ki})\varphi(\tau - \tau_{ki}), \\ \tau &\in [\tau_{ki}, \tau_{k(i+1)}], \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \varphi(\delta) = 0, \end{aligned} \quad (3.22)$$

в которых монотонную функцию $\varphi(\cdot) : [0, +\infty) \mapsto [0, +\infty)$ и константу $\beta \geq 0$ можно выбрать независимыми от позиций $(\tau_{ki}, w_{ki}(\tau_{ki}))$, $(\tau_{ki}, y_k(\tau_{ki}))$, изменяющихся в пределах множества G .

Вывод этих оценок повторяет вывод оценки (14.6) из [2, §14] с заменой $v^* := v[t] := \bar{v}_{ki}$ и той разницей, что вместо неравенства (14.16), опирающегося на условие седловой точки, используются неравенства $\langle s_*, f(\tau_{ki}, y_{ki}, \bar{u}_{ki}, \bar{v}_{ki}) \rangle \leq \langle s_*, f(\tau_{ki}, y_{ki}, u_t^{(j)}, \bar{v}_{ki}) \rangle$, $s_* := y_{ki} - w_{ki}(\tau_{ki})$, $i \in 0..(k-1)$, $k \in \mathbb{N}$, непосредственно следующие из определения значений $\bar{u}_{ki}$ через значения $\bar{v}_{ki}$ (см. (2.8)).

Из неравенства (3.22) при любых $k \in \mathbb{N}$, $i \in 0..(n_{\Delta_k} - 1)$ и $\tau \in [\tau_{ki}, \tau_{k(i+1)}]$ следуют соотношения

$$\begin{aligned} &\|w_{k(i+1)}(\cdot) - y_k(\cdot)\|_{C([t_0, \tau]; \mathbb{R}^n)}^2 \\ &\leq \|w_{ki}(\cdot) - y_k(\cdot)\|_{C([t_0, \tau_{ki}]; \mathbb{R}^n)}^2(1 + \beta(\tau - \tau_{ki})) + (\tau - \tau_{ki})\varphi(\tau - \tau_{ki}). \end{aligned} \quad (3.23)$$

В самом деле, из включения $w_{ki}(\cdot) \in \mathcal{W}(z_{0k})|_{[t_0, \tau_{ki}]}$ в силу свойства u -стабильности множеств $\mathcal{W}(z_{0k})$ следует существование решения $w_*(\cdot) \in C([\tau_{ki}, \tau_{k(i+1)}]; \mathbb{R}^n)$ дифференциального включения (3.21) такого, что

$$\bar{w}_{k(i+1)}(\cdot) := (w_{ki}, w_*)_{\tau_{ki}}(\cdot) \in \mathcal{W}(z_{0k})|_{[t_0, \tau_{k(i+1)}]}. \quad (3.24)$$

Используя монотонность $\varphi(\cdot)$, включение (3.24) и неравенство (3.22), получим оценки

$$\begin{aligned} &\|w_{k(i+1)}(\cdot) - y_k(\cdot)\|_{C([t_0, \tau]; \mathbb{R}^n)}^2 \leq \|\bar{w}_{k(i+1)}(\cdot) - y_k(\cdot)\|_{C([t_0, \tau]; \mathbb{R}^n)}^2 \\ &= \max \left\{ \|w_{ki}(\cdot) - y_k(\cdot)\|_{C([t_0, \tau_{ki}]; \mathbb{R}^n)}^2, \|w_*(\cdot) - y_k(\cdot)\|_{C([\tau_{ki}, \tau]; \mathbb{R}^n)}^2 \right\} \\ &\leq \max \left\{ \|w_{ki}(\cdot) - y_k(\cdot)\|_{C([t_0, \tau_{ki}]; \mathbb{R}^n)}^2, \max_{s \in [\tau_{ki}, \tau]} \|w_{ki}(\tau_{ki}) - y_k(\tau_{ki})\|^2(1 + \beta(s - \tau_{ki})) + (s - \tau_{ki})\varphi(s - \tau_{ki}) \right\} \\ &\leq \max \left\{ \|w_{ki}(\cdot) - y_k(\cdot)\|_{C([t_0, \tau_{ki}]; \mathbb{R}^n)}^2, \|w_{ki}(\cdot) - y_k(\cdot)\|_{C([t_0, \tau_{ki}]; \mathbb{R}^n)}^2(1 + \beta(\tau - \tau_{ki})) + (\tau - \tau_{ki})\varphi(\tau - \tau_{ki}) \right\} \\ &= \|w_{ki}(\cdot) - y_k(\cdot)\|_{C([t_0, \tau_{ki}]; \mathbb{R}^n)}^2(1 + \beta(\tau - \tau_{ki})) + (\tau - \tau_{ki})\varphi(\tau - \tau_{ki}), \end{aligned}$$

завершающие обоснование неравенства (3.23).

Далее, как и в лемме 15.1 [2, с. 62], установим, что при каждом $k \in \mathbb{N}$ функция $\tau \mapsto \mathbf{d}_{C([t_0, \tau], \mathbb{R}^n)}^H(\{y_k(\cdot)\}, \mathcal{W}(x_k(t_0)))$ полунепрерывна снизу и непрерывна справа. Пользуясь этими свойствами из неравенств (3.23), при всех $k \in \mathbb{N}$ и $\tau \in T$ получим оценку

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{d}_{C([t_0, \tau], \mathbb{R}^n)}^H(\{y_k(\cdot)\}, \mathcal{W}(x_k(t_0))) \right)^2 \\ &\leq \left(\left(\mathbf{d}_{\mathbb{R}^n}^H(\{y_k(t_0)\}, \mathcal{W}(x_k(t_0)))|_{t_0} \right)^2 + (1 + (\tau - t_0))\varphi_k \right) \exp(\beta(\tau - t_0)), \end{aligned} \quad (3.25)$$

где $\varphi_k := \sup_{\substack{i \in 0..(n_{\Delta_k}-1) \\ \tau \in [\tau_{ki}, \tau_{k(i+1)}]}} \varphi(\tau - \tau_{ki})$, $k \in \mathbb{N}$. Понятно, что по построению $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = 0$. Учитывая, что по определению $y_k(t_0) = x_k(t_0) = \mathcal{W}(x_k(t_0))|_{t_0}$, из неравенств (3.25) при $\tau = \vartheta$ получим соотношения $\mathbf{d}_{C(T, \mathbb{R}^n)}^H(\{y_k(\cdot)\}, \mathcal{W}(x_k(t_0))) \leq \sqrt{(1 + (\vartheta - t_0))\varphi_k \exp(\beta(\vartheta - t_0))}$, дающие искомую сходимость (3.20).

3. Оценим разницу $y_k(\tau) - x_k(\tau)$ при $\tau \in T$:

$$\begin{aligned} y_k(\tau) - x_k(\tau) &= \int_{t_0}^{\tau} [f(s, y_k(s), \bar{u}_k(s), \bar{v}_k(s)) - f(s, x_k(s), u_k(s), v_k(s))] ds \\ &= \int_{t_0}^{\tau} [f(s, y_k(s), \bar{u}_k(s), \bar{v}_k(s)) - f(s, x_k(s), \bar{u}_k(s), \bar{v}_k(s))] ds \\ &\quad + \int_{t_0}^{\tau} [f(s, x_k(s), \bar{u}_k(s), \bar{v}_k(s)) - f(s, x_k(s), u_k(s), v_k(s))] ds. \end{aligned}$$

Воспользуемся свойством липшицевости правой части уравнения (1.1), продолжаем оценку:

$$y_k(\tau) - x_k(\tau) \leq \int_{t_0}^{\tau} L_f(G) \|y_k(s) - x_k(s)\| ds + \int_{t_0}^{\tau} \|f(s, x_k(s), \bar{u}_k(s), \bar{v}_k(s)) - f(s, x_k(s), u_k(s), v_k(s))\| ds$$

(здесь $L_f(G)$ — константа Липшица правой части $f(\cdot)$ системы (1.1) по второму аргументу в области G). Представим второй интеграл суммой двух интегралов, используя множество

$$M_\varepsilon := \bigcup_{i \in 1..(n_{\Delta_k}-1)} [\tau'_{ki}, \tau_{ki})$$

и тождества $u_k(s) = \bar{u}_k(s)$, $s \in T \setminus M_\varepsilon$, $k \in \mathbb{N}$, продолжаем оценку:

$$\begin{aligned} y_k(\tau) - x_k(\tau) &\leq \int_{t_0}^{\tau} L_f(G) \|y_k(s) - x_k(s)\| ds \\ &\quad + \int_{[t_0, \tau] \setminus M_\varepsilon} \|f(s, x_k(s), u_k(s), \bar{v}_k(s)) - f(s, x_k(s), u_k(s), v_k(s))\| ds \\ &\quad + \int_{M_\varepsilon} \|f(s, x_k(s), \bar{u}_k(s), \bar{v}_k(s)) - f(s, x_k(s), u_k(s), v_k(s))\| ds. \end{aligned}$$

Во втором интеграле воспользуемся непрерывностью правой части уравнения (1.1), а в третьем — мажорантой $\varkappa(G) := \max\{\|f(\tau, x, u, v)\| \mid (\tau, x) \in G, u \in \mathcal{P}, v \in \mathcal{Q}\}$, продолжаем оценку:

$$\begin{aligned} y_k(\tau) - x_k(\tau) &\leq \int_{t_0}^{\tau} L_f(G) \|y_k(s) - x_k(s)\| ds \\ &\quad + \int_{[t_0, \tau] \setminus M_\varepsilon} \|f(s, x_k(s), u_k(s), \bar{v}_k(s)) - f(s, x_k(s), u_k(s), v_0(s))\| ds \\ &\quad + \int_{[t_0, \tau] \setminus M_\varepsilon} \mu_v(\|v_0(s) - v_k(s)\|) ds + 2\varkappa(G)\lambda(M_\varepsilon). \end{aligned}$$

Во втором интеграле воспользуемся непрерывностью правой части уравнения (1.1) по третьей переменной, продолжая оценку:

$$\begin{aligned}
y_k(\tau) - x_k(\tau) &\leq \int_{t_0}^{\tau} L_f(G) \|y_k(s) - x_k(s)\| ds \\
&+ \int_{[t_0, \tau] \setminus M_\varepsilon} \|f(s, x_k(s), u_k^\varepsilon(s), \bar{v}_k(s)) - f(s, x_k(s), u_k^\varepsilon(s), v_0(s))\| ds \\
&+ \int_{[t_0, \tau] \setminus M_\varepsilon} \mu_v(\|v_0(s) - v_k(s)\|) ds + 2(\vartheta - t_0)\mu_u(\varepsilon) + 2\kappa(G)\lambda(M_\varepsilon) \\
&\leq \int_{t_0}^{\tau} L_f(G) \|y_k(s) - x_k(s)\| ds + \int_{[t_0, \tau] \setminus M_\varepsilon} \mu_v \left(\mathbf{d}_{\mathbb{R}^q}^H \left(\{\bar{v}_k(s)\}, q_s^{u_k^\varepsilon(s)} \right) \right) ds \\
&+ \int_{[t_0, \tau] \setminus M_\varepsilon} \mu_v(\|v_0(s) - v_k(s)\|) ds + 2(\vartheta - t_0)\mu_u(\varepsilon) + 2\kappa(G)\lambda(M_\varepsilon),
\end{aligned}$$

где $u_k^\varepsilon(s) \in \operatorname{argmin}_{j \in 1..n_\varepsilon} \|u_j^\varepsilon - u_k(s)\|$; по определению ε -сети в $\mathcal{P}$ выполняется неравенство $\|u_k^\varepsilon(s) - u_k(s)\| \leq \varepsilon$; несложно проверить, что функции $u_k^\varepsilon(\cdot)$ можно выбрать измеримыми; $\mu_u(\cdot)$ — модуль непрерывности $f(\cdot)$ по третьему аргументу

$$\mu_u(\delta) := \max_{\substack{|u-u'| \leq \delta \\ (\tau, x) \in G \\ v \in \mathcal{Q}, u, u' \in \mathcal{P}}} \|f(\tau, x, u, v) - f(\tau, x, u', v)\|, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \mu_u(\delta) = 0;$$

Используя неравенство $\lambda(M_\varepsilon) \leq \varepsilon(\vartheta - t_0)$ и соотношение (3.6), связывающее множества $q_s^{u_k^\varepsilon(s)}$ и q_s^ε (см. (3.5)), получим оценку

$$\|y_k(\tau) - x_k(\tau)\| \leq \int_{t_0}^{\tau} L_f(G) \|y_k(s) - x_k(s)\| ds + \Psi_{1k}, \quad (3.26)$$

где $\Psi_{1k} := \int_T [\mu_v(\mathbf{d}_{\mathbb{R}^q}^H(\{\bar{v}_k(s)\}, q_s^\varepsilon)) + \mu_v(\|v_k(s) - v_0(s)\|)] ds + 2(\vartheta - t_0)[\mu_u(\varepsilon) + \kappa(G)\varepsilon]$. Применим к (3.26) лемму Гронуолла [8, теорема II.4.4]:

$$\|y_k(\tau) - x_k(\tau)\| \leq \Psi_{1k} (1 + (\vartheta - t_0)L_f(G) \exp((\vartheta - t_0)L_f(G))). \quad (3.27)$$

4. В силу леммы 3 выполняется соотношение $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{d}_{\mathbb{R}^q}^H(\{\bar{v}_k(\tau)\}, q_\tau^\varepsilon) = 0$ при п.в. $\tau \in T$, и кроме того имеется сходимост (3.3). Из этих двух фактов, неравенства (3.27) и сходимости (3.20) получим оценку

$$\mathbf{d}_{C(T, \mathbb{R}^n)}^H(\{x_0(\cdot)\}, \mathcal{W}(z_0)) \leq 2(\vartheta - t_0)[1 + (\vartheta - t_0)L_f(G) \exp((\vartheta - t_0)L_f(G))](\mu_u(\varepsilon) + \kappa(G)\varepsilon),$$

из которой с учетом произвольного выбора $x_0(\cdot) \in \mathcal{X}_C(z_0, \mathbb{U}_\varepsilon)$ следует искомое равенство (3.19). $\square$

Доказательство теоремы 1. Из леммы 5 получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{d}_{C(T; \mathbb{R}^n)}^H(\mathcal{X}_C(z_0, \mathbb{U}_\varepsilon), \mathcal{W}(z_0)) = 0, \quad z_0 \in G_0.$$

Это равенство и равенство $\max_{w(\cdot) \in \mathcal{W}(z)} \gamma(w(\cdot)) = \Gamma_Q(z)$ из леммы 4 ведут к искомому неравенству (2.1):

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma_C(z_0, \mathbb{U}_\varepsilon) := \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_C(z_0, \mathbb{U}_\varepsilon)} \gamma(x(\cdot)) \leq \max_{x(\cdot) \in \mathcal{W}(z_0)} \gamma(x(\cdot)) = \Gamma_Q(z_0).$$

Доказательство теоремы 1 завершено. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. **Красовский Н. Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
4. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
5. **Kryazhinskii A.V.** The problem of optimization of the ensured result: unimprovability of full-memory strategies // Constantin Caratheodory: An international tribute / ed. T.M. Rassias. New York: World Scientific, 1991. P. 621–661.
6. **Серков Д.А.** Оптимизация гарантированного результата при функциональных ограничениях на динамическую помеху // Докл. АН. 2013. Т. 450, № 3. С. 274–278.
7. **Серков Д.А.** Оптимальное управление при компактных в L_p ограничениях на помеху // Вест. Удмурт. ун-та. 2013. Т. 3. С. 79–87. (Сер. 1: Математика. Механика. Компьютерные науки.)
8. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
9. **Ченцов А.Г.** Об игровой задаче сближения в заданный момент времени // Мат. сб. 1976. Т. 99(141), № 3. С. 394–420.
10. **Петросян Л.А., Чистяков С.В.** Об одном подходе к решению игр преследования // Вест. ЛГУ. 1977. Т. 1. С. 77–82. (Математика, механика, астрономия.)
11. **Чистяков С.В.** К решению игровых задач преследования // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, № 5. С. 825–832.
12. **Ухоботов В.И.** Построение стабильного моста для одного класса линейных игр // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, № 2. С. 358–364.
13. **Красовский Н.Н., Третьяков В.Е.** Стохастический программный синтез для позиционной дифференциальной игры // Докл. АН СССР. 1981. Т. 259, № 1. С. 24–27.
14. **Krasovskii N.N., Krasovskii A.N.** Control under lack of information. Berlin etc.: Birkhäuser, 1995. 322 p.
15. **Лукоянов Н.Ю.** К вопросу вычисления цены дифференциальной игры для позиционного функционала // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, № 2. С. 188–198.
16. **Гомоюнов М.И., Корнев Д.В.** К вопросу вычисления цены дифференциальной игры в классе контрстратегий // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 1. С. 59–68.
17. **Серков Д.А.** Синтез оптимального управления при L_p -компактной помехе // XII Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-2014, 16–19 июня 2014 г.): тр. [Электронный ресурс]. М.: Ин-т проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2014. С. 688–699. URL: <http://vspu2014.ipu.ru/proceedings/prcdngs/688.pdf>.
18. **Натансон И.П.** Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
19. **Серков Д.А.** Гарантированное управление при функциональных ограничениях на помеху // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. Т. 4, вып. 2. С. 71–95.

Серков Дмитрий Александрович

канд. физ.-мат. наук

старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: serkov@imm.uran.ru

УДК 517.977

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ ПО ОТНОШЕНИЮ К ВОЗМУЩЕНИЯМ ВХОДНЫХ ДАННЫХ¹

Н. Н. Субботина, Т. Б. Токманцев

Для систем, линейных по управлениям, рассмотрены задачи реконструкции динамики и управления по апостериорной статистике замеров траекторий и известной оценке неточности этих замеров. Вводится задача оптимального управления на минимум интегрального регуляризованного функционала невязки динамики и статистики. С помощью оптимального синтеза строятся управления и траектории, которые аппроксимируют решение обратной задачи. Разработан численный метод аппроксимации, базирующийся на методе характеристик для уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана и концепции минимаксно-вязкостного решения. Получены достаточные условия, при которых предлагаемые аппроксимации сходятся к нормальному решению обратной задачи при согласованном стремлении к нулю параметров аппроксимации (оценки точности измерений, регуляризующего параметра, шага сетки по фазовой переменной и шага интегрирования). Приведены результаты численного решения задач идентификации и реконструкции управлений и траекторий для механической модели гравитации при заданной статистике измерений фазовых координат.

Ключевые слова: идентификация, реконструкция, метод регуляризации, функционал невязки, обратная связь, оптимальный синтез, уравнение Гамильтона — Якоби — Беллмана, характеристическая система, минимаксно-вязкостное решение.

N. N. Subbotina, T. B. Tokmantsev. A study of the stability of solutions to inverse problems of dynamics of control systems under perturbations of initial data.

For systems linear in control we consider problems of recovering the dynamics and control from a posteriori statistics of trajectory sampling and known estimates for the sampling error. An optimal control problem of minimizing an integral regularized functional of dynamics and statistics residuals is introduced. Optimal synthesis is used to construct controls and trajectories that approximate a solution of the inverse problem. A numerical approximation method based on the method of characteristics for the Hamilton–Jacobi–Bellman equation and on the notion of minimax / viscosity solution is developed. Sufficient conditions are obtained under which the proposed approximations converge to a normal solution of the inverse problem under a matched vanishing of the approximation parameters (bounds for the sampling error, the regularizing parameter, the grid step in the state variable, and the integration step). Results of the numerical solution of problems of identification and control and trajectory recovery are presented for a mechanical model of gravitation under given statistics of phase coordinate sampling.

Keywords: identification, regularization method, residual functional, feedback, optimal synthesis, Hamilton–Jacobi–Bellman equation, characteristic system, minimax/viscosity solution.

1. Введение

Данная работы посвящена развитию концепции позиционного оптимального управления, предложенной Н. Н. Красовским [1;2], и ее приложениям к решению обратных задач динамики управляемых систем.

Для решения обратных задач в данной работе находят новое применение разработанные авторами ранее методы решения задач позиционного оптимального управления с интегрально-терминальной платой [3]. В основе методов лежит принцип максимума Понтрягина [4] и метод динамического программирования Беллмана [5].

Эти методы опираются также на современную теорию обобщенных (минимаксных/вязкостных) решений уравнений Гамильтона — Якоби [6], в частности на то положение, что обобщенное решение краевой задачи Коши для уравнения Беллмана совпадает с негладкой функцией

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14–01–00168), УрО РАН (проект 14–1–НП–348).

цены, значением которой в каждом возможном начальном состоянии является оптимальный результат в задаче управления, т. е. цена, которая может быть получена с помощью обобщенного метода характеристик Коши [7]. В основе предложенных алгоритмов численного решения задач оптимального управления лежат понятные процедуры интегрирования характеристической системы соответствующего уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана. Качество предложенных конструкций сеточного оптимального синтеза — закона управления по принципу обратной связи — оценивается согласно подходу, предложенному Н. Н. Красовским [1; 2].

Предложенные методы применимы как при решении задач оптимального управления предписанной продолжительности [8; 9], так и при решении различных типов краевых задач для уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана [5].

В данной работе рассматривается обратная задача динамики для нелинейной управляемой системы. Известна история замеров значений некоторой (базовой) траектории, порожденной неизвестным заранее управлением, причем отклонения замеров от траектории удовлетворяют известной оценке погрешностей замеров. Требуется восстановить управление в этой задаче с возмущенными (неточными) измерениями траектории, которое бы приближало управление, порождающее базовую траекторию, и имело наименьшую норму в L_2 . Решение этой задачи рассматривалось, например, в работе [10]. Предложенный там подход опирается на регуляризованную процедуру “управления с поводирем”, динамично развивающуюся *в прямом времени* и имеющую истоки в работах школы Н. Н. Красовского по теории позиционного управления. Этот метод может быть рассмотрен как вариант метода регуляризации А. Н. Тихонова. В данной работе предлагается другой подход, также опирающийся на теорию позиционного оптимального управления в задачах с регуляризованным интегральным функционалом невязки, но использующий *понятные процедуры* динамического программирования, метод характеристик и оптимальный синтез [8].

Получены достаточные условия, при которых с помощью оптимального синтеза строятся управления и траектории, которые аппроксимируют решение обратной задачи. Разработан численный метод аппроксимации, базирующийся на методе характеристик для уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана и концепции минимаксного/вязкостного решения. Получены также условия согласования параметров аппроксимации: оценки точности измерений, регуляризирующего параметра, шага сетки по фазовой переменной и шага интегрирования. Доказано, что при выполнении этих условий и стремлении к нулю параметров аппроксимации восстановленные траектории сходятся к базовой траектории в пространстве C , а восстановленные управления сходятся в L_2 к “нормальному” управлению, порождающему базовую траекторию.

В работе приведены результаты применения предложенного подхода для численного решения задач анализа и идентификации неизвестных параметров для модельных примеров с линейной и нелинейной динамикой. Исследованы возможности предлагаемого подхода при возмущениях входных данных и их неполноте. Предлагаются методы преодоления возникающих трудностей.

2. Постановка задачи

Рассмотрим управляемую систему вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)) + G(t, x(t))u(t), \quad t \in [0, T], \quad (2.1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор, управление $u \in \mathbb{R}^n$ стеснено ограничениями

$$u \in U = \{u_i \in [a_i^-, a_i^+], \quad a_i^- < a_i^+, \quad i = 1, 2, \dots, n\}. \quad (2.2)$$

2.1. Предположения

Задача рассматривается при следующих предположениях.

A1. Координаты $f_i(t, x)$, $G_{i,j}(t, x)$, $i, j \in \overline{1, n}$, вектор-функции $f(t, x)$ и матрицы-функции $G(t, x)$ определены и непрерывны в полосе $\Pi_T = [0, T] \times \mathbb{R}^n$, и в этой полосе выполняются условия подлинейного роста

$$|f_i(t, x)| \leq K_0(1 + \|x\|), \quad |G_{ij}(t, x)| \leq K_0(1 + \|x\|)$$

для константы $K_0 > 0$.

A2. Функции $f_i(t, x)$, $G_{i,j}(t, x)$, $i, j \in \overline{1, n}$, непрерывно дифференцируемы на $(0, T) \times \mathbb{R}^n$ и их частные производные $\frac{\partial f_i(t, x)}{\partial t}$, $\frac{\partial f_i(t, x)}{\partial x_k}$, $\frac{\partial G_{ij}(t, x)}{\partial t}$, $\frac{\partial G_{ij}(t, x)}{\partial x_k}$ продолжимы на любой компакт $D \subset \Pi_T$.

2.2. Невозмущенная обратная задача

Обозначим символом $\mathbf{U}[t_0, T]$ множество измеримых функций $u(\cdot): [t_0, T] \rightarrow U$, $t_0 \in [0, T]$, т. е. множество допустимых управлений.

Пусть известна $x_*(\cdot): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — некоторая фазовая траектория системы (2.1) (базовая траектория). Обратная задача динамики управляемой системы (2.1), (2.2) состоит в нахождении управления $u(\cdot) \in \mathbf{U}[0, T]$, порождающего траекторию системы (2.1) $x(t) = x(t; 0, x_*(0), u(\cdot))$ такую, что $x(t) = x_*(t)$ для всех $t \in [0, T]$.

Обозначим символом $\mathbb{U}$ ($\mathbb{U} \subset \mathbf{U}[0, T]$) множество допустимых управлений, решающих обратную задачу динамики для системы (2.1), (2.2). В дальнейшем символ L_2 будет обозначать пространство $L_2[0, T]$.

Из условий **A1**, **A2** вытекает справедливость леммы 1.

Лемма 1 [15]. Множество $\mathbf{U}[0, T]$ допустимых управлений замкнуто в L_2 .

Пользуясь леммой 1 и сильной выпуклостью нормы $\|u(\cdot)\|$ в L_2 , нетрудно доказать следующее утверждение.

Предложение. Множество $\mathbb{U}$ решений обратной задачи (2.1), (2.2) не пусто, выпукло и ограничено в L_2 . Более того, существует единственный элемент $u_*(\cdot) \in \mathbb{U}$ с минимальной нормой в L_2 .

Решение $u_*(\cdot) \in \mathbb{U}$ называется нормальным решением обратной задачи (2.1), (2.2).

В общем случае множество $\mathbb{U}$ состоит не из единственного элемента. Для определенности в качестве решения обратной задачи динамики управляемой системы будем искать ее нормальное решение.

2.3. Возмущенная обратная задача

Рассмотрим случай, когда известна непрерывная функция $y(\cdot): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — история замеров фазовой переменной $x_*(t)$, причем известно, что

$$(t, x_*(t)) \in \Omega_\delta = \{(t, x) \in \Pi_T: \|x - y(t)\| \leq \delta\}, \quad (2.3)$$

где параметр погрешности измерений $\delta > 0$, а символ $\|z\|$ означает евклидову норму конечномерного вектора z .

Рассмотрим компактные области $\Phi(\delta)$ и $\Psi(\alpha, \delta)$, $\alpha > 0$, $\delta \in (0, \delta_0]$, удовлетворяющие соотношениям

$$\Phi(\delta) = \left\{ (t, x_t): t \in [t_0, T], \|x_t - x(t; t_0, x_0, u(\cdot))\| \leq 2\delta, t_0 \in [0, T], u(\cdot) \in \mathbf{U}[t_0, T], (t_0, x_0) \in \Omega_\delta \right\},$$

$$\Psi(\alpha, \delta) \subset \Phi(\delta), \quad \text{dist}(\Psi(\alpha, \delta), \text{graph } x_*(\cdot)) \rightarrow 0 \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0,$$

где символ $\text{graph } x_*(\cdot)$ обозначает график функции $x_*(\cdot)$, символ $\text{dist}(\cdot)$ означает

$$\text{dist}(\Psi(\alpha, \delta), \text{graph } x_*(\cdot)) = \max_{t \in [0, T]} \min_{\psi_t: (t, \psi_t) \in \Psi(\alpha, \delta)} \|\psi_t - x_*(t)\|.$$

Возмущенная обратная задача состоит в том, чтобы как можно более точно восстановить по истории замеров $y(\cdot)$ базовое движение системы $x_*(\cdot)$, т.е. нужно построить управление $u^\delta(\cdot): [0, T] \rightarrow U$ и порождаемую им траекторию $x^\delta(\cdot): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ системы (2.1) такие, что

$$(t, x^\delta(t)) \in \Psi(\alpha(\delta), \delta),$$

где $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, причем при $\delta \rightarrow 0$ выполняются соотношения

$$\|x^\delta(\cdot) - x_*(\cdot)\|_C = \max_{t \in [0, T]} \|x^\delta(t) - x_*(t)\| \rightarrow 0,$$

$$\|u^\delta(\cdot) - u_*(\cdot)\|_{L_2}^2 = \int_0^T \|u^\delta(t) - u_*(t)\|^2 dt \rightarrow 0;$$

здесь $\|\cdot\|_C$ — норма в пространстве непрерывных функций, $\|\cdot\|_{L_2}$ — норма в пространстве L_2 .

3. Вспомогательные конструкции

Для решения возмущенной обратной задачи (2.1), (2.3) рассмотрим вспомогательные задачи оптимального управления.

3.1. Регуляризированная задача оптимального управления

Введем в рассмотрение вспомогательные задачи оптимального управления системой (2.1), (2.2) в областях $\Phi(\delta)$, имеющие целью минимизацию функционала невязки

$$I_{t_0, x_0}(u(\cdot)) = \int_{t_0}^T \left[-\frac{\|x(t) - y(t)\|^2}{2} + \frac{\alpha}{2} \|u(t)\|^2 \right] dt, \quad (3.1)$$

где $\alpha > 0$ — регуляризирующий параметр, $(t_0, x_0) \in \Phi(\delta)$, $x(t) = x(t; t_0, x_0, u(\cdot))$ — траектория системы (2.1), вышедшая из точки $x(t_0) = x_0$ под воздействием допустимого управления $u(\cdot): [t_0, T] \rightarrow U$. Отметим, что знак минус в подынтегральном выражении подсказан результатами численных экспериментов и выбран с целью обеспечения устойчивости решения обратной задачи по отношению к результатам измерений.

Для задачи оптимального управления (2.1), (2.2), (3.1) строится оптимальный синтез, т.е. позиционное управление [2], доставляющее минимум функционалу $I_{t_0, x_0}(u(\cdot))$ для всех $(t_0, x_0) \in \Phi(\delta)$. Конструкция оптимального синтеза определяется с помощью описанного далее обобщенного метода характеристик [3].

3.2. Характеристическая система

Гамильтониан $H^\alpha(t, x, s)$ для задачи (2.1), (2.2), (3.1) имеет вид

$$H^\alpha(t, x, s) = \min_{u \in U} \left[\langle s, f(t, x) \rangle + \langle s, G(t, x)u \rangle + \frac{\alpha}{2} \|u\|^2 - \frac{\|x - y(t)\|^2}{2} \right],$$

где символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение двух конечномерных векторов. Нетрудно видеть, что справедливы соотношения

$$H^\alpha(t, x, s) = \langle s, f(t, x) \rangle - \frac{\|x - y(t)\|^2}{2} + \langle s, G(t, x)u^\alpha \rangle + \frac{\alpha}{2} \|u^\alpha\|^2.$$

Здесь $u^\alpha = (u_1^\alpha, \dots, u_n^\alpha) :$

$$u_i^\alpha = \begin{cases} a_i^-, & \text{если } r_i^\alpha(t, x, s) \leq a_i^-, \\ r_i^\alpha(t, x, s), & \text{если } r_i^\alpha(t, x, s) \in [a_i^-, a_i^+], \\ a_i^+, & \text{если } r_i^\alpha(t, x, s) \geq a_i^+, \end{cases} \quad (3.2)$$

где

$$r_i^\alpha(t, x, s) = -\frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^n s_j G_{ji}(t, x), \quad i \in \overline{1, n}.$$

Введение регуляризующего параметра α при любом векторе $s \in \mathbb{R}^n$ доставляет единственный аргумент $u^\alpha(t, x, s)$ операции минимума в выражении для гамильтониана $H^\alpha(t, x, s)$ и тем самым обеспечивает непрерывность этого аргумента $u^\alpha(t, x, s)$ на $\text{cl } \Pi_T \times \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим характеристическую систему для задачи (2.1), (2.2), (3.1):

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H^\alpha(t, x, s)}{\partial s_i}, \quad \frac{ds_i}{dt} = -\frac{\partial H^\alpha(t, x, s)}{\partial x_i}, \quad i \in \overline{1, n}, \quad t \in [0, T], \quad (3.3)$$

с краевыми условиями

$$x_i(T) = \xi_i, \quad s_i(T) = 0, \quad i \in \overline{1, n}, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (3.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \frac{\partial H^\alpha(t, x, s)}{\partial s_i} &= f_i(t, x) + \sum_{j=1}^n G_{ij}(t, x) u_j^\alpha(t, x, s), \\ \frac{\partial H^\alpha(t, x, s)}{\partial x_i} &= -(x_i - y_i(t)) + \langle s, D_{x_i} f(t, x) \rangle + \langle s, D_{x_i} G(t, x) u^\alpha(t, x, s) \rangle + R_i(t, x, s), \\ R_i(t, x, s) &= \left\langle \left(G^\top(t, x) s + \alpha u^\alpha(t, x, s) \right), D_{x_i} u^\alpha(t, x, s) \right\rangle, \\ D_{x_i} f(t, x) &= \left(\frac{\partial f_1(t, x)}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial f_n(t, x)}{\partial x_i} \right), \\ D_{x_i} G(t, x) &= \left\{ \left(\frac{\partial G_{kj}(t, x)}{\partial x_i} \right) \right\}, \quad k, j \in \overline{1, n}, \\ D_{x_i} u^\alpha(t, x, s) &= \left(\frac{\partial u_1^\alpha(t, x, s)}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial u_n^\alpha(t, x, s)}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

символ $^\top$ означает операцию транспонирования.

Для любого $j \in \overline{1, n}$ из (3.2) вытекают следующие соотношения.

- Если на интервале времени $[t_1, t_2] \subset [0, T]$ выполняется

$$u_j^\alpha(t, x, s) = r_j^\alpha(t, x, s) \in [a_j^-, a_j^+],$$

то для $R_i(t, x, s)$, $i = 1, \dots, n$, (3.5) в выражении скалярного произведения j -й элемент суммы равен нулю, так как

$$G_j^\top(t, x) s + \alpha u_j^\alpha(t, x, s) = 0, \quad (3.6)$$

где символом $G_j^\top(t, x)$ обозначена j -я строка матрицы $G^\top(t, x)$.

- Если же на интервале $(t_1, t_2) \subset [0, T]$

$$\begin{aligned} \text{либо } r_j^\alpha(t, x(t), s(t)) &\leq a_j^-, & u_j^\alpha(t, x(t), s(t)) &\equiv a_j^-, \\ \text{либо } r_j^\alpha(t, x, s) &\geq a_j^+, & u_j^\alpha(t, x(t), s(t)) &\equiv a_j^+, \end{aligned}$$

то $D_{x_i} u_j^\alpha(t, x(t), s(t)) = 0$.

Из этого соотношения и (3.5), (3.6) вытекает, что $R_i(t, x, s) = 0 \forall i \in \overline{1, n}$.

Суммируем вышесказанное в виде следующего утверждения.

Лемма 2. Характеристическая система (3.3), (3.4) для задачи (2.1), (2.2), (3.1) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + G(t, x)u^\alpha(t, x, s), \quad (3.7)$$

$$\frac{ds}{dt} = (x - y(t)) - \left[s^\top D_x f(t, x) + s^\top D_x G(t, x)u^\alpha(t, x, s) \right], \quad (3.8)$$

$$s^\top D_x G(t, x)u^\alpha(t, x, s) = \left(s^\top D_{x_1} G(t, x)u^\alpha(t, x, s), \dots, s^\top D_{x_n} G(t, x)u^\alpha(t, x, s) \right). \quad \square$$

3.3. Свойства решений характеристической системы

Из условий **A1**, **A2** вытекает справедливость следующих утверждений.

Лемма 3. Пусть в задаче (2.1), (3.1) выполнены условия **A1**, **A2**, тогда можно указать такую константу $K_2 = K_2(\delta, \alpha) > 0$, что для тех характеристик (3.7), (3.8), у которых $(T, x(T, \xi)) \in \Phi(\delta)$, при всех $t \in [0, T]$ справедливы соотношения

$$|x_i(t, \xi)| \leq K_2, \quad \left| \frac{dx_i(t, \xi)}{dt} \right| \leq K_2, \quad t \in [0, T], \quad i \in \overline{1, n};$$

$$|s_i(t, \xi)| \leq K_2, \quad \left| \frac{ds_i(t, \xi)}{dt} \right| \leq K_2, \quad t \in [0, T], \quad i \in \overline{1, n}.$$

Доказательство. При выполнении условий **A1**, **A2** из свойств множества решений системы (2.1), (2.2) (см. [13]) и леммы Гронуолла [11] вытекает, что $\Phi(\delta)$ компактно в Π_T , и из условия $(T, x(T, \xi)) \in \Phi(\delta)$ вытекает справедливость следующих оценок:

$$|\xi_i| \leq \|\xi\| \leq K_2^0 = (1 + n \max_{0 \leq t \leq T} \|y(t)\| + \delta_0) \exp(nK_0(1 + nA_*)T) + 2\delta_0,$$

где $i = 1, \dots, n$, $A_* = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i^\pm|$.

Снова применяя результаты работы [13] и лемму Гронуолла [11] для решений характеристической системы с краевыми условиями

$$x(T, \xi) = \xi_i, \quad s_i(T, \xi) = 0, \quad i \in \overline{1, n}, \quad \|\xi\| \leq K_2^0,$$

получаем при всех $t \in [0, T]$, $i \in \overline{1, n}$ следующие оценки:

$$|x_i(t, \xi)| \leq K_2^1 = (1 + nK_2^0) \exp(nK_0(1 + nA_*)T),$$

$$\left| \frac{dx_i(t, \xi)}{dt} \right| \leq K_2^2 = K_*(1 + K_2^1(1 + nA_*)(1 + K_2^1)),$$

$$|s_i(t, \xi)| \leq K_2^3 = \frac{n\alpha}{(K_2^1 + A_*)} \exp((K_2^1 + A_*)T),$$

$$\left| \frac{ds_i(t, \xi)}{dt} \right| \leq K_2^4 = n\alpha + K_1(1 + A_*),$$

где $K_1 > 0$ — константа, определенная на множестве

$$Q(\delta_0) = \{(t, x) : t \in [0, T], \|x\| \leq K_2^1 + 2\delta_0\}$$

из условий **A1**, **A2** таким образом, что справедливы соотношения

$$\max_{i,j,k \in \overline{1,n}} \max_{(t,x) \in Q(\delta_0)} \{|f_i(t, x)|, |g_{i,j}(t, x)|\} \leq K_1,$$

$$\max_{i,j,k \in \overline{1,n}} \max_{(t,x) \in Q(\delta_0)} \left\{ \left| \frac{\partial f_i(t, x)}{\partial t} \right|, \left| \frac{\partial f_i(t, x)}{\partial x_k} \right|, \left| \frac{\partial g_{ij}(t, x)}{\partial t} \right|, \left| \frac{\partial g_{ij}(t, x)}{\partial x_k} \right| \right\} \leq K_1.$$

В итоге $K_2 = \max\{K_2^1, K_2^2, K_2^3, K_2^4\}$. □

Лемма 4. Пусть в задаче (2.1), (3.1) выполнены условия **A1**, **A2**, тогда экстремальные управления $u^\alpha(t, x, s)$ (3.2) обладают следующими свойствами:

- функции $(t, x, s) \rightarrow u_i^\alpha(t, x, s)$, $i \in \overline{1, n}$ непрерывны в $Q(\delta_0) \times S(\delta_0)$, где

$$S(\delta_0) = \{s \in \mathbb{R}^n : |s_i| \leq K_2^3, i \in \overline{1, n}\};$$

- для любых $i \in \overline{1, n}$, $(t', x'), (t'', x'') \in Q(\delta_0)$, $s', s'' \in S(\delta_0)$ справедливы оценки

$$|u_i^\alpha(t', x', s') - u_i^\alpha(t'', x'', s'')| \leq \frac{1}{\alpha} \varphi(|t' - t''|, \|x' - x''\|, \|s' - s''\|),$$

где

$$\varphi(|t' - t''|, \|x' - x''\|, \|s' - s''\|) \rightarrow 0 \text{ при } |t' - t''| \rightarrow 0, \|x' - x''\| \rightarrow 0, \|s' - s''\| \rightarrow 0.$$

Доказательство. Справедливость этой леммы следует из определения экстремальных управлений (3.2) и оценок из предыдущей леммы. Функция $\varphi(\cdot, \cdot, \cdot)$ может быть выбрана следующим образом:

$$\varphi(|t' - t''|, \|x' - x''\|, \|s' - s''\|) = K_1(\|s' - s''\|) + K_1 n^2(\|x' - x''\|) + K_1 n^2 K_2^3 |t' - t''|. \quad \square$$

3.4. Решение задачи оптимального позиционного управления

Построим для задачи (2.1), (2.2), (3.1), $\|x - y(T)\| \leq \delta$ при $\delta \in (0, \delta_0]$, $\alpha > 0$, оптимальную обратную связь (оптимальный синтез) $(t, x) \rightarrow u^0(t, x) : \Phi(\delta_0) \rightarrow U$ и компактное в $C^n[0, T]$ множество $X^0(\alpha, \delta)$ порождаемых им оптимальных траекторий $x^0(\cdot)$ задачи (2.1), (2.2), (3.1) таких, что $\|x^0(0) - y(0)\| \leq \delta + \alpha$.

Введем множество

$$\Psi(\alpha, \delta) = \{(t, x) : t \in [0, T], x = x^0(t), x^0(\cdot) \in X^0(\alpha, \delta)\}. \quad (3.9)$$

Как известно, множество $X^0(\alpha, \delta)$ является подмножеством множества $X(\alpha, \delta)$ всех фазовых характеристик $x(\cdot, \xi)$ (3.3) таких, что $\|x(T, \xi) - y(T)\| \leq \delta$, $\|x(0, \xi) - y(0)\| \leq \delta + \alpha$.

Выделим те характеристики $x^\delta(\cdot) = x(\cdot, \xi) \in X(\alpha, \delta)$ и порождающие их реализации оптимальных управлений $u_\delta^\alpha[t] = u^\alpha(t, x^\delta(t), s^\delta(t))$, для которых функционал платы (3.1) принимает минимальное значение по множеству $X(\alpha, \delta)$:

$$I_{t_0, x^\delta(t_0)}(u_\delta^\alpha[\cdot]) = \min_{x(\cdot, \xi) \in X(\alpha, \delta)} I_{t_0, x(t_0)}(u_\delta^\alpha[\cdot]) = V(\alpha, \delta), \quad (3.10)$$

$$u_\delta^\alpha[\cdot] = u_\delta^\alpha(\cdot, x(\cdot, \xi), s(\cdot, \xi)).$$

Основным результатом данной работы является доказательство того, что эти характеристики $x^\delta(\cdot, \xi)$ и порождающие их реализации оптимальных управлений $u_\delta^\alpha[t] = u^\alpha(t, x^\delta(t), s^\delta(t))$ доставляют решение возмущенной обратной задачи динамики. Этому доказательству посвящен следующий раздел работы.

4. Решение аппроксимационной обратной задачи

4.1. Вспомогательные результаты

Приведем следующие полезные результаты.

Лемма 5 [12]. Квадрат нормы в L_2 слабо полунепрерывен снизу.

Для оценки результатов численного решения обратной задачи введем необходимые обозначения.

Полагаем, что h — шаг численного интегрирования характеристической системы,

$$\Gamma = \{t_i = ih\}, \quad i \in \overline{0, N(h)}, \quad (N(h) + 1)h = T.$$

Пусть $x_h(\cdot)$, $s_h(\cdot)$ — численные аппроксимации решения $x(t) = x(t, \xi)$, $s(t) = s(t, \xi)$ характеристической системы (3.3), (3.4) с ограничением

$$(t, x(t)) \in \Phi(\delta_0) \subset Q(\delta_0), \quad t \in [0, T],$$

и краевыми условиями

$$x_h(T) = \xi, \quad s_h(T) = 0, \quad \|\xi - y(T)\| \leq \delta,$$

$\xi \in \{\xi_i: i = 1, \dots, M(\alpha, \delta)\}$ — сетка в фазовом пространстве с шагом $\Delta\xi$, таким что $\Delta\xi \leq \delta \exp\left(-\frac{KT}{\alpha}\right)$, где K — константа, рассчитанная по входным данным, $M(\alpha, \delta)$ — количество узлов сетки в фазовом пространстве.

Из результатов работы [3; 14] вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 6. Пусть $x_h(t)$, $s_h(t)$ — численные аппроксимации (ломаные Эйлера) решения $x(t)$, $s(t)$ характеристической системы (3.3), (3.4) такие, что $(t, x(t)) \in Q(\delta_0)$. Тогда существуют такие константы M_1 , M_2 , рассчитанные по входным данным, что для всех $t \in [0, T]$ выполняется

$$\|x_h(t) - x(t)\| \leq M_1 h, \quad \|s_h(t) - s(t)\| \leq M_2 h.$$

4.2. Основной результат

Рассмотрим функцию $u_{\delta, h}^\alpha(t, x_h(t), s_h(t)) \equiv u_\delta^\alpha(t_i, x_h(t_i), s_h(t_i))$ при $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i \in \overline{0, N(h)}$. Введем величину

$$\Delta I = \int_0^T \frac{\alpha}{2} [\|u_{\delta, h}^\alpha(t, x_h(t), s_h(t))\|^2 - \|u_*(t)\|^2] dt = \Delta I_1 + \Delta I_2 + \Delta I_3,$$

где

$$\begin{aligned} \Delta I_1 &= \frac{\alpha}{2} \sum_{i=0}^{N(h)} \int_{ih}^{(i+1)h} \|u_\delta^\alpha(t_i, x_h(t_i), s_h(t_i))\|^2 - \|u_\delta^\alpha(t, x_h(t), s_h(t))\|^2 dt, \\ \Delta I_2 &= \frac{\alpha}{2} \int_0^T \|u_\delta^\alpha(t, x_h(t), s_h(t))\|^2 - \|u_\delta^\alpha(t, x(t), s(t))\|^2 dt, \\ \Delta I_3 &= \frac{\alpha}{2} \int_0^T \|u_\delta^\alpha(t, x(t), s(t))\|^2 - \|u_*(t)\|^2 dt. \end{aligned}$$

Воспользовавшись выпуклостью квадрата евклидовой нормы и неравенством треугольника, продолжим оценки для ΔI_1 и ΔI_2 :

$$\Delta I_1 \leq \alpha \sqrt{n} A_* \sum_{i=0}^{N(h)} \int_{ih}^{(i+1)h} \|u_\delta^\alpha(t_i, x_h(t_i), s_h(t_i)) - u_\delta^\alpha(t, x_h(t), s_h(t))\| dt,$$

$$\Delta I_2 \leq \alpha \sqrt{n} A_* \int_0^T \|u^\delta(t, x_h(t), s_h(t)) - u^\delta(t, x(t), s(t))\| dt.$$

Используя выражения для ΔI , ΔI_1 , ΔI_2 и леммы 3–6, докажем следующую теорему об оценке решения аппроксимационной обратной задачи.

Введем функции

$$\phi(\alpha, \delta, h) = TM_1h \left(\frac{TM_1h}{2} + 2\delta + \alpha + r(\alpha, \delta) \right), \quad (4.1)$$

$$\rho(\delta, h) = nA_*T [\varphi(h, K_2h, K_2h) + \varphi(0, M_1h, M_2h)], \quad (4.2)$$

где $r(\alpha, \delta) = \text{dist}(\Psi(\alpha, \delta), \text{graph } y(\cdot))$, множество $\Psi(\alpha, \delta)$ определено формулой (3.9).

Теорема. Пусть в обратной задаче динамики (2.1)–(2.3) выполнены условия **A1**, **A2**, параметры задачи $h = h(\delta) > 0$, $\alpha = \alpha(\delta) > 0$, $\delta > 0$, удовлетворяют соотношениям

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{2}{\alpha} \left(\phi(\alpha, \delta, h) + \rho(\delta, h) + \frac{T}{2}(M_1h + \alpha + \delta + r(\alpha, \delta))^2 \right) = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} h(\delta) = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0,$$

и пусть $x_h(\cdot)$, $u_h(\cdot)$ — численные аппроксимации точного решения $x^\delta(\cdot)$, $u_\delta^\alpha(\cdot)$ задачи (3.10). Тогда для функций $x_h(\cdot)$, $u_h(\cdot)$ выполняются равенства

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|x_{h(\delta)}(\cdot) - x_*(\cdot)\|_C = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \|u_{h(\delta)}(\cdot) - u_*(\cdot)\|_{L_2} = 0.$$

Доказательство. Выберем область $\Psi(\alpha, \delta) \subset Q(\delta_0)$ как множество точек, лежащих на графиках оптимальных траекторий $x^\delta(\cdot)$ с начальным условием $x^\delta(t_0) = x_0$, $\|x_0 - y(t_0)\| \leq \delta$ при фиксированном α . Выберем $\alpha = \alpha(\delta)$ из условия (3.9) и получим при всех $t \in [t_0, T]$ для оптимальной траектории $x^\delta(t)$ и ее аппроксимации $x_h(t)$ следующие оценки:

$$\|x^\delta(t) - y(t)\| \leq \delta + \alpha + r(\alpha(\delta), \delta), \quad \|x^\delta(t) - x_*(t)\| \leq 2\delta + \alpha + r(\alpha(\delta), \delta).$$

Пользуясь леммой 6, оценим отклонение численной аппроксимации $x_h(\cdot)$ от исходной траектории $x_*(\cdot)$: $\|x_h(t) - x_*(t)\| \leq \|x_h(t) - x^\delta(t)\| + \|x^\delta(t) - x_*(t)\| \leq M_1h + 2\delta + \alpha + r(\alpha(\delta), \delta)$. Тогда $\|x_h(\cdot) - x_*(\cdot)\|_C \leq M_1h + 2\delta + \alpha + r(\alpha(\delta), \delta) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$.

Оценим численную аппроксимацию $\tilde{V}(\alpha, \delta, h)$ величины $V(\alpha, \delta)$ (3.10):

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\alpha, \delta, h) &= \int_0^T -\frac{\|x_h(t) - y(t)\|^2}{2} + \frac{\alpha \|u_h(t)\|^2}{2} dt \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^T \|x_h(t) - x^\delta(t)\|^2 + 2\|x_h(t) - x^\delta(t)\| \|x^\delta(t) - y(t)\| dt + \int_0^T -\frac{\|x^\delta(t) - y(t)\|^2}{2} + \frac{\alpha \|u_h(t)\|^2}{2} dt. \end{aligned}$$

Используя включение $(t, x^\delta(t)) \in \Psi(\alpha(\delta), \delta) \subset \Phi(\delta)$ и лемму 6, получаем

$$\frac{1}{2} \int_0^T \|x_h(t) - x^\delta(t)\|^2 + 2\|x_h(t) - x^\delta(t)\| \|x^\delta(t) - y(t)\| dt \leq \frac{T(M_1h)^2}{2} + TM_1h(2\delta + \alpha + r(\alpha(\delta), \delta)).$$

Подставив обозначение $\phi(\alpha, \delta, h)$ вместо $TM_1h \left(\frac{TM_1h}{2} + 2\delta + \alpha + r(\alpha, \delta) \right)$, имеем

$$\tilde{V}(\alpha, \delta, h) \leq \phi(\alpha(\delta), \delta, h) + \int_0^T -\frac{\|x^\delta(t) - y(t)\|^2}{2} + \frac{\alpha \|u_h(t)\|^2}{2} dt.$$

Используя оценки ΔI_1 , ΔI_2 , оценим $\frac{\alpha}{2} \int_0^T \|u_h(t)\|^2 dt$:

$$\frac{\alpha}{2} \int_0^T \|u_h(t)\|^2 \leq \frac{\alpha}{2} \int_0^T \|u_\delta^\alpha[t]\|^2 dt + \alpha \sqrt{n} A_* \int_0^T \|u_h(t) - u_\delta^\alpha[t]\| dt \leq \frac{\alpha}{2} \int_0^T \|u_\delta^\alpha[t]\|^2 dt + \frac{\alpha}{2} \psi(\alpha, \delta, h),$$

где $u_h(t) = u^\alpha(t_i, x_h(t_i), s_h(t_i))$, $u_\delta^\alpha[t] = u^\alpha(t, x_h(t), s_h(t))$;

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} \psi(\alpha, \delta, h) &\leq \alpha \sqrt{n} A_* \sum_{i=0}^{N(h)} \int_{ih}^{(i+1)h} \|u^\alpha(t_i, x_h(t_i), s_h(t_i)) - u^\alpha(t, x_h(t), s_h(t))\| dt \\ &\quad + \alpha \sqrt{n} A_* \int_0^T \|u^\alpha(t, x_h(t), s_h(t)) - u^\alpha(t, x^\delta(t), s^\delta(t))\| dt \\ &\leq \alpha \sqrt{n} A_* \left[\sum_{i=0}^{N(h)} \int_{ih}^{(i+1)h} \|u^\alpha(t_i, x_h(t_i), s_h(t_i)) - u^\alpha(t, x_h(t), s_h(t))\| dt \right. \\ &\quad \left. + \frac{T\sqrt{n}}{\alpha} \varphi(0, \|x_h(\cdot) - x^\delta(\cdot)\|_C, \|s_h(\cdot) - s^\delta(\cdot)\|_C) \right] \\ &\leq n A_* T [\varphi(h, K_2 h, K_2 h) + \varphi(0, M_1 h, M_2 h)] = \rho(\delta, h). \end{aligned}$$

Получаем

$$\int_0^T -\frac{\|x_h(t) - y(t)\|^2}{2} + \frac{\alpha \|u_h(t)\|^2}{2} dt \leq \phi(\alpha(\delta), \delta, h) + \rho(\delta, h) + \int_0^T -\frac{\|x^\delta(t) - y(t)\|^2}{2} + \frac{\alpha \|u_\delta^\alpha(t)\|^2}{2} dt.$$

Интеграл в последнем выражении совпадает с функционалом $I_{0,x^\delta(0)}(u_\delta^\alpha(\cdot))$ (3.10). Так как траектория $x^\delta(\cdot)$ и управление $u_\delta^\alpha[\cdot]$ – решение задачи оптимального управления (2.1), (3.1), то значение функционала $I_{0,x^\delta(0)}(u_\delta^\alpha(\cdot))$ будет не больше чем $I_{0,x_*(0)}(u_*(\cdot))$. Поэтому выполняется неравенство

$$\int_0^T -\frac{\|x^\delta(t) - y(t)\|^2}{2} + \frac{\alpha \|u_\delta^\alpha[t]\|^2}{2} dt \leq \int_0^T -\frac{\|x_*(t) - y(t)\|^2}{2} + \frac{\alpha \|u_*(t)\|^2}{2} dt \leq \frac{\alpha}{2} \|u_*\|_{L_2}^2.$$

Собирая все вместе, получаем

$$\tilde{V}(\alpha, \delta, h) = \int_0^T -\frac{\|x_h(t) - y(t)\|^2}{2} + \frac{\alpha \|u_h(t)\|^2}{2} dt \leq \phi(\alpha(\delta), \delta, h) + \rho(\delta, h) + \frac{\alpha}{2} \|u_*\|_{L_2}^2.$$

Оценим интеграл $\tilde{V}(\alpha, \delta, h)$ снизу, используя включение $(t, x^\delta(t)) \in \Omega_\delta$ и лемму 6

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\alpha, \delta, h) &\geq -\frac{T(M_1 h)^2}{2} - T[\delta + \alpha + r(\alpha(\delta), \delta)] + \int_0^T \frac{\alpha \|u_h(t)\|^2}{2} dt \\ &\geq -\frac{T}{2} [M_1 h + \alpha + \delta + r(\alpha(\delta), \delta)]^2 + \frac{\alpha}{2} \|u_h\|_{L_2}^2. \end{aligned}$$

В итоге имеем

$$\|u_h\|_{L_2}^2 \leq \frac{2}{\alpha} \left(\phi(\alpha(\delta), \delta, h) + \rho(\delta, h) + \frac{T}{2} [M_1 h + \alpha + \delta + r(\alpha(\delta), \delta)]^2 \right) + \|u_*\|_{L_2}^2.$$

Семейство функций $u_h(\cdot) \in \mathbb{U}$, $h > 0$, $\delta > 0$, ограничено в L_2 , поэтому существует последовательность $\delta_k \rightarrow 0$, $h_k = h(\delta_k) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, такая, что $u_k(\cdot) = u_{h_k}^{\delta_k}(\cdot)$ слабо сходится к элементу $v_*(\cdot)$. Согласно лемме 1 $v_*(\cdot) \in \mathbf{U}[0, T]$.

Докажем, что $v_* \in \mathbb{U} = \{u \in \mathbf{U}[0, T] : x(t, 0, x_*(0), u(\cdot)) = x_*(t)\}$. Имеем

$$\begin{aligned} x_k(t_{i+1}) &= x_k(t_i) - h_k [G(t_i, x_k(t_i))u_k(t_i) + f(t_i, x_k(t_i))], \\ x_k(t_{i+1}) &= x_k(T) - h_k \sum_{j=i}^N [G(t_j, x_k(t_j))u_k(t_j) + f(t_j, x_k(t_j))] d\tau. \end{aligned}$$

Из $\|x_k(\cdot) - x_*(\cdot)\|_C \rightarrow 0$ и слабой сходимости $u_k(\cdot)$ к $v_*(\cdot)$ в L_2 , $k \rightarrow \infty$, следует

$$x_*(t) = x_*(T) - \int_t^T [G(\tau, x_*(\tau))v_*(\tau) + f(\tau, x_*(\tau))] d\tau, \quad t \in [0, T].$$

Получаем, что $v_*(\cdot) \in \mathbb{U}$. Согласно лемме 5, $\|v_*(\cdot)\|_{L_2}^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|u_k(\cdot)\|_{L_2}^2$. Из того, что $u_*(\cdot)$ — элемент с минимальной нормой в $\mathbb{U}$, получаем

$$\|u_*(\cdot)\|_{L_2}^2 \leq \|v_*(\cdot)\|_{L_2}^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|u_k(\cdot)\|_{L_2}^2 \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|u_k(\cdot)\|_{L_2}^2 \leq \|u_*(\cdot)\|_{L_2}^2.$$

Следовательно, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k(\cdot)\|_{L_2}^2 = \|u_*(\cdot)\|_{L_2}^2 = \|v_*(\cdot)\|_{L_2}^2$. Так как нормальное решение $u_*(\cdot)$ единственно в $\mathbb{U}$, то $u_*(\cdot) = v_*(\cdot)$.

Получили, что семейство функций $u_h(\cdot)$, $h > 0$, имеет единственную предельную точку $u_*(\cdot)$, причем $\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h(\cdot)\|_{L_2} = \|u_*(\cdot)\|_{L_2}$. Тогда, используя слабую сходимость $u_k(\cdot)$ к $u_*(\cdot)$ в L_2 , выводим окончательную оценку

$$\|u_h(\cdot) - u_*(\cdot)\|_{L_2}^2 \leq \|u_h(\cdot)\|_{L_2}^2 - 2\langle u_h(\cdot), u_*(\cdot) \rangle + \|u_*(\cdot)\|_{L_2}^2 \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

Теорема доказана. $\square$

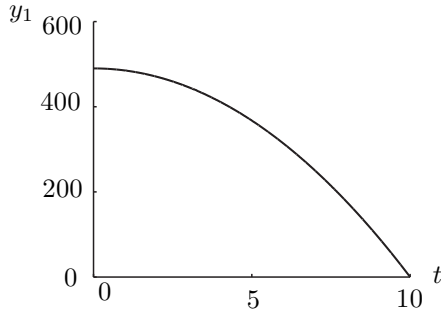
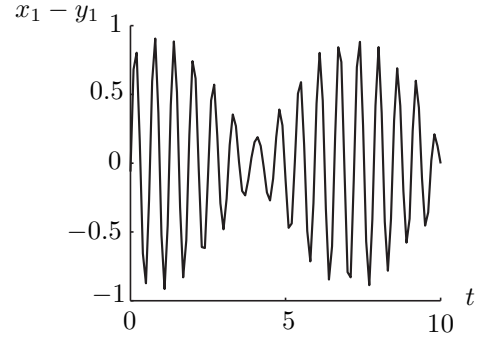
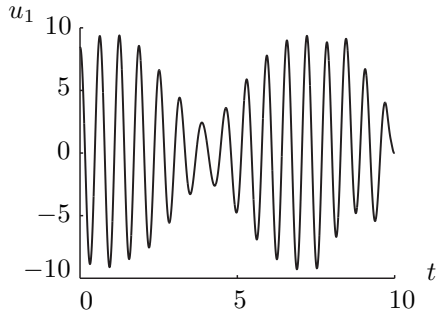
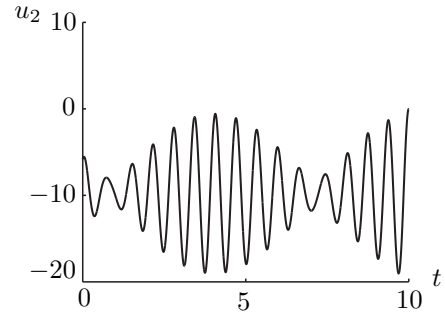
5. Пример 1 (линейная модель с полной информацией)

Рассматривается модель свободного падения тела

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + u_1, \quad \dot{x}_2(t) = u_2, \quad t \in [0.0, T], \quad u \in U = \{(u_1, u_2) : u_i \in [-100, 100], \quad i = 1, 2\}. \quad (5.3)$$

Задана история замеров траектории движения $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$, $y_1(t) = -\frac{gt^2}{2} + \frac{980}{2}$, $y_2(t) = -gt$, где $g = 9.8$. Требуется построить управление и траекторию системы, максимально близкую к заданной истории замеров. Таким образом, нужно восстановить постоянное управление $u = (u_1, u_2) \equiv (0, -g)$. Для решения обратной задачи вводится задача оптимального управления с функционалом платы

$$I(0.0, x_0; u(\cdot)) = \int_{0.0}^T -\frac{(x_1(t) - y_1(t))^2 + (x_2(t) - y_2(t))^2}{2} + \alpha \frac{u_1^2(t) + u_2^2(t)}{2} dt.$$

Рис. 1. Базовая траектория $y_1(t)$.Рис. 2. Разница $x_1(t) - y_1(t)$, $h = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-2}$.Рис. 3. Управление $u_1(t)$, $h = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-2}$.Рис. 4. Управление $u_2(t)$, $h = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-2}$.

Характеристическая система имеет следующий вид:

$$\frac{d\hat{x}_1}{dt} = \hat{x}_2 - \frac{\hat{p}_1}{\alpha}, \quad \frac{d\hat{x}_2}{dt} = -\frac{\hat{p}_2}{\alpha}, \quad \frac{d\hat{p}_1}{dt} = \hat{x}_1 - y_1(t), \quad \frac{d\hat{p}_2}{dt} = \hat{x}_2 - y_2(t) - \hat{p}_1,$$

с граничными условиями $\hat{x}_1(T, \xi) \in [-0.01, 0.01]$, $\hat{x}_2(T, \xi) = -98$, $\hat{p}_1(T, \xi) = 0$, $\hat{p}_2(T, \xi) = 0$.

На рис. 1–4 представлены результаты численного решения задачи при значениях параметров $T = 10.0$, $h = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-2}$. На рис. 1 — график базовой траектории $y_1(t)$. Для $h = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-2}$ на рис. 2 — график разности между базовой траекторией $y_1(t)$ и восстановленной траекторией $x_1(t)$, на рис. 3, 4 — графики построенных управлений $(u_1(t), u_2(t))$.

6. Пример 2 (линейная модель с неполной информацией)

Исследуется управляемая система (5.3). Задана неполная история замеров траектории движения $y_1(t) = -\frac{gt^2}{2} + \frac{980}{2}$, где $g = 9.8$. Требуется восстановить постоянное управление $u = (u_1, u_2) \equiv (0, -g)$. Для решения обратной задачи вводится задача оптимального управления с функционалом платы

$$I(0.0, x_0; u(\cdot)) = \int_{0.0}^T -\frac{(x_1(t) - y_1(t))^2}{2} + \alpha \frac{u_1^2(t) + u_2^2(t)}{2} dt.$$

Характеристическая система имеет следующий вид:

$$\frac{d\hat{x}_1}{dt} = \hat{x}_2 - \frac{\hat{p}_1}{\alpha}, \quad \frac{d\hat{x}_2}{dt} = -\frac{\hat{p}_2}{\alpha}, \quad \frac{d\hat{p}_1}{dt} = \hat{x}_1 - y_1(t), \quad \frac{d\hat{p}_2}{dt} = -\hat{p}_1,$$

с граничными условиями $\hat{x}_1(T, \xi) \in [-0.01, 0.01]$, $\hat{x}_2(T, \xi) = -98$, $\hat{p}_1(T, \xi) = 0$, $\hat{p}_2(T, \xi) = 0$.

На рис. 5–8 представлены результаты численного решения задачи для значений параметров $T = 10.0$, $h = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-2}$. На рис. 5 — график базовой траектории $y_1(t)$ (нижняя

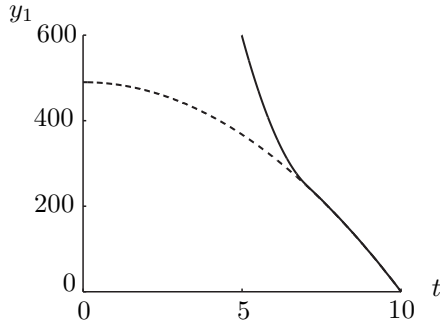


Рис. 5. Базовая траектории $y_1(t)$ (нижняя) и восстановленная траектория $x_1(t)$ (верхняя).

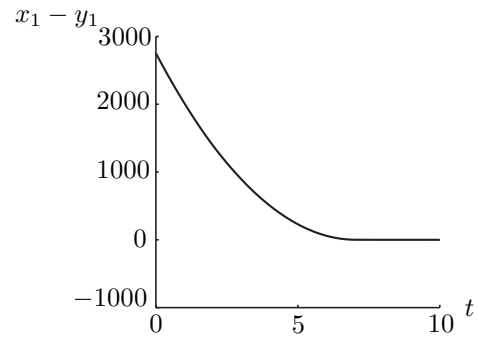


Рис. 6. Разница $x_1(t) - y_1(t)$, $h = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-2}$.

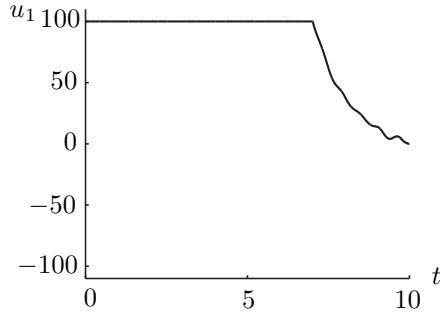


Рис. 7. Управление $u_1(t)$, $h = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-2}$.

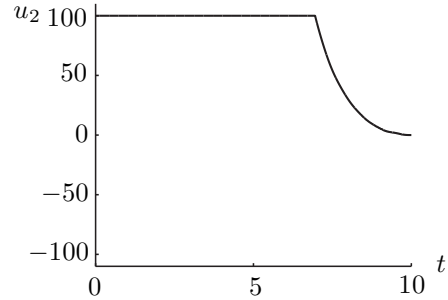


Рис. 8. Управление $u_2(t)$, $h = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-2}$.

кривая) и восстановленной траектории $x_1(t)$ (верхняя кривая). На рис. 6 — график разности между базовой траекторией $y_1(t)$ и восстановленной траекторией $x_1(t)$, на рис. 7, 8 — графики построенных управлений ($u_1(t)$, $u_2(t)$).

7. Пример 3 (линейная модель с восстановлением неполной информации)

Исследуется управляемая система (5.3) с ограничениями $U = \{(u_1, u_2): u_1 \in [0, 1], u_2 \in [-10, -9]\}$. Задана неполная история замеров траектории движения $y_1(t) = -\frac{gt^2}{2} + \frac{980}{2}$, где $g = 9.8$. Требуется восстановить постоянное управление $u = (u_1, u_2) \equiv (0, -g)$. Для решения обратной задачи вводится простая модель значений второй координаты $y_2(t) = \frac{y_1(T) - y_1(0)}{T}$. Функционал платы имеет вид

$$I(0.0, x_0; u(\cdot)) = \int_{0.0}^{10.0} -\frac{(x_1(t) - y_1(t))^2 + (x_2(t) - y_2(t))^2}{2} + \alpha \frac{u_1^2(t) + u_2^2(t)}{2} dt.$$

Характеристическая система имеет следующий вид:

$$\frac{d\hat{x}_1}{dt} = \hat{x}_2 - \frac{\hat{p}_1}{\alpha}, \quad \frac{d\hat{x}_2}{dt} = -\frac{\hat{p}_2}{\alpha}, \quad \frac{d\hat{p}_1}{dt} = \hat{x}_1 - y_1(t), \quad \frac{d\hat{p}_2}{dt} = \hat{x}_2 - y_2(t) - \hat{p}_1,$$

с граничными условиями $\hat{x}_1(T, \xi) \in [-0.01, 0.01]$, $\hat{x}_2(T, \xi) = -98$, $\hat{p}_1(T, \xi) = 0$, $\hat{p}_2(T, \xi) = 0$.

На рис. 9–12 представлены результаты численного решения задачи для значений параметров $T = 10.0$, $h = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-2}$. На рис. 9 — графики базовой траектории $y_1(t)$ (штриховая кривая) и восстановленной траектории $x_1(t)$. На рис. 10 — график разности между базовой траекторией $y_1(t)$ и восстановленной траекторией $x_1(t)$, на рис. 11, 12 — графики построенных управлений ($u_1(t)$, $u_2(t)$).

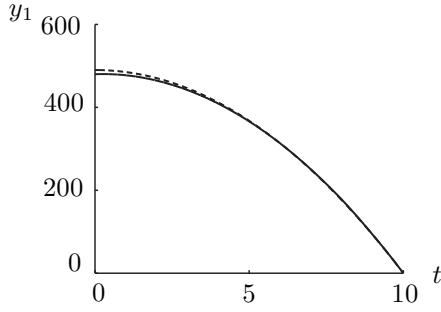


Рис. 9. Базовая траектория $y_1(t)$ (верхняя) и восстановленная траектория $x_1(t)$ (нижняя).

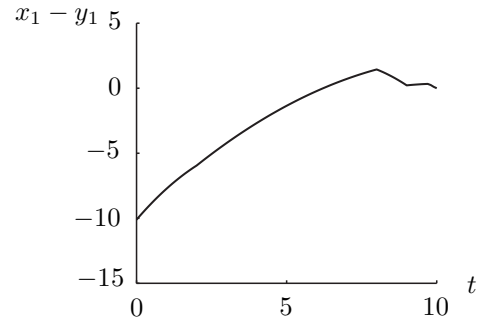


Рис. 10. Разница $x_1(t) - y_1(t)$, $h = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-2}$.

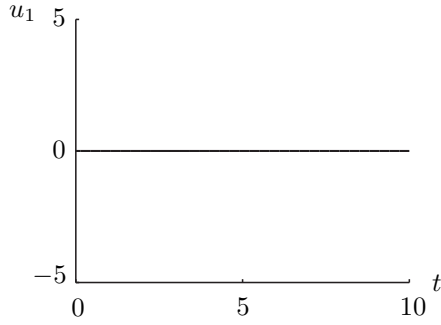


Рис. 11. Управление $u_1(t)$, $h = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-2}$.

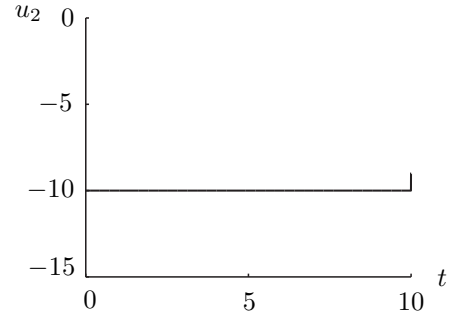


Рис. 12. Управление $u_2(t)$, $h = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-2}$.

Далее на рис. 13–16 представлены результаты численного решения задачи при ограничениях $U = \{u = (u_1, u_2) : |u_i| \leq 100, i = 1, 2\}$ при $T = 10.0$, $h = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-2}$. На рис. 13 — графики базовой траектории $y_1(t)$ и восстановленной траектории $x_1(t)$ (волнистая кривая). На рис. 14 — график разности между базовой траекторией $y_1(t)$ и восстановленной траекторией $x_1(t)$, на рис. 15, 16 — графики построенных управлений ($u_1(t)$, $u_2(t)$).

8. Пример 4 (нелинейная модель с полной информацией)

Рассматривается нелинейная управляемая система

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + u_1, & \dot{x}_2(t) &= -0.15x_2 - 10.15 \sin x_1 + u_2, & t \in [0.0, T], \\ u &\in U = \{(u_1, u_2) : u_i \in [-10, 10], i = 1, 2\}. \end{aligned}$$

Задана полная история замеров траектории движения. Требуется восстановить постоянное управление $u = (u_1, u_2) \equiv (0, 2)$. Функционал платы имеет вид

$$I(0.0, x_0; u(\cdot)) = \int_{0.0}^T -\frac{(x_1(t) - y_1(t))^2 + (x_2(t) - y_2(t))^2}{2} + \alpha \frac{u_1^2(t) + u_2^2(t)}{2} dt.$$

Характеристическая система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}_1}{dt} &= \hat{x}_2 - \frac{\hat{p}_1}{\alpha}, & \frac{d\hat{x}_2}{dt} &= -0.15\hat{x}_2 - 10.15 \sin \hat{x}_1 - \frac{\hat{p}_2}{\alpha}, \\ \frac{d\hat{p}_1}{dt} &= \hat{x}_1 - y_1(t) + 10.15\hat{p}_2 \cos \hat{x}_1, & \frac{d\hat{p}_2}{dt} &= \hat{x}_2 - y_2(t) - \hat{p}_1 + 0.15\hat{p}_2, \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$\hat{x}_1(T, \xi) \in [-0.02, 0.02], \quad \hat{x}_2(T, \xi) \in [-0.02, 0.02], \quad \hat{p}_1(T, \xi) = 0, \quad \hat{p}_2(T, \xi) = 0.$$

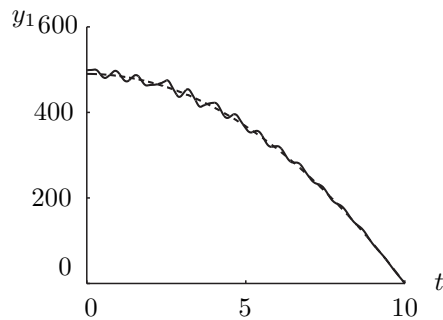


Рис. 13. Базовая траектория $y_1(t)$ и восстановленная траектория $x_1(t)$ (волнистая кривая).

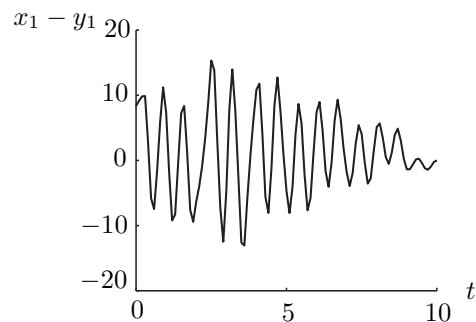


Рис. 14. Разница $x_1(t) - y_1(t)$, $h = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-2}$.

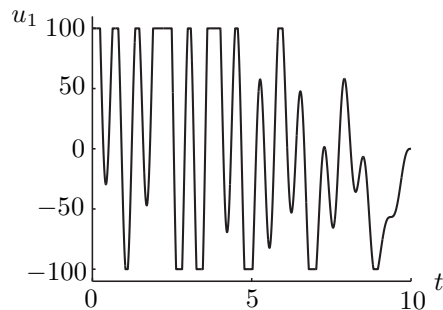


Рис. 15. Управление $u_1(t)$, $h = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-2}$.

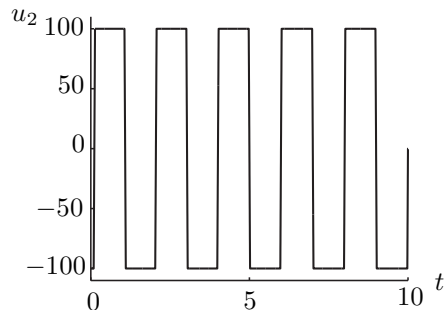


Рис. 16. Управление $u_2(t)$, $h = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-2}$.

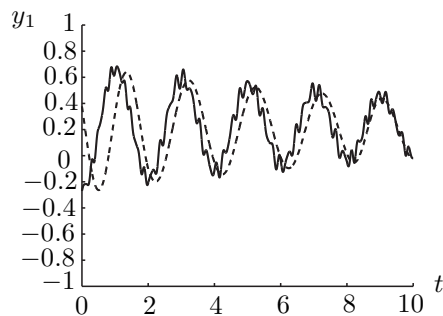


Рис. 17. Траектория $y_1(t)$ и восстановленной траектории $x_1(t)$ (штриховая кривая).

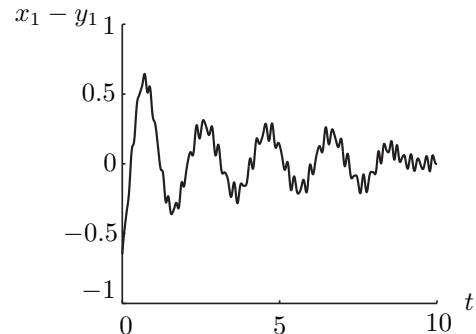


Рис. 18. Разница $x_1(t) - y_1(t)$, $h = 10^{-4}$, $\alpha = 10^{-3}$.

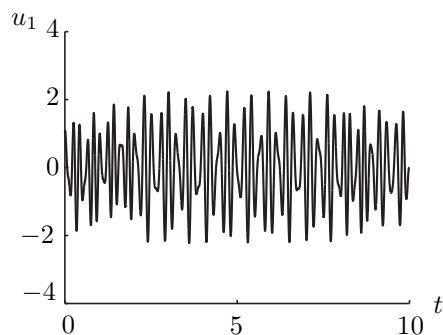


Рис. 19. Управление $u_1(t)$, $h = 10^{-4}$, $\alpha = 10^{-3}$.

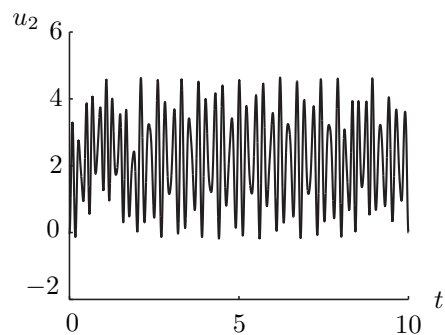


Рис. 20. $u_2(t)$, $h = 10^{-4}$, $\alpha = 10^{-3}$.

На рис. 17–20 представлены результаты численного решения задачи при значениях параметров $T = 10.0$, $h = 10^{-4}$, $\alpha = 10^{-3}$. На рис. 17 — графики базовой траектории $y_1(t)$ (штриховая кривая) и восстановленной траектории $x_1(t)$. На рис. 18 — график разности между $y_1(t)$ и $x_1(t)$, на рис. 19, 20 — графики построенных управлений ($u_1(t)$, $u_2(t)$).

9. Заключение

Как видно из примеров 1 и 4, в случае, когда задана полная информация $y(\cdot)$ об истории замеров $x_*(\cdot)$, восстановленная траектория $x(t)$ хорошо аппроксимирует базовую траекторию $x_*(t)$ в пространстве непрерывных функций, а управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$ хорошо аппроксимирует нормальное управление $u_*(t)$ в пространстве L_2 . Пример 2 показывает, что неполнота информации нарушает работу метода. В примере 3 указаны способы компенсации неполной информации, позволяющие решить обратную задачу динамики с помощью предлагаемого метода.

Авторы выражают искреннюю благодарность Алексею Руфимовичу Данилину за обсуждение работы и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры, М.: Наука, 1974. 456 с.
3. Метод характеристик для уравнения Гамильтона—Якоби—Беллмана / Н. Н. Субботина, Е. А. Колпакова, Т. Б. Токманцев, Л. Г. Шагалова. Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2013. 244 с.
4. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко М.: Наука, 1961. 350 с.
5. **Bellman R.** Dynamic programming. Princeton: Princeton Univ. Press, 1957. 388 с.
6. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого : Перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск : Ин-т компьютер. исслед., 2003. 336 с.
7. **Кларк Ф.** Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 281 с.
8. **Субботина Н.Н., Токманцев Т.Б.** Классические характеристики уравнения Беллмана в конструкциях сеточного оптимального синтеза // Тр. МИАН. 2010. Т. 271. С. 259–277.
9. **Subbotina N.N., Tokmantsev T.B.** On grid optimal feedbacks to control problems of prescribed duration on the plane // Annals of the ISDG: Advances in Dynamic Games. Boston: Birkhäuser, 2011. Vol. 11. P. 133–147.
10. **Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.** Основы метода динамической регуляризации. М: Изд-во МГУ, 1999. 250 с.
11. **Барбашин Е.А.** Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 225 с.
12. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функции и функционального анализа. М: Наука, 1974. 544 с.
13. **Davy J. L.** Properties of the solution set of a generalized differential equation // Bull. Austral. Math. Soc. 1972. Vol. 6, no. 3. P. 379–398.
14. **Subbotina N.N., Tokmantsev T.B.** The method of characteristics in inverse problems of dynamics // Universal J. Control and Automation. 2013. Vol. 1 (3). P. 79–85.
15. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 578 с.

Субботина Нина Николаевна

Поступила 17.05.14

чл.-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук, профессор

зав. сектором

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

Институт математики и компьютерных наук

Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина

e-mail: subbb@uran.ru

Токманцев Тимофей Борисович

канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

доцент

Уральский энергетический институт

Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина

e-mail: tokmantsev@imm.uran.ru

УДК 517.929

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ОДНОГО КЛАССА СТАБИЛИЗАТОРОВ¹

П. Г. Сурков

Для автономной линейной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием найдены асимптотические формулы, определяющие аналитические зависимости регуляризованных решений этой системы от параметра регуляризации на конечном отрезке отрицательной полуоси. Для решения задачи использовался метод регуляризации А.Н. Тихонова со стабилизирующим функционалом, не порождающим компактное множество в пространстве состояний. Задача решена для достаточно гладких начальных функций, но не удовлетворяющих условиям, обеспечивающим непрерывное продолжение решений в сторону убывания времени.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с запаздыванием, некорректная задача, асимптотические методы.

P. G. Surkov. Regularization of an ill-posed Cauchy problem for an autonomous system with delay with the use of a class of stabilizers.

For an autonomous linear system of differential equations with delay, we find asymptotic formulas for the analytic dependence of regularized solutions of this system on a regularization parameter on a finite closed interval of the negative semiaxis. We use the Tychonoff regularization method with a stabilizing functional not generating a compact set in the state space. The problem is solved for sufficiently smooth initial functions, which, however, do not satisfy the conditions that guarantee a continuous extension of solutions to decreasing time.

Keywords: differential equations with delay, ill-posed problem, asymptotic methods.

Введение

Рассматривается линейная автономная система дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bx(t-r), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (0.1)$$

где $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $r > 0$, A и B — постоянные матрицы размера $n \times n$.

Задача нахождения решения системы дифференциальных уравнений с запаздыванием на любом отрезке положительной полуоси является корректной [1–3], т. е. система (0.1) для начального момента $t_0 = 0$ и произвольной функции $\varphi \in C$ имеет единственное и непрерывно зависящее от начальной функции решение $x(\cdot, \varphi)$ на полуоси $[-r, +\infty)$, удовлетворяющее условию $x(\theta, \varphi) = \varphi(\theta)$ при $\theta \in [-r, 0]$. Здесь $C = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ трактуется как функциональное пространство состояний системы (0.1).

Для продолжения решения $x(\cdot, \varphi)$ системы дифференциальных уравнений с запаздыванием на отрицательную полуось $(-\infty, -r)$ требуется достаточная гладкость начальной функции, также она должна удовлетворять счетному набору краевых условий [4]. Особый интерес представляет задача Коши на отрицательной полуоси с начальной функцией, при которой не выполнены условия продолжения назад [3] решения системы с запаздыванием. А. Д. Мышкис в работе [5] указывал на некорректность этой задачи. В [6] был использован метод регуляризации А. Н. Тихонова [7] при решении некорректной задачи Коши на отрезке, равном запаздыванию,

¹Работа выполнена при поддержке Урало-Сибирского междисциплинарного проекта и гранта РФФИ № 13-01-00094.

для неавтономной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием. Для линейных автономных систем с запаздыванием в [8] была описана пошаговая процедура нахождения решений на конечном отрезке отрицательной полуоси, на каждом шаге которой применялся метод регуляризации А. Н. Тихонова, и были получены асимптотические формулы регуляризованных решений. Предложенная методика успешно применялась для неавтономной линейной системы с опережением в [9], для уравнения Хатчинсона в [10], а также для автономных линейных систем с соизмеримыми запаздываниями в [11].

В работе [8] метод регуляризации Тихонова применялся со стабилизирующим функционалом вида

$$\Omega[x] = x^\top(0)Gx(0) + \int_{-r}^0 (x'^\top(s)Px'(s) + x^\top(s)Qx(s)) ds,$$

аналогичным предложенному в [12] при решении уравнения Фредгольма первого рода. В настоящей работе для решения некорректной задачи Коши используется методика [8; 9], но стабилизатор выбирается в виде

$$\Omega[x] = x^\top(0)x(0) + \int_{-r}^0 x^\top(s)x(s) ds \quad (0.2)$$

как частный случай указанного в [13, с. 70] и не порождающего компактное множество в пространстве состояний. С помощью данного стабилизатора удалось понизить порядок системы обыкновенных дифференциальных уравнений, к которой можно свести уравнения, определяющие минимизирующий элемент метода регуляризации, что значительно упростило применение асимптотических методов.

1. Постановка задачи

Решения $x(\cdot, \varphi)$ системы (0.1) на положительной полуоси можно находить с помощью пошаговой процедуры [8], которая в функциональном пространстве состояний C описывается формулами

$$x_{k+1} = Ux_k, \quad k \geq 0, \quad x_0 = \varphi, \quad x_k(\cdot) = x(\cdot + kr),$$

где $U: C \rightarrow C$ — линейный вполне непрерывный оператор, определяемый формулой

$$(Ux)(\theta) = \exp(A(r + \theta))x(0) + \int_{-r}^{\theta} \exp(A(\theta - s))Bx(s) ds, \quad \theta \in [-r, 0]. \quad (1.1)$$

При определении решения задачи Коши $x(\cdot, \varphi)$ на отрицательной полуоси используем пошаговую процедуру

$$x_{k,\delta} = R(x_{k+1,\delta}, \delta), \quad k \leq -1, \quad x_{0,\delta} = \varphi, \quad (1.2)$$

где R — регуляризирующий оператор уравнения

$$Ux_k = x_{k+1} \quad (1.3)$$

и δ — допустимая погрешность. Последняя задача является некорректной, и для ее решения используется метод регуляризации А. Н. Тихонова.

Регуляризованное решение задачи Коши $x(\cdot, \varphi)$ на отрицательной полуоси будем определять формулами $x(kr + \theta, \varphi) = x_{k,\delta}(\theta)$, $k \leq -1$, $\theta \in (-r, 0]$.

Ставится задача: найти асимптотические формулы, определяющие аналитические зависимости регуляризованных решений системы (0.1) от допустимой погрешности δ на конечном отрезке отрицательной полуоси. Поставленная задача решена при требовании достаточной гладкости φ .

2. Краевая задача для регуляризованного решения уравнения (1.3)

Оператор (1.1) допускает непрерывное расширение на сепарабельное гильбертово пространство $H = L_2([-r, 0), \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ [14] со скалярным произведением $(\varphi, \psi) = \psi^\top(0)\varphi(0) + \int_{-r}^0 \psi^\top(s)\varphi(s)ds$. При расширении сохраняется вполне непрерывность оператора U .

Без ограничения общности рассмотрим первую итерацию пошаговой процедуры (1.2), $k = -1$, и введем обозначение $x_{-1} = x$. Стабилизирующий функционал для метода регуляризации выбираем вида (0.2). При нахождении регуляризованного решения уравнения (1.3)

$$Ux = \varphi$$

для фиксированного значения параметра регуляризации α требуется определить элемент $x_\alpha \in H$, минимизирующий функционал

$$M^\alpha[\varphi, x] = (Ux - \varphi, Ux - \varphi) + \alpha\Omega[x]. \quad (2.1)$$

Параметр регуляризации α определяется как значение функции $\alpha(\delta, \varphi)$ допустимой погрешности δ и φ из уравнения невязки

$$(Ux_\alpha - \varphi, Ux_\alpha - \varphi) = \delta^2. \quad (2.2)$$

Тогда значение регуляризирующего оператора определяется формулой $R(\varphi, \delta) = x_{\alpha(\delta, \varphi)}$.

Необходимое условие минимума функционала (2.1) приводит к системе уравнений для определения минимизирующего элемента

$$\begin{aligned} (U^*(Ux - \varphi))(\theta) + \alpha x(\theta) &= 0, \quad \theta \in [-r, 0), \\ (U^*(Ux - \varphi))(0) + \alpha x(0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь сопряженный оператор $U^*: H \rightarrow H$ задается формулами

$$(U^*y)(\theta) = \begin{cases} B^\top \exp(-A^\top \theta) \left(y(0) + \int_{\theta}^0 \exp(A^\top s) y(s) ds \right), & \theta \in [-r, 0), \\ \exp(A^\top r) \left(y(0) + \int_{-r}^0 \exp(A^\top s) y(s) ds \right), & \theta = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Введем вспомогательные функции χ и ψ с помощью формул

$$\begin{aligned} \chi(\theta) &= (Ux)(\theta), \quad \psi(\theta) = (U^*(\chi - \varphi))(\theta), \quad \theta \in [-r, 0), \\ \chi(0) &= \chi(-0), \quad \psi(0) = (U^*(\chi - \varphi))(-0). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Тогда систему уравнений (2.3) для минимизирующего элемента можно заменить эквивалентной краевой задачей для дифференциально-алгебраических уравнений.

Утверждение 1. Пусть $\varphi \in H$, система (0.1) удовлетворяет условию

$$(B1) \det B \neq 0.$$

Тогда минимизирующий элемент x_α является компонентой решения следующей системы дифференциально-алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \alpha x + \psi &= 0, \\ \psi' &= -(B^{-1}AB)^\top \psi - B^\top(\chi - \varphi), \quad \chi' = A\chi + Bx \end{aligned} \quad (2.6)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned}\psi(-r) + \alpha B^\top x(0) &= 0, \\ \psi(0) &= B^\top (\chi(0) - \varphi(0)), \quad x(0) = \chi(-r),\end{aligned}\tag{2.7}$$

где α — малый положительный параметр.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость утверждения следует из явного представления операторов (1.1), (2.4) и обозначений (2.5). $\square$

3. Асимптотика решений краевой задачи

При нахождении асимптотического решения краевой задачи (2.6), (2.7) потребуем, чтобы $\varphi, \varphi' \in H$. Исключим вспомогательные переменные χ и ψ , тогда из первого и второго векторных уравнений системы (2.6) находим

$$\begin{aligned}\psi &= -\alpha x, \\ \chi &= \alpha B^{-1\top} (x' + (B^{-1}AB)^\top x) + \varphi.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Подставляя найденные выражения в третье векторное уравнение системы (2.6), имеем

$$\alpha x'' + \alpha B^\top (A^\top - A) B^{-1\top} x' - \alpha B^\top A A^\top B^{-1\top} x - B^\top B x = -B^\top (\varphi' - A\varphi).\tag{3.2}$$

С учетом формул (3.1) краевые условия (2.7) преобразуются к виду

$$\begin{aligned}\alpha x'(-r) + \alpha (B^{-1}AB)^\top x(-r) + B^\top \varphi(-r) &= x(-r), \\ x'(0) + ((B^{-1}AB)^\top + I_n) B^{-1\top} x(-r) &= 0,\end{aligned}\tag{3.3}$$

где I_n — единичная матрица размера $n \times n$.

Система уравнений (3.2) имеет малый параметр при старшей производной, поэтому будут использованы асимптотические методы работ [15; 16] для нахождения зависимости решений этой системы от параметра регуляризации α .

В системе уравнений (3.2) проведем замену переменных $x = T\tilde{x}$, в которой T — неособая ортогональная матрица, приводящая симметричную матрицу $B^\top B$ к жордановой форме, т. е. $B^\top B = T J T^\top$, где $J = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, λ_k , $k = 1, \dots, n$, — положительные числа. Тогда система (3.2) преобразуется к виду

$$\alpha \tilde{x}'' + \alpha A_1 \tilde{x}' + \alpha A_0 \tilde{x} - J \tilde{x} = f,\tag{3.4}$$

где $f(\theta) = -T^\top B^\top (\varphi'(\theta) - A\varphi(\theta))$, $\theta \in [-r, 0]$, $A_0 = -T^\top B^\top A A^\top B^{-1\top} T$, $A_1 = T^\top B^\top (A^\top - A) B^{-1\top} T$.

В краевых условиях (3.3) перейдем к определенным выше новым переменным. Получаем

$$\begin{aligned}\alpha T \tilde{x}'(-r) + \alpha (B^{-1}AB)^\top T \tilde{x}(-r) + B^\top \varphi(-r) &= T \tilde{x}(-r), \\ T \tilde{x}'(0) + ((B^{-1}AB)^\top + I_n) B^{-1\top} T \tilde{x}(-r) &= 0.\end{aligned}\tag{3.5}$$

З а м е ч а н и е 1. В дальнейшем будем рассматривать комплекснозначные скалярные функции $O(\alpha^\beta; \vartheta, \varphi, D_1, D_2)$, определенные при малых положительных значениях аргумента α , зависящие от $\vartheta \in [-r; 0]$, $D_1, D_2 \in \mathbb{C}^n$, $\varphi \in H^p$, а также допускающие оценки

$$|O(\alpha^\beta; \vartheta, \varphi, D_1, D_2)| \leq K(\varphi, D_1, D_2) \alpha^\beta.$$

Здесь β и $K(\varphi, D_1, D_2)$ — положительные числа. Аргументы ϑ и φ опускаются, если рассматриваемые функции не зависят от них явно. Комплекснозначные векторные функции $\mathcal{O}(\alpha^\beta; \vartheta$,

φ, D_1, D_2) и матричные функции $\mathbb{O}(\alpha^\beta; \vartheta, \varphi, D_1, D_2)$ определяем как функции, элементы которых являются функциями $O(\alpha^\beta; \vartheta, \varphi, D_1, D_2)$. Здесь $\mathbb{C}^n$ — линейное пространство n -мерных векторов над полем комплексных чисел, H^p — линейное пространство функций $\varphi \in H$, для которых $\varphi^{(k)} \in H$, $k = 1, \dots, p$. В пространстве H^p можно ввести норму $\|\varphi\|_p = ((\varphi, \varphi) + (\varphi', \varphi') + \dots + (\varphi^{(p)}, \varphi^{(p)}))^{1/2}$.

З а м е ч а н и е 2. Индексы k и j в дальнейшем определяются интервалами $k = 1, \dots, n$ и $j = 1, 2$.

Лемма 1. Пусть $\varphi \in H^1$ и для системы (0.1) выполнено условие (B1), а также условие (B2) собственные числа матрицы $B^\top B$ простые.

Тогда общее решение системы (3.4) при $f = 0$ определяется асимптотической формулой

$$\tilde{x}_\alpha(\theta) = \sum_{j=1}^2 K_j(\alpha) \exp(J_j(\alpha)(\vartheta - \vartheta_j)) C_j, \quad \vartheta \in [-r, 0]. \quad (3.6)$$

Здесь используются следующие обозначения:

$$K_j(\alpha) = I_n + \mathbb{O}(\alpha^{1/2}), \quad (3.7)$$

$$J_j(\alpha) = \text{diag}(\lambda_{1j}(\alpha), \dots, \lambda_{nj}(\alpha)), \quad (3.8)$$

$$\lambda_{kj}(\alpha) = \alpha^{-1/2}(\lambda_k^{1/2} e_j + O(\alpha^{1/2})), \quad (3.9)$$

$C_j \in \mathbb{C}^n$ — произвольные векторы, $e_1 = -1$, $e_2 = 1$, $\vartheta_1 = -r$, $\vartheta_2 = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Асимптотика решений однородной части системы (3.4) определяется решениями линейной системы

$$(\alpha \lambda^2 I_n + \alpha \lambda A_1 + \alpha A_0 - J)h = 0.$$

Полагая $\tilde{\lambda} = \alpha^{1/2} \lambda$, преобразуем ее к виду

$$(\tilde{\lambda}^2 I_n + \alpha^{1/2} \tilde{\lambda} A_1 + \alpha A_0 - J)h = 0. \quad (3.10)$$

Согласно теории возмущений [17], существует единственное решение $\tilde{\lambda}_{kj}(\alpha)$, $h_{kj}(\alpha)$, определяемое аналитическими функциями в малой окрестности нуля и удовлетворяющее условиям

$$\tilde{\lambda}_{kj}(0) = \lambda_k^{1/2} e_j, \quad h_{kj}(0) = l_k = \{\delta_{km}\}_{m=1}^n,$$

где δ_{km} — символы Кронекера. Для этого решения справедлива асимптотическая формула

$$\tilde{\lambda}_{kj}(\alpha) = \lambda_k^{1/2} e_j + O(\alpha^{1/2}). \quad (3.11)$$

В результате получаем формулу (3.9).

Подставляя (3.11) в систему (3.10), имеем

$$(\lambda_k I_n - J + O(\alpha^{1/2}))h = 0. \quad (3.12)$$

Решение последней системы дает собственные векторы

$$h_{kj}(\alpha) = l_k + \mathcal{O}(\alpha^{1/2}),$$

которые определяют матрицу

$$K_j(\alpha) = \{h_{1j}(\alpha), \dots, h_{nj}(\alpha)\}.$$

Тогда для $K_j(\alpha)$ справедлива формула (3.7), а общее решение системы дифференциальных уравнений (3.4) при $f = 0$ определяется формулой (3.6). $\square$

Уточним асимптотику корней характеристического уравнения (3.9). С помощью замены $\tilde{\lambda} = \lambda_k^{1/2} e_j + \hat{\lambda} \alpha^{1/2}$ преобразуем систему (3.10) к виду

$$(\lambda_k I_n - J + \alpha^{1/2} \lambda_k^{1/2} e_j (4\hat{\lambda} I_n + A_1) + \mathcal{O}(\alpha)) h = 0.$$

Используя методы теории возмущений [17] и условие совместности для системы (3.12), для нахождения $\hat{\lambda}$ получим уравнение

$$h_{kj}^\top(\alpha)(4\hat{\lambda} I_n + A_1 + \mathcal{O}(\alpha^{1/2})) h_{kj}(\alpha) = 0.$$

Решение последнего уравнения имеет вид

$$\hat{\lambda}_{kj}(\alpha) = -\frac{1}{4} l_k^\top A_1 l_k + O(\alpha^{1/2}) = -\frac{1}{4} \tilde{a}_{kk} + O(\alpha^{1/2}),$$

где $A_1 = \{\tilde{a}_{mk}\}_1^n$. Покажем, что $\tilde{a}_{kk} = 0$. Преобразуем формулу, определяющую матрицу $A_1 = T^\top B^\top (A^\top - A) B^{-1} T = T^\top B^\top (A^\top - A) B T J^{-1}$. Матрица $T^\top B^\top (A^\top - A) B T$ является косо-симметрической, поэтому диагональные элементы матрицы A_1 равны нулю. В результате находим уточненные асимптотические формулы для корней характеристического уравнения (3.9)

$$\lambda_{kj}(\alpha) = \alpha^{-1/2} (\lambda_k^{1/2} e_j + O(\alpha)). \quad (3.13)$$

Лемма 2. Пусть для системы (0.1) выполнены условия (B1) и (B2), а для начальной функции φ выполнено условие

$$(H1) \quad \varphi \in H^2.$$

Тогда общее решение системы дифференциальных уравнений (3.4) определяется асимптотической формулой

$$\begin{aligned} \tilde{x}_\alpha(\theta, \varphi) = & \sum_{j=1}^2 K_j(\alpha) \left(\exp(J_j(\alpha)(\theta - \theta_j)) D_j \right. \\ & \left. + \alpha^{-1/2} J_j^{-1}(\alpha) \left(-A_j(\alpha) f(\theta) + \int_{\theta_j}^{\theta} \exp(J_j(\alpha)(\theta - s)) A_j(\alpha) f'(s) ds \right) \right), \quad \theta \in [-r, 0], \end{aligned} \quad (3.14)$$

где D_j — произвольные элементы $\mathbb{C}^n$,

$$A_j(\alpha) = \frac{1}{2} e_j J^{-1/2} + \mathcal{O}(\alpha^{1/2}). \quad (3.15)$$

Доказательство. Для нахождения представления общего решения системы (3.4) при $f \neq 0$ применим метод вариации произвольных постоянных [18] для (3.6):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 K_j(\alpha) \exp(J_j(\alpha)(\theta - \theta_j)) C_j' &= 0, \\ \sum_{j=1}^2 K_j(\alpha) J_j(\alpha) \exp(J_j(\alpha)(\theta - \theta_j)) C_j' &= \alpha^{-1} f(\theta), \quad \theta \in [-r, 0]. \end{aligned}$$

Используя замены $C_j' = \alpha^{-1/2} \exp(-J_j(\alpha)(\theta - \theta_j)) A_j f(\theta)$, последнюю систему преобразуем к виду

$$\sum_{j=1}^2 K_j(\alpha) A_j = 0, \quad \sum_{j=1}^2 K_j(\alpha) \tilde{J}_j(\alpha) A_j = I_n,$$

где $\tilde{J}_j(\alpha) = \alpha^{1/2} J_j(\alpha)$. При $\alpha = 0$ получаем систему

$$\sum_{j=1}^2 A_j = 0, \quad \sum_{j=1}^2 e_j J^{1/2} A_j = I_n,$$

решение которой определяется формулами $A_j = (1/2)e_j J^{-1/2}$. Тогда при малых α существует единственное решение $A_j(\alpha)$, определяемое аналитическими функциями (3.15).

Проводя обратные замены, находим

$$C_j(\alpha, \theta) = \tilde{D}_j + \alpha^{-1/2} \int_{\theta_j}^{\theta} \exp(-J_j(\alpha)(s - \theta_j)) A_j(\alpha) f(s) ds, \quad \theta \in [-r, 0],$$

где $\tilde{D}_j$ — произвольные элементы $\mathbb{C}^n$. Подставляя полученные выражения в (3.6), находим

$$\begin{aligned} \tilde{x}_\alpha(\theta, \varphi) = \sum_{j=1}^2 K_j(\alpha) & \left(\exp(J_j(\alpha)(\theta - \theta_j)) \tilde{D}_j \right. \\ & \left. + \alpha^{-1/2} \int_{\theta_j}^{\theta} \exp(J_j(\alpha)(\theta - s)) A_j(\alpha) f(s) ds \right), \quad \theta \in [-r, 0]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Применим к интегралу в последнем выражении формулу интегрирования по частям, тогда, подставляя полученное представление в (3.16) и полагая $D_j = \tilde{D}_j + \alpha^{-1/2} J_j^{-1}(\alpha) A_j(\alpha) f(\theta_j)$, находим асимптотическую формулу (3.14). $\square$

Теорема 1. Пусть для системы (0.1) и начальной функции φ выполнены условия (B1), (B2) и (H1). Тогда решение краевой задачи (3.4), (3.5) определяется асимптотическими формулами

$$\begin{aligned} \tilde{x}_\alpha(\theta, \varphi) &= \exp(-\alpha^{-1/2} J^{1/2}(\theta + r)) \Delta(\varphi) + J^{-1} T^\top B^\top (\varphi'(\theta) - A\varphi(\theta)) \\ &+ \mathcal{O}(\alpha^{1/2}; \theta, \varphi), \quad \theta \in [-r, 0], \\ \tilde{x}_\alpha(0, \varphi) &= T^\top \varphi(-r) + \mathcal{O}(\alpha^{1/2}; \varphi), \end{aligned} \quad (3.17)$$

где $\Delta(\varphi) = -J^{-1} T^\top B^\top (\varphi'(-r) - A\varphi(-r)) + T^\top B^\top \varphi(-r)$, $\mathcal{O}(\alpha^{1/2}; \cdot, \varphi)$ — значение линейного непрерывного отображения $: H^2 \rightarrow C$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi \in H^3$. Используя формулу (3.14), вычислим производную

$$\tilde{x}'_\alpha(\theta, \varphi) = \sum_{j=1}^2 K_j(\alpha) \left(J_j(\alpha) \exp(J_j(\alpha)(\theta - \theta_j)) D_j + \alpha^{-1/2} \int_{\theta_j}^{\theta} \exp(J_j(\alpha)(\theta - s)) A_j(\alpha) f'(s) ds \right).$$

Тогда, учитывая определения $K_j(\alpha)$ и $A_j(\alpha)$, а также плотность множества H^3 в H^2 , находим асимптотики

$$\begin{aligned} \tilde{x}_\alpha(\theta, \varphi) &= \sum_{j=1}^2 (I_n + \mathcal{O}(\alpha^{1/2})) \exp(J_j(\alpha)(\theta - \theta_j)) D_j - J^{-1} f(\theta) + \mathcal{O}(\alpha^{1/2}; \theta, \varphi), \\ \alpha^{1/2} \tilde{x}'_\alpha(\theta, \varphi) &= \sum_{j=1}^2 (e_j J^{1/2} + \mathcal{O}(\alpha^{1/2})) \exp(J_j(\alpha)(\theta - \theta_j)) D_j + \mathcal{O}(\alpha^{1/2}; \theta, \varphi), \quad \theta \in [-r, 0]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Полученные выражения позволяют преобразовать краевые условия (3.5) к виду

$$\begin{aligned} Tx_\alpha(-r, \varphi) + \mathcal{O}(\alpha^{1/2}; D_1, D_2) &= B^\top \varphi(-r) + \mathcal{O}(\alpha^{1/2}; \varphi), \\ \alpha^{1/2} \tilde{x}'_\alpha(0, \varphi) + \mathcal{O}(\alpha^{1/2}; D_1, D_2) &= \mathcal{O}(\alpha^{1/2}; \varphi). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Здесь $\mathcal{O}(\alpha^{1/2}; \cdot, \cdot): \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\mathcal{O}(\alpha^{1/2}; \cdot): H^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейные непрерывные отображения. Используя асимптотические формулы (3.8) и (3.13) в (3.18), находим

$$\begin{aligned} \tilde{x}_\alpha(-r, \varphi) &= (I_n + \mathcal{O}(\alpha^{1/2}))D_1 + \mathcal{O}(\alpha^{1/2})D_2 - J^{-1}f(-r) + \mathcal{O}(\alpha^{1/2}; \varphi), \\ \alpha^{1/2} \tilde{x}'_\alpha(0, \varphi) &= \mathcal{O}(\alpha^{1/2})D_1 + (e_2 J^{1/2} + \mathcal{O}(\alpha^{1/2}))D_2 + \mathcal{O}(\alpha^{1/2}; \varphi). \end{aligned}$$

Тогда краевые условия (3.19) преобразуем к следующему виду:

$$\begin{aligned} TD_1 + \mathcal{O}(\alpha^{1/2}; D_2, D_2) &= B^\top \varphi(-r) + TJ^{-1}f(-r) + \mathcal{O}(\alpha^{1/2}; \varphi), \\ e_2 J^{1/2}D_2 + \mathcal{O}(\alpha^{1/2}; D_1, D_2) &= \mathcal{O}(\alpha^{1/2}; \varphi). \end{aligned} \quad (3.20)$$

При $\alpha = 0$ решение последней системы определяется формулами

$$D_1 = J^{-1}f(-r) + T^\top B^\top \varphi(-r), \quad D_2 = 0.$$

Учитывая асимптотику коэффициентов и неоднородность алгебраической системы (3.20), находим ее решение

$$D_1(\alpha, \varphi) = J^{-1}f(-r) + T^\top B^\top \varphi(-r) + \mathcal{O}(\alpha^{1/2}; \varphi), \quad D_2(\alpha, \varphi) = \mathcal{O}(\alpha^{1/2}; \varphi). \quad (3.21)$$

Таким образом, с учетом найденных значений для произвольных постоянных формула (3.14) примет вид

$$\begin{aligned} \tilde{x}_\alpha(\theta, \varphi) &= K_1(\alpha) \exp(J_1(\alpha)(\theta + r)) (J^{-1}f(-r) + T^\top B^\top \varphi(-r)) - J^{-1}f(\theta) \\ &\quad + \sum_{j=1}^2 \left(K_j(\alpha) \exp(J_j(\alpha)(\theta - \theta_j)) \mathcal{O}(\alpha^{1/2}) + \mathcal{O}(\alpha^{1/2})f(\theta) \right. \\ &\quad \left. + e_j^{-1} (J^{-1/2} + \mathcal{O}(\alpha^{1/2})) \int_{\theta_j}^{\theta} \exp(J_j(\alpha)(\theta - s)) A_j(\alpha) f'(s) ds \right), \quad \theta \in [-r, 0]. \end{aligned}$$

Преобразуя последнюю формулу, получаем

$$\tilde{x}_\alpha(\theta, \varphi) = \exp(J_1(\alpha)(\theta + r)) \Delta(\varphi) + J^{-1}T^\top B^\top (\varphi'(\theta) - A\varphi(\theta)) + \mathcal{O}(\alpha^{1/2}; \theta, \varphi), \quad \theta \in [-r, 0],$$

тогда имеем $\tilde{x}_\alpha(0, \varphi) = T^\top B^{-1\top} T \tilde{x}_\alpha(-r, \varphi) = T^\top \varphi(-r)$.

Используя асимптотику (3.13) и представление матриц (3.8), находим

$$\exp(J_1(\alpha)(\theta + r)) = \exp(-\alpha^{-1/2} J^{1/2}(\theta + r)) + \mathcal{O}(\alpha^{1/2}; \theta).$$

В результате получаем формулы (3.17). □

4. Зависимость параметра регуляризации от допустимой погрешности

Используя теорему 1, находим минимизирующий элемент

$$\begin{aligned} x_\alpha(\theta, \varphi) &= T \tilde{x}_\alpha(\theta, \varphi) = T \exp(-\alpha^{-1/2} J^{1/2}(\theta + r)) \Delta(\varphi) + B^{-1}(\varphi'(\theta) - A\varphi(\theta)) \\ &\quad + \mathcal{O}(\alpha^{1/2}; \theta, \varphi), \quad \theta \in [-r, 0], \\ x_\alpha(0, \varphi) &= \varphi(-r) + \mathcal{O}(\alpha^{1/2}; \varphi). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Эта функция является значением линейного непрерывного отображения $: H^2 \rightarrow H$.

Далее исследуем вопрос разрешимости уравнения невязки.

Утверждение 2. Пусть система (0.1) удовлетворяет условиям (B1) и (B2), а начальная функция φ удовлетворяет условиям (H1) и

$$(D1) \quad \Delta(\varphi) \neq 0.$$

Тогда зависимость параметра регуляризации от допустимой погрешности выражается формулой

$$\alpha(\delta, \varphi) = \gamma^{-2/3}(\varphi)\delta^{4/3} + O(\delta^2, \varphi), \quad (4.2)$$

где $\gamma(\varphi) = (1/2) \Delta^\top(\varphi) J^{-1/2} \Delta(\varphi)$, $O(\delta^2, \cdot)$ — непрерывное отображение: $H^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, определенное на множестве $\Delta(\varphi) \neq 0$ при малых положительных значениях δ .

Доказательство. Поскольку $Ux_\alpha = \chi_\alpha$, то уравнение невязки (2.2) примет вид

$$\delta^2 = (\chi_\alpha(0, \varphi) - \varphi(0))^\top (\chi_\alpha(0, \varphi) - \varphi(0)) + \int_{-r}^0 (\chi_\alpha(s, \varphi) - \varphi(s))^\top (\chi_\alpha(s, \varphi) - \varphi(s)) ds. \quad (4.3)$$

Из равенства (3.1) для χ находим

$$\chi_\alpha(\theta, \varphi) - \varphi(\theta) = -\alpha B^{-1\top} (Px'_\alpha(\theta, \varphi) + (B^{-1}AB)^\top x_\alpha(\theta, \varphi)), \quad \theta \in [-r, 0]. \quad (4.4)$$

Учитывая формулы (3.18) и (3.21), а также связь переменных $\tilde{x}$ и x , имеем следующие асимптотические разложения:

$$\begin{aligned} \alpha x_\alpha(\theta, \varphi) &= \alpha T \tilde{x}_\alpha(\theta, \varphi) = \mathcal{O}(\alpha; \theta, \varphi), \\ \alpha x'_\alpha(\theta, \varphi) &= \alpha T \tilde{x}'_\alpha(\theta, \varphi) = \alpha^{1/2} T e_1 J^{1/2} \exp(-\alpha^{-1/2} J^{1/2}(\theta + r)) \Delta(\varphi) + \mathcal{O}(\alpha; \theta, \varphi), \quad \theta \in [-r, 0]. \end{aligned}$$

С учетом последних формул равенство (4.4) примет вид

$$\chi_\alpha(\theta, \varphi) - \varphi(\theta) = \alpha^{1/2} e_1 B^{-1\top} T J^{1/2} \exp(-\alpha^{-1/2} J^{1/2}(\theta + r)) \Delta(\varphi) + \mathcal{O}(\alpha; \theta, \varphi), \quad \theta \in [-r, 0].$$

Откуда при $\theta = 0$ получаем

$$\chi_\alpha(0, \varphi) - \varphi(0) = \alpha (B^{-1\top} (B^{-1}AB)^\top \varphi(-r) + \mathcal{O}(\alpha^{1/2}, \varphi)) = \mathcal{O}(\alpha, \varphi).$$

Тогда уравнение (4.3) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \alpha \Delta^\top(\varphi) \int_{-r}^0 \exp(-\alpha^{-1/2} J^{1/2}(s + r)) J^{1/2} T^\top B^{-1} \\ &\quad \times B^{-1\top} T J^{1/2} \exp(-\alpha^{-1/2} J^{1/2}(s + r)) ds \Delta(\varphi) + O(\alpha^2, \varphi). \end{aligned}$$

Учитывая определение матрицы T , находим $J^{1/2} T^\top B^{-1} B^{-1\top} T J^{1/2} = I_n$. Тогда

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \alpha \Delta^\top(\varphi) \int_{-r}^0 \exp(-2\alpha^{-1/2} J^{1/2}(s + r)) ds \Delta(\varphi) + O(\alpha^2, \varphi) \\ &= \gamma(\varphi) \alpha^{3/2} + O(\alpha^2, \varphi) + O(\alpha^2, \varphi), \end{aligned}$$

где $\gamma(\varphi) = (1/2) \Delta^\top(\varphi) J^{-1/2} \Delta(\varphi) > 0$ при условии (D1). Используя теорему о существовании неявной функции, находим формулу (4.2). $\square$

Теорема 2. Пусть система (0.1) и начальная функция φ удовлетворяют условиям (B1), (B2), (H1) и (D1). Тогда значение регуляризирующего оператора определяется асимптотическими формулами

$$\begin{aligned} R(\delta, \varphi)(\theta) &= S(\delta, \theta, \varphi)\Delta(\varphi) + B^{-1}(\varphi'(\theta) - A\varphi(\theta)) + \mathcal{O}(\delta^{2/3}; \theta, \varphi), \quad \theta \in [-r, 0), \\ R(\delta, \varphi)(0) &= \varphi(-r) + \mathcal{O}(\delta^{2/3}; \varphi), \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $S(\delta, \theta, \varphi) = T \exp(-\gamma^{1/3}\delta^{-2/3}J^{1/2}(\theta+r))$, $\mathcal{O}(\delta^{2/3}; \cdot, \varphi)$ — значение непрерывного на множестве $\Delta(\varphi) \neq 0$ отображения: $H^2 \rightarrow C$, определенного при малых положительных δ .

Доказательство. Подставляя (4.2) в (4.1), находим (4.5). $\square$

Для удобства численного моделирования рассмотрим операторы: $R_1: H^2 \rightarrow H$ [8], определяемый формулами

$$\begin{aligned} R_1(\varphi)(\theta) &= B^{-1}(\varphi'(\theta) - A\varphi(\theta)), \quad \theta \in [-r, 0), \\ R_1(\varphi)(0) &= \varphi(-r), \end{aligned}$$

и $R_2: H^2 \rightarrow H$, определяемый формулами

$$\begin{aligned} R_2(\delta, \varphi)(\theta) &= S(\delta, \theta, \varphi)\Delta(\varphi) + B^{-1}(\varphi'(\theta) - A\varphi(\theta)), \quad \theta \in [-r, 0), \\ R_2(\delta, \varphi)(0) &= \varphi(-r). \end{aligned}$$

Для этих операторов справедливы следующие утверждения.

Теорема 3 [8, теорема 3]. Пусть система (0.1) удовлетворяет условиям (B1) и (B2). Тогда для уравнения $Ux = \varphi$ на множестве начальных функций, удовлетворяющих условиям (H1) и (D1), оператор R_1 является регуляризирующим.

Теорема 4. Пусть система (0.1) удовлетворяет условиям (B1) и (B2). Тогда для уравнения $Ux = \varphi$ на множестве начальных функций, удовлетворяющих условиям (H1) и (D1), оператор R_2 является регуляризирующим.

Доказательство. Справедливость теоремы устанавливается аналогичным способом в [8, теорема 4]. $\square$

5. Асимптотика регуляризованных решений

Пусть H_{loc} — пространство функций, определенных на полуоси $(-\infty, -r]$, сужение которого на любой конечный отрезок $[t^-, -r]$, $t^- < -r$, является гильбертовым пространством H_{t^-} со скалярным произведением $\langle x, y \rangle_{t^-} = \int_{t^-}^{-r} y^\top(s)x(s)\mu(ds)$, где $\mu(s) = s/r + k - 1$, $s \in [(k-1)r, kr]$, $k \leq -1$, $\mu(r) = 1$. Для произвольного решения $x_{k,\delta}(\vartheta, \varphi)$, $\vartheta \in [-r, 0]$, $k \leq -1$, разностного уравнения (1.2) рассмотрим функцию $x_\delta(\cdot, \varphi) \in H_{loc}$, определяемую с помощью формул $x_\delta(-kr - \vartheta, \varphi) = x_{k,\delta}(\vartheta, \varphi)$, $\vartheta \in (-r, 0]$, $k \leq -1$.

Для начальной функции $\varphi \in H^{N+1}$, $N \geq 2$ (N равняется целой части числа $|t^-|/r$) рассмотрим последовательность функций

$$\begin{aligned} \varphi_k(\theta) &= B^{-1}(\varphi'_{k+1}(\theta) - A\varphi_{k+1}(\theta)), \quad k = -N, \dots, -1, \\ \varphi_0(\theta) &= \varphi(\theta), \quad \theta \in [-r, 0]. \end{aligned}$$

Используя эту последовательность, определим новые последовательности

$$\begin{aligned} x_k^1(\theta, \varphi) &= R_1(\varphi_{k+1})(\theta), \quad k = -N, \dots, -1, \quad \theta \in [-r, 0], \\ x_{k,\delta}^2(\theta, \varphi) &= R_2(\varphi_{k+1}, \delta)(\theta), \quad k = -N, \dots, -1, \quad \theta \in [-r, 0]. \end{aligned}$$

Введем функции $x^1(\cdot, \varphi)$, $x^2(\cdot, \varphi, \delta) \in H_{t-}$ с помощью формул

$$\begin{aligned} x^1(t, \varphi) &= x_k^1(t - kr, \varphi), & x_\delta^2(t, \varphi, \delta) &= x_{k,\delta}^2(t - kr, \varphi), & t &\in ((k-1)r, kr], & k &= -N+1, \dots, -1, \\ x^1(t, \varphi) &= x_k^1(t - kr, \varphi), & x^2(t, \varphi, \delta) &= x_k^2(t - kr, \varphi, \delta), & t &\in [t^-, -Nr]. \end{aligned}$$

Теорема 5. Пусть система (0.1) удовлетворяет условиям (B1) и (B2). Тогда в задаче построения решений системы (0.1) на отрезке $[t^-, -r]$ для начальных функций из множества $\{\varphi : \Delta(\varphi_k) \neq 0, k = -N+1, \dots, -1, \varphi \in H^{N+1}\}$ отображения $H^{N+1} \rightarrow H_{t-}$, определяемые формулами $\varphi \rightarrow x^1(\cdot, \varphi)$ и $\varphi \rightarrow x_\delta^2(\cdot, \varphi)$, являются регуляризирующими.

Доказательство. Проводится аналогично [8, теорема 5]. $\square$

Функции $x^1(\cdot, \varphi) \in H_{t-}$ и $x_\delta^2(\cdot, \varphi) \in H_{t-}$ будем называть асимптотическими регуляризованными решениями системы (0.1) на отрезке $[t^-, -r]$.

Построим асимптотические регуляризованные решения для конкретной системы с запаздыванием.

Пример. Рассмотрим скалярное уравнение

$$x'(t) = \frac{1}{2}x(t) + 2x(t-1)$$

с заданной начальной функцией $\varphi(\theta) = \sin(\theta)$, $\theta \in [-1, 0]$. Построим регуляризованное решение на отрезке $[-4, -1]$. Система имеет следующие параметры: $n = 1$, $A = 1/2$, $B = 2$, $r = 1$. Находим $\lambda_1 = 4$, $T = 1$, $\Delta(\varphi) = 2\varphi(-1) - (1/2)(\varphi'(-1) - (1/2)\varphi(-1))$, $\gamma(\varphi) = (1/4)\Delta^2(\varphi)$.

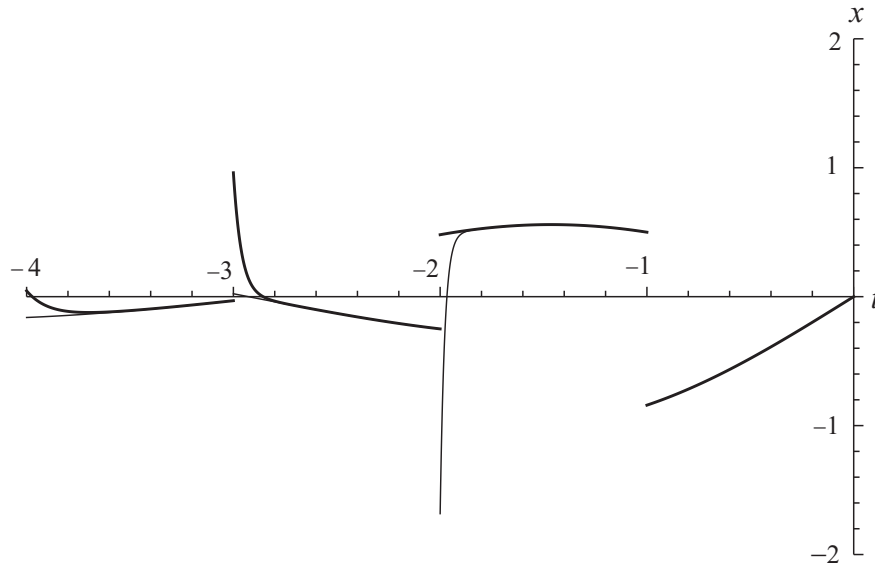
Первое асимптотическое регуляризованное решение, отвечающее начальной функции $\varphi(\theta) = \sin(\theta)$, $\theta \in [-1, 0]$, определяется формулами

$$\begin{aligned} x^1(-1, \varphi) &= -\sin(1), & x^1(t, \varphi) &= \frac{1}{2}\cos(t+1) - \frac{1}{4}\sin(t+1), & t &\in [-2, -1), \\ x^1(t, \varphi) &= -\frac{1}{4}\cos(t+2) - \frac{3}{16}\sin(t+2), & t &\in [-3, -2), \\ x^1(t, \varphi) &= -\frac{1}{32}\cos(t+3) + \frac{11}{64}\sin(t+3), & t &\in [-4, -3). \end{aligned}$$

Значения второго регуляризирующего оператора определяются формулами

$$R_2(\delta, \varphi)(\theta) = \exp(-2\gamma^{1/3}\delta^{-2/3}(\theta+1))\Delta(\varphi) + (1/2)(\varphi'(\theta) - (1/2)\varphi(\theta)), \quad \theta \in [-1, 0], \quad \varphi \in H^4.$$

На приведенном ниже рисунке графики асимптотического регуляризованного решения $x_\delta^2(\cdot, \varphi)$ изображены черным цветом, а графики асимптотического регуляризованного решения $x^1(\cdot, \varphi)$ — серым. Вычисления произведены при значении допустимой погрешности $\delta = 10^{-2}$.



Асимптотические регуляризованные решения x^1 и x_δ^2 .

Заключительные замечания

В заключение отметим, что использование стабилизатора (0.2) отразилось в новом порядке зависимости параметра регуляризации α от допустимой погрешности δ — формула (4.2), тогда как в [8] решение уравнения невязки имеет вид

$$\alpha(\delta, \varphi) = \gamma^{-4/3}(\varphi)\delta^{8/3} + O(\delta^{10/3}, \varphi).$$

Однако при этом асимптотические формулы значений регуляризирующих операторов $R(\delta, \varphi)$, полученные для обоих стабилизирующих функционалов, имеют один порядок $O(\delta^{2/3}; \theta, \varphi)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
2. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
3. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 424 с.
4. Зверкин А.М. О полноте системы решений типа Флоке для уравнения с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 3. С. 474–478.
5. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 352 с.
6. Долгий Ю.Ф., Путилова Е.Н. Продолжение назад решений линейного дифференциального уравнения с запаздыванием как некорректная задача // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 8. С. 1317–1323.
7. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М., 1986. 288 с.
8. Долгий Ю.Ф., Сурков П.Г. Асимптотика регуляризованных решений линейной автономной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием // Проблемы динамического управления: сб. науч. тр. / фак.-т ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова. 2007. Вып. 2. С. 71–99.
9. Долгий Ю.Ф., Сурков П.Г. Асимптотика регуляризованных решений линейной неавтономной системы дифференциальных уравнений с опережением // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 4. С. 467–485.
10. Долгий Ю.Ф., Сурков П.Г. Некорректная задача восстановления численности популяции в математической модели Хатчинсона // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 70–84.
11. Долгий Ю.Ф., Сурков П.Г. Асимптотика регуляризованных решений некорректной задачи Коши для автономной линейной системы дифференциальных уравнений с соизмеримыми запаздываниями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. С. 107–118.
12. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151, № 3. С. 501–504.
13. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректно поставленных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
14. Долгий Ю.Ф. Характеристическое уравнение в задаче асимптотической устойчивости периодической системы с последствием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 1. С. 85–96.
15. Рапопорт И.М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Киев: АН УССР, 1954. 292 с.
16. Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.
17. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
18. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982. 332 с.

Сурков Платон Геннадьевич

канд. физ.-мат. наук

науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: platon.surkov@gmail.com

УДК 517.9

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ: ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И РЕЛАКСАЦИИ¹

А. А. Толстоногов

В конечномерном пространстве рассматривается дифференциальное включение, значениями правой части которого являются невыпуклые, замкнутые, возможно, неограниченные множества. Доказываются теоремы существования решений, а также теорема релаксации. Теоремы релаксации для дифференциального включения с ограниченной правой частью, как правило, доказываются в предположении липшицевости. При доказательстве теоремы релаксации для дифференциального включения, рассматриваемого в данной работе, вместо липшицевости многозначного отображения мы используем понятие $(\rho - H)$ -липшицевости.

Ключевые слова: неограниченные дифференциальные включения, теоремы существования и релаксации.

A. A. Tolstonogov. Differential inclusions with unbounded right-hand side. Existence and relaxation theorems.

A differential inclusion in which the values of the right-hand side are nonconvex closed possibly unbounded sets is considered in a finite-dimensional space. Existence theorems for solutions and a relaxation theorem are proved. Relaxation theorems for a differential inclusion with bounded right-hand side, as a rule, are proved under the Lipschitz condition. In our paper, in the proof of the relaxation theorem for the differential inclusion, we use the notion of $\rho - H$ Lipschitzness instead of the Lipschitzness of a multivalued mapping.

Keywords: unbounded differential inclusions, existence and relaxation theorems.

1. Введение

Пусть $T = [0, 1]$ — отрезок числовой прямой $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ — конечномерное евклидовое пространство, $\text{cl}(\mathbb{R}^n)$ — совокупность всех непустых замкнутых подмножеств из $\mathbb{R}^n$ и $F : T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{cl}(\mathbb{R}^n)$ — многозначное отображение. Мы изучаем дифференциальные включения

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad x(0) = x_0, \quad (1.1)$$

$$\dot{x} \in \overline{\text{co}} F(t, x), \quad x(0) = x_0, \quad (1.2)$$

где символ $\overline{\text{co}}$ означает замкнутую выпуклую оболочку множества. Нас будут интересовать вопросы существования как локальных, так и глобальных решений включений (1.1) и (1.2), а также аппроксимация решений включения (1.2) решениями включения (1.1). Это свойство называется релаксацией. Для случая, когда значениями отображения $F(t, x)$ являются непустые, замкнутые, ограниченные множества, вопросы существования решений включения (1.1) хорошо изучены, начиная с работ Важевского [1] и Филиппова [2]. Основополагающим предположением как в работе [2], так и в последующих работах других авторов, при котором справедлива теорема релаксации, являлось неравенство

$$\text{haus}(F(t, x), F(t, y)) \leq k(t)\|x - y\|, \quad (1.3)$$

где $\text{haus}(\cdot, \cdot)$ означает метрику Хаусдорфа на пространстве непустых, замкнутых, ограниченных множеств, а $k(t)$ — суммируемая на T функция.

¹Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 13-01-00287) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-5007.2014.9).

Позднее неравенство (1.3) было ослаблено ([3] и др.) до неравенства

$$\text{haus}(\overline{\text{co}} F(t, x), \overline{\text{co}} F(t, y)) \leq k(t)\|x - y\|. \quad (1.4)$$

Как неравенство (1.3), так и неравенство (1.4) являются вполне приемлемыми, когда значениями отображения F являются замкнутые, ограниченные множества. Но, строго говоря, эти неравенства становятся обременительными, когда значениями отображения F являются неограниченные множества. Между тем неограниченность значений многозначных отображений является вполне естественным свойством дифференциальных включений, которые возникают в теории оптимального управления ([4] и др.).

Цель этой работы — получить аналог теоремы релаксации при более приемлемом условии, чем неравенство (1.3), для случая, когда значениями отображения F являются замкнутые, неограниченные множества.

Основными результатами в работе являются три теоремы. В первой теореме мы доказываем существование глобального решения включения (1.1). Во второй теореме доказываем существование локального решения включения (1.1) путем сведения этой задачи к задаче существования глобального решения расширенного дифференциального включения. В третьей теореме доказывается аналог теоремы релаксации. Подобные вопросы рассматривались в работе [5], в которой для многозначных отображений с неограниченными значениями модифицировались схемы доказательств, используемые в [2] и основанные на построении приближенных решений. Наши результаты дополняют и обобщают результаты работы [5]. Они получены при более общих предположениях путем использования теорем о существовании непрерывных селекторов многозначных отображений с невыпуклыми, замкнутыми значениями [3] и теорем о неподвижных точках.

2. Основные обозначения, определения и вспомогательные результаты

Пусть $T = [0, 1]$ — отрезок числовой прямой $\mathbb{R}$ с мерой Лебега μ и с σ -алгеброй $\mathcal{L}$ измеримых по Лебегу подмножеств из T . Пусть X — сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и метрикой $d(\cdot, \cdot)$, порожденной этой нормой, $d(x, A)$ означает расстояние от точки x до множества $A \subset X$.

Для пространства X символ ω - X означает, что пространство X наделено слабой топологией. Такое же обозначение мы используем и для подмножеств из X . Во всех остальных случаях мы считаем, что пространство X и его подмножества наделены сильной (нормированной) топологией.

Введем обозначения: $\emptyset$ — пустое множество, 2^X — совокупность всех подмножеств из X , включая множество $\emptyset$, $2^X \setminus \{\emptyset\}$ — совокупность всех непустых подмножеств из X , $\text{cl}(X)$ — совокупность всех непустых, замкнутых подмножеств из X , Θ — нулевой элемент пространства X , $\mathbb{B}$ — открытый единичный шар с центром в Θ , $\overline{\mathbb{B}}$ — замыкание $\mathbb{B}$.

Пусть Y — метрическое пространство. Многозначное отображение $\Gamma : Y \rightarrow 2^X$ обычно называют отношением [6] и отождествляют отображение Γ с его графиком.

Многозначное отображение $\Gamma : Y \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ называется полунепрерывным снизу по Вьеторису в точке $y_0 \in Y$, если для любого открытого множества $U \subset X$, $F(y_0) \cap U \neq \emptyset$ существует окрестность $V(y_0)$ точки y_0 такая, что $\Gamma(y) \cap U \neq \emptyset$ для любого $y \in V(y_0)$.

Многозначное отображение $\Gamma : Y \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ называется полунепрерывным снизу по Вьеторису на Y , если оно полунепрерывно снизу в каждой точке $y \in Y$. Из определения полунепрерывности снизу по Вьеторису вытекает, что многозначное отображение $\Gamma : Y \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ полунепрерывно снизу по Вьеторису тогда и только тогда, когда для любых $y \in Y$, $x \in \Gamma(y)$ и любой последовательности $y_n \rightarrow y$ существует последовательность $x_n \in \Gamma(y_n)$, $n \geq 1$, сходящаяся к x . Более того, многозначное отображение $\Gamma : Y \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ полунепрерывно снизу по Вьеторису тогда и только тогда, когда отображение $\overline{\Gamma} : Y \rightarrow \text{cl}(X)$ полунепрерывно снизу по

Вьеторису, где $\bar{\Gamma}(y)$ — замыкание множества $\Gamma(y)$. Из этого свойства вытекает, что многозначное отображение $\Gamma : Y \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ полунепрерывно снизу по Вьеторису тогда и только тогда, когда для любого $x \in X$ функция $y \rightarrow d(x, \Gamma(y))$ полунепрерывна сверху [7].

Пусть $\mathcal{B}(Y)$ — σ -алгебра борелевских множеств из Y и $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(Y)$ — σ -алгебра подмножеств из $T \times Y$, порожденная множествами $A \times B$, $A \in \mathcal{L}$, $B \in \mathcal{B}(Y)$.

Следуя [6], многозначное отображение $\Gamma : T \rightarrow 2^X$ назовем (слабо) измеримым, если множество $\Gamma^{-1}(U) = \{t \in T; \Gamma(t) \cap U \neq \emptyset\} \in \mathcal{L}$ для любого (открытого) замкнутого множества $U \subset X$. Если $Q \in \mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(Y)$ и $\Gamma : Q \rightarrow 2^X$, то отображение Γ называется (слабо) $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(Y)$ измеримым на Q , если $\Gamma^{-1}(U) = \{(t, y) \in Q, \Gamma(t, y) \cap U\} \in \mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(Y)$ для любого (открытого) замкнутого множества $U \subset X$.

Подобные определения мы используем и для однозначных отображений со значениями в $X \cup \{\emptyset\}$. Связи между измеримыми и слабо измеримыми отображениями и отношениями подробно изучены в [6].

Однозначная функция $f : T \times Y \rightarrow X$ называется функцией Каратеодори, если она измерима по $t \in T$ и непрерывна по $y \in Y$.

Пусть $C \in 2^X$. Положим

$$d(x, C) = \inf_{y \in C} \|x - y\|, \quad x \in X,$$

считая, что $d(x, C) = +\infty$, если $C = \emptyset$.

Через ρB , $\rho > 0$, мы обозначаем открытый шар в X с центром в Θ радиуса ρ , а через $\rho \bar{B}$, $\rho \geq 0$, — замкнутый шар с центром в Θ радиуса ρ .

Пусть

$$C\rho = C \cap \rho \bar{B}, \quad \rho \geq 0. \quad (2.1)$$

Полуотклонение множества $C \in 2^X$ от множества $D \in 2^X$ определяется как

$$e(C, D) = \sup_{x \in C} d(x, D) \quad (2.2)$$

с естественным соглашением $e = 0$, если $C = \emptyset$. Заметим, что наши определения влекут $e = +\infty$, если $C \neq \emptyset$ и $D = \emptyset$.

Определим ρ -Хаусдорфовое (ρ - H) расстояние, $\rho \geq 0$, между множествами $C, D \in 2^X \setminus \{\emptyset\}$ следующим образом [8]:

$$\text{haus}_\rho(C, D) = \max\{e(C_\rho, D), e(D_\rho, C)\}. \quad (2.3)$$

Из наших соглашений вытекает, что $\text{haus}_\rho(C, D) \neq +\infty$, $\rho \geq 0$, для $C, D \in 2^X \setminus \{\emptyset\}$. Отметим, что если $C, D \in \text{cl}(X)$, то $\text{haus}_\rho(C, D) = 0$ для всех $\rho \geq 0$ тогда и только тогда, когда $C = D$. Расстояние $\text{haus}_\rho(\cdot, \cdot)$, $\rho \geq 0$, не является метрикой, поскольку для него не выполняется неравенство треугольника.

Через $C(T, X)$ мы обозначаем банахово пространство непрерывных функций из T в X с топологией равномерной сходимости на T . В пространстве $L^1(T, X)$ наряду со стандартной нормой

$$\|x\|_1 = \int_T \|x(s)\| ds$$

мы рассмотрим “слабую” норму [9]

$$\|x\|_\omega = \max_{0 \leq a \leq b \leq 1} \left\| \int_a^b x(s) ds \right\|. \quad (2.4)$$

Отметим, что норма (2.4) эквивалентна норме

$$|||x||| = \max_{0 \leq t \leq 1} \left\| \int_0^t x(s) ds \right\|. \quad (2.5)$$

Пространство $L^1(T, X)$ с нормой (2.4) будем обозначать $L_\omega^1(T, X)$.

О п р е д е л е н и е 2.1. Пусть $Q \subset T \times X$, $F : Q \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ и $(t^*, x^*) \in Q$. Будем говорить, что отображение F является локально интегрально $(\rho - H)$ -липшицевым в точке $(t^*, x^*) \in Q$, если существуют константы $\varepsilon > 0$, $\beta \geq 0$ и неотрицательная, интегрируемая на $(t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon)$ функция $k(t)$ такая, что

$$\text{haus}_\rho(F(t, x), F(t, y)) \leq (k(t) + \beta\rho)\|x - y\| \quad (2.6)$$

для $(t, x), (t, y) \in [(t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon) \times (x^* + \varepsilon B)] \cap Q$ и всех $\rho \geq 0$.

О п р е д е л е н и е 2.2. Пусть $Q \subset T \times X$ и $F : Q \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$. Отображение F называется интегрально $(\rho - H)$ -липшицевым на Q , если существуют $\beta \geq 0$ и $k(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$ такие, что неравенство (2.6) выполняется для всех $(t, x), (t, y) \in Q$ и всех $\rho \geq 0$.

В дальнейшем нам понадобится ряд утверждений, которые мы приводим для удобства.

Утверждение 2.1 [8, утверждение 1.4]. Пусть $C, D \in \text{cl}(X)$ выпуклы и таковы, что C_{ρ_0} и D_{ρ_0} не пусты для некоторого $\rho_0 \geq 0$. Тогда для всех $\rho > \rho_0$

$$\text{haus}(C_\rho, D_\rho) \leq \frac{2\rho}{\rho - \rho_0} \text{haus}_\rho(C, D). \quad (2.7)$$

Утверждение 2.2. Пусть $K \subset C(T, X)$ — компакт и $F : T \times X \rightarrow \text{cl}(X)$. Предположим, что

- (1) отображение $x \rightarrow F(t, x)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису п.в. на T ;
- (2) для каждого $x(\cdot) \in K$ отображение $t \rightarrow F(t, x(t))$ слабо измеримо;
- (3) существует функция $m \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$ такая, что

$$\sup\{\|v\|; v \in F(t, x(t))\} \leq m(t), \quad x(\cdot) \in K \text{ п.в. на } T. \quad (2.8)$$

Тогда существует непрерывная функция $g : K \rightarrow L^1(T, X)$ такая, что

$$g(x)(t) \in \overline{\text{co}} F(t, x(t)), \quad x(\cdot) \in K \text{ п.в.}$$

и для любой такой функции g и любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная функция $g_\varepsilon : K \rightarrow L^1(T, X)$ такая, что

$$g_\varepsilon(x)(t) \in F(t, x(t)) \text{ п.в.}$$

и

$$\|g(x) - g_\varepsilon(x)\|_\omega < \varepsilon, \quad x(\cdot) \in K. \quad (2.9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение вытекает из [3, лемма 3.3] и эквивалентности норм (2.4) и (2.5).

Утверждение 2.3. Пусть $X = \mathbb{R}^n$, $m \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$ и

$$G = \{f \in L^1(T, \mathbb{R}^n); \|f(t)\| \leq m(t) \text{ п.в. на } T\}. \quad (2.10)$$

Тогда на множестве G топологии пространств $\omega\text{-}L^1(T, \mathbb{R}^n)$ и $L_\omega^1(T, \mathbb{R}^n)$ совпадают и, следовательно, множество G является выпуклым, метризуемым компактом в пространстве $L_\omega^1(T, \mathbb{R}^n)$.

Утверждение является следствием теоремы в [9], если воспользоваться свойством Лузина для измеримых функций и компактностью шара $\mathbb{B}$ в $\mathbb{R}^n$.

3. Глобальные решения

В этом разделе мы рассмотрим вопросы существования глобального решения включения (1.1). Под глобальным решением включения (1.1) мы понимаем абсолютно непрерывную функцию $x : T \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x(0) = x_0$, почти всюду на T удовлетворяющую (1.1).

Сделаем предположения, относящиеся к существованию глобальных решений.

Г и п о т е з ы $H_G(F)$. Отображение $F : T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{cl}(\mathbb{R}^n)$ обладает следующими свойствами:

- (1) отображение $x \rightarrow F(t, x)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису п.в. на T ;
- (2) отображение $t \rightarrow F(t, x(t))$ является измеримым для любой функции $x(\cdot) \in C(T, \mathbb{R}^n)$.

Лемма 3.1. Пусть выполняются гипотезы $H_G(F)$ и

$$d(\Theta, F(t, x)) < m(t) + n(t)\|x\|, \quad (3.1)$$

где $m(t) > 0$, $n(t) > 0$ и $m(\cdot), n(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$. Тогда отображение

$$\Phi(t, x) = F(t, x) \cap (m(t) + n(t)\|x\|)B \quad (3.2)$$

является отображением из $T \times \mathbb{R}^n$ в $2^{\mathbb{R}^n} \setminus \{\emptyset\}$ со следующими свойствами:

- (1) отображение $x \rightarrow \Phi(t, x)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису п.в. на T ;
- (2) отображение $t \rightarrow \Phi(t, x(t))$ слабо измеримо для любой функции $x(\cdot) \in C(T, \mathbb{R}^n)$;
- (3) свойствами (1) и (2) обладает и отображение

$$\overline{\Phi}(t, x) = \overline{F(t, x) \cap (m(t) + n(t)\|x\|)B},$$

где черта сверху означает замыкание в $\mathbb{R}^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непустота множеств $\Phi(t, x)$, $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$ следует из неравенства (3.1). Пусть $x \in \mathbb{R}^n$ и $v \in \Phi(t, x)$ произвольны. Возьмем последовательность $x_k \in \mathbb{R}^n$, $k \geq 1$, сходящуюся к x . Из (3.1) вытекает, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\|v\| < m(t) + n(t)\|x\| - \varepsilon. \quad (3.3)$$

Поскольку отображение $x \rightarrow F(t, x)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису, то существует последовательность $v_k \rightarrow v$ такая, что

$$v_k \in F(t, x_k), \quad k \geq 1. \quad (3.4)$$

Из сходимостей $x_k \rightarrow x$, $v_k \rightarrow v$, $k \geq 1$, следует, что существует номер k_0 такой, что

$$\|v_k - v\| < \varepsilon/2, \quad n(t)\|x_k - x\| < \varepsilon/2, \quad k \geq k_0.$$

Из этих неравенств и (3.3) вытекает, что

$$\|v_k\| < m(t) + n(t)\|x_k\|, \quad k \geq k_0. \quad (3.5)$$

Воспользовавшись (3.4), (3.5), мы получим, что

$$v_k \in \Phi(t, x_k), \quad k \geq k_0.$$

Но это означает, что отображение $x \rightarrow \Phi(t, x)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису.

Пусть $x(\cdot) \in C(T, \mathbb{R}^n)$, $f(t) = m(t) + n(t)\|x(t)\|$ и $U(t) = f(t)B$. Согласно [7, лемма 1.3] существует последовательность компактов $T_k \subset T_{k+1}$, $k \geq 1$, такая, что $\mu\left(T \setminus \bigcup_{k \geq 1} T_k\right) = 0$ и сужение $F(t, x(t))$ на T_k , $k \geq 1$, полунепрерывно снизу по Вьеторису, а сужение $f(t)$ на T_k ,

$k \geq 1$, непрерывно. Рассуждая как при доказательстве утверждения (1), мы получим, что сужение отображения $F(t, x(t)) \cap U(t)$ на T_k , $k \geq 1$, полунепрерывно снизу по Вьеторису. Поскольку $\mu\left(T \setminus \bigcup_{k \geq 1} T_k\right) = 0$, то отображение $t \rightarrow F(t, x(t)) \cap U(t) = \Phi(t, x(t))$ слабо измеримо.

Полунепрерывность снизу по Вьеторису отображения $x \rightarrow \bar{\Phi}(t, x)$ вытекает из утверждения (1), а слабая измеримость отображения $t \rightarrow \bar{\Phi}(t, x(t))$, $x(\cdot) \in C(T, \mathbb{R}^n)$, — из утверждения (2) и [6, утверждение 2.6]. Лемма доказана.

Теорема 3.1. Пусть $y : T \rightarrow \mathbb{R}^n$, $y(0) = y_0$ — абсолютно непрерывная функция. $F : T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{cl}(\mathbb{R}^n)$ — многозначное отображение, удовлетворяющее гипотезам $H_G(F)$. Тогда для любых $m(\cdot), n(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$, $m(t) > 0$, $n(t) > 0$, при которых имеет место неравенство

$$d(\dot{y}(t), F(t, x)) < m(t) + n(t)\|y(t) - x\| \text{ п.в.}, \quad (3.6)$$

$x \in \mathbb{R}^n$, существует глобальное решение $x(t)$, $x(0) = x_0$ включения (1.1) такое, что

$$\|x(t) - y(t)\| \leq r(t), \quad \|\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\| \leq n(t)r(t) + m(t) \text{ п.в.}, \quad (3.7)$$

$$r(t) = \|x_0 - y_0\| \exp l(t) + \int_0^t \exp(l(t) - l(s)) m(s) ds, \quad (3.8)$$

$$l(t) = \int_0^t n(s) ds. \quad (3.9)$$

Доказательство. Пусть

$$\Phi(t, z) = -\dot{y}(t) + F(t, z + y(t)), \quad z \in \mathbb{R}^n. \quad (3.10)$$

Из (3.6), (3.10) вытекает, что

$$d(\Theta, \Phi(t, z)) < m(t) + n(t)\|z\|, \quad z \in \mathbb{R}^n.$$

Из этого неравенства и свойств функций $m(t) > 0$, $n(t) > 0$ мы получаем, что

$$\Phi(t, z) \cap (m(t) + n(t)\|z\|)B \neq \emptyset. \quad (3.11)$$

Рассмотрим многозначное отображение

$$\Gamma(t, z) = \overline{\Phi(t, z) \cap (m(t) + n(t)\|z\|)B}. \quad (3.12)$$

Из гипотез $H_G(F)$, (3.10), (3.11) и леммы 3.1 следует, что отображение $z \rightarrow \Gamma(t, z)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису, а отображение $t \rightarrow \Gamma(t, z(t))$ слабо измеримо для любой функции $z(\cdot) \in C(T, \mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{z} \in \Gamma(t, z), \quad z(0) = z_0 = x_0 - y_0, \quad (3.13)$$

и уравнение

$$\dot{r}(t) = m(t) + n(t)r(t), \quad r(0) = r_0 = \|x_0 - y_0\|, \quad (3.14)$$

которое имеет решение $r(t)$, $r(0) = r_0$, определенное на T и представимое в виде (3.8), (3.9). Пусть

$$S = \{v \in L^1(T, \mathbb{R}^n); \|v(t)\| \leq \dot{r}(t) \text{ п.в.}\}. \quad (3.15)$$

Множество S , наделенное топологией пространства $L^1_\omega(T, \mathbb{R}^n)$, будем обозначать S_ω .

Из (3.15), равенства норм (2.4) и (2.5) и утверждения 2.3 вытекает, что множество S_ω является выпуклым, метризуемым компактом, а оператор $\mathcal{T} : S_\omega \rightarrow C(T, \mathbb{R}^n)$, определенный равенством

$$\mathcal{T}(v)(t) = z_0 + \int_0^t v(s) ds, \quad v \in S, \quad (3.16)$$

является непрерывным. Поэтому множество

$$\mathcal{K} = \{z \in C(T, \mathbb{R}^n); z = \mathcal{T}(v); v \in S_\omega\} \quad (3.17)$$

является выпуклым компактом в $C(T, \mathbb{R}^n)$. Пусть $z(\cdot) \in \mathcal{K}$. Тогда из (3.15), (3.16) вытекает, что $\|z(t)\| \leq r(t)$, $t \in T$. Поэтому

$$\sup\{\|v\|; v \in \Gamma(t, z(t))\} \leq m(t) + n(t)\|z(t)\| \leq \dot{r}(t). \quad (3.18)$$

Из этого неравенства, свойств отображения $\Gamma(t, x)$ и утверждения 2.2 следует, что существует непрерывное отображение $g : \mathcal{K} \rightarrow L^1(T, \mathbb{R}^n)$ такое, что

$$g(z)(t) \in \Gamma(t, z(t)) \text{ п.в.} \quad (3.19)$$

Из (3.15), (3.17)–(3.19) вытекает, что оператор $g(\mathcal{T}(v))$ является непрерывным из S_ω в S_ω . Поэтому согласно теореме Шаудера о неподвижной точке существует точка $v_* \in S_\omega$ такая, что

$$v_* = g(\mathcal{T}(v_*)). \quad (3.20)$$

Полагая $z_* = \mathcal{T}v_*$ и учитывая (3.16), (3.19) и (3.20), мы получим

$$\begin{aligned} z_*(t) &= z_0 + \int_0^t v_*(s) ds, \\ v_*(t) &\in \Gamma(t, z_*(t)) \text{ п.в.} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Так как $\dot{z}_*(t) = v_*(t)$ п.в., то из (3.21) вытекает, что $z_*(t)$, $z_*(0) = z_0$ является решением включения (3.13), удовлетворяющим неравенствам

$$\|z_*(t)\| \leq r(t), \quad t \in T, \quad \|\dot{z}_*(t)\| \leq \dot{r}(t) \text{ п.в.} \quad (3.22)$$

Положим

$$x_*(t) = z_*(t) + y(t), \quad t \in T. \quad (3.23)$$

Воспользовавшись (3.10), (3.12), (3.22) и (3.23), мы получаем, что $x_*(t)$, $x_*(0) = x_0$ является решением включения (1.1), удовлетворяющим неравенствам (3.7). Теорема доказана.

Выясним условия, при которых справедливы гипотезы $H_G(F)$.

Пусть $y : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывная функция, $\alpha > 0$ и

$$Q(y)(\alpha) = \{(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n; \|y(t) - x\| \leq \alpha\}. \quad (3.24)$$

Лемма 3.2. Пусть $F : Q(y)(\alpha) \rightarrow \text{cl}(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим следующие утверждения:

(а) для любого $z \in \mathbb{R}^n$ функция $x \rightarrow d(z, F(t, x))$, $x \in y(t) + \alpha\bar{B}$ непрерывна, а функция $t \rightarrow d(z, F(t, x(t)))$ измерима для любой функции $x(\cdot) \in C(T, \mathbb{R}^n)$, $x(t) \in y(t) + \alpha\bar{B}$, $t \in T$;

(б) для любого $z \in \mathbb{R}^n$ функция $(t, x) \rightarrow d(z, F(t, x))$ является $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ измеримой на $Q(y)(\alpha)$;

(с) отображение $(t, x) \rightarrow F(t, x)$ является слабо $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ измеримым на $Q(y)(\alpha)$;

(д) отображение $(t, x) \rightarrow F(t, x)$ является $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ измеримым на $Q(y)(\alpha)$;

(e) для любого $x(\cdot) \in C(T, \mathbb{R}^n)$, $x(t) \in y(t) + \alpha \overline{B}$, $t \in T$, отображение $t \rightarrow F(t, x(t))$ измеримо;

(f) для любого $x(\cdot) \in C(T, \mathbb{R}^n)$, $x(t) \in y(t) + \alpha \overline{B}$, $t \in T$, отображение $t \rightarrow F(t, x(t))$ слабо измеримо;

(k) отображение F является локально интегрально $(\rho - H)$ -липшицевым в каждой точке $(t^*, x^*) \in Q(y)(\alpha)$;

(l) отображение $x \rightarrow F(t, x)$, $x \in y(t) + \alpha \overline{B}$ полунепрерывно снизу по Вьеторису.

Имеют место следующие импликации:

$$a) \implies b) \iff c) \iff d) \implies e) \iff f);$$

$$a) \implies l), \quad k) \implies l).$$

Доказательство. Пусть справедливо утверждение (a). Обозначим через $pr_t x$ проекцию точки $x \in \mathbb{R}^n$ на множество $y(t) + \alpha \overline{B}$. Легко показать, что для каждого x функция $t \rightarrow pr_t x$ непрерывна. Известно, что

$$\|pr_t x - pr_t z\| \leq \|x - z\|, \quad t \in T, \quad x, z \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $\Phi(t, x) = F(t, pr_t x)$. Тогда из (a) и свойств функции $(t, x) \rightarrow pr_t x$, $t \in T$, $x \in \mathbb{R}^n$ следует, что для каждого $z \in \mathbb{R}^n$ функция $(t, x) \rightarrow d(z, \Phi(t, x))$, $t \in T$, $x \in \mathbb{R}^n$ является функцией Каратеодори. Согласно [6, теорема 6.1] функция $(t, x) \rightarrow d(z, \Phi(t, x))$ является $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ измеримой для любого $z \in \mathbb{R}^n$. Так как множество $Q(y)(\alpha)$ является $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ измеримым, то сужение функции $(t, x) \rightarrow d(z, \Phi(t, x))$ на множество $Q(y)(\alpha)$ является $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ измеримой функцией. Поскольку сужение функции $(t, x) \rightarrow d(z, \Phi(t, x))$ на $Q(y)(\alpha)$ совпадает с функцией $d(z, F(t, x))$, то импликация $a) \implies b)$ доказана.

Импликации $b) \iff c) \iff d)$ следуют из утверждений ii) в теореме 3.5 [6].

Докажем импликацию $d) \implies e)$. Пусть $x(\cdot) \in C(T, \mathbb{R}^n)$, $x(t) \in y(t) + \alpha \overline{B}$, $t \in T$ и $V \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое множество. Обозначим

$$\Lambda = \{t \in T, F(t, x(t)) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Так как множество

$$W = \{(t, x) \in Q(y)(\alpha); F(t, x) \cap V \neq \emptyset\} \in \mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

то множество $W \cap gr x(\cdot) \in \mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, где $gr x(\cdot)$ — график функции $x(\cdot)$.

Рассмотрим отношение $\varphi(t) = \{x \in X \cup \{\emptyset\}; (t, x) \in W \cap gr x(\cdot)\}$ с замкнутыми значениями. Поскольку $gr \varphi(\cdot) = W \cap gr x(\cdot)$, то из утверждений iii) в теореме 3.5 [6] вытекает, что отношение $t \rightarrow \varphi(t)$ измеримо. Тогда согласно [6, утверждение 2.2] множество $\text{dom } \varphi(\cdot) = \{t \in T, \varphi(t) \neq \emptyset\}$ измеримо. Так как $\Lambda = \text{dom } \varphi(\cdot)$, то отображение $t \rightarrow F(t, x(t))$ измеримо.

Импликация $e) \iff f)$ вытекает из утверждений iii) в теореме 3.5 [6]. Согласно (a) для каждого $z \in \mathbb{R}^n$ функция $x \rightarrow d(z, F(t, x))$, $x \in y(t) + \alpha \overline{B}$ непрерывна. Теперь импликация $a) \implies e)$ следует из [7, лемма 1.2].

Докажем импликацию $k) \implies l)$. Пусть $(t^*, x^*) \in Q(y)(\alpha)$. Тогда согласно определению 2.1 существуют константы $\varepsilon > 0$, $\beta \geq 0$ и неотрицательная, интегрируемая на $(t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon)$ функция $k(t)$ такие, что имеет место неравенство (2.6). Возьмем $v \in F(t^*, x^*)$, и пусть последовательность $x_k \rightarrow x$, $x_k \in y(t) + \alpha \overline{B}$, $k \geq 1$. Тогда существует $k_0 > 0$ такое, что $\|x_k - x^*\| < \varepsilon$ при $k \geq k_0$. Поэтому

$$d(v, F(t^*, x_k)) \leq (k(t^*) + \beta \|v\|) \|x^* - x_k\|.$$

Из этого неравенства непосредственно вытекает, что существует последовательность $v_k \in F(t^*, x_k)$, $k \geq 1$, сходящаяся к v . Тем самым $k) \implies l)$. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 3.1. Если в лемме 3.2 вместо множества $Q(y)(\alpha)$ взять пространство $T \times \mathbb{R}^n$, то все импликации сохраняют свою силу, если в утверждении (a) предположить, что для любого $y \in \mathbb{R}^n$ функция $(t, x) \rightarrow d(y, F(t, x))$ является функцией Каратеодори.

4. Локальные решения

В этом разделе мы рассмотрим вопросы существования локальных решений включения (1.1).

Лемма 4.1. Пусть $y : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывная функция, $gr y(\cdot)$ — ее график, $\delta > 0$ и $F : Q(y)(\delta) \rightarrow cl(\mathbb{R}^n)$ — многозначное отображение, где $Q(y)(\delta)$ — множество, определенное формулой (3.24). Предположим, что в каждой точке $(t^*, y^*) \in gr y(\cdot)$ отображение F является локально интегрально $(\rho - H)$ -липшицевым. Тогда существует $\alpha > 0$ такое, что отображение $F : Q(y)(\alpha) \rightarrow cl(\mathbb{R}^n)$ является интегрально $(\rho - H)$ -липшицевым на $Q(y)(\alpha)$, т. е. существуют $\beta \geq 0$ и функция $k(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$ такие, что для любых $(t, x), (t, z) \in Q(y)(\alpha)$, $\rho \geq 0$ будет иметь место неравенство

$$\text{haus}_\rho(F(t, x), F(t, z)) \leq (k(t) + \beta\rho) \|x - z\|. \quad (4.1)$$

Доказательство. Обозначим через $\mathbb{R}_*^{n+1}$ пространство $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|(t, x)\|_* = \max\{|t|, \|x\|\}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

а через $\mathbb{R}^{n+1}$ — пространство $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ с евклидовой нормой $\|\cdot\|$.

Пусть $\varepsilon \mathbb{B}_*^{n+1}$ и $\varepsilon \mathbb{B}^{n+1}$ — открытые шары в пространствах $\mathbb{R}_*^{n+1}$ и $\mathbb{R}^{n+1}$ радиуса $\varepsilon > 0$ с центрами в начале координат.

Согласно определению 2.1 для каждой точки $(t^*, y^*) \in gr y(\cdot)$ существуют $0 < \varepsilon(t^*, y^*) \leq \delta$, $\beta(t^*, y^*) \geq 0$ и неотрицательная, интегрируемая на $(t^* - \varepsilon(t^*, y^*), t^* + \varepsilon(t^*, y^*)) \cap T$ функция $k(t^*, y^*)(t)$ такая, что будет иметь место неравенство

$$\text{haus}_\rho(F(t, x), F(t, z)) \leq (k(t^*, y^*)(t) + \beta(t^*, y^*)\rho) \|x - z\| \quad (4.2)$$

для всех

$$(t, x), (t, z) \in [(t^*, y^*) + \varepsilon(t^*, y^*) B_*^{n+1}] \cap Q(y)(\delta), \quad \rho \geq 0. \quad (4.3)$$

Положим $V(t^*, y^*, \varepsilon(t^*, y^*)) = (t^*, y^*) + \varepsilon(t^*, y^*) B_*^{n+1}$. Тогда семейство множеств $V(t^*, y^*, \varepsilon(t^*, y^*))$, $(t^*, y^*) \in gr y(\cdot)(\delta)$ образует открытое покрытие компакта $gr y(\cdot)(\delta)$ в $\mathbb{R}_*^{n+1}$.

Пусть $V(t_i^*, y_i^*, \varepsilon(t_i^*, y_i^*))$, $1 \leq i \leq l$, — конечное подпокрытие компакта $gr y(\cdot)$. Определим на T функции $k_i(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$, $1 \leq i \leq l$, полагая

$$k_i(t) = \begin{cases} k(t_i^*, y_i^*)(t), & \text{если } t \in T \cap (t_i^* - \varepsilon(t_i^*, y_i^*), t_i^* + \varepsilon(t_i^*, y_i^*)); \\ 0 & \text{в остальных точках } t \in T. \end{cases}$$

Пусть

$$k(t) = \max\{k_i(t), 1 \leq i \leq l\}, \quad t \in T, \quad (4.4)$$

$$\beta = \max\{\beta(t_i^*, y_i^*), 1 \leq i \leq l\}. \quad (4.5)$$

Ясно, что $k(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$. Так как $gr y(\cdot)$ является компактом в $\mathbb{R}_*^{n+1}$, а $V(t_i^*, y_i^*, \varepsilon(t_i^*, y_i^*))$, $1 \leq i \leq l$, — открытые множества в пространстве $\mathbb{R}_*^{n+1}$, то из [10, гл. II, § 4, предложение 4, п. 3] вытекает, что существует $\alpha > 0$, $\alpha < \delta$ такое, что

$$gr y(\cdot) + \alpha \overline{B}^{n+1} \subset \bigcup_{i=1}^l V(t_i^*, y_i^*, \varepsilon(t_i^*, y_i^*)). \quad (4.6)$$

Воспользовавшись (4.2)–(4.6), мы приходим к неравенству (4.1). Лемма доказана.

Пусть $y : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ — абсолютно непрерывная функция, $\alpha > 0$ и $F : Q(y)(\alpha) \rightarrow cl(\mathbb{R}^n)$. Под локальным решением включения (1.1) понимается абсолютно непрерывная функция $x(t)$, $x(0) = x_0$, $x(0) \in y_0 + \alpha B$, удовлетворяющая включениям

$$x(t) \in y(t) + \alpha \overline{B}$$

и (1.1) при почти всех $t \in [0, \tau]$, $0 < \tau \leq 1$.

Сделаем предположения, касающиеся существования локальных решений.

Гипотезы $H_L(F)$. Отображение $F : Q(y)(\alpha) \rightarrow \text{cl}(\mathbb{R}^n)$ обладает следующими свойствами:

- (1) отображение $x \rightarrow F(t, x)$, $x \in y(t) + \alpha \overline{B}$ полунепрерывно снизу по Вьеторису п.в.;
- (2) отображение $t \rightarrow F(t, x(t))$ измеримо для любой функции $x(\cdot) \in C(T, \mathbb{R}^n)$, $x(t) \in y(t) + \alpha \overline{B}$, $t \in T$.

Теорема 4.1. Пусть $y : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ — абсолютно непрерывная функция, $\alpha > 0$, $F : Q(y)(\alpha) \rightarrow \text{cl}(\mathbb{R}^n)$ — многозначное отображение и выполняются гипотезы $H_L(F)$. Тогда для любых $m(\cdot), n(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$, $m(t) > 0$, $n(t) > 0$, $t \in T$, удовлетворяющих неравенству (3.6), при $x \in y(t) + \alpha \overline{B}$ существует локальное решение $x(t)$, $x(0) = x_0 \in y_0 + \alpha \overline{B}$ такое, что имеют место неравенства (3.7) с $r(t)$ и $l(t)$, определенными равенствами (3.8), (3.9) при $t \in [0, \tau]$, где τ определяется из равенства $r(\tau) = \alpha$.

Доказательство. Пусть отображение $\Phi(t, z)$ определено равенством (3.10) при $z \in \alpha \overline{B}$. Тогда из (3.6), (3.10) вытекает, что

$$d(\Theta, \Phi(t, z)) < m(t) + n(t) \|z\|, \quad z \in \alpha \overline{B}. \quad (4.7)$$

Обозначим через $pr z$ проекцию точки $z \in \mathbb{R}^n$ на множество $\alpha \overline{B}$. Пусть

$$\Phi^*(t, z) = \Phi(t, pr z), \quad t \in T, z \in \mathbb{R}^n. \quad (4.8)$$

Так как функция $z \rightarrow pr z$ является липшицевой с константой Липшица, равной 1, то из (4.7) и (4.8) вытекает

$$d(\Theta, \Phi^*(t, z)) < m(t) + n(t) \|z\|, \quad z \in \mathbb{R}^n.$$

Из гипотез $H_L(F)$ и свойства функции $z \rightarrow pr z$ следует, что отображение $z \rightarrow \Phi^*(t, z)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису п.в., а отображение $t \rightarrow \Phi^*(t, z(t))$ измеримо для любой функции $z(\cdot) \in C(T, \mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим многозначное отображение $\Gamma(t, z)$, определенное равенством (3.12), с заменой $\Phi(t, z)$ на $\Phi^*(t, z)$. Тогда Γ является отображением из $T \times \mathbb{R}^n$ в $\text{cl}(\mathbb{R}^n)$. Повторяя рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 3.1, мы получим, что включение (3.13) имеет решение $z_*(t)$, $z_*(0) = z_0 = x_0 - y_0$, определенное на T и удовлетворяющее неравенствам (3.22). Из (3.22) следует, что при τ , определенном из равенства $r(\tau) = \alpha$, имеет место включение $z_*(t) \in \alpha \overline{B}$, $t \in [0, \tau]$. Поэтому из (4.8), (3.12), (3.10) следует, что

$$\dot{z}_*(t) \in -\dot{y}(t) + F(t, z_*(t) + y(t)), \quad z_*(0) = x_0 - y_0, \quad (4.9)$$

$t \in [0, \tau]$. Полагая $x_*(t) = z_*(t) + y(t)$, мы из (4.9) получаем, что $x_*(t)$, $x_*(0) = x_0$ является локальным решением включения (1.1), определенным на $[0, \tau]$ и согласно (3.22) удовлетворяющим неравенствам (3.7), где $r(t)$ и $l(t)$ определяются равенствами (3.8), (3.9) при $t \in [0, \tau]$. Теорема доказана.

Следствие 4.1. Пусть $y : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ — абсолютно непрерывная функция, $gr y(\cdot)$ — ее график, $\delta > 0$ и $F : Q(y)(\delta) \rightarrow \text{cl}(\mathbb{R}^n)$ — многозначное отображение. Предположим, что

(1) отображение $F(t, x)$ является локально интегрально $(\rho - H)$ -липшицевым в каждой точке множества $gr y(\cdot)$;

$$(2) \quad d(\dot{y}(t), F(t, y(t))) < \gamma(t), \quad \gamma(t) > 0, \gamma(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^+); \quad (4.10)$$

(3) отображение $F(t, x)$ является $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ измеримым на множестве $Q(y)(\delta)$.

Тогда существует $\alpha > 0$ такое, что на множестве $Q(y)(\alpha)$ выполняются все предположения теоремы 4.1 и, следовательно, все утверждения этой теоремы.

Доказательство. Из предположения (1) и леммы 4.1 вытекает, что существуют $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$, $k(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$ такие, что для любых $(t, x), (t, z) \in Q(y)(\alpha)$ имеет место неравенство (4.1). Из этого неравенства вытекает, что отображение $x \rightarrow F(t, x)$, $x \in y(t) + \alpha \overline{B}$ полунепрерывно снизу по Вьеторису п.в. на T .

Пусть $z(t) \in F(t, y(t))$ таково, что

$$\|\dot{y}(t) - z(t)\| = d(\dot{y}(t), F(t, y(t))). \quad (4.11)$$

Из неравенства (4.1) непосредственно следует, что имеет место неравенство

$$d(z(t), F(t, x)) \leq (k(t) + \beta \|z(t)\|) \|x - y(t)\|.$$

Из этого неравенства, (4.10) и (4.11) мы получаем, что

$$d(\dot{y}(t), F(t, x)) \leq d(z(t), F(t, x)) + \|\dot{y}(t) - z(t)\| < \gamma(t) + (k(t) + \beta \|\dot{y}(t)\| + \beta \gamma(t)) \|x - y(t)\|, \quad (4.12)$$

$x \in y(t) + \alpha \overline{B}$, $t \in T$. Полагая $m(t) = \gamma(t)$, $n(t) = k(t) + \beta(\|\dot{y}(t)\| + \gamma(t))$ в неравенстве (4.12), мы приходим к неравенству (3.6), фигурирующему в формулировке теоремы 4.1. Поскольку $Q(y)(\alpha) \in \mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, то из предположения (3) следует, что отображение $F(t, x)$ является $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ измеримым на $Q(y)(\alpha)$. Поэтому для любой функции $x(\cdot) \in C(T, \mathbb{R}^n)$, $x(t) \in y(t) + \alpha \overline{B}$, $t \in T$ отображение $t \rightarrow F(t, x(t))$ измеримо. Тем самым на множестве $Q(y)(\alpha)$ выполняются все предположения теоремы 4.1. Поэтому все утверждения этой теоремы имеют место. Следствие доказано.

З а м е ч а н и е 4.1. Поскольку решение включения (1.1) является решением и включения (1.2), то из теорем 3.1, 4.1 и следствия 4.1 вытекает существование глобальных и локальных решений включения (1.2).

5. Релаксация

В этом разделе мы докажем основную теорему данной работы. Пусть $y : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ — абсолютно непрерывная функция, $\alpha > 0$ и $F : Q(y)(2\alpha) \rightarrow \text{cl}(\mathbb{R}^n)$ — многозначное отображение.

Сделаем предположения, при которых справедлива теорема релаксации.

Г и п о т е з ы $H_R(F)$:

(1) отображение F удовлетворяет гипотезам $H_L(F)$, сформулированным в предыдущем разделе;

(2) отображение $\overline{\text{co}} F(t, x)$ является интегрально $(\rho - H)$ -липшицевым на $Q(y)(2\alpha)$, т.е. существуют $\beta \geq 0$ и функция $k(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^+)$ такие, что для любых $(t, x), (t, z) \in Q(y)(2\alpha)$ и $\rho \geq 0$ имеет место неравенство (4.1).

Не нарушая общности, мы можем считать, что $k(t) > 0$, $t \in T$.

Пусть

$$\rho(t) = (1 + 2\alpha\beta) \|\dot{y}(t)\| + 2\alpha k(t), \quad (5.1)$$

$$\rho_0(t) = (1 + \alpha\beta) \|\dot{y}(t)\| + \alpha k(t). \quad (5.2)$$

Теорема 5.1 (теорема релаксации). Пусть выполняются гипотезы $H_R(F)$ и существуют $\beta_1 > 0$, $k_1(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$, $k_1(t) > 0$, $t \in T$, такие, что

$$e(\overline{\text{co}} F(t, x) \cap \rho(t) \overline{B}, \overline{\text{co}}(F(t, x) \cap m(t)B)) = 0, \quad (5.3)$$

$(t, x) \in Q(y)(2\alpha)$, где

$$m(t) = k_1(t) + \beta_1 \rho(t), \quad t \in T. \quad (5.4)$$

Предположим, что $y(t)$, $y(0) = y_0$ является глобальным решением включения (1.2). Тогда существует последовательность $x_k(t)$, $x(0) = y_0$, $k \geq 1$, глобальных решений включения (1.1), сходящаяся к $y(t)$ в пространстве $C(T, \mathbb{R}^n)$, а последовательность $\dot{x}_k(\cdot)$, $k \geq 1$, сходится к $\dot{y}(\cdot)$ в пространстве ω - $L^1(T, \mathbb{R}^n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из предположения (2) в гипотезах $H_R(F)$, обозначения (2.3) и неравенства (4.1) вытекает, что

$$\dot{y}(t) \in \overline{\text{co}} F(t, x) + (k(t) + \beta \|\dot{y}(t)\|) \|y(t) - x\| \overline{B} \text{ п.в.,}$$

$(t, x) \in Q(y)(2\alpha)$. Не нарушая общности, мы можем считать, что это включение выполняется для всех $t \in T$. Из него следует, что

$$\overline{\text{co}} F(t, x) \cap (\|\dot{y}(t)\| + (k(t) + \beta \|\dot{y}(t)\|) \|y(t) - x\|) \overline{B} \neq \emptyset, \quad (5.5)$$

$(t, x) \in Q(y)(2\alpha)$. Из (5.5) с учетом (5.1), (5.2) мы получим, что

$$\overline{\text{co}} F(t, x) \cap \rho(t) B \neq \emptyset, \quad (t, x) \in Q(y)(\alpha), \quad (5.6)$$

$$\overline{\text{co}} F(t, x) \cap \rho_0(t) \overline{B} \neq \emptyset, \quad (t, x) \in Q(y)(\alpha). \quad (5.7)$$

Очевидно, что

$$\dot{y}(t) \in \overline{\text{co}} F(t, y(t)) \cap \rho_0(t) \overline{B}. \quad (5.8)$$

Из (2.2), (5.3), (5.6) вытекает

$$\overline{\text{co}} F(t, x) \cap \rho(t) \overline{B} \subset \overline{\text{co}}(F(t, x) \cap m(t) B) \neq \emptyset, \quad (t, x) \in Q(y)(\alpha).$$

Из этого включения и (5.6) непосредственно вытекает, что

$$F(t, x) \cap m(t) B \neq \emptyset, \quad (5.9)$$

и

$$\overline{\text{co}} F(t, x) \cap \rho(t) \overline{B} \subset \overline{\text{co}}(F(t, x) \cap m(t) B), \quad (t, x) \in Q(y)(\alpha), \quad (5.10)$$

где co — выпуклая оболочка множества. Напомним, что в конечномерном пространстве выпуклая оболочка и выпуклая замкнутая оболочка компакта совпадают.

В соответствии с обозначением (2.1) мы имеем

$$\overline{\text{co}} F(t, x)_{\rho(t)} = \overline{\text{co}} F(t, x) \cap \rho(t) \overline{B}. \quad (5.11)$$

Воспользовавшись (5.1), (5.2), (5.6), (5.7), неравенством (2.7), предположением (2) в гипотезах $H_R(F)$ и неравенством (4.1), мы получим

$$\text{haus}(\overline{\text{co}} F(t, x)_{\rho(t)}, \overline{\text{co}} F(t, z)_{\rho(t)}) \leq \frac{2\rho(t)}{\rho(t) - \rho_0(t)} (k(t) + \beta\rho(t)) \|x - z\|,$$

$(t, x), (t, z) \in Q(y)(\alpha)$. Из (5.1), (5.2) вытекает, что

$$\frac{2\rho(t)}{\rho(t) - \rho_0(t)} \leq \frac{2(1 + 2\beta\alpha)}{\beta\alpha} + 4 = L.$$

Поэтому

$$\text{haus}(\overline{\text{co}} F(t, x)_{\rho(t)}, \overline{\text{co}} F(t, z)_{\rho(t)}) \leq L \cdot l(t) \|x - z\|, \quad (t, x), (t, z) \in Q(y)(\alpha), \quad (5.12)$$

где $l(t) = k(t) + \beta\rho(t)$.

Рассмотрим отображение $\Phi : T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{cl}(\mathbb{R}^n)$, определенное равенством

$$\Phi(t, x) = F(t, pr_t x), \quad t \in T, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (5.13)$$

где $pr_t x$ — проекция точки x на множество $y(t) + \alpha \overline{B}$, $t \in T$. Как уже говорилось при доказательстве леммы 3.2, для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ функция $t \rightarrow pr_t x$ непрерывна и

$$\|pr_t x - pr_s x\| \leq \|x - y\|. \quad (5.14)$$

Поэтому из гипотез $H_L(F)$ вытекает, что отображение $\Phi(t, x)$ обладает свойствами в гипотезах $H_G(F)$. Этими свойствами обладает и отображение $\overline{\text{co}} \Phi(t, x)$ (см. [6, теорема 9.1]). В соответствии с (5.6), (5.9) мы имеем

$$\overline{\text{co}} \Phi(t, x) \cap \rho(t)B \neq \emptyset, \quad \Phi(t, x) \cap m(t)B \neq \emptyset,$$

$(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$. Тогда из леммы 3.1 вытекает, что отображения $x \rightarrow \overline{\Phi(t, x) \cap m(t)B}$, $x \rightarrow \overline{\overline{\text{co}} \Phi(t, x) \cap \rho(t)B}$ полунепрерывны снизу на $\mathbb{R}^n$, а отображения $t \rightarrow \overline{\Phi(t, x(t)) \cap m(t)B}$, $t \rightarrow \overline{\overline{\text{co}} \Phi(t, x(t)) \cap \rho(t)B}$ слабо измеримы для любой функции $x(\cdot) \in C(T, \mathbb{R}^n)$. Воспользовавшись равенством

$$\overline{\text{co}} \Phi(t, x) \cap \rho(t)\overline{B} = \overline{\overline{\text{co}} \Phi(t, x(t)) \cap \rho(t)B},$$

справедливым для выпуклого замкнутого множества $\overline{\text{co}} \Phi(t, x)$, мы получим, что отображение $t \rightarrow \overline{\text{co}} \Phi(t, x(t))\rho(t)\overline{B}$ слабо измеримо для любой функции $x(\cdot) \in C(T, \mathbb{R}^n)$.

Из (5.11)–(5.14) следует, что

$$\text{haus}(\overline{\text{co}} \Phi(t, x)_{\rho(t)}, \overline{\text{co}} \Phi(t, z)_{\rho(t)}) \leq L \cdot l(t) \|x - z\|, \quad x, z \in \mathbb{R}^n, \quad (5.15)$$

где в соответствии с обозначением (2.1)

$$\overline{\text{co}} \Phi(t, x)_{\rho(t)} = \overline{\text{co}} \Phi(t, x) \cap \rho(t)\overline{B}. \quad (5.16)$$

Из (5.10) вытекает, что

$$\overline{\text{co}} \Phi(t, x)_{\rho(t)} \subset \overline{\text{co}(\overline{\Phi(t, x) \cap m(t)B})}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (5.17)$$

Воспользовавшись (5.8), (5.13), (5.16), мы получим

$$\dot{y}(t) \in \overline{\text{co}} \Phi(t, y(t))_{\rho(t)}. \quad (5.18)$$

Легко показать, используя (5.15) и слабую измеримость отображения $t \rightarrow \overline{\text{co}} \Phi(t, x)_{\rho(t)}$, что существует функция $f : T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ такая, что

$$\|\dot{y}(t) - f(t, x)\| = d(\dot{y}(t), \overline{\text{co}} \Phi(t, x)_{\rho(t)}), \quad (5.19)$$

которая является функцией Каратеодори, удовлетворяющей неравенству

$$\|f(t, y(t)) - f(t, x)\| \leq L \cdot l(t) \|x - y(t)\|, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (5.20)$$

Воспользовавшись (5.17)–(5.19), мы получим

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad (5.21)$$

$$f(t, x) \in \overline{\text{co}(\overline{\Phi(t, x) \cap m(t)B})}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (5.22)$$

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in \overline{\Phi(t, x) \cap m(t)B}, \quad x(0) = y(0). \quad (5.23)$$

Пусть

$$S = \{v \in L^1(T, \mathbb{R}^n); \|v(t)\| \leq m(t) \text{ п.в.}\} \quad (5.24)$$

и $\mathcal{T} : S \rightarrow C(T, \mathbb{R}^n)$ — оператор, определенный равенством (3.16) с заменой z_0 на $y(0)$. Рассмотрим множество

$$\mathcal{K} = \{x(\cdot) \in C(T, \mathbb{R}^n); x = \mathcal{T}(v); v \in S_\omega\}, \quad (5.25)$$

где символ S_ω означает, что множество S наделено топологией пространства $L_\omega^1(T, \mathbb{R}^n)$. Как и при доказательстве теоремы 3.1 мы получаем, что S_ω является выпуклым, метризуемым

компактом в пространстве $L^1_\omega(T, \mathbb{R}^n)$, оператор $\mathcal{T}$ непрерывен из S_ω в $C(T, \mathbb{R}^n)$, а множество $\mathcal{K}$ есть выпуклый компакт в $C(T, \mathbb{R}^n)$. Из (5.22) следует, что

$$\|f(t, x)\| \leq m(t) \text{ п.в., } x \in \mathbb{R}^n. \quad (5.26)$$

Рассмотрим отображение

$$g(x)(t) = f(t, x(t)), \quad x(\cdot) \in \mathcal{K}. \quad (5.27)$$

Поскольку $f(t, x)$ является функцией Каратеодори, то из (5.26) следует, что $g(x)$ является непрерывным отображением из $\mathcal{K}$ в $L^1(T, \mathbb{R}^n)$. Из (5.21), (5.22), (5.27) вытекает, что

$$\dot{y} = g(y), \quad (5.28)$$

$$g(x)(t) \in \overline{\text{co}(\Phi(t, x(t)) \cap m(t)B)}, \quad x \in \mathcal{K}. \quad (5.29)$$

Воспользовавшись (5.29) и утверждением 2.2, мы получим, что существует последовательность непрерывных функций $g_k : \mathcal{K} \rightarrow L^1(T, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, таких, что

$$g_k(x)(t) \in \overline{\Phi(t, x(t)) \cap m(t)B} \text{ п.в.,} \quad (5.30)$$

$$\|g_k(x) - g(x)\|_\omega \leq 1/k, \quad x \in \mathcal{K}, \quad k \geq 1. \quad (5.31)$$

Рассмотрим отображения $g_k(\mathcal{T}v)$, $k \geq 1$, из S_ω в $L^1(T, \mathbb{R}^n)$. Как и при доказательстве теоремы 3.1, получаем, что отображения $v \rightarrow g_k(\mathcal{T}v)$, $k \geq 1$, являются непрерывными из S_ω в S_ω . Поэтому по теореме Шаудера существуют неподвижные точки $v_k^* \in S_\omega$, $k \geq 1$, отображений $g_k(\mathcal{T}v)$, т. е.

$$v_k^* = g_k(\mathcal{T}v_k^*), \quad k \geq 1. \quad (5.32)$$

Так как $v_k^* \in S_\omega$, $k \geq 1$, и S_ω является метризуемым компактом в пространстве $L^1_\omega(T, \mathbb{R}^n)$, то, не нарушая общности, можно считать, что $v_k^* \rightarrow v^* \in S_\omega$ в $L^1_\omega(T, \mathbb{R}^n)$.

Пусть $x_k = \mathcal{T}v_k^*$, $z = \mathcal{T}v^*$. Тогда $x_k \rightarrow z$ в $C(T, \mathbb{R}^n)$. Воспользовавшись (5.31), (5.32), мы получим

$$\|v_k^* - g(\mathcal{T}v_k^*)\|_\omega \leq 1/k, \quad k \geq 1.$$

Из этого неравенства при $k \rightarrow \infty$ имеем, что

$$v^* = g(\mathcal{T}v^*) = g(z). \quad (5.33)$$

Так как $\dot{x}_k = v_k^*$, $k \geq 1$, $\dot{z} = v^*$, то из (5.29), (5.32), (5.33) следует, что

$$\dot{x}_k(t) \in \Phi(t, x_k(t)) \text{ п.в.,} \quad (5.34)$$

$$\dot{z} = g(z). \quad (5.35)$$

Воспользовавшись (5.20), (5.21), (5.27), (5.28) и (5.35), мы получим, что

$$\|\dot{y}(t) - \dot{z}(t)\| = \|f(t, y(t)) - f(t, z(t))\| \leq L \cdot l(t) \|z(t) - y(t)\|.$$

Из этого неравенства и неравенства Беллмана — Гронуолла вытекает, что $y(t) = z(t)$, $t \in T$. Таким образом, мы показали, что последовательность $x_k(\cdot)$, $k \geq 1$, решений включения (5.34) сходится к решению $y(\cdot)$ включения (1.2) в пространстве $C(T, \mathbb{R}^n)$, а последовательность $\dot{x}_k(\cdot)$, $k \geq 1$, в силу утверждения 2.3 сходится к $\dot{y}(\cdot)$ в пространстве ω - $L^1(T, \mathbb{R}^n)$. Тогда существует k_0 такое, что при всех $k \geq k_0$ будет иметь место неравенство

$$\|x_k(t) - y(t)\| < \alpha, \quad t \in T.$$

Но в этом случае при $k \geq k_0$ согласно (5.13) будет иметь место равенство $\Phi(t, x_k(t)) = F(t, x_k(t))$ п.в. Тем самым $x_k(\cdot)$ при $k \geq k_0$ являются решениями включения (1.1). Теорема доказана.

Приведем вариант теоремы 5.1 при несколько иных предположениях.

Пусть $y : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ — абсолютно непрерывная функция и $F : Q(y)(2\alpha) \rightarrow \text{cl}(\mathbb{R}^n)$ — многозначное отображение.

Г и п о т е з ы $H_C(F)$. Предположим, что отображение F обладает следующими свойствами:

(1) отображение $F(t, x)$ является $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ измеримым на $Q(y)(2\alpha)$;

(2) отображение $F(t, x)$ является интегрально $(\rho - H)$ -липшицевым на $Q(y)(2\alpha)$, т.е. существуют $\beta \geq 0$ и функция $k(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$, $k(t) > 0$, $t \in T$, такие, что для любых $(t, x), (t, z) \in Q(y)(2\alpha)$ и $\rho \geq 0$ имеет место неравенство (4.1);

(3) функция $t \rightarrow \delta(t) = d(\dot{y}(t), F(t, y(t)))$ является интегрируемой.

Из предположения (1) в гипотезах $H_C(F)$ следует, что функция $t \rightarrow F(t, y(t))$ измерима. Поэтому функция $t \rightarrow d(\dot{y}(t), F(t, y(t)))$ является измеримой. Следовательно, предположение (3) в гипотезах $H_C(F)$ корректно. Положим

$$\rho^*(t) = (1 + 2\alpha\beta)(\|\dot{y}(t)\| + \delta(t)) + 2\alpha k(t), \quad (5.36)$$

$$\rho_0^*(t) = (1 + \alpha\beta)(\|\dot{y}(t)\| + \delta(t)) + \alpha k(t). \quad (5.37)$$

Теорема 5.2. Пусть выполняются гипотезы $H_C(F)$ и существуют $k_1(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$, $\beta_1 > 0$, $k_1(t) > 0$, такие, что

$$e(\overline{\text{co}} F(t, x) \cap \rho^*(t)\overline{B}, \overline{\text{co}}(F(t, x) \cap m^*(t)B)) = 0, \quad (5.38)$$

$(t, x) \in Q(y)(2\alpha)$, где $m^*(t) = k_1(t) + \beta_1\rho^*(t)$. Предположим, что $y(t)$, $y(0) = y_0$ является решением включения (1.2). Тогда справедливы утверждения теоремы 5.1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из предположений (1), (2) в гипотезах $H_C(F)$ и леммы 3.2 вытекает, что для отображения $F(t, x)$ выполняются гипотезы $H_L(F)$. По аналогии с доказательством теоремы 5.1, используя предположение (3) в гипотезах $H_C(F)$ и неравенства (4.1), (5.36) и (5.37), мы получим

$$\overline{\text{co}} F(t, x) \cap \rho^*(t)B \neq \emptyset, \quad (t, x) \in Q(y)(\alpha), \quad (5.39)$$

$$\overline{\text{co}} F(t, x) \cap \rho_0^*(t)\overline{B} \neq \emptyset, \quad (t, x) \in Q(y)(\alpha), \quad (5.40)$$

$$\dot{y}(t) \in \overline{\text{co}} F(t, y(t)) \cap \rho_0^*(t)\overline{B}. \quad (5.41)$$

Воспользовавшись (5.38) и (5.39), имеем

$$\overline{\text{co}} F(t, x) \cap \rho^*(t)\overline{B} \subset \overline{\text{co}}(F(t, x) \cap m^*(t)B) \neq \emptyset, \quad (t, x) \in Q(y)(\alpha).$$

Из этого включения и предположения (2) в гипотезах $H_C(F)$ вытекает

$$\overline{\text{co}} F(t, x) \cap \rho^*(t)\overline{B} \subset \overline{\text{co}}(F(t, z) + (k(t) + \beta m^*(t))\|x - z\|\overline{B}), \quad (t, x), (t, z) \in Q(y)(\alpha).$$

Это включение влечет неравенство

$$\text{haus}_{\rho^*(t)}(\overline{\text{co}} F(t, x), \overline{\text{co}} F(t, z)) \leq (k(t) + \beta m^*(t))\|x - z\|, \quad (t, x), (t, z) \in Q(y)(\alpha). \quad (5.42)$$

Воспользовавшись (5.39), (5.40), (5.42) и утверждением 2.1, мы получим

$$\begin{aligned} & \text{haus}(\overline{\text{co}} F(t, x)_{\rho^*(t)}, \overline{\text{co}} F(t, z)_{\rho^*(t)}) \\ & \leq \frac{2\rho^*(t)}{\rho^*(t) - \rho_0^*(t)}(k(t) + \beta m^*(t))\|x - z\|, \quad (t, x), (t, z) \in Q(y)(\alpha). \end{aligned} \quad (5.43)$$

Путем непосредственных вычислений с использованием (5.36), (5.37) получаем

$$\frac{2\rho^*(t)}{\rho^*(t) - \rho_0^*(t)} \leq \frac{2(1 + 2\beta\alpha)}{\beta\alpha} + 4 = L.$$

Тогда

$$\text{haus}(\overline{\text{co}} F(t, x)_{\rho^*(t)}, \overline{\text{co}} F(t, z)_{\rho^*(t)}) \leq L \cdot l^*(t) \|x - y\|, \quad (t, x), (t, z) \in Q(y)(\alpha), \quad (5.44)$$

где $l^*(t) = k(t) + \beta m^*(t)$.

Это неравенство является аналогом неравенства (5.12). Дальнейшее доказательство повторяет рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 5.1 после неравенства (5.12) с учетом (5.39)–(5.41), (5.44). Теорема доказана.

Следствие 5.1. Пусть выполняются гипотезы $H_C(F)$ и существуют $k_1(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$, $k_1(t) > 0$, $t \in T$, и $\beta_1 > 0$ такие, что

$$\overline{\text{co}} F(t, x) \cap \rho \overline{B} \subset \text{co}(F(t, x) \cap (k_1(t) + \beta_1 \rho) \overline{B}) \quad (5.45)$$

для всех $(t, x) \in Q(y)(2\alpha)$ и $\rho \geq 0$. Предположим, что $y(t)$, $y(0) = y_0$ является решением включения (1.2). Тогда справедливы утверждения теоремы 5.1.

Поскольку в (5.45) при фиксированном $t \in T$ в качестве $\rho \geq 0$ мы можем взять $\rho^*(t)$, определенное равенством (5.36), то следствие 5.1 вытекает из теоремы 5.2.

Основное отличие теоремы 5.2 от теоремы 5.1 состоит в том, что в теореме 5.2 мы требуем интегральной $(\rho - H)$ -липшицевости отображения $F(t, x)$ на $Q(y)(2\alpha)$, а не $\overline{\text{co}} F(t, x)$, как в теореме 5.1.

З а м е ч а н и е 5.1. Замена предположения (2) в гипотезах $H_R(F)$ на условие локально интегральной $(\rho - H)$ -липшицевости отображения $\overline{\text{co}} F(t, x)$ в каждой точке $(t^*, y^*) \in \text{gr } y(\cdot)$ не является обобщением, что вытекает из леммы 4.1. То же самое относится и к предположению (2) в гипотезах $H_C(F)$, касающейся отображения $F(t, x)$.

6. Комментарии

В работе [4] было введено следующее определение (определение 2.3 (b)). Пусть $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — открытое множество и $F : Q \rightarrow \text{cl}(\mathbb{R}^n)$ — многозначное отображение. Отображение F называется “integrable sub-Lipschitzian in the large at $(\bar{t}, \bar{x}) \in Q$ ”, если существуют константы $\varepsilon > 0$ и $\beta \geq 0$ и неотрицательная, интегрируемая на $(\bar{t} - \varepsilon, \bar{t} + \varepsilon)$ функция $k(t)$ такие, что

$$F(t, y) \cap \rho \overline{B} \subset F(t, x) + (k(t) + \beta \rho) \|x - y\| \overline{B} \quad (6.1)$$

для всех $t \in (\bar{t} - \varepsilon, \bar{t} + \varepsilon) \cap T$ и всех $x, y \in \bar{x} + \varepsilon B$, $\rho \geq 0$.

Определение 1.1 в работе [5] гласит: отображение $F : Q \rightarrow \text{cl}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет “the global pseudo-Lipschitz condition on Q ”, если существуют $\beta \geq 0$ и $k(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$ такие, что для всех $\rho > 0$, $(t, x), (t, y) \in Q$ выполняется включение (6.1). Если воспользоваться соглашением, что $e(C, D) = \sup d(x, D) = 0$ при $C = \emptyset$ и $D \neq \emptyset$, то введенные в [4] определение 2.3 (b) и определение 1.1 в [5] эквиваленты нашим определениям локальной интегральной $(\rho - H)$ -липшицевости в точке $(\bar{t}, \bar{x}) \in Q$ и интегральной $(\rho - H)$ -липшицевости на Q многозначного отображения. Связь между этими определениями дается леммой 4.1. Мы используем эти определения, поскольку они более точно отражают суть вопроса, связанного с определением $(\rho - H)$ Хаусдорфова расстояния [8] между неограниченными множествами, и более удобны при доказательствах в нашей работе.

Как теорема 4.1, так и следствие 4.1 являются обобщением теорем 1 в [2] и 2.2 в [5] о существовании локальных решений дифференциального включения (1.1) с неограниченной

правой частью. Основное предположение в [2, теорема 1] состояло в том, что отображение $(t, x) \rightarrow F(t, x)$ непрерывно и выполняется неравенство (1.3) с обобщенной метрикой Хаусдорфа $\text{haus}(\cdot, \cdot)$, которая может принимать бесконечные значения. Если в следствии 4.1 предположение (1) заменить на предположение интегральной $(\rho - H)$ -липшицевости отображения $F(t, x)$ на $Q(y)(\delta)$, то предположения в [5, теорема 2.2], по существу, совпадут с предположениями в следствии 4.1. Отметим, что априорные оценки в следствии 4.1 носят более точный характер, чем [5, теорема 2.2].

Теорема 5.1 является аналогом ставшей уже классической теоремы 3 в [2] о релаксации. В этой теореме основные предположения на F те же самые, что и в [2, теорема 1], но значениями F являются ограниченные множества. Следствие 5.1 является аналогом [5, теорема 4.1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Wazewski T.** Sur une generalization des la notion de solution d'une equation au contingent // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 1962. Vol. 10, no. 1. P. 11–15.
2. **Филиппов А.Ф.** Классические решения уравнений с многозначной правой частью // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1967. Vol. 3. P. 16–26.
3. **Гончаров В.В., Толстоногов А.А.** Совместные непрерывные селекторы многозначных отображений с невыпуклыми значениями и их приложения // Мат. сб. 1991. Vol. 182, no. 7. P. 946–969.
4. **Loewen P.D., Rockafellar R.T.** Optimal control of unbounded differential inclusions // SIAM J. Control Optim. 1994. Vol. 32, no 2. P. 442–470.
5. **Ioffe A.** Existence and relaxation theorems for unbounded differential inclusions // J. Convex Anal. 2006. Vol. 13, no. 2. P. 353–362.
6. **Himmelberg C.J.** Measurable relations // Fund. Math. 1975. Vol. 87. P. 53–72.
7. **Толстоногов А.А.** К теореме Скорца — Драгони для многозначных отображений с переменной областью определения // Мат. заметки. 1990. Vol. 48, no. 5. P. 109–120.
8. **Attouch H., Wets R.J.B.** Quantitative stability of variational systems: I. The epigraphical distance // Trans. Amer. Math. Soc. 1991. Vol. 328, no. 2. P. 695–729.
9. **Gutman S.** Topological equivalence in the space of integral vector-valued functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1985. Vol. 93, no. 1. P. 40–42.
10. **Бурбаки Н.** Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 272 с.

Толстоногов Александр Александрович
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
зам. директора по НР

Поступила 15.04.2014

Институт динамики систем и теории управления СО РАН
e-mail: aatol@icc.ru

УДК 515.163.1 + 517.977.1

**ТЕОРЕМА ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ
Е. А. БАРБАШИНА И Н. Н. КРАСОВСКОГО
РАСПРОСТРАНЯЕТСЯ НА УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ
НА ГЛАДКИХ МНОГООБРАЗИЯХ¹**

Е. Л. Тонков

Введено понятие так называемой стандартной управляемой системы, фазовым пространством которой является гладкое многообразие конечной размерности, удовлетворяющее ряду условий, в частности, оно предполагается связным, ориентируемым и имеющим счетный атлас. По заданной стандартной управляемой системе рассматривается множество сдвигов по времени, и затем строится замыкание такого множества в топологии равномерной сходимости на компактах. В этих терминах исследуются условия равномерной локальной достижимости заданной траектории. Основное утверждение статьи сформулировано в терминах модифицированной функции А. М. Ляпунова. Рассмотрен простой пример.

Ключевые слова: управляемые системы, равномерная локальная управляемость, конечномерные гладкие многообразия, функции Ляпунова.

E. L. Tonkov. Barbashin and Krasovskii's asymptotic stability theorem in application to control systems on smooth manifolds.

We introduce the notion of so-called standard control system, whose phase space is a finite-dimensional smooth manifold satisfying a series of conditions; in particular, it is supposed to be connected and orientable and have a countable atlas. For a given standard control system, we consider a set of time shifts and construct the closure of this set in the topology of uniform convergence on compact sets. In these terms, we study the conditions of uniform local reachability of a given trajectory. The main result is formulated in terms of a modified Lyapunov function. A simple example is considered.

Keywords: control systems, uniform local controllability, finite-dimensional smooth manifolds, Lyapunov functions.

Введение

Эта статья написана во многом под влиянием результатов работы [1] (см. также [2]). Она продолжает исследования статьи [3] о свойствах так называемых *магистральных* движений управляемой динамических систем. Стабилизация фиксированного магистрального движения осуществляется с помощью допустимого *позиционного* управления $u = u(t, x)$ системы, названной в этой работе *стандартной* управляемой системой (см. определение 1)

$$\dot{x} = v(t, x, u), \tag{0.1}$$

$$(t, x, u) \in \mathbb{R} \times M \times U, \quad v(t, x, U) \cap T_x M \neq \emptyset.$$

Фазовым пространством такой системы является гладкое многообразие M конечной размерности, удовлетворяющее ряду условий, а геометрические ограничения U на допустимые *программные* управления $t \rightarrow u_0(t)$ компактны в конечномерном евклидовом пространстве.

В отличие от статьи [3], понятие *стандартной* управляемой системы здесь несколько расширено: теперь предполагается, что векторное поле $v(t, x, u)$ системы (0.1), рассматриваемое как функция времени t при любых фиксированных $(x, u) \in M \times U$, локально интегрируемо по Лебегу и равномерно непрерывно в среднем на числовой прямой $\mathbb{R}$. Такое расширение

¹Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президиума РАН (проект 12-П-1002), гранта РФФИ (проект 12-01-00195) и в рамках базовой части Минобрнауки России.

делает более естественным изучаемый объект (0.1) и несколько расширяет его применимость при исследовании ряда прикладных задач. Кроме того, здесь ликвидирован ряд досадных неточностей статьи [3].

Основной целью этой статьи являются сформулированные в теореме на с. 274 условия, при которых *магистральное* движение, отвечающее заданному *допустимому процессу* стандартной управляемой системы (0.1), *равномерно* (относительно времени t) *локально достижимо*.

Требование равномерности свойства локальной достижимости магистрального процесса естественным образом приводит к рассмотрению теории метрических динамических систем и, в частности, к теории, связанной с так называемой динамической системы сдвигов [4, гл. 5, § 9]. Такая теория строится на основе исходной управляемой системы (см. разд. 4 этой статьи), что приводит, в свою очередь, к изучению множеств локальной достижимости каждой управляемой системы из этого семейства управляемых систем. Каждая управляемая система из такого множества, тоже является *стандартной* управляемой системой (что требует отдельного доказательства). Оказывается далее, что для изучения условий равномерной локальной достижимости магистрального процесса достаточно изучить не все управляемые системы (0.1), создающие динамическую систему сдвигов, а только системы, относящиеся к омега-предельному множеству соответствующей динамической системы сдвигов (что требует отдельного доказательства). Таким образом, при рассмотрении вопроса о равномерной локальной достижимости стандартной управляемой системы (0.1) мы естественным образом приходим к изучению некоторых специальных задач теории динамических систем.

1. Стандартные управляемые системы и допустимые процессы

Рассмотрим несколько часто употребляемых здесь обозначений и определений. Запись $\overline{M}$ или $\text{cl } M$ означает замыкание множества M в соответствующем топологическом пространстве. Всюду далее запись $\mathbb{R}^n$ означает *евклидово* [5] пространство размерности n , а

$$\mathcal{O}_\varepsilon^n(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \varepsilon\} \quad \text{и} \quad \mathcal{O}_\varepsilon^n(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq \varepsilon\}$$

— *открытый и замкнутый* евклидовы шары радиуса ε с центром в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (если $x_0 = 0$, то пишем $\mathcal{O}_\varepsilon^n$, $\mathcal{O}_\varepsilon^n$, или $\mathcal{O}_\varepsilon$, $\mathcal{O}_\varepsilon$, если размерность пространства $\mathbb{R}^n$ не имеет значения). Отметим попутно, что если M — *гладкое многообразие* размерности n , то открытый шар $\mathcal{O}_\varepsilon(x_0)$ с центром в $x_0 \in M$ рассматривается только для таких $\varepsilon > 0$, для которых он целиком находится в одной из карт (W, σ, V) многообразия M (здесь W — область в M , σ — диффеоморфизм из W в область $V = \sigma(W)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, см. [6]). В этом случае шар $\mathcal{O}_\varepsilon(x_0)$ в M записывается так:

$$\mathcal{O}_\varepsilon(x_0) = \{x \in M : |\sigma(x) - \sigma(x_0)|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon\}.$$

Введем теперь в рассмотрение так называемую *стандартную* управляемую систему

$$\dot{x} = v(t, x, u), \quad (t, x, u) \in \mathbb{R} \times M \times U. \quad (1.1)$$

О п р е д е л е н и е 1 (стандартной управляемой системы). Управляемую систему (1.1) будем называть *стандартной*, если выполнены следующие условия:

1. Фазовое пространство M системы (1.1) — это *связное, ориентируемое многообразие размерности n* , обладающее свойством *отделимости* и имеющее *счетный атлас* [6–8]. Предполагается кроме того, что многообразие M не имеет *края* и *гладко вложено* в евклидово пространство $\mathbb{R}^{2n+1}$ размерности $2n+1$ (при высказанных предположениях в силу теоремы Х. Уитни [6] такое вложение всегда возможно).

2. Относительно геометрических ограничений U на допустимые управления системы (1.1) предполагается, что U — *компакт* в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ конечной размерности (как правило $m \leq n$, но это неравенство не предполагается).

3. Для любой абсолютно непрерывной функции $t \rightarrow x(t) \in M$ при почти всех t выполнено так называемое *условие невырожденности*

$$v(t, x(t), U) \cap T_{x(t)}M \neq \emptyset,$$

где $T_x M$ — евклидово пространство, касательное к многообразию M в точке $x \in M$.

4. Предполагается далее, что для каждой фиксированной точки (x, u) множества $M \times U$ функция $t \rightarrow v(t, x, u)$ локально интегрируема по Лебегу, ограничена и равномерно непрерывна в среднем на числовой прямой $\mathbb{R}$ равномерно относительно любого множества $K \times U$, где K — произвольный компакт многообразия M .

5. Кроме того, предполагается, что функция $x \rightarrow v(t, x, u)$ удовлетворяет *локальному условию Липшица* для каждой точки (t, u) множества $\mathbb{R} \times U$. $\square$

Напомним теперь, что по определению для любой фиксированной точки $(t, u) \in \mathbb{R} \times U$ функции

$$x \rightarrow v(t, x, u), \quad x \in M,$$

удовлетворяющей условиям определения 1, выполнено *локальное условие Липшица*, если для каждой точки $x_0 \in M$ и всякой карты (W, σ, V) многообразия M , содержащей точку x_0 , выполнено следующее условие:

для каждого компакта $K \subset W$ такого, что $x_0 \in K$, найдется число $\ell_K(x_0)$, обеспечивающее для всех $x, y \in K$ и почти всех t неравенство

$$|v(t, x, u) - v(t, y, u)|_{\mathbb{R}^n} \leq \ell_K(x_0) |\sigma(x) - \sigma(y)|_{\mathbb{R}^n}, \quad (1.2)$$

где $\sigma(x) = (x_1 \dots x_n)$ — локальные координаты точки $x \in W$, а

$$v(t, x, u) = (v_1(t, x_1 \dots x_n, u_1 \dots u_m) \dots v_n(t, x_1 \dots x_n, u_1 \dots u_m))$$

— координаты векторного поля $v(t, x, u)$, выходящего из точки $\sigma(x) \in V$ и находящегося в пространстве $T_x M$, касательном к M в точке x .

Далее, локально интегрируемая по Лебегу функция $t \rightarrow v(t, x, u)$ называется *равномерно непрерывной в среднем* на числовой прямой $\mathbb{R}$ равномерно относительно каждого множества $K \times U$, где K компакт в M , если

для любого положительного ε найдется такое число $\beta = \beta(\varepsilon, K) > 0$, что при всех $t \in \mathbb{R}$, $\tau \in [-\beta, \beta]$ и любых $(x, u) \in K \times U$ выполнено неравенство

$$\int_t^{t+1} |v(s + \tau, x_1 \dots x_n, u_1 \dots u_m) - v(s, x_1 \dots x_n, u_1 \dots u_m)|_{\mathbb{R}^n} ds \leq \varepsilon, \quad (1.3)$$

которое следует понимать так: для каждой карты $(W, \sigma, \mathbb{R}^n)$ многообразия M , имеющей непустое пересечение с компактом K , и для карты $(TW, \gamma, \mathbb{R}^{2n})$ многообразия TM неравенство (1.3) выполнено для всех $t \in \mathbb{R}$, $\tau \in [-\beta, \beta]$, $(x_1 \dots x_n) \in \sigma(W \cap K)$, $u = (u_1 \dots u_m) \in U$ и включения $(x_1 \dots x_n, v_1(t, x_1 \dots x_n, u_1 \dots u_m) \dots v_n(t, x_1 \dots x_n, u_1 \dots u_m)) \in \gamma(TW)$.

Введем теперь в рассмотрение следующее важное для дальнейшего изложения определение.

О п р е д е л е н и е 2 (допустимого процесса). Функция

$$t \rightarrow \xi(t) = (\varphi(t), u(t)) \in M \times U, \quad (1.4)$$

состоящая из управления $u(t)$ и решения $\varphi(t)$ системы

$$\dot{x} = v(t, x, u(t)), \quad (1.5)$$

называется *допустимым процессом* стандартной управляемой системы (1.1), если:

1. Управление $u : \mathbb{R} \rightarrow U$ локально интегрируемо по Лебегу и равномерно непрерывно в среднем; это означает, что для каждого положительного ε найдется такое положительное число $\beta = \beta(\varepsilon)$, что для всех τ таких, что $|\tau| \leq \beta$, и $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$\int_t^{t+1} |u(s + \tau) - u(s)| ds \leq \varepsilon.$$

2. Решение $\varphi(t)$ системы (1.5) понимается в смысле Каратеодори и предполагается, что оно определено на прямой $\mathbb{R}$ и ограничено на полуоси $\mathbb{R}_+ \doteq [0, \infty)$.

3. Для процесса (1.4) при почти всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено условие согласованности

$$v(t, \varphi(t), u(t)) \in T_{\varphi(t)} M. \quad \square$$

З а м е ч а н и е 1. В силу предположения о локальной липшицевости векторного поля $v(t, x, u)$ системы (1.1) для каждого допустимого управления $u_0(t)$ (т.е. управления, входящего в допустимый процесс) решение всякой задачи Коши системы (1.5) единственно, и поэтому в силу аналога теоремы Нагумо это решение остается в M при каждом t из интервала существования решения.

Напомним теперь, что линейное пространство $T_x M$ называется *касательным к многообразию M в точке x* , если для каждой C^k -кривой, т.е. k раз непрерывно дифференцируемой функции $p : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, проходящей через заданную точку $p(0) = x$, вектор скорости

$$v(x, p) \doteq \left. \frac{dp(t)}{dt} \right|_{t=0}$$

в точке x принадлежит пространству $T_x M$ (предполагается, что k фиксировано и $k \geq 1$). Это пространство наделяется структурой *евклидова* пространства.

П р и м е р 1. Рассмотрим простой пример стандартной управляемой системы

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = v, \\ \dot{v} = -\omega^2 \sin \alpha + u, \quad |u| \leq 1, \end{cases} \quad (1.6)$$

описывающей колебания математического маятника, снабженного мотором в точке подвеса. Предполагаем далее, что масса m груза (точки $\mathbf{p}$) равна единице, а константа ω определяется равенством $\omega = \sqrt{\ell/g}$, где ℓ — длина маятника, g — ускорение свободного падения точки $\mathbf{p}$. Будем предполагать, что $\omega < 1$.

Отметим теперь, что естественным фазовым пространством системы (1.6) является гладкое двумерное многообразие $M = S_1 \times \mathbb{R}$, где S_1 — окружность. Следовательно, локальные координаты точки $\mathbf{p}$ рассматриваемой системы (1.6) имеют вид $(\alpha \bmod 2\pi, v)$, где α — угол отклонения точки $\mathbf{p}$ от вертикали, $-\pi \leq \alpha \leq \pi$ (точки $-\pi$ и π отождествляются), а v — угловая скорость движения точки $\mathbf{p}$, $v \in \mathbb{R}$.

Предположим теперь, что управление маятником осуществляется с помощью *допустимых* позиционных управлений $u(\alpha, v)$ (см. определение 3 на стр. 270), а задача состоит в построении допустимого позиционного управления $u(\alpha, v)$, приводящего маятник из всякой точки (α, v) фазового пространства M в заданную точку $(\pi, 0)$ за конечное время $T(\alpha, v)$ близкое к минимальному (задача стабилизации маятника в нижней точке подвеса).

Рассмотрим сначала поведение траекторий *свободной* системы (1.6) (т.е. системы (1.6) при управлении $u(t)$, тождественно равном нулю)

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = v, \\ \dot{v} = -\omega^2 \sin \alpha. \end{cases} \quad (1.7)$$

Система (1.7) имеет две особые точки $(0, 0)$ и $(\pi, 0)$ (точка $(\pi, 0)$ и особая точка $(-\pi, 0)$ отождествляются) и две *сепаратрисы*

$$v(\alpha) = \omega\sqrt{2(\cos \alpha + 1)}, \quad v(\alpha) = -\omega\sqrt{2(\cos \alpha + 1)}, \quad -\pi < \alpha < \pi, \quad (1.8)$$

из седла $(-\pi, 0)$ в седло $(\pi, 0)$, которые являются решениями двух задач Коши

$$\frac{dv}{d\alpha} = -\omega^2 \frac{\sin \alpha}{v}, \quad v(0) = 2\omega, \quad \frac{dv}{d\alpha} = -\omega^2 \frac{\sin \alpha}{v}, \quad v(0) = -2\omega. \quad (1.9)$$

Остальные траектории системы уравнений (1.7) — замкнутые кривые. Они определяются при каждом значении параметра β равенством $v^2 = 2\omega^2(\cos \alpha + \beta)$, которое удовлетворяет уравнению $v dv + \omega^2 \sin \alpha d\alpha = 0$ (см. (1.9)), а параметр β меняется либо в пределах $-1 < \beta < 1$ (в области G_1 , ограниченной сепаратрисами (1.8)), либо в пределах $1 < \beta < \infty$ (в остальных точках многообразия M). Кроме того, несложно показать, что всякая точка фазового пространства системы (1.7) передвигается по часовой стрелки с возрастанием времени t .

Рассмотрим теперь две области G_2, G_3 , объединение которых совпадает с областью $M \setminus \bar{G}_1$. Предположим, что нижняя граница области G_2 ограничена верхней сепаратрисой (см. первое равенство в (1.8)), а верхняя граница области G_3 — нижней сепаратрисой, и построим позиционное управление

$$u(\alpha, v) = \begin{cases} 1, & \text{если } (\alpha, v) \in G_1, \\ -1, & \text{если } (\alpha, v) \in G_2 \cup G_3. \end{cases}$$

Тогда замкнутая система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = v, \\ \dot{v} = -\omega^2 \sin \alpha + u(\alpha, v). \end{cases} \quad (1.10)$$

Отметим теперь, что поскольку рассматриваемое управление $u(\alpha, v)$ разрывно на сепаратрисах, решения системы (1.10) естественно понимать в смысле А.Ф. Филиппова [9; 10], и поэтому нет необходимости определять $u(\alpha, v)$ на множествах меры нуль (на сепаратрисах и особых точках $(-\pi, 0)$, $(\pi, 0)$, которые отождествляются). Далее, несложно убедиться, что все точки (α, v) области G_2 приближаются к верхней сепаратрисе с ненулевой скоростью $\sqrt{v^2 + (\omega^2 \sin \alpha + 1)^2}$, где $v > \omega\sqrt{2(\cos \alpha + 1)}$. Действительно, из первого уравнения системы (1.10) следует, что если $(\alpha, v) \in G_2$, то неравенства $\dot{\alpha} = v > \omega\sqrt{2(\cos \alpha + 1)} > 0$ выполнены при всех $\alpha \in (-\pi, \pi)$ и, следовательно, координата α строго возрастает на заданном интервале с возрастанием времени t . Кроме того, из второго уравнения системы (1.10) следует неравенство $\dot{v} = -\omega^2 \sin \alpha - 1 < 0$, справедливое для всех $\alpha \in [-\pi, \pi]$. Таким образом, вектор скорости $f_-(\alpha)$ траектории системы (1.10) при вхождении точки (α, v) из области G_2 в верхнюю сепаратрису имеет следующие координаты: $f_-(\alpha) = (\omega\sqrt{2(\cos \alpha + 1)}, -\omega^2 \sin \alpha - 1)$, и, как несложно заметить, для всех $\alpha \in [-\pi, \pi]$ выполнено неравенство

$$|f_-(\alpha)| = \sqrt{2\omega^2(\cos \alpha + 1) + (\omega^2 \sin \alpha + 1)^2} \geq 1.$$

Следовательно, каждая точка (α, v) области G_2 за конечное время приходит на верхнюю сепаратрису.

Аналогично рассуждая о движении точки (α, v) из области G_1 на верхнюю сепаратрису, несложно показать, что она приходит к сепаратрисе за конечное время с вектором скорости $f_+(\alpha) = (\omega\sqrt{2(\cos \alpha + 1)}, -\omega^2 \sin \alpha + 1)$ и $|f_+(\alpha)| \geq 1$.

В силу определения решения Филиппова вдоль верхней сепаратрисы возникает *скользящий* режим, т. е. режим, который имеет ненулевой $\omega\sqrt{2(\cos \alpha + 1)} + \omega^2 \sin^2 \alpha$ вектор скорости

$$q(\alpha, v) \doteq \lambda f_-(\alpha) + (1 - \lambda) f_+(\alpha) = (\omega\sqrt{2(\cos \alpha + 1)}, -\omega^2 \sin \alpha), \quad \lambda = 1/2, \quad -\pi < \alpha < \pi.$$

Аналогичные рассуждения можно провести на нижней сепаратрисе.

2. Динамическая система сдвигов

Фиксируем удовлетворяющие условиям определения 1 многообразие $M = M^n$ и множество $U \subset \mathbb{R}^m$ и введем в рассмотрение *пространство $\mathcal{S} = \mathcal{S}(M, U)$ стандартных управляемых систем*

$$\dot{x} = v(t, x, u), \quad (t, x, u) \in \mathbb{R} \times M \times U, \quad (2.1)$$

с метрикой

$$b(v^1, v^2) \doteq \sup_K \min \left\{ \int_t^{t+1} \max_{(x,u) \in K \times U} |v^1(s, x, u) - v^2(s, x, u)|_{\mathbb{R}^n} ds, \frac{1}{|t|} \right\}, \quad (2.2)$$

построенной на основе метрики М.В. Бебутова (см. [11;12]). Здесь K — произвольный компакт многообразия M , $u = (u_1 \dots u_m) \in U$,

$$\sigma(x) = (x_1 \dots x_n) \in W_K \doteq \sigma(W \cap K),$$

где (W, σ, V) — карта многообразия M , имеющая непустое пересечение с множеством $W \cap K$.

Введем в рассмотрение однопараметрическую группу g^τ преобразований пространства $\mathcal{S}$ в себя определенную, равенством $g^\tau v = v_\tau$, где $v_\tau(t, x, u) \doteq v(t + \tau, x, u)$, $\tau \in \mathbb{R}$. Несложно убедиться, что

$$g^\tau v|_{\tau=0} = v, \quad g^\tau(g^s v) = g^{\tau+s} v \quad \text{и функция } (\tau, v) \rightarrow g^\tau v \text{ непрерывна.}$$

Следовательно, пара $(\mathcal{S}, g^\tau)$ определяет топологическую динамическую систему, которую принято называть *динамической системой сдвигов*.

Рассмотрим теперь траекторию

$$\text{orb}(v) \doteq \{g^\tau v : \tau \in \mathbb{R}\}$$

движения $\tau \rightarrow g^\tau v$ системы (2.1) и замкнем ее в метрике (2.2).

Лемма 1 (о замыкании). Пусть $v \in \mathcal{S}$. Включение $\widehat{v} \in \overline{\text{orb}}(v)$ выполнено тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{\tau_i\}$ моментов времени, удовлетворяющая следующему свойству: для любого положительного ε и всякого компакта $K \subset M$ найдется такой индекс $i_0 = i_0(\varepsilon, K)$, что для всех i , удовлетворяющих неравенству $i \geq i_0$, выполнено неравенство

$$\max_{|t| \leq \varepsilon^{-1}} \int_t^{t+1} \max_{(x,u) \in K \times U} |v_{\tau_i}(s, x, u) - \widehat{v}(s, x, u)|_{\mathbb{R}^n} ds \leq \varepsilon. \quad (2.3)$$

Кроме того, всякое векторное поле $\widehat{v}$, принадлежащее множеству $\overline{\text{orb}}(v)$, содержится в $\mathcal{S}$.

Доказательство. Во-первых отметим, что равенство (2.2) действительно определяет метрику в $\mathcal{S}$. В доказательстве нуждается только неравенство треугольника, но оно автоматически следует из неравенства треугольника в евклидовом пространстве

$$\max_{y \in Y} |a(y) - b(y)| \leq \max_{y \in Y} |a(y) - c(y)| + \max_{y \in Y} |c(y) - b(y)|,$$

свойств интеграла и неравенства $\min\{a + b, c\} \leq \min\{a, c\} + \min\{b, c\}$ для любых неотрицательных чисел a, b, c .

Во-вторых, в силу определения (2.2) из равенства $b(v^1, v^2) = \varepsilon$ следует неравенство

$$\min \left\{ \int_t^{t+1} \max_{(x,u) \in K \times U} |v^1(s, x, u) - v^2(s, x, u)|_{\mathbb{R}^n} ds, \frac{1}{|t|} \right\} \leq \varepsilon, \quad (2.4)$$

выполненное при каждом $t \in \mathbb{R}$ и любом компакте $K \subset M$. Из неравенства (2.4), как легко обнаружить, следуют либо неравенство

$$\int_t^{t+1} \max_{(x,u) \in K \times U} |v^1(s, x, u) - v^2(s, x, u)|_{\mathbb{R}^n} ds \leq \varepsilon \quad \text{при} \quad |t| \leq \varepsilon^{-1}, \quad (2.5)$$

либо неравенство

$$\int_t^{t+1} \max_{(x,u) \in K \times U} |v^1(s, x, u) - v^2(s, x, u)|_{\mathbb{R}^n} ds > \varepsilon \quad \text{при} \quad |t| > \varepsilon^{-1}. \quad (2.6)$$

Неравенство (2.6) для нас не представляет интереса, а из неравенства (2.5), как легко заметить, следует первое утверждение леммы (см. (2.3)).

Покажем теперь, что всякое векторное поле $\hat{v}$ пространства $\overline{\text{ogb}}(v)$ определяет стандартную управляемую систему. Пусть

$$v_{\tau_i} \rightarrow \hat{v}, \quad i \rightarrow \infty. \quad (2.7)$$

Достаточно убедиться, что для $\hat{v}$ выполнены условия 3 и 4 определения 1.

Действительно, для каждого компакта $K \subset M$ существует такая константа $C(K)$, что неравенство

$$\max_{(x,u) \in K \times U} |v(t, x, u)| \leq C(K)$$

выполнено для всех $t \in \mathbb{R}$. Поэтому неравенство

$$\max_{(x,u) \in K \times U} |\hat{v}(t, x, u)| \leq C(K)$$

выполнено тоже для всех $t \in \mathbb{R}$.

Далее, для любого индекса i функция $t \rightarrow v_{\tau_j}(t, x, u)$ переменного t интегрируема по Лебегу на каждом отрезке $I = [t_1, t_2]$, и для каждого компакта $K \subset M$ существует такая константа $C(I, K)$, что для всех $t \in I$ выполнено неравенство

$$\max_{(x,u) \in K \times U} |v_{\tau}(t, x, u)| \leq C(I, K).$$

Отсюда следует, что существует подпоследовательность $\{v_{\tau_{i_j}}\}$ последовательности функций $t \rightarrow v_{\tau_i}(t, x, u)$, слабо сходящаяся на каждом компактном множестве $K \subset M$ к интегрируемой по Лебегу функции $t \rightarrow \hat{v}(t, x, u)$ на отрезке I . Этот процесс можно продолжить на счетное множество отрезков прямой $\mathbb{R}$, покрывающих прямую $\mathbb{R}$. Из сказанного следует, что функция $t \rightarrow \hat{v}(t, x, u)$ локально интегрируема по Лебегу на прямой $\mathbb{R}$.

Покажем, что функция $t \rightarrow v(t, x, u)$ равномерно непрерывна в среднем на прямой $\mathbb{R}$ равномерно относительно K (K — произвольный компакт в M). Действительно, для заданных $\varepsilon > 0$ и компакта $K \subset M$ построим такое $\beta(\varepsilon, K) > 0$, что при всех $t \in \mathbb{R}$, $\tau \in [-\beta, \beta]$ и любых $(x, u) \in Z_K$ выполнено неравенство (1.3). Из этого неравенства при достаточно больших индексах i следует (см. (2.7)) при $t \in \mathbb{R}$, $\tau \in [-\beta, \beta]$, $(x, u) \in Z_K$ неравенство

$$\begin{aligned} \int_t^{t+1} |\hat{v}(s + \tau, x, u) - \hat{v}(s, x, u)| ds &\leq \int_t^{t+1} |\hat{v}(s + \tau, x, u) - v_{\tau_i}(s + \tau, x, u)| ds \\ &+ \int_t^{t+1} |v_{\tau_i}(s + \tau, x, u) - v_{\tau_i}(s, x, u)| ds + \int_t^{t+1} |v_{\tau_i}(s, x, u) - \hat{v}(s, x, u)| ds \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon, \end{aligned}$$

означающее, что третье условие определения 1 выполнено.

По той же схеме доказывается, что всякое векторное поле множества $\overline{\text{orb}}(v)$ удовлетворяет локальному условию Липшица (см. (1.2))

$$\begin{aligned} |\hat{v}(t, x, u) - \hat{v}(t, y, u)| &\leq |\hat{v}(t, x, u) - v_{\tau_i}(t, x, u)| + |v_{\tau_i}(t, x, u) - v_{\tau_i}(t, y, u)| \\ &+ |v_{\tau_i}(t, y, u) - \hat{v}(t, y, u)| \leq (\varepsilon + \ell_K(x_0) + \varepsilon)|x - y|, \end{aligned}$$

что и завершает наши рассуждения. $\square$

В силу леммы 1 рассматриваемая в пространстве $(\mathcal{S}, b)$ топология называется топологией сходимости, *равномерной на компактах* пространства $\mathbb{R} \times M$.

Для дальнейшего нам понадобится ввести в рассмотрение так называемое *омега-предельное множество* $\Omega(v)$ траектории $\text{orb}(v)$. Это множество определяется следующим образом: включение $\hat{v} \in \Omega(v)$ выполнено в том и только том случае, если найдется такая числовая последовательность $\{\tau_i\}$, где $\tau_i \rightarrow \infty$, что в метрике (2.2) имеет место равенство $\lim_{i \rightarrow \infty} v_{\tau_i} = \hat{v}$.

В статье [12] (см. лемму 4) с помощью результатов Бебутова [11] доказано следующее важное для дальнейшего утверждение.

Лемма 2 (о компактности). *Для каждой стандартной управляемой системы (2.1) пространство $(\overline{\text{orb}}(v), b)$ с метрикой (2.2) компактно.*

3. Допустимое позиционное управление

Напомним прежде всего необходимые для дальнейшего определения допустимого позиционного управления и равномерной локальной управляемости заданной траектории стандартной управляемой системы

$$\dot{x} = v(t, x, u). \quad (3.1)$$

О п р е д е л е н и е 3 (позиционного управления). Функция $u : \mathbb{R} \times M \rightarrow U$ называется *допустимым позиционным управлением* стандартной системы (3.1), если:

1. Для каждой точки $x \in M$ функция $t \rightarrow u(t, x)$ переменного t *локально интегрируема* по Лебегу и *равномерно непрерывна в среднем*.

2. Любая ограниченная область G многообразия M состоит из конечного числа областей G^i в каждой из которых векторное поле

$$q(t, x) \doteq v(t, x, u(t, x)) \quad (3.2)$$

замкнутой системы уравнений

$$\dot{x} = q(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times M, \quad (3.3)$$

локально липшицево (см. (1.2)) и при приближении к любой точке $\hat{x}$ границы области G^i векторное поле (3.2) имеет *конечный предел*².

3. Существует *допустимый процесс* $\xi(t) = (\varphi(t), u(t))$ системы (3.3), который определяется следующим образом:

а) $\varphi(t)$ — *определенное* на оси $\mathbb{R}$ и *ограниченное* на полуоси $\mathbb{R}_+$ решение (в смысле Караатеодори, см. [9; 10]) дифференциального включения

$$\dot{x} \in v(t, x, \mathcal{U}(t, x)),$$

²При названных условиях функция $x \rightarrow u(x)$ суперпозиционно измерима в следующем смысле: если функция $t \rightarrow x(t)$ локально измерима по Лебегу, то функция $t \rightarrow u(x(t))$ тоже локально измерима по Лебегу (см. [13]).

где

$$\mathcal{U}(t, x) \doteq \overline{\text{co}}\{u(t, x)\}, \quad (3.4)$$

а $\{u(t, x)\}$ — множество предельных точек функции $x \rightarrow u(t, x)$ при фиксированном x и всевозможных $y \rightarrow x$;

б) $u(t)$ — такое *допустимое* программное управление, что $u(t) \in \mathcal{U}(t, \varphi(t))$ при всех t и для каждого t выполнено *условие согласованности*

$$v(t, \varphi(t), u(t)) \in T_{\varphi(t)}M. \quad \square$$

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что в силу компактности множества U допустимое программное управление $u_0(t)$ ограничено на прямой $\mathbb{R}$. Кроме того, из определения 2 *допустимого* процесса, условий 1–4 определения 1 *стандартной* управляемой системы и известной теоремы о локальном существовании и единственности решения задачи Коши

$$\dot{x} = v(t, x, u_0(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (3.5)$$

следует, что решение $\varphi_0(t)$ задачи (3.5) на максимальном интервале его существования не покидает фазовое пространство системы (3.3), заданное многообразием M . Действительно, есть простые примеры систем дифференциальных уравнений, не обладающих свойством единственности решения задачи Коши, на особых многообразиях которых (т.е. на многообразиях, не обладающих свойством единственности решения задачи Коши) существуют решения, покидающие гладкое многообразие M , на котором рассматривается система.

Прежде чем сформулировать определение допустимого позиционного управления стандартной управляемой системы, напомним формальное определение решения в смысле А. Ф. Филиппова [9; 10] системы дифференциальных уравнений (3.3) с разрывным по фазовым переменным векторным полем $q(t, x)$. Решением (в смысле Филиппова) системы (3.3) называется всякая абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая включению

$$\dot{x} \in Q(t, x) \quad (3.6)$$

при почти всех t , где правая часть $Q(t, x)$ включения (3.6) определена равенством

$$Q(t, x) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{\text{mes } \mu = 0} \overline{\text{co}} q(t, \mathcal{O}_\varepsilon(x) \setminus \mu). \quad (3.7)$$

Здесь векторное поле $q(t, x)$ системы (3.3) в локальных координатах многообразия M имеет представление

$$q(t, x) = (q_1(t, x_1 \dots x_n) \dots q_n(t, x_1 \dots x_n)),$$

mes — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, а $\overline{\text{co}}A$ — замыкание выпуклой оболочки множества $A \subset \mathbb{R}^n$.

З а м е ч а н и е 3. Отметим [9, с. 40–42], что в силу условия 2 определения 3 позиционного управления для каждой точки $x \in M$ непрерывности векторного поля $q(t, x)$ множество (3.7) состоит из одной точки, совпадающей с $q(t, x)$; если же $\hat{x}$ — точка разрыва функции $x \rightarrow q(t, x)$ (в этом случае $\hat{x}$ находится на границе объединения областей $\{G^i\}$), то правая часть $Q(t, x)$ включения (3.6) в точке $x = \hat{x}$ представляет собой выпуклый многогранник, образованный из всех таких точек $q^i(t, \hat{x})$, для которых выполнено условие

$$q^i(t, \hat{x}) = \lim_{\substack{x \rightarrow \hat{x} \\ x \in G^i}} q(t, x).$$

Из сказанного следует, что в рассматриваемом случае представление множества $Q(t, x)$ упрощается: $Q(t, x) = q(t, x)$, если x — точка непрерывности векторного поля $q(t, x)$, если же $\hat{x}$ — точка разрыва векторного поля, то $Q(t, \hat{x}) = \overline{\text{co}}\{q^i(t, \hat{x})\}$, где $\{q^i(t, \hat{x})\}$ — множество предельных точек векторного поля $q(t, x)$ при всевозможных $x \rightarrow \hat{x}$.

Отметим еще, что из результатов монографии [9, с. 66, 67] и статьи Филиппова [10] следует, что при высказанных предположениях локальное решение задачи Коши

$$\dot{x} = q(t, x), \quad x(0) = x_0 \in M$$

существует и обладает свойствами A – E , перечисленными в монографии [9, с. 64].

4. Теорема о равномерной локальной управляемости допустимого процесса

Пусть заданы *стандартная* управляемая система

$$\dot{x} = v(t, x, u), \quad (4.1)$$

допустимое позиционное управление $u(t, x)$ и *допустимый* процесс $\xi(t) \doteq (\varphi(t), u(t))$ замкнутой системы

$$\dot{x} = v(t, x, u(t, x)). \quad (4.2)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$t \rightarrow \psi(t) \doteq (q(t, x), \xi(t)), \quad (4.3)$$

которую будем называть *полным допустимым процессом*. Уместно напомнить, что $q(t, x) \doteq v(t, x, u(t, x))$ и в силу предыдущих определений при почти всех t выполнено равенство $u(t) = u(t, \varphi(t))$, поэтому функция (4.3) не зависит от x и, кроме того, $v(t, \varphi(t), u(t)) \in T_{\varphi(t)}M$.

Если процесс (4.3) является полным, но необязательно допустимым, в том смысле, что $v(t, x, u)$ — *стандартное* векторное поле, $u(t, x)$ — *допустимое* позиционное управление, но процесс $\xi(t) = (x(t), u(t))$ не предполагается допустимым, то такой процесс мы называем *полным процессом*, пропуская слово “допустимый”.

Будем рассматривать пространство $\Psi = \{(v(t, x, u), u(t, x), \xi(t))\}$ полных процессов с метрикой, определенной равенством

$$b(w^1, w^2) = \sup_t \min \left\{ \int_t^{t+1} |w^1(s) - w^2(s)|_{\mathbb{R}^n} ds, \frac{1}{|t|} \right\}, \quad (4.4)$$

где $w^i(t) = v^i(t, \varphi^i(t), u^i(t))$, $u^i(t) \in \mathcal{U}^i(t, \varphi^i(t))$, а функции $\mathcal{U}^i(t, x)$, $i = 1, 2$, определены равенством (3.4). Такая метрика, как несложно убедиться, порождает топологию, равномерную на отрезках $[-\vartheta, \vartheta]$, и рассматриваемое пространство (Ψ, b) оказывается компактным.

Далее, для *полного допустимого процесса* (4.3) построим положительную полутраекторию $\text{orb}_+(\psi) = \{\psi_\tau(\cdot) : \tau \geq 0\}$ движения $\tau \rightarrow \psi_\tau$ процесса ψ , где $\psi_\tau(t) \doteq (q(t + \tau, x), \xi(t + \tau))$, и замкнем ее $\overline{\text{orb}}_+(\psi)$ в метрике (4.4).

В силу названных ранее условий о стандартном векторном поле $v(t, x, u)$, допустимом позиционном управлении $u(t, x)$ и допустимом процессе $\xi(t)$ и с помощью соответствующего утверждения Бебутова³ (см. критерий М. Рисса [14, с. 32] о компактности и теорему 1 работы [11]), несложно доказать, что пространство $\overline{\text{orb}}_+(\psi)$ компактно в метрике (4.4). Следовательно, динамическая система $(\overline{\text{orb}}_+(\psi), g^\tau)$, где $g^\tau \psi = \psi_\tau$ — оператор сдвига по времени τ , имеет для каждого полного процесса $\psi(t)$, принадлежащего фазовому пространству $\overline{\text{orb}}_+(\psi)$, *омега-предельное множество* $\Omega(\psi)$; оно компактно и инвариантно относительно сдвигов по τ .

³В теореме 1 работы Бебутова [11] доказано, что замыкание множества сдвигов ограниченной и равномерно непрерывной на числовой прямой $\mathbb{R}$ функции $t \rightarrow f(t)$ компактно в топологии равномерной сходимости на отрезках. Это утверждение можно распространить на функции $v(t, x, u)$, удовлетворяющие определению 1 данной работы в предположении, что рассматривается топология, заданная метрикой (2.2).

О п р е д е л е н и е 4 (равномерно управляемого полного процесса). Фиксируем полный допустимый процесс

$$\psi(t) = (v(t, x, u), u(t, x), \xi_0(t)), \quad \xi_0(t) = (\varphi_0(t), u_0(t)),$$

и обозначим через $\varphi(t, x_1)$ решение системы (4.2) с начальным условием $\varphi(0, x_1) = x_1$.

По определению *множеством управляемости* $\mathcal{D}_\vartheta(\psi)$ решения $\varphi_0(t)$ системы (4.2) на отрезке $[0, \vartheta]$, $\vartheta > 0$, называется множество⁴

$$\mathcal{D}_\vartheta(\psi) \doteq \left\{ x_1 \in M : \varphi(t, x_1)|_{t=\vartheta} = \varphi_0(t)|_{t=\vartheta} \right\}.$$

Положительная полутраектория

$$\text{orb}_+(\varphi_0) = \{\varphi_0(\cdot + \tau) : \tau \geq 0\} \quad (4.5)$$

решения $\varphi_0(t)$ системы (4.2) полного допустимого процесса (4.3) называется *локально управляемой*, если для любого $\tau \geq 0$ найдутся такие положительные числа $\varepsilon = \varepsilon(\tau)$ и $\vartheta = \vartheta(\tau)$, что $O_\varepsilon(\varphi_\tau(0)) \subseteq \mathcal{D}_\vartheta(\psi_\tau)$, где $\psi_\tau(t) = \psi(t + \tau)$.

Далее, по определению полутраектория (4.5) называется *равномерно локально управляемой*, если найдутся такие положительные числа ε, ϑ , что для всех $\hat{\psi} \in \overline{\text{orb}_+}(\psi)$ имеет место вложение $O_\varepsilon(\hat{\varphi}_0(0)) \subseteq \mathcal{D}_\vartheta(\hat{\psi})$. $\square$

Из определения 4 следует, что если $\psi(t)$ — локально управляемый допустимый процесс, то при каждом неотрицательном τ процесс $\psi(t + \tau)$ тоже является локально управляемым допустимым процессом. Но, как показывают простые примеры, в омега-предельном множестве $\Omega(\psi)$ динамической системы $(\overline{\text{orb}_+}(\psi), g^\tau)$, отвечающей локально управляемому допустимому процессу, наряду с локально управляемыми процессами могут появиться полные процессы, которые не являются локально управляемыми. Отсюда следует, что из условия локальной управляемости полного допустимого процесса $\psi(t)$ автоматически не следует его равномерная локальная управляемость.

Интересно, что есть и такие примеры: исходный полный допустимый процесс $\psi(t)$ не является равномерно локально управляемым, но в омега-предельном множестве соответствующей динамической системы $(\overline{\text{orb}_+}(\psi), g^\tau)$ наряду с полными процессами, которые не являются равномерно локально управляемыми, есть и равномерно локально управляемые допустимые процессы. Рассмотрим по этому поводу следующий пример.

П р и м е р 2. Рассмотрим полный допустимый процесс ψ , состоящий из стандартной управляемой системы

$$\dot{x} = a(t)u, \quad a(t) = \begin{cases} \sin(\ln(t+1)) & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases} \quad |u| \leq 1, \quad (4.6)$$

допустимого позиционного управления

$$u(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x > 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

и допустимого процесса $\xi(t) = (0, 0)$. Можно проверить, что тривиальное решение $x_0(t) \equiv 0$ процесса ψ является *локально управляемым*, но оно не является равномерно локально управляемым: см. решение

$$x(t) = \begin{cases} \varepsilon + 0.5(t+1)[\sin(\ln(t+1)) - \cos(\ln(t+1))] + 0.5, & \text{если } x(t) > 0, \\ \varepsilon - 0.5(t+1)[\sin(\ln(t+1)) - \cos(\ln(t+1))] - 0.5, & \text{если } x(t) < 0, \end{cases}$$

⁴Полезно вспомнить, что в силу высказанных предположений для всех $t \in [0, \vartheta]$ выполнено условие согласованности $v(t, \varphi(t, x_1), u(t, x_1)) \in T_{\varphi(t, x_1)}M$, где $u(t, x_1) \in \mathcal{U}(t, \varphi(t, x_1))$, множество $\mathcal{U}(t, x)$ определено равенством (3.4), а управление $u(t, x_1)$ таково, что пара $(\varphi(t, x_1), u(t, x_1))$ вместе с векторным полем $v(t, x, u)$ и позиционным управлением $u(t, x)$ образуют *полный допустимый процесс* замкнутой системы (4.2).

системы (4.6) с начальным условием $x(0) = \varepsilon$ и управлением (4.7).

Далее, в омега-предельном множестве $\Omega(\psi)$ рассматриваемого процесса ψ , как несложно убедиться, наряду с *локально управляемыми* полными процессами есть *равномерно локально управляемые*. Действительно, в $\Omega(\psi)$ содержатся уравнения $\dot{x} = \alpha u(x)$ с коэффициентами $\alpha \in [-1, 1]$. Среди таких уравнений при каждом $\alpha \in [-1, 0)$ тривиальное решение $x_0 \equiv 0$ *равномерно локально управляемо*.

Подготовим формулировку теоремы. Пусть задан допустимый процесс $\xi_0(t) = (\varphi_0(t), u_0(t))$, где $\varphi_0(t) = \varphi(t, x_0)$; напомним обозначение $q(t, x) = v(t, x, u(t, x))$ и рассмотрим произвольное решение $\varphi(t, x_1)$ системы (4.2) с начальной точкой x_1 , удовлетворяющей при заданном положительном ε включению⁵ $x_1 \in \mathcal{O}_\varepsilon(x_0)$.

Введем далее по заданному *допустимому* процессу $\xi_0(t) = (x_0(t), u_0(t))$ две функции, которые будем называть тоже *допустимыми*.

1. Скалярная функция $L(t, y_1 \dots y_n)$ переменных $(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathcal{O}_r^n(0)$, $r > 0$, при каждом y абсолютно непрерывна по t , ограничена на полуоси $\mathbb{R}_+$ вместе с производными $\frac{\partial}{\partial t}L(t, y)$, $\frac{\partial}{\partial y}L(t, y)$ и *определенно положительна по переменной y равномерно относительно времени t в r -окрестности нуля*⁶, т. е. для каждого $\varepsilon \in (0, r)$ найдется такое $\delta > 0$, что $L(t, y) \leq \delta$ при всех $t \geq 0$ и $y \in \mathcal{O}_\varepsilon^n(0)$.

2. Функция $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ локально интегрируема по Лебегу, *ограничена*, и при заданном положительном ϑ выполнено неравенство

$$\sup_{t \geq 0} \int_t^{t+\vartheta} a(s) ds < 0.$$

Теорема. Пусть заданы: стандартная управляемая система (4.1), допустимое позиционное управление $u(t, x)$ и допустимый процесс $\xi_0(t) \doteq (\varphi_0(t), u_0(t))$, отвечающий системе (4.2) и управлению $u(t, x)$. Предположим, что найдутся такие допустимые функции $L(t, y)$ и $a(t)$, что для омега-предельного множества $\Omega(\eta)$ траектории

$$\eta(t, x, y) = (v(t, x, u(t, x)), L(t, y), a(t))$$

некоторых положительных чисел ϑ, ε и всех $\hat{\eta} \in \Omega(\eta)$, $t \in [0, \vartheta]$ и $x \in \mathcal{O}_\varepsilon(\hat{\varphi}(0))$ выполнено неравенство

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{L}(t, \hat{y}(t, x)) + \left\langle \frac{\partial}{\partial y} \hat{L}(t, \hat{y}(t, x)), \hat{v}(t, x, \hat{u}(t, x)) - \hat{v}(t, \hat{\varphi}_0(t), \hat{u}_0(t)) \right\rangle \leq \hat{a}(t) \hat{L}(t, \hat{y}(t, x)),$$

где $\hat{y}(t, x) = \sigma(x) - \sigma(\hat{\varphi}_0(t))$. Тогда положительная полутраектория

$$\text{orb}_+(\varphi_0) = \{\varphi_0(\cdot + \tau) : \tau \geq 0\}$$

равномерно локально управляема. □

Идея доказательства этой теоремы состоит в следующем. Наряду со стандартной управляемой системой (4.1), заданным допустимым позиционным управлением $u(t, x)$ (см. определение 3) и допустимым процессом $\xi(t) \doteq (\varphi_0(t), u_0(t))$ (существование которого предполагается) будем рассматривать множество сдвигов системы $\dot{x} = v(t + \tau, x, u)$, управления $u(t + \tau, x)$ и

⁵Поскольку рассматриваемая система (4.2) определена на многообразии M , то предполагается, что найдется область B , содержащая точку x_1 и находящаяся на одной карте $(W, \phi, \mathbb{R}^n)$ многообразия M . Следовательно, найдется такое положительное ε , что выполнено включение $\mathcal{O}_\varepsilon(x_0) \subseteq \phi(B)$.

⁶В терминологии А. М. Ляпунова говорят, что L имеет бесконечно малый высший предел.

процесса $\xi_0(t + \tau)$, $\tau \in [0, \infty)$, и замкнем эту тройку $\psi(t) = (v(t, x, u), u(t, x), \xi_0(t))$ в топологии равномерной сходимости на компактах $(t, x) \in [-\vartheta, \vartheta] \times K$, K — компакт в M . В силу выбранной метрики (4.4) это возможно.

Оказывается, что множество $\overline{\text{orb}}_+(\psi) = \{\psi(\cdot + \tau) : \tau \geq 0\}$ компактно и поэтому соответствующая динамическая система сдвигов $(\overline{\text{orb}}_+(\psi), g^\tau)$ имеет омега-предельное множество $\Omega(\psi)$ (которое может быть достаточно простым, см. пример 2). В силу определения равномерной локальной управляемости достаточно доказать, что множество $\Omega(\varphi_0)$, которое также компактно и инвариантно, состоит из локально управляемых систем с общими константами ε и ϑ (см. определение 4). Далее, для того чтобы получить достаточные условия локальной управляемости каждой системы пространства $\Omega(\varphi_0)$ естественно воспользоваться методикой А. М. Ляпунова, получившей название метода функция Ляпунова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барбашин Е.А., Красовский Н.Н. Об устойчивости движения в целом // Докл. АН СССР. 1952. Т. 86, № 6. С. 453–456.
2. Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Распространение теорем Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского об устойчивости на управляемые динамические системы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Том 15, № 3. С. 185–201.
3. Тонков Е.Л. Магистральные процессы управляемых систем на гладких многообразиях // Вест. Удмурт. ун-та. 2013. Вып. 4. С. 132–145. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
4. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. 550 с.
5. Аносов Д.В. Лекции по линейной алгебре. М.: Регулярная и хаотическая динамика, 1999. 105 с.
6. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: УРСС, 1986. 759 с.
7. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971. 239 с.
8. Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005. 391 с.
9. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1971. 224 с.
10. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью // Мат. сб. 1960. Т. 51, № 1. С. 99–128.
11. Бебутов М.В. О динамических системах в пространстве непрерывных функций // Бюлл. Ин-та математики при МГУ. 1940. Т. 2, № 5. С. 1–52.
12. Панасенко Е.А., Родина Л.И., Тонков Е.Л. Пространство $\text{clsc}(\mathbb{R}^n)$ с метрикой Хаусдорфа — Бебутова и дифференциальные включения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 162–177.
13. Скворцов В.А. Борелевское множество // Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия, 1977. Т. 1. С. 535.
14. Справочная математическая библиотека. Функциональный анализ (под редакцией Крейна С.Г.) М.: Наука, 1972. С. 544.

Тонков Евгений Леонидович

д-р физ.-мат. наук, профессор,

зав. кафедрой

Удмуртский государственный университет,

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: eltonkov@udm.ru

УДК 517.977

**ФОРМУЛЫ ИСЧИСЛЕНИЯ НЕГЛАДКИХ ОСОБЕННОСТЕЙ ФУНКЦИИ
ОПТИМАЛЬНОГО РЕЗУЛЬТАТА В ЗАДАЧЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ¹****А. А. Успенский**

Получены аналитические формулы для крайних точек сингулярного множества в одном классе задач быстрогодействия на плоскости. Показано, что зарождение особенностей находится в прямой зависимости от геометрии целевого множества и дифференциальных свойств его границы. Изучены три наиболее типичных случая и выявлены условия, определяющие появление негладких особенностей. Приведены примеры.

Ключевые слова: задача быстрогодействия, функция оптимального результата, диффеоморфизм, эйконал, множество симметрии.

A. A. Uspenskii. Calculation formulas for nonsmooth singularities of the optimal result function in a time-optimal problem.

Analytical formulas are obtained for extremal points of a singular set in a class of time-optimal problems on a plane. It is proved that the formation of singularities depends directly on the geometry of the target set and on the differential properties of its boundary. Three typical cases are studied and conditions for the appearance of nonsmooth singularities are found. Examples are given.

Keywords: time-optimal problem, optimal result function, diffeomorphism, eikonal, symmetry set.

Введение

Гладкость решения дифференциальной игры или задачи оптимального управления [1–3] является скорее исключением, нежели правилом. Присущая динамическим задачам управления недифференцируемость существенно затрудняет построение их решений как в аналитической, так и в аппроксимационной формах. В работе изучается структура сингулярного множества функции оптимального результата для задачи быстрогодействия с круговой индикатрисой. Сингулярное множество является множеством симметрии [4–6] и позволяет в ряде случаев строить функцию оптимального результата в аналитическом виде. Техника исследования множества симметрии опирается на свойства локальных диффеоморфизмов. Получены формулы исчисления крайних точек сингулярных кривых. Соотношения зависят от геометрии целевого множества и дифференциальных свойств его границы. Основной результат исследования состоит в выводе формул для крайних точек сингулярного множества при ослабленных условиях на гладкость границы целевого множества. Приведенные в работе результаты применимы при изучении свойств невыпуклых множеств, в теории оптимального управления и в теории позиционных дифференциальных игр при изучении негладких особенностей множеств достижимости, стабильных мостов. Кроме того, результаты могут быть полезны специалистам по уравнениям типа Гамильтона — Якоби, работающим в рамках различных концепций [7; 8] обобщенных решений этих уравнений. Результаты также могут быть использованы в геометрической оптике [9] при изучении особенностей эволюции волновых фронтов, при исследовании характеристического уравнения для волнового уравнения [10]. Работа продолжает исследования [11–22].

¹Работа выполнена в рамках программы президиума РАН “Динамические системы и теория управления” при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1002), а также РФФИ (проекты 14-01-00486_а и 13-01-96055-р_урал_а).

1. Объект исследования

Рассматривается краевая задача Дирихле для уравнения Айзекса — Беллмана

$$\min_{\nu: \|\nu\| \leq 1} \langle \nu, Du(\mathbf{x}) \rangle + 1 = 0, \quad (1.1)$$

$$u|_{\Gamma} = 0. \quad (1.2)$$

Здесь $Du(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m} \right)$ — градиент функции $u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{i=1}^m a_i b_i$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)$ и $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$, $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2}$ — норма вектора $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)$. Краевое условие (1.2) определено на границе $\Gamma = \partial M$ замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}^m$.

Классическое гладкое решение уравнения (1.1) существует локально вблизи множества M с гладкой границей и в общем случае не может быть гладким образом продолжено на сколь угодно большую область. Решение задачи (1.1), (1.2) понимается в обобщенном смысле. Согласно известному подходу [3] под обобщенным решением этой задачи понимается функция $u = u(\mathbf{x})$, определенная на замыкании множества $\mathbb{R}^m \setminus M$, удовлетворяющая краевому условию (1.2), в точках гладкости — уравнению (1.1), а в точках негладкости — паре дифференциальных неравенств (см. [3]). Определенное таким образом решение называется минимаксным решением задачи (1.1), (1.2).

Существуют и другие подходы [7;8] к определению обобщенного решения задачи (1.1), (1.2). Один из них стоит выделить особо. С.Н. Кружков, опираясь на постулаты геометрической оптики, ввел [7] так называемое главное (фундаментальное) решение задачи Дирихле для уравнения в частных производных первого порядка типа эйконала

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 = n(\mathbf{x}), \quad n(\mathbf{x}) > 0, \quad (1.3)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad (1.4)$$

которое определяется единственным образом.

Решения задач (1.1), (1.2) и (1.3), (1.4) взаимосвязаны. Структура минимаксного решения $u = u(\mathbf{x})$ задачи (1.1), (1.2) известна [18]:

$$u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M).$$

Здесь $\rho(\mathbf{x}, M) = \min_{\mathbf{a} \in M} \|\mathbf{a} - \mathbf{x}\|$ — евклидово расстояние от точки $\mathbf{x}$ до множества M . Фундаментальное решение $u_k = u_k(\mathbf{x})$ задачи Дирихле (1.3), (1.4) отличается от минимаксного решения $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$ задачи (1.1), (1.2) знаком:

$$u_k(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x}, M).$$

Подробно о решениях (гладких и обобщенных — минимаксных/вязкостных) уравнений в частных производных первого порядка типа Гамильтона — Якоби, а также об их связи с приложениями, в частности, с дифференциальными играми и теорией оптимального управления, изложено в монографии [3]. В ней показано, что минимаксное решение задачи (1.1), (1.2) является функцией оптимального результата для задачи быстрогодействия с простой динамикой

$$\dot{\mathbf{x}} = \nu,$$

где управление $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$ стеснено ограничением $\|\nu\| \leq 1$, а M является целевым множеством. Основной целью настоящей работы является дальнейшее развитие аналитических подходов к построению решений задач быстрогодействия, а с учетом указанных выше взаимосвязей с решениями других задач — и развитие аналитических подходов к построению соответствующих минимаксных решений уравнений гамильтонова типа и обобщенных решений уравнения эйконала — основного уравнения геометрической оптики.

2. Определения, основные понятия

Ниже приводятся результаты исследования задачи (1.1), (1.2) в двухмерном пространстве. При дальнейшем изложении для краткости описания конструкций в $\mathbb{R}^2$ переобозначим компоненты вектора переменных, приняв $\mathbf{x} = (x, y)$.

Напомним основные определения и конструкции, приведенные в [17–22].

Пусть M — замкнутое множество в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$, точка $\mathbf{b} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus M$. Под проекцией $\pi_M(\mathbf{b})$ точки $\mathbf{b}$ на M понимаем ближайшую к $\mathbf{b}$ в евклидовой метрике точку из M . Множество всех проекций точки $\mathbf{b}$ на M обозначим $\Omega_M(\mathbf{b}) = \{\pi_M(\mathbf{b})\}$.

Введем в рассмотрение $\rho(\mathbf{b}, M) = \min_{\mathbf{a} \in M} \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$ — евклидово расстояние от точки $\mathbf{b}$ до множества M .

Из определения проекции следует, что для замкнутого множества M

$$\rho(\mathbf{b}, M) = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|, \quad \mathbf{a} \in \Omega_M(\mathbf{b}).$$

О п р е д е л е н и е 1. Биссектрисой $L(M)$ множества M назовем [17] множество всех точек из его дополнения, которые имеют не менее двух проекций на множество M

$$L(M) = \{B \in \mathbb{R}^m \setminus M : \exists \mathbf{a}_1 \in \Omega_M(B), \exists \mathbf{a}_2 \in \Omega_M(B), \mathbf{a}_1 \neq \mathbf{a}_2\}.$$

Биссектриса является частным представителем множеств симметрии [5].

Обозначим $\Gamma = \text{gr } f$, $\text{gr } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x), x \in X \subseteq \mathbb{R}\}$ — график функции $y = f(x)$, определенной на связном замкнутом множестве $X \subseteq \mathbb{R}$. Интервал $O(x_0) = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2) \subset X$, где $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, будем называть окрестностью точки $x_0 \in X$.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что локальный диффеоморфизм (см. [23]) $x_2 = x_2(x_1)$ непрерывен слева в точке $x_1 = x_0$ и отображает левую полуокрестность точки $x_1 = x_0$ в ее правую полуокрестность, если выполняются условия

- (1) $x_2((x_0 - \delta_1, x_0)) = (x_0, x_0 + \delta_2)$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$,
- (2) $\lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} x_2(x_1) = x_0$.

Нетрудно видеть, что односторонняя непрерывность слева диффеоморфизма $x_2 = x_2(x_1)$ обеспечивается требованием строгой отрицательности его производной.

О п р е д е л е н и е 3. Псевдовершиной кривой $\Gamma = \text{gr } f$ будем называть точку

$$(x_0, y_0) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} (x_*, y_*),$$

где $(x_*, y_*) = (x_*(x_1), y_*(x_1))$ — однопараметрическое подмножество решений $(x_*, y_*) = (x_*(x_1, x_2), y_*(x_1, x_2))$ системы уравнений

$$\begin{cases} y_* = f'(x_1)(x_* - x_1) + f(x_1), \\ y_* = f'(x_2)(x_* - x_2) + f(x_2), \end{cases} \quad (2.1)$$

определяемое непрерывным слева в точке $x_1 = x_0$ локальным диффеоморфизмом $x_2 = x_2(x_1)$ левой полуокрестности точки $x_1 = x_0$ на ее правую полуокрестность, который задается уравнением

$$G(x_1, x_2) = 0. \quad (2.2)$$

Здесь

1) (x_*, y_*) — точка пересечения касательных к кривой $\Gamma = \text{gr } f$ в точках $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$,

2) $G(x_1, x_2) = \rho^2((x_1, f(x_1)), (x_*, y_*)) - \rho^2((x_2, f(x_2)), (x_*, y_*))$ — разность квадратов расстояний между указанными точками графика функции и точкой пересечения касательных, проведенных через эти точки.

С точки зрения геометрии точка (x_*, y_*) — центр окружности, пересекающей график функции в точках $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ под прямыми углами.

О п р е д е л е н и е 4. Ветвью $L(x_0, y_0)$ биссектрисы кривой $\Gamma = \text{gr } f$, где $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ — псевдовершина $\Gamma = \text{gr } f$, будем называть множество точек на плоскости, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} -x + x_1 - f(x_1)(y - f(x_1)) = 0, \\ -x + x_2 - f(x_2)(y - f(x_2)) = 0; \end{cases} \quad (2.3)$$

$x_2 = x_2(x_1)$ — непрерывный слева в точке $x_1 = x_0$ локальный диффеоморфизм левой полукрестности точки $x_1 = x_0$ на ее правую полукрестность, определяемый уравнением (2.2).

Система уравнений (2.3) является сопряженной к системе линейных уравнений (2.1) и определяет точки из $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, которые имеют две ортогональные проекции на кривую Γ , причем проекции отстоят от соответствующей точки проецирования на равном расстоянии.

О п р е д е л е н и е 5. Конечный односторонний предел $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} (x, y)$ решений системы (2.3) будем называть крайней точкой биссектрисы. Если означенный предел равен бесконечности или не существует, то будем говорить, что псевдовершина $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ не порождает крайнюю точку биссектрисы.

В дальнейшем будем рассматривать функции $y = f(x)$, определенные на конечном или бесконечном интервале $X \subseteq \mathbb{R}$, со следующими дифференциальными свойствами. Для любой точки $x_0 \in X$ существует достаточно малая окрестность $O(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, такая, что функция $y = f(x)$, будучи непрерывной в точке x_0 , дважды дифференцируема в выколотой окрестности $O_0(x_0) = O(x_0) \setminus \{x_0\}$.

Свойства таких функций будем изучать локально в окрестности произвольно взятой точки $x_0 \in X$. С каждой точкой $(x, y) = (x_0, y_0)$ плоскости свяжем совокупность $F(x_0, y_0)$ функций $y = f(x)$, $f(x_0) = y_0$, каждая из которых определена в некоторой окрестности точки x_0 , вложенной в X , и удовлетворяет следующим свойствам:

- (1) непрерывна в точке x_0 ,
- (2) дважды непрерывно дифференцируема в выколотой окрестности точки x_0 ,
- (3) если имеет производную первого порядка в точке $x = x_0$, то в сколь угодно малой окрестности точки не является линейной функцией.

В зависимости от дифференциальных свойств функций в точке x_0 выделим во множестве $F(x_0, y_0)$ следующие семейства функций:

$$F^{(2)}(x_0, y_0) = \{f(x) : \exists f'(x_0), \exists f''(x_0)\},$$

$$F^{(1)}(x_0, y_0) = \{f(x) : \exists f'_-(x_0), \exists f''_-(x_0), \exists f'_+(x_0), f''_-(x_0) \neq f''_+(x_0)\},$$

$$F^{(0)}(x_0, y_0) = \{f(x) : \exists f'_-(x_0), \exists f'_+(x_0), f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)\}.$$

Здесь $f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ и $f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ — односторонние производные в точке $x = x_0$ слева и справа соответственно.

Аналогично символами $f''_-(x_0), f''_+(x_0)$ обозначены односторонние производные второго порядка соответственно слева и справа в точке $x = x_0$.

В дальнейшем рассматривается краевая задача Дирихле на плоскости

$$\min_{\nu: \|\nu\| \leq 1} \left(\nu_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \nu_2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 1 = 0, \quad (2.4)$$

$$u|_{\Gamma} = 0. \quad (2.5)$$

Минимаксное решение задачи (2.4), (2.5) является функцией оптимального результата в соответствующей задаче быстрогодействия, где управление $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ стеснено ограничением

$\|\nu\| \leq 1$, целевое множество $M \subset \mathbb{R}^2$. Будем полагать, что граница $\Gamma = \partial M$ этого множества является непрерывной склейкой дважды гладких кривых без точек самопересечения.

Построение решения $u(x, y) = \rho((x, y), M)$ задачи (2.4), (2.5) предполагает конструирование волновых фронтов. В данном случае волновой фронт — линия уровня функции $u(x, y) = \rho((x, y), M)$. Здесь имеет смысл напомнить принцип Гюйгенса (см., например, [9]), в соответствии с которым мгновенный волновой фронт есть огибающая сферических волн, порожденных точечными источниками. Построение волновых фронтов требует отыскания эквидистант [16; 17] кривой, ибо волновой фронт принадлежит соответствующей эквидистанте. Известно [4; 5], что в общем случае достаточно удаленная эквидистанта гладкой кривой теряет дифференциальные свойства, возникают особенности типа “ласточкиного хвоста”, у эквидистанты появляются точки самопересечения. Объединения таких точек эквидистант образуют многообразия, входящие в биссектрису $L(M)$. Нахождение биссектрисы $L(M)$ является необходимым элементом при построении решения задачи (2.4), (2.5).

Структура биссектрисы определяется геометрией границы целевого множества. В плоском случае биссектриса является объединением нуль- и одномерных многообразий, построение которых возможно в ряде простых ситуаций в точной аналитической форме, но в самой общей ситуации требуется разработка численных алгоритмов.

3. Пример биссектрисы плоского множества

Биссектриса $L(M)$ замкнутого плоского множества зависит от геометрии его границы. При этом одномерные многообразия (“ветви биссектрисы”), составляющие $L(M)$, определяются особыми точками границы множества — псевдовершинами. Псевдовершины порождают крайние точки биссектрисы — “начала” ее ветвей.

Корректность приведенных в разд. 2 определений продемонстрируем на примере, когда выше описанные конструкции определяются в явном аналитическом виде. Рассмотрим кривую $\Gamma = \text{gr } f$, где $f(x) = 1/x$, $x > 0$. Таким образом, Γ — правая ветвь гиперболы. Примем $M = \text{hup } f$. Покажем, что у этого множества единственная псевдовершина и соответственно одна ветвь биссектрисы.

Выбрав произвольно различные точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ из Γ , найдем точки (x_*, y_*) пересечения касательных, проходящих через $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$. Не нарушая общности рассуждений, полагаем, что $x_1 < x_2$.

Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1), \\ y = f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2), \end{cases}$$

которая для рассматриваемой функции принимает вид

$$\begin{cases} -\frac{1}{x_1^2}(x - x_1) - \left(y - \frac{1}{x_1}\right) = 0, \\ -\frac{1}{x_2^2}(x - x_2) - \left(y - \frac{1}{x_2}\right) = 0. \end{cases}$$

Решение (x_*, y_*) зависит от параметров x_1 и x_2 :

$$x_*(x_1, x_2) = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}, \quad y_*(x_1, x_2) = \frac{2}{x_1 + x_2}.$$

Пара этих координатных функций описывает ту часть подграфика, что заключена между ветвью гиперболы и положительными полуосями. Затем на множестве решений системы выделим только те точки, которые равно удалены от точек касания. Из равенства длин отрезков касательных от точек касания с графиком до точки пересечения

$$\sqrt{\left(x_1 - \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{x_1} - \frac{2}{x_1 + x_2}\right)^2} = \sqrt{\left(x_2 - \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{x_2} - \frac{2}{x_1 + x_2}\right)^2}$$

получаем зависимость между параметрами

$$x_2(x_1) = \frac{1}{x_1}, \quad 0 < x_1 < 1. \quad (3.1)$$

Тем самым найдено решение уравнения (2.2). Функция (3.1) и есть тот самый диффеоморфизм (см. определение 2) для рассматриваемого примера. Эта функция отображает интервал $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ на интервал $(1, +\infty) \subset \mathbb{R}$. Нетрудно убедиться в том, что этот диффеоморфизм имеет отрицательную производную

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{1}{x_1^2}, \quad x_1 \in (0, 1).$$

Напомним, что решение строится при условии $x_1 < x_2$, т. е. его график находится в “верхней” полуплоскости пространства параметров

$$\Pi_+ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > x_1\}.$$

Границу этой полуплоскости обозначим $I = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: x_2 = x_1\}$. Тогда

$$x_*(x_1) = \frac{2x_1}{1+x_1^2}, \quad y_*(x_1) = \frac{2x_1}{1+x_1^2}, \quad 0 < x_1 < 1.$$

Построено множество

$$T(\Gamma) = \left\{ (x_*(x_1), y_*(x_1)) : x_* = \frac{2x_1}{1+x_1^2}, y_* = \frac{2x_1}{1+x_1^2}, 0 < x_1 < 1 \right\},$$

представляющее собой отрезок (без концов), заключенный между началом отсчета и точкой $(x_0, y_0) = (1, 1)$. При этом точка $(x_0, y_0) = (1, 1)$ является предельной точкой множества $T(\Gamma)$ и принадлежит гиперболе. Другими словами, $(x_0, y_0) = (1, 1)$ — левый односторонний предел

$$(1, 1) = \lim_{x_1 \rightarrow 1-0} (x_*, y_*).$$

Тем самым найдена псевдовершина $(x_0, y_0) = (1, 1)$ правой ветви гиперболы (см. определение 3). Соответствующие построения, включая диаграмму локальных диффеоморфизмов, представлены на рис. 1.

Для отыскания биссектрисы решаем систему уравнений (2.3)

$$\begin{cases} -(x - x_1) + \frac{1}{x_1^2} \left(y - \frac{1}{x_1} \right) = 0, \\ -(x - x_2) + \frac{1}{x_2^2} \left(y - \frac{1}{x_2} \right) = 0. \end{cases}$$

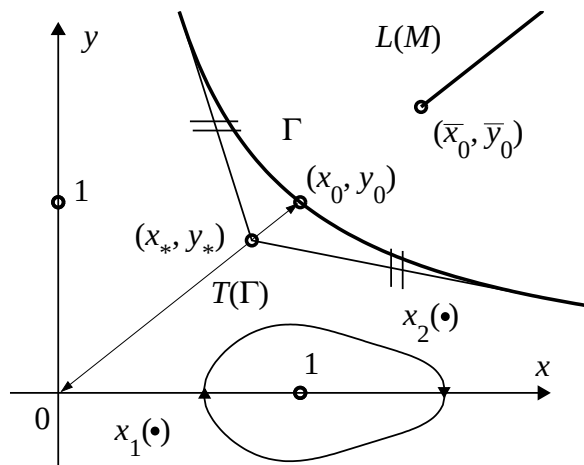


Рис. 1. Биссектриса правой ветви гиперболы. Диаграмма диффеоморфизмов.

Получаем

$$\begin{cases} x = x_1 + \frac{1}{x_1}, \\ y = x_1 + \frac{1}{x_1}, \end{cases} \quad 0 < x < 1.$$

Таким образом, биссектриса $L(M)$ — это открытый луч с “началом” в точке $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = (2, 2)$. Точка $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = (2, 2)$ — крайняя точка биссектрисы $L(M)$ (см. определение 5).

4. Формулы вычисления крайних точек биссектрисы для плоского множества

В этом разделе приведены формулы исчисления крайних точек ветвей биссектрисы замкнутого плоского множества. Рассмотрены основные допустимые по своим дифференциальным свойствам случаи границы множества. Для отыскания крайних точек биссектрисы прежде нужно найти псевдовершины множества — особые точки границы множества, которые и порождают ветви биссектрисы. Пример построения псевдовершины кривой приведен в предыдущем разделе. Некоторые подходы к построению псевдовершин обозначены в работах [15; 19; 21]. Нетрудно установить, следуя определениям разд. 2, что для достаточно гладкой кривой имеет место совпадение крайней точки биссектрисы с центром кривизны (см. [24]) кривой.

Утверждение 1 [18, лемма 1]. Если $A_0 = (x_0, f(x_0))$ — псевдовершина кривой $\Gamma = \text{gr } f$, $f \in F^{(2)}(x_0, f(x_0))$, причем $f''(x_0) \neq 0$, то крайняя точка $\bar{A} = (\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ биссектрисы $L(\Gamma)$ является центром кривизны кривой $\Gamma = \text{gr } f$ в точке $A_0 = (x_0, f(x_0))$:

$$\bar{x}_0 = x_0 - \frac{f'(x_0) (1 + (f'(x_0))^2)}{f''(x_0)}, \quad (4.1)$$

$$\bar{y}_0 = f(x_0) + \frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)}. \quad (4.2)$$

Основной задачей данной работы видится обоснование формулы для крайней точки биссектрисы при ослабленных условиях на гладкость кривой.

Введем ряд вспомогательных конструкций и определений. Пусть $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ — дважды дифференцируемые в окрестности точки $x = x_0$ функции, $x = x_0$ — точка склейки этих функций, т. е. найдется непрерывная функция $f(x)$, для которой $f(x_0) = f_1(x_0) = f_2(x_0)$. Не нарушая общности рассуждений, считаем, что функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ таковы, что

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{если } x \leq x_0, \\ f_2(x), & \text{если } x > x_0. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение так называемые разностные производные. Всюду ниже наряду с точкой $x = x_0$ две точки $x = x_1$ и $x = x_2$ области определения функции $y = f(x)$ выбраны так, что $x_1 < x_0 < x_2$. Примем обозначения:

$$\Delta_1 = x_0 - x_1 > 0,$$

$$\Delta_2 = x_2 - x_0 > 0,$$

$$\frac{\Delta f_1}{\Delta_1} = \frac{f_1(x_0) - f_1(x_1)}{x_0 - x_1}, \quad (4.3)$$

$$\frac{\Delta f_2}{\Delta_2} = \frac{f_2(x_2) - f_2(x_0)}{x_2 - x_0}, \quad (4.4)$$

$$\frac{\Delta f'_1}{\Delta_1} = \frac{f'_1(x_0) - f'_1(x_1)}{x_0 - x_1}, \quad (4.5)$$

$$\frac{\Delta f'_2}{\Delta_2} = \frac{f'_2(x_2) - f'_2(x_0)}{x_2 - x_0}. \quad (4.6)$$

Отметим, что если существуют конечные пределы дифференциальных соотношений (4.3)–(4.6) — разностных производных, то это есть не что иное, как односторонние производные соответствующего порядка функции $y = f(x)$, вычисленные в точке склейки $x = x_0$. Именно,

$$\lim_{\Delta_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta f_1}{\Delta_1} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{f_1(x_0) - f_1(x_1)}{x_0 - x_1} = f'_-(x_0),$$

$$\lim_{\Delta_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta f_2}{\Delta_2} = \lim_{x_2 \rightarrow x_0 + 0} \frac{f_2(x_2) - f_2(x_0)}{x_2 - x_0} = f'_+(x_0),$$

$$\lim_{\Delta_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta f'_1}{\Delta_1} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{f'_1(x_0) - f'_1(x_1)}{x_0 - x_1} = f''_-(x_0),$$

$$\lim_{\Delta_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta f'_2}{\Delta_2} = \lim_{x_2 \rightarrow x_0 + 0} \frac{f'_2(x_2) - f'_2(x_0)}{x_2 - x_0} = f''_+(x_0).$$

В силу введенных обозначений

$$\begin{aligned} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &= \frac{(f(x_2) - f(x_0)) + (f(x_0) - f(x_1))}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta f_2 + \Delta f_1}{\Delta_2 + \Delta_1}, \\ &= \frac{\Delta_1}{\Delta_2 + \Delta_1} \frac{\Delta f_1}{\Delta_1} + \frac{\Delta_2}{\Delta_2 + \Delta_1} \frac{\Delta f_2}{\Delta_2} = \beta_1 \frac{\Delta f_1}{\Delta_1} + \beta_2 \frac{\Delta f_2}{\Delta_2}, \end{aligned}$$

где $\beta_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_2 + \Delta_1}$ и $\beta_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_2 + \Delta_1}$ — коэффициенты выпуклой комбинации, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$, $\beta_1 + \beta_2 = 1$.

Аналогично,

$$\frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta f'_2 + \Delta f'_1}{\Delta_2 + \Delta_1} = \beta_1 \frac{\Delta f'_1}{\Delta_1} + \beta_2 \frac{\Delta f'_2}{\Delta_2},$$

где β_1 и β_2 — коэффициенты той же выпуклой комбинации, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$, $\beta_1 + \beta_2 = 1$.

Отметим, что существование пределов дифференциальных отношений $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ и $\frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1}$ связано не только с проблемой существования односторонних производных $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ и $f''_-(x_0)$, $f''_+(x_0)$ соответственно, но и с проблемой существования пределов коэффициентов β_1 и β_2 выпуклой комбинации.

В последующих рассуждениях мы свяжем точки $x = x_1$ и $x = x_2$ области определения функции $y = f(x)$, которые стеснены неравенством $x_1 < x_0 < x_2$, еще и дифференциальной зависимостью, построив гладкое взаимно-однозначное отображение (точнее, диффеоморфизм [23]) левой полуокрестности точки $x = x_0$ в ее правую полуокрестность в соответствии с определением 2. Будем полагать, что существует локальный диффеоморфизм $x_2 = x_2(x_1)$: $(x_0, x_0 - \delta_1) \rightarrow (x_0, x_0 + \delta_2)$, где $\delta_1 > 0$, $\delta_2(\delta_1) > 0$, такой, что

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} x_2(x_1) = x_0, \quad (4.7)$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{dx_2}{dx_1}(x_1) = \text{const} \leq 0. \quad (4.8)$$

Эти два соотношения выражают то обстоятельство, что точки $x = x_1$ и $x = x_2$, имея общий предел — точку $x = x_0$, между тем “разбегаются” в разные стороны от точки $x = x_0$. Потребуем

также, чтобы выбор этого отображения обеспечивал существование и конечность пределов коэффициентов выпуклой комбинации, т. е. потребуем существования конечных пределов

$$\beta_{10} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} \beta_1, \beta_{20} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} \beta_2. \quad (4.9)$$

Непустоту множества функций с означенными выше свойствами покажем на следующем примере. Выберем произвольно точку $x_0 > 0$ и рассмотрим функцию $x_2(x_1) = \frac{x_0}{x_1} + x_0 - 1$. Она отображает интервал $(0, x_0)$ в интервал $(x_0, +\infty)$, т. е. переводит левую полую окрестность точки $x = x_0$ в ее правую полую окрестность. При этом для любого $x_1 \in (0, x_0)$ точка $x_2 > x_1$, а также

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} x_2(x_1) = x_0, \\ \lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} \frac{dx_2}{dx_1}(x_1) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} \left(-\frac{1}{x_1^2} \right) = -\frac{1}{x_0^2} < 0.$$

Далее, осуществим предельный переход в коэффициентах выпуклой комбинации

$$\beta_{10} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} \beta_1 = \lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} \frac{x_0 - x}{x_0/x_1 + x_0 - x_1 - 1} = \frac{x_0}{1 + x_0}, \\ \beta_{20} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} \beta_2 = \lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} \frac{(x_0/x_1 - 1)x_1}{(x_0 - x_1)(1 + x_1)} = \frac{1}{1 + x_0}.$$

Тем самым показано, что функция $x_2(x_1) = \frac{x_0}{x_1} + x_0 - 1$ удовлетворяет указанным выше соотношениям (4.7)–(4.9) для любой точки $x_0 > 0$.

Обратимся теперь к определениям 3 и 4 – к системе уравнений, определяющей точку пересечения касательных, а также к сопряженной ей системе, задающей точку биссектрисы, и выпишем решения этих систем в терминах разностных производных.

Координаты точки $A_* = (x_*, y_*)$ пересечения касательных к графику Γ , проведенных через точки $A_1 = (x_1, f(x_1))$ и $A_2 = (x_2, f(x_2))$, вычисляются в силу определения 3 по формулам

$$x_* = x_1 + \frac{f(x_1) - f(x_2) + f'(x_2)(x_2 - x_1)}{f'(x_2) - f'(x_1)}, \\ y_* = f(x_1) + \frac{f'(x_1)f'(x_2)(x_2 - x_1) + f'(x_1)(f'(x_2) - f'(x_1))}{f'(x_2) - f'(x_1)}.$$

В формуле мы не рассматриваем случаи, когда $f'(x_2) - f'(x_1)$, то есть при параллельных касательных к Γ в точках A_1 и A_2 . Разделив числитель и знаменатель дробей, стоящих в правых частях равенств, на $x_2 - x_1 = (x_2 - x_0) + (x_0 - x_1) = \Delta_1 + \Delta_2 > 0$, и воспользовавшись формулами (4.3), (4.4) для разностных производных, получим

$$x_* = x_1 + \frac{f'(x_2) - \left(\beta_1 \frac{\Delta f_1}{\Delta_1} + \beta_2 \frac{\Delta f_2}{\Delta_2} \right)}{\beta_1 \frac{\Delta f'_1}{\Delta_1} + \beta_2 \frac{\Delta f'_2}{\Delta_2}}, \quad (4.10)$$

$$y_* = f(x_1) + \frac{f'(x_1)f'(x_2) - f'(x_1) \left(\beta_1 \frac{\Delta f_1}{\Delta_1} + \beta_2 \frac{\Delta f_2}{\Delta_2} \right)}{\beta_1 \frac{\Delta f'_1}{\Delta_1} + \beta_2 \frac{\Delta f'_2}{\Delta_2}}. \quad (4.11)$$

Координаты точки $A = (x, y)$ биссектрисы, т. е. координаты решения сопряженной системы уравнений из определения 4, вычисляются по формулам

$$x = x_1 + \frac{f'(x_1)f'(x_2)(f(x_1) - f(x_2)) + f'(x_1)(x_2 - x_1)}{f'(x_2) - f'(x_1)}, \quad (4.12)$$

$$y = f(x_1) + \frac{x_2 - x_1 + f'(x_2)(f(x_1) - f(x_2))}{f'(x_2) - f'(x_1)}. \quad (4.13)$$

Разделив числитель и знаменатель дробей, стоящих в правых частях равенств (4.12), (4.13), на $x_2 - x_1 = (x_2 - x_0) + (x_0 - x_1) = \Delta_1 + \Delta_2 > 0$ и воспользовавшись соотношениями (4.3), (4.4) для разностных производных, получим представления

$$x = x_1 - \frac{f'(x_1)f'(x_2)\left(\beta_1 \frac{\Delta f_1}{\Delta_1} + \beta_2 \frac{\Delta f_2}{\Delta_2}\right) + f'(x_1)}{\beta_1 \frac{\Delta f'_1}{\Delta_1} + \beta_2 \frac{\Delta f'_2}{\Delta_2}}, \quad (4.14)$$

$$y = f(x_1) + \frac{1 + f'(x_2)\left(\beta_1 \frac{\Delta f_1}{\Delta_1} + \beta_2 \frac{\Delta f_2}{\Delta_2}\right)}{\beta_1 \frac{\Delta f'_1}{\Delta_1} + \beta_2 \frac{\Delta f'_2}{\Delta_2}}. \quad (4.15)$$

Сформулируем и докажем основной результат работы.

Теорема. Если $A_0 = (x_0, f(x_0))$ — псевдовершина кривой $\Gamma = \text{gr } f$, $f \in F^{(1)}(x_0, f(x_0))$, существует конечный или бесконечный $\lim_{x \rightarrow x_0-0} \frac{dx_2}{dx_1} = c \leq 0$, то крайняя точка $\bar{A} = (\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ биссектрисы $L(\Gamma)$ вычисляется по формулам

$$\bar{x}_0 = x_0 - \frac{f'(x_0)(1 + (f'(x_0))^2)}{\beta_{10}f''_-(x_0) + \beta_{20}f''_+(x_0)}, \quad (4.16)$$

$$\bar{y}_0 = f(x_0) + \frac{1 + (f'(x_0))^2}{\beta_{10}f''_-(x_0) + \beta_{20}f''_+(x_0)}. \quad (4.17)$$

Здесь $\beta_{10} = \frac{1}{1-c}$, $\beta_{20} = -\frac{c}{1-c}$, $\beta_{10} + \beta_{20} = 1$, и предполагается, что $\beta_{10}f''_-(x_0) + \beta_{20}f''_+(x_0) \neq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся определением псевдовершины. Наличие псевдовершины кривой $\Gamma = \text{gr } f$ означает существование предела

$$(x_0, f(x_0)) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} (x_*, y_*),$$

где

$$x_* = x_1 + \frac{f(x_1) - f(x_2) + f'(x_2)(x_2 - x_1)}{f'(x_2) - f'(x_1)},$$

$$y_* = f(x_1) + \frac{f'(x_1)f'(x_2)(x_2 - x_1) + f'(x_1)(f'(x_2) - f'(x_1))}{f'(x_2) - f'(x_1)},$$

а $x_2 = x_2(x_1)$ — непрерывный слева в точке $x_1 = x_0$ локальный диффеоморфизм левой полуокрестности точки $x_1 = x_0$ в ее правую полуокрестность, определяемый уравнением

$$G(x_1, x_2) = 0.$$

Воспользуемся полученным выше представлением (4.10), (4.11) для точки $A_* = (x_*, y_*)$ — пересечения касательных:

$$x_* = x_1 + \frac{f'(x_2) - \left(\beta_1 \frac{\Delta f_1}{\Delta_1} + \beta_2 \frac{\Delta f_2}{\Delta_2}\right)}{\beta_1 \frac{\Delta f'_1}{\Delta_1} + \beta_2 \frac{\Delta f'_2}{\Delta_2}},$$

$$y_* = f(x_1) + \frac{f'(x_1)f'(x_2) - f'(x_1)\left(\beta_1 \frac{\Delta f_1}{\Delta_1} + \beta_2 \frac{\Delta f_2}{\Delta_2}\right)}{\beta_1 \frac{\Delta f'_1}{\Delta_1} + \beta_2 \frac{\Delta f'_2}{\Delta_2}},$$

где коэффициенты $\beta_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} > 0$, $\beta_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2} > 0$, $\beta_1 + \beta_2 = 1$, $\Delta_1 = x_0 - x_1 > 0$, $\Delta_2 = x_2 - x_0 > 0$.

Перейдем к пределу при $x_1 \rightarrow x_0 - 0$. По определению $(x_0, f(x_0)) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} (x_*, y_*)$. Кроме того, в силу непрерывности функции $\lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} (x_1, y_1) = (x_0, f(x_0))$. Стало быть, дробные слагаемые, стоящие в правых частях, являются бесконечно малыми

$$\begin{aligned} \frac{f'(x_2) - \left(\beta_1 \frac{\Delta f_1}{\Delta_1} + \beta_2 \frac{\Delta f_2}{\Delta_2}\right)}{\beta_1 \frac{\Delta f'_1}{\Delta_1} + \beta_2 \frac{\Delta f'_2}{\Delta_2}} &\rightarrow 0, \\ \frac{f'(x_1)f'(x_2) - f'(x_1)\left(\beta_1 \frac{\Delta f_1}{\Delta_1} + \beta_2 \frac{\Delta f_2}{\Delta_2}\right)}{\beta_1 \frac{\Delta f'_1}{\Delta_1} + \beta_2 \frac{\Delta f'_2}{\Delta_2}} &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $x_1 \rightarrow x_0 - 0$. При этом числители дробей

$$\begin{aligned} f'(x_2) - \left(\beta_1 \frac{\Delta f_1}{\Delta_1} + \beta_2 \frac{\Delta f_2}{\Delta_2}\right) &\rightarrow f'(x_0) - f'(x_0) = 0, \\ f'(x_1)f'(x_2) - f'(x_1)\left(\beta_1 \frac{\Delta f_1}{\Delta_1} + \beta_2 \frac{\Delta f_2}{\Delta_2}\right) &\rightarrow (f'(x_0))^2 - (f'(x_0))^2 = 0. \end{aligned}$$

Тогда предел общего для этих дробей знаменателя отличен от нуля

$$\begin{aligned} \lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \left(\beta_1 \frac{\Delta f'_1}{\Delta_1} + \beta_2 \frac{\Delta f'_2}{\Delta_2}\right) &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \left(\frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} \frac{\Delta f'_1}{\Delta_1} + \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} \frac{\Delta f'_2}{\Delta_2}\right) \\ &= \beta_{10} f''_-(x_0) + \beta_{20} f''_+(x_0) \neq 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \beta_{10} &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{x_0 - x_1}{c(x_1 - x_0) + x_0 - x_1 + o(x_0 - x_1)} = \frac{1}{1 - c} \geq 0, \\ \beta_{20} &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{c(x_1 - x_0) + o(x_1 - x_0)}{c(x_1 - x_0) + x_0 - x_1 + o(x_0 - x_1)} = -\frac{c}{1 - c} \geq 0. \end{aligned}$$

Обратимся теперь к формулам (4.14), (4.15) для координат точек биссектрисы, вписанных через разностные производные

$$\begin{aligned} x &= x_1 - \frac{f'(x_1)f'(x_2)\left(\beta_1 \frac{\Delta f_1}{\Delta_1} + \beta_2 \frac{\Delta f_2}{\Delta_2}\right) + f'(x_1)}{\beta_1 \frac{\Delta f'_1}{\Delta_1} + \beta_2 \frac{\Delta f'_2}{\Delta_2}}, \\ y &= f(x_1) + \frac{1 + f'(x_2)\left(\beta_1 \frac{\Delta f_1}{\Delta_1} + \beta_2 \frac{\Delta f_2}{\Delta_2}\right)}{\beta_1 \frac{\Delta f'_1}{\Delta_1} + \beta_2 \frac{\Delta f'_2}{\Delta_2}}. \end{aligned}$$

Дроби, стоящие в правых частях равенств, имеют общий знаменатель, предел которого был только что вычислен. Устремив $x \rightarrow x_0 - 0$ и учитывая, что при этом в силу непрерывности функции и ее производной

$$f(x_1) \rightarrow f(x_0), \quad f'(x_1) \rightarrow f'(x_0), \quad f'(x_2) \rightarrow f'(x_0),$$

получим, что выпуклая комбинация $\beta_1 \frac{\Delta f_1}{\Delta_1} + \beta_2 \frac{\Delta f_2}{\Delta_2} \rightarrow f'(x_0)$. В итоге находим формулы для координат крайней точки $\bar{A} = (\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ биссектрисы

$$\bar{x}_0 = x_0 - \frac{f'(x_0) (1 + (f'(x_0))^2)}{\beta_{10} f''_-(x_0) + \beta_{20} f''_+(x_0)},$$

$$\bar{y}_0 = f(x_0) + \frac{1 + (f'(x_0))^2}{\beta_{10} f''_-(x_0) + \beta_{20} f''_+(x_0)},$$

в которых предельные коэффициенты выпуклой комбинации односторонних производных второго порядка $\frac{1}{1-c} \geq 0, -\frac{c}{1-c} \geq 0$. $\square$

Полученные соотношения (4.16), (4.17) обобщают формулы (4.1), (4.2) для центра кривизны на случай, когда у функции “рвется” производная второго порядка.

Доказанное утверждение проиллюстрируем следующим примером. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

Она принадлежит семейству $f \in F^{(1)}(x_0, y_0)$, ибо в точке $(x_0, f(x_0)) = (0, 0)$ график $\Gamma = \text{gr } f$ является гладким, $f'(0) = 0$, при этом односторонние производные второго порядка $f''_-(0) = 0, f''_+(0) = 2, f''_-(0) \neq f''_+(0)$.

Точка $(x_0, y_0) = (0, 0)$ — псевдовершина графика $\Gamma = \text{gr } f$. Локальный диффеоморфизм, отображающий левую полуокрестность точки $x_0 = 0$ в ее правую полуокрестность, определяемый уравнением (2.2), здесь имеет вид

$$x_2 = \frac{x_1}{2} (1 - \sqrt{1 + 4x_1^2}),$$

причем

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\sqrt{1 + 4x_1^2} - 1 - 8x_1^2}{2\sqrt{1 + 4x_1^2}} < 0.$$

Поэтому $c = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{dx_2}{dx_1} = 0$ и коэффициенты выпуклой комбинации $\beta_{10} = \frac{1}{1-c} = 1, \beta_{20} = -\frac{c}{1-c} = 0$. Тогда крайняя точка биссектрисы имеет координаты

$$\bar{x}_0 = x_0 - \frac{f'(x_0) (1 + (f'(x_0))^2)}{\beta_{10} f''_-(x_0) + \beta_{20} f''_+(x_0)} = \frac{1}{2},$$

$$\bar{y}_0 = f(x_0) + \frac{1 + (f'(x_0))^2}{\beta_{10} f''_-(x_0) + \beta_{20} f''_+(x_0)} = 0.$$

Биссектриса $L(M)$ имеет единственную ветвь и допускает явное представление

$$L(\text{epi } f) = \left\{ (x, y) : x = x_1 \frac{1 - \sqrt{1 + 4x_1^2}}{2}, y = \frac{1}{4} + x_1^2 + \frac{\sqrt{1 + 4x_1^2}}{4}, x_1 > 0 \right\}.$$

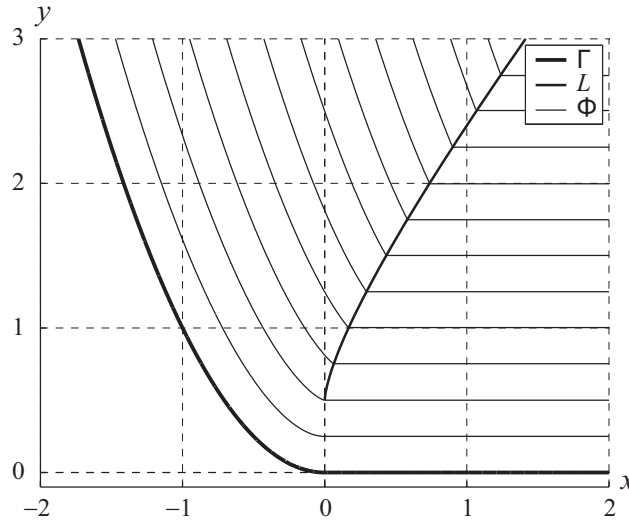


Рис. 2. Гладкая склейка параболы и прямой, ее биссектриса и карта линий уровня функции оптимального результата.

Иллюстрация описанной ситуации приведена на рис. 2. Здесь изображена граница целевого множества, его биссектриса с началом в найденной аналитическим способом крайней точке, а также совокупность линий уровня (на рисунке обозначены символом Φ) функции оптимального результата для задачи быстрогодействия.

Далее, еще более ослабим требования к гладкости границы множества, допуская, что граница может иметь точки излома. Нетрудно показать, что имеет место следующее утверждение.

Утверждение 2 [18, лемма 3]. Если $A_0 = (x_0, f(x_0))$ — псевдовершина кривой $\Gamma = \text{gr } f$, $f \in F^{(0)}(x_0, f(x_0))$, причем $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, то крайняя точка $\bar{A} = (\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ биссектрисы $L(\Gamma)$ совпадает с псевдовершиной графика $\Gamma = \text{gr } f$:

$$(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = (x_0, f(x_0)). \quad (4.18)$$

В качестве иллюстрирующего примера рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $x_0 = 0$, $O(0) = (-\delta, \delta)$, $\delta > 0$. Она принадлежит семейству функций $F^{(0)}(0, 0)$, ибо не имеет производной первого порядка. Более того, будучи непрерывной в точке $x_0 = 0$, она не удовлетворяет в окрестности этой точки условию Липшица. Начало координат является псевдовершиной графика. Эта же точка является крайней точкой биссектрисы. Здесь локальный диффеоморфизм, отображающий левую полуокрестность точки $x_0 = 0$ в ее правую полуокрестность, имеет вид

$$x_2(x_1) = -x_1, \quad \frac{dx_2}{dx_1}(x_1) = -1.$$

Биссектриса $L(\text{gr } f) = \{(x, y): x = 0, y > 0\}$.

В достаточно общей ситуации псевдовершина кривой порождает ветвь биссектрисы. К ситуациям, когда это не так, относится случай гладкой кривой, кривизна которой обращается в нуль.

Утверждение 3. Если $A_0 = (x_0, f(x_0))$ — псевдовершина кривой $\Gamma = \text{gr } f$, функция $y = f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в точке $x_0 = 0$, причем $f''(x_0) = 0$, то псевдовершина $A_0 = (x_0, f(x_0))$ не порождает крайнюю точку $\bar{A} = (\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ биссектрисы $L(\Gamma)$.

Доказательство. Рассмотрим ординаты точек биссектрисы $A = (x, y)$, которые вычисляются по формуле

$$y = y_* + \frac{(x_2 - x_1)(1 - f'(x_1)f'(x_2)) + (f(x_2) - f(x_1))(f'(x_2) + f'(x_1))}{f'(x_2) - f'(x_1)}.$$

Здесь, как и прежде, $A_* = (x_*, y_*)$ — точка пересечения касательных к графику Γ , проведенных через точки $A_1 = (x_1, f(x_1))$ и $A_2 = (x_2, f(x_2))$ (при этом считаем, что $f'(x_2) \neq f'(x_1)$, а значит, такая точка существует и единственна). Параметры x_1 и x_2 суть абсциссы точек $A_1 = (x_1, f(x_1))$ и $A_2 = (x_2, f(x_2))$, стеснены неравенством $x_1 < x_2$ и таковы, что $x_2 = x_2(x_1) \rightarrow x_1$ при $x_1 \rightarrow x_0$.

Осуществим предельный переход в правой части равенства. Поскольку последовательность точек $A_* = (x_*, y_*)$ сходится к псевдовершине $A_0 = (x_0, f(x_0))$, то

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0} y_* = f(x_0).$$

Применим формулу конечных приращений для приращения функции и ее производной:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(z)(x_2 - x_1), \text{ где } x_1 < z < x_2,$$

$$f'(x_2) - f'(x_1) = f''(w)(x_2 - x_1), \text{ где } x_1 < w < x_2.$$

Получим

$$\begin{aligned} & \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{(x_2 - x_1)(1 - f'(x_1)f'(x_2)) + (f(x_2) - f(x_1))(f'(x_2) + f'(x_1))}{f'(x_2) - f'(x_1)} \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{(x_2 - x_1)(1 - f'(x_1)f'(x_2)) + f'(z)(x_2 - x_1)(f'(x_2) + f'(x_1))}{f''(w)(x_2 - x_1)} \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{(1 - f'(x_1)f'(x_2)) + f'(z)(f'(x_2) + f'(x_1))}{f''(w)} = \infty. \end{aligned}$$

Здесь предел частного является бесконечно большим как предел отношения ограниченной величины к бесконечно малой. Действительно,

- 1) $\lim_{x_1 \rightarrow x_0} \left((1 - f'(x_1)f'(x_2)) + f'(z)(f'(x_2) + f'(x_1)) \right) = 1 + (f'(x_0))^2 \neq 0,$
- 2) $\lim_{x_1 \rightarrow x_0} f''(w) = 0.$

□

В качестве иллюстрирующего этот случай примера рассмотрим подграфик функции $f(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$. Следуя определениям, нетрудно показать, что среди псевдовершин подграфика содержится точка $(x_0, f(x_0)) = (0, 0)$. Локальный диффеоморфизм, отображающий левую полукрестность точки $x_0 = 0$ в ее правую полукрестность, имеет достаточно простой вид

$$x_2(x_1) = -x_1, \quad \frac{dx_2}{dx_1}(x_1) = -1.$$

Здесь $f''(x_0) = 0$, кривизна графика в точке $(x_0, f(x_0)) = (0, 0)$ равна нулю. Поскольку

$$\bar{y}_0 = \lim_{x_1 \rightarrow -0} \left(y_* + \frac{(x_2 - x_1)(1 - f'(x_1)f'(x_2))}{f'(x_2) - f'(x_1)} + \frac{(f(x_2) - f(x_1))(f'(x_2) + f'(x_1))}{f'(x_2) - f'(x_1)} \right) = \infty,$$

то в силу определения 5 псевдовершина $(x_0, f(x_0)) = (0, 0)$ не порождает крайнюю точку биссектрисы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
3. Субботин А.И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2003. 336 с.
4. Арнольд В.И. Особенности каустик и волновых фронтов. М.: "Фазис", 1996. 334 с.

5. Брус Дж., Джиблин П. Кривые и особенности. М.: Мир, 1988. 262 с.
6. Sedykh V.D. On the topology of symmetry sets of smooth submanifolds in $\mathbb{R}^n$ // Singularity Theory and Its Applications / eds. S. Izumiya, G. Ishikawa, H. Tokunaga, I. Shimada, T. Sano. Tokyo, 2006. P. 401–419. (Adv. Stud. Pure Math.; vol. 43.)
7. Кружков С.Н. Обобщенные решения уравнений Гамильтона — Якоби типа эйконала. I // Мат. сб. 1974. Т. 98, вып. 3. С. 450–493.
8. Колокольцов В.Н., Маслов В.П. Задача Коши для однородного уравнения Беллмана // Докл. АН СССР. 1987. №296 (4). С. 796–800.
9. Слюсарев Г.Г. Геометрическая оптика. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1946. 332 с.
10. Солимено О., Крозиньяни Б., Ди Порто П. Дифракция и волноводное распространение оптического излучения. М.: Мир, 1989. 662 с.
11. Тарасьев А.М., Успенский А.А., Ушаков В.Н. Аппроксимационные операторы и конечно-разностные схемы для построения обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 173–185.
12. Папаков Г.В., Тарасьев А.М., Успенский А.А. Численные аппроксимации обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 4. С. 570–581.
13. Пахотинских В.Ю., Успенский А.А., Ушаков В.Н. Конструирование стабильных мостов в дифференциальных играх с фазовыми ограничениями // Прикл. математика и механика. 2003. Т. 67, вып. 5. С. 771–783.
14. Успенский А.А., Ушаков В.Н., Фомин А.Н. α -множества и их свойства / Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2004. 62 с.
15. Успенский А.А. Аналитические методы вычисления меры невыпуклости плоских множеств / Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2007. 21 с.
16. Успенский А.А., Лебедев П.Д. Исследование геометрии и асимптотики волновых фронтов в некоторых задачах управления // Тр. 9-й междунар. Четаевской конференции. 2007. Т. 5. С. 224–236.
17. Успенский А.А., Лебедев П.Д. Геометрия и асимптотика волновых фронтов // Изв. вузов. 2008. № 3. С. 27–37.
18. Ушаков В.Н., Успенский А.А., Лебедев П.Д. Построение минимаксного решения уравнения типа эйконала // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 182–191.
19. Успенский А.А., Лебедев П.Д. Условия трансверсальности ветвей решения нелинейного уравнения в задаче быстрогодействия с круговой индикатрисой // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 82–100.
20. Успенский А.А., Лебедев П.Д. Построение функции оптимального результата в задаче быстрогодействия на основе множества симметрии // Автоматика и телемеханика. 2009. № 7. С. 50–57.
21. Успенский А.А., Лебедев П.Д. О множестве предельных значений локальных диффеоморфизмов при эволюции волновых фронтов // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 171–186.
22. Ушаков В.Н., Успенский А.А., Лебедев П.Д. Геометрия сингулярных кривых для одного класса задач быстрогодействия // Вестн. Санкт-Петербургского ун-та. Сер. 10. 2013. Вып. 3. С. 157–167.
23. Спивак М. Математический анализ на многообразиях. М.: Мир, 1968. 164 с.
24. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. М.: “Едиториал УРСС”, 2003. 432 с.

Успенский Александр Александрович

Поступила 22.05.2014

старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

e-mail: uspen@imm.uran.ru

УДК 517.977

ОПТИМИЗАЦИЯ ХАУСДОРФОВА РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ МНОЖЕСТВАМИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ¹

В. Н. Ушаков, А. С. Лахтин, П. Д. Лебедев

Задачи аппроксимации множеств играют важную роль во многих областях математики и механики. Например, в теории дифференциальных игр и теории оптимального управления активно изучаются задачи аппроксимации множеств разрешимости и множеств достижимости управляемых систем. Так, в исследованиях Н. Н. Красовского и А. И. Субботина, посвященных позиционным дифференциальным играм, одной из центральных является задача выделения множеств разрешимости — максимальных стабильных мостов. Эта задача может быть решена точно лишь в относительно редких случаях. Возникает вопрос о приближенном построении этих множеств. В работах А. Б. Куржанского, Ф. Л. Черноусько и их сотрудников множества достижимости аппроксимируются эллипсоидами и параллелепипедами.

В данной статье рассматривается вариант постановки задачи, когда заданное множество требуется аппроксимировать произвольными многогранниками. В евклидовом пространстве заданы два множества — многогранники A и B . Требуется найти такое положение многогранников, при котором хаусдорфово расстояние между ними было бы минимальным. Несмотря на геометрический характер постановки задачи, для ее исследования используется аппарат выпуклого и негладкого анализа.

В теории управления одним из вариантов работы со множествами со сложной геометрией является аппроксимация их на плоскости наборами кругов равного радиуса. Основным компонентом их построения являются наилучшие n -сети и их обобщения, описанные в частности А. Л. Гаркави. Авторами разработан алгоритм построения наилучших сетей на основе разбиения заданного множества на подмножества и отыскания их чебышевского центра. В общем случае качественные оценки отклонения множеств от их наилучших n -сетей при росте n даны А. Н. Колмогоровым. В статье выведена количественная оценка хаусдорфова отклонения одного класса. Приведены примеры построения наилучших n -сетей.

Ключевые слова: хаусдорфово расстояние, многоугольник, наилучшая n -сеть, покрытие кругами.

V. N. Ushakov, A. S. Lakhtin, P. D. Lebedev. Optimization of the Hausdorff distance between sets in Euclidean space.

Set approximation problems play an important role in many areas of mathematics and mechanics. For example, approximation problems for solvability sets and reachable sets of control systems are intensively studied in differential game theory and optimal control theory. In N.N. Krasovskii and A.I. Subbotin's investigations devoted to positional differential games, one of the key problems was the problem of identification of solvability sets, which are maximal stable bridges. Since this problem can be solved exactly in rare cases only, the question of the approximate calculation of solvability sets arises. In papers by A.B. Kurzhanskii and F.L. Chernous'ko and their colleagues, reachable sets were approximated by ellipsoids and parallelepipeds.

In the present paper, we consider problems in which it is required to approximate a given set by arbitrary polytopes. Two sets, polytopes A and B , are given in Euclidean space. It is required to find a position of the polytopes that provides a minimum Hausdorff distance between them. Though the statement of the problem is geometric, methods of convex and nonsmooth analysis are used for its investigation.

One of the approaches to dealing with planar sets in control theory is their approximation by families of disks of equal radii. A basic component of constructing such families is best n -nets and their generalizations, which were described, in particular, by A.L. Garkavi. The authors designed an algorithm for constructing best nets based on decomposing a given set into subsets and calculating their Chebyshev centers. Qualitative estimates for the deviation of sets from their best n -nets as n grows to infinity were given in the general case by A.N. Kolmogorov. We derive a numerical estimate for the Hausdorff deviation of one class of sets. Examples of constructing best n -nets are given.

Keywords: Hausdorff distance, polygon, best n -net, disk cover.

¹Работа выполнена при поддержке программ президиума РАН “Математические модели и алгоритмы в управляемых системах с нелинейной динамикой” при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1012) и “Динамические системы и теория управления” при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1002), грантов РФФИ (проекты 14-01-00486_а и 14-01-31319-мол_а) и Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

1. Постановка задачи о расположении многоугольников

При работе с различными множествами, возникающими при решении задач управления и дифференциальных игр [1], часто требуется сравнивать степень их близости между собой и строить их аппроксимации более простыми фигурами. Так, в [2–7] осуществляется подмена множеств достижимости динамических систем эллипсами на плоскости и эллипсоидами в трехмерном пространстве. При решении дифференциальных игр авторами в работах [8; 9] осуществлялась подмена плоских сечений стабильных мостов эллипсами с последующим прицеливанием на них при конструировании разрешающего управления.

Основным критерием при подборе множеств, подменяющих исходное, является их близость в смысле метрики Хаусдорфа [10]. Рассмотрим несколько задач, связанных с построением аппроксимаций множеств заданными геометрическими объектами, у которых варьируются координаты в евклидовом пространстве.

Пусть заданы два произвольных многогранника $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Требуется найти их взаимное расположение, обеспечивающее минимальность хаусдорфова расстояния между ними. Данная постановка задачи является продолжением и развитием исследований в работах [11; 12], где рассматривалась аналогичная по постановке задача, но только для выпуклых многогранников.

Напомним, что хаусдорфово расстояние между непустыми ограниченными замкнутыми множествами A и B может вычисляться по формуле

$$d(A, B) = \max \left\{ \max_{a \in A} \min_{b \in B} \|a - b\|, \max_{b \in B} \min_{a \in A} \|a - b\| \right\}. \quad (1.1)$$

Если же A и B еще и выпуклые, то

$$d(A, B) = \max \left\{ \max_{a \in A} \max_{\|l\|=1} (\langle l, a \rangle - S_B(l)), \max_{b \in B} \max_{\|l\|=1} (\langle l, b \rangle - S_A(l)) \right\}, \quad (1.2)$$

где $S_X(l)$ — опорная функция для компактного множества $X \in \mathbb{R}^n$, которая определяется равенством $S_X(l) = \max\{\langle x, l \rangle : x \in X\}$.

Считаем, что многогранник A неподвижен, а многогранник B будем перемещать с помощью параллельного переноса на вектор $x \in \mathbb{R}^n$, т. е. рассматривается множество $B + \{x\}$. Каждый вектор $x \in \mathbb{R}^n$ задает положение многогранника $B + \{x\}$, однозначно определяя расстояние между A и $B + \{x\}$, задавая функцию $F(x) = d(A, B + \{x\})$ с использованием любой из формул (1.1), (1.2). Таким образом, рассматриваемая задача сводится к поиску точки минимума этой функции.

Рассмотрим свойства функции $F(x) = d(A, B + \{x\})$.

2. Случай выпуклых многогранников

Рассмотрим случай, когда многогранники A и B являются выпуклыми. Для любого выпуклого множества $Y \subset \mathbb{R}^n$ функция расстояния до него от точки $x \in \mathbb{R}^n$ $\rho(x, Y) = \min_{y \in Y} \|x - y\|$ является выпуклой. Из выпуклого анализа известно (см., например, [13]), что максимальное значение выпуклой функции на выпуклом многограннике достигается в вершинах этого многогранника. Таким образом, в формуле (1.1) максимумы $\max_{a \in A}$ и $\max_{b \in B}$ можно брать не по всем точкам многогранников, а только по их вершинам a_i и b_j , т. е.

$$a_i \in A, \quad i = 1, \dots, V_a; \quad b_j \in B, \quad j = 1, \dots, V_b;$$

$$d(A, B) = \max \left\{ \max_{i=1, \dots, V_a} \rho(a_i, B), \max_{j=1, \dots, V_b} \rho(b_j, A) \right\}. \quad (2.1)$$

Здесь V_a и V_b — количество вершин многогранников A и B соответственно. Везде в дальнейшем обозначения a_i и b_j будут использоваться для вершин многогранников A и B .

Воспользовавшись известным (см., например, [13]) свойством опорных функций

$$S_{(B+\{x\})}(l) = S_B(l) + \langle x, l \rangle,$$

из формул (1.2) и (2.1) получаем выражение для минимизируемой функции $F(x)$ в случае выпуклых множеств

$$F(x) = \max \left\{ \max_{i=1, \dots, V_a} \max_{\|l\|=1} (\langle l, a_i - x \rangle - S_B(l)), \max_{j=1, \dots, V_b} \max_{\|l\|=1} (\langle l, b_j + x \rangle - S_A(l)) \right\}. \quad (2.2)$$

Очевидно, что эта функция в случае выпуклых многогранников A и B является непрерывной и выпуклой как максимум линейных по x функций.

Поскольку функция $F(x)$ не является гладкой, то для ее исследования вместо градиента функции следует рассматривать ее субградиенты.

Напомним известное утверждение (см., например, [14, с. 108–109]), которое позволяет производить вычисления субдифференциалов в нашей задаче.

У т в е р ж д е н и е. Пусть $f_1, \dots, f_m$ — выпуклые функции на открытом выпуклом множестве X . Тогда субдифференциал функции $f(x) = \max_{i=1, \dots, m} f_i(x)$ имеет вид

$$\partial f(x) = \text{co} \left(\bigcup_{i \in I(x)} \partial f_i(x) \right), \quad x \in X,$$

где $I(x) = \{i: f_i(x) = f(x)\}$.

В нашем случае формулу (2.2), определяющую функцию $F(x)$ в случае выпуклых множеств A и B , можно записать в виде

$$F(x) = \max_{i=1, \dots, V_a, j=1, \dots, V_b} \{f_i(x), f_j(x)\}, \quad \text{где}$$

$$\text{при } i = 1, \dots, V_a \quad f_i(x) = \max_{\|l\|=1} \{\langle l, a_i - x \rangle - S_B(l)\},$$

$$\text{при } j = 1, \dots, V_b \quad f_j(x) = \max_{\|l\|=1} \{\langle l, b_j + x \rangle - S_A(l)\}.$$

Применяя утверждение и вводя дополнительные обозначения, получим формулу для субдифференциала функции $F(x)$. В качестве множества X берется все пространство $\mathbb{R}^n$, а множество $I(x)$ имеет вид

$$I(x) = I_A(x) \cup J_B(x),$$

$$I_A(x) = \{i: \rho(a_i, B + \{x\}) = F(x)\}, \quad J_B(x) = \{j: \rho(b_j + x, A) = F(x)\}.$$

Множество $I_A(x)$ — это множество номеров тех вершин многогранника A , расстояние от которых до многогранника $B + \{x\}$ равно хаусдорфову расстоянию между A и $B + \{x\}$. Аналогично определено $J_B(x)$ — множество номеров вершин многогранника $B + \{x\}$. Таким образом, субдифференциал функции $F(x)$ имеет вид $\partial F(x) = \text{co} \{L_A(x) \cup L_B(x)\}$,

$$L_A(x) = \left\{ -l: \exists i \in I_A(x): \langle l, a_i - x \rangle - S_B(l) = F(x), \|l\| = 1 \right\},$$

$$L_B(x) = \left\{ l: \exists j \in J_B(x): \langle l, b_j + x \rangle - S_A(l) = F(x), \|l\| = 1 \right\}.$$

Множество $L_A(x)$ в случае его непустоты представляет собой набор векторов единичной длины, направленных от вершин многогранника A , имеющих номера из $I_A(x)$, к многограннику $B + \{x\}$. Аналогично множество $L_B(x)$ в случае его непустоты представляет собой набор векторов единичной длины, направленных от многогранника A к вершинам многогранника $B + \{x\}$ с номерами $J_B(x)$.

Заметим, что субдифференциал $\partial F(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$ — это непустое множество, которое может определяться не более чем $V_a + V_b$ векторами. Геометрически субдифференциал $\partial F(x)$ представляет собой выпуклую оболочку тех единичных векторов, в направлении которых достигается хаусдорфово расстояние между A и $B + \{x\}$ и которые направлены от многогранника A к многограннику $B + \{x\}$. Субдифференциал является выпуклым многогранником в $\mathbb{R}^n$, вписанным в единичный шар с центром в начале координат.

Поскольку $F(x)$ является непрерывной выпуклой функцией, множества Лебега которой ограничены, значит, она имеет точку минимума x^* . Необходимые и достаточные условия минимума функции $F(x)$ формулируются в терминах субдифференциала этой функции следующим образом (см., например, [13; 14]): точка x^* является точкой минимума непрерывной выпуклой функции $F(x)$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{0} \in \partial F(x^*)$, $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. При достижении этого условия в случае выпуклой функции найденная точка является точкой глобального минимума.

3. Субградиентные методы

Для поиска точки минимума рассматриваемой выпуклой функции $F(x)$, которая получается в случае выпуклых многогранников A и B , применялись различные подходы к реализации численных субградиентных методов. При этом для программной реализации был выбран случай двумерного пространства $x \in \mathbb{R}^2$, т. е. рассматривались многоугольники на плоскости.

3.1. Субградиентный метод Шора

Одна из идей, с помощью которых можно численно решать задачу поиска минимума непрерывной выпуклой негладкой функции, принадлежит Н.З. Шору [15] и выражается следующей формулой:

$$x^{k+1} = x^k - \gamma_k \frac{h_k}{\|h_k\|}, \quad h_k \in \partial F(x^k). \quad (3.1)$$

Согласно этой формуле каждый раз происходит сдвиг на величину $\gamma_k h_k$ в направлении, противоположном субградиенту. Несовершенство этого метода заключается в невозможности определения длины необходимого шага γ_k без дополнительной информации, а также в том, что берется некий произвольный субградиент из имеющихся. Вопрос выбора длины шага при использовании различных субградиентных методов решается по разному.

В этом методе последовательность длин шагов γ_k , на которые производится сдвиг, должна удовлетворять двум условиям. С одной стороны, это должна быть сходящаяся к нулю последовательность, но при этом соответствующий ряд должен быть расходящимся. При реализации численного алгоритма использовалась последовательность $\gamma_k = \gamma_0/k$.

Следует отметить, что метод (3.1) не относится, вообще говоря, к числу методов спуска, в которых последовательность $F(x^k)$ является убывающей. Тем не менее доказано [15; 16], что можно говорить о сходимости с точки зрения наилучшего значения функции, достигнутого на данный момент.

Поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k$ является расходящимся, очевидно, что метод (3.1) не может сходиться быстро. Кроме того, возникает трудность с оценкой достигнутой точности.

Были написаны программы, реализующие поиск точки минимума функции $F(x)$ по формулам (3.1). В процессе сравнения результатов работы программы на различных начальных данных и при разных значениях параметра γ_0 удалось выяснить, что целесообразно брать $\gamma_0 = F(x^0)$, т. е. равное хаусдорфовому расстоянию между многогранниками в начальный момент. Применялись разные способы выбора субградиента, например, брали среднее арифметическое вершин многогранника, являющегося субдифференциалом, а также субградиент минимальной или максимальной нормы. При этом обнаружилось, что способ выбора субградиента не оказывает существенного влияния на точность и скорость сходимости метода.

3.2. Метод с прогнозированием результата

В случае, когда нам известно минимальное значение функции $F^* = F(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} F(x)$, существует решение проблемы выбора длины необходимого шага итерации в формуле (3.1) (см., например, [16, с. 131–132]). Тогда субградиентный метод имеет вид

$$x^{k+1} = x^k - \frac{F(x^k) - F^*}{\|h_k\|^2} h_k, \quad h_k \in \partial F(x^k). \quad (3.2)$$

В общем случае, когда значение F^* неизвестно, можно использовать аналог формулы (3.2), употребляя некоторое приближенное значение f^* , которое может оказаться как меньше, так и больше числа F^* (см., например, [16, с. 131–132]). А именно, запишем субградиентный метод в виде

$$x^{k+1} = x^k - \frac{F(x^k) - f^*}{\|h_k\|^2} h_k, \quad h_k \in \partial F(x^k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.3)$$

где начальная итерация x^0 и значение f^* выбраны удовлетворяющими неравенству $F(x^0) \geq f^*$; вектор h_0 удовлетворяет включению $h_0 \in \partial F(x^0)$.

Отметим, что как в методе (3.2), так и в методе (3.3) есть произвол в выборе векторов h_k , поскольку, вообще говоря, $\partial F(x^k)$ может быть неоднородным множеством. Выбор вектора h_k уточним несколько ниже.

Допустим, что в процессе вычислений реализовались итерации $x^0, x^1, \dots, x^j, \dots, x^k$ метода (3.3). Пусть для каждой итерации $x^j, j = \overline{1, k}$ выполняется неравенство $S_{\partial F(x^j)}(h_{j-1}) \geq 0$, где $h_{j-1} \in \partial F(x^{j-1})$. Для вычисления итерации x^{k+1} полагаем $h_k \in \partial F(x^k)$ удовлетворяющим неравенству $\langle h_k, h_{k-1} \rangle \geq 0$. Такой вектор h_k существует в силу того, что $S_{\partial F(x^k)}(h_{k-1}) \geq 0$.

По определению субградиента $h_k \in \partial F(x^k)$ справедливо неравенство $F(x) \geq F(x^k) + \langle x - x^k, h_k \rangle, x \in \mathbb{R}^n, k = 1, 2, \dots$, и, значит,

$$F(x^{k+1}) \geq F(x^k) + \langle x^{k+1} - x^k, h_k \rangle, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

Из (3.3), (3.4) следует $F(x^{k+1}) \geq F(x^k) + \left\langle -\frac{F(x^k) - f^*}{\|h_k\|^2} h_k, h_k \right\rangle, k = 1, 2, \dots$ и, значит, $F(x^{k+1}) \geq f^*, k = 1, 2, \dots$.

Учитывая эти неравенства и $F(x^0) \geq f^*$, получаем $F(x^{k-1}) \geq f^*, k = 1, 2, \dots$.

Кроме того, согласно (3.3) имеем

$$x^k = x^{k-1} - \frac{F(x^{k-1}) - f^*}{\|h_{k-1}\|^2} h_{k-1}, \quad h_{k-1} \in \partial F(x^{k-1}), \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.5)$$

Из (3.4), (3.5) следует

$$F(x^{k-1}) \geq F(x^k) + \left\langle \frac{F(x^{k-1}) - f^*}{\|h_{k-1}\|^2} h_{k-1}, h_k \right\rangle, \quad k = 1, 2, \dots,$$

т. е.

$$F(x^{k-1}) \geq F(x^k) + \frac{\langle h_{k-1}, h_k \rangle}{\|h_{k-1}\|^2} (F(x^{k-1}) - f^*), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

Поскольку $\langle h_{k-1}, h_k \rangle \geq 0, k = 1, 2, \dots$, и $F(x^{k-1}) - f^* \geq 0$, то $F(x^{k-1}) \geq F(x^k)$. Аналогично рассуждая, получаем, что в случае, когда $S_{\partial F(x^j)}(h_{j-1}) \geq 0, j = \overline{1, k}$, векторы $h_j \in \partial F(x^j), j = \overline{2, k}$ можно выбирать из условия $\langle h_{j-1}, h_j \rangle \geq 0$. При этом выборе векторов $h_j, j = \overline{2, k}$ последовательность $F(x^j), j = \overline{0, k}$ нестрого убывает: $F(x^0) \geq F(x^1) \geq \dots \geq F(x^j) \geq \dots \geq F(x^k)$.

Геометрически это означает, что при наличии сонаправленности субградиентов на текущем и предыдущем шаге, значения функции не возрастают.

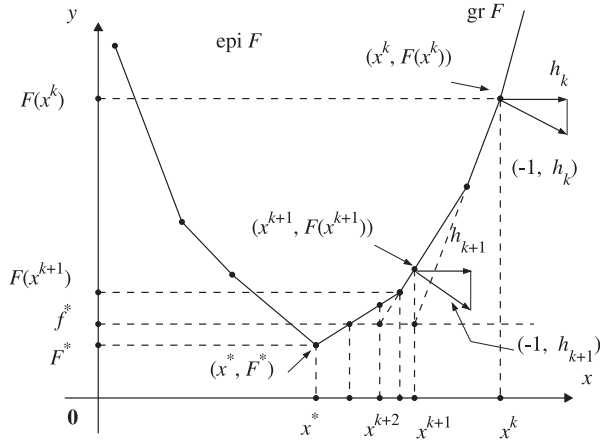


Рис. 1. Реализация шага субградиентного метода при $f^* > F^*$.

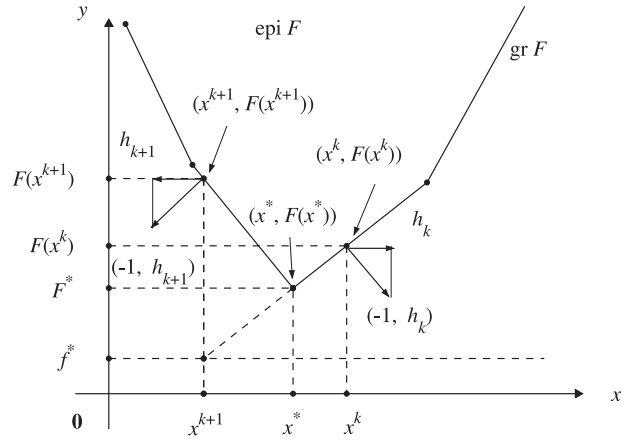


Рис. 2. Реализация шага субградиентного метода при $f^* < F^*$.

Может оказаться, что $F(x^k) = f^*$ и при этом $\mathbf{0} \notin \partial F(x^k)$. Тогда $x^{k+1} = x^k$, и итерационный процесс (3.3) прекращается. Соотношение $\mathbf{0} \notin \partial F(x^k)$ означает, что x^k не является точкой минимума функции $F(x)$ и, следовательно, $f^* > F^*$. Данный случай показан на рис. 1. В этом случае мы продолжаем итерационный процесс приближенного вычисления точки x^* минимума функции $F(x)$, но с использованием другого числа f^* , меньше того, которое применялось для вычисления точек $x^0, x^1, \dots, x^k$. В качестве нового значения f^* для формулы (3.3) можно взять половину предыдущего числа f^* . Так продолжаем итерационный процесс далее.

Пусть для последовательности точек $x^{k+1}, x^{k+2}, \dots, x^m$ реализовалась ситуация, аналогичная ситуации, в которой оказалась предыдущая последовательность $x^0, x^1, \dots, x^k$, т. е. пусть $\langle h_{j-1}, h_j \rangle \geq 0$, $j = \overline{k+1, m}$. В этом случае последовательность $F(x^j)$, $j = \overline{k, m}$, нестрого убывает: $F(x^k) \geq F(x^{k+1}) \geq \dots \geq F(x^m)$.

В случае, если при $j = m$ нарушается неравенство $\langle h_{m-1}, h_m \rangle \geq 0$, т. е. выполняется $\langle h_{m-1}, h_m \rangle < 0$, то может оказаться, что $F(x^m) \geq F(x^{m+1})$, и тогда итерационный процесс продолжается без изменения f^* . Если $F(x^m) < F(x^{m+1})$, то следует заменить f^* новым, большим значением, равным числу $(f^* + F(x^m))/2$. Эта ситуация соответствует рис. 2. При этом мы запоминаем использовавшееся ранее значение f^* в переменной f^1 в качестве оценки снизу для реального значения минимума F^* для дальнейших итераций.

Если $F(x^m) = f^*$ и при этом $\mathbf{0} \notin \partial F(x^m)$, то $x^{m+1} = x^m$, и итерационный процесс (3.3) с новым f^* прекращается. Так как $\mathbf{0} \notin \partial F(x^m)$, то x^m не является точкой минимума функции $F(x)$, и, следовательно, снова имеем $f^* > F^*$. Продолжая итерационный процесс, вводим новое число f^* , равное $(f^* + f^1)/2$. Итерационный процесс продолжаем.

Если $F(x^m) = f^*$ и при этом $\mathbf{0} \in \partial F(x^m)$, то процесс решения задачи по поиску точки минимума x^* функции $F(x)$ прекращается.

На основе проведенных рассуждений можно рассматривать субградиентный метод с прогнозированием результата как метод половинного деления по значениям функции. Если ни на одном из шагов итерационного процесса мы не попали в точку минимума, т. е. не выполнилось включение $\mathbf{0} \in \partial F(x^k)$, тогда процесс останавливаем при достижении требуемой точности по значениям функции. При этом с точностью сравнивается величина $F(x^k) - f^1$, поскольку f^1 в силу приведенных выше рассуждений является оценкой снизу для F^* — минимального значения функции $F(x)$.

Все предположения, сделанные в рамках предварительных рассуждений, удалось подтвердить многочисленными вычислительными экспериментами. На всех проведенных тестах программа, реализующая описанный алгоритм, либо достигла точки x^* , где $\mathbf{0} \in \partial F(x^*)$, либо была достигнута требуемая точность.

Как и любой метод половинного деления, данный процесс имеет высокую скорость сходимости, что и подтверждено экспериментально.

Программа, реализованная по этому методу, показала существенно большую скорость сходимости по сравнению с простым субградиентным методом. К достоинствам программы также относятся сравнительная простота перехода к задачам в пространствах большей размерности и небольшой объем используемых данных.

Сравнивая сходимость данного метода с прогнозированием результата и метода Н. З. Шора, можно отметить ускорение скорости сходимости на порядок. Так, тестирование на одинаковых парах многоугольников показало, что для достижения одинаковой точности до третьего знака после запятой с помощью метода (3.1) требовалось в среднем 3000 итераций, а с помощью метода (3.2) — не более 250 итераций.

4. Случай невыпуклых многогранников

В случае произвольных многогранников A и B базовая задача вычисления хаусдорфова расстояния между ними является гораздо более сложной, поскольку недостаточно рассматривать только вершины этих многогранников, как это было в выпуклом случае. Расстояние может достигаться на граничных точках одного многогранника, равноудаленных от другого, и даже на внутренних точках многогранника.

Проиллюстрируем разнообразие возникающих вариантов в плоском случае, т. е. при $n = 2$. Могут наблюдаться следующие случаи.

1. Граничная точка одного многоугольника равноудалена от сторон другого (рис. 3(a)).
2. Граничная точка одного многоугольника находится на равном максимальном расстоянии от вершины и стороны другого многоугольника (рис. 3(b)).
3. Граничная точка одного многоугольника равноудалена от вершин другого (рис. 3(c)).
4. Точка, на которой достигается хаусдорфово расстояние, является внутренней точкой многоугольника. В этом случае эта точка является центром соответствующей окружности, которая определяется

- a) тремя сторонами другого многоугольника и является центром вписанной окружности (рис. 4(a));
- b) двумя сторонами и вершиной другого многоугольника (рис. 4(b));
- c) стороной и двумя вершинами другого многоугольника (рис. 4(c));
- d) тремя вершинами другого многоугольника и является центром описанной окружности для указанных вершин (рис. 4(d)).

В рассматриваемом общем случае произвольных многогранников A и B выпуклость функции $F(x) = d(A, B + \{x\})$ не гарантируется. Для исследования свойства выпуклости этой функции был проведен ряд вычислительных экспериментов на плоскости. В итоге удалось установить, что для подавляющего большинства пар многоугольников, выбранных случайным образом, функция $F(x)$ будет обладать свойством выпуклости, несмотря на отсутствие свой-

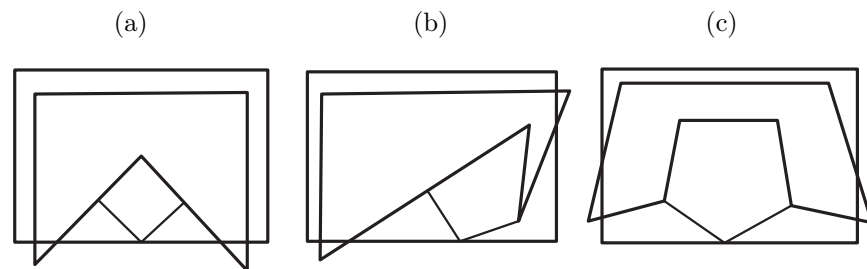


Рис. 3. Многоугольники, хаусдорфово расстояние между которыми достигается на граничной точке.

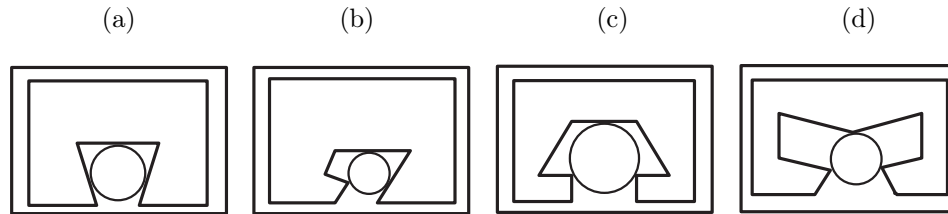


Рис. 4. Многоугольники, хаусдорфово расстояние между которыми достигается на внутренней точке.

ства невыпуклости для многоугольников. Более того, было экспериментально установлено, что для получения примера невыпуклой функции необходимо, чтобы размеры многоугольников были сопоставимы.

Эти факты можно объяснить следующими теоретическими наблюдениями.

Лемма 1. Для выпуклого многогранника $A \subset \mathbb{R}^n$ и произвольного многогранника $B \subset \mathbb{R}^n$ функция $f(x) = h(B + \{x\}, A)$ является выпуклой. Здесь $B + \{x\}$ — многогранник B , перемещенный на вектор $x \in \mathbb{R}^n$; $h(B, A)$ — хаусдорфово отклонение множества B от A , которое может быть вычислено по формуле $h(B, A) = \max_{b \in B} \min_{a \in A} \|a - b\|$.

Действительно, расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до выпуклого множества A является выпуклой функцией. А максимум выпуклых функций также является функцией выпуклой.

Лемма 2. Если в качестве многогранника $B \subset \mathbb{R}^n$ в вырожденном случае взять точку, то для произвольного многогранника $A \subset \mathbb{R}^n$ исследуемая функция $F(x) = d(A, B + \{x\})$ является выпуклой.

Доказательство. Этот факт следует из того, что хаусдорфово расстояние для множеств A и B определяется формулой (1.1) как максимум из хаусдорфовых отклонений множества A от B и симметрично множества B от A . В случае точечного множества B этот максимум достигается на хаусдорфовом отклонении множества A от B . По лемме 1, пользуясь тем, что точечное множество является выпуклым, получаем выпуклость функции $F(x)$. $\square$

Таким образом, если размер одного из многогранников существенно больше другого, то меньший многогранник можно заменить его выпуклой оболочкой. При этом хаусдорфово расстояние не изменится. Для обоснования выпуклости функции $F(x)$ можно провести рассуждения, аналогичные указанным леммам.

Был написан программный модуль, обеспечивающий вычисление значений минимизируемой функции $F(x) = d(A, B + \{x\})$ для произвольной пары многоугольников на плоскости путем вычисления всех значений в узлах сетки с шагом 1. Удалось экспериментально подтвердить тот факт, что в подавляющем большинстве случаев, несмотря на невыпуклость многоугольников A и B , функция $F(x)$ является выпуклой. На рис. 5 представлен пример многоугольников, а на рис. 6 — линии уровня функции $F(x)$ в случае ее невыпуклости.

5. Применение субградиентных методов в невыпуклом случае

Если функция $F(x)$ глобально является невыпуклой, то можно говорить о существовании субдифференциалов этой функции только в точках ее локальной выпуклости. Здесь все предыдущие рассуждения остаются справедливыми, следовательно, как и в выпуклом случае имеется факт, что субдифференциал функции $F(x)$ совпадает с выпуклой оболочкой тех векторов, на которых достигается хаусдорфово расстояние между рассматриваемыми многоугольниками. По-прежнему верно условие достижения точки минимума, которое состоит в том, что начало координат принадлежит субдифференциалу.

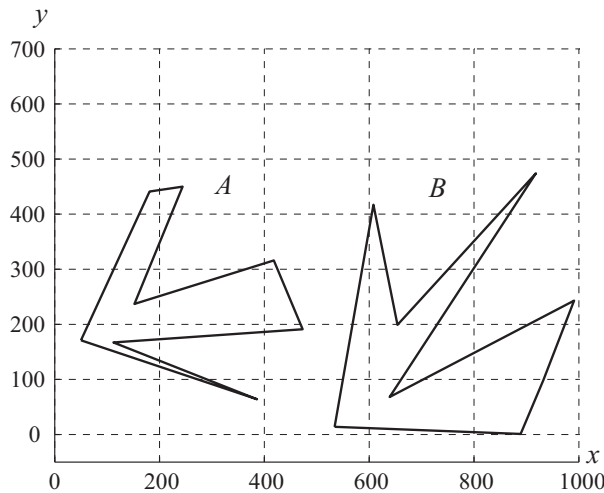


Рис. 5. Многоугольники, дающие невыпуклую функцию $F(x)$.

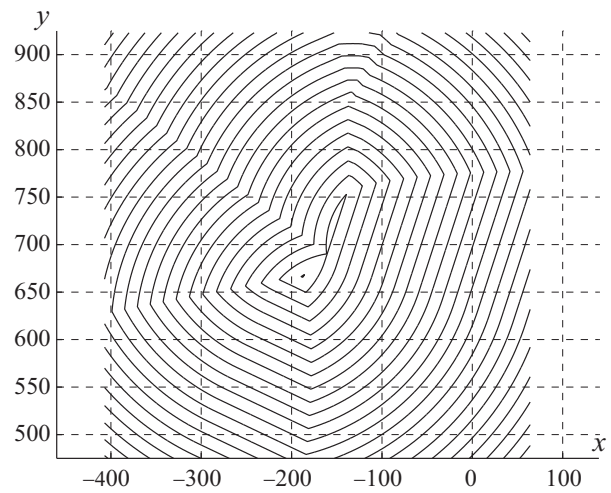


Рис. 6. Линии уровня функции $F(x)$ в невыпуклом случае.

Следует отметить, что так как функция $F(x)$ может быть невыпуклой, это условие экстремума может давать нам только точку локального минимума.

Был создан эвристический алгоритм для решения поставленной задачи в случае произвольных многоугольников на плоскости. Существенные изменения коснулись алгоритма вычисления текущего субдифференциала функции $F(x)$.

Так как функция $F(x)$ не является выпуклой, мы не можем использовать субградиентный метод с прогнозированием результата. При реализации алгоритма за основу был взят простой субградиентный метод Н. З. Шора. Был проведен большой объем вычислительных экспериментов, в результате которых удалось установить, что для пары многоугольников, которые генерируются произвольным образом, реализованный эвристический алгоритм всегда находит точку минимума, причем этот минимум является глобальным примерно в 92 процентах случаев.

Увеличить скорость сходимости удалось за счет предварительного решения задачи оптимального расположения выпуклых оболочек заданных многоугольников и использования найденного положения как начального для решения задачи для самих многоугольников.

Тестирование результатов работы алгоритма проводилось путем сравнения с приближенно найденной точкой глобального минимума, поиск которой проводился за счет перебора всех положений с фиксированным шагом по прямоугольной сетке.

Реализованные алгоритмы могут быть адаптированы к пространствам большей размерности.

6. Постановка задачи об отыскании наилучшей n -сети

Одним из самых эффективных методов аппроксимации множеств на плоскости является подмена исходного множества набором точек [17–19]. При этом на данные наборы накладывается условие оптимальности, понимаемое как минимум хаусдорфова отклонения заданного множества от объединения фиксированного числа точек. Вопросы существования и единственности оптимальных наборов точек в различных евклидовых пространствах были изучены А.Л. Гаркави [20–22] и Е.Н. Сосовым [23].

Первым шагом при построении аппроксимации множества требуется выделить точку, которая является для множества центральной.

О п р е д е л е н и е 2. Чебышевским центром компактного множества $M \subset \mathbb{R}^m$ называ-

ется такая точка $c(M)$, что

$$h(M, \{c(M)\}) = \inf\{h(M, \{x\}) : x \in \mathbb{R}^m\}. \quad (6.1)$$

Иначе говоря, чебышевский центр — центр шара минимально возможного радиуса, содержащего M . Для любого компактного множества он существует, является единственным и принадлежит его выпуклой оболочке со M [22].

О п р е д е л е н и е 3. Чебышевским радиусом $r(M)$ компактного множества $M \subset \mathbb{R}^m$ называется величина (6.1).

Понятие чебышевского центра можно обобщить на случай нескольких точек.

О п р е д е л е н и е 4. В пространстве $\mathbb{R}^m$ n -сетью называется непустое множество, состоящее не более чем из n точек.

Обозначим через Σ_n множество всех n -сетей пространства $\mathbb{R}^m$.

О п р е д е л е н и е 5. Сеть S^* называется наилучшей n -сетью компактного множества $M \subset \mathbb{R}^m$, если выполняется равенство $h(M, S^*) = \min\{h(M, S) : S \in \Sigma_n\}$.

Существование наилучшей n -сети компактного множества доказано в работах [20]. Однако в отличие от чебышевского центра она в общем случае неединственна, и некоторые ее точки могут лежать вне выпуклой оболочки множества M .

Сформулируем задачу об отыскании наилучшей n -сети плоского компактного множества.

Пусть задано ограниченное замкнутое множество $M \subset \mathbb{R}^2$ и число $n \in \mathbb{N}$. Требуется найти для него хотя бы одну наилучшую n -сеть S .

Данную задачу можно трактовать как задачу об оптимальном покрытии множества M набором из n кругов равного радиуса r . Критерием оптимальности выступает минимизация величины r . Точки $s_i, i = 1, \dots, n$, n -сети S есть центры кругов $O(s_i, r)$ оптимального покрытия, а их радиус равен хаусдорфовому отклонению $r = h(M, S)$ компакта M от n -сети S .

Решение этой задачи изучалось авторами в работах [17–19]. Для некоторых множеств при малом n наилучшие n -сети находятся аналитически. В статье [18] приведено выражение для наилучших 2 и 3-сетей для широких классов треугольников. В статье [19] для некоторых треугольников изучены качественные особенности наилучших 2 и 3-сетей, построены полностью их множества.

7. Оценка наилучших n -сетей

При решении задач важно оценить, как ведет себя хаусдорфово отклонение компакта M от его наилучшей n -сети S_n при росте n . Обозначим его $R_M(n) = h(M, S_n)$ как функцию от натурального числа n . Качественные свойства данной функции исследовались А. Н. Колмогоровым в работах [24; 25]. Для плоских множеств с ненулевой площадью им показана оценка

$$R_M(n) = O(1/\sqrt{n}). \quad (7.1)$$

Для конкретных множеств часто требуется получить количественную оценку поведения функции $R_M(n)$, уточняющую формулу (7.1) для заданной фигуры. Оценку снизу легко вывести из того факта, что площадь набора кругов $\Xi(S_n, R_M(n))$ должна быть не меньше, чем площадь M . Оценку сверху, как правило, можно получить, только изучив структуру наилучшей n -сети.

Теорема. Пусть множество M — квадрат с длиной стороны $2l$, $l \in (0, \infty)$. Тогда для функции $R_M(n)$ выполняется оценка

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (R_M(n)\sqrt{n}) \leq \sqrt{2}l. \quad (7.2)$$

Здесь $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ — верхний предел последовательности $\{a_n\}_{n=1}^\infty$.

Доказательство. Рассмотрим без ограничения общности квадрат M с центром в начале координат и со сторонами, параллельными осям Ox и Oy . Любой квадрат можно получить из него операциями поворота и параллельного переноса.

Допустим, оценка (7.2) не выполняется. Тогда найдутся монотонно возрастающая последовательность чисел $\{n_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$, $\lim_{i \rightarrow \infty} n_i = \infty$, и число $\gamma \in (0, \infty)$ такие, что

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad R_M(n_i)\sqrt{n_i} > (\sqrt{2}l + \gamma). \quad (7.3)$$

Заметим, что если число точек наилучшей n -сети есть квадрат натурального числа $n = m^2, m \in \mathbb{N}$, то выполняется оценка

$$h(M, S_n) \leq \frac{\sqrt{2}l}{m}. \quad (7.4)$$

Действительно, квадрат M является объединением m^2 квадратов M_m со стороной, равной по длине $2l/m$. Объединение S_n^* их центров образует n -сеть, для которой по построению

$$h(M, S_n^*) = \frac{\sqrt{2}l}{m}.$$

Значит, для наилучшей n -сети выполняется (7.4).

Выделим в произвольном элементе n_i наибольший полный квадрат m_i

$$n_i = m_i^2 + k_i.$$

Из предположения о том, что любой квадрат целого числа большего m_i превосходит n_i , следует

$$k_i \leq 2m_i.$$

Следовательно, для k_i справедлива оценка

$$k_i \leq 2\sqrt{m_i^2} \leq 2\sqrt{m_i^2 + k_i} = 2\sqrt{n_i}.$$

Из нее и из неравенства (7.4) вытекает

$$R_M(n_i) \leq \frac{\sqrt{2}l}{m_i} \leq \frac{\sqrt{2}l}{\sqrt{n_i - k_i}} \leq \frac{\sqrt{2}l}{\sqrt{n_i - 2\sqrt{n_i}}} = \frac{\sqrt{2}l}{\sqrt{n_i}} \frac{1}{\sqrt{1 - 2/\sqrt{n_i}}}.$$

Можно записать оценку в виде

$$R_M(n_i)\sqrt{n_i} \leq \sqrt{2}l\varphi(n_i),$$

где

$$\varphi(n_i) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2n_i^{-1/2}}}.$$

В пределе при $i \rightarrow \infty$ получаем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(n_i) = \lim_{n_i \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 - 2n_i^{-1/2}}} = 1.$$

Поэтому для любого $\gamma > 0$ найдется такое число i^* , что $\forall i > i^* (\varphi(n_i) \leq 1 + \gamma/(2l))$. Следовательно, для достаточно больших n_i имеет место

$$R_M(n_i)\sqrt{n_i} \leq \sqrt{2}l(1 + \gamma/(2l)) = \sqrt{2}l + \frac{\sqrt{2}\gamma}{2} < \sqrt{2}l + \gamma.$$

Данная оценка противоречит (7.3). □

Естественно, оценка (7.4) справедлива не только для квадрата со стороной $2l$, но и для любого вложенного в него множества, например, для круга радиуса l .

8. Примеры построения наилучших n -сетей

Аналитическое построение наилучших n -сетей возможно лишь в редких случаях. Для большинства практических задач даже в случае выпуклого [26] плоского множества с простой геометрией требуется применение численных методов [27]. Для построения наилучших n -сетей плоских множеств авторами реализован программный комплекс, использующий алгоритм, описанный в [19, с. 94]. Он основан на разбиении множества M на области Дирихле [28, с. 305] с помощью диаграммы Вороного [29] и отыскании их чебышевских центров. Алгоритм на первом этапе включает в себя генерацию методом случайных чисел начальной итерации n -сети S^0 . В зависимости от нее результат вычислений может быть существенно разным. Поэтому для каждого конкретного примера проводилось многократное применение программного комплекса, и сравнивались результаты каждого варианта его работы. Схожие методы построения оптимальных покрытий плоских множеств кругами применены в работе [30].

Для элементарных геометрических фигур, в частности для круга и квадрата, при малых n наилучшие n -сети найдены аналитически. Их обзор и построенные на их основе оптимальные покрытия кругами приведены в [31]. Авторы статьи сделали упор на численном построении аппроксимаций наилучших n -сети при большом n .

Пример 1. Требуется построить наилучшие n -сети при $n = 15$ и $n = 16$ для множества M — квадрата со стороной, равной 2, с центром в начале координат.

Решение задачи выполнено численными методами путем итерационного улучшения нескольких различных n -сетей, вложенных в M .

Полученный численно результат: аппроксимация S_{15} наилучшей 15-сети имеет вид

$$\begin{aligned} S_{15} = \{s_i\}_{i=1}^{15} \approx & \{(-0.7392, -0.7450), (-0.7487, -0.2254), (-0.8191, 0.3564), (-0.6729, 0.8368), \\ & (-0.2283, -0.7349), (-0.2218, -0.2035), (-0.2877, 0.3248), (-0.0132, 0.8486), \\ & (0.3124, -0.7808), (0.2694, -0.2160), (0.2340, 0.3626), (0.6596, 0.8671), \\ & (0.8015, -0.6953), (0.7754, -0.1044), (0.7754, 0.4657)\}. \end{aligned}$$

Хаусдорфово отклонение квадрата M от аппроксимации наилучшей 15-сети $r = h(M, S_{15}) \approx 0.3655$. Множество M , наилучшая 15-сеть S , набор кругов оптимального покрытия $\Xi(S_{15}, r) = O(s_1, r) \cup O(s_2, r) \cup \dots \cup O(s_{15}, r)$ представлены на рис. 7.

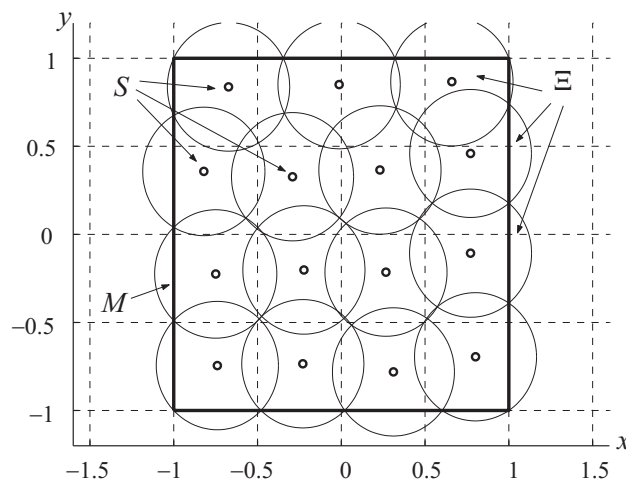


Рис. 7. Множество M , аппроксимация S его наилучшей 15-сети и покрытие Ξ 15 кругами в примере 1.

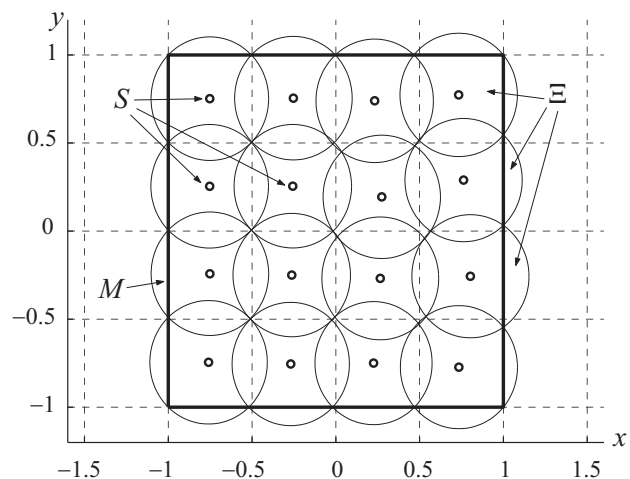


Рис. 8. Множество M , аппроксимация S его наилучшей 16-сети и покрытие Ξ 16 кругами в примере 1.

Заметим, что построенная 15-сеть улучшает результат, полученный в работе [28]. В ней авторами приведено покрытие квадрата M_1 со стороной, равной 1, набором из 15 кругов радиусом $\hat{r} = 0.1852$ (см. [28, с. 311]). Если же гомотетично сжать квадрат M и систему кругов Ξ в 2 раза, то получится квадрат M_1 , который вложен в объединение 15 кругов радиусом $\bar{r} = r/2 = 0.1828 < \hat{r}$. Если посчитать уменьшение радиуса в процентах, то оно равно

$$\frac{\hat{r} - \bar{r}}{\hat{r}} \cdot 100\% \approx 1.31\%.$$

Аппроксимация S_{16} наилучшей 16-сети имеет вид

$$\begin{aligned} S_{16} = \{s_i\}_{i=1}^{16} \approx \{ & (-0.7580, -0.7456), (-0.7502, -0.2441), (-0.7526, 0.2523), (-0.7509, 0.7512), \\ & (-0.2650, -0.7564), (-0.2595, -0.2518), (-0.2540, 0.2536), (-0.2507, 0.7541), (0.2291, -0.7494), \\ & (0.2741, -0.2655), (0.2779, 0.1921), (0.2346, 0.7388), (0.7358, -0.7736), \\ & (0.8059, -0.2580), (0.7630, 0.2871), (0.7343, 0.7719) \}. \end{aligned}$$

Хаусдорфово отклонение квадрата M от аппроксимации наилучшей 16-сети $r = h(M, S_{16}) \approx 0.3521$. Множество M , наилучшая 16-сеть S , набор кругов оптимального покрытия $\Xi(S_{16}, r) = O(s_1, r) \cup O(s_2, r) \cup \dots \cup O(s_{16}, r)$ представлены на рис. 8. Заметим, что хотя число точек аппроксимации наилучшей 16-сети есть квадрат целого числа 4, они размещены не в чебышевских центрах шестнадцати квадратов со стороной, равной по длине 0.5, из которых составлена фигура M , а образуют более сложную структуру.

Если посчитать в примере 1 величину $h(M, S_n)\sqrt{n}$, то она окажется равной 1.4156 при $n = 15$ и 1.4084 при $n = 16$. Эти величины согласуются с теоремой, которая дает в пределе при $n \rightarrow \infty$ для $R_M(n)\sqrt{n}$ оценку сверху $\sqrt{2} \approx 1.4142$.

Пример 2. Требуется построить наилучшую n -сеть при $n = 14$ для множества M — круга радиусом 1 с центром в начале координат.

Решение задачи выполнено численными методами путем итерационного улучшения нескольких различных 14-сетей, вложенных в M .

Полученный численно результат: аппроксимация S наилучшей 14-сети имеет вид

$$S_{14} = \{s_i\}_{i=1}^{14} \approx \{(0.4472, 0.6311), (0.8723, 0.3070), (0.4249, 0), (0, 0.9431),$$

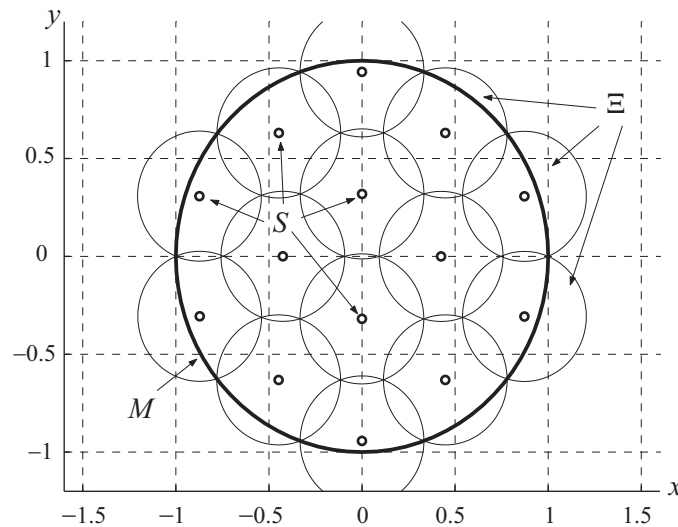


Рис. 9. Множество M , аппроксимация S его наилучшей 14-сети и покрытие Ξ 14 кругами в примере 2.

$$\begin{aligned} &(-0.4468, 0.6309), (0, 0.3192), (0, -0.3193), (-0.8732, 0.3079), \\ &(-0.4251, 0), (-0.8717, -0.3062), (-0.4476, -0.6312), (0, -0.9431), \\ &(0.4473, -0.6311), (0.8723, -0.3069)\}. \end{aligned}$$

Хаусдорфово отклонение круга M от аппроксимации наилучшей 14-сети $r = h(M, S_{14}) \approx 0.3325$. Множество M , наилучшая 14-сеть S , набор кругов оптимального покрытия $\Xi(S_{14}, r) = O(s_1, r) \cup O(s_2, r) \cup \dots \cup O(s_{14}, r)$ представлены на рис. 9. На рисунке видно, что точки наилучшей 14-сети образуют регулярную структуру. Она состоит из наборов подобных ромбов и имеет две оси симметрии, совпадающие с осями координат.

9. Сферические n -сети

В некоторых случаях прикладные задачи рассматриваются не на плоскости, а на более сложных поверхностях, в частности, на сфере (сферическом сегменте) [32]. Перейдем к рассмотрению множеств на сфере единичного радиуса с центром в начале координат, которую обозначим Θ .

О п р е д е л е н и е 6. Сферическим расстоянием $\sigma(a, b)$ между точками $a \in \Theta$ и $b \in \Theta$ назовем минимальную из длин кривых $\Gamma \subset \Theta$ на сфере Θ , соединяющих точки a и b .

Заметим, что кривой минимальной длины, соединяющей две точки a и b , является дуга большой окружности, проходящей через a и b . Здесь и далее под большой окружностью подразумеваем пересечение сферы Θ с плоскостью, проходящей через начало координат [33]. В случае, если точки лежат на концах одного диаметра сферы, таких дуг бесконечно много.

Из геометрии сферы следует, что сферическое расстояние между любыми двумя точками $a \in \Theta$ и $b \in \Theta$ и расстояние в трехмерном евклидовом пространстве связаны взаимнооднозначным соотношением

$$\sigma(a, b) = 2 \arcsin \frac{\|a - b\|}{2}. \quad (9.1)$$

Введем для сферы обобщения понятий хаусдорфова отклонения и наилучшей n -сети.

О п р е д е л е н и е 7. Сферическим отклонением компактного множества $A \subset \Theta$ от компактного множества $B \subset \Theta$ называется число

$$h_\sigma(A, B) = \max\{\rho_\sigma(a, B) : a \in A\}.$$

Здесь обозначено $\rho_\sigma(a, B) = \min\{\sigma(a - b) : b \in B\}$.

О п р е д е л е н и е 8. Назовем сферической n -сетью непустое множество, состоящее не более чем из n точек на сфере Θ .

Обозначим через Σ_n^σ множество всех сферических n -сетей.

О п р е д е л е н и е 9. Сферическая n -сеть S^* называется наилучшей сферической n -сетью компактного множества $M \subset \Theta$, если выполняется

$$h_\sigma(M, S^*) = \min\{h(M, S) : S \in \Sigma_n^\sigma\}. \quad (9.2)$$

Сформулируем задачу о наилучшем покрытии компактного множества на сфере. Для этого введем понятие сферического круга $O_\sigma(sr)$ как множества точек, лежащих на сферическом расстоянии не более чем r на сфере Θ от s : $O_\sigma(s, r) = \{o \in \Theta : \rho_\sigma(o, s) \leq r\}$.

Здесь мы подразумеваем, что точка s принадлежит Θ , а на радиус r наложено ограничение $r \in (0, \pi]$. Сферический круг, по сути, есть сферический сегмент, образованный пересечением сферы Θ с шаром, центр которого принадлежит Θ .

Пусть задано ограниченное замкнутое множество $M \subset \Theta$. Требуется найти такую сферическую n -сеть S для M .

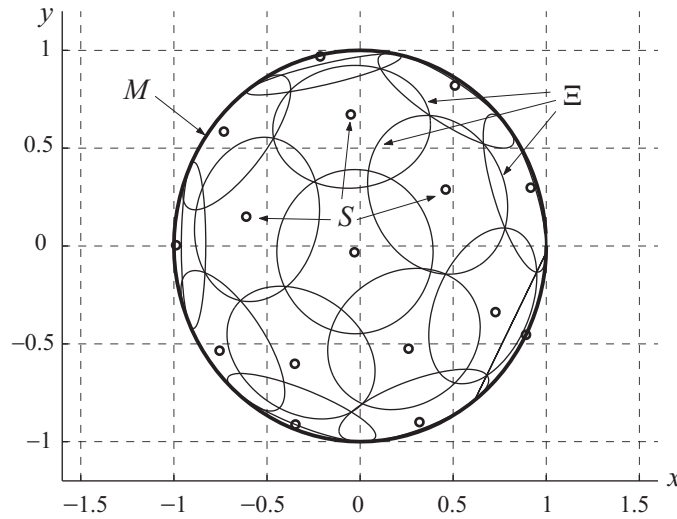


Рис. 10. Проекция множества M , аппроксимации S его наилучшей сферической 16-сети и покрытия Ξ 16 сферическими кругами в примере 3.

Для данной задачи можно указать следующую интерпретацию. Пусть заданы наборы сферических кругов $O_\sigma(s_1, r), O_\sigma(s_2, r), \dots, O_\sigma(s_n, r)$ равного радиуса $r \in (0, \pi]$ с центрами в точках $s_1, s_2, \dots, s_n$. Тогда точки сферической n -сети S есть центры кругов набора, который при наименьшем r удовлетворяет включению $M \subseteq O_\sigma(s_1, r) \cup O_\sigma(s_2, r) \cup \dots \cup O_\sigma(s_n, r)$. При этом радиус сферических кругов $r = h_\sigma(M, S)$. Назовем такой набор наилучшим для заданного множества $M \subset \Theta$.

Решение задачи о наилучшем покрытии сводится к построению наилучшей сферической n -сети S множества M , точки которой совпадают с центрами сферических кругов наилучшего набора. Заметим, что $O_\sigma(s, r)$, если рассматривать его как фигуру в трехмерном пространстве, имеет чебышевский центр c , который не совпадает с s . Однако при $r < \pi/2$ точки c и s лежат на одном радиусе сферы Θ . Если же $r \geq \pi/2$, то c совпадает с началом координат [33].

Для решений задачи о построении наилучшей сферической n -сети был разработан алгоритм, аналогичный описанному в работе [19], но базирующийся на разбиении на области влияния точек не плоскости прямыми, а сферы Θ — окружностями большого круга.

Пример 3. Требуется решить задачу 2 и построить оптимальный набор сферических кругов при $n = 16$ для множества $M = O_\sigma(p, \pi/2)$, совпадающего с верхней полусферой сферы Θ .

Решение задачи выполнено численными методами с применением итерационного алгоритма.

Полученный результат: аппроксимация S_{16} наилучшей сферической 16-сети имеет вид

$$\begin{aligned} S_{16} = \{s_i\}_{i=1}^{16} \approx & \{(0.2602, -0.5246, 0.8106), (-0.0303, -0.0318, 0.9990), \\ & (0.8912, -0.4536, 0), (-0.6116, 0.1499, 0.7768), (0.4599, 0.2887, 0.8397), \\ & (-0.7548, -0.5351, 0.3794), (0.3189, -0.8998, 0.2979), (0.9166, 0.2981, 0.2664), \\ & (-0.0500, 0.6724, 0.7385), (-0.3503, -0.6018, 0.7177), (-0.9880, 0.0038, 0.1543), \\ & (0.7275, -0.3376, 0.5973), (-0.3470, -0.9119, 0.2190), (-0.2139, 0.9686, 0.1266), \\ & (-0.7313, 0.5848, 0.3508), (0.5093, 0.8199, 0.2614)\}. \end{aligned}$$

Сферическое отклонение множества M от S_{16} $r = h_\sigma(M, S_{16}) \approx 0.4388$. Проекция на плоскость xOy множества M , аппроксимации S сферической 16-сети и наборы сферических кругов $\Xi(S_{16}, r) = O_\sigma(s_1, r) \cup O_\sigma(s_2, r) \cup \dots \cup O_\sigma(s_{16}, r)$ показаны на рис. 10. Вид тех же множеств в трехмерном пространстве представлен на рис. 11 и 12.

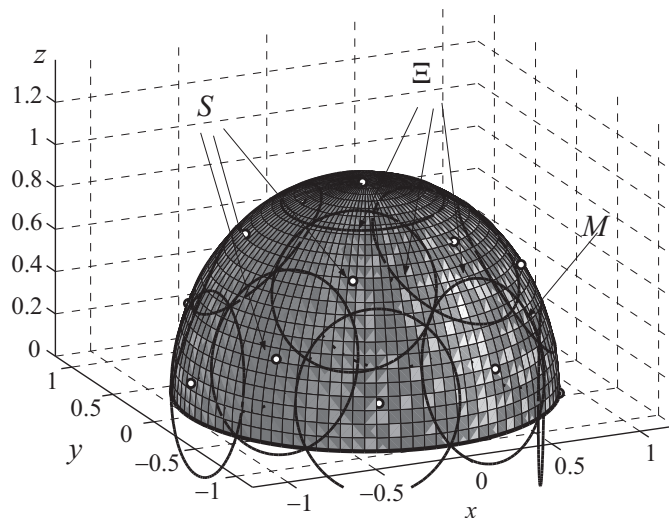


Рис. 11. Множество M , аппроксимация S его наилучшей сферической 16-сети и покрытие E 16 сферическими кругами в примере 3: вид 1.

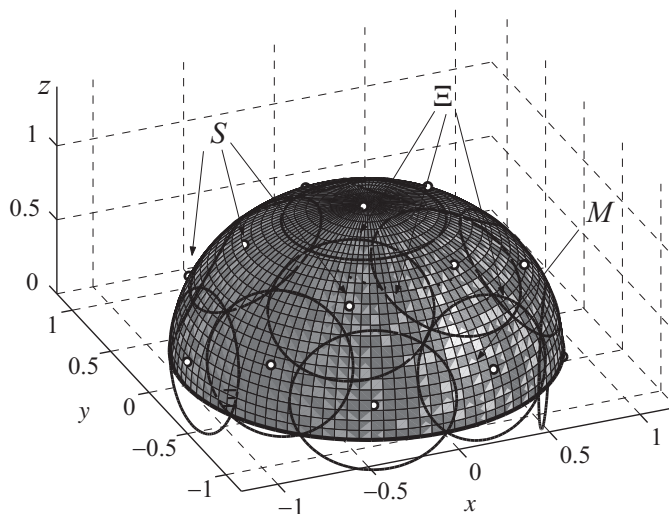


Рис. 12. Множество M , аппроксимация S его наилучшей сферической 16-сети и покрытие E 16 сферическими кругами в примере 3: вид 2.

10. Заключение

В статье рассмотрены различные задачи аппроксимации множеств более удобными в работе конструкциями. Проведено численное моделирование ряда примеров о выборе оптимального положения многоугольника, построении наилучших чебышевских сетей на плоскости и их обобщений на сферической поверхности. Получены оценки результативности численных методов. Построены иллюстрации аппроксимаций в виде линий уровня функции хаусдорфова расстояния и наборов кругов, покрывающих множества оптимальным образом. Разработанные методы и алгоритмы могут также использоваться при решении транспортных задач и задач логистики [34–36].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Куржанский А.Б., Филиппова Т.Ф. Об описании множества выживающих траекторий дифференциального включения // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 1. С. 38–41.
3. Kurzhanski A.B., Filippova T.F. On the theory of trajectory tubes — a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control. // Advances in nonlinear dynamics and control: a report from Russia. Boston: Birkhauser, 1993. P. 122–188. (Progr. Systems Control Theory; vol. 17.)
4. Kurzhanski A.B., Valyi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhauser, 1997. 220 p.
5. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 320 с.
6. Черноусько Ф.Л. Эллипсоидальные оценки области достижимости управляемых систем // Прикл. математика и механика. 1981. Т. 45, вып. 1. С. 11–19.
7. Chernousko F.L., Ovseevich A.I. Properties of the optimal ellipsoids approximating the reachable sets of uncertain systems // J. Optimization Theory Appl. 2004. Vol. 120, no. 2. P. 223–246.
8. Ушаков В.Н., Матвийчук А.Р., Лебедев П.Д. Дефект стабильности в игровой задаче о сближении в момент // Вестн. Удмурт. ун-та. 2010. Вып. 3. С. 87–103. (Математика, механика, компьютерные науки.)
9. Дифференциальные игры с фиксированным моментом окончания и оценка степени неустойчивости множеств в этих играх / В.Н. Ушаков, П.Д. Лебедев, А.Р. Матвийчук, А.Г. Малев // Тр. МИАН. 2012. Т. 277. С. 275–287.
10. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.: Ком книга, 2006. 304 с.
11. Лахтин А.С., Ушаков В.Н. Задача оптимизации хаусдорфова расстояния между двумя выпуклыми многогранниками // Современная математика и ее приложения. 2003. Т. 9. С. 60–67.
12. Lakhtin A.S., Ushakov V.N. Minimization of Hausdorff distance between convex polyhedrons // J. Math. Sci. 2005. Vol. 126, no. 6. P. 1553–1560.
13. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 472 с.
14. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986. 326 с.
15. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. Киев: Наукова думка, 1979. 200 с.
16. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 382 с.
17. Лебедев П.Д., Ушаков А.В. Аппроксимация множеств на плоскости оптимальными наборами кругов // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 79–90.
18. Лебедев П.Д., Бухаров Д.С. Аппроксимация многоугольников наилучшими наборами кругов // Изв. Иркут. гос. ун-та. 2013. № 3. С. 72–87. (Математика.)
19. Лебедев П.Д., Успенский А.А., Ушаков В.Н. Алгоритмы наилучшей аппроксимации плоских множеств наборами кругов // Вест. Удмурт. университета. 2013. Вып. 4. С. 88–99. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
20. Гаркави А.Л. О существовании наилучшей сети и наилучшего поперечника множества в банаховом пространстве // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, вып. 2. С. 210–211.
21. Гаркави А.Л. О наилучшей сети и наилучшем сечении множеств в нормированном пространстве // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1962. Т. 26, № 1. С. 87–106.
22. Гаркави А.Л. О чебышевском центре и выпуклой оболочке множества // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19, вып. 6. С. 139–145.
23. Сосов Е.Н. Метрическое пространство всех N -сетей геодезического пространства // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. 2009. Т. 15, вып. 4. С. 136–149.
24. Колмогоров А.Н. О некоторых асимптотических характеристиках вполне ограниченных метрических пространств // Докл. АН СССР. 1956. Т. 108, №3. С. 385–388.
25. Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М. ε -энтропия и ε -емкость множеств в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. 1959. Вып 2(86). С. 3–86.
26. Лейхтвейс К. Выпуклые множества / пер. с нем. В. А. Залгаллера, Т. В. Хачатуровой; под ред. В. А. Залгаллера. М.: Наука, 1985. 335 с. (Leichtweiss K. von. Konvexe Nengene.)
27. Пиявский С.А. Об оптимизации сетей // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1968. № 1. С. 68–80.

28. **Брусов В.С., Пиявский С.Л.** Вычислительный алгоритм оптимального покрытия областей плоскости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1971. Т. 11, № 2. С. 304–312.
29. **Препарата Ф., Шеймос М.** Вычислительная геометрия. М.: Мир. 1989. 478 с.
30. **Галиев Ш.И., Карпова М.А.** Оптимизация многократного покрытия ограниченного множества кругами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2010. Т. 50, № 4. С. 757–769.
31. Erich's Packing Center: [site]. URL: <http://www2.stetson.edu/~efriedma/packing.html>.
32. О задаче патрулирования границы акватории, охраняемой группой подводных аппаратов / И.В. Бычков, Н.Н. Максимкин, И.С. Хозяинов, Л.В. Киселев // Технические проблемы освоения мирового океана: материалы 5-ой Всерос. науч.-техн. конф. Владивосток, 2013. С. 424–429.
33. **Степанов Н.Н.** Сферическая тригонометрия. Л.; М.: ОГИЗ, 1948. 154 с.
34. **Казаков А.Л., Лемперт А.А.** Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике // Автоматика и телемеханика. 2011. № 7. С. 50–57.
35. **Казаков А.Л., Лемперт А.А., Бухаров Д.С.** К вопросу о сегментации логистических зон для обслуживания непрерывно распределенных потребителей // Автоматика и телемеханика. 2013. № 6. С. 87–100.
36. **Лемперт А.А., Казаков А.Л., Бухаров Д.С.** Математическая модель и программная система для решения задачи размещения логистических объектов // Управление большими системами. 2013. Вып. 41. С. 270–284.

Ушаков Владимир Николаевич д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН

профессор

зав. отделом

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: ushak@imm.uran.ru

Лахтин Алексей Станиславович

канд. физ.-мат. наук

зав. кафедрой

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: alexey.lakhtin@urfu.ru

Лебедев Павел Дмитриевич

канд. физ.-мат. наук

науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: pleb@yandex.ru

УДК 519.6

К ВОПРОСУ О ПОСТРОЕНИИ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА¹

А. Г. Ченцов, А. П. Бакланов

В статье исследуется один из вариантов задачи о достижимости в условиях, когда ограничения на выбор управлений имеют асимптотический характер. Имеется в виду задача управления в классе импульсов заданной интенсивности и исчезающе малой длительности. Ситуация осложняется наличием разрывных зависимостей, что приводит к эффекту типа произведения разрывной функции на обобщенную. Конструируемые расширения в специальном классе конечно-аддитивных мер позволяют представить искомое решение, определяемое в виде асимптотического аналога области достижимости, в терминах непрерывного образа компакта, для описания которого удастся использовать пространство Стоуна, отвечающее естественной алгебре множеств промежутка управления.

Один из авторов в течении многих лет имел неоценимую возможность общаться с Николаем Николаевичем Красовским, обсуждать задачи, развитием которых является постановка, рассматриваемая в настоящей статье. Поддержка Николаем Николаевичем данного направления во многом определила возможность его плодотворного развития. Светлая память о Николае Николаевиче Красовском навсегда сохранится в сердцах учеников и товарищей по работе.

Ключевые слова: база фильтра, конечно-аддитивная мера, множество притяжения, обобщенный элемент, ультрафильтр.

A. G. Chentsov, A. P. Baklanov. On the question of construction of an attraction set under constraints of asymptotic nature.

We study a variant of the attainability problem with constraints of asymptotic nature on the choice of controls. More exactly, we consider a control problem in the class of impulses of given intensity and vanishingly small length. The situation is complicated by the presence of discontinuous dependences, which produces effects of the type of multiplying a discontinuous function by a generalized function. The constructed extensions in the special class of finitely additive measures make it possible to present the required solution, defined as an asymptotic analog of an attainability domain, in terms of a continuous image of a compact set, which is described with the use of the Stone space corresponding to the natural algebra of sets of the control interval.

One of the authors had the honor of communicating with Nikolai Nikolaevich Krasovskii for many years and discussed with him problems that led to the statement considered in the paper. Krasovskii's support of this research direction provided possibilities for its fruitful development. His disciples and colleagues will always cherish the memory of Nikolai Nikolaevich in their hearts.

Keywords: filter base, finitely additive measure, attraction set, generalized element, ultrafilter.

1. Введение

В дальнейшем используются следующие сокращения: БФ — база фильтра, в/з — вещественнозначная (функция), ИП — измеримое пространство, к.-а. — конечно-аддитивная (мера), МП — множество притяжения, НМ — направленное множество, ОАХ — ограничения асимптотического характера, ОД — область достижимости, ОЭ — обобщенный элемент, п/м — подмножество, ТП — топологическое пространство, у/ф — ультрафильтр.

В статье рассматриваются вопросы, связанные с асимптотической версией задачи о достижимости. Более точно, речь идет о построении МП, являющихся асимптотическими аналогами ОД в теории управления [1–3]. При этом стандартные для задач управления ограничения заменяются соответствующими асимптотическими аналогами. Последние могут возникать при

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-01-00537 а, 13-01-90414 укр_ф_а, 13-01-00304 а) и программ фундаментальных исследований Президиума РАН (проекты 12-П-1-1012, 12-П-1-1019).

ослаблении стандартных ограничений (фазовые ограничения, краевые и промежуточные условия), но могут задаваться и изначально. Последний случай является предметом рассмотрения в настоящей работе. Речь идет об управлении системой в классе “мощных” импульсов малой протяженности. Ситуация осложняется наличием разрывных зависимостей в коэффициентах при управляющих воздействиях, что приводит к эффекту, имеющему смысл произведения разрывной функции на обобщенную. Известно [4–7], что для представления упомянутых эффектов возможно (по крайней мере в классе линейных систем) использовать к.-а. меры со свойством слабой абсолютной непрерывности относительно соответствующего сужения меры Лебега. Данный подход используется и в настоящей работе с учетом особенностей исходной содержательной задачи и, прежде всего, ее “асимптотических” ограничений.

Заметим, что импульсные режимы управления широко используются в современной технике. В частности, отметим задачи космической навигации [8]. Вариант рассматриваемой ниже задачи в применении к постановкам теории управления имеет следующие особенности: 1) требуется полное расходование топлива; 2) управляющий импульс должен иметь исчезающе малую продолжительность. Простейший вариант постановки связан с построением МП, которое является пределом системы ОД, отвечающих каждая ослабленным, в смысле 2), ограничениям. Между тем исходная задача, отвечающая строгому соблюдению 1), 2), является, вообще говоря, несовместной, в то время как МП представляет собой определенный практический интерес с точки зрения инженерных задач. Аналог данной постановки рассматривался в [9], однако предположения в [9] и в данной работе существенно различаются; грубо говоря, здесь допускается использование “более разрывных” зависимостей в коэффициентах при управлении, что сказывается на структуре используемых ОЭ. Упомянутые ОЭ — к.-а. меры оказываются определенным способом связанными с у/ф естественной алгебры п/м промежутка управления. Это обстоятельство позволяет привлечь для описания ОЭ и результатов их действия на систему положения [10], касающиеся представления нужной версии компакта Стоуна.

Заметим, что подобная конструкция имеет смысл и для решения других содержательных задач, поэтому в основной части работы мы придерживаемся абстрактной постановки, выделяя для исследования наиболее существенный “блок”. Однако сейчас обсудим в простейшей форме содержательный пример задачи управления на промежутке $[t_0, \vartheta_0]$, $t_0 < \vartheta_0$, с фиксированным временем окончания.

Исследуется задача о построении ОД линейной системы

$$\dot{x}(t) = M(t)x(t) + f(t)m(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.1)$$

функционирующей в n -мерном фазовом пространстве; здесь x_0 — заданный n -мерный вектор, $M(\cdot)$ — $(n \times n)$ -матрицант с непрерывными (на $[t_0, \vartheta_0]$) компонентами, $m = m(\cdot)$ есть ограниченная n -вектор-функция на $[t_0, \vartheta_0]$. В качестве (программного) управления используется в/з ограниченная функция $f = (f(t), t_0 \leq t \leq \vartheta_0)$, выбираемая из заданного множества F . Данное множество определяем следующим образом: F — множество всех неотрицательных кусочно-постоянных функций, у которых интеграл (на $[t_0, \vartheta_0]$) совпадает с заданным положительным числом. Последнее можно, не ограничивая общности, считать равным единице (если это не так, то можно осуществить “перенормировку” функции m). На выбор $f \in F$ накладывается еще одно ограничение: управление f должно иметь исчезающе малую протяженность. Поскольку вектор-функция m непрерывной не предполагается, при вышеупомянутой реализации управлений $f \in F$ возможны эффекты типа произведения разрывной функции на обобщенную.

Конечно, с практической точки зрения естественна постановка, когда протяженность “импульса” является ненулевой, но малой. Этому случаю отвечает ОД (в момент ϑ_0), зависящая от оценки протяженности как от параметра. Представляет интерес вопрос о пределе таких ОД при неограниченном уменьшении значений данного параметра. Исследованию данного вопроса и посвящается настоящая статья.

Заметим, что вектор-функция m полагается измеримой, а тогда терминальные состояния

системы (1.1) имеют вид

$$\Phi(\vartheta_0, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{\vartheta_0} f(t)\Phi(\vartheta_0, t)m(t) dt, \quad (1.2)$$

где $f \in F$, $\Phi(\cdot, \cdot)$ — фундаментальная матрица решений (матрициант) системы $\dot{x} = M(t)x$, (лебеговский) интеграл вектор-функции вычисляется покомпонентно. Из (1.2) следует, что с точки зрения описания асимптотики ОД достаточно анализировать поведение второго слагаемого в (1.2), т.е. поведение вектора

$$\int_{t_0}^{\vartheta_0} f(t)h(t) dt, \quad (1.3)$$

где h есть n -вектор-функция $t \mapsto \Phi(\vartheta_0, t)m(t)$, определенная на $[t_0, \vartheta_0]$. Данное обстоятельство учитывается в общей постановке, рассматриваемой ниже. Отметим в связи с конструкциями асимптотического анализа, что, конечно, при исследовании системы (1.1) можно было бы не ограничиваться изучением реальных ОД и их пределов, а рассматривать пучки возможных траекторий и их асимптотику. Используемая ниже схема расширения применима и к этому случаю (см. в этой связи абстрактные постановки в [4–7]). Однако мы сосредоточимся на модели, связанной с ОД и использующей (1.3), имея в виду получение по возможности более конкретных представлений.

Кроме того, в связи с (1.3) уместна интерпретация, связанная идейно с конструкциями [11]: вектор (1.3) можно рассматривать как систему математических ожиданий заданных случайных величин. Поведение этой системы при вырождении соответствующей плотности вероятности, определяемой в виде f , также можно рассматривать в рамках абстрактной задачи о достижимости при ОАХ. Данную интерпретацию можно уже и не связывать с управлением системой (1.1), а рассматривать как самостоятельную задачу, но, с другой стороны, можно использовать и для целей анализа терминальных состояний (1.2) системы (1.1) при действии импульсов с “исчезающей случайностью”.

2. Обозначения и общие определения

Ниже используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки); через $\emptyset$ обозначаем пустое множество, а через $\triangleq$ — равенство по определению. Фразу “по определению” заменяем выражением *def*. Принимаем аксиому выбора. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Каждому объекту x сопоставляем одноэлементное множество $\{x\}$, содержащее x . Если y и z — объекты, то $\{y; z\} \triangleq \{y\} \cup \{z\}$ есть их неупорядоченная пара. Для каждого множества X через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м X и полагаем, что $\text{Fin}(X)$ — семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(X)$. Если A и B — множества, то B^A есть *def* множество всех отображений из A в B (следуем [12, гл. II, §6]); если $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $f^1(C) \triangleq \{f(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$, $f^1(C) \neq \emptyset$ при $C \neq \emptyset$. Для всяких семейства $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \neq \emptyset$, и множества N имеем $\mathcal{M}|_N \triangleq \{M \cap N : M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(N))$.

С п е ц и а л ь н ы е с е м е й с т в а. До конца настоящего раздела фиксируем непустое множество E и полагаем $\pi[E] \triangleq \{\mathcal{L} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)) \mid (\emptyset \in \mathcal{L}) \& (E \in \mathcal{L}) \& (A \cap B \in \mathcal{L} \ \forall A \in \mathcal{L} \ \forall B \in \mathcal{L})\}$ (элементы $\pi[E]$ суть π -системы [13, с. 14] п/м E с “нулем” и “единицей”). Определяем

$$(\text{top})[E] \triangleq \left\{ \tau \in \pi[E] \mid \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau) \right\}, \quad (\text{alg})[E] \triangleq \{ \mathcal{L} \in \pi[E] \mid E \setminus L \in \mathcal{L} \ \forall L \in \mathcal{L} \}$$

(вводим топологии E и алгебры п/м E). Если $\tau \in (\text{top})[E]$, то (E, τ) есть ТП и при $H \in \mathcal{P}(E)$ через $\text{cl}(H, \tau)$ обозначаем замыкание H в этом ТП. Далее полагаем, что $(\tau - \text{comp})[E]$ есть семейство всех непустых компактных [14, §3.1] в ТП (E, τ) п/м E .

Всюду в дальнейшем через $\beta[E]$ (через $\beta_0[E]$) обозначаем семейство всех $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ (всех $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(E))$), для которых $\forall B_1 \in \mathcal{B} \forall B_2 \in \mathcal{B} \exists B_3 \in \mathcal{B}: B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Элементы $\beta_0[E]$ суть БФ E и только они. Полагаем $\beta_{\mathcal{L}}^0[E] \triangleq \{\mathcal{B} \in \beta_0[E] \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{L}\}$, определяя тем самым БФ “пространства” $(E, \mathcal{L})$, где $\mathcal{L} \in \pi[E]$.

Фиксируем до конца настоящего пункта π -систему $\mathcal{L} \in \pi[E]$. Тогда

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}) \mid (A \cap B \in \mathcal{F} \forall A \in \mathcal{F} \forall B \in \mathcal{F}) \& (\forall F \in \mathcal{F} \forall L \in \mathcal{L} (F \subset L \Rightarrow (L \in \mathcal{F})))\}$$

есть множество всех фильтров $(E, \mathcal{L})$;

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) (\mathcal{U} \subset \mathcal{F} \Rightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F}))\}$$

есть множество всех у/ф (максимальных фильтров) $(E, \mathcal{L})$; $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \neq \emptyset$. Имеем, что $((E, \mathcal{L}) - \text{ult})[x] \triangleq \{L \in \mathcal{L} \mid x \in L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \forall x \in E$; введены тривиальные фильтры $(E, \mathcal{L})$ (условия их максимальной см., например, в [15, разд. 2]).

Э л е м е н т ы т о п о л о г и и. В связи с построением фильтров отметим, что при $\mathcal{L} \in \pi[E]$

$$(E - \mathbf{f})[\mathcal{B}|\mathcal{L}] \triangleq \{L \in \mathcal{L} \mid \exists B \in \mathcal{B}: B \subset L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \quad \forall \mathcal{B} \in \beta_0[E]; \quad (2.1)$$

при этом $\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \subset \beta_0[E]$, а потому правило (2.1) применимо к фильтрам $(E, \mathcal{L})$. Следуем соглашениям предыдущего пункта при $\mathcal{L} = \tau$, где $\tau \in (\text{top})[E]$ (напомним, что $E \neq \emptyset$). Если $x \in E$, то $N_\tau^0(x) \triangleq \{G \in \tau \mid x \in G\} \in \mathbb{F}^*(\tau)$, $N_\tau(x) \triangleq (E - \mathbf{f})[N_\tau^0(x)|\mathcal{P}(E)] \in \mathbb{F}^*(\mathcal{P}(E))$ есть фильтр окрестностей x , понимаемых в смысле [16, гл. I] (учитываем, что $\mathcal{P}(E) \in \pi[E]$). Если $\mathcal{B} \in \beta_0[E]$ и $y \in E$, то [16, гл. I]

$$(\mathcal{B} \xrightarrow{\tau} y) \stackrel{\text{def}}{\iff} (N_\tau(y) \subset (E - \mathbf{f})[\mathcal{B}|\mathcal{P}(E)]). \quad (2.2)$$

В связи с (2.2) отметим, что $\mathbb{F}^*(\mathcal{P}(E)) \subset \beta_0[E]$, что позволяет применять (2.2) в случае у/ф $(E, \mathcal{P}(E))$, которые будем называть у/ф множества E .

Если $(D, \preceq, h)$ — направленность [17, гл. 2] в множестве E (D — непустое множество, $\preceq$ — направление [17, гл. 2] на D , $h \in E^D$; пару $(D, \preceq)$ именуют НМ), то $(E - \text{ass})[D; \preceq; h] \in \mathbb{F}^*(\mathcal{P}(E))$ — фильтр, ассоциированный с $(D, \preceq, h)$, — есть семейство всех $M \in \mathcal{P}(E)$ таких, что $\exists d \in D \forall \delta \in D (d \preceq \delta) \Rightarrow (h(\delta) \in M)$. Полагаем, что $\forall x \in E$

$$((D, \preceq, h) \xrightarrow{\tau} x) \stackrel{\text{def}}{\iff} (N_\tau(x) \subset (E - \text{ass})[D; \preceq; h]). \quad (2.3)$$

Тем самым определена “обычная” сходимость по Морю — Смиту [17, гл. 2]. Последовательность в E — вариант направленности: если $\mathbf{e} \triangleq (e_i)_{i \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, то $(\mathbb{N}, \leq)$, где $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \dots\}$ и $\leq$ — обычный порядок на $\mathbb{N}$, есть соответствующее непустое НМ, а $(\mathbb{N}, \leq, \mathbf{e})$ — нужная направленность, “заменяющая” $\mathbf{e}$. Соответствующий этому случаю вариант (2.3) записываем проще, полагая $\overrightarrow{\mathbf{n}, \infty} \triangleq \{k \in \mathbb{N} \mid \mathbf{n} \leq k\} \forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}$. А именно, при $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ и $\mathbf{x} \in E$

$$((x_i)_{i \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\tau} \mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall H \in N_\tau(\mathbf{x}) \exists m \in \mathbb{N}: x_k \in H \quad \forall k \in \overrightarrow{m, \infty}).$$

М н о ж е с т в а п р и т я ж е н и я. Как и в предыдущем пункте, здесь (E, τ) есть ТП, $E \neq \emptyset$. Пусть, кроме того, $\mathbf{I}$ — непустое множество. Следуя [18, определение 3.1], полагаем при $g \in E^{\mathbf{I}}$ и $\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I}))$, что $(\text{as})[\mathbf{I}; E; \tau; g; \mathcal{I}]$ есть def множество всех $y \in E$, для каждого из которых существует такая направленность $(D, \preceq, h)$ в $\mathbf{I}$, что

$$(\mathcal{I} \subset (\mathbf{I} - \text{ass})[D; \preceq; h]) \& ((D, \preceq, g \circ h) \xrightarrow{\tau} y) \quad (2.4)$$

(здесь и ниже $\circ$ — символ композиции отображений). Кроме того, полагаем, что

$$\begin{aligned} & (\text{sas})[\mathbf{I}; E; \tau; g; \mathcal{I}] \\ & \triangleq \left\{ y \in E \mid \exists (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbf{I}^{\mathbb{N}} : (\forall S \in \mathcal{I} \exists \mathbf{n} \in \mathbb{N} : x_j \in S \ \forall j \in \overline{\mathbf{n}, \infty}) \ \& \ \left((g(x_i))_{i \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\tau} y \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

получая секвенциальное МП $((\text{as})[\mathbf{I}; E; \tau; g; \mathcal{I}]$ именуем МП). Из соотношений (2.4), (2.5) имеем, что $(\text{sas})[\mathbf{I}; E; \tau; g; \mathcal{I}] \subset (\text{as})[\mathbf{I}; E; \tau; g; \mathcal{I}]$. Условия совпадения этих двух множеств см. в [5, предложение 3.3.1]. Если $\mathcal{I} \in \beta[\mathbf{I}]$, то

$$(\text{as})[\mathbf{I}; E; \tau; g; \mathcal{I}] = \bigcap_{S \in \mathcal{I}} \text{cl}(g^1(S), \tau). \quad (2.6)$$

3. Конечно-аддитивные меры

Всюду в дальнейшем фиксируем $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$, для которых $a < b$. Пусть $I \triangleq [a, b]$. Здесь и ниже $\mathbb{R}$ — вещественная прямая. Для обозначения промежутков $\mathbb{R}$ используем только квадратные скобки (см. [16, гл. I; 19, § 1.3]). В дальнейшем I будет, в частности, играть роль промежутка управления. Полагаем, следуя [10, (4.1)], что

$$\mathcal{J} \triangleq \{ L \in \mathcal{P}(I) \mid \exists c \in I \exists d \in I : (]c, d[\subset L) \ \& \ (L \subset [c, d]) \},$$

получая полуалгебру [20, I.3] промежутков $\mathbb{R}$ (открытых, полуоткрытых, замкнутых), содержащихся в I (подробнее см. в [21, § 6.3]). Всюду в дальнейшем $\mathcal{A} \in (\text{alg})[I]$ есть def алгебра п/м I , порожденная [20, гл. I] полуалгеброй $\mathcal{J}$; в частности, $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}$. Тогда $(I, \mathcal{A})$ есть ИП с алгеброй множеств.

Если $L \in \mathcal{P}(I)$, то $\chi_L \in \mathbb{R}^I$ есть def индикатор множества L [20, II.2]: $\chi_L(x) \triangleq 1$ при $x \in L$, $\chi_L(\tilde{x}) \triangleq 0$ при $\tilde{x} \in I \setminus L$. Следуя [19, гл. 2], определяем $B_0(I, \mathcal{A})$ в виде линейной оболочки множества $\{\chi_L : L \in \mathcal{A}\}$ (здесь и ниже линейные операции, умножение и порядок в пространствах в/з функций определяем поточечно), а замыкание $B_0(I, \mathcal{A})$ в топологии естественной sup -нормы $\|\cdot\|$ [22, гл. IV, разд. 2, п. 13] пространства $\mathbb{B}(I)$ (всех) ограниченных в/з функций на I обозначаем через $B(I, \mathcal{A})$, что согласуется с [22, гл. IV]. При этом [19, гл. 2] $B(I, \mathcal{A})$ в оснащении нормой, индуцированной из $(\mathbb{B}(I), \|\cdot\|)$, есть банахово пространство, у которого топологическое сопряженное $B^*(I, \mathcal{A})$ изометрически изоморфно пространству $\mathbb{A}(\mathcal{A})$ (всех) ограниченных в/з к.-а. мер на $\mathcal{A}$ в оснащении (сильной) нормой-вариацией (см. [22, гл. IV] и более подробно в [19, теорема 3.6.1, (4.11.6)]). Соответствующий изометрический изоморфизм $\mathbb{A}(\mathcal{A})$ на $B^*(I, \mathcal{A})$ есть

$$\mu \longmapsto \left(\int_I f \, d\mu \right)_{f \in B(I, \mathcal{A})} : \mathbb{A}(\mathcal{A}) \rightarrow B^*(I, \mathcal{A}),$$

где операция интегрирования определяется простейшей схемой [19, гл. 3]. Тогда $(B(I, \mathcal{A}), \mathbb{A}(\mathcal{A}))$ — двойственность топологических векторных пространств. Отсюда $\mathbb{A}(\mathcal{A})$ может быть оснащено “обычной” *-слабой топологией $\tau_*(\mathcal{A}) \in (\text{top})[\mathbb{A}(\mathcal{A})]$, превращающей $\mathbb{A}(\mathcal{A})$ в локально выпуклый σ -компакт (условия компактности в $(\mathbb{A}(\mathcal{A}), \tau_*(\mathcal{A}))$ определяются теоремой Алаоглу [22, гл. V, разд. 4]; в конкретизированном виде см. [5, (3.4.19)]. Заметим, что $\mathbb{A}(\mathcal{A})$ порождается конусом $(\text{add})_+[\mathcal{A}]$ (всех) неотрицательных в/з к.-а. мер на $\mathcal{A}$. Далее определим

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}) \triangleq \{ \mu \in (\text{add})_+[\mathcal{A}] \mid \mu(I) = 1 \} \in (\tau_*(\mathcal{A}) - \text{comp})[\mathbb{A}(\mathcal{A})]$$

и

$$\mathbb{T}(\mathcal{A}) \triangleq \{ \mu \in \mathbb{P}(\mathcal{A}) \mid \forall A \in \mathcal{A} \ (\mu(A) = 0) \vee (\mu(A) = 1) \} \in (\tau_*(\mathcal{A}) - \text{comp})[\mathbb{A}(\mathcal{A})].$$

Элементы $\mathbb{T}(\mathcal{A})$ — суть $(0,1)$ -значные к.-а. вероятности на $\mathcal{A}$, которые исчерпывающим образом характеризуются у/ф из $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$ (см. [21, гл. 10]). Напомним данную характеризацию, полагая, что при $\mathcal{L} \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ функция $\mathbb{X}_{\mathcal{L}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ такова, что $\mathbb{X}_{\mathcal{L}}(L) \triangleq 1$ при $L \in \mathcal{L}$ и $\mathbb{X}_{\mathcal{L}}(A) \triangleq 0$ при $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{L}$ (введен индикатор $\mathcal{L}$, рассматриваемого как подсемейство $\mathcal{A}$). В качестве $\mathcal{L}$ могут использоваться у/ф из $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$. При этом $\mathbb{X}_{\mathcal{U}} \in \mathbb{T}(\mathcal{A}) \quad \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$. Более того,

$$\mathcal{U} \mapsto \mathbb{X}_{\mathcal{U}}: \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{T}(\mathcal{A}) \quad (3.1)$$

есть биекция $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$ на $\mathbb{T}(\mathcal{A})$ (см. [21, предложение 10.4.4]). Биекцию (3.1) условимся обозначать через $\varkappa$: $\varkappa(\mathcal{U}) \triangleq \mathbb{X}_{\mathcal{U}}$ при $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$. В связи с представлением $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$ напомним совсем кратко положения [10]. Если $t \in]a, b]$, то $\mathcal{J}_t^{(-)} \triangleq \{[c, t]: c \in [a, t]\} \in \beta_{\mathcal{A}}^0[I]$ порождает (свободный) у/ф $\mathcal{U}_t^{(-)} \triangleq (I - \mathbf{f})[\mathcal{J}_t^{(-)}|\mathcal{A}] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$ с пустым пересечением всех множеств из $\mathcal{U}_t^{(-)}$. Кроме того, при $t \in [a, b[$ в виде $\mathcal{J}_t^{(+)} \triangleq \{[t, c]: c \in [t, b]\} \in \beta_{\mathcal{A}}^0[I]$ имеем БФ, для которой $\mathcal{U}_t^{(+)} \triangleq (I - \mathbf{f})[\mathcal{J}_t^{(+)}|\mathcal{A}] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$ также обладает упомянутым свойством пустоты пересечения. При этом [10, предложение 6.1, (6.21)]

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}) = \{\mathcal{U}_t^{(-)}: t \in]a, b]\} \cup \{\mathcal{U}_t^{(+)}: t \in [a, b[\cup \{((I, \mathcal{A}) - \text{ult})[t]: t \in I\}.$$

Далее важны к.-а. меры $\varkappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) \in \mathbb{T}(\mathcal{A})$, $t \in]a, b]$, и $\varkappa(\mathcal{U}_t^{(+)}) \in \mathbb{T}(\mathcal{A})$, $t \in [a, b[$.

Наряду с $\tau_*(\mathcal{A})$ используем топологии $\tau_{\otimes}(\mathcal{A}) \in (\text{top})[\mathbb{A}(\mathcal{A})]$ и $\tau_0(\mathcal{A}) \in (\text{top})[\mathbb{A}(\mathcal{A})]$, определенные в [4, (4.2.8), (4.2.9)] (см. также [5, разд. 3.5; 23]); $\tau_{\otimes}(\mathcal{A})$ — топология поточечной сходимости в $\mathbb{A}(\mathcal{A})$, а $\tau_0(\mathcal{A})$ отвечает подпространству тихоновской степени $\mathbb{R}$ в дискретной топологии ($\mathcal{A}$ используется в качестве индексного множества).

Через η обозначаем след меры Лебега на алгебру $\mathcal{A}$ (в обозначениях [21, § 8.5] η есть $\alpha[\bar{I}_a^b]$). В частности, $\eta \in (\text{add})_+[\mathcal{A}]$. Действуя в духе [4; 5], введем конус

$$(\text{add})_+^+[\mathcal{A}; \eta] \triangleq \{\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{A}] \mid \forall A \in \mathcal{A} \quad (\eta(A) = 0) \Rightarrow (\mu(A) = 0)\} \quad (3.2)$$

и следующие два множества: $\mathbb{P}_{\eta}(\mathcal{A}) \triangleq \mathbb{P}(\mathcal{A}) \cap (\text{add})_+^+[\mathcal{A}, \eta]$ и $\mathbb{T}_{\eta}(\mathcal{A}) \triangleq \mathbb{T}(\mathcal{A}) \cap (\text{add})_+^+[\mathcal{A}, \eta]$, $\mathbb{T}_{\eta}(\mathcal{A}) \subset \mathbb{P}_{\eta}(\mathcal{A})$. Легко видеть, что $\mathbb{P}_{\eta}(\mathcal{A}) \in (\tau_*(\mathcal{A}) - \text{comp})[\mathbb{A}(\mathcal{A})]$ и $\mathbb{T}_{\eta}(\mathcal{A}) \in (\tau_*(\mathcal{A}) - \text{comp})[\mathbb{A}(\mathcal{A})]$.

Следуя [19, §3.7], вводим при $f \in B(I, \mathcal{A})$ неопределенный η -интеграл f в виде $f * \eta \triangleq \left(\int_L f d\eta \right)_{L \in \mathcal{A}} \in \mathbb{A}(\mathcal{A})$. Полагая, что $B_0^+(I, \mathcal{A}) \triangleq \{f \in B_0(I, \mathcal{A}) \mid f(t) \geq 0 \quad \forall t \in I\}$, введем в рассмотрение

$$\mathbf{F} \triangleq \left\{ f \in B_0^+(I, \mathcal{A}) \mid \int_I f d\eta = 1 \right\} \in \mathcal{P}'(B_0^+(I, \mathcal{A})). \quad (3.3)$$

Из (3.2), (3.3) следует, что $f * \eta \in \mathbb{P}_{\eta}(\mathcal{A}) \quad \forall f \in \mathbf{F}$. Наконец, как установлено в [24, предложение 7.1, теорема 7.1],

$$\mathbb{T}_{\eta}(\mathcal{A}) = \{\varkappa(\mathcal{U}_t^{(-)}): t \in]a, b]\} \cup \{\varkappa(\mathcal{U}_t^{(+)}): t \in [a, b[\} = \mathbb{T}(\mathcal{A}) \cap \text{cl}(\{f * \eta: f \in \mathbf{F}\}, \tau_*(\mathcal{A})). \quad (3.4)$$

Свойство (3.4) будет использовано при построении вспомогательного МП с применением специальных классов к.-а. мер. Сейчас в интересах описания упомянутых классов полагаем, что $\zeta_t^0 \triangleq \inf(\{t - a; b - t\}) \quad \forall t \in]a, b[$. Разумеется, $\zeta_t^0 \in]0, \infty[$ при $t \in]a, b[$. Случаи $t = a$ и $t = b$ рассмотрим позднее. Пусть

$$\mathbb{P}_{\eta}^0(\mathcal{A}|t) \triangleq \{\mu \in \mathbb{P}_{\eta}(\mathcal{A}) \mid \mu([t - \varepsilon, t + \varepsilon]) = 1 \quad \forall \varepsilon \in]0, \zeta_t^0]\} \quad \forall t \in]a, b[. \quad (3.5)$$

Легко видеть, что при $\mu \in \mathbb{P}_{\eta}(\mathcal{A})$ и $t \in]a, b[$ значения $(\mu([a, t]) \in [0, 1]) \& (\mu([t, b]) \in [0, 1])$ таковы, что $\mu([a, t]) + \mu([t, b]) = 1$. С другой стороны (см. (3.5)),

$$\alpha \varkappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) + (1 - \alpha) \varkappa(\mathcal{U}_t^{(+)}) \in \mathbb{P}_{\eta}^0(\mathcal{A}|t) \quad \forall t \in]a, b[\quad \forall \alpha \in [0, 1]. \quad (3.6)$$

Предложение 3.1. Если $t \in]a, b[$ и $\mu \in \mathbb{P}_\eta^0(\mathcal{A}|t)$, то $\mu = \mu([a, t])\mathcal{K}(\mathcal{U}_t^{(-)}) + \mu(]t, b])\mathcal{K}(\mathcal{U}_t^{(+)})$.

Доказательство легко следует из определений и простейших свойств к.-а. (0,1)-мер. Существенно используется известное [6, (2.2.59)] свойство у/ф алгебры множеств: если $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$ и $A \in \mathcal{A}$, то либо $A \in \mathcal{U}$, либо $I \setminus A \in \mathcal{U}$.

Предложение доказано.

Из (3.6) и предложения 3.1 вытекает, что

$$\mathbb{P}_\eta^0(\mathcal{A}|t) = \{\alpha\mathcal{K}(\mathcal{U}_t^{(-)}) + (1 - \alpha)\mathcal{K}(\mathcal{U}_t^{(+)}) : \alpha \in [0, 1]\} \quad \forall t \in]a, b[. \quad (3.7)$$

Нам потребуется множество

$$\mathbb{P}_\eta^0[\mathcal{A}] \triangleq \left(\bigcup_{t \in]a, b[} \mathbb{P}_\eta^0(\mathcal{A}|t) \right) \cup \{\mathcal{K}(\mathcal{U}_a^{(+)})\} \cup \{\mathcal{K}(\mathcal{U}_b^{(-)})\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})). \quad (3.8)$$

4. Вспомогательные множества притяжения

В настоящем разделе конструируется обобщенная задача, формализующая асимптотику управлений из $\mathbf{F}$ в виде импульсов исчезающе малой продолжительности. Для этой цели определяется вспомогательное (по смыслу) МП, которое, как будет показано ниже, совпадает с (3.8). Данное МП обладает определенной универсальностью относительно оснащений базового компакта топологиями. В этой связи отметим, что (см. [5, (3.5.6)])

$$\tau_\eta^*(\mathcal{A}) \triangleq \tau_*(\mathcal{A})|_{\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})} = \tau_\otimes(\mathcal{A})|_{\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})} \in (\text{top})[\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})] \quad (4.1)$$

превращает $\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})$ в непустой компакт, а топология

$$\tau_\eta^0(\mathcal{A}) \triangleq \tau_0(\mathcal{A})|_{\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})} \in (\text{top})[\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})] \quad (4.2)$$

сильнее $\tau_\eta^*(\mathcal{A})$: $\tau_\eta^*(\mathcal{A}) \subset \tau_\eta^0(\mathcal{A})$. Более подробные сведения о топологиях (4.1), (4.2) см. в [4–7].

Элементы $\mathbf{F}$ играют далее роль управлений. При этом согласно (3.3) $\text{supp}(f) \triangleq \{t \in I \mid f(t) \neq 0\} \in \mathcal{P}'(I) \quad \forall f \in \mathbf{F}$. Поэтому при $f \in \mathbf{F}$ корректно определяются значения $\mathbf{t}_0(f) \triangleq \inf(\text{supp}(f)) \in I$, $\mathbf{t}^0(f) \triangleq \sup(\text{supp}(f)) \in I$ и

$$\mathbf{t}_f \triangleq \frac{\mathbf{t}_0(f) + \mathbf{t}^0(f)}{2} \in I$$

(разумеется, $a \leq \mathbf{t}_0(f) \leq \mathbf{t}_f \leq \mathbf{t}^0(f) \leq b$). Полагаем, что

$$\mathbf{F}_\varepsilon \triangleq \{f \in \mathbf{F} \mid \mathbf{t}^0(f) - \mathbf{t}_0(f) < \varepsilon\} \quad \forall \varepsilon \in]0, \infty[. \quad (4.3)$$

Из (4.3) следует, что

$$\mathfrak{F} \triangleq \{\mathbf{F}_\varepsilon : \varepsilon \in]0, \infty[\} \in \beta_0[\mathbf{F}] \quad (4.4)$$

(каждое из множеств (4.3) непусто: при $\varepsilon \in]0, \infty[$ для $\xi \triangleq \inf(\{\varepsilon; b - a\}) \in]0, \infty[$ достаточно определить $f \in \mathbf{F}$ посредством условий $f(t) \triangleq 1/\xi$ при $t \in [a, a + \xi[$ и $f(t_*) \triangleq 0$ при $t_* \in [a + \xi, b]$; тогда $f \in \mathbf{F}_\varepsilon$). Рассматриваем $\mathfrak{F}$ (4.4) как ОАХ.

Пусть теперь $\mathcal{J} : \mathbf{F} \rightarrow \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})$ действует по правилу $\mathcal{J}(f) \triangleq f * \eta \quad \forall f \in \mathbf{F}$. Получили правило погружения $\mathbf{F}$ в компакт, для которого [5, теорема 3.7.2]

$$\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}) = \text{cl}(\mathcal{J}^1(\mathbf{F}), \tau_*(\mathcal{A})) = \text{cl}(\mathcal{J}^1(\mathbf{F}), \tau_\otimes(\mathcal{A})) = \text{cl}(\mathcal{J}^1(\mathbf{F}), \tau_0(\mathcal{A})).$$

В силу (4.4) имеем [5, (3.3.10)] следующее очевидное представление:

$$(\text{as})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau; \mathcal{J}; \mathfrak{F}] = \bigcap_{\varepsilon \in]0, \infty[} \text{cl}(\mathcal{J}^1(\mathbf{F}_\varepsilon), \tau) \quad \forall \tau \in (\text{top})[\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})].$$

Предложение 4.1. *Имеет место вложение $(\text{as})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^*(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \mathfrak{F}] \subset \mathbb{P}_\eta^0[\mathcal{A}]$.*

Доказательство. Пусть $\mu_0 \in (\text{as})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^*(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \mathfrak{F}]$. Тогда $\mu_0 \in \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})$ и для некоторой направленности $(D, \prec, g)$ в $\mathbf{F}$

$$(\mathfrak{F} \subset (\mathbf{F} - \text{ass})[D, \prec, g]) \ \& \ ((D, \prec, \mathfrak{I} \circ g) \xrightarrow{\tau_\otimes^{(\mathcal{A})}} \mu_0) \quad (4.5)$$

(учитываем (4.1) и [6, (2.3.9)]). Здесь $(D, \prec)$ есть непустое НМ и $g \in \mathbf{F}^D$. Последнее означает, что определен функционал $\mathbf{t}_{g(\cdot)}$ вида $d \mapsto \mathbf{t}_{g(d)}: D \rightarrow I$. Пусть $\tau_I \in (\text{top})[I]$ есть обычная $|\cdot|$ -топология I , порожденная метрикой-модулем $(x, y) \mapsto |x - y|: I \times I \rightarrow [0, \infty[$. Используя [6, (2.2.9)], введем для каждого непустого НМ $(\mathcal{D}, \propto)$ множество

$$(\text{Isot})[\mathcal{D}, \propto; D, \prec] \triangleq \{h \in D^D \mid (h^1(\mathcal{D}) \in (\prec - \text{cof})[D]) \ \& \ (\forall d_1 \in \mathcal{D} \ \forall d_2 \in \mathcal{D} \ (d_1 \propto d_2) \Rightarrow (h(d_1) \prec h(d_2)))\},$$

где $(\prec - \text{cof})[D] \triangleq \{H \in \mathcal{P}(D) \mid \forall d' \in D \ \exists d'' \in H: d' \prec d''\}$. Поскольку (I, τ_I) — компакт, то ([6, (2.3.23)]) для некоторого НМ $(\mathbb{D}, \sqsubseteq)$, оператора $\lambda \in (\text{Isot})[\mathbb{D}, \sqsubseteq; D, \prec]$ и числа $t_0 \in I$ реализуется сходимость

$$(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \mathbf{t}_{g(\cdot)} \circ \lambda) \xrightarrow{\tau_I} t_0 \quad (4.6)$$

(учитываем, что (I, τ_I) есть подпространство $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$, где $\tau_{\mathbb{R}}$ есть обычная $|\cdot|$ -топология $\mathbb{R}$; см. также [6, (2.3.9)]). Легко видеть, что $\forall d \in D \ \exists d_1 \in \mathbb{D} \ \forall d_2 \in \mathbb{D}$

$$(d_1 \sqsubseteq d_2) \Rightarrow (d \prec \lambda(d_2)). \quad (4.7)$$

Из (4.6) вытекает, что $\forall \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists d' \in \mathbb{D} \ \forall d'' \in \mathbb{D}$

$$(d' \sqsubseteq d'') \Rightarrow (|\mathbf{t}_{g(\lambda(d''))} - t_0| < \varepsilon). \quad (4.8)$$

С другой стороны, из (4.5) и (4.7) следует, что (см. [6, (2.3.9)])

$$(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \mathfrak{I} \circ g \circ \lambda) \xrightarrow{\tau_\otimes^{(\mathcal{A})}} \mu_0. \quad (4.9)$$

При этом $(t_0 = a) \vee (t_0 \in]a, b[) \vee (t_0 = b)$. Ограничимся рассмотрением двух первых случаев (третий проверяется по аналогии с первым).

1) Пусть $t_0 = a$. Покажем, что $\mu_0 = \varkappa(\mathcal{U}_a^{(+)})$. В самом деле, пусть $U \in \mathcal{U}_a^{(+)}$. Тогда $U \in \mathcal{A}$ и для некоторого $t_* \in]a, b]$ имеем $]a, t_*] \subset U$. При этом $\varkappa(\mathcal{U}_a^{(+)}) (U) = 1$. С учетом (4.5), (4.7), (4.8) можно указать $\delta^* \in \mathbb{D}$ такое, что $\forall d \in \mathbb{D}$

$$(\delta^* \sqsubseteq d) \Rightarrow \left(\left(|\mathbf{t}_{g(\lambda(d))} - a| < \frac{t_* - a}{2} \right) \ \& \ (g(\lambda(d)) \in \mathbf{F}_{\frac{t_* - a}{2}}) \right). \quad (4.10)$$

Пусть $\delta_* \in \mathbb{D}$ таково, что $\delta^* \sqsubseteq \delta_*$. Получаем из (4.10), что

$$\left(|\mathbf{t}_{(g \circ \lambda)(\delta_*)} - a| < \frac{t_* - a}{2} \right) \ \& \ ((g \circ \lambda)(\delta_*) \in \mathbf{F}_{\frac{t_* - a}{2}}).$$

При этом $(\mathfrak{I} \circ g \circ \lambda)(\delta_*) \in \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})$ и (по свойствам $\mathfrak{I}$)

$$(\mathfrak{I} \circ g \circ \lambda)(\delta_*) ([\mathbf{t}_0((g \circ \lambda)(\delta_*)), \mathbf{t}^0((g \circ \lambda)(\delta_*))]) = 1,$$

где $[\mathbf{t}_0((g \circ \lambda)(\delta_*)), \mathbf{t}^0((g \circ \lambda)(\delta_*))] \subset [a, t_*[$. Тогда, как легко видеть, $(\mathfrak{I} \circ g \circ \lambda)(\delta_*) ([a, t_*]) = 1$ (учитываем, что $\eta(\{\mathbf{t}_0((g \circ \lambda)(\delta_*))\}) = 0$). Как следствие, $(\mathfrak{I} \circ g \circ \lambda)(\delta_*)(U) = 1$. Поскольку выбор δ_* был произвольным, установлено, что $\forall \delta \in \mathbb{D}$

$$(\delta^* \sqsubseteq \delta) \Rightarrow ((\mathfrak{I} \circ g \circ \lambda)(\delta)(U) = 1). \quad (4.11)$$

С другой стороны, согласно (4.9) имеем, что $\forall \varepsilon \in]0, \infty[\exists \tilde{d} \in \mathbb{D} \forall \delta \in \mathbb{D}$

$$(\tilde{d} \sqsubseteq \delta) \Rightarrow (|(\mathcal{I} \circ g \circ \lambda)(\delta)(U) - \mu_0(U)| < \varepsilon). \quad (4.12)$$

С учетом (4.11), (4.12) и аксиом НМ легко проверяется, что $\mu_0(U) = 1$, а тогда $\mu_0(U) = \varkappa(\mathcal{U}_a^{(+)})(U)$. Поскольку выбор U был произвольным, установлено, что $\mu_0(A) = \varkappa(\mathcal{U}_a^{(+)})(A) \forall A \in \mathcal{U}_a^{(+)}$. С учетом [6, (2.2.59)] получаем (при $t_0 = a$) требуемое совпадение $\mu_0 = \varkappa(\mathcal{U}_a^{(+)})$. Итак, $(t_0 = a) \Rightarrow (\mu_0 = \varkappa(\mathcal{U}_a^{(+)})$.

2) Пусть $t_0 \in]a, b[$. Тогда $\zeta_{t_0}^0 = \inf(\{t_0 - a; b - t_0\}) \in]0, \infty[$ и определено множество $\mathbb{P}_\eta^0(\mathcal{A}|t_0)$. Пусть $\varepsilon^+ \in]0, \zeta_{t_0}^0]$. С учетом (4.5), (4.7) и (4.8) подберем $d^+ \in \mathbb{D}$ так, что $\forall d \in \mathbb{D}$

$$(d^+ \sqsubseteq d) \Rightarrow \left((|t_{g(\lambda(d))} - t_0| < \frac{\varepsilon^+}{2}) \& ((g \circ \lambda)(d) \in \mathbf{F}_{\frac{\varepsilon^+}{2}}) \right).$$

Пусть δ^+ обладает свойством $d^+ \sqsubseteq \delta^+$. Тогда $[t_0((g \circ \lambda)(\delta^+)), t_0^0((g \circ \lambda)(\delta^+))] \subset]t_0 - \varepsilon^+, t_0 + \varepsilon^+[$, что означает (по выбору g) справедливость равенства $(\mathcal{I} \circ g \circ \lambda)(\delta^+)(]t_0 - \varepsilon^+, t_0 + \varepsilon^+[) = 1$. Коль скоро выбор δ^+ был произвольным, имеем, что $\forall \delta \in \mathbb{D}$

$$(d^+ \sqsubseteq \delta) \Rightarrow ((\mathcal{I} \circ g \circ \lambda)(\delta)(]t_0 - \varepsilon^+, t_0 + \varepsilon^+[) = 1). \quad (4.13)$$

Пусть $\xi \in]0, \infty[$. С учетом (4.9) подбираем $d_\xi^* \in \mathbb{D}$ так, что $\forall \delta \in \mathbb{D}$

$$(d_\xi^* \sqsubseteq \delta) \Rightarrow (|\mu_0(]t_0 - \varepsilon^+, t_0 + \varepsilon^+[) - (\mathcal{I} \circ g \circ \lambda)(\delta)(]t_0 - \varepsilon^+, t_0 + \varepsilon^+[)| < \xi). \quad (4.14)$$

Используя аксиомы НМ, подберем $\tilde{d}_\xi^+ \in \mathbb{D}$ так, что $d^+ \sqsubseteq \tilde{d}_\xi^+$ и $d_\xi^* \sqsubseteq \tilde{d}_\xi^+$. Тогда согласно (4.13) и (4.14) $(\mathcal{I} \circ g \circ \lambda)(\tilde{d}_\xi^+)(]t_0 - \varepsilon^+, t_0 + \varepsilon^+[) = 1$ и, вместе с тем,

$$|\mu_0(]t_0 - \varepsilon^+, t_0 + \varepsilon^+[) - (\mathcal{I} \circ g \circ \lambda)(\tilde{d}_\xi^+)(]t_0 - \varepsilon^+, t_0 + \varepsilon^+[)| < \xi.$$

Получаем неравенство $|\mu_0(]t_0 - \varepsilon^+, t_0 + \varepsilon^+[) - 1| < \xi$. Поскольку выбор ξ был произвольным, установлено, что $\mu_0(]t_0 - \varepsilon^+, t_0 + \varepsilon^+[) = 1$. Коль скоро и выбор ε^+ был произвольным, $\mu_0(]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[) = 1 \forall \varepsilon \in]0, \zeta_{t_0}^0]$. Следовательно (см. (3.5)), $\mu_0 \in \mathbb{P}_\eta^0(\mathcal{A}|t_0)$. Итак, показано, что

$$(t_0 \in]a, b[) \Rightarrow \left(\mu_0 \in \bigcup_{t \in]a, b[} \mathbb{P}_\eta^0(\mathcal{A}|t) \right).$$

Наконец, по аналогии со случаем 1) устанавливается импликация $(t_0 = b) \Rightarrow (\mu_0 = \varkappa(\mathcal{U}_b^{(-)}))$.

Таким образом (см. 1), 2) и последнюю импликацию), имеем из (3.8) требуемое свойство $\mu_0 \in \mathbb{P}_\eta^0(\mathcal{A})$, чем и завершается доказательство.

Предложение доказано.

Если $t \in]a, b]$, то корректно определено отображение $\mathfrak{X}_t^{(-)}: [a, t[\rightarrow \mathbf{F}$, для которого

$$\mathfrak{X}_t^{(-)}(c) \triangleq \frac{1}{t - c} \chi_{[c, t[} \quad \forall c \in [a, t[. \quad (4.15)$$

Аналогичным образом при $t \in [a, b[$ введем $\mathfrak{X}_t^{(+)}:]t, b] \rightarrow \mathbf{F}$ посредством условия

$$\mathfrak{X}_t^{(+)}(c) \triangleq \frac{1}{c - t} \chi_{]t, c]} \quad \forall c \in]t, b]. \quad (4.16)$$

В (4.15), (4.16) определены два простейших типа управлений из $\mathbf{F}$.

Предложение 4.2. Если $t \in]a, b]$, последовательность $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}: \mathbb{N} \rightarrow [a, t[$ такова, что $(c_i)_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow t$, то $(\forall F \in \mathfrak{F} \exists n_* \in \mathbb{N}: \mathfrak{X}_t^{(-)}(c_j) \in F \forall j \in \overline{n_*, \infty}) \& ((\mathcal{I}(\mathfrak{X}_t^{(-)}(c_i)))_{i \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\tau_\eta^0(\mathcal{A})} \varkappa(\mathcal{U}_t^{(-)}))$.

Предложение 4.3. Если $t \in [a, b[$ и для последовательности $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}: \mathbb{N} \rightarrow]t, b]$ выполнено $(c_i)_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow t$, то $(\forall F \in \mathfrak{F} \ \exists n^* \in \mathbb{N}: \mathfrak{X}_t^{(+)}(c_j) \in F \ \forall j \in \overline{n^*, \infty}) \& ((\mathfrak{I}(\mathfrak{X}_t^{(+)}(c_i)))_{i \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\tau_\eta^0(\mathcal{A})} \mathfrak{K}(\mathcal{U}_t^{(+)}))$.

Мы опускаем по соображениям объема весьма очевидные доказательства двух последних предложений, легко следующие из определений. Отметим только, что из этих предложений и (2.5) вытекают свойства

$$\{\mathfrak{K}(\mathcal{U}_a^{(+)}); \mathfrak{K}(\mathcal{U}_b^{(-)})\} \subset (\text{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^0(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \mathfrak{F}]. \quad (4.17)$$

Предложение 4.4. Если $t \in]a, b[$, $\alpha \in [0, 1]$, $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}: \mathbb{N} \rightarrow [a, t[$, $(\tilde{c}_i)_{i \in \mathbb{N}}: \mathbb{N} \rightarrow]t, b]$ и при этом $((c_i)_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow t) \& ((\tilde{c}_i)_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow t)$, то

$$(\forall F \in \mathfrak{F} \ \exists \mathbf{p} \in \mathbb{N}: \alpha \mathfrak{X}_t^{(-)}(c_j) + (1 - \alpha) \mathfrak{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_j) \in F \ \forall j \in \overline{\mathbf{p}, \infty}) \& ((\mathfrak{I}(\alpha \mathfrak{X}_t^{(-)}(c_i) + (1 - \alpha) \mathfrak{X}_t^{(+)}(\tilde{c}_i)))_{i \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\tau_\eta^0(\mathcal{A})} \alpha \mathfrak{K}(\mathcal{U}_t^{(-)}) + (1 - \alpha) \mathfrak{K}(\mathcal{U}_t^{(+)})).$$

Доказательство сводится фактически к непосредственной комбинации предложений 4.2, 4.3. Из (2.5), (4.17) и предложения 4.4 вытекает, что

$$\mathbb{P}_\eta^0[\mathcal{A}] \subset (\text{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^0(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \mathfrak{F}]. \quad (4.18)$$

Теорема 4.1. Справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\eta^0[\mathcal{A}] &= (\text{as})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^0(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \mathfrak{F}] = (\text{as})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^*(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \mathfrak{F}] \\ &= (\text{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^0(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \mathfrak{F}] = (\text{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^*(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \mathfrak{F}]. \end{aligned}$$

Доказательство. Используя свойство $\tau_\eta^*(\mathcal{A}) \subset \tau_\eta^0(\mathcal{A})$, получаем, что

$$(\text{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^0(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \mathfrak{F}] \subset (\text{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^*(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \mathfrak{F}] \subset (\text{as})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^*(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \mathfrak{F}]. \quad (4.19)$$

Поэтому (см. (4.18), (4.19), предложение 4.1)

$$\begin{aligned} (\text{as})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^*(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \mathfrak{F}] &\subset \mathbb{P}_\eta^0[\mathcal{A}] \subset (\text{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^0(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \mathfrak{F}] \subset \\ &(\text{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^*(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \mathfrak{F}] \subset (\text{as})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^*(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \mathfrak{F}]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Иными словами, все множества в (4.20) совпадают, т. е.

$$\begin{aligned} &(\text{as})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^*(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \mathfrak{F}] \\ &= (\text{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^0(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \mathfrak{F}] = (\text{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^*(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \mathfrak{F}] = \mathbb{P}_\eta^0[\mathcal{A}]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

С другой стороны, $(\text{as})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^0(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \mathfrak{F}] \subset (\text{as})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^*(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \mathfrak{F}]$ в силу сравнимости топологий (4.1), (4.2), а потому (см. (4.21))

$$(\text{as})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^0(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \mathfrak{F}] \subset \mathbb{P}_\eta^0[\mathcal{A}]. \quad (4.22)$$

Вместе с тем из (4.18) вытекает, что

$$\mathbb{P}_\eta^0[\mathcal{A}] \subset (\text{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^0(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \mathfrak{F}] \subset (\text{as})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^0(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \mathfrak{F}]. \quad (4.23)$$

Из (4.22), (4.23) получаем (в дополнение к (4.21)) следующее равенство:

$$(\text{as})[\mathbf{F}; \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau_\eta^0(\mathcal{A}); \mathfrak{I}; \mathfrak{F}] = \mathbb{P}_\eta^0[\mathcal{A}].$$

Теорема доказана.

5. Множество притяжения в конечномерном пространстве

В настоящем разделе рассматривается построение асимптотического аналога ОД линейной системы с возможной разрывностью в коэффициентах при управляющих воздействиях. С учетом формулы Коши и возможности применения неособого линейного преобразования, подобного [25, с. 161], исходную постановку можно свести к рассмотрению множества возможных значений векторного интегранта и соответствующего МП (см. введение). Это позволяет распространить используемую конструкцию (на основе теоремы 4.1) и на некоторые другие содержательные задачи. В то же время с точки зрения возможных применений теоремы 4.1 в духе [4–7] (см., например, [5, предложение 5.2.1]) случай, исследуемый здесь, можно рассматривать как простейший.

Итак, фиксируем в настоящем разделе $n \in \mathbb{N}$ и кортеж

$$(\pi_i)_{i \in \overline{1, n}}: \overline{1, n} \longrightarrow B(I, \mathcal{A}); \quad (5.1)$$

здесь и ниже $\overline{1, n} \triangleq \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\}$. Функции $\pi_j, j \in \overline{1, n}$, отвечающие (5.1), именуем ярусными (см. [26, с. 2]; подробнее — в [19, гл. 2]). Через Π обозначаем отображение

$$f \longmapsto \left(\int_I \pi_i f d\eta \right)_{i \in \overline{1, n}}: \mathbf{F} \longrightarrow \mathbb{R}^n; \quad (5.2)$$

здесь и далее полагаем, что натуральные числа — элементы $\mathbb{N}$ — не являются множествами и для всякого непустого множества T вместо $T^{\overline{1, n}}$ используем более традиционное обозначение T^n ; в частности, $\mathbb{R}^n$ отождествляется формально с множеством всех кортежей $(x_i)_{i \in \overline{1, n}}: \overline{1, n} \rightarrow \mathbb{R}$, что, конечно, не является принципиальным и связано только с удобством в обозначениях.

Полагая, что $\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ есть обычная топология покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^n$, рассматриваем далее в качестве основной задачу построения МП

$$(\text{as})[\mathbf{F}; \mathbb{R}^n; \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}; \Pi; \mathfrak{F}] = (\text{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{R}^n; \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}; \Pi; \mathfrak{F}] = \bigcap_{\varepsilon \in]0, \infty[} \text{cl}(\Pi^1(\mathbf{F}_\varepsilon), \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}); \quad (5.3)$$

в связи с (5.3) см. [27, разд. 3]. Для ее решения используем общий принцип [27, (4.1)], реализуемый в конкретной версии, связанной с теоремой 4.1. Напомним в этой связи: $(\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}), \tau_\eta^*(\mathcal{A}))$ — непустой компакт, и введем в качестве “расширения” (5.2) отображение $\tilde{\Pi}$ вида

$$\mu \longmapsto \left(\int_I \pi_i d\mu \right)_{i \in \overline{1, n}}: \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{R}^n. \quad (5.4)$$

Итак, $\tilde{\Pi}$ — отображение (5.4). Легко видеть, что $\tilde{\Pi}$ непрерывно в смысле топологий $\tau_\eta^*(\mathcal{A})$ и $\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$; кроме того, $\Pi = \tilde{\Pi} \circ \mathfrak{I}$ по свойствам неопределенного η -интеграла (см. [19, § 3.7]). Поэтому согласно теореме 4.1 и [27, (4.1)] имеем равенство

$$(\text{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{R}^n; \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}; \Pi; \mathfrak{F}] = (\text{as})[\mathbf{F}; \mathbb{R}^n; \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}; \Pi; \mathfrak{F}] = \tilde{\Pi}^1(\mathbb{P}_\eta^0[\mathcal{A}]) = \left\{ \left(\int_I \pi_i d\mu \right)_{i \in \overline{1, n}}: \mu \in \mathbb{P}_\eta^0[\mathcal{A}] \right\}. \quad (5.5)$$

Теперь для представления (секвенциального) МП (5.3) используем наряду с (5.5) представление (3.8) и положения [10], акцентируя внимание на описании $\tilde{\Pi}^1(\mathbb{P}_\eta^0[\mathcal{A}])$. В этой связи напомним, что [21, теорема 10.8.1] $\forall f \in B(I, \mathcal{A}) \quad \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}) \quad \forall \varepsilon \in]0, \infty[\quad \exists U \in \mathcal{U}$:

$$\left| f(x) - \int_I f d\kappa(\mathcal{U}) \right| < \varepsilon \quad \forall x \in U. \quad (5.6)$$

В качестве $\mathcal{U}$ в (5.6) можно использовать у/ф $\mathcal{U}_t^{(-)}$, $t \in]a, b]$, и $\mathcal{U}_t^{(+)}$, $t \in [a, b[$, получая соответственно пределы слева и пределы справа: если $f \in B(I, \mathcal{A})$, то [10]

$$\begin{aligned} & (\forall t \in]a, b] \quad \forall \varepsilon \in]0, \infty[\quad \exists U \in \mathcal{U}_t^{(-)} : |f(\theta) - \int_I f d\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})| < \varepsilon \quad \forall \theta \in U) \\ & \& (\forall t \in [a, b[\quad \forall \varepsilon \in]0, \infty[\quad \exists \tilde{U} \in \mathcal{U}_t^{(+)} : |f(\tilde{\theta}) - \int_I f d\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)})| < \varepsilon \quad \forall \tilde{\theta} \in \tilde{U}). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Из (5.7) следует, что корректно определяются односторонние пределы: при $f \in B(I, \mathcal{A})$ имеем

$$\left(\lim_{\theta \uparrow t} f(\theta) = \int_I f d\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) \quad \forall t \in]a, b] \right) \& \left(\lim_{\theta \downarrow t} f(\theta) = \int_I f d\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)}) \quad \forall t \in [a, b[\right). \quad (5.8)$$

Из (5.8) следует, в свою очередь, что $\forall t \in]a, b[\quad \forall f \in B(I, \mathcal{A}) \quad \forall \alpha \in [0, 1]$

$$\int_I f d(\alpha \kappa(\mathcal{U}_t^{(-)}) + (1 - \alpha) \kappa(\mathcal{U}_t^{(+)})) = \alpha \lim_{\theta \uparrow t} f(\theta) + (1 - \alpha) \lim_{\theta \downarrow t} f(\theta). \quad (5.9)$$

Из (5.8), в частности, следует, что определены

$$\left(\hat{\pi}_{\uparrow}(t) \triangleq \left(\lim_{\theta \uparrow t} \pi_i(\theta) \right)_{i \in \overline{1, n}} \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \in]a, b] \right) \& \left(\hat{\pi}_{\downarrow}(t) \triangleq \left(\lim_{\theta \downarrow t} \pi_i(\theta) \right)_{i \in \overline{1, n}} \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \in [a, b[\right). \quad (5.10)$$

Ясно, что при этом реализуются равенства

$$\left(\tilde{\Pi}(\kappa(\mathcal{U}_t^{(-)})) = \hat{\pi}_{\uparrow}(t) \quad \forall t \in]a, b] \right) \& \left(\tilde{\Pi}(\kappa(\mathcal{U}_t^{(+)})) = \hat{\pi}_{\downarrow}(t) \quad \forall t \in [a, b[\right). \quad (5.11)$$

Если $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^n$, то полагаем $[x; y]_n \triangleq \{\alpha x + (1 - \alpha)y : \alpha \in [0, 1]\}$ (выпуклая оболочка $\{x; y\}$).

Предложение 5.1. *Справедливо равенство*

$$\tilde{\Pi}^1(\mathbb{P}_{\eta}^0[\mathcal{A}]) = \left(\bigcup_{t \in]a, b[} [\hat{\pi}_{\uparrow}(t); \hat{\pi}_{\downarrow}(t)]_n \right) \cup \{\hat{\pi}_{\downarrow}(a); \hat{\pi}_{\uparrow}(b)\}. \quad (5.12)$$

Доказательство. Через Ω обозначим множество в правой части (5.12). Напомним также, что

$$\tilde{\Pi}^1(\mathbb{P}_{\eta}^0[\mathcal{A}]) = \left(\bigcup_{t \in]a, b[} \tilde{\Pi}^1(\mathbb{P}_{\eta}^0(\mathcal{A}|t)) \right) \cup \{\tilde{\Pi}(\kappa(\mathcal{U}_a^{(+)}); \tilde{\Pi}(\kappa(\mathcal{U}_b^{(-)}))\}. \quad (5.13)$$

Пусть $t_* \in]a, b[$ и $x_* \in \tilde{\Pi}^1(\mathbb{P}_{\eta}^0(\mathcal{A}|t_*))$. Тогда $x_* \in \mathbb{R}^n$ и для некоторой к.-а. меры $\mu_* \in \mathbb{P}_{\eta}^0(\mathcal{A}|t_*)$ имеем равенство $x_* = \tilde{\Pi}(\mu_*)$. При этом согласно (3.5), (3.7) $\mu_* \in \mathbb{P}_{\eta}^0(\mathcal{A}|t_*)$ допускает для некоторого $\alpha_* \in [0, 1]$ представление $\mu_* = \alpha_* \kappa(\mathcal{U}_{t_*}^{(-)}) + (1 - \alpha_*) \kappa(\mathcal{U}_{t_*}^{(+)})$, а тогда в силу (5.1) и (5.9) имеем равенства

$$\int_I \pi_j d\mu_* = \alpha_* \lim_{\theta \uparrow t_*} \pi_j(\theta) + (1 - \alpha_*) \lim_{\theta \downarrow t_*} \pi_j(\theta) \quad \forall j \in \overline{1, n}.$$

Как следствие (см. (5.4), (5.10), (5.11)) получаем для x_* представление

$$x_* = \alpha_* \hat{\pi}_{\uparrow}(t_*) + (1 - \alpha_*) \hat{\pi}_{\downarrow}(t_*) \in [\hat{\pi}_{\uparrow}(t_*); \hat{\pi}_{\downarrow}(t_*)]_n.$$

В частности, $x_* \in \Omega$. Установлено, что $\tilde{\Pi}^1(\mathbb{P}_{\eta}^0(\mathcal{A}|t_*)) \subset \Omega$, поскольку выбор x_* был произвольным. Коль скоро и выбор t_* также был произвольным, имеем свойство $\tilde{\Pi}^1(\mathbb{P}_{\eta}^0(\mathcal{A}|t)) \subset \Omega \quad \forall t \in]a, b[$, а тогда

$$\bigcup_{t \in]a, b[} \tilde{\Pi}^1(\mathbb{P}_{\eta}^0(\mathcal{A}|t)) \subset \Omega. \quad (5.14)$$

С другой стороны, согласно (5.11) получаем, что

$$\{\tilde{\Pi}(\mathcal{K}(\mathcal{U}_a^{(+)})); \tilde{\Pi}(\mathcal{K}(\mathcal{U}_b^{(-)}))\} = \{\hat{\pi}_\downarrow(a); \hat{\pi}_\uparrow(b)\}. \quad (5.15)$$

Из (5.13)–(5.15) следует, в частности, по определению Ω вложение:

$$\tilde{\Pi}^1(\mathbb{P}_\eta^0[\mathcal{A}]) \subset \Omega. \quad (5.16)$$

Выберем произвольно $t^* \in]a, b[$ и точку $x^* \in [\hat{\pi}_\uparrow(t^*); \hat{\pi}_\downarrow(t^*)]_n$, после чего подберем $\alpha^* \in [0, 1]$ со свойством $x^* = \alpha^* \hat{\pi}_\uparrow(t^*) + (1 - \alpha^*) \hat{\pi}_\downarrow(t^*)$. Согласно (5.11) справедливы следующие два равенства: $(\hat{\pi}_\uparrow(t^*) = \tilde{\Pi}(\mathcal{K}(\mathcal{U}_{t^*}^{(-)}))) \& (\hat{\pi}_\downarrow(t^*) = \tilde{\Pi}(\mathcal{K}(\mathcal{U}_{t^*}^{(+)})))$. С учетом этого получаем (см. (5.4)) цепочку равенств

$$\begin{aligned} x^* &= \alpha^* \tilde{\Pi}(\mathcal{K}(\mathcal{U}_{t^*}^{(-)})) + (1 - \alpha^*) \tilde{\Pi}(\mathcal{K}(\mathcal{U}_{t^*}^{(+)})) \\ &= \left(\int_I \pi_i d(\alpha^* \mathcal{K}(\mathcal{U}_{t^*}^{(-)}) + (1 - \alpha^*) \mathcal{K}(\mathcal{U}_{t^*}^{(+)})) \right)_{i \in \overline{1, n}} = \left(\int_I \pi_i d\mu^* \right)_{i \in \overline{1, n}}, \end{aligned}$$

где $\mu^* \triangleq \alpha^* \mathcal{K}(\mathcal{U}_{t^*}^{(-)}) + (1 - \alpha^*) \mathcal{K}(\mathcal{U}_{t^*}^{(+)}) \in \mathbb{P}_\eta^0(\mathcal{A}|t^*)$. Следовательно, $x^* = \tilde{\Pi}(\mu^*) \in \tilde{\Pi}^1(\mathbb{P}_\eta^0(\mathcal{A}|t^*))$, чем завершается проверка вложения $[\hat{\pi}_\uparrow(t^*); \hat{\pi}_\downarrow(t^*)]_n \subset \tilde{\Pi}^1(\mathbb{P}_\eta^0(\mathcal{A}|t^*))$. Поскольку и выбор t^* был произвольным, установлено, что

$$[\hat{\pi}_\uparrow(t); \hat{\pi}_\downarrow(t)]_n \subset \tilde{\Pi}^1(\mathbb{P}_\eta^0(\mathcal{A}|t)) \quad \forall t \in]a, b[. \quad (5.17)$$

Из (5.17) вытекает, следовательно, вложение

$$\bigcup_{t \in]a, b[} [\hat{\pi}_\uparrow(t); \hat{\pi}_\downarrow(t)]_n \subset \bigcup_{t \in]a, b[} \tilde{\Pi}^1(\mathbb{P}_\eta^0(\mathcal{A}|t)),$$

из которого с учетом (5.13) и (5.15) получаем, что

$$\Omega \subset \tilde{\Pi}^1(\mathbb{P}_\eta^0[\mathcal{A}]) = \left(\bigcup_{t \in]a, b[} \tilde{\Pi}^1(\mathbb{P}_\eta^0(\mathcal{A}|t)) \right) \cup \{\tilde{\Pi}(\mathcal{K}(\mathcal{U}_a^{(+)})); \tilde{\Pi}(\mathcal{K}(\mathcal{U}_b^{(-)}))\}.$$

С учетом (5.16) имеем теперь требуемое равенство (5.12).

Предложение доказано.

Из (5.5) и предложения 5.1 следует теперь основная

Теорема 5.1. *Справедлива цепочка равенств*

$$(\text{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{R}^n; \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}; \Pi; \mathfrak{F}] = (\text{as})[\mathbf{F}; \mathbb{R}^n; \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}; \Pi; \mathfrak{F}] = \left(\bigcup_{t \in]a, b[} [\hat{\pi}_\uparrow(t); \hat{\pi}_\downarrow(t)]_n \right) \cup \{\hat{\pi}_\downarrow(a); \hat{\pi}_\uparrow(b)\}. \quad (5.18)$$

В заключение отметим очевидное свойство, связанное с (5.5): МП (5.18) является непустым компактом в $\mathbb{R}^n$:

$$(\text{sas})[\mathbf{F}; \mathbb{R}^n; \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}; \Pi; \mathfrak{F}] \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(n)} - \text{comp})[\mathbb{R}^n]. \quad (5.19)$$

В самом деле, из теоремы 4.1 следует согласно (2.6), что $\mathbb{P}_\eta^0[\mathcal{A}]$ компактно в $(\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}), \tau_\eta^*(\mathcal{A}))$ (последнее ТП само компактно). С учетом (3.8) получаем, что

$$\mathbb{P}_\eta^0[\mathcal{A}] \in (\tau_\eta^*(\mathcal{A}) - \text{comp})[\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})]. \quad (5.20)$$

В силу *-слабой непрерывности $\tilde{\Pi}$ из (5.20) вытекает, что $\tilde{\Pi}^1(\mathbb{P}_\eta^0[\mathcal{A}]) \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(n)} - \text{comp})[\mathbb{R}^n]$ (см. [14, теорема 3.1.10]). Из (5.5) получаем теперь нужное свойство (5.19).

6. Заключение

В работе построено представление МП, отвечающего конкретному варианту ОАХ. Данный вариант имеет смысл формализации асимптотических режимов, естественных для многих прикладных задач импульсного управления (в частности, это касается некоторых вопросов управления материальной точкой в гравитационном поле). Имеется в виду применение “мощных” управляющих импульсов исчезающе малой длительности в условиях возможной разрывности коэффициентов при управляющих воздействиях. Возникающие при должной формализации МП можно рассматривать как естественный аналог ОД, отвечающий возможностям достижимости терминальных состояний “в пределе”. С другой стороны, реальные ОД, отвечающие использованию импульсов, протяженность которых ограничена заданным положительным числом, оказываются при достаточной малости последнего “близкими” к упомянутому МП (см., например, [5, теорема 4.3.4]). Поэтому построение МП, реализуемое в теореме 5.1, имеет определенное практическое значение.

В связи с применением вышеупомянутых конструкций в духе теорем 4.1 и 5.1 отметим игровые варианты задач программного управления с ОАХ (имеются в виду аналоги положений [28–30]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
2. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
3. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
4. Chentsov A. G. Finitely additive measures and relaxations of extremal problems. New York; London; Moscow: Plenum Pub. Corp., 1996. 244 p.
5. Chentsov A. G. Asymptotic attainability. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1997. 322 p.
6. Chentsov A. G., Morina S. I. Extensions and relaxations. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2002. 408 p.
7. Chentsov A. G. Finitely additive measures and extensions of abstract control problems // J. Math. Sci. 2006. Vol. 133, № 2. P. 1045–1206.
8. Эльясберг П. Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1965. 540 с.
9. Скворцова А. В., Ченцов А. Г. О построении асимптотического аналога пучка траекторий линейной системы с одноимпульсным управлением // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 12. С. 1645–1657.
10. Ченцов А. Г. Об одном примере представления пространства ультрафильтров алгебры множеств // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 293–311.
11. Ченцов А. Г. К вопросу о корректном расширении одной задачи о выборе плотности вероятности при ограничениях на систему математических ожиданий // Успехи мат. наук. 1995. Т. 50, № 5. С. 223–242.
12. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
13. Булинский А. В., Ширяев А. Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.
14. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
15. Ченцов А. Г. К вопросу о представлении ультрафильтров и их применении в конструкциях расширений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. С. 289–307.
16. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 272 с.
17. Келли Дж. Л. Общая топология. М.: Наука, 1968. 384 с.
18. Ченцов А. Г. Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестн. Удмурт. ун-та. 2011. № 1. С. 113–142. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
19. Ченцов А. Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры, I. Екатеринбург: Изд-во УГТУ-УПИ, 2009. 389 с.
20. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969. 309 с.
21. Ченцов А. Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры, II. Екатеринбург: Изд-во УГТУ-УПИ, 2010. 542 с.

22. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. Изд-во иностр. лит., 1962. 895 с.
23. Ченцов А. Г. К вопросу о корректном расширении некоторых неустойчивых задач управления с интегральными ограничениями // Изв. РАН. Сер. мат. 1999. Т. 63, № 3. С. 185–223.
24. Ченцов А. Г. О некоторых вопросах структуры ультрафильтров, связанных с расширениями абстрактных задач управления // Автоматика и телемеханика. 2013. № 12. С. 119–139.
25. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 458 с.
26. Меленцов А. А., Байдосов В. А., Змеев Г. М. Элементы теории меры и интеграла: учеб. пособие. Свердловск: Изд-во Урал. гос. ун-та, 1980. 100 с.
27. Ченцов А. Г. Множества притяжения в абстрактных задачах о достижимости: эквивалентные представления и основные свойства // Изв. вузов. Математика. 2013. № 11. С. 33–50.
28. Ченцов А. Г. О представлении максимина в игровой задаче с ограничениями асимптотического характера // Вестн. Удмурт. ун-та. 2010. № 3. С. 104–119. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
29. Бакланов А. П. Об одной игровой задаче асимптотически импульсного управления // Вестн. Удмурт. ун-та. 2011. № 3. С. 3–14. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
30. Бакланов А. П. К вопросу о представлении максимина в одной задаче импульсного управления // Дифференц. уравнения и процессы упр. 2012. № 3. С. 49–69.

Ченцов Александр Георгиевич

Поступила 01.03.2014

д-р физ.-мат. наук, профессор

чл.-корр. РАН

главный науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Бакланов Артем Павлович

канд. физ.-мат. наук

науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: artem.baklanov@gmail.com

УДК 517.977

МАТРИЧНЫЕ РАЗРЕШАЮЩИЕ ФУНКЦИИ В ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ¹

А. А. Чикрий, Г. Ц. Чикрий

Исследуются конфликтно-управляемые процессы достаточно общего вида с цилиндрическим терминальным множеством. Исходным объектом для исследования является представление решения динамической системы, включающее, в частности, процессы с дробными производными различных типов, импульсные процессы, системы интегральных, интегро-дифференциальных, дифференциально-разностных уравнений. В качестве математической основы используются идеи метода разрешающих функций. В то время как скалярные разрешающие функции осуществляли лишь притяжение множеств к началу координат, введенные в данной работе матричные функции допускают также поворот на любой угол, что существенно расширяет возможности метода. Получены достаточные условия завершения игры за некоторое гарантированное время в классе квази- и стробоскопических стратегий.

Ключевые слова: многозначное отображение, конфликтно-управляемый процесс, условие Понтрягина, измеримый выбор, экстремальный селектор, H -выпуклое множество.

A. A. Chikrii, G. Ts. Chikrii. Matrix resolving functions in game dynamic problems.

The paper concerns conflict-controlled processes of general kind with cylindrical terminal set. Solutions of a dynamic system are presented in a general form, encompassing, in particular, processes with various-type fractional derivatives, impulse processes, and systems of integral, integro-differential and difference-differential equations. Ideas of the method of resolving functions are used as a basis for investigation. While scalar resolving functions execute attraction of sets to the origin, the matrix functions introduced in the paper also admit rotation through any angle, that essentially extends the scope of the method applications. Sufficient conditions for the game termination in a guaranteed time in the class of quasi- and stroboscopic strategies are developed.

Keywords: set-valued mapping, conflict-controlled process, Pontryagin's condition, measurable choice, extremal selection, H -convex set.

Введение

В период бурного развития теории управления движением во второй половине двадцатого столетия возникло ряд коллективов, активно работавших в этой области. Одним из них была группа ученых из свердловского Института математики и механики, которую возглавлял Николай Николаевич Красовский, создавший в итоге крупнейшую в мире научную школу в области математической теории управления и теории дифференциальных игр. Усилиями Н. Н. Красовского и его учеников были созданы фундаментальные методы исследования управляемых и конфликтно-управляемых процессов различной природы [1–22].

Сегодня позиционная формализация дифференциальных игр, теоремы об альтернативе, процедура управления с поводырем, условие седловой точки в маленькой игре, стабильные мосты, правило экстремального прицеливания — на вооружении ученых всего мира и активно используются специалистами.

Последователи Н. Н. Красовского, работая в различных точках земного шара, развивают и продвигают его идеи, реализуя их на практике в системах управления движением.

В данной работе изучаются проблемы, примыкающие к исследованиям уральской научной школы Н. Н. Красовского, а также московской научной школы Л. С. Понтрягина [23–25]. Они касаются метода разрешающих функций [25–28] и базируются на понятии обратных функционалов Минковского.

¹Работа выполнена при поддержке гранта ГФФИ Украины (проект Ф 53.1/006).

Рассматриваемые ранее [27] скалярные разрешающие функции, содержательно означающие выигрыш первого игрока в текущий момент, осуществляют притяжение телесной части терминального множества к пересечению с образами некоторого многозначного отображения, связанного с игрой. Это притяжение происходит лишь в конусе, натянутом на упомянутое множество. Последнее обстоятельство ограничивает возможности для маневра первому игроку. По этой причине в данной работе вместо скалярной рассматривается матричная разрешающая функция диагонального вида с, вообще говоря, различными собственными числами. Тем самым воздействие матрицы на множество по разным направлениям может быть различным. Это дает дополнительные возможности в плане завершения игры.

1. Описание схемы метода

Рассмотрим конфликтно-управляемый процесс в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$,

$$z(t) = g(t) + \int_0^t \Omega(t, \tau) \varphi(u(\tau), v(\tau)) d\tau, \quad t \geq 0. \quad (1.1)$$

Вектор-функция $g(t)$, $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_+ = \{t: t \geq 0\}$, измерима по Лебегу и почти везде ограничена, матричная функция $\Omega(t, \tau)$ определена в треугольнике

$$\Delta = \{(t, \tau): t \geq \tau \geq 0\},$$

она измерима по t и суммируема по τ для каждого $t \in \mathbb{R}_+$. Блок управления задается функцией $\varphi(u, v)$, $\varphi: U \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$, которая является непрерывной по совокупности переменных на прямом произведении непустых компактов U и V , $U \in K(\mathbb{R}^m)$, $V \in K(\mathbb{R}^l)$, m, l — натуральные числа.

Допустимые управления игроков $u(\tau)$, $u: \mathbb{R}_+ \rightarrow U$, и $v(\tau)$, $v: \mathbb{R}_+ \rightarrow V$, — измеримые функции времени.

Задано терминальное множество M^* цилиндрического вида

$$M^* = M_0 + M, \quad (1.2)$$

где M_0 — линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$, а M — компакт из ортогонального дополнения L к M_0 в $\mathbb{R}^n$, $M \in K(L)$.

Первый игрок (u) стремится вывести траекторию процесса (1.1) на терминальное множество за кратчайшее время, а второй (v) — максимально оттянуть этот момент или вообще избежать встречи траектории с множеством.

Приняв сторону первого игрока, установим достаточные условия для обеспечения ему определенного гарантированного результата. При этом будем считать, что если игра (1.1), (1.2) происходит на интервале $[0, T]$, то управление первого игрока в текущий момент t выбираем на основе информации о $g(T)$ и предыстории $v_t(\cdot)$, $v_t(\cdot) = \{v(s): s \in [0, t]\}$, в виде измеримой функции

$$u(t) = u(g(T), v_t(\cdot)), \quad u(t) \in U, \quad t \in [0, T] \quad (1.3)$$

или в виде контруправления

$$u(t) = u(g(T), v(t)), \quad t \in [0, T], \quad u(t) \in U,$$

предписанного стробоскопической стратегией [1; 2; 11]. Допустимыми управлениями второго игрока являются измеримые функции $v(t)$ со значениями из V .

Заметим, что представление решения динамической системы в виде (1.1) позволяет в единой схеме рассмотреть широкий круг функционально-дифференциальных систем в условиях конфликтного взаимодействия. Особенность представления (1.1) состоит в том, что данные

о начальном состоянии процесса и о блоке управления отделены и аддитивно входят в правую часть выражения (1.1). Такая ситуация имеет место, когда справедлива формула Коши, например, для квазилинейных процессов. При этом для систем интегральных, интегродифференциальных, дифференциально-разностных уравнений, импульсных систем, систем уравнений с дробными производными функция $g(t)$ и матричная функция $\Omega(t, \tau)$ в представлении (1.1) имеет конкретный вид и отражает соответствующий тип уравнения.

Обозначим через π ортопроектор, действующий из $\mathbb{R}^n$ в L . Положив

$$\varphi(U, v) = \{\varphi(u, v) : u \in U\},$$

рассмотрим многозначные отображения

$$W(t, \tau, v) = \pi \Omega(t, \tau) \varphi(U, v), W(t, \tau) = \bigcap_{v \in V} W(t, \tau, v)$$

на множествах $\Delta \times V$ и Δ соответственно.

У с л о в и е Понтрягина. Отображение $W(t, \tau)$ принимает непустые значения на множестве Δ и является замкнутозначным.

В силу свойств параметров конфликтно-управляемого процесса (1.1), (1.2) отображение $W(t, \tau, v)$ является измеримым по τ , $\tau \in [0, t]$, многозначным отображением. Тогда отображение $W(t, \tau)$ измеримо по τ , $\tau \in [0, t]$.

Из условия Понтрягина и теоремы измеримого выбора [29] вытекает, что при любом $t > 0$ существует хотя бы один измеримый по τ селектор $\gamma(t, \tau)$ такой, что $\gamma(t, \tau) \in W(t, \tau)$, $(t, \tau) \in \Delta$.

Обозначим

$$\Gamma_t = \{\gamma(t, \tau) : \gamma(t, \tau) \in W(t, \tau), \tau \in [0, t]\}, \quad \Gamma = \bigcup_{t \geq 0} \Gamma_t,$$

выберем некоторый измеримый по τ селектор $\gamma(t, \tau)$ из Γ_t и введем функцию

$$\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) = \pi g(t) + \int_0^t \gamma(t, \tau) d\tau.$$

В силу исходных предположений селектор $\gamma(t, \tau)$ является суммируемой по τ , $\tau \in [0, t]$, функцией при любом $t > 0$.

Обозначим $\nu = \dim L$ и рассмотрим произвольную квадратную диагональную матрицу A порядка ν

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_\nu \end{pmatrix} = \text{diag} \{ \alpha_1, \dots, \alpha_\nu \}, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, \nu, \quad (1.4)$$

которую называют *матрицей собственных значений* [30]. Учитывая диагональный вид матрицы A , ее можно отождествить с вектором $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\nu)$.

Введем многозначное отображение

$$\mathfrak{A}_\nu(t, \tau, v) = \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_\nu), \alpha_i \geq 0 : [W(t, \tau, v) - \gamma(t, \tau)] \cap A [M - \xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot))] \neq \emptyset \right\}, \quad (1.5)$$

$$\mathfrak{A}_\nu : \Delta \times V \rightarrow 2^{\mathbb{R}_+^\nu}, \quad \mathbb{R}_+^\nu = \underbrace{\mathbb{R}_+ \times \dots \times \mathbb{R}_+}_\nu.$$

Функцию $g(t)$ и выбранный селектор $\gamma(t, \cdot)$ считаем фиксированными. Поскольку выполнено условие Понтрягина, то в силу предположений о параметрах процесса (1.1), (1.2) отображение $\mathfrak{A}_\nu(t, \tau, v)$ является замкнутозначным [26; 29] и всегда содержит ν -мерный нуль, так как

$$0 \in W(t, \tau, v) - \gamma(t, \tau) \quad \forall (t, \tau) \in \Delta, \quad v \in V.$$

Матричная функция

$$A(t, \tau, v) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t, \tau, v) & & & 0 \\ & \alpha_2(t, \tau, v) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & \alpha_\nu(t, \tau, v) \end{pmatrix}, \quad \alpha_i: \Delta \times V \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

фигурирующая в пересечении из (1.5), зависит от (t, τ) , $(t, \tau) \in \Delta$, $v \in V$, и однозначно определяется своими диагональными элементами, которые образуют селектор $\alpha(t, \tau, v) = (\alpha_1(t, \tau, v), \dots, \alpha_\nu(t, \tau, v))$ многозначного отображения $\mathfrak{A}_\nu(t, \tau, v)$. С другой стороны, вектор-функция $\alpha(t, \tau, v)$ представляет собой набор из ν собственных чисел матрицы $A(t, \tau, v)$, определенных на множестве $\Delta \times V$.

Если в некоторый момент t имеем $\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) \in M$, то очевидно $\mathfrak{A}_\nu(t, \tau, v) = \underbrace{([0, +\infty) \times \dots \times [0, +\infty))}_\nu$ при любых $\tau \in [0, t]$, $v \in V$. Если же $\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) \notin M$, то отображение $\mathfrak{A}_\nu(t, \tau, v)$ компактозначно при компактных образах отображения $W(t, \tau, v)$ [26].

Образуем скалярную функцию

$$\tilde{\alpha}(t, \tau, v) = \sup_{\alpha(t, \tau, v) \in \mathfrak{A}_\nu(t, \tau, v)} \min_{i=1, \nu} \alpha_i(t, \tau, v), \quad \tilde{\alpha}: \Delta \times V \rightarrow \mathbb{R}_+. \quad (1.6)$$

В предположении, что точная верхняя грань достигается, обозначим

$$\mathfrak{M}(t, \tau, v) = \left\{ \alpha(t, \tau, v): \min_{i=1, \nu} \alpha_i(t, \tau, v) = \tilde{\alpha}(t, \tau, v) \right\}$$

маргинальное множество селекторов из отображения $\mathfrak{A}_\nu(t, \tau, v)$.

Из [26] следует, что при сделанных предположениях отображения $\mathfrak{A}_\nu(t, \tau, v)$ и $\mathfrak{M}(t, \tau, v)$ $L \times B$ -измеримы по совокупности (τ, v) , $\tau \in [0, t]$, $v \in V$, и замкнутозначны при любом t . Селекторы отображения $\mathfrak{M}(t, \tau, v)$ будем называть *экстремальными*. Среди них по теореме измеримого выбора [29] существует хотя бы один, являющийся $L \times B$ -измеримым по (τ, v) , $\tau \in [0, t]$, $v \in V$, при любом t . Зафиксируем его для дальнейшего и обозначим $\alpha^*(t, \tau, v)$, $\alpha^*: \Delta \times V \rightarrow \mathbb{R}_+^n$.

Рассмотрим множество

$$T_\nu(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \left\{ t \geq 0: \inf_{v(\cdot)} \int_0^t \tilde{\alpha}(t, \tau, v(\tau)) d\tau \geq 1 \right\}. \quad (1.7)$$

и функцию $t_\nu(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \inf T_\nu(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$. Точная нижняя грань интеграла берется по всем допустимым управлениям второго игрока. Заметим к тому же, что поскольку $\mathfrak{A}_\nu(t, \tau, v)$ — $L \times B$ -измеримое отображение по совокупности (τ, v) , то $L \times B$ -измеримой по (τ, v) будет и функция $\tilde{\alpha}(t, \tau, v)$, а следовательно, она будет суперпозиционно измеримой [26]. Поэтому интеграл в соотношении (1.7) имеет смысл.

Из предыдущего следует, что если $\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) \in M$, то $\tilde{\alpha}(t, \tau, v) = +\infty$ для $\tau \in [0, t]$, $v \in V$, и в этом случае значение интеграла в (1.7) естественно положить равным $+\infty$, а

соответствующее неравенство выполнено автоматически. В случае, когда неравенство в выражении (1.7) не выполняется для $t > 0$, полагаем

$$T_\nu(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \emptyset.$$

У с л о в и е 1. Если $T \in T_\nu(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) \neq \emptyset$, то для экстремального селектора $\alpha^*(T, \tau, v)$ его усеченные селекторы $\beta(T, \tau, v) = (\beta_1(T, \tau, v), \dots, \beta_\nu(T, \tau, v))$,

$$\beta_i(T, \tau, v) = \begin{cases} \alpha_i^*(T, \tau, v), & \tau \in [0, t_i], \\ 0, & \tau \in [t_i, T], \end{cases}$$

являются селекторами многозначного отображения $\mathfrak{A}_\nu(T, \tau, v)$, $\tau \in [0, T]$, $v \in V$, для любых $t_i \in [0, T]$, $i = 1, \dots, \nu$.

З а м е ч а н и е 1. Для $t_i = 0$ или $t_i = T$, $i = 1, \dots, \nu$, условие 1 выполняется автоматически в силу условия Понтрягина и построений. Следовательно, оно касается лишь внутренних точек отрезка $[0, T]$.

Обозначим через $x_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, $i = 1, \dots, \nu$, причем единица состоит на i -м месте, единичные собственные векторы диагональной матрицы A . Они образуют базис в пространстве L .

Положим

$$H = \{\pm x_i, i = 1, \dots, \nu\}$$

и будем говорить, что множество M , $M \subset L$, является H -выпуклым множеством, если

$$M = \bigcap_{x_i \in H} \{x \in L : (x, x_i) \leq W_M(x_i)\}$$

является пересечением 2ν полупространств, т.е. является параллелепипедом, где $W_M(x_i) = \sup_{x \in M} (x, x_i)$ — опорная функция множества M , которая, в частности, может принимать значения $\pm\infty$. Из выпуклого анализа известно, что если H — не конечное множество векторов, а единичная сфера в L , то H -выпуклость становится обычной выпуклостью.

У с л о в и е 2. Множество M является H -выпуклым.

Отметим отдельно, что если множество M H -выпукло, то его относительная внутренность в L непуста.

2. Достаточные условия завершения игры

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1.1), (1.2) выполнено условие Понтрягина, а также условия 1 и 2. Кроме того, для заданной функции $g(\cdot)$ и выбранного селектора $\gamma(\cdot, \cdot) \in \Gamma$ множество $T_\nu(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) \neq \emptyset$ и $T \in T_\nu(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$.

Тогда траектория процесса (1.1) может быть приведена на множество (1.2) в момент T с помощью управления вида (1.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v(\tau)$, $v: [0, T] \rightarrow V$, — произвольная измеримая функция. Исследуем сначала случай $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \in M$. Для этого рассмотрим $L \times B$ -измеримый экстремальный селектор $\alpha^*(T, \tau, v)$, $\tau \in [0, T]$, $v \in V$, многозначного отображения $\mathfrak{M}(T, \tau, v)$. Очевидно, для его скалярных компонент имеет место неравенство

$$\alpha_i^*(T, \tau, v) \geq \min_{i=1, \dots, \nu} \alpha_i^*(T, \tau, v) \quad \forall i = 1, \dots, \nu, \quad v \in V.$$

Поэтому из неравенства в соотношении (1.7) получим

$$\int_0^T \alpha_i^*(T, \tau, v(\tau)) d\tau \geq 1 \quad \forall i = 1, \dots, \nu, v(\cdot). \quad (2.1)$$

Введем набор контрольных функций [26]

$$h_i(t) = 1 - \int_0^t \alpha_i^*(T, \tau, v(\tau)) d\tau, \quad i = \overline{1, \nu}.$$

Все функции $\alpha_i^*(T, \tau, v)$, $i = \overline{1, \nu}$, $L \times B$ -измеримы по совокупности (τ, v) , а поэтому суперпозиционно измеримы. Функции $h_i(t)$, $i = \overline{1, \nu}$, абсолютно непрерывны, они не возрастают, так как $\alpha_i^*(T, \tau, v)$ неотрицательны. К тому же $h_i(0) = 1$. Но поскольку $h_i(T) \leq 0$ в силу неравенства (2.1), то существуют такие моменты t_i^* , $0 \leq t_i^* \leq T$, $i = 1, \dots, \nu$, что $h_i(t_i^*) = 0$, $i = \overline{1, \nu}$. Очевидно, что $t_i^* = t_i^*(v(\cdot))$.

Промежутки времени $[0, t_i^*]$ и $[t_i^*, T]$ в дальнейшем будем называть *активными* и *пассивными* соответственно.

Опишем способ управления первым игроком. Для этого введем усеченные функции

$$\beta_i(T, \tau, v) = \begin{cases} \alpha_i^*(T, \tau, v), & \tau \in [0, t_i^*), \\ 0, & \tau \in [t_i^*, T], \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu,$$

и рассмотрим компактозначное отображение

$$U(\tau, v) = \left\{ u \in U : \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u, v) - \gamma(T, \tau) \in B(T, \tau, v)[M - \xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))] \right\}, \quad (2.2)$$

$$\tau \in [0, T], \quad v \in V,$$

где матричная функция $B(T, \tau, v)$ имеет вид

$$B(t, \tau, v) = \begin{pmatrix} \beta_1(T, \tau, v) & & & 0 \\ & \beta_2(T, \tau, v) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & \beta_\nu(T, \tau, v) \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

причем ее диагональные элементы обладают свойством $\int_0^T \beta_i(T, \tau, v(\tau)) d\tau = 1$, $i = 1, \dots, \nu$.

В силу условия 1 вектор-функция $\beta(T, \tau, v) = (\beta_1(T, \tau, v), \dots, \beta_\nu(T, \tau, v))$ является $L \times B$ -измеримым селектором многозначного отображения $\mathfrak{A}_\nu(T, \tau, v)$, и поэтому отображение $U(\tau, v)$ имеет непустые образы и является $L \times B$ -измеримым [26]. По теореме измеримого выбора [29] в нем существует хотя бы один $L \times B$ -измеримый селектор $u(\tau, v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией.

Обозначим $u(\tau) = u(\tau, v(\tau))$ и положим управление первого игрока на интервале $[0, T]$ равным $u(\tau)$.

В случае $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \in M$ управление первого игрока выберем аналогично предыдущей ситуации с той лишь разницей, что матричную функцию $B(T, \tau, v)$ в соотношении (2.2) положим равной нуль-матрице порядка ν .

Далее покажем, что при выборе управлений первым игроком по указанным правилам траектория системы (1.1) будет приведена на терминальное множество в момент T при любых допустимых управлениях второго игрока.

Если $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \in M$, то из представления (1.1) имеем

$$\pi z(T) = \pi g(T) + \int_0^T \pi \Omega(T, \tau) \varphi(u(\tau), v(\tau)) d\tau. \quad (2.4)$$

Используя соотношения (2.2)–(2.4), получим включение

$$\pi z(T) \in \left(E - \int_0^T B(T, \tau, v(\tau)) d\tau \right) \xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) + \int_0^T B(T, \tau, v(\tau)) M d\tau. \quad (2.5)$$

Поскольку M является H -выпуклым множеством и, к тому же, $\int_0^T B(T, \tau, v(\tau)) d\tau = E$, E — единичная матрица, то отсюда следует, что

$$\int_0^T B(T, \tau, v(\tau)) M d\tau = M,$$

а значит, $\pi z(T) \in M$ и, следовательно, $z(T) \in M^*$.

Пусть $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \in M$. Тогда из включения (2.5) при $B(T, \tau, v(\tau))$ — нуль-матрице получим

$$\pi z(T) = \xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \in M.$$

З а м е ч а н и е 2. Если вместо условия 2 потребовать включение

$$\int_0^T B(T, \tau, v(\tau)) M d\tau \subset M \quad \forall v(\cdot), \quad (2.6)$$

где $B(T, \tau, v)$ задается выражением (2.3), то теорема 1 остается справедливой. При этом $M \in K(L)$ и, вообще говоря, не обязано быть H — выпуклым.

Включение (2.6), в частности, выполнено и переходит в поточечное равенство, если терминальное множество M^* является аффинным многообразием ($M = \{m\}$), а при $m = 0$ — линейным подпространством. Последняя ситуация чаще всего рассматривается в игровых задачах преследования-убегания и соответствует точному совпадению координат игроков. В частности, если $M^* = \{0\}$, то $M_0 = M = \{0\}$. Тогда $L = \mathbb{R}^n$, а π — оператор тождественного преобразования. Включение (2.6) выполнено автоматически.

З а м е ч а н и е 3. В дифференциальных играх представляет интерес задача об ε -захвате по геометрическим координатам. Она соответствует случаю, когда M является шаром радиуса ε . Для применения теоремы 1 к анализу игры достаточно использовать любой параллелепипед M_p , $M_p \subset M$, в качестве вспомогательного множества и приводить траекторию процесса на множество $M_0 + M_p$, автоматически решив при этом исходную задачу.

З а м е ч а н и е 4. Рассматриваемый в работах [26; 27] метод разрешающих функций (МРФ) является частным случаем предлагаемой схемы и соответствует случаю, когда матрица A в (1.4) является простой, т.е. $\alpha_1 = \dots = \alpha_\nu = \alpha$ и $A = \alpha E$. Содержательно МРФ на примере формулы (1.5), где $\alpha_1 = \dots = \alpha_\nu = \alpha$, означает, что множество $M - \xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot))$ притягивается к пересечению с множеством $W(t, \tau, v) - \gamma(t, \tau)$, находясь в конусе, натянутом на $M - \xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot))$. В случае же матрицы A с различными диагональными элементами в методике заложены более широкие возможности.

З а м е ч а н и е 5. Поскольку любая квадратная матрица может быть приведена преобразованием подобия к треугольному виду, диагональные элементы которого являются собственными числами исходной матрицы, а любая нормальная матрица ($AA^* = A^*A$) — к диагональному виду [30], то рассмотренная ситуация открывает путь для существенных обобщений

с использованием в (1.5) более сложных по структуре притягивающих матриц. Поскольку речь идет о вещественных матрицах, то, в частности, к диагональному виду могут быть приведены любые симметричные и ортогональные матрицы.

3. Завершение игры в классе контруправлений

Рассмотренная ранее схема сближения с диагональной матричной функцией $A(t, \tau, v)$ является обобщением основной схемы метода разрешающих функций [27]. При этом, как видно из доказательства теоремы 1, преследователь в момент t использует информацию о предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающего, что предписывается квазистратегией.

Эта информация необходима для определения моментов переключения t_i^* , $i = 1, \dots, \nu$, прерывающих накопление функций $\alpha_i^*(t, \tau, v)$ и разделяющих, соответственно, активные и пассивные участки сближения. На этих же промежутках преследователь применяет контруправления, которые определяются стробоскопической стратегией. Далее определим условия на параметры процесса (1.1), (1.2), при которых сближение может быть реализовано в классе контруправлений без использования предыстории управления убегающего.

Условия формулируются для некоторого фиксированного момента времени T , $T \in T_\nu(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) \neq \emptyset$.

У с л о в и е 3. Если $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \in M$, а $\alpha^*(T, \tau, v)$ — экстремальный селектор отображения $\mathfrak{A}_\nu(T, \tau, v)$, то любая $L \times B$ -измеримая вектор-функция $\alpha(T, \tau, v)$, компоненты которой удовлетворяют условию

$$0 \leq \alpha_i(T, \tau, v) \leq \alpha_i^*(T, \tau, v), \quad \tau \in [0, T], \quad v \in V, \quad i = 1, \dots, \nu,$$

является селектором многозначного отображения $\mathfrak{A}_\nu(T, \tau, v)$.

Нетрудно видеть, что условие 3 является существенно более жестким предположением, чем условие 1. Оно есть аналог условия выпуклозначности в методе разрешающих функций [26].

У с л о в и е 4. При $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \in M$ функция $\inf_{v \in V} \tilde{\alpha}(T, \tau, v)$ измерима по $\tau \in [0, T]$ и справедливо равенство

$$\inf_{v(\cdot)} \int_0^T \tilde{\alpha}(T, \tau, v(\tau)) d\tau = \int_0^T \inf_{v \in V} \tilde{\alpha}(T, \tau, v) d\tau.$$

Теорема 2. Пусть для игровой задачи сближения (1.1), (1.2) выполнено условие Понтрягина и множество M является выпуклым, причем для заданной функции $g(\cdot)$ и селектора $\gamma(\cdot, \cdot) \in \Gamma$ существует число $T > 0$, $T \in T_\nu(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) \neq \emptyset$ такое, что выполнены условия 3 и 4.

Тогда траектория процесса (1.1) может быть приведена на множество (1.2) в момент T с помощью некоторого контруправления.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \in M$. С учетом условия 4 обозначим

$$\alpha(T) = \int_0^T \alpha_*(T, \tau) d\tau, \quad \alpha_*(T, \tau) = \inf_{v \in V} \tilde{\alpha}(T, \tau, v), \quad \tilde{\alpha}(T, \tau, v) = \sup_{\alpha(T, \tau, v) \in \mathfrak{A}_\nu(T, \tau, v)} \min_{i=1, \dots, \nu} \alpha_i(T, \tau, v)$$

и положим $\bar{\alpha}(T, \tau) = 1/\alpha(T) \alpha_*(T, \tau)$.

Поскольку $\alpha(T) \geq 1$ по определению, а

$$\bar{\alpha}(T, \tau) \leq \alpha_*(T, \tau) \leq \alpha_i^*(T, \tau, v) \quad \forall v \in V, \quad i = 1, \dots, \nu,$$

$\alpha_i^*(T, \tau, v)$ — координаты экстремального селектора $\alpha^*(T, \tau, v)$, то в силу условия 3 вектор-функция $\alpha_0(T, \tau) = \underbrace{(\bar{\alpha}(T, \tau), \dots, \bar{\alpha}(T, \tau))}_{\nu}$ является селектором многозначного отображения

$\mathfrak{A}_\nu(T, \tau, v)$ при любом $v \in V$. Введем многозначное отображение

$$U^*(\tau, v) = \left\{ u \in U : \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u, v) - \gamma(T, \tau) \in A(T, \tau)[M - \xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))] \right\}, \quad (3.1)$$

$$\text{где } A(T, \tau) = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}(T, \tau) & & & 0 \\ & \bar{\alpha}(T, \tau) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & \bar{\alpha}(T, \tau) \end{pmatrix} = \bar{\alpha}(T, \tau)E.$$

Так как $\alpha_0(T, \tau) \in \mathfrak{A}_\nu(T, \tau, v)$, $v \in V$, $\tau \in [0, T]$, то $U^*(\tau, v)$ принимает непустые значения. Оно к тому же замкнутозначно и $L \times B$ -измеримо по совокупности (τ, v) [26]. Следовательно, по теореме об измеримом выборе в нем существует $L \times B$ -измеримый селектор $u^*(\tau, v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией.

Положим управление преследователя равным $u^*(\tau) = u^*(\tau, v(\tau))$, $\tau \in [0, T]$, где $v(\tau)$, $\tau \in [0, T]$, — произвольное допустимое управление убегающего.

В случае $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \in M$ выберем управление первого игрока на промежутке $[0, T]$ в виде $u_0^*(\tau) = u_0^*(\tau, v(\tau))$, где $u_0^*(\tau, v)$ — некоторый измеримый селектор отображения $U^*(\tau, v)$ с нулевой матричной функцией $A(T, \tau)$.

Исследуем поведение траектории системы (1.1) при указанных правилах выбора управления первого игрока. Если $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \notin M$, то из равенства (2.4), учитывая (3.1), получим включение

$$\pi z(T) \in \left[1 - \int_0^T \bar{\alpha}(T, \tau) d\tau \right] \xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) + \int_0^T \bar{\alpha}(T, \tau) M d\tau. \quad (3.2)$$

Так как $M \in \text{co}K(L)$, а $\bar{\alpha}(T, \tau)$, $\tau \in [0, T]$, — неотрицательная функция и $\int_0^T \bar{\alpha}(T, \tau) d\tau = 1$, то $\int_0^T \bar{\alpha}(T, \tau) M d\tau = M$ и, следовательно, $\pi z(T) \in M$.

В случае $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \in M$ включение $\pi z(T) \in M$ автоматически следует из соотношения (3.2).

С л е д с т в и е 1. В условиях теоремы 2 метод может быть реализован с помощью скалярной разрешающей функции. Более того, одним из экстремальных селекторов является функция, не зависящая от v .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. Красовский Н.Н. Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968. 476 с.
4. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 516 с.
5. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. Control under lack of information. Boston: Birkhauser, 1995. 322 p.
6. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
7. Красовский Н.Н., Лукоянов Н.Ю. Уравнения типа Гамильтона — Якоби в наследственных системах: минимаксные решения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2000. Т. 6, № 1–2. С. 110–130.

8. **Osipov Yu.S., Kryazhinskii A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Basel: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
9. **Осипов Ю.С., Кряжковский А.В., Максимов В.И.** Методы динамического восстановления входов управляемых систем / Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2011. 292 с.
10. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 456 с.
11. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
12. **Ченцов А.Г.** Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. Ижевск.: НИИ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2008. 240 с.
13. **Субботин А.И.** Обобщенные решения управлений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации / Ин-т компьютерных исследований. Ижевск, 2003. 336 с.
14. **Subbotina N.N.** The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equation and its applications in dynamical optimization // J. Math. Sci. (N. Y.) 2006. Vol. 135, no. 3. P. 2955–3091.
15. **Тарасьев А.Н., Ушаков В. Н.** О построении стабильных мостов в минимаксной игре сближения–уклонения. Свердловск, 1983. Деп. в ВИНТИ № 2454-83. 61 с.
16. **Завалищин С.Г., Сесекин А.Н.** Импульсные процессы. Модели и приложения. М.: Наука, 1991. 256 с.
17. **Третьяков В.Е.** К теории стохастических игр // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269, № 5. С. 1049–1053.
18. **Батухтин В.Д.** Об одной игровой задаче наведения с неполной информацией // Прикл. математика и механика, 1980. Т. 44, № 4. С. 595–601.
19. **Kumkov S.I., Patsko V.S.** Control of informational sets in a pursuit problem // Annals of the international society of dynamic games. New trends in dynamic games and applications. Boston: Birkhauser, 1995. P. 191–206. (Ann. Internat. Soc. Dynam. Games, vol. 3).
20. **Гусев М.И.** Внешние оценки множеств достижимости нелинейных управляемых систем // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 39–51.
21. **Клейменов А.Ф.** Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург: Наука, 1993. 185 с.
22. **Куржанский А.Б., Мельников Н.Б.** О задаче синтеза управлений: альтернированный интеграл Понтрягина и уравнение Гамильтона — Якоби // Мат. сб. 2000. Vol. 191, № 6. С. 69–100.
23. **Понтрягин Л.С.** Избранные научные труды. М.: Наука, 1988. Т. 2. 576 с.
24. **Никольский М.С.** Первый прямой метод Л. С. Понтрягина в дифференциальных играх. М.: Изд-во МГУ, 1984. 65 с.
25. **Григоренко Н.Л.** Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1980. 198 с.
26. **Чикрий А.А.** Об одном аналитическом методе в динамических играх сближения // Тр. МИАН, 2010. Vol. 271. С. 76–92.
27. **Chikrii A.A.** Conflict controlled processes. Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. 424 p.
28. **Благодатских А.И., Петров Н.Н.** Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во “Удмуртский университет”, 2009. 266 с.
29. **Aubin J.-P., Frankowska H.** Set-valued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. 461 p.
30. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.

Чикрий Аркадий Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. НАН Украины
зав. отделом

Институт кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины
e-mail:chikrii@gmail.com

Чикрий Грета Цолаковна
канд. физ.-мат. наук
старший научный сотрудник

Институт кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины
e-mail:g.chikrii@gmail.com

Поступила 04.03.2014

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20

№ 3

2014

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского

Уральского отделения Российской академии наук

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134-4889

Редактор Е. Е. Понизовкина

TeX-редакторы Г. Ф. Корнилова, Н. Н. Моргунова

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 21.08.14. Формат $60 \times 84^{1/8}$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 39, 1. Уч.-изд. л. 32,5 Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru
<http://journal.imm.uran.ru>

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 17, офис 226