РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 17, № 3 2011

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

том 17 № 3 2011

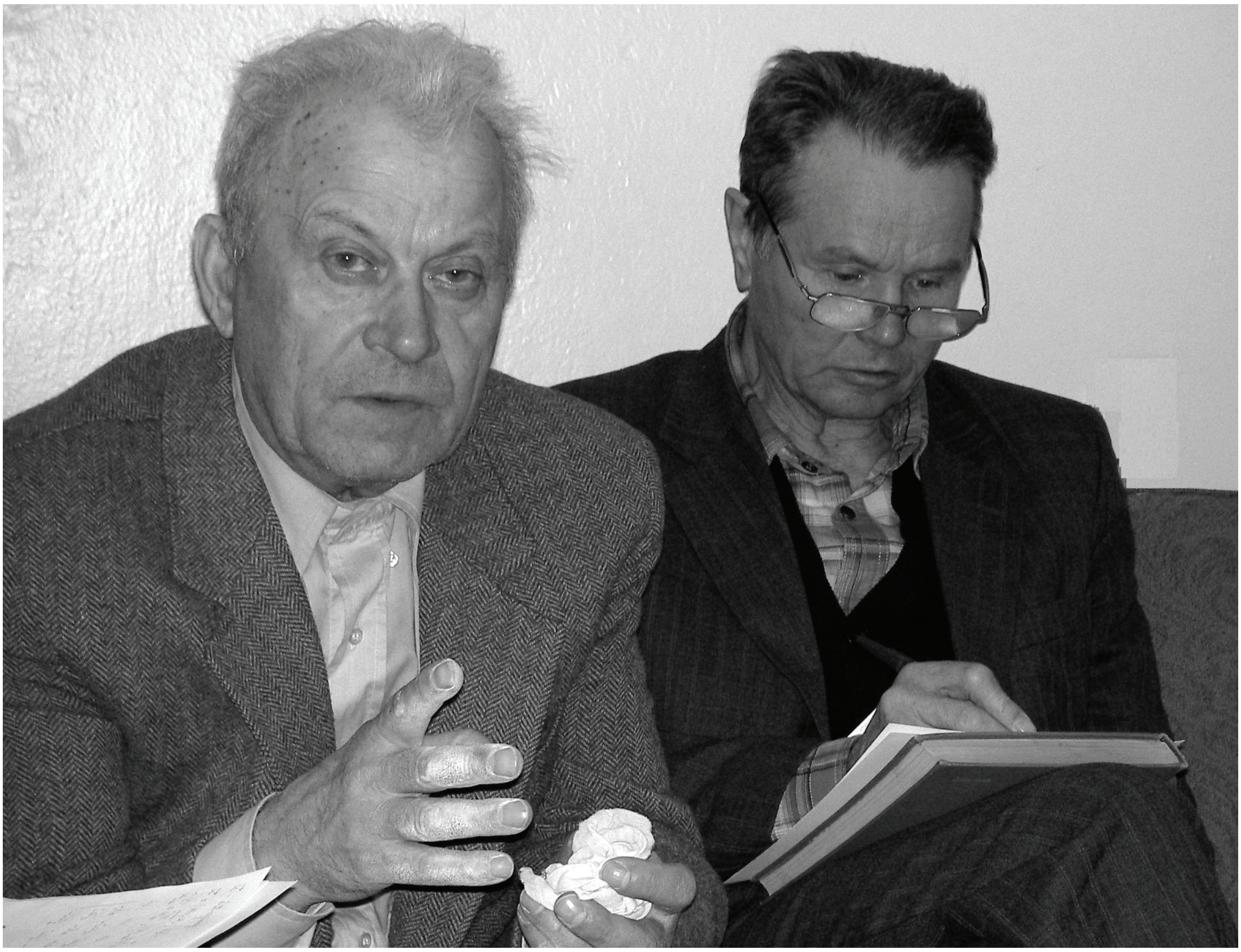
ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 17, № 3. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011. 326 с.

ISSN 0134–4889

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН
Том 17 № 3 2011

СОДЕРЖАНИЕ



Том 17 № 3 2011

СОВМЕСТНАЯ НАУЧНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ Ю. Н. СУББОТИНА И Н. И. ЧЕРНЫХ

Первая совместная работа Юрия Николаевича Субботина и Николая Ивановича Черных вышла в 1970 г. В этой работе был предложен метод аппроксимации функций соболевского класса W_p^r на отрезке полиномиальными сплайнами со свободными узлами и найдены точные по количеству узлов сплайна порядки оценок погрешности в метрике $L_q,\ 1 \le q \le \infty$, т. е. решена сложная нелинейная задача аппроксимации сплайнами с одновременным выбором оптимальной сетки узлов.

Следующие совместные результаты появились спустя 20 лет, в 90-е гг. прошлого века. Именно в это время к научным интересам Ю. Н. Субботина и Н. И. Черных добавилась теория всплесков — область, которая лежит на пересечении "чистой" математики, вычислительных методов и теории обработки информации. Как известно, под системами всплесков понимаются растяжения и сдвиги одной или нескольких функций, совокупность которых образует систему представления в каком-либо смысле, например, ортогональный базис в пространстве. Базисы всплесков обладают рядом преимуществ по сравнению с другими базисами, используемыми в качестве аппарата аппроксимации, благодаря свойствам локализации порождающих базисы функций, что дает возможность строить эффективные алгоритмы вычисления всплеск-разложений.

Юрий Николаевич и Николай Иванович детально изучили аппроксимативные свойства всплесков Мейера в пространствах Харди аналитических в круге $K = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| < 1\}$ функций; построили ортогональные базисы всплесков в пространствах Харди функций, аналитических в концентрическом кольце $R_\rho = \{z \in \mathbb{C}\colon\ 0 < \rho < |z| < 1\}$, и ортогональные базисы гармонических всплесков в круге K и кольце R_ρ; исследовали аппроксимативные свойства частичных сумм Фурье по построенным системам всплесков. Построенные базисы всплесков были использованы ими для получения нового представления решений краевых задач Дирихле и Пуассона с оператором Лапласа в круговом центрально-симметричном кольце. Для этих задач они нашли представления решений в виде рядов по гармоническим всплескам с явно выписанными коэффициентами. Полученные ряды оказались равномерно сходящимися во всей области и асимптотическими при стремлении к нулю внутреннего радиуса кольца. Найденная асимптотика для рассмотренных задач является более простой в сравнении с известными результатами, полученными ранее другими математиками для линейных эллиптических операторов общего вида.

Позднее Ю. Н. Субботин и Н. И. Черных построили новые аналитические и гармонические базисы всплесков в пространствах типа Харди для круга и произвольного кольца

$$R_\rho(z_0) = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| < 1,\ |z - z_0| > \rho\} \qquad (0 < \rho < 1 - |z_0|\,,\ |z_0| < 1)\,.$$

Построенные всплески дали им возможность решить соответствующие задачи Дирихле и Пуассона для неконцентрического кольца и получить асимптотические формулы решения относительно малого радиуса ρ внутреннего отверстия. Также ими был построен базис гармонических всплесков для пространств типа Харди гармонических функций в области между софокусными эллипсами и исследовано асимптотическое поведение решения задачи Дирихле и его производной при "стягивании" внутреннего эллипса к отрезку. Из найденной асимптотики явно видно, как растут производные решения у концов щели, что косвенным образом объясняет известный эффект распространения щели в напряженной пластине. На основе разработанной теории гармонических всплесков в круге K и в концентрическом кольце R_ρ, $\rho > 0$, были найдены новые решения краевых задач для бигармонического уравнения $\Delta^2 u = 0$ (Δ — оператор Лапласа) в виде разложений по базису гармонических всплесков. Оказалось, что найденные решения обладают рядом свойств, отличных от свойств классических решений.

На базе всплесков Мейера Ю. Н. Субботиным и Н. И. Черных были построены классы периодических всплесков и всплесков на всей оси, являющихся одновременно интерполяционными и ортогональными, и получены оценки погрешности аппроксимации функций и их производных такими всплесками и их производными.

Как правило, рассматриваемые разными авторами ортонормированные системы всплесков на оси и полуоси были ортогональны относительно обычного скалярного произведения в L_2. Однако для практических приложений полезно также уметь строить системы, ортонормированные относительно более общих скалярных произведений. Ю. Н. Субботин и Н. И. Черных построили для пространств Соболева $W_2^m[0, 2\pi) = \widetilde{W_2^m}$ (периодический случай) и $W_2^m(\mathbb{R}) = W_2^m$ базисы всплесков, которые являются ортогональными относительно скалярного произведения

$$\langle f, g\rangle = \int \sum_{\nu=0}^{m} p_\nu f^{(\nu)}(x)\overline{g^{(\nu)}}(x)dx, \quad \text{где} \quad p_\nu \geq 0 \quad \text{при} \quad 1 \leq \nu \leq m-1 \quad \text{и} \quad p_0, p_m > 0,$$

порождающего соответствующую норму (интеграл берется по отрезку $[0, 2\pi]$ для $\widetilde{W_2^m}$, а для W_2^m — по всей оси $\mathbb{R}$). При построении этих всплесков были применены $\mathcal{L}$-сплайны, определяемые линейными дифференциальными операторами. Для построенных базисов всплесков получены точные по порядку оценки приближения функций и их производных частными суммами соответствующих рядов Фурье и их производными в равномерной и различных интегральных метриках.

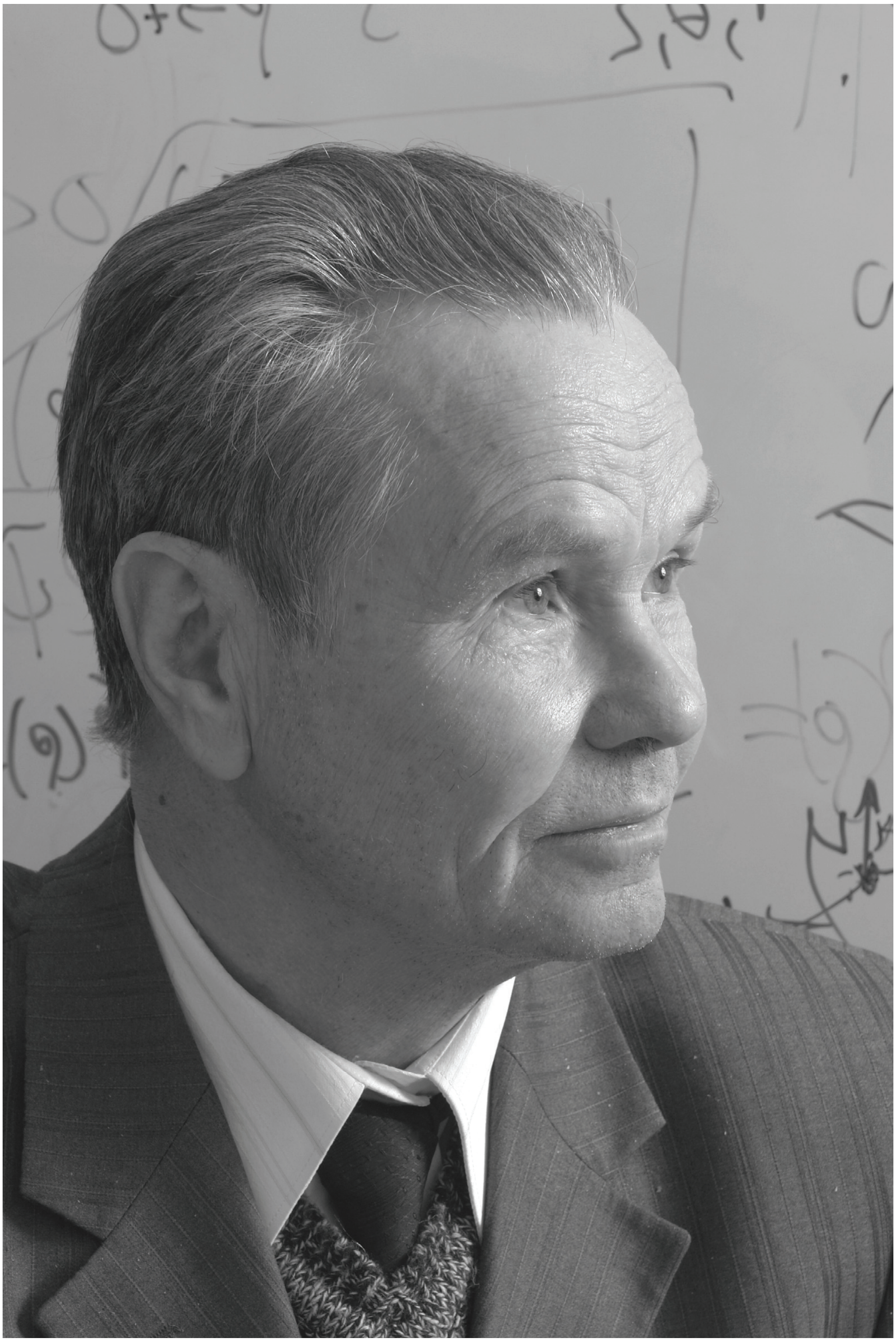
С 2006 г. Ю. Н. Субботин и Н. И. Черных совместно с В. П. Верещагиным занимаются построением классов векторных полей с различными вихревыми свойствами, в частности, продольно вихревых полей, линии которых совпадают с их вихревыми линиями, и поперечно вихревых, линии которых ортогональны вихревым линиям. Ими предложен метод построения векторных полей с определенными свойствами с помощью преобразований, изменяющих величину вектора поля в каждой точке, форму линий поля и их взаимное расположение. Одно из важных приложений этого метода связано с решением дифференциальных уравнений, поскольку взаимные свойства векторного поля и поля его ротора выражаются дифференциальными уравнениями в частных производных, в том числе нелинейными. Предложенный метод позволяет либо упростить интегрирование исходных уравнений, либо сразу непосредственно сконструировать подходящее поле и тем самым решить задачу. В частности, в рамках данного подхода ими разработан метод решения известной задачи И. С. Громеки, позволяющий избежать трудностей, связанных с нелинейностью уравнений системы.

В современной математике творческий тандем Субботин — Черных, активно работающий в течение нескольких десятилетий — явление поистине уникальное. Вдохновенный ежедневный труд двух признанных лидеров теории приближений — прекрасный пример для молодежи.

Сотрудники Института математики и механики УрО РАН, Уральского государственного университета им. А. М. Горького, коллеги, ученики и друзья от всей души поздравляют Юрия Николаевича Субботина и Николая Ивановича Черных со славными юбилеями и желают им крепкого здоровья и дальнейших успехов в научном творчестве!

СПИСОК ИЗБРАННЫХ СОВМЕСТНЫХ НАУЧНЫХ ТРУДОВ Ю. Н. СУББОТИНА И Н. И. ЧЕРНЫХ

1. Порядок наилучших сплайн-приближений некоторых классов функций // Мат. заметки. 1970. Т. 7, вып. 1. С. 31–42.
2. Базисы всплесков в пространствах аналитических функций // Тр. МИАН. 1997. Т. 219. С. 340–355.
3. Всплески в пространствах гармонических функций // Изв. РАН. Сер. мат. 2000. Т. 64, № 1. С. 145–174.
4. Всплески, ортонормированные относительно скалярного произведения в соболевском пространстве W_2^m периодических функций // Тр. Ин-та математики и механики. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2001. Т. 7, № 1. С. 217–230.
5. Гармонические всплески и асимптотика решения задачи Дирихле в круге с малым отверстием // Мат. моделирование. 2002. Т. 14, № 5. С. 17–30.
6. Неравенства для производных монотонных функций // Приближение функций. Теоретические и прикладные аспекты: сб. ст., посвящ. памяти проф. А. В. Ефимова. М.: МИЭТ, 2003. С. 199–211.
7. Approximating properties of the $\widetilde{W}_2^m$-orthogonal wavelets // East J. Approx. 2004. Vol. 10, no. 1–2. P. 219–230.
8. Конструкция всплесков в $W_2^m(R)$ и их аппроксимативные свойства в разных метриках // Докл. РАН. 2004. Т. 399, № 1. С. 23–25.
9. Периодические всплески, порожденные сдвигами одной функции // Проблемы электроэнергетики, машиностроения и образования: сб. науч. тр. Екатеринбург: Изд-во Рос. гос. проф.-пед. ун-та, 2005. С. 83–93.
10. Конструкция всплесков в $W_2^m(R)$ и их аппроксимативные свойства в разных метриках // Тр. Ин-та математики и механики. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2005. Т. 11, № 2. С. 131–167.
11. Гармонические всплески в краевых задачах // Теория управления. и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби: тр. Междунар. семинара. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2006. Т. 1. С. 38–47.
12. Всплески периодические, гармонические и аналитические в круге с нецентральным отверстием // Тр. Междунар. лет. мат. школы С. Б. Стечкина по теории функций. Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. С. 129–144.
13. К построению единичных продольно вихревых векторных полей с помощью гладких отображений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 82–91 (соавтор В. П. Верещагин).
14. Продольно вихревые единичные векторные поля из класса аксиально симметрических полей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 92–98 (соавтор В. П. Верещагин).
15. Интерполяционно-ортогональные системы всплесков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 153–161.
16. Преобразование, изменяющее геометрическое строение векторного поля // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 1. С. 111–121 (соавтор В. П. Верещагин).
17. Задача Дирихле в области со щелью // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 1. С. 208–221.
18. Класс всех гладких единичных аксиально симметричных векторных полей, продольно вихревых в R^3 // Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 4, ч. 1. С. 11–23 (соавтор В. П. Верещагин).
19. Решение интегрального уравнения первого рода типа свертки со специальными ядром и правой частью // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 74–78 (соавтор Н. В. Байдакова).
20. К построению потенциальных и поперечно вихревых векторных полей с линиями нулевой кривизны // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 117–127 (соавтор В. П. Верещагин).
21. Класс соленоидальных плосковинтовых векторных полей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 128–143 (соавтор В. П. Верещагин).
22. Гармонические всплески в краевых задачах для гармонических и бигармонических функций // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 281–296.



Том 17 № 3 2011

ЮРИЙ НИКОЛАЕВИЧ СУББОТИН

(*К семидесятипятилетию со дня рождения*)

18 июля 2011 г. исполнилось 75 лет члену-корреспонденту РАН Юрию Николаевичу Субботину, крупному специалисту по теории аппроксимации и вычислительной математике, общепризнанному авторитету в области теории сплайнов и их приложений.

Ю. Н. Субботин родился в г. Ивделе Свердловской области. Его мать Наталия Семеновна по профессии была медсестрой, отец Николай Михайлович работал на золотодобывающем предприятии. Когда началась Великая Отечественная война, он ушел на фронт. В то время Юрию, старшему из троих сыновей, было 5 лет. В 1944 г. отец Юрия Николаевича погиб в бою при освобождении г. Белая Церковь (Украина).

В 1954 г. Ю. Н. Субботин поступил на физико-математический факультет Уральского государственного университета им. А. М. Горького. После окончания университета с 1959 по 1961 г. он учился в аспирантуре на кафедре теории функций УрГУ под руководством профессора С. Б. Стечкина и с 1961 по 1964 г. работал там ассистентом. С 1964 г. Юрий Николаевич трудится в Институте математики и механики Уральского отделения РАН. В настоящее время он заведует отделом теории приближения функций.

Первые научные работы Юрия Николаевича были посвящены задачам экстремальной функциональной интерполяции с наименьшим значением норм производных функции на классах интерполируемых последовательностей. В 1960 г. приехавший в Свердловск профессор Н. Н. Яненко в беседе с Сергеем Борисовичем Стечкиным сформулировал вопрос, возникший в связи с применением разностных методов для решения краевых задач. Пусть заданы значения $\{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и n-е разности $\Delta^n y_k$ этой последовательности с единичным шагом ограничены по модулю. Существует ли функция, принимающая в точках равномерной сетки значения $\{y_k\}$, у которой n-я производная является ограниченной? Эту задачу С. Б. Стечкин и предложил аспиранту. Несколько позже на одном из семинаров Сергей Борисович сформулировал эту задачу в экстремальной постановке: найти величину

$$A_n = \sup\ \inf\ \|f^{(n)}(x)\|_{L_\infty(\mathbb{R})},$$

где inf берется по всем функциям f с локально абсолютно непрерывной производной порядка $n-1$, для которых $f(k) = y_k$, а sup — по всем вещественным последовательностям $y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, удовлетворяющим условию $|\Delta^n y_k| \le 1$.

Ю. Н. Субботин нашел точное решение задачи. Он доказал, что экстремальной последовательностью в этой задаче является та, для которой $\Delta^n y_k = (-1)^k,\ k \in \mathbb{Z}$, а экстремальной функцией — интерполяционный полиномиальный сплайн степени n минимального дефекта с узлами “склейки” в целых точках при нечетных n и в полуцелых при четных. Позже Юрий

Николаевич решил задачи экстремальной интерполяции для L_p-норм при $1 \le p \le \infty$, а также для интерполяции в среднем, в которой $\{y_k\}$ представляют собой вместо точных усредненные значения функций. Эти результаты составили основное содержание его кандидатской (1967) и докторской (1974) диссертаций и положили начало многочисленным исследованиям по экстремальной функциональной интерполяции, теории сплайнов и ее приложениям, проводимым как самим Ю. Н. Субботиным, так и его учениками и коллегами.

В ходе дальнейших исследований Ю.Н.Субботин подробно изучил аппроксимативные свойства сплайнов: были доказаны теоремы существования интерполяционных и интерполяционных в среднем сплайнов с учетом взаимного расположения узлов сплайна и точек интерполяции, получены оценки погрешности аппроксимации различных классов функций, а также найдены оценки поперечников. Понятие поперечника вошло в математику благодаря А. Н. Колмогорову, который еще в тридцатые годы прошлого века ввел конструктивные характеристики классов функций — величины наилучших приближений классов наилучшими n-мерными подпространствами, называемые ныне поперечниками по Колмогорову. Однако поперечники были в полной мере востребованы математиками лишь спустя почти 30 лет — в шестидесятые годы прошлого столетия в связи с интенсивным развитием вычислительных технологий. Используя сплайны и их обобщения, Ю. Н. Субботин получил оценки снизу для поперечников по Колмогорову нечетного порядка $d_{2n-1}(W_L^r, L)$ в интегральной метрике для класса W_L^r периодических функций f с абсолютно непрерывной производной $f^{(r-1)}$ и $\|f^{(r)}\|_L \le 1$. Эти оценки вместе с известным результатом С. М. Никольского о наилучшем приближении классов W_L^r тригонометрическими полиномами дали точное значение поперечника. В тот же период Ю. Н. Субботин нашел оценку снизу нечетного поперечника класса $W^r H^\omega$ периодических функций, модуль непрерывности r-й производной которых не превосходит заданного выпуклого модуля непрерывности $\omega(\delta)$. Отметим, что для классов W_C^r и приближений в равномерной метрике точные значения соответствующих поперечников были ранее найдены В. М. Тихомировым.

В конце прошлого — начале текущего столетий Юрий Николаевич обратился к исследованию относительных поперечников, введенных В. Н. Коноваловым, который добавил ограничения на норму промежуточных производных аппроксимантов в определение колмогоровских поперечников. В серии работ, написанных совместно с С. А. Теляковским, найдены точные значения относительных поперечников ряда классов функций, а также получены оценки сверху и снизу минимального значения $M = M(n) > 0$, при котором поперечники по Колмогорову $d_{2n}(W_C^r, C)$ класса функций W_C^r совпадают с относительными поперечниками $K_{2n}(W_C^r, MW_C^j, C)$ $(1 \le j < r)$. Установлено, что это минимальное значение $M(n)$ стремится к известной константе Фавара при стремлении n к бесконечности.

В 1972 г. вышла в свет первая монография по теории сплайнов на русском языке — книга Дж. Алберга, Э. Нильсона и Дж. Уолша “Теория сплайнов и ее приложения”. Перевод с английского был выполнен Ю. Н. Субботиным под редакцией С. Б. Стечкина, ими же написано дополнение к этой книге. После появления русского издания этой монографии термин “сплайн” прочно утвердился в математической литературе на русском языке.

Начиная с 60-х годов прошлого века сплайны завоевывают все большую популярность в вычислительной практике как средство приближения функций, кривых и поверхностей, а также в качестве аппарата сглаживания экспериментальных данных и численного решения дифференциальных и интегральных уравнений. Этому в значительной мере способствовало издание в 1976 г. книги С. Б. Стечкина и Ю. Н. Субботина “Сплайны в вычислительной математике”, основное внимание в которой сосредоточено на специфике сплайнов с точки зрения численного анализа.

В 1980-е годы Ю. Н. Субботин обращается к проблемам многомерной кусочно-полиномиальной аппроксимации и интерполяции, актуальным с точки зрения их использования в методе конечных элементов для решения краевых задач. Согласно известным результатам по методу конечных элементов скорость сходимости метода на некоторой области определяется ошибкой аппроксимации решения краевой задачи при переходе к подпространству конечных элементов. Однако на практике решить задачу нахождения этой ошибки часто оказывается невозможно, и для оценки сходимости метода используют не проекцию решения на подпространство конечных элементов, а интерполяционную кусочно-полиномиальную функцию, из-за чего приходится получать оценки локальной интерполяции на каждом отдельно взятом конечном элементе из триангуляции исходной области. При этом выбор интерполяционных условий определяет базисные функции, участвующие в построении подпространства конечных элементов, на котором идет поиск приближенного решения рассматриваемой краевой задачи. В качестве определяющих характеристик сходимости метода конечных элементов ранее были использованы диаметр треугольника и его наименьший угол (Дж. Синж, И. Бабушка, А. Азиз и др.). Юрию Николаевичу удалось получить оценки приближения функции на треугольниках интерполяционными многочленами Лагранжа произвольной степени, а также многочленами Эрмита и Биркгофа некоторых степеней в терминах диаметра треугольника и его наибольшего угла. Полученные оценки являются неулучшаемыми с точностью до постоянных множителей, не зависящих от интерполируемой функции и триангуляции области. Исследования в этом направлении продолжают ученики Юрия Николаевича Н. В. Байдакова и Н. В. Латыпова.

В последние годы к научным интересам Ю. Н. Субботина добавилась теория всплесков. В этой важной области современной математики Юрий Николаевич совместно с Николаем Ивановичем Черных получили целый ряд существенных результатов. Более подробно об этом сказано в статье “Совместная научная деятельность Ю. Н. Субботина и Н. И. Черных” данного номера журнала. Отметим, что в книге И. Мейера — первой монографии по теории всплесков — результаты Ю. Н. Субботина о базисах функциональных пространств, полученные в 70-е годы прошлого века, наряду с результатами других авторов цитируются как предварившие основные черты современной теории всплесков.

Много сил и времени посвящает Юрий Николаевич научно-организационной и преподавательской деятельности: это и руководство отделом теории приближения функций института, диссертационным советом по вещественному, комплексному и функциональному анализу, научным семинаром по теории приближений, рецензирование многочисленных статей для научных журналов, оппонирование диссертаций и чтение лекций. Начиная с 1967 г. с небольшими перерывами он работает на математико-механическом факультете Уральского государственного университета им. А. М. Горького (УрГУ). В настоящее время Юрий Николаевич — один из ведущих лекторов факультета. Он читал общий курс теории функций комплексного переменного, в настоящее время читает специальные курсы “Аппроксимационные методы математического моделирования”, “Приближение функций”, “Метод конечных и граничных элементов”, “Сплайны и всплески”. Лекции Ю. Н. Субботина отличаются высоким научным уровнем и новизной, сочетают фундаментальные классические разделы и новые вопросы математики, благодаря чему студенты получают представление о достижениях современной математики.

Юрий Николаевич подготовил 11 кандидатов наук, один из его учеников защитил докторскую диссертацию. Он входит в состав Объединенного ученого совета по математике, механике и информатике УрО РАН и нескольких диссертационных советов. Его отличают неизменная доброжелательность, скромность, широкая эрудиция и разносторонность интересов.

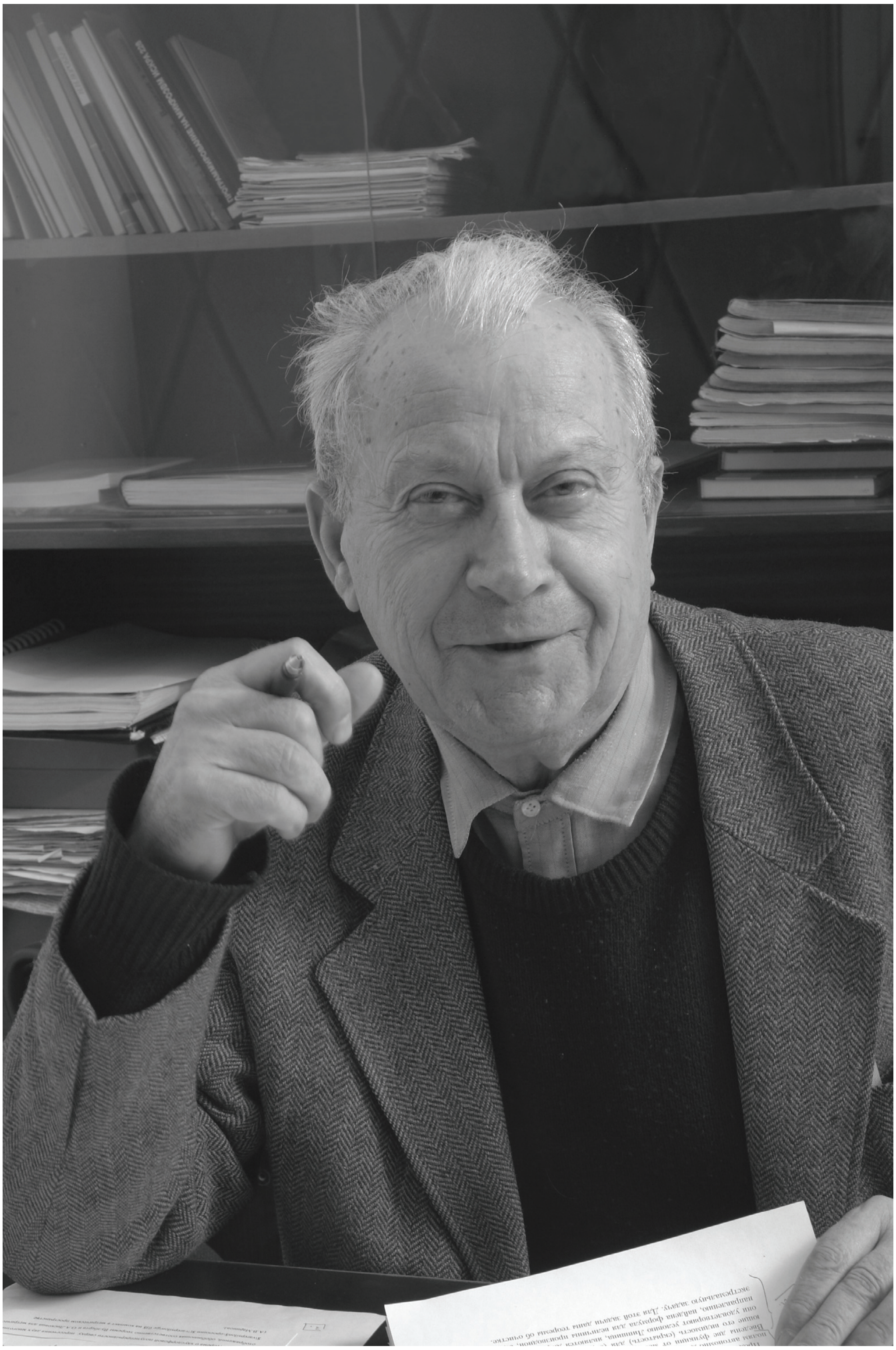
Коллективы Института математики и механики УрО РАН и Уральского государственного университета им. А. М. Горького, друзья, коллеги и ученики сердечно поздравляют Юрия Николаевича со славным юбилеем и желают ему дальнейших успехов в научной, педагогической и общественной деятельности, крепкого здоровья, большого личного!

СПИСОК ИЗБРАННЫХ НАУЧНЫХ ТРУДОВ Ю. Н. СУББОТИНА

1. О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Тр. МИАН. 1965. Т. 78. С. 24–42.
2. Функциональная интерполяция в среднем с наименьшей n-й производной // Тр. МИАН. 1967. Т. 88. С. 30–60.
3. О кусочно-полиномиальной интерполяции // Мат. заметки. 1967. Т. 1, вып. 3. С. 63–70.
4. Наилучшее приближение класса функций другим классом // Мат. заметки. 1967. Т. 2, вып. 5. С. 495–504.
5. Наилучшее приближение оператора дифференцирования в пространстве L_2 // Мат. заметки. 1968. Т. 3, вып. 2. С. 157–164 (соавтор Л. В. Тайков).
6. Поперечник класса W_L^r в $L(0, 2\pi)$ и приближение сплайн-функциями // Мат. заметки. 1970. Т. 7, вып. 1. С. 43–52.
7. Приближение функций класса $W^r H^\omega$ сплайнами порядка m // Докл. АН СССР. 1970. Т. 195, № 5. С. 1039–1041.
8. Приближение “сплайн”-функциями и оценки поперечников // Тр. МИАН. 1971. Т. 109. С. 35–60.
9. Связь сплайн-приближений с задачей приближения класса классом // Мат. заметки. 1971. Т. 9, вып. 5. С. 501–510.
10. Добавление к книге // Теория сплайнов и ее приложения / Альберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. М.: Мир, 1972. С. 270—309 (соавтор С. Б. Стечкин).
11. Приближение сплайнами и гладкие базисы в $C(0, 2\pi)$ // Мат. заметки. 1972. Т. 12, вып. 1. С. 43–51.
12. The application of splines in approximation theory // Linear operators and approximation: proc. conf., Oberwolfach, 1971. Basel: Birkhauser, 1972. (Intern. Ser. Numer. Math. Vol. 20) P. 405–418.
13. Экстремальные задачи функциональной интерполяции и интерполяционные в среднем сплайны // Тр. МИАН. 1975. Т. 138. С. 118–173.
14. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с. (соавтор С. Б. Стечкин).
15. Экстремальные и аппроксимативные свойства сплайнов // Теория приближения функций: тр. Междунар. конф. Калуга, 24–28 июля 1975 г. М.: Наука, 1977. С. 341–345.
16. Численные методы приближения функций. Свердловск: Средне-Урал. кн. изд-во, 1979. 120 с. (соавтор В. И. Бердышев).
17. Экстремальные задачи теории приближения функций при неполной информации // Тр. МИАН. 1980. Т. 145. С. 152–168.
18. Односторонние приближения сплайнами при дополнительных ограничениях, восстановление функций и производных // Мат. заметки. 1980. Т. 28, вып. 2. С. 223–238.
19. Константы Лебега некоторых интерполяционных m-мерных многочленов // Мат. сб. 1982. Т. 118, № 4. С. 557–566.
20. Нормы интерполяционных сплайнов нечетной степени в пространствах W_k^2 // Мат. заметки. 1988. Т. 44, вып. 6. С. 843–849.
21. Зависимость оценок многомерной кусочно-полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик триангуляции // Тр. МИАН. 1989. Т. 189. С. 117–137.
22. Погрешность аппроксимации интерполяционными многочленами малых степеней на n-симплексах // Мат. заметки. 1990. Т. 48, вып. 4. С. 88–99.
23. Наследование свойств монотонности и выпуклости при локальной аппроксимации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33, № 7. С. 996–1003.
24. Экстремальная функциональная интерполяция в среднем с наименьшим значением n-й производной при больших интервалах усреднения // Мат. заметки. 1996. Т. 59, вып. 1. С. 114–132.
25. Почти-ортогонализация в методе конечных элементов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1996. Т. 36, № 3. С. 101–108.
26. Some extremal problems of interpolation and interpolation in the mean // East J. Approx. 1996. Vol. 2, no. 2. P. 155–167.
27. Reconstruction of functions and derivatives // East J. Approx. 1997. Vol. 3, no. 4. P. 445–456.
28. Экстремальная в L_p интерполяция в среднем при пересекающихся интервалах усреднения // Изв. РАН. Сер. мат. 1997. Т. 61, № 1. С. 177–198.

29. Точные значения относительных поперечников классов дифференцируемых функций // Мат. заметки. 1999. Т. 65, вып. 6. С. 871–879 (соавтор С. А. Теляковский).
30. Асимптотика констант Лебега периодических интерполяционных сплайнов с равноотстоящими узлами // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 8. С. 131–140 (соавтор С. А. Теляковский).
31. Об относительных поперечниках классов дифференцируемых функций // Тр. МИАН. 2005. Т. 248. С. 250–261 (соавтор С. А. Теляковский).
32. Формосохраняющая экспоненциальная аппроксимация // Изв. вузов. Математика. 2009. № 11. С. 53–60.
33. К вопросу о равенстве колмогоровских и относительных поперечников классов дифференцируемых функций // Мат. заметки. 2009. Т. 86, вып. 3. С. 456–465 (соавтор С. А. Теляковский).

В статье “Совместная научная деятельность Ю. Н. Субботина и Н. И. Черных” данного номера журнала приведен список избранных совместных научных трудов.



Том 17 № 3 2011

НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧ ЧЕРНЫХ

(*К семидесятипятилетию со дня рождения*)

30 марта 2011 г. исполнилось 75 лет известному российскому специалисту по теории функций и теории приближений, доктору физ.-мат. наук, профессору, заслуженному деятелю науки Российской Федерации Николаю Ивановичу Черных.

Н. И. Черных родился в селе Козловка Новосергиевского района Оренбургской области в большой крестьянской семье. После окончания средней школы в 1953 г. он поступил в Саратовский университет (СГУ), где стал одним из лучших студентов и активным участником общественных дел. Окончив в 1958 г. университет, Н. И. Черных поступил в аспирантуру к Николаю Петровичу Купцову, тогда молодому 29-летнему ученому, впоследствии — известному специалисту по дифференциальным уравнениям и теории функций. Н. П. Купцов предложил аспиранту задачу о приближении функций полиномами со связями. Этой задаче посвящена первая научная публикация Николая Ивановича.

В конце пятидесятых — начале шестидесятых годов прошлого века в Свердловске под руководством Сергея Борисовича Стечкина создавалось новое научное подразделение — Свердловское отделение Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР (впоследствии СОМИ было преобразовано в Институт математики и механики). Сергей Борисович в поисках новых сотрудников ездил по городам Урала и Поволжья. В один из приездов Стечкина в Саратов Н. П. Купцов познакомил его с Николаем Ивановичем. В результате Н. И. Черных получил приглашение работать в СОМИ.

С 1962 г. вся жизнь Николая Ивановича неразрывно связана с СОМИ — ИММ. В институте он продолжил исследования, начатые в Саратове, а также взялся за новые задачи. В частности, он рассматривал восходящие к П. Л. Чебышеву и В. А. Маркову задачи об оценке нормы алгебраического (тригонометрического) полинома на отрезке через норму этого полинома на меньшем отрезке. Опубликованная по этой тематике работа стала основой для кандидатской диссертации “О некоторых экстремальных задачах для полиномов”, которую Н. И. Черных защитил в 1966 г. Научным руководителем диссертационной работы был С. Б. Стечкин.

В 1960-е годы в Свердловске сложился сильный коллектив активно работающих учеников С. Б. Стечкина. На семинаре под руководством Сергея Борисовича, в котором участвовали Л. В. Тайков, Н. И. Черных, Ю. Н. Субботин, В. И. Бердышев, В. Н. Габушин, В. В. Арестов и другие, слушались доклады о новых результатах, обсуждались задачи, находившиеся в процессе решения, новые задачи, а также нерешенные проблемы. Так, при обсуждении известного результата Н. П. Корнейчука о точной константе в неравенстве Джексона между наилучшим равномерным приближением 2π-периодической функции тригонометрическими многочленами и модулем непрерывности этой функции возник вопрос о точных константах в неравенстве

Джексона в пространствах $L^p_{2\pi}$ $(1 \le p < \infty)$, и в частности в $L^2_{2\pi}$. После того как выяснилось, что эта задача не решена и даже в случае $p = 2$ является нетривиальной, Н. И. Черных ею заинтересовался и в итоге в 1967 г. получил точное неравенство

$$E_{n-1}(f)_2 < \frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega\Big(f,\frac{\pi}{n}\Big)_2, \qquad f \not\equiv \mathrm{const}, \qquad f \in L^2_{2\pi}, \tag{1}$$

где $E_{n-1}(f)_2$ — наилучшее L^2-приближение функции f тригонометрическими полиномами порядка не выше $n-1$, а $\omega(f,\delta)_2$ — модуль непрерывности функции f в $L^2_{2\pi}$. При этом, как установил несколько позднее сам Николай Иванович, аргумент π/n модуля непрерывности оказался оптимальным в том смысле, что его нельзя заменить на меньший без увеличения константы перед модулем непрерывности в неравенстве (1). В 1967 г. вышла его работа, в которой была найдена точная константа в аналогичном неравенстве (неравенстве Джексона — Стечкина) в $L^2_{2\pi}$ для старших модулей непрерывности. Предложенный Н. И. Черных метод доказательства неравенства (1) оказался сравнительно простым, ясным и одновременно глубоким, что породило новое направление в теории приближений, привлекшее десятки исследователей из разных стран.

Случай $p \ne 2$ оказался гораздо более трудным. На протяжении многих лет Николай Иванович не оставлял попыток решить эту задачу и в 1992 г. опубликовал работу, в которой получено точное неравенство Джексона в $L^p_{2\pi}$ для $1 \le p < 2$. Отметим, что при $2 < p < \infty$ вопрос о точной константе в неравенстве Джексона и сейчас остается открытым.

Начиная с 1968 г. по настоящее время Н. И. Черных ведет большую научно-организационную работу. Тогда Николай Иванович возглавил отдел теории приближения функций. На протяжении всех лет руководства отделом основное внимание он уделял качеству научных результатов, в частности, внимательно вычитывал все работы, подготовленные сотрудниками отдела к печати.

В 1973 г. Николай Иванович стал заместителем директора института академика Н. Н. Красовского. С большой ответственностью Н. И. Черных подходил к исполнению обязанностей руководителя, глубоко вникал в суть большого количества вопросов институтской жизни, деятельно участвовал в решении различных проблем сотрудников института: организационных, творческих, бытовых, а иногда даже и семейных.

Несмотря на большую загруженность административной работой, Николаю Ивановичу удавалось найти время для занятий математикой. В этот период он увлекся исследованиями по теории сплайнов, получил результаты о приближении классов Соболева W^k_p дифференцируемых функций сплайнами с заданной плотностью распределения узлов, а также аналогичные результаты для весовых аналогов классов W^k_p. Эти результаты вместе с теоремами о точных константах в неравенстве Джексона легли в основу его докторской диссертации “Приближение полиномами и сплайнами”, защита которой состоялась в 1980 г.

Начиная с середины 1990-х годов Н. И. Черных совместно с Ю. Н. Субботиным занялись исследованиями в интенсивно развивающейся теории всплесков. Ими построены базисы всплесков, с помощью которых удобно представляются решения некоторых краевых задач. Более подробно об этом сказано в статье “Совместная научная деятельность Ю. Н. Субботина и Н. И. Черных” данного номера журнала.

На посту заместителя директора Николай Иванович проработал четырнадцать лет.

С 1987 г. Н. И. Черных возглавляет в институте отдел аппроксимации и приложений. Помимо фундаментальных исследований по теории функций и приближений, сотрудники отдела занимаются решением прикладных задач в области радиотехники. Под руководством Николая Ивановича разработаны быстродействующие методы синтеза и эффективные алгоритмы управления лучом бортовых антенн для современных высокоэффективных систем спутниковой связи космического базирования — зеркальных антенн со сложными облучателями в виде антенных решеток с амплитудно-фазовым, фазовым и двойным фазовым управлением (гибридных зеркальных антенн); зеркальных антенн с профилированной (гофрированной) поверхностью, облучаемых простыми облучателями. В 2009 г. материалы по оптимальному синтезу бортовых антенных систем были отмечены дипломом и серебряной медалью на 37-м международном салоне изобретений, новой техники и технологий в Женеве (Швейцария), дипломом 61-й международной выставки "Идеи, изобретения, инновации, IENA-2009", Нюрнберг (Германия).

В течение многих лет, начиная с периода учебы в аспирантуре Саратовского университета Николай Иванович ведет многогранную педагогическую деятельность. Более 40 лет Н. И. Черных работает на математико-механическом факультете Уральского государственного университета им. А. М. Горького (УрГУ). Он читал курсы теории функций комплексного и вещественного переменного, гармонического анализа. В последние годы работает с магистрантами-математиками: читал для них общий курс "Анализ (мера и интеграл Лебега, спектральная теория операторов)", в настоящее время читает специальный курс "Фракталы и всплески" по новому быстро развивающемуся разделу теории функций. Его лекции удачно сочетают фундаментальные классические разделы и современные актуальные вопросы математики и ее приложений. Н. И. Черных вносит значительный вклад в подготовку высококвалифицированных специалистов. Он постоянно руководит курсовыми, выпускными, дипломными работами студентов; под его руководством работают магистранты. Среди его учеников — четыре кандидата и один доктор наук.

Долгое время Николай Иванович преподавал в Российском государственном профессионально-педагогическом университете (РГППУ–СИПИ). С 1991 по 1997 г. он заведовал кафедрой высшей математики. Несмотря на сложное финансовое положение в стране в начале 1990-х на кафедре удалось сохранить атмосферу дружбы и творческого сотрудничества. В этот период три преподавателя кафедры высшей математики повысили свою квалификацию, закончив аспирантуру под руководством Н. И. Черных. Один из них успешно защитил кандидатскую диссертацию. Николай Иванович за время работы в РГППУ внес значительный вклад в повышение уровня учебно-методической деятельности. В последние годы группа под руководством Н. И. Черных успешно проводит научные исследования , благодаря чему кафедра высшей математики в числе немногих имеет грант РФФИ.

С начала 1970-х гг. и по настоящее время Николай Иванович активно участвует в организации и проведении Школы С. Б. Стечкина по теории функций, представляющей собой уникальное явление в научной жизни бывшего СССР и нынешней России.

Н. И. Черных является заместителем председателя диссертационного совета по вещественному, комплексному и функциональному анализу при ИММ и членом диссертационного совета по математическому моделированию в УрГУ. В процессе рассмотрения и принятия к защите диссертаций он проявляет искренний интерес к результатам, его отличают неформальный подход и доброжелательное отношение к диссертанту.

Коллективы Института математики и механики УрО РАН, Уральского государственного университета им. А. М. Горького и Российского государственного профессионально-педагогического университета, друзья и коллеги сердечно поздравляют Николая Ивановича Черных со славным юбилеем и желают ему дальнейших успехов в научной, педагогической, общественной деятельности, крепкого здоровья и удачной рыбалки, большого личного счастья!

СПИСОК ИЗБРАННЫХ НАУЧНЫХ ТРУДОВ Н. И. ЧЕРНЫХ

1. О приближении функций полиномами, коэффициенты которых связаны линейной зависимостью // Тр. 2-й науч. конф. мат. кафедр пед. ин-тов Поволжья. Куйбышев, 1962. Вып. 1. С. 113–117.
2. Экстремальные задачи для тригонометрических полиномов на неполном периоде // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19, вып. 2. С. 216–217.
3. О приближении функций полиномами со связями // Докл. АН СССР. 1965. Т. 162, № 2. С. 290–293.
4. О некоторых экстремальных задачах для полиномов // Тр. МИАН. 1965. Т. 78. С. 48–89.
5. О некоторых экстремальных задачах для полиномов: Автореферат дис. ... канд. физ.-мат. наук. Л., 1966. 13 с.
6. О неравенствах Джексона в L_2 // Тр. МИАН. 1967. Т. 88. С. 71–74.
7. О приближении функций полиномами с линейными связями // Тр. МИАН. 1967. Т. 88. С. 75–130.
8. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Мат. заметки. 1967. Т. 2, вып. 5. С. 513–522.
9. О поведении частичных сумм тригонометрических рядов Фурье // Успехи мат. наук. 1968. Т. 23, № 6. С. 3–50.
10. Наилучшие приближения сплайн-функциями на числовой оси // Congress Intern. Math. Nice, 1970. P. 112.
11. Приближения аналитических функций тригонометрическими полиномами на отрезке, меньшем периода // Тр. МИАН. 1971. Т. 109. С. 98–117.
12. Приближение сплайнами с заданной плотностью распределения узлов // Тр. МИАН. 1975. Т. 138. С. 174–197.
13. Приближение классов дифференцируемых функций сплайнами в весовых пространствах // Тр. МИАН. 1980. Т. 145. С. 169–247.
14. Приближение полиномами и сплайнами: Автореферат дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1980. 34 с.
15. On the L_2-approximation of periodic function by trigonometric polynomials // Approximation and function spaces: proc. intern. conf. (Gdansk, 1979). Amsterdam: North-Holland, 1981. P. 25–43 (соавтор В. В. Арестов).
16. Неравенства Джексона в $L_p(0,2\pi)$ $(1 \le p < 2)$ с точной константой // Тр. МИАН. 1992. Т. 198. С. 232–241.
17. Синтез диаграмм направленности ГЗА с двойным фазовым управлением // Век радио. Перспективные пути развития антенных систем космической связи, теории управления и распознавания образов: сб. науч. тр. Екатеринбург: УрО РАН, 1996. С. 13–28 (соавторы В. В. Арестов, В. С. Балаганский, Б. В. Семенов, Б. С. Соболев).
18. Фазовый синтез диаграмм направленности гибридных зеркальных антенн // Антенны. 1998. Вып. 2 (41). С. 14–22 (соавторы В. С. Балаганский, В. И. Гусевский, В. М. Плещев, Б. В. Семенов, Б. С. Соболев).
19. Неравенство Джексона — Стечкина в L^2 с тригонометрическим модулем непрерывности // Мат. заметки. 1999. Т. 65, вып. 6. С. 928–932 (соавторы А. Г. Бабенко, В. Т. Шевалдин).

В статье “Совместная научная деятельность Ю. Н. Субботина и Н. И. Черных” данного номера журнала приведен список избранных совместных научных трудов.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 3 2011

НЕСКОЛЬКО ЭТЮДОВ В СПЛАЙНОВОЙ ТОНАЛЬНОСТИ[1]

А. Ю. Шадрин

Посвящается Юрию Николаевичу Субботину
и Николаю Ивановичу Черных по случаю их 75-летия

1. Этюд № 1 (о правильном выборе соавторов)

Книга С. Б. Стечкина и Ю. Н. Субботина "Сплайны в вычислительной математике" была включена Стечкиным в качестве одного из отчетов в мой кандидатский минимум.

В начале 1980-х стандартный кандидатский минимум включал экзамены по трем дисциплинам: специальность, иностранный язык и марксистско-ленинская философия. На мехмате МГУ к этому добавляли (как мне кажется, на не вполне законных основаниях) внешний экзамен на другой кафедре и три так называемых отчета — по сути те же экзамены, но без оценки, а просто зачет-незачет. Стандартные дисциплины экзаменовались по обычной схеме, с утвержденными кафедрами вопросами и заранее назначенными местом и временем, в то время как выбор тематики для дополнительных экзаменов был прерогативой исключительно научного руководителя и принимались они весьма вольным образом.

Стечкин определил мне следующие темы (и экзаменаторов): внешний экзамен — "Субгармонические функции" (Е. П. Долженко), отчеты — "Оптимальное управление" (В. М. Тихомиров), "Ортогональные ряды" (П. Л.Ульянов) и уже упомянутые "Сплайны" (С. Б. Стечкин).

К Тихомирову я приходил на кафедру, получал задачу, уходил к себе в общежитие, расположенное тут же в главном здании МГУ, возвращался с решением через два часа или два дня, по обсуждении получал новую задачу, и все повторялось сначала — этот отчет я сдавал неделю или две. Стечкин принимал отчет у себя на квартире, а Долженко наоборот пришел ко мне в общежитие и на мой робкий вопрос: "С чего начнем?" ободряюще ответил: "Начнем с того, что вы поставите чайник", — принимал, впрочем, по всей строгости.

В сравнении с Долженко и Тихомировым Стечкин был достаточно добродушен, глубоко не копал, да и я его не шибко боялся. После получения зачета состоялось традиционное вечернее чаепитие с полагающимися разговорами на различные темы. Я все еще пребывал в мыслях об отчете, и вдруг мне показалось, что порядок фамилий Стечкин — Субботин на обложке книги не соответствует алфавиту. Мне стало интересно, как Стечкин объяснит такое не совсем этичное положение вещей, и я спросил:

— Почему, кстати, Стечкин — Субботин, а не в алфавитном порядке?

Стечкин возмутился:

— Как это не в алфавитном? Еще как в алфавитном!

И добавил с хитрецой в глазах:

— Я знаю, как правильно выбирать соавторов.

[1]В основу заметки положены некоторые мотивы из статьи: Ю. Н. Субботин. Вариации на тему сплайнов // Фундамент. и прикл. математика. 1997. Т. 3, вып. 4. С. 1043–1058.

Судя по большому числу публикаций в соавторстве Субботин — Черных, Юрий Николаевич тоже знает про правильный выбор, а вот Николай Иванович, похоже, что нет. Впрочем, если даже и знает, возможностей для правильного выбора у Черных практически нет.

Ну, разве что меня пригласить в соавторы.

2. Этюд № 2 (о контрпримерах в лингвистике)

В своих “Вариациях на тему сплайнов” Субботин, рассказывая о переводе книги “Теория сплайнов” Алберга — Нильсона — Уолша, приводит интересные подробности об обстоятельствах введения слова “сплайн” в русский язык. Мое внимание привлек следующий эпизод (с. 1047):

“Основное возражение редакции [против слова “сплайн”] состояло в том, что в русском языке нет ни одного слова, заканчивающегося на “-айн”. После такого ответа я привел контрпример “комбайн”. Последняя проблема была решена, и перевод [со “сплайновой” терминологией] появился.”

Контрпример Субботина вызвал у меня чувство некоторой неудовлетворенности. Примерно такое же чувство я испытываю, когда при рецензировании статьи натыкаюсь на результат, который очевидным образом можно улучшить или обобщить, не прилагая больших усилий.

Во-первых, список контрпримеров немедленно расширяется словом “дизайн”, бывшим вполне в употреблении в 1960-е годы, а то и много раньше (сейчас можно было бы добавить еще и “онлайн”).

Во-вторых, в русском языке сочетание “айн”, пусть и редкое на конце слова, вовсе не является чужеродным (как, например, “идж” или “эйв”). Мы имеем и существительные (тайна, чайная), и прилагательные (крайний, необычайный), и междометия (вира — майна).

Наконец, в-третьих, есть еще немалая группа заимствованных слов и фамилий, звучащих как “-айн” в оригинале, но в русском языке получивших окончание “-ейн”. В первую очередь вспоминается глинтвейн (glühwein), и не в последнюю — С. Н. Бернштейн.

3. Этюд № 3 (о нескольких частных случаях)

1980-е годы, один из очередных приездов Субботина в Москву. Он выступает на семинаре у Стечкина и в процессе доклада роняет фразу: “К сожалению, этот результат удалось доказать лишь в нескольких частных случаях”.

Стечкин, как обычно, сидящий за первой партой, чуть поворачивает голову в сторону аудитории и произносит: “Пояснение для несведущих: несколько частных случаев у Субботина — это k от 1 до 17”.

4. Этюд № 4 (о правилах взаимной вежливости)

До появления моего общего доказательства гипотеза де Бора (об ограниченности равномерной нормы оператора ортогонального сплайн-проектирования) была доказана для линейных, параболических и кубических сплайнов, а также для сплайнов самой малой гладкости (удовлетворяющих единственно условию непрерывности). Последнее было сделано в статье де Бора в “Math. Comp.” (1976, no. 30) и — в альтернативной формулировке и другим методом — в работе Зматракова — Субботина в “Трудах МИАН” (1983, т. 164).

При подготовке своей статьи, обсуждая с де Бором историю вопроса, я в шутливой форме попенял ему на то, что при ссылках на этот свой результат он никогда не упоминал Субботина как доказавшего тот же факт независимо.

Какое-то время спустя, видимо проведя соответствующие изыскания, де Бор ответил: “Спасибо за указание на статью Субботина, я уверяю вас, что ничего не знал о ее существовании”.

После чего добавил в свойственной ему манере: “Но в любом случае вы согласитесь, Алексей, что в отношении к этому результату мы с Субботиным были взаимно вежливы”.

Я согласился (ни в “Трудах МИАН” (1983), ни в своих более поздних “Вариациях” (1997) Субботин работу де Бора в “Math. Comp.” (1976) не упоминает).

5. Этюд № 5 (о революционной агитации и пропаганде)

Как известно, С. Б. Стечкин перевел “spline” как “сплайн”, а К. И. Осколков перевел “wavelet” как “всплеск”. Насколько мне нравится первое слово, настолько же не нравится второе. Возможно, что, как отмечал Субботин в своих “Вариациях” по поводу изначального неприятия сплайнов, все дело в привычке, нужно, чтобы слово не резало слух, и я вполне допускаю, что сам Субботин, активно работающий по всплескам вместе с Черных в последние два десятилетия, чувствует себя сейчас с этим словом совершенно комфортно. Но так было не всегда.

В начале 1990-х всплески стали такой же горячей темой на Западе, какой сплайны были в 1970-е. Поэтому Стечкин, остро чувствовавший новые веяния, на своей летней Школе под Магнитогорском в 1994 г. попросил Субботина сделать двухчасовой обзор по этой теме, с тем чтобы обратить всеобщее внимание на то, чем занимаются во всем мире.

Как я уже сказал, термин Осколкова мне не нравился, поэтому когда по ходу школы — за завтраком, обедом или ужином — разговор заходил о всплесках, я убеждал всех присутствовавших, что это неправильное слово. Вот Стечкин придумал правильно, а Осколков — нет, поэтому надо перепридумать на манер Стечкина, а значит, перевести “wavelets” как “вавелеты”. Не “вэйвлеты”, а именно “вавелеты”, потому что “вэйв” совершенно не русское сочетание, а “вавелеты” (ед. число — “вавелета”) — такие же родные, как котлеты, эполеты и пистолеты. И вместо не пойми какого — то ли всплещенного, то ли всплеснутого — анализа, будет у нас анализ “вавелетный”.

Доклад Субботина был ближе к концу школы, и ко времени своего выступления он успел прослушать мою “вавелетную” пропаганду не раз и не два. Свой доклад Субботин начал со стандартного разъяснения, что “wavelet” — это маленькая волна, в связи с чем Осколков и предложил термин “всплеск”, которым он (Субботин) и будет пользоваться. Но уже через 10–15 минут, когда речь зашла о “mother wavelet”, Субботин начал сбиваться с “мамы-всплеска” на “материнскую вавелету”, а спустя еще какое-то время, устав исправляться (“рассмотрим свойства вавелет, тьфу, т. е. всплесков”), махнул на все рукой и далее читал свой доклад с чисто “вавелетной” терминологией.

К сожалению, мой революционный прорыв дальше турбазы в окрестности Магнитогорска не пошел. Я уехал вскоре в Германию, потом в Англию, а Субботин вернулся в Екатеринбург и вместе с Черных начал публиковать статьи по базисам исключительно всплесков. Если вновь привлечь революционные аналогии, то у меня, как у Троцкого, получилось распропагандировать Петроградский (Магнитогорский) гарнизон, но вот, как Ленину, захватить вокзалы, почту, телеграф и Зимний дворец мне не удалось.

6. Этюд № 6 (о тонкостях дипломатического языка)

В сентябре 1988 года я послал в редакцию Мат. сборника свою статью по интерполяционным сплайнам на неравномерных сетках. По сути это была моя первая работа по сплайновой тематике.

Одним из важных мест в статье была лемма 4.4 об экспоненциальном убывании фундаментального сплайна, и в тексте, представленном мною в редакцию, доказательство этой леммы предварялось приблизительно такими словами: “Утверждение данной леммы можно найти в работе Субботина [9], но приведенное там доказательство содержит ошибку, поэтому мы приводим здесь свой вариант, основанный на сходной идее”.

Через какое-то время из редакции мне прислали отзывы на мою работу — весьма благожелательные, с небольшим количеством чисто косметических замечаний, попросили учесть пожелания рецензентов и известили о готовности опубликовать исправленный вариант. Я споро взялся за правку, но замечание одного из рецензентов заставило меня крепко задуматься. Оно звучало примерно так: “Относительно леммы 4.4: это верно, что доказательство в [9] содержит ошибку, но эта ошибка легко исправляется, и исправленный вариант приведен в кандидатской диссертации ученика Ю. Н. Субботина Р. Бакиева по L-сплайнам (1988)”.

Было очевидно, что подобное мог написать только сам Субботин, и тут возникла дилемма.

С одной стороны, ташкентская диссертация Бакиева была мне недоступна, и заменять свое доказательство ссылкой на нечто, чего я в глаза не видывал, я категорически не желал. Так что выходило, что все следует оставить так, как есть.

С другой стороны, чутье подсказывало мне, тогда 28-летнему, что для того, чтобы моя статья в престижнейшем Мат. сборнике как можно скорей превратилась из мечты в реальность, сообщать в этой статье об ошибках человека, который эту самую статью рецензирует, видимо, не следует.

Дилемму я разрешил так: доказательство свое я в тексте сохранил, но предпослал ему иную, дипломатически более выверенную, вводную часть: “Доказательство проведем по схеме Субботина [9], несколько видоизменив ее для наших целей”.

Статья появилась в журнале “Математический сборник” (1990. Т. 181, № 9).

7. Этюд № 7 (об искусстве делать комплименты)

Работа Субботина, с цитированием которой были связаны мои дипломатические упражнения, называется “Сплайн-аппроксимация”, она появилась в “Трудах конференции по теории функций и приближений” (Саратов, 1983).

Мне эта работа очень нравилась, и в своей статье об L_p-норме ортогонального сплайн-проектора, вышедшей в “J. Approx. Theory” (1994. Vol. 77), я решил сделать Юрию Николаевичу комплимент, соблюдая при этом аккуратность в вопросах приоритета. Я написал такой комментарий (§ 7):

“Свойство экспоненциального убывания L_2-нормы m-й производной фундаментального сплайна, заданного на произвольной сетке узлов, было открыто К. де Бором [7] и оказалось весьма полезным в задачах сплайн-интерполяции. Изящное доказательство этого факта в рамках вариационной теории сплайнов принадлежит Ю. Н. Субботину [10]”.

Скорей всего, Субботин моего “изящного” комплимента даже и не заметил, зато обиделся де Бор, бывший рецензентом статьи.

— Что плохого в моем доказательстве? — допытывался он впоследствии, — Оно что — громоздкое? путанное? неряшливое?

8. Этюд № 8 (о сжимающих предчувствиях при обработке изображений)

В своих “Вариациях на тему сплайнов” Субботин рассказывает о сомнениях в редакции “Мира” при выборе его как переводчика книги Алберга — Нильсона — Уолша. Он пишет (с. 1046):

“Задача [редакции] состояла в том, чтобы решить, кому доверить перевод книги. Человеку, знающему английский, но не знающему сплайнов, или наоборот. С. Б. Стечкин убедил редакцию выбрать второй вариант.”

Меня этот эпизод удивил. Я всегда полагал, что никакой альтернативы здесь нет и в помине — для перевода однозначно приглашается специалист, разбирающийся в предмете перевода, иначе появится “примитивная” вместо “первообразной” или “фракция” вместо “дроби” (я встречал “широты Колмогорова”, а Арнольд находил “трехизмерительные разновидности”).

Но если устроить игру в забавные переводы, то, взяв одну из новомодных тем, я бы предложил перевести “Compressive sensing for image processing” как “Сжимающие предчувствия при обработке изображений”.

Как ни странно, именно это название лучше всего подошло бы к описанию того состояния, в котором находились многие, если не все участники уже упомянутой школы Стечкина под Магнитогорском в ночь с 17 на 18 июля 1994 года. В ту ночь мы сгрудились вокруг старенького телевизора в пыльном зале дома культуры, чтобы посмотреть трансляцию финала чемпионата мира по футболу, в котором играли сборные Бразилии и Италии.

Качество сигнала было ужасным, картинка на экране не то что двоилась — она троилась, так что задача обработки изображения решалась каждым из присутствующих — параллельно и в режиме реального времени.

Сжимающие же предчувствия появились, когда после основного и дополнительного времени, после девяти уже пробитых пенальти и при счете 3:2 в пользу Бразилии итальянец Баджио направился в штрафную для выполнения последнего оставшегося удара. Мы замерли, да что мы — весь мир замер. Баджио пробил выше ворот.

Мы расходились глубокой ночью, с тем чтобы уже через несколько часов опять собраться за своими сплайнами, всплесками, поперечниками и модулями. Честно говоря, я не помню, были ли в ту ночь с нами Юрий Николаевич и Николай Иванович. Но — хотя бы для хорошей концовки — должны были быть.

Шадрин Алексей Юрьевич
DAMTP, University of Cambridge
e-mail: A.Shadrin@damtp.cam.ac.uk

Поступила 22.07.2011

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 3 2011

УДК 517.518

ON THE (BI)INFINITE CASE OF SHADRIN'S THEOREM CONCERNING THE L_∞-BOUNDEDNESS OF THE L_2-SPLINE PROJECTOR

Carl de Boor

Some loose ends in Shadrin's remarkable paper are tied up.

Keywords: Shadrin's theorem, L_2-spline projector.

Dedicated to Professor Yurii Nikolaevich Subbotin
on the occasion of his 75th birthday

Shadrin's theorem [6] settles a problem posed first in [1] in the following setting.

For $k \in \mathbb{N}$, let $t := (t_i : i \in \mathbb{Z})$ be nondecreasing with $t_i < t_{i+k}$, all i, and set

$$a := \inf_i t_i, \quad \sup_i t_i =: b.$$

For each i, let

$$N_{ik}(x) := (t_{i+k} - t_i)\Delta(t_i, \ldots, t_{i+k})(x - \cdot)_+^{k-1} = (\Delta(t_{i+1}, \ldots, t_{i+k}) - \Delta(t_i, \ldots, t_{i+k-1}))(x - \cdot)_+^{k-1}$$

be the **i-th L_∞-normalized B-spline of order k for the knot sequence t.** For an arbitrary coefficient sequence $c = (c_i)$, the biinfinite sum $\sum_i N_{ik} c_i$ makes sense pointwise, i.e.,

$$\sum_i N_{ik}\, c_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{N_{ik}(x) \neq 0} N_{ik}(x) c_i$$

is well-defined since the last sum is finite due to the fact that $\operatorname{supp} N_{ik}$ lies in the interval $[t_i \,.\,.\, t_{i+k}]$. Any such function $\sum_i N_{ik} c_i$ is called a **polynomial spline of order k with knot sequence t.** I'll denote the collection of all such functions by $\$_{kt}$.

In particular, with

$$\ell_\infty := \ell_\infty(\mathbb{Z}), \quad L_\infty := L_\infty(a \,.\,.\, b),$$

the map

$$\mathbf{N}_{kt} : \ell_\infty \to L_\infty : \mapsto \sum_i N_{ik}\, c_i$$

is well-known to be well-defined, of norm 1, and bounded below, hence boundedly invertible on its range

$$\$_{kt\infty} := \$_{kt} \cap L_\infty.$$

Now consider the linear map

$$\mathbf{M}_{kt}^{\mathrm{t}} : L_\infty \to \ell_\infty : f \mapsto \Big(\int M_{ik} f : i \in \mathbb{Z} \Big)$$

with

$$M_{ik} := \frac{k}{t_{i+k} - t_i} N_{ik}$$

the i**-th** L_1**-normalized B-spline of order** k **for the knot sequence** t, so called because

$$\int M_{ik} = \|M_{ik}\|_1 = 1,$$

hence $\|\mathbf{M}_{kt}^{\mathrm{t}}\| = 1$.

Now consider least-squares approximation to $g \in L_\infty$ from $\$_{kt\infty}$. To be sure, $g \in L_\infty$ need not have finite L_2-norm, hence it makes, offhand, no sense to talk about least-squares approximation to such g. But we can look for $f \in \$_{kt\infty}$ for which

$$\mathbf{M}_{kt}^{\mathrm{t}}(g - f) \;=\; 0,$$

a condition that characterizes f as the unique least-squares approximation to g from $\$_{kt\infty}$ for $g \in L_2(a\,..\,b)$. This raises the question whether the data map $\mathbf{M}_{kt}^{\mathrm{t}}$ is 1–1 on $\$_{kt\infty}$ which, in turn, raises the question whether the biinfinite matrix

$$A_{kt} := \mathbf{M}_{kt}^{\mathrm{t}}\mathbf{N}_{kt} = [M_{ik}\colon i \in \mathbb{Z}]^{\mathrm{t}}[N_{jk}\colon j \in \mathbb{Z}] = \Big(\int M_{ik}N_{jk}\colon i, j \in \mathbb{Z}\Big) \tag{1}$$

is invertible on ℓ_∞. If it is, then the linear map

$$P_{kt} := \mathbf{N}_{kt}(A_{kt})^{-1}\mathbf{M}_{kt}^{\mathrm{t}}$$

is a well-defined linear projector on L_∞ with range $\$_{kt\infty}$ and, for any $g \in L_\infty$, $P_{kt}g$ is the unique element f of $\$_{kt\infty}$ for which $g - f$ is **orthogonal to** $\$_{kt\infty}$ in the sense that $\mathbf{M}_{kt}^{\mathrm{t}}(g - f) = 0$. For this reason, I will call P_{kt} an L_2**-spline projector** and note that

$$\|P_{kt}\| \le \|\mathbf{N}_{kt}\|\,\|(A_{kt})^{-1}\|_\infty\,\|\mathbf{M}_{kt}^{\mathrm{t}}\| = \|(A_{kt})^{-1}\|_\infty,$$

hence the L_∞-boundedness of P_{kt} is assured once we know that A_{kt} is boundedly invertible as a map on ℓ_∞.

To be sure, while [1] starts in this general setting, it considers L_2-spline projectors only in the *finite-dimensional* setting in which t is a *finite* knot sequence and, correspondingly, the invertibility of the Gramian is a standard result, and conjectures that

$$\forall\{k \in \mathbb{N}\} \quad \sup_t \|(A_{kt})^{-1}\|_\infty < \infty, \tag{2}$$

with the supremum taken over all finite knot sequences t.

It is this conjecture that Shadrin settles in [6] in the sense that he proves the following

Shadrin's Theorem [6]. *For all $k \in \mathbb{N}$,*

$$s_k := \sup_t \|(A_{kt})^{-1}\|_\infty < \infty,$$

*with the supremum taken over all finite knot sequences t that are k-***complete***, meaning that the first and the last knot appear with maximal multiplicity k.*

Shadrin [6] also considers, in his Corollary II, the biinfinite case described above and deduces (2) for that case from the finite-dimensional case, using the observation that, therefore, all principal submatrices of A_{kt} are uniformly boundedly invertible, hence so must A_{kt} be, and with the same bound. It is the purpose of the present note to clarify this argument.

There are two points of concern.

(i) The bounded invertibility of A_{kt} is deduced from the uniformly bounded invertibility of its finite principal submatrices, but no reference is given for this (nontrivial) result.

(ii) Shadrin's Theorem is proved only for k-complete finite knot sequences hence says, offhand, nothing about finite principal submatrices of A_{kt} since there is no reason for any finite section

$(t_i, \ldots, t_{n+k})$ of t to be k-complete. This was completely overlooked by me twelve years ago and only recently realized by Shadrin while trying to make the point that his paper [6] covers the periodic case.

Point (i) is taken care of by the following proposition which, while not explicitly stated, is established in [2] during the proof of Theorem 4.1 there.

Proposition. *Let A be an ℓ_∞-bounded bi-infinite matrix that maps the closed subspace*

$$c_0 := \{a \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \lim_{|i| \to \infty} a_i = 0\}$$

of the $\|\cdot\|_\infty$-normed space $\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{Z})$ of bounded bi-infinite sequences into itself.

If for some r and for all sufficiently large integer intervals J, the submatrix

$$A_J := \big(A_{i,j} : i \in J, \quad j \in r + J\big) \in \mathbb{R}^{J \times (r+J)}$$

is invertible and

$$s := \limsup_{J \to \mathbb{Z}} \|(A_J)^{-1}\|_\infty < \infty,$$

then also A is boundedly invertible as a map on ℓ_∞; in fact, $\|A^{-1}\|_\infty = s$.

Settling Point (ii) was the start of the present note. The argument given here for it also provides a proof of the Proposition for a totally positive matrix A.

It is well-known that the Gramian A_{kt} is **totally positive** (or **tp**, for short), meaning that all its minors are nonnegative. A good up-to-date reference regarding total positivity is [5]. We need only one of the many properties of invertible totally positive matrices A of order n, namely that *their inverse is a* **checkerboard matrix**, meaning that,

$$(-1)^{i-j} A^{-1}(i,j) \geq 0, \quad i,j = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

This follows at once from Cramer's rule which gives

$$A^{-1}(i,j) = (-1)^{i-j} \det A(\backslash j, \backslash i) / \det A, \quad i,j = 1, \ldots, n.$$

Here, and in the following, it is convenient to denote the (i,j)-entry $A_{i,j}$ of the matrix A `MATLAB`-fashion by $A(i,j)$, and use the notation $A(\backslash j, \backslash i)$ for the matrix obtained from A by omitting the jth row and ith column.

The checkerboard nature of the inverse of a tp matrix implies the following remarkable property of tp matrices which was stated in [3] as a known fact, but without a reference and only a hint for how to prove it. Because of the importance of this property in the present context, I give a detailed and elementary proof.

Lemma [3]. *If $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is invertible and* tp*, then, for any integer interval $\mathbf{m} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, so is the principal submatrix $C := B(\mathbf{m}, \mathbf{m}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{m} \times \mathbf{m}}$ of B involving only the rows and columns of B with index $i \in \mathbf{m}$, and*

$$0 \leq (-1)^{i+j} C^{-1}(i,j) \leq (-1)^{i+j} B^{-1}(i,j), \quad i,j \in \mathbf{m}. \tag{4}$$

Proof. By the generalized Hadamard inequality for tp matrices (see, e.g., Theorem 1.21 of [5]),

$$\det B \leq \det C \det B(\backslash \mathbf{m}, \backslash \mathbf{m}),$$

with $B(\backslash \mathbf{m}, \backslash \mathbf{m})$ the principal submatrix of B complementary to C; hence the invertibility of B implies the invertibility of its principal submatrix C. The inequalities (4) follow by repeated application of the special case $\mathbf{m} = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ which in turn, by the checkerboard nature of the inverse of a tp matrix, follows from the formula

$$C^{-1} = B^{-1}(\mathbf{m}, \mathbf{m}) - \frac{B^{-1}(\mathbf{m}, n) B^{-1}(n, \mathbf{m})}{B^{-1}(n,n)}, \tag{5}$$

valid for that choice of $\mathbf{m}$. Finally, (5) for such $\mathbf{m}$ can be proved as follows. Since

$$\begin{bmatrix} \mathrm{id}_{\mathbf{m}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = BB^{-1} = \begin{bmatrix} C & B(\mathbf{m},n) \\ B(n,\mathbf{m}) & B(n,n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{-1}(\mathbf{m},\mathbf{m}) & B^{-1}(\mathbf{m},n) \\ B^{-1}(n,\mathbf{m}) & B^{-1}(n,n) \end{bmatrix},$$

therefore,

$$CB^{-1}(\mathbf{m},\mathbf{m}) = \mathrm{id}_{\mathbf{m}} - B(\mathbf{m},n)B^{-1}(n,\mathbf{m})$$

and

$$CB^{-1}(\mathbf{m},n) = -B(\mathbf{m},n)B^{-1}(n,n),$$

hence, with D the right side of (5),

$$\begin{aligned} CD &= C\big(B^{-1}(\mathbf{m},\mathbf{m}) - B^{-1}(\mathbf{m},n)B^{-1}(n,\mathbf{m})/B^{-1}(n,n)\big) \\ &= CB^{-1}(\mathbf{m},\mathbf{m}) - CB^{-1}(\mathbf{m},n)B^{-1}(n,\mathbf{m})/B^{-1}(n,n) \\ &= \mathrm{id}_{\mathbf{m}} - B(\mathbf{m},n)B^{-1}(n,\mathbf{m}) + B(\mathbf{m},n)B^{-1}(n,n)B^{-1}(n,\mathbf{m})/B^{-1}(n,n) = \mathrm{id}_{\mathbf{m}} \end{aligned}$$

which verifies (5) since it shows the right side of (5) to be a right inverse of C, hence necessarily its inverse since C is square. □

Corollary. *For all $k \in \mathbb{N}$, and all finite knot sequences t,*

$$\|(A_{kt})^{-1}\|_\infty \le s_k < \infty. \tag{6}$$

Proof. Any finite knot sequence t can be embedded in a k-complete knot sequence r (in many ways), and, for any such choice, $A_{kt} = A_{kr}(\mathbf{m},\mathbf{m})$ for some integer interval $\mathbf{m}$, hence

$$\|(A_{kt})^{-1}\|_\infty \le \|(A_{kr})^{-1}\|_\infty \le s_k,$$

by (4) and Shadrin's theorem. □

Such reasoning also obviates the discussion in [6, Sect. 1.5] of the case $N < 2k$ therein.

Note that Shadrin conjectures that

$$\forall\{k \in \mathbb{N}\} \quad \|P_{kt}\| \le 2k-1 \le \|(A_{kt})^{-1}\|_\infty\,.$$

We even have (6) for arbitrary infinite or biinfinite knot sequences t, as the following theorem, applied to A_{kt} in conjunction with the Corollary, implies.

Theorem. *Let $A \in \mathbb{R}^{I\times I}$ with I equal to $\mathbb{N}$ or $\mathbb{Z}$, and assume that A is tp, and* **banded** *in the sense that*

$$h := \max_{A(i,j)\ne 0} |i-j| < \infty.$$

If, for some finite s and all finite integer intervals $\mathbf{m} \subset I$, the corresponding principal submatrix $A_{\mathbf{m}} := A(\mathbf{m},\mathbf{m})$ is invertible and $\|(A_{\mathbf{m}})^{-1}\|_\infty \le s$, then also A is boundedly invertible as a linear map on $\ell_\infty(I)$, and $\|A^{-1}\|_\infty \le s$.

Proof. For any finite integer interval $\mathbf{m} \subset I$, let

$$A_{\mathbf{m}}^{-1}(i,j) := \begin{cases} A(\mathbf{m},\mathbf{m})^{-1}(i,j), & i,j \in \mathbf{m}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then, by the Lemma, we know that, for any integer intervals $\mathbf{m}_1 \subset \mathbf{m}_2$,

$$0 \le (-1)^{i-j}A_{\mathbf{m}_1}^{-1}(i,j) \le (-1)^{i-j}A_{\mathbf{m}_2}^{-1}(i,j), \quad i,j \in \mathbf{m}_1,$$

which shows that, for any strictly increasing sequence $\mathbf{m}_1 \subset \mathbf{m}_2 \subset \cdots$ of integer intervals and any $i, j \in I$,

$$0 \leq (-1)^{i-j} A_{\mathbf{m}_r}^{-1}(i,j), \quad r = r_0, r_0+1, r_0+2, \ldots$$

is a monotone increasing sequence bounded by s, hence converges monotonely to some limit value

$$(-1)^{i-j} D(i,j).$$

The resulting biinfinite matrix D has

$$\|D\|_\infty \leq s$$

and is necessarily the inverse of A which can be worked out using the assumed bandedness of A, as follows. Since, for any $i \in I$, there is an $r_i \in \mathbb{N}$ so that $|\nu - i| \leq h$ implies $\nu \in \mathbf{m}_{r_i}$, therefore

$$\begin{aligned}
(AD)(i,j) &= \sum_{|\nu-i|\leq h} A(i,\nu) \lim_{r_i \leq r \to \infty} A_{\mathbf{m}_r}^{-1}(\nu,j) \\
&= \lim_{r_i \leq r \to \infty} \sum_{|\nu-i|\leq h} A(i,\nu) A_{\mathbf{m}_r}^{-1}(\nu,j) \\
&= \lim_{r_i \leq r \to \infty} \left\{ \begin{matrix} \delta_{i,j}, & j \in \mathbf{m}_r \\ 0, & \text{otherwise} \end{matrix} \right\} = \delta_{i,j}\,.
\end{aligned}$$

Analogously, for any $j \in I$, there is an $r_j \in \mathbb{N}$ so that $|\nu - j| \leq h$ implies $\nu \in \mathbf{m}_{r_j}$, therefore

$$\begin{aligned}
(DA)(i,j) &= \sum_{|\nu-j|\leq h} \lim_{r_j \leq r \to \infty} A_{\mathbf{m}_r}^{-1}(i,\nu) A(\nu,j) \\
&= \lim_{r_j \leq r \to \infty} \sum_{|\nu-j|\leq h} A_{\mathbf{m}_r}^{-1}(i,\nu) A(\nu,j) \\
&= \lim_{r_j \leq r \to \infty} \left\{ \begin{matrix} \delta_{i,j}, & i \in \mathbf{m}_r \\ 0, & \text{otherwise} \end{matrix} \right\} = \delta_{i,j}\,.
\end{aligned}$$

□

Note that, by the Lemma, it is sufficient to assume that $\|(A_{\mathbf{m}})^{-1}\|_\infty \leq s$ for all sufficiently large $\mathbf{m}$. Note also that the conclusion is unchanged if $A_{\mathbf{m}} := A(\mathbf{m}, r+\mathbf{m})$ for some fixed r. Note finally that the argument would even work for a matrix A that is the norm-limit of banded matrices, something [4] calls **band-dominated**.

The Theorem is complementary to Theorem 1 of [3] which asserts that, for any ℓ_∞-invertible tp matrix $A \in \mathbb{R}^{I\times I}$, there exists r (necessarily unique) so that, for all finite intervals $\mathbf{m} \subset I$, $A_{\mathbf{m}} := A(\mathbf{m}, r+\mathbf{m})$ is invertible and $(A_{\mathbf{m}})^{-1}$ converges, monotonely in each entry, to A^{-1} as $\mathbf{m} \to I$.

Finally, the Lemma implies that, for any knot sequence t,

$$\|(A_{kt})^{-1}\|_\infty \geq \frac{1}{\inf\limits_i \int M_{ik} N_{ik}}\,.$$

Acknowledgement. I am grateful to Alexei Shadrin for a lively email exchange concerning the issues discussed in this note and a very careful and constructive reading of a near-final version.

REFERENCES

1. **Boor C. de** The quasi-interpolant as a tool in elementary polynomial spline theory: in Approximation Theory / Eds. G. G. Lorentz, et al. New York: Acad. Press, 1973. P. 269–276.
2. **Boor C. de** The inverse of a totally positive bi-infinite band matrix // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. Vol. 274. P. 45–58.
3. **Boor C. de, Jia Rong-Qing, and Pinkus A.** Structure of invertible (bi)infinite totally positive matrices // Linear Algebra Appl. 1982. Vol. 47. P. 41–55.
4. **Lindner M.** Infinite matrices and their finite sections. An introduction to the limit operator method. Frontiers in mathematics. Basel: Birkhäuser, 2006. xv+191 pp.
5. **Pinkus A.** Totally positive matrices. Cambridge, UK: CUP, 2010. xii+182 pp.
6. **Shadrin A.Yu.** The L_∞-norm of the L_2-spline projector is bounded independently of the knot sequence: A proof of de Boor's conjecture // Acta Math. 2001. Vol. 187. P. 59–137.

Received August 01, 2011

Carl de Boor
Professor Emeritus
Computer Sciences and Mathematics
University of Wisconsin — Madison
e-mail: deboor@cs.wisc.edu

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 3 2011

УДК 517.977

О НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧАХ ЛОКАЛИЗАЦИИ ОСОБЕННОСТЕЙ[1]

А. Л. Агеев, Т. В. Антонова

В работе обсуждаются некорректно поставленные задачи аппроксимации (локализации) положения изолированных особенностей функции одной переменной. Функция либо задана с ошибкой, либо является решением интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода типа свертки, правая часть которого возмущена. В качестве особенностей выступают δ-функции, разрывы первого рода или изломы. Ранее авторами был предложен подход к получению оценок точности алгоритмов локализации, аналогичный классическому подходу изучения методов на классах корректности. В развитие этой теории в работе построена общая схема конструирования и исследования регулярных методов локализации особенностей, из которой единым образом следуют как многие известные результаты, так и новые утверждения. Рассмотрено несколько классов методов регуляризации, порожденных усредняющими ядрами. Для предложенных методов получены оценки точности локализации и оценки другой важной характеристики методов — порога разделимости. Получены оценки снизу достижимой точности и разделимости, что в некоторых задачах позволяет установить оптимальность (по порядку) построенных методов на классах функций с особенностями.

Ключевые слова: некорректно поставленная задача, локализация особенностей, регуляризующий алгоритм, порог разделимости.

A. L. Ageev, T. V. Antonova. On ill-posed problems of localization of singularities.

Ill-posed problems of approximating (localizing) the positions of isolated singularities of a function of one variable are discussed. The function either is given with an error or is a solution to the convolution-type Fredholm integral equation of the first kind with an error in the right-hand side. The singularities can be δ-functions, discontinuities of the first kind, or breakpoints. Earlier, the authors proposed an approach to deriving accuracy estimates for localization algorithms, which is similar to the classical approach of investigating methods on correctness classes. As a development of this theory, a general scheme of construction and investigation is proposed for regular method of localizing the singularities. The scheme can be used to uniformly derive many of the known results as well as new statements. Several classes of regularization methods generated by averaging kernels are considered. Estimates of localization accuracy and estimates of another important characteristic of the methods, namely, of the separability threshold, are obtained for the proposed methods. Lower estimates for the attainable accuracy and separability are obtained, which allows to establish the (order) optimality of the constructed methods on classes of functions with singularities for some problems.

Keywords: ill-posed problem, localization of singularities, regularizing method, separation threshold.

Введение

При решении некоторых прикладных задач необходимо не просто найти решение некорректно поставленной проблемы [1–3], а выделить характеристики особенностей этого решения (тип, положение и т. д.). Например, необходимо аппроксимировать положения конечного числа разрывов первого рода у зашумленной функции, если вне этих особенностей функция непрерывно дифференцируема. В настоящей работе обсуждается этот важный класс задач, неустойчивых к малым вариациям входных данных, т. е. некорректно поставленных.

Прикладные исследования в этом направлении имеют давнюю историю (см., например, ссылки в [4] на работы лорда Рэлея и А. Шустера соответственно 1896, 1898 и 1906 гг.), и литература по этой тематике совершенно необъятна. Поэтому укажем только несколько монографий и обзоров, в которых можно найти дополнительную информацию. Задачи классической

[1]Работа поддержана программой Президиума РАН “Математическая теория управления” (проект 09-П-1-1013) и РФФИ (проект 09-01-00053).

спектроскопии обсуждаются в [4; 5]. В настоящее время известен целый ряд задач неклассической спектроскопии, в которых для извлечения необходимой информации необходимо решать интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода или систему интегральных уравнений 1-го рода [6–8]. В проблемах классической и неклассической спектроскопии решается интегральное уравнение 1-го рода на классах функций

$$x(s) = x_0(s) + \sum_1^l \Delta_k \delta(s - s_k), \tag{0.1}$$

где x_0 — гладкая функция; $\delta(s)$ есть δ-функция; l, Δ_k, s_k неизвестны и подлежат определению. Заметим, что в настоящей статье величины Δ_k не определяются.

В астрономии, в частности, возникают задачи локализации конечного числа точечных источников (см. [9, §21]) при решении интегрального уравнения типа свертки для функций двух переменных вида, аналогичного (0.1). В упомянутой монографии [9] также обсуждается задача разделения близких пиков.

В обзоре [10] можно найти примеры задач из области медицины, в которых необходимо локализовать разрывы первого рода одномерной функции (сигнала), интерпретируемые как точки аргумента функции, в которых резко меняется характер сигнала, что отвечает резкому изменению “режима” функционирования исследуемого организма. Ссылки на задачи локализации δ-функций или разрывов первого рода, возникающие в технике, см. в [11].

Проблематика обработки изображений сегодня переживает бум. Отошлем читателя к двум недавно появившимся монографиям [12; 13], в которых обсуждаются задачи локализации особенностей функций двух переменных.

Перейдем к обзору теоретических работ. Насколько известно авторам, теоретические результаты по регуляризации задач локализации особенностей в настоящее время получены только для функций одной переменной. Все работы естественным образом делятся на три группы.

В пионерских работах [14; 15] (см. также [4]) для задач решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода на классах функций (0.1), возникающих в спектроскопии, в статистической постановке была формализована проблема разделения близких пиков. Были получены оценки снизу для *порога разделимости задачи* (в спектроскопии: *разрешающей способности прибора*). Детерминированный аналог этих результатов приведен в разд. 3 этой статьи. Во второй группе работ (см., например, [16; 17]) в статистической постановке рассматривалась задача локализации разрывов первого рода зашумленной функции одного переменного. Основные результаты состоят в конструировании методов локализации и получении оценок сверху точности локализации разрывов.

Третий цикл работ по локализации особенностей был выполнен для задач в детерминированной постановке и принадлежит авторам. Подробное изложение истории вопроса см. в [18], здесь же упомянем только несколько ключевых работ. В [19] был подведен итог большого цикла исследований конкретного метода регуляризации по получению оценок точности локализации особенностей, примененного для различных задач и для особенностей различного типа. Наметились контуры общего подхода к этим проблемам. В [20] была формализована задача разделения близких особенностей: введены понятия *порога разделимости метода* (впервые) и *порога разделимости задачи* (аналог понятия, введенного в [14; 15]); получены оценки сверху для порога разделимости метода. Понятие Р-оптимального (оптимального по разделимости) метода на классе функций с особенностями было введено в [21] (см. также [18]). Там же были получены оценки снизу для порога разделимости задачи. Далее в большом цикле работ были рассмотрены новые широкие классы методов регуляризации типа усреднения, разработана техника получения оценок для интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода типа свертки [22]. Обзор этих работ сделан в [18]. Сошлемся также на последние работы [23–25], не вошедшие в вышеупомянутый обзор.

Изложение в разд. 1 начинается с примера конкретного метода локализации изломов в пространстве $C(-\infty,+\infty)$, на котором иллюстрируется подход к конструированию методов регуляризации для задач локализации особенностей. Далее изложена общая схема, в которую вкладывается большое количество конкретных методов. В конце раздела общая схема применяется для локализации особенностей приближенно заданной функции. В разд. 2 применение общей схемы иллюстрируется на локализации особенностей функций, являющихся решением интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода типа свертки. В последнем разделе рассматриваются оценки снизу для точности локализации особенностей и порога разделимости задачи. Сравнение этих оценок и оценок сверху, полученных в разд. 1 и 2, позволяет для некоторых задач установить оптимальность (по порядку) построенных методов на классах функций с особенностями.

На основе общей схемы удалось, в частности, получить следующие новые утверждения: для многоэкстремальных сглаживающих ядер построены и исследованы новые методы (задачи локализации изломов в пространствах L_p и C); в задаче локализации разрывов зашумленной функции предложен новый способ выбора параметра регуляризации, что позволило получить методы, оптимальные по порядку как по точности, так и по разделимости. Получены новые оценки снизу для порога разделимости и оптимальной точности локализации.

1. Общая схема: локализация особенностей зашумленной функции

Для удобства читателя прежде, чем переходить к абстрактной схеме, проиллюстрируем общий подход на примере конкретного метода регуляризации для задачи локализации изломов зашумленной в $C(-\infty,+\infty)$ функции (подробнее см. в [24]).

Задача BC локализации изломов в C. Пусть функция $x\in C(-\infty,+\infty)$ дважды непрерывно дифференцируема для всех s, кроме конечного числа l точек $\{s_k\}_1^l$, принадлежащих известному интервалу $(-d,d)$, $d>0$, и в каждой точке s_k существуют различные левый и правый конечные пределы x'; будем говорить, что в точке s_k функция x имеет излом, и обозначать $\Delta_k=x'(s_k+0)-x'(s_k-0)$. Требуется по функции $x^\delta\in C(-\infty,+\infty):\ \|x-x^\delta\|_C\le\delta$ и уровню погрешности δ определить число l и аппроксимировать положения изломов $\{s_k\}_1^l$.

Определение 1. Методом локализации $\tilde\Pi$ называется отображение, которое по x^δ и δ выдает число l и величины $\{s_k^\delta\}_1^l$, аппроксимирующие положения особенностей $\{s_k\}_1^l$.

Нас, в частности, будут интересовать оценка сверху точности локализации $|s_k^\delta-s_k|$ для метода $\tilde\Pi$ и оценка снизу минимально достижимой для всех методов точности локализации при заданном уровне погрешности δ. Легко показать, что для ответа на эти вопросы информации, содержащейся в задаче **BC**, недостаточно, и ниже будут введены дополнительные условия на функцию x и на величины изломов Δ_k. Пусть относительно точной функции x известна следующая дополнительная априорная информация:

$(\mathbf{1_{BC}})$ Задано число $r>0$ такое, что $\|x\|_C\le r$, $\sup_{s\ne s_k}|x''|\le r$ (число r без ограничения общности будем считать равным единице).

(2) Задано число $\Delta^{\min}>0$ такое, что $\min\{|\Delta_k|:k=1,2,\dots,l\}\ge\Delta^{\min}$.

Множество точных функций x задачи **BC**, удовлетворяющих условиям $(\mathbf{1_{BC}}),(\mathbf{2})$, обозначим $\mathfrak{M}_{BC}$.

Построим вспомогательную функцию так, чтобы положения ее локальных максимумов аппроксимировали точки $\{s_k\}_1^l$. Положим ($\lambda>0$ — параметр регуляризации)

$$x_\lambda^\delta(s)=\frac{x^\delta(s+\lambda)-2x^\delta(s)+x^\delta(s-\lambda)}{\lambda}. \tag{1.1}$$

Приведем без доказательства лемму из [24].

Лемма 1. *Пусть точная функция x в задаче* **BC** *дополнительно удовлетворяет условию* ($\mathbf{1_{BC}}$). *Тогда при выполнении неравенства* $\min\limits_{k\neq j}|s_k - s_j| \geq 2\lambda$ *для всех* $\delta > 0$ *функция* $x^\delta_\lambda(s)$, *определенная равенством* (1.1), *может быть представлена в виде*

$$x^\delta_\lambda(s) = \sum_{k=1}^{l} \Delta_k \cdot \psi_\lambda(s - s_k) + \alpha_\lambda(s) + \Delta x^\delta_\lambda(s), \tag{1.2}$$

где

$$\psi_\lambda(s) = \begin{cases} \dfrac{\lambda - |s|}{\lambda}, & |s| < \lambda, \\ 0, & |s| \geq \lambda, \end{cases} \qquad \sup_s |\alpha_\lambda(s)| \leq \lambda, \quad \sup_s |\Delta x^\delta_\lambda(s)| \leq \frac{4\delta}{\lambda}.$$

Поскольку при выполнении условия $\min\limits_{k\neq j}|s_k - s_j| \geq 2\lambda$ носители функций $\psi_\lambda(s - s_k)$ в представлении (1.2) не пересекаются, то по первому слагаемому в правой части этого представления легко найти число l и величины s_k. Поэтому можно надеяться, что, выбрав параметр регуляризации $\lambda = \lambda(\delta)$ так, чтобы величины $|\alpha_\lambda(s)|,\ |\Delta x^\delta_\lambda(s)|$ были малы, по известной функции $x^\delta_\lambda(s)$ удастся построить метод решения задачи **BC**.

Аппроксимацию точек излома будем проводить в два этапа. На первом этапе определим число m, относительно которого будет доказано, что $m = l$, и выделим непересекающиеся отрезки $[a_k, b_k],\ k = 1, 2, \dots, m$, содержащие точки s_k. На втором этапе найдем приближения $s^\delta_k \in [a_k, b_k]$ точек s_k, для которых будут получены оценки точности аппроксимации. В работе метода используются параметры λ, P и h, которые будут определены позже.

М е т о д П. По функции x^δ согласно формуле (1.1) вычислим вспомогательную функцию $|x^\delta_\lambda|$. Положим текущее $s := -d,\ m := 0$.

Шаг метода: a) движемся по s слева направо, пока $s < d$; при $s = d$ завершаем процесс; если при увеличении s встречаем точку $s = \tilde{s}$ такую, что $|x^\delta_\lambda(\tilde{s})| = P$, то $m := m + 1,\ a_m := \tilde{s},\ b_m := \tilde{s} + h/2$; b) продолжаем увеличивать s, начиная с точки $s = b_m + h/2$; если $|x^\delta_\lambda(b_m + h/2)| \geq P$, то $\tilde{s} = b_m + h/2,\ m := m + 1,\ a_m := \tilde{s},\ b_m := \tilde{s} + h/2$, и переходим на b), иначе переходим на a).

М е т о д ПF. Выбираем s^δ_k как середину отрезка $[a_k,\ b_k], k = 1, 2, \dots, m$.

Положим $\delta_0 = (\Delta^{\min}/6)^2/4,\ D = 24/\Delta^{\min},\ P = \Delta^{\min}/2,\ \lambda(\delta) = D\delta$ и $h(\delta) = 2\lambda(\delta)$ (доказательство следующей теоремы см. в [24]; теорема также следует из теоремы 2 настоящей статьи).

Теорема 1. *Пусть функция* $x \in \mathfrak{M}_{BC}$ *и* $s_k \in (-d - h(\delta), d + h(\delta)),\ k = 1, 2, \dots, l$. *Тогда для всех* $\delta \leq \delta_0$ *при связи параметров* $\lambda = \lambda(\delta)$ *и выполнении неравенства* $\min\limits_{k\neq j}|s_k - s_j| \geq h(\delta)$ *для метода* П–ПF *выполнится* $m = l$ *и будет справедлива оценка* $|s^\delta_k - s_k| \leq (D/2)\delta$.

Введем понятие разделимости для метода П–ПF. Для произвольного метода $\tilde{\Pi}$ соответствующее понятие вводится аналогично.

О п р е д е л е н и е 2. Наименьшая функция $\bar{h}(\delta, \Pi\text{–}\Pi F, \mathfrak{M}_{BC})$, которую можно поставить в теореме 1 вместо функции $h(\delta)$: $\min\limits_{k\neq j}|s_k - s_j| \geq \bar{h}(\delta, \Pi\text{–}\Pi F, \mathfrak{M}_{BC})$, чтобы теорема имела место, называется *порогом разделимости метода* П–ПF на классе функций $\mathfrak{M}_{BC}$; *порогом разделимости* задачи **BC** на классе функций $\mathfrak{M}_{BC}$ называется функция $\hat{h}(\delta, \mathfrak{M}_{BC}) = \min\limits_{\tilde{\Pi}} \bar{h}(\delta, \tilde{\Pi}, \mathfrak{M}_{BC})$, где минимум берется по всем методам локализации $\tilde{\Pi}$.

Таким образом, в теореме 1, в частности, получена оценка сверху для порога разделимости метода П–ПF : $\bar{h}(\delta, \Pi\text{–}\Pi F, \mathfrak{M}_{BC}) \leq 2D\delta$.

Перейдем к изложению общего подхода к построению методов локализации для разных типов особенностей зашумленной функции. Начнем с формулировок задач и поясним используемые обозначения. В этом разделе будут рассматриваться три задачи локализации особенностей — **BL, BC, DL**, соответственно три условия на точную функцию x — ($\mathbf{1_{BL}}$), ($\mathbf{1_{BC}}$), ($\mathbf{1_{DL}}$)

и три класса функций — $\mathfrak{M}_{BL}, \mathfrak{M}_{BC}, \mathfrak{M}_{DL}$ (другие условия, задачи и классы будут рассматриваться в следующем разделе). Первая буква в названии условия означает излом (B — breakpoint) или разрыв первого рода (D — discontinue). Вторая буква соответствует пространству (L — пространству L_p $(1 < p < \infty)$; C — пространству C).

Задача BL локализации изломов в L_p. Пусть функция $x \in L_p(-\infty, +\infty)$ непрерывна и дважды непрерывно дифференцируема для всех s, кроме конечного числа l точек $\{s_k\}_1^l$, принадлежащих известному интервалу $(-d, d)$, $d > 0$, и в каждой точке s_k существуют различные левый и правый конечные пределы x'; будем обозначать $\Delta_k = x'(s_k + 0) - x'(s_k - 0)$; вторая производная x'' также принадлежит $L_p(-\infty, +\infty)$ (в точках s_k функция x'' доопределена произвольным образом). Требуется по функции $x^\delta \in L_p(-\infty, +\infty)$: $\|x - x^\delta\|_{L_p} \le \delta$ и уровню погрешности δ определить число l и аппроксимировать положения изломов $\{s_k\}_1^l$.

Пусть для точной функции x известна дополнительная априорная информация:

$(\mathbf{1_{BL}})$ Задано число $r > 0$ такое, что $\|x\|_{L_p} \le r$, $\|x''\|_{L_p} \le r$.

Задача DL локализации разрывов в L_p. Пусть функция $x \in L_p(-\infty, +\infty)$ непрерывно дифференцируема для всех s кроме конечного числа l точек $\{s_k\}_1^l$, принадлежащих известному интервалу $(-d, d)$, $d > 0$, и в каждой точке s_k существуют различные левый и правый конечные пределы функции x; будем говорить, что в точке s_k функция x имеет разрыв, и обозначать $\Delta_k = x(s_k + 0) - x(s_k - 0)$; производная x' также принадлежит $L_p(-\infty, +\infty)$ (в точках s_k функция x' доопределена произвольным образом). Требуется по функции $x^\delta \in L_p(-\infty, +\infty)$: $\|x - x^\delta\|_{L_p} \le \delta$ и уровню погрешности δ определить число l и аппроксимировать положения разрывов $\{s_k\}_1^l$.

Пусть для точной функции x известна следующая дополнительная априорная информация:

$(\mathbf{1_{DL}})$ Задано число $r > 0$ такое, что $\|x\|_{L_p} \le r$, $\|x'\|_{L_p} \le r$.

В условиях $(\mathbf{1_{BL}})$ и $(\mathbf{1_{DL}})$ число r без ограничения общности можно считать равным единице, что мы и будем делать в дальнейшем. Множество точных функций x задачи **BL**, удовлетворяющих условиям $(\mathbf{1_{BL}}), (\mathbf{2})$, обозначим $\mathfrak{M}_{BL}$, а множество точных функций x задачи **DL**, удовлетворяющих условиям $(\mathbf{1_{DL}}), (\mathbf{2})$, обозначим $\mathfrak{M}_{DL}$.

Для локализации особенностей в задачах **BL, BC, DL** будем строить и исследовать вспомогательную функцию $x_\lambda^\delta(s)$, для которой будет иметь место представление, аналогичное представлению (1.2). Для построения этой функции используем усредняющие ядра $\phi_\lambda(t)$, порожденные ядром $\phi(t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$, с помощью формулы $\phi_\lambda(t) = \phi(t/\lambda)$, $\lambda > 0$ — параметр регуляризации. Через q обозначим число такое, что $1/p + 1/q = 1$. Тогда имеет место следующая лемма.

Лемма 2. *Для задач* **BL, BC, DL**, *если функции x, ϕ удовлетворяют условиям, сформулированным в первой и второй колонках табл.* 1, *то функция x_λ^δ, определенная равенством в третьей колонке табл.* 1, *может быть представлена в виде*

$$x_\lambda^\delta(s) = \sum_{k=1}^{l} \Delta_k \cdot \phi_\lambda(s - s_k) + \alpha_\lambda(s) + \Delta x_\lambda^\delta(s), \tag{1.3}$$

и справедливы оценки с параметрами μ и ν, приведенными в табл. 1,

$$\sup_s |\alpha_\lambda(s)| \le A_0 \lambda^\mu, \qquad A_0 = \|\phi\|_{L_q}, \qquad \sup_s |\Delta x_\lambda^\delta(s)| \le A_1 \delta \lambda^{-\nu}. \tag{1.4}$$

Лемма 2 для задач **BL** и **BC** доказана в [24], а для задачи **DL** — в [25].

После получения представления (1.3), (1.4) построение метода локализации и получение оценок точности и разделимости метода выполняются единым образом.

Метод определения l и s_k^δ зависит от вида функций ϕ. В работах [22–25] были рассмотрены два множества, из которых можно выбирать функцию ϕ. Первое множество — “шапочки”, т. е. функции, имеющие один максимум в точке ноль. Второе множество — нечетные функции с двумя точками экстремума на отрезке $[-1, 1]$.

Т а б л и ц а 1

Задача	Условия на ϕ	Формула для x_λ^δ	μ	ν	A_1
BL с усл. ($\mathbf{1_{BL}}$)	$\phi \in W_q^2$ $\lvert\phi'(t)\rvert = O(1/t^{(1+\varepsilon)})$ $\varepsilon > 0, t \to \infty$	$x_\lambda^\delta(s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^\delta(t)(\phi_\lambda(s-t))''_{ss}dt$	$\dfrac{p-1}{p}$	$\dfrac{p+1}{p}$	$\lVert\phi''\rVert_{L_q}$
BC с усл. ($\mathbf{1_{BC}}$)	$\phi \in W_1^2$ $\lvert\phi'(t)\rvert = O(1/t^{(1+\varepsilon)})$ $\varepsilon > 0, t \to \infty$	$x_\lambda^\delta(s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^\delta(t)(\phi_\lambda(s-t))''_{ss}dt$	1	1	$\lVert\phi''\rVert_{L_1}$
DL с усл. ($\mathbf{1_{DL}}$)	$\phi \in W_q^1$	$x_\lambda^\delta(s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^\delta(t)(\phi_\lambda(s-t))'_{s}dt$	$\dfrac{p-1}{p}$	$\dfrac{1}{p}$	$\lVert\phi'\rVert_{L_q}$

Выпишем условия на функции из первого множества сглаживающих ядер, которое обозначим через Φ_1:

(a) $\phi \in C(-\infty, +\infty)$;

(b) $\sup\limits_{t\in[-1,1]} |\phi(t)| = \phi(0) = 1$;

(c) для $t \notin [-1,1]$ $\quad |\phi(t)| \le C/|t|, \quad C$ — константа;

(d) $\sup\limits_{t\in[-1,1]} |\phi(t)| - \sup\limits_{t\notin[-1,1]} |\phi(t)| = a > 0$.

Легко проверить, что, например, следующие функции принадлежат множеству Φ_1:

$$\phi_1(t) = \frac{\sin t}{t}, \quad \phi_2(t) = \begin{cases} \cos^2\Big(\dfrac{\pi t}{2}\Big), & t \in [-1,1], \\ 0, & t \notin [-1,1], \end{cases} \quad \phi_3[\sigma](t) = \exp\Big(-\frac{t^2}{2\sigma}\Big),$$

где $\sigma > 0$ — фиксированный параметр.

Пусть для функции x_λ^δ справедливо разложение (1.3). Для определения величины l и выделения непересекающихся отрезков $[a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \ldots, m$, содержащих точки s_k, воспользуемся методом П, который был изложен в начале этого раздела. Однако для определения приближений $\{s_k^\delta\}_1^l$ вместо метода ПF используем другой метод, поскольку он дает лучшие результаты (по точности определения s_k).

М е т о д П1. Находим на каждом отрезке $[a_k, \ b_k], k = 1, 2, \ldots, m$, точку максимума s_k^δ функции $|x_\lambda^\delta(s)|$. Если таких точек несколько, то берем самую левую из них.

Для получения оценок в общем случае относительно точной функции x во всех задачах должна быть известна дополнительная априорная информация

(3) Заданы $L > 0$ и $\Delta^{\max} > 0$ такие, что $0 < l \le L$ и $\max\{|\Delta_k|\colon k = 1, 2, \ldots, l\} \le \Delta^{\max}$.

Для формулировки теоремы нам понадобятся следующие числа:

$$\delta_0 = \Big(\frac{a\,\Delta^{\min}}{8}\Big)^{\nu/\mu+1} \frac{1}{A_1 A_0^{\nu/\mu}}, \quad D = \Big(\frac{8A_1}{a\,\Delta^{\min}}\Big)^{1/\nu}, \quad H = \frac{6L\Delta^{\max}\tilde{C}}{a\,\Delta^{\min}}, \text{ где } \tilde{C} = \max\Big\{C, \frac{a\,\Delta^{\min}}{6L\Delta^{\max}}\Big\}$$

и функции

$$\lambda(\delta) = D\delta^{1/\nu}, \quad h(\delta) = 2H\lambda(\delta).$$

Отметим, что данный способ выбора параметра регуляризации $\lambda = \lambda(\delta)$ [25] обеспечивает оптимальность по порядку построенных методов как по точности, так и по разделимости.

Теорема 2. *Пусть для функции* x^δ_λ *из леммы* 2 *имеет место представление* (1.3)–(1.4), *функция* $\phi \in \Phi_1$; *для функции* x *выполнены условия* (**2**), (**3**) *и* $s_k \in (-d-h(\delta), d+h(\delta))$, $k = 1, 2, \ldots, l$. *Тогда для всех* $\delta \le \delta_0$ *при связи параметров* $\lambda = \lambda(\delta)$ *и выполнении неравенства* $\min\limits_{k\neq j} |s_k - s_j| \ge h(\delta)$ *для метода* П–П1 *получим* $m = l$ *и будет справедлива оценка*

$$|s^\delta_k - s_k| \le D\delta^{1/\nu}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о для простоты изложения проведем при $l = 2$, т. е. метод П должен сделать два шага и на каждом шаге выделить интервал, содержащий одну точку s_k. Для произвольного l доказательство проводится аналогично, при этом метод П должен сделать l шагов. Без ограничения общности можно считать, что $s_1 < s_2$. Напомним, что мы рассматриваем задачу на множестве функций $x(s)$, для которых $s_2 - s_1 \ge h(\delta)$. Используя условие (c) на функцию ϕ, для всех s таких, что $|s| \ge H\lambda$, получаем оценку $|\phi_\lambda(s)| \le C/H$. Следовательно, в окрестности каждой точки $s_k:\ |s - s_k| < H\lambda,\ k = 1, 2$, имеем разложение

$$x^\delta_\lambda(s) = \Delta_k \cdot \phi_\lambda(s - s_k) + \alpha_\lambda(s) + \Delta x^\delta_\lambda(s) + \sum_{j=1 (j\neq k)}^{l} \Delta_j \cdot \phi_\lambda(s - s_j), \tag{1.5}$$

где при данном выборе параметров

$$\sup_{|s-s_k|<H\lambda} \left| \alpha_\lambda(s) + \Delta x^\delta_\lambda(s) + \sum_{j=1 (j\neq k)}^{l} \Delta_j \cdot \phi_\lambda(s - s_j) \right|$$
$$\le A_0\lambda^\mu + A_1\delta\lambda^{-\nu} + \frac{(L-1)\Delta^{\max} C}{H} < \frac{a\,\Delta^{\min}}{2}. \tag{1.6}$$

Поскольку $a \le 1$, то для $k = 1, 2$, используя свойство (b), имеем

$$\sup_{|s-s_k|<H\lambda} |x^\delta_\lambda(s)| \ge |x^\delta_\lambda(s_k)| > \Delta^{\min} - \frac{a\,\Delta^{\min}}{2} = \frac{(2-a)\Delta^{\min}}{2} \ge \frac{\Delta^{\min}}{2} = P. \tag{1.7}$$

Вне множества $Q = \bigcup\limits_{k=1}^{2} \{s\colon |s - s_k| < H\lambda\}$ функция $x^\delta_\lambda(s)$ оценивается сверху следующим образом:

$$|x^\delta_\lambda(s)| \le A_0\lambda^\mu + A_1\delta\lambda^{-\nu} + \frac{L\Delta^{\max} C}{H} < \frac{a\,\Delta^{\min}}{2} \le P. \tag{1.8}$$

Ввиду оценок (1.7), (1.8) и непрерывности функции $|x^\delta_\lambda|$ в п. a) метода П найдется точка $\tilde{s} : |x^\delta_\lambda(\tilde{s})| = P$. Поскольку $s_1 < s_2$, то $\tilde{s} \in Q$, т. е. $|\tilde{s} - s_1| < H\lambda$. Из (1.7) следует, что $|x^\delta_\lambda(s_1)| > P$. Значит, $s_1 > \tilde{s}$. Следовательно, $s_1 \in [\tilde{s}, \tilde{s} + H\lambda] = [a_1, b_1]$. Конечно, $s_1 \in (a_1, b_1)$, но можно считать, что $s_1 \in [a_1, b_1]$.

Далее согласно п. b), если $|x^\delta_\lambda(b_1 + H\lambda)| \ge P$, то полагаем $\tilde{s} = b_1 + H\lambda$ и $\tilde{s} \in Q$. Но, поскольку $\tilde{s} - s_1 > H\lambda$, то $|\tilde{s} - s_2| < H\lambda$. Ввиду того, что $s_2 - s_1 \ge h = 2H\lambda$ и $b_1 < s_1 + H\lambda$, имеем $s_2 > \tilde{s}$. Следовательно, $s_2 \in [\tilde{s}, \tilde{s} + H\lambda] = [a_2, b_2]$.

Если $|x^\delta_\lambda(b_1 + H\lambda)| < P$, то, следуя п. a), находим точку $\tilde{s}$, для которой $|x^\delta_\lambda(\tilde{s})| = P$. Значит, $\tilde{s} \in Q$ и $\tilde{s} < s_2$. Но, поскольку $\tilde{s} - s_1 > H\lambda$, то $s_2 - \tilde{s} < H\lambda$. Следовательно, и в этом случае $s_2 \in [\tilde{s}, \tilde{s} + H\lambda] = [a_2, b_2]$.

Отрезки $[a_1, b_1], [a_2, b_2]$ разделяются, так как $a_2 - b_1 \ge H\lambda > 0$.

Ясно, что точки $s \ge b_2 + H\lambda$ не принадлежат множеству Q и $|x^\delta_\lambda(s)| < P$. Таким образом, $m = 2$, и процесс завершен.

Пусть s^δ_k — точка максимума модуля функции $x^\delta_\lambda(s)$ на отрезке $[a_k,\ b_k], k = 1, 2$. Используя условия (b) и (d) на функцию ϕ, имеем

$$\sup_{|s-s_k|>\lambda} |\phi_\lambda(s - s_k)| = 1 - a \ge 0.$$

Используя разложение (1.5) и оценку (1.6), для $k=1,2$ получаем

$$|x_\lambda^\delta(s_k^\delta)| > \Delta_k - \frac{a\,\Delta^{\min}}{2} \geq \frac{(2-a)\Delta_k}{2}, \qquad \sup_{|s-s_k|>\lambda} |x_\lambda^\delta(s)| < \Delta_k(1-a) + \frac{a\,\Delta^{\min}}{2} \leq \frac{(2-a)\Delta_k}{2}.$$

Таким образом, $|s_k^\delta - s_k| \leq \lambda, \quad k=1,2$. Теорема доказана. □

Рассмотрим множество сглаживающих ядер, которые имеют не один экстремум на отрезке $[-1,1]$. Например, множество сглаживающих ядер, состоящее из нечетных функций с двумя точками экстремума. Пусть функция $\phi(t),\ t\in(-\infty,+\infty)$ удовлетворяет условиям:

(a') $\phi\in C(-\infty,+\infty), \quad \phi(t) = -\phi(-t)$;

(b') $\sup\limits_{t\in[0,1]} |\phi(t)| = |\phi(\varrho)| = 1, \quad \varrho\in(0,1)$;

(c') для $t>1 \quad |\phi(t)| \leq C/t, \quad C$ — константа;

(d') $\sup\limits_{t\in[0,1]} |\phi(t)| - \sup\limits_{t>1} |\phi(t)| = a > 0.$

Обозначим это множество через Φ_2. Легко проверить, что следующая функция принадлежит множеству Φ_2:

$$\phi_4(t) = -2t\exp\Big(-2t^2 + \frac{1}{2}\Big), \quad \varrho = \frac{1}{2}.$$

Другим примером сглаживающего ядра из Φ_2 является функция из [19] (нормированная по-другому):

$$\phi_5(t) = \frac{\operatorname{sign} t}{q} \int\limits_{\pi|t|}^{2\pi|t|} \frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi, \quad \text{где} \quad q = \int\limits_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi, \quad \varrho = \frac{1}{3}.$$

Пусть для функции x_λ^δ из леммы 2 справедливо разложение (1.3). Для определения величины l и выделения непересекающихся отрезков $[a_k,b_k],\ k=1,2,\ldots,m$, содержащих точки s_k, воспользуемся методом П, который был изложен в начале этого раздела. Однако для определения приближений $\{s_k^\delta\}_1^l$ используем следующий метод:

Метод П2. Находим на каждом отрезке $[a_k,\ b_k], k=1,2,\ldots,m$, точку глобального максимума $s_k^{1\delta}$ и точку глобального минимума $s_k^{2\delta}$ функции $x_\lambda^\delta(s)$ (если таких точек несколько, то берем самые левые из них). Положим $s_k^\delta = \hat{s}_k^\delta + \varrho\lambda$, где $\hat{s}_k^\delta = \min\{s_k^{1\delta}, s_k^{2\delta}\}$.

При тех же значениях параметров, что и в теореме 2, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть для функции x_λ^δ из леммы* 2 *имеет место представление* (1.3), (1.4); *функция $\phi\in\Phi_2$; для функции x выполнены условия* (**2**), (**3**) *и $s_k\in(-d-h(\delta), d+h(\delta)),\ k=1,2,\ldots,l$. Тогда для всех $\delta\leq\delta_0$ при связи параметров $\lambda=\lambda(\delta)$ и выполнении неравенства $\min\limits_{k\neq j}|s_k - s_j| \geq h(\delta)$ для метода* П–П2 *получим $m=l$ и будет справедлива оценка $|s_k - s_k^\delta| \leq \bar{\varrho} D\delta^{1/\nu}$, где $\bar{\varrho} = \max\{\varrho, 1-\varrho\}$.*

Доказательство того, что методом П в этом случае определяется число l и выделяются непересекающиеся отрезки, содержащие точки $s_k - \varrho\lambda$, аналогично доказательству в теореме 2. Покажем справедливость оценки для приближения s_k^δ, построенного методом П2.

Пусть $\hat{s}_k^\delta = \min\{s_k^{1\delta}, s_k^{2\delta}\}$. Ясно, что $\hat{s}_k^\delta < s_k$. В силу условий (a'), (b') и (d') на функцию ϕ имеем

$$\sup_{s<s_k-\lambda} |\phi_\lambda(s-s_k)| = 1-a \geq 0.$$

Следовательно, для $k=1,2$ получаем

$$|x_\lambda^\delta(\hat{s}_k^\delta)| > \Delta_k - \frac{a\,\Delta^{\min}}{2} \geq \frac{(2-a)\Delta_k}{2}, \qquad \sup_{s<s_k-\lambda} |x_\lambda^\delta(s)| < \Delta_k(1-a) + \frac{a\,\Delta^{\min}}{2} \leq \frac{(2-a)\Delta_k}{2}.$$

Таким образом, $s_k - \lambda < \hat{s}_k^\delta < s_k$, и, следовательно,

$$|\hat{s}_k^\delta - (s_k - \varrho\lambda)| \le \bar{\varrho}\lambda, \quad k = 1, 2, \quad \bar{\varrho} = \max\{\varrho, 1 - \varrho\}.$$

Поскольку $s_k^\delta = \hat{s}_k^\delta + \varrho\lambda$, то окончательно получаем

$$|s_k^\delta - s_k| = |\hat{s}_k^\delta - (s_k - \varrho\lambda)| \le \bar{\varrho}\lambda, \quad k = 1, 2.$$

Теорема доказана. □

Если в условиях (c) или (c') константа $C = 0$, то мы имеем дело с финитными сглаживающими ядрами. Обозначим эти множества через ΦF_1 и ΦF_2 соответственно. Поскольку $\Phi F_1 \subset \Phi_1$ и $\Phi F_2 \subset \Phi_2$, то для методов с финитными сглаживающими ядрами имеют место результаты, сформулированные выше. Но для финитных сглаживающих ядер можно получить лучшую оценку для $|s_k - s_k^\delta|, k = 1, 2, \ldots, l$, применяя вместо методов П1 и П2 метод ПF (см. начало этого раздела). Кроме того, не нужно условие (**3**).

Для формулировки теоремы нам понадобятся числа

$$\delta_0 = \Big(\frac{\Delta^{\min}}{6}\Big)^{\nu/\mu+1} \frac{1}{A_1 A_0^{\nu/\mu}}, \quad D = \Big(\frac{6A_1}{\Delta^{\min}}\Big)^{1/\nu}$$

и функции

$$\lambda(\delta) = D\delta^{1/\nu}, \quad h(\delta) = 2\lambda(\delta).$$

Справедлива следующая теорема, которая доказывается аналогично теоремам 2 и 3.

Теорема 4. *Пусть для функции x_λ^δ из леммы* 2 *имеет место представление* (1.3), (1.4), *функция $\phi \in \Phi F_1$ ($\phi \in \Phi F_2$), для функции x выполнено условие* (**2**) *и $s_k \in (-d - h(\delta), d + h(\delta))$, $k = 1, 2, \ldots, l$. Тогда для всех $\delta \le \delta_0$ при связи параметров $\lambda = \lambda(\delta)$ и выполнении неравенства $\min\limits_{k \ne j} |s_k - s_j| \ge h(\delta)$ для метода* П–ПF *получим $m = l$ и будет справедлива оценка $|s_k - s_k^\delta| \le (D/2)\delta^{1/\nu}$.*

Объединяя лемму 2 и теоремы 2–4, можно получить утверждения для интересующих нас задач **BC, BL, DL**. Для удобства сведем результаты в таблицу (см. табл. 2). Множества функций $\mathfrak{M}_{BL}, \mathfrak{M}_{BC}, \mathfrak{M}_{DL}$, удовлетворяющих условию (**3**), обозначим $\mathfrak{M}'_{BL}, \mathfrak{M}'_{BC}, \mathfrak{M}'_{DL}$. Обозначим множества Φ_1 и Φ_2 с условием $|\phi'(t)| = O(1/t^{(1+\varepsilon)})$, $t \to \infty$, $\varepsilon > 0$, через Φ'_1 и Φ'_2. Значения параметра A_1 даны в табл. 1, $A_0 = \|\phi\|_{L_q}$. Для более компактной записи положим $G = a\,\Delta^{\min}/8$.

Для задач **BL, BC** аналогичная оценка при $\phi \in \Phi'_1$ получена в [24], при $\phi \in \Phi'_2$ результаты являются новыми. Для задачи **DL** в настоящей работе получены новые оценки для порога разделимости по сравнению с [23] для случая $\phi \in \Phi_1$. Для той же задачи оценки при $\phi \in \Phi_2$ получены в [25].

Т а б л и ц а 2

Задача	Условия на ϕ	Метод	δ_0	D	$1/\nu$	$\lvert s_k^\delta - s_k\rvert$	$h(\delta) = 2H\lambda(\delta)$
BL	$\Phi'_1 \cap W_q^2$	П–П1	$\dfrac{G^{2p/(p-1)}}{A_0^{(p+1)/(p-1)} A_1}$	$\Big(\dfrac{A_1}{G}\Big)^{p/(p+1)}$	$\dfrac{p}{p+1}$	$D\delta^{p/(p+1)}$	$2HD\delta^{p/(p+1)}$
$x \in \mathfrak{M}'_{BL}$	$(\Phi'_2 \cap W_q^2)$	(П–П2)				$(\bar{\varrho}D\delta^{p/(p+1)})$	
BC	$\Phi'_1 \cap W_1^2$	П, П1	$\dfrac{G^2}{A_0 A_1}$	$\dfrac{A_1}{G}$	1	$D\delta$	$2HD\delta$
$x \in \mathfrak{M}'_{BC}$	$(\Phi'_2 \cap W_1^2)$	(П–П2)				$(\bar{\varrho}D\delta)$	
DL	$\Phi_1 \cap W_q^1$	П, П1	$\dfrac{G^{p/(p-1)}}{A_1 A_0^{1/(p-1)}}$	$\Big(\dfrac{A_1}{G}\Big)^p$	p	$D\delta^p$	$2HD\delta^p$
$x \in \mathfrak{M}'_{DL}$	$(\Phi_2 \cap W_q^1)$	(П–П2)				$(\bar{\varrho}D\delta^p)$	

Приведем аналогичные результаты для методов локализации, построенных с использованием финитных сглаживающих ядер (см. табл. 3). Для более компактной записи положим $G = \Delta^{\min}/6$.

Таблица 3

Задача	Условия на ϕ	Метод	δ_0	D	$\lvert s_k^\delta - s_k\rvert$	$h(\delta) = 2\lambda(\delta)$
BL $x \in \mathfrak{M}_{BL}$	$\Phi F_1 \cap W_q^2$ $\left(\Phi F_2 \cap W_q^2\right)$	П–ПF	$\dfrac{G^{2p/(p-1)}}{A_0^{(p+1)/(p-1)} A_1}$	$\left(\dfrac{A_1}{G}\right)^{p/(p+1)}$	$\dfrac{D\delta^{p/(p+1)}}{2}$	$2D\delta^{p/(p+1)}$
BC $x \in \mathfrak{M}_{BC}$	$\Phi F_1 \cap W_1^2$ $\left(\Phi F_2 \cap W_1^2\right)$	П–ПF	$\dfrac{G^2}{A_0 A_1}$	$\dfrac{A_1}{G}$	$\dfrac{D\delta}{2}$	$2D\delta$
DL $x \in \mathfrak{M}_{DL}$	$\Phi F_1 \cap W_q^1$ $\left(\Phi F_2 \cap W_q^1\right)$	П–ПF	$\dfrac{G^{p/(p-1)}}{A_1 A_0^{1/(p-1)}}$	$\left(\dfrac{A_1}{G}\right)^p$	$\dfrac{D\delta^p}{2}$	$2D\delta^p$

Для задач **BL, BC** аналогичная оценка при $\phi \in \Phi F_1$ была получена в [24].

В табл. 4 приведены примеры оценок с конкретными усредняющими ядрами для решения задачи **DL** на классе $\mathfrak{M}'_{DL}$ в пространстве L_2. Для функций ϕ_1 и ϕ_3 применялся метод П–П1, для функции ϕ_2 — метод П–ПF, для функций ϕ_4 и ϕ_5 — метод П–П2.

Таблица 4

	δ_0	$\lvert s_k - s_k^\delta\rvert$	$h(\delta)$
ϕ_1	$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi}\pi}\left(\dfrac{a\Delta^{\min}}{8}\right)^2$	$\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{8\pi}{a\Delta^{\min}}\right)^2\delta^2$	$\dfrac{4H}{3}\left(\dfrac{8\pi}{a\Delta^{\min}}\right)^2\delta^2$
ϕ_2	$\dfrac{1}{\sqrt{3}\pi}\left(\dfrac{\Delta^{\min}}{3}\right)^2$	$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3\pi}{\Delta^{\min}}\right)^2\delta^2$	$2\left(\dfrac{3\pi}{\Delta^{\min}}\right)^2\delta^2$
$\phi_3[\sigma]$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left(\dfrac{a\Delta^{\min}}{8}\right)^2$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sigma}\left(\dfrac{8}{a\Delta^{\min}}\right)^2\delta^2$	$\dfrac{H\sqrt{\pi}}{\sigma}\left(\dfrac{8}{a\Delta^{\min}}\right)^2\delta^2$
ϕ_4	$\sqrt{\dfrac{2}{3\pi}}\dfrac{2}{e}\left(\dfrac{a\Delta^{\min}}{8}\right)^2$	$3e\sqrt{\pi}\left(\dfrac{4}{a\Delta^{\min}}\right)^2\delta^2$	$\dfrac{3eH\sqrt{\pi}}{2}\left(\dfrac{8}{a\Delta^{\min}}\right)^2\delta^2$
ϕ_5	$\dfrac{q}{3\pi}\left(\dfrac{a\Delta^{\min}}{8}\right)^2$	$\dfrac{2\pi^2}{q^2}\left(\dfrac{8}{a\Delta^{\min}}\right)^2\delta^2$	$\dfrac{6H\pi^2}{q^2}\left(\dfrac{8}{a\Delta^{\min}}\right)^2\delta^2$

2. Локализация особенностей решения интегрального уравнения 1-го рода типа свертки

Рассмотрим интегральное уравнение 1-го рода с оператором типа свертки

$$Ax \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t-s)\,x(s)\,ds = y(t), \quad t \in (-\infty, +\infty), \tag{2.1}$$

$y \in L_2(-\infty, +\infty)$; для функции K справедливо условие

(**K**) Функция $K(t) \in L_2(-\infty, +\infty)$ является четной (или нечетной), $\widehat{K}(z) \neq 0$ для $z \in (-\infty, +\infty)$; функция $\widehat{K}(z)$ непрерывна для всех $z \in (-\infty, +\infty)$. (Здесь через $\widehat{K}(z)$ обозначается преобразование Фурье функции $K(t)$.)

Заметим, что условие четности (или нечетности) функции $K(t)$ введено для упрощения выкладок и от него можно избавиться. Оно приводит к тому, что функция $\widehat{K}(z)$ является действительнозначной (или принимает чисто мнимые значения); условие непрерывности функции $\widehat{K}(z)$ также можно ослабить.

В этом разделе будут рассматриваться два типа особенностей у точной функции x: разрывы первого рода и δ-функции. Сочетание Dis в названии задачи означает рассмотрение в качестве особенностей δ-функций. Буква D, как и в предыдущем разделе, означает разрыв первого рода, а L — пространство $L_2(-\infty, +\infty)$. Буква I в задачах локализации особенностей **DisLI, DLI** означает, что точная функция удовлетворяет уравнению (2.1).

Рассмотрим случай, когда точное решение уравнения (2.1) имеет представление

$$x(s) = x_0(s) + \sum_{k=1}^{l} \Delta_k \cdot \delta(s - s_k), \tag{2.2}$$

где функция x_0 принадлежит пространству $L_2(-\infty, +\infty)$. Определим действие оператора A в уравнении (2.1) на множестве функций (2.2) формулой

$$Ax \equiv \sum_{k=1}^{l} \Delta_k K(t - s_k) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t - s)\, x_0(s)\, ds.$$

Ввиду условия (**K**) правая часть уравнения (2.1) принадлежит L_2, и уравнение (2.1) записано корректно. В случае, когда точное решение имеет разрывы первого рода, будем рассматривать оператор A в уравнении (2.1) действующим из L_2 в L_2.

Задача DisLI локализации положения δ-функций. Пусть точное решение уравнения (2.1) имеет вид (2.2); величины $\{s_k\}_1^l$ принадлежат известному интервалу $(-d, d)$, $d > 0$. Требуется по функции $y^\delta \in L_2(-\infty, +\infty)$: $\|y - y^\delta\|_{L_2} \le \delta$ и уровню погрешности δ определить число l и аппроксимировать положения $\{s_k\}_1^l$.

Пусть для точной функции x известна дополнительная априорная информация:

($\mathbf{1_{DisL}}$) Задано число $r > 0$ такое, что $\|x_0\|_{L_2} \le r$ (число r без ограничения общности можно считать равным единице, что мы и будем делать в дальнейшем).

Класс точных функций задачи **DisLI** с условиями $(\mathbf{1_{DisL}}), (\mathbf{2})$ обозначим $\mathfrak{M}_{DisL}$, а с условиями $(\mathbf{1_{DisL}}), (\mathbf{2}), (\mathbf{3})$ — $\mathfrak{M}'_{DisL}$.

Задача DLI локализации разрывов функции. Пусть точная функция $x \in L_2(-\infty, +\infty)$ непрерывно дифференцируема для всех s кроме конечного числа l точек $\{s_k\}_1^l$, принадлежащих известному интервалу $(-d, d)$, $d > 0$, и в каждой точке s_k существуют различные левый и правый конечные пределы функции x; будем обозначать $\Delta_k = x(s_k + 0) - x(s_k - 0)$; $x' \in L_2(-\infty, +\infty)$ (в точках s_k функция x' доопределена произвольным образом). Требуется по функции $y^\delta \in L_2(-\infty, +\infty)$: $\|y - y^\delta\|_{L_2} \le \delta$ и уровню погрешности δ определить число l и аппроксимировать положения $\{s_k\}_1^l$.

Следуя [22], изложим в несколько упрощенном виде построение и исследование методов локализации особенностей для задач **DisLI, DLI**. Сложности при построении методов связаны с тем, что они зависят от ядра K уравнения (2.1). Поэтому для простоты возьмем в качестве усредняющего ядра конкретную функцию $\phi(s) = \sin s/s$ (см. разд. 1). В соответствии с общей методикой [22] рассмотрим сопряженное уравнение

$$A^* f_\lambda \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t - s)\, f_\lambda(t)\, dt = \phi_\lambda(s), \quad s \in (-\infty, +\infty), \quad \phi_\lambda(s) = \phi(s/\lambda), \quad \lambda > 0. \tag{2.3}$$

С помощью преобразования Фурье легко показать, что ввиду условия (**K**) существует решение уравнения (2.3) $f_\lambda \in L_2(-\infty, +\infty)$, и вычислить величины $\|f_\lambda\|_{L_2}$, $\|f'_\lambda\|_{L_2}$. Нам также потребуется дополнительное условие ($\mathbf{1_{DL}}$) на точную функцию в задаче **DLI** при $p = 2$. В [22] доказана следующая лемма.

Лемма 3. *Для задач* **DisLI, DLI**, *если точная функция удовлетворяет соответственно условиям* ($\mathbf{1_{DisL}}$) *или* ($\mathbf{1_{DL}}$), *то функция* x^δ_λ *может быть представлена в виде* (1.3) *с оценками*

$$\sup_s |\alpha_\lambda(s)| \le A_0 \lambda^\mu, \quad \sup_s |\Delta x^\delta_\lambda(s)| \le \delta\eta(\lambda), \tag{2.4}$$

где функции x^δ_λ *и* $\eta(\lambda)$ *приведены в табл.* 5; $\mu = 1/2$, $A_0 = \|\phi\|_{L_2}$.

Т а б л и ц а 5

	Формула для x^δ_λ	$\eta(\lambda)$
Задача **DisLI** с усл. ($\mathbf{1_{DisL}}$)	$x^\delta_\lambda(s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^\delta(t) f_\lambda(s-t)dt$	$\|f_\lambda\|_{L_2}$
Задача **DLI** с усл. ($\mathbf{1_{DL}}$) при $p = 2$	$x^\delta_\lambda(s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^\delta(t) (f_\lambda(s-t))'_s dt$	$\|f'_\lambda\|_{L_2}$

Оценки (2.4) имеют более общий вид, чем оценки (1.4) из предыдущего раздела. Однако при построении методов локализации применяется тот же подход.

Для формулировки теоремы нам понадобятся следующие числа и функция:

$$G = \frac{a\,\Delta^{\min}}{8}, \quad \lambda_0 = \left(\frac{G}{A_0}\right)^2, \quad \delta_0 = \frac{G}{\eta(\lambda_0)}, \quad h(\delta) = 2H\lambda(\delta), \quad \text{где} \quad H = \frac{6L\Delta^{\max}}{a\,\Delta^{\min}}.$$

Обозначим через $\lambda(\delta)$ функцию, для которой выполняются неравенства

$$\frac{G}{2\delta} \le \eta(\lambda(\delta)) \le \frac{G}{\delta}.$$

Тогда справедлива следующая теорема, которая доказывается аналогично теореме 2.

Теорема 5. *Пусть для функции* x^δ_λ *из леммы* 3 *имеет место представление* (1.3), (2.4), *для функции* x *выполнены условия* (**2**), (**3**). *Тогда для всех* $\delta \le \delta_0$ *при связи параметров* $\lambda = \lambda(\delta)$ *и выполнении неравенства* $\min\limits_{k \ne j} |s_k - s_j| \ge h(\delta)$ *для метода* П–П1 *получим* $m = l$ *и будет справедлива оценка* $|s_k - s^\delta_k| \le \lambda(\delta)$.

Следствие 1. *Пусть в задаче* **DisLI** *функция* $x \in \mathfrak{M}'_{DisL}$, *а в задаче* **DLI** $x \in \mathfrak{M}'_{DL}$. *Тогда для всех* $\delta \le \delta_0$ *при связи параметров* $\lambda = \lambda(\delta)$ *и выполнении неравенства* $\min\limits_{k \ne j} |s_k - s_j| \ge h(\delta)$ *для метода* П–П1 *получим* $m = l$ *и будет справедлива оценка* $|s_k - s^\delta_k| \le \lambda(\delta)$.

В табл. 6 представлены результаты применения этого утверждения к задачам **DisLI** и **DLI** с конкретными функциями $K(t)$. Для более компактной записи положим $G = (1 - \sin 1)\Delta^{\min}/8$.

Т а б л и ц а 6

<table>
<tr><td></td><td>$K(t)$</td><td>$\lambda(\delta)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Задача **DisLI**
$x \in \mathfrak{M}'_{DisL}$</td><td>$\exp\Big(\dfrac{-t^2}{2}\Big)$</td><td>$\Big(2\ln\Big(\dfrac{G}{\sqrt{\pi}\,\delta}\Big)\Big)^{-1/2}$</td></tr>
<tr><td>$\exp(-\lvert t\rvert)$</td><td>$\Big(\dfrac{\sqrt{2\pi}\sqrt{\pi}\,\delta}{G}\Big)^{2/3}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Задача **DLI**
$x \in \mathfrak{M}'_{DL}$</td><td>$\exp\Big(\dfrac{-t^2}{2}\Big)$</td><td>$\Big(2\ln\Big(\dfrac{G}{\sqrt{2/3}\,\pi\delta}\Big)\Big)^{-1/2}$</td></tr>
<tr><td>$\exp(-\lvert t\rvert)$</td><td>$\Big(\dfrac{2\pi\sqrt{\pi/3}\,\delta}{G}\Big)^{2/5}$</td></tr>
</table>

Напомним, что $h(\delta) = 2H\lambda(\delta)$.

3. Оценки снизу точности и разделимости. Оптимальность методов

Для установления оптимальности (оптимальности по порядку) конкретного метода необходимы оценки снизу достижимой точности приближения положения особенностей. Эффективные оценки такого рода представляют также и самостоятельный интерес.

Введем два варианта условия на функцию с особенностями:

(4) Задано положительное число $\hat{h}$ такое, что $\min\limits_{k \neq j} |s_k - s_j| \geq \hat{h}$.

(4δ) Справедливо неравенство $\min\limits_{k \neq j} |s_k - s_j| \geq h(\delta)$, где

$$h(\delta) = \Big(\frac{p+1}{5(\Delta^{\min})^p}\Big)^{1/(p+1)} \Big(1 + \frac{1}{2(p+1)}\Big)\delta^{p/(p+1)}.$$

Обозначим через $\mathfrak{M}''_{BL}$ и $\mathfrak{M}''_{BL}(\delta)$ классы функций из $\mathfrak{M}_{BL}$, удовлетворяющие соответственно условиям (**4**) и (**4δ**). Для метода локализации $\tilde{\Pi}$ на классе функций $\mathfrak{M}''_{BL}$ введем понятия оптимальности и оптимальности по порядку. На примере задачи локализации разрывов первого рода в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ дадим определения оптимального (оптимального по порядку) метода по точности. Чтобы получить соответствующее определение для других задач, рассматриваемых в работе, необходимо заменить в определении класс $\mathfrak{M}''_{BL}$ на соответствующий класс функций с особенностями.

О п р е д е л е н и е 3. Для метода $\tilde{\Pi}$ точность восстановления особенностей на классе $\mathfrak{M}''_{BL}$ определяется величиной

$$\tau(\mathfrak{M}''_{BL}, \tilde{\Pi}, \delta) \equiv \sup_{x \in \mathfrak{M}''_{BL}} \sup_{\|x - x^\delta\|_C \leq \delta} \sup_k |s_k - s_k^\delta|.$$

Величину $\hat{\tau}(\mathfrak{M}''_{BL}, \delta) = \min\limits_{\tilde{\Pi}} \tau(\mathfrak{M}''_{BL}, \tilde{\Pi}, \delta)$ назовем оптимальной точностью локализации особенностей на классе $\mathfrak{M}''_{BL}$ (минимум берется по всем методам локализации разрывов). Метод $\tilde{\Pi}$ назовем оптимальным (оптимальным по порядку) на классе $\mathfrak{M}''_{BL}$, если $\hat{\tau}(\mathfrak{M}''_{BL}, \delta) = \tau(\mathfrak{M}''_{BL}, \tilde{\Pi}, \delta)$ (существует константа $R > 1$ такая, что $\tau(\mathfrak{M}''_{BL}, \tilde{\Pi}, \delta) \leq R\,\hat{\tau}(\mathfrak{M}''_{BL}, \delta)$).

Кроме точности аппроксимации интерес представляет оценка снизу для другой характеристики методов локализации — порога разделимости. Определение порога разделимости для конкретного метода и задачи локализации приведено в начале разд. 1. Дадим эти определения для произвольного метода локализации $\tilde{\Pi}$.

О п р е д е л е н и е 4. Наименьшая функция $\bar{h}(\delta,\tilde{\Pi},\mathfrak{M}_{BL})$, которую можно поставить в условие $\min\limits_{k\neq j}|s_k-s_j|\geq \bar{h}(\delta,\tilde{\Pi},\mathfrak{M}_{BL})$ так, чтобы метод $\tilde{\Pi}$ позволял локализовать особенности, называется *порогом разделимости метода* $\tilde{\Pi}$ на классе функций $\mathfrak{M}_{BL}$; *порогом разделимости* задачи **BL** на классе функций $\mathfrak{M}_{BL}$ называется функция $\hat{h}(\delta,\mathfrak{M}_{BL})=\min\limits_{\tilde{\Pi}}\bar{h}(\delta,\tilde{\Pi},\mathfrak{M}_{BL})$, где минимум берется по всем методам локализации $\tilde{\Pi}$. Метод $\tilde{\Pi}$ назовем Р-оптимальным (Р-оптимальным по порядку) на классе $\mathfrak{M}_{BL}$, если $\hat{h}(\mathfrak{M}_{BL},\delta)=\bar{h}(\mathfrak{M}_{BL},\tilde{\Pi},\delta)$ (существует константа $R>1$ такая, что $\bar{h}(\mathfrak{M}_{BL},\tilde{\Pi},\delta)\leq R\,\hat{h}(\mathfrak{M}_{BL},\delta)$).

Для задач **DisLI, DLI** оценки зависят от свойств функции K. Поэтому нам понадобятся дополнительные условия для ядра уравнения (2.1):

(1K) Существуют производные K',K'',K''' принадлежащие $L_2(-\infty,+\infty)$; $\|K'\|_{L_2}\neq 0$, $\|K''\|_{L_2}\neq 0$.

(2K) Существуют производные $K',K''\in L_2(0,+\infty)$; $K'(-t)=-K'(t)$ и $\|K'\|_{L_2}\neq 0$.

Теорема 6. *Для задач* **BL, BC, DL, DisLI, DLI** *оценки снизу для оптимальной точности и порога разделимости на соответствующих классах функций приведены в табл. 7.*

Т а б л и ц а 7

Задача	Класс	$\hat{\tau}$	Класс	$\hat{h}$
DL	$\mathfrak{M}''_{DL}$	$\left(\frac{\delta}{\Delta}^{\min}\right)^p$	$\mathfrak{M}_{DL}$	$\left(\frac{\delta}{\Delta^{\min}}\right)^p$
BL	$\mathfrak{M}''_{BL}$	$\frac{\delta}{\Delta^{\min}(2h)^{1/p}}+o(\delta)$	$\mathfrak{M}_{BL}$	$\left(\left(\frac{2}{\Delta^{\min}}\right)^p(p+1)\right)^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)}$
	$\mathfrak{M}''_{BL}(\delta)$	$\left(\frac{p+1}{5(\Delta^{\min})^p}\right)^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)}$		
BC	$\mathfrak{M}''_{BC}$	$\frac{\delta}{\Delta^{\min}}$	$\mathfrak{M}_{BC}$	$\frac{2\delta}{\Delta^{\min}}$
DisLI с усл.**(1K)**	$\mathfrak{M}''_{DisL}$	$\frac{\delta}{\Delta^{\min}\|K'\|_{L_2}}+o(\delta)$	$\mathfrak{M}_{DisL}$	$\frac{2}{(\Delta^{\min}\|K''\|_{L_2})^{1/2}}\delta^{1/2}+o(\delta^{1/2})$
DisLI с усл.**(2K)**	$\mathfrak{M}''_{DisL}$	$\frac{\delta}{2\Delta^{\min}\|K'\|_{L_2}}+o(\delta)$	$\mathfrak{M}_{DisL}$	$\frac{\delta}{2\Delta^{\min}\|K'\|_{L_2}}+o(\delta)$
DLI	$\mathfrak{M}''_{DL}$	$\frac{\delta}{\Delta^{\min}\|K\|_{L_2}}$	$\mathfrak{M}_{DL}$	$\frac{\delta}{\Delta^{\min}\|K\|_{L_2}}$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Изложим общую идею получения оценок снизу для точности (см., например, [21]) на примере задачи **DL**. Возьмем функцию $x(s)\in\mathfrak{M}''_{DL}$, имеющую особенность в точке s_1. Подберем такие Δs и функции $x_\pm\in\mathfrak{M}''_{DL}$ с особенностями в точках $s_1\pm\Delta s$, что $\|x_\pm-x\|_{L_2}=\delta$.

Зафиксируем метод локализации $\tilde{\Pi}$. Рассмотрим два варианта точных функций $x_\pm$; в качестве приближенной функции в обоих вариантах пусть будет функция x. Тогда метод $\tilde{\Pi}$ по этой функции x и уровню погрешности δ даст приближение, которое обозначим s_1^δ, *для особенностей в обоих вариантах.* Следовательно, справедливо неравенство $\tau(\mathfrak{M}''_{DL},\tilde{\Pi},\delta)\geq\max\{|s_1^\delta-s_1-\Delta s|,|s_1^\delta-s_1+\Delta s|\}\geq\Delta s$. Поскольку метод $\tilde{\Pi}$ произвольный, то эта же оценка справедлива для $\hat{\tau}(\mathfrak{M}''_{DL},\delta)$. Далее нужно подобрать экстремальную функцию $x(s)\in\mathfrak{M}''_{DL}$, имеющую особенность в точке s_1, для которой Δs было бы как можно большим. Например, положим

$$x(s)=\begin{cases}0, & s<0,\\ \Delta_1, & 0\le s<\Delta s,\\ \bar{x}(s), & s\ge\Delta s,\end{cases}\qquad x_{\pm}(s)=\begin{cases}0, & s<\pm\Delta s,\\ \Delta_1, & \pm\Delta s\le s<\Delta s,\\ \bar{x}(s), & s\ge\Delta s,\end{cases}$$

где $\Delta_1>0$, $\bar{x}(s)$ — произвольная функция такая, что $x,x_{\pm}\in\mathfrak{M}''_{DL}$. Поскольку $\|x-x_{\pm}\|^p_{L_p}=\Delta_1^p\Delta s$, полагая $\Delta s=(\delta/\Delta_1)^p$ и $\Delta_1=\Delta^{\min}$, получим требуемую оценку.

2) Теперь изложим основную идею получения оценок снизу для порога разделимости задачи **DL**. Возьмем функцию $x_1\in\mathfrak{M}_{DL}$, имеющую особенность в точке s_1^1, и функцию $x_2\in\mathfrak{M}_{BC}$ с особенностями в точках s_1^2, s_2^2, причем $\|x_1-x_2\|_{L_2}=\delta$ (точки s_1^2, s_2^2 должны быть близки друг к другу и к точке s_1^1). Выберем и зафиксируем метод $\tilde{\Pi}$, которому соответствует порог разделимости $\bar{h}(\mathfrak{M}_{DL},\tilde{\Pi},\delta)$ в условии (**4**). Пусть по функции x_1 для уровня погрешности δ метод выдает количество разрывов l_1. Поскольку в качестве точной и приближенной функций можно взять функцию x_1, то должно быть $l_1=1$. С другой стороны, в качестве точной можно рассматривать функцию x_2, а в качестве приближенной — функцию x_1. Значит, для функции x_2 условие (**4**) должно нарушаться, т. е. справедливо неравенство $\bar{h}(\mathfrak{M}_{DL},\tilde{\Pi},\delta)\ge|s_1^2-s_2^2|$. Поскольку метод $\tilde{\Pi}$ произвольный, то это неравенство должно выполняться для порога разделимости задачи $\hat{h}(\mathfrak{M}_{DL},\delta)$.

Выберем экстремальные функции $x_1,x_2\in\mathfrak{M}_{DL}$ следующим образом:

$$x_1(s)=\begin{cases}0, & s<0,\\ \Delta_1, & 0\le s<\Delta s,\\ \bar{x}(s), & s\ge\Delta s,\end{cases}\qquad x_2(s)=\begin{cases}0, & s<0,\\ \Delta_2, & 0\le s<\Delta s,\\ \bar{x}(s), & s\ge\Delta s,\end{cases}$$

где $\Delta_1>0$, $\bar{x}(s)$ — произвольная функция такая, что $x_1,x_2\in\mathfrak{M}_{DL}$, $\Delta_2=\Delta_1/2$. Поскольку $\|x_1-x_2\|^p_{L_p}=\Delta_2^p\Delta s$, полагая $\Delta s=(\delta/\Delta_2)^p$ и $\Delta_2=\Delta^{\min}$, получим требуемую оценку. Для остальных задач локализации оценки получаются аналогично, но необходимо подбирать другие экстремальные функции.

Отметим, что доказательство этой теоремы для задачи **BC** можно найти в [24], а доказательство для задачи **DisLI** с условием на ядро **(1K)** в [21]. Теорема доказана. $\square$

Сравнение для методов **DL, BL, BC** оценок, полученных в разд. 1, и оценок снизу позволяет сформулировать следующее утверждение.

Следствие 2. *Методы решения задач* **DL, BL, BC** *из классов* $\Phi_1,\Phi_2,\Phi F_1,\Phi F_2$ *при выборе параметра регуляризации* $\lambda=\lambda(\delta)$, *как в теоремах* 2, 3, 4, *оптимальны по порядку* (*по точности и по разделимости*) *на соответствующих классах функций с особенностями.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 223 с.
2. **Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
3. **Vasin V. V., Ageev A. L.** Ill-posed problems with a priori information. Utrecht, the Netherlands: VSP, 1995. 255 с.
4. **Теребиж В. Ю.** Восстановление изображений при минимальной априорной информации// Успехи физ. наук. 1995. Т. 165, № 2. С. 143–176.
5. **Теребиж В. Ю.** Введение в статистическую теорию обратных задач. М.: Физматлит, 2005. 376 с.

6. **Джеймс Р.** Оптические принципы дифракции рентгеновских лучей. М.: ИЛ, 1950. 572 с.
7. **Stern E. A.** Theory of the extended x-ray absorption fine structure techniques // Phys. Rev. B. 1974. Vol. 10, iss. 8. P. 3027–3037.
8. **Тычинский В. П.** Микроскопия субволновых структур // Успехи физ. наук. 1996. Т. 66, № 11. С. 1219–1229.
9. **Гончарский А. В., Черепащук А. М., Ягола А. Г.** Численные методы решения обратных задач астрофизики. М.: Наука, 1978. 336 с.
10. Don't Shed Tears over Breaks / G. Winkler, O. Wittich, V. Liebsher, A. Kempe // Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 2005. Bd. 107, No. 2. S. 57-87.
11. **Сизиков В. С.** Математические методы обработки результатов измерений. СПб.: Политехника, 2001. 240 с.
12. **Малла С.** Вэйвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 671 с.
13. Введение в контурный анализ и его приложения к обработке изображений и сигналов / Под ред. Я. А. Фурман. М.: Физматлит, 2002. 596 с.
14. **Козлов В. П.** О разрешающей способности спектральных приборов. I. Постановка задачи и критерий разрешения // Оптика и спектроскопия. 1964. Т. 16, № 3. С. 501–506.
15. **Козлов В. П.** О разрешающей способности спектральных приборов. II. Обобщенная разрешающая сила спектрального прибора // Оптика и спектроскопия. 1964. Т. 17, № 2. С. 278–283.
16. **Catarina G. M. Oudshoorn** Asymptotically minimax estimation of a function with jumps // Bernoulli. 1998. Vol. 4, no. 1. P.15–33
17. **Коростелев А. П.** О минимаксном оценивании разрывного сигнала // Теория вероятностей и ее применения. 1987. Т. 32, вып. 4. С. 796–799.
18. **Агеев А. Л., Антонова Т. В.** О новом классе некорректно поставленных задач // Изв. Урал. гос. ун-та. 2008. № 58. С. 27–45. (Математика. Механика. Информатика; вып.11.)
19. **Antonova T. V.** Solving equations of the first kind on classes of functions with singularities // Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. 1. 2002. P. 145–189.
20. **Агеев А. Л., Антонова Т. В.** О задаче разделения особенностей // Изв. вузов. 2007. № 11. С. 1–7. (Математика.)
21. **Агеев А. Л., Антонова Т. В.** Оценки снизу в задачах локализации особенностей функции // Проблемы теоретической и прикладной математики: тр. 39-й Всерос. молодеж. конф. Екатеринбург, 2008. С. 56–60.
22. **Ageev A. L., Antonova T. V.** Localization algorithms for singularities of solution to convolution equation of the first kind // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2008. Vol. 16, no. 7. P. 639–650.
23. **Агеев А. Л., Антонова Т. В.** Регуляризирующие алгоритмы выделения разрывов в некорректных задачах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48, № 8. С. 1362–1370.
24. **Антонова Т. В.** Регуляризирующие алгоритмы локализации изломов зашумленной функции // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 1. С. 44–58.
25. **Антонова Т. В.** Новые методы локализации разрывов зашумленной функции // Сиб. журн. вычисл. математики. 2010. Т. 13, № 4. С. 375–386.

Поступила 30.12.2010

Агеев Александр Леонидович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: ageev@imm.uran.ru

Антонова Татьяна Владимировна
канд. физ.-мат. наук
ст. науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: tvantonova@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 3 2011

УДК 517.977

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ОПЕРАТОРА АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ НА КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛОСЕ ФУНКЦИЙ[1]

Р. Р. Акопян

На классе аналитических в полосе функций решено несколько взаимосвязанных экстремальных задач для оператора аналитического продолжения: наилучшего приближения оператора, вычисления его модуля непрерывности, оптимального восстановления оператора по заданным с ошибкой граничным значениям функции на прямой.

Ключевые слова: приближение операторов, аналитические в полосе функции.

R. R. Akopyan. Best approximation of the operator of analytic continuation on the class of functions analytic in a strip.

We solve several interrelated extremal problems for the operator of analytic continuation on the class of functions analytic in a strip: the problem of the best approximation of the operator, calculation of its modulus of continuity, and optimal recovery of the operator by inaccurate boundary values of a function on a straight line.

Keywords: approximation of operators, analytic functions in a strip.

1. Постановка задач и основные результаты

Настоящая работа посвящена изучению нескольких взаимосвязанных экстремальных задач на классе аналитических в полосе функций.

На протяжении всей работы будут использоваться следующие обозначения. Через Y обозначим положительное число, равное ширине полосы, которую в свою очередь будем обозначать Π_Y. Точнее, Π_Y — полоса, параллельная вещественной оси, точки которой имеют мнимую часть между нулем и Y, т. е.

$$\Pi_Y := \{z\colon\ 0 < \Im z < Y\}\,.$$

Через α и β обозначим произвольные положительные числа, сумма которых равна единице, через y — положительное число, определяемое равенством $y = \beta Y$. Ясно, что справедливо неравенство $0 < y < Y$. Введенные параметры α, β, y и Y связаны равенствами

$$\alpha = \frac{Y-y}{Y}\,, \qquad \beta = 1-\alpha = \frac{y}{Y}\,.$$

Для произвольного вещественного числа η и функции f из $L^p(\mathbb{R}+i\eta),\ 1 \le p \le \infty$, введем обозначение

$$I^p_\eta(f) := \|f\|_{L^p(\mathbb{R}+i\eta)} = \begin{cases} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x+i\eta)|^p\,dx\right)^{1/p} & \text{в случае} \quad 1 \le p < \infty; \\ \operatorname{ess\,sup}\{|f(x+i\eta)|\colon x\in\mathbb{R}\} & \text{в случае} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Пусть $H^p = H^p(\Pi_Y)$ — пространство Харди функций f, аналитических в полосе Π_Y, след которых на каждой прямой $\mathbb{R}+i\eta,\ 0<\eta<Y$, принадлежит пространству $L^p(\mathbb{R}+i\eta)$ и для которых

$$\sup\{I^p_\eta(f)\colon\ 0<\eta<Y\} < +\infty.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00462).

Для функции $f \in H^p$ будем полагать, что на границах полосы — прямых $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}+iY$ — заданы функции соответственно φ и ψ из L^p, являющиеся почти всюду некасательными пределами функции f, т. е. почти всюду справедливы равенства

$$\varphi(x) = \lim_{\eta\to Y+0} f(x+i\eta), \qquad \psi(x) = \lim_{\eta\to Y-0} f(x+i\eta);$$

в дальнейшем для граничных значений будем использовать обозначения

$$f(x) := \varphi(x), \qquad f(x+iY) := \psi(x).$$

В пространстве Харди H^p выделим класс $Q = Q_Y^p$ функций f, граничные значения которых на прямой $\mathbb{R}+iY$ удовлетворяют неравенству $I_Y^p(f) \le 1$.

Задача о наилучшем приближении неограниченного линейного оператора линейными ограниченными операторами на классе элементов банахова пространства появилась в исследованиях С. Б. Стечкина в 1965 г. [7]. В его работе [8] 1967 г. была дана постановка задачи, приведены первые принципиальные результаты, дано решение задачи для операторов дифференцирования малого порядка.

Поставленная С. Б. Стечкиным задача интенсивно изучалась на протяжении многих лет. Ее исследовали С. Б. Стечкин, В. В. Арестов, В. Н. Габушин, Ю. Н. Субботин, Л. В. Тайков, А. П. Буслаев и др. К настоящему времени в задаче Стечкина получены следующие результаты. Выяснена взаимосвязь этой задачи с другими экстремальными задачами. Установлены количественные соотношения между модулем непрерывности линейного неограниченного оператора на классе элементов пространства, наилучшим приближением такого оператора и ошибкой оптимального восстановления значений оператора на элементах класса, заданных с известной погрешностью. Получены двойственные соотношения между первыми двумя задачами и соответственно наилучшим и наилучшим линейным приближениями одного класса другим. Получен ряд общих теорем существования и характеризации экстремального приближающего оператора. Хорошо изучено приближение функционалов. Дано решение задачи для конкретных операторов в классических функциональных пространствах. При этом наиболее полно исследовано наилучшее приближение операторов дифференцирования порядка k на классе n раз дифференцируемых функций $(0 \le k < n)$ в пространствах L^p на числовой оси и полуоси. Подробную информацию об исследованиях задачи Стечкина и взаимосвязанных с ней экстремальных задач можно найти в обзорной работе В. В. Арестова [1].

В настоящей статье рассматривается задача для конкретного оператора, а именно — задача наилучшего приближения оператора аналитического продолжения функции с вещественной оси на параллельную прямую $\mathbb{R}+iy$ линейными ограниченными операторами на классе Q функций, аналитических в полосе Π_Y. Точная постановка задачи такова.

З а д а ч а 1. Пусть $\mathcal{L}(N) = \mathcal{L}_y^p(N)$ — множество линейных ограниченных операторов из $L^p(\mathbb{R})$ в $L^p(\mathbb{R}+iy)$, норма которых $\|T\| = \|T\|_{L^p(\mathbb{R})\mapsto L^p(\mathbb{R}+iy)}$ не превосходит числа $N \ge 0$. Величина

$$U(T) = \sup\left\{I_y^p(f - Tf)\colon\ f \in Q\right\}$$

является уклонением оператора $T \in \mathcal{L}(N)$ от оператора аналитического продолжения на классе Q. Соответственно величина

$$E(N) = \inf\left\{U(T)\colon\ T \in \mathcal{L}(N)\right\} \tag{1.1}$$

есть наилучшее приближение оператора аналитического продолжения множеством ограниченных операторов $\mathcal{L}(N)$ на классе Q. Задача состоит в вычислении величины $E(N)$ и нахождении экстремального оператора, на котором в (1.1) достигается нижняя грань.

Задача 1 тесно взаимосвязана с рядом экстремальных задач. Одной из них является следующая задача вычисления модуля непрерывности оператора аналитического продолжения на классе.

З а д а ч а 2. Функцию вещественного переменного $\delta \in [0, \infty)$, определяемую равенством

$$\omega(\delta) = \sup\left\{ I_y^p(f)\colon \ f \in Q,\ I_0^p(f) \le \delta \right\}, \tag{1.2}$$

будем называть модулем непрерывности оператора аналитического продолжения на классе Q. Задача состоит в вычислении величины $\omega(\delta)$ и нахождении экстремальной функции (последовательности функций), на которой в (1.2) достигается верхняя грань.

Введем обозначения

$$\Delta(N) := \sup_{\delta \ge 0} \left\{ \omega(\delta) - N\delta \right\}, \quad N > 0;$$

$$l(\delta) := \inf_{N > 0} \left\{ E(N) + N\delta \right\}, \quad \delta \ge 0.$$

Следующее утверждение, связывающее величины (1.1) и (1.2), является частным случаем теоремы С. Б. Стечкина [8].

Теорема A. *Имеют место неравенства*

$$E(N) \ge \Delta(N), \quad N > 0; \tag{1.3}$$

$$\omega(\delta) \le l(\delta), \quad \delta \ge 0. \tag{1.4}$$

Ниже будет показано, что в неравенствах (1.3) и (1.4) имеют место равенства.

Через $\Omega(\lambda, \mu)$ обозначим вещественнозначную функцию двух неотрицательных переменных λ, μ, определяемую равенством

$$\Omega(\lambda, \mu) = \sup\left\{ I_y^p(f)\colon I_0^p(f) \le \lambda,\ I_Y^p(f) \le \mu \right\}. \tag{1.5}$$

Задачи о вычислении величин (1.2) и (1.5) эквивалентны. Действительно, из их определений следуют равенства

$$\omega(\delta) = \Omega(\delta, 1), \quad \delta \ge 0; \qquad \Omega(\lambda, \mu) = \mu\, \omega(\lambda/\mu), \quad \lambda \ge 0,\ \mu > 0.$$

Также из определения (1.5) следует, что для функций пространства $H^p(\Pi_Y)$ справедливо точное неравенство

$$I_y^p(f) \le \Omega(I_0^p(f), I_Y^p(f)).$$

В настоящей работе будет доказано, что имеет место равенство $\omega(\delta) = \delta^\alpha$, и, следовательно, $\Omega(\lambda, \mu) = \lambda^\alpha\, \mu^\beta$; таким образом, справедливо точное неравенство

$$I_y^p(f) \le I_0^p(f)^\alpha\, I_Y^p(f)^\beta. \tag{1.6}$$

Логарифмируя последнее неравенство и подставляя выражения α и β через y и Y, получим эквивалентное неравенство

$$\ln I_y^p(f) \le \frac{Y - y}{Y}\, \ln I_0^p(f) + \frac{y}{Y}\, \ln I_Y^p(f).$$

Иными словами, для произвольной фиксированной функции f из пространства $H^p(\Pi_Y)$ функция $\mathcal{I}(y) := \ln I_y^p(f)$ является выпуклой на отрезке $[0, Y]$.

Неравенства вида (1.6) известны (см., например, [2, гл. 8, § 3]). Соответствующее утверждение для функций, аналитических в кольце, хорошо известно как “теорема Адамара о трех кругах” (см., например, [4, отд. 3, гл. 6, § 3]).

Задачи восстановления значений оператора на элементах класса, принадлежащего области определения оператора, по информации об элементах класса, заданных с известной погрешностью, возникают в различных разделах математики и хорошо изучены. Восстановление осуществляется с помощью некоторого множества $\mathcal{R}$ операторов. В качестве $\mathcal{R}$, как правило, берется одно из следующих множеств отображений: множество $\mathcal{O}$ всех однозначных отображений, множество $\mathcal{B}$ ограниченных операторов или множество $\mathcal{L}$ линейных операторов. Различным задачам оптимального восстановления на классах аналитических функций посвящена монография [3].

Задачи 1 и 2 тесно взаимосвязаны со следующей задачей оптимального восстановления аналитической в полосе функции по граничным значениям (на одной из граничных прямых), заданным с ошибкой.

З а д а ч а 3. Для числа $\delta \geq 0$ и оператора $T \in \mathcal{R}$ определим величину

$$\mathcal{U}(T,\delta) = \sup\left\{I_y^p(f - Tq)\colon f \in Q,\, q \in L^p(\mathbb{R}),\, I_0^p(f-q) \leq \delta\right\}.$$

Тогда

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta) = \inf\left\{\mathcal{U}(T,\delta)\colon T \in \mathcal{R}\right\} \tag{1.7}$$

есть величина наилучшего (оптимального) восстановления оператора аналитического продолжения (аналитической функции) с помощью методов восстановления $\mathcal{R}$ на функциях класса Q по их граничным значениям на вещественной оси $\mathbb{R}$, заданным с ошибкой δ. Задача состоит в вычислении величины $\mathcal{E}(\delta)$ и определении оптимального метода восстановления — оператора, на котором в (1.7) достигается нижняя грань.

В следующей теореме приведено уточнение неравенства (1.4); она является частным случаем общего утверждения, связывающего задачу о модуле непрерывности оператора и задачу Стечкина с задачами оптимального восстановления (см. [1]).

Теорема B. *Имеют место неравенства*

$$\omega(\delta) \leq \mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta) \leq \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) \leq l(\delta), \quad \delta \geq 0. \tag{1.8}$$

На пространстве $L^p(\mathbb{R})$ определим оператор (свертки) $A_\sigma = A_\sigma[y,Y]$ формулой

$$(A_\sigma f)(x+iy) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{A}_\sigma\left((x+iy)-t\right)\, f(t)\, dt \tag{1.9}$$

с ядром

$$\mathcal{A}_\sigma(z) = \frac{1}{2Y}\frac{e^{i\sigma z}\,\sin\alpha\pi}{\operatorname{ch}\left(\dfrac{z}{Y} - i\beta\right)\pi + \cos\alpha\pi}. \tag{1.10}$$

Основными результатами работы являются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть числа* y, Y *удовлетворяют неравенству* $0 < y < Y$ *и* $N > 0$. *Тогда для величины* (1.1) *справедливо равенство*

$$E(N) = \beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta}.$$

При этом экстремальным оператором в задаче (1.1) *является оператор* A_σ, *определенный равенствами* (1.9) *и* (1.10), *в котором параметр* σ *задается равенством*

$$N = \alpha\, e^{-y\sigma}.$$

Теорема 2. *Пусть числа* y, Y *удовлетворяют неравенству* $0 < y < Y$. *Тогда для величин* (1.2), (1.5) *и* (1.7) *справедливы равенства*

$$\omega(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) = \delta^\alpha, \quad \Omega(\lambda,\mu) = \lambda^\alpha\,\mu^\beta.$$

При этом оптимальным методом восстановления в задаче (1.7) *является линейный ограниченный оператор* A_σ, *определенный равенствами* (1.9) *и* (1.10), *в котором параметр* σ *задается равенством*

$$\delta = e^{\sigma Y}.$$

2. Вспомогательные утверждения

В дальнейшем будем использовать функцию $K_{a,b}$, $a>0$, $b>0$, определенную на вещественной оси формулой

$$K_{a,b}(t)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sh}at}{\operatorname{sh}(a+b)t}, & t\neq 0;\\ \dfrac{a}{a+b}, & t=0.\end{cases} \tag{2.1}$$

Ясно, что функция $K_{a,b}$ при произвольных положительных значениях параметров a и b является положительной, четной, непрерывной на вещественной оси, и, как нетрудно проверить, имеет место равенство

$$K_{b,a}(t)=\Big(1-e^{-bt}K_{a,b}(t)\Big)e^{-at},\quad t\in\mathbb{R}.$$

Кроме того, преобразование Фурье $\widehat{K_{a,b}}$ функции $K_{a,b}$ обладает следующими свойствами.

Лемма 1. *При произвольных положительных значениях параметров a и b функция $\widehat{K_{a,b}}$ в полосе $|\Im z|<b$ удовлетворяет равенству*

$$\widehat{K_{a,b}}(z)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{a+b}\,\frac{\sin\dfrac{a\pi}{a+b}}{\operatorname{ch}\dfrac{z\pi}{a+b}+\cos\dfrac{a\pi}{a+b}}; \tag{2.2}$$

на вещественной оси является положительной суммируемой функцией, при этом справедливо равенство

$$\|\widehat{K_{a,b}}\|_{L^1(\mathbb{R})}=K_{a,b}(0)=\frac{a}{a+b}.$$

Доказательство. Из определения (2.1) следует, что при $|\eta|<b$ функция $e^{\eta t}K_{a,b}(t)$ суммируема на вещественной прямой. Тогда для произвольного z, $|\Im z|<b$, используя известное равенство (см., например, равенство (2.5.46.8.) в [6]), имеем

$$\widehat{K_{a,b}}(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}K_{a,b}(t)\,e^{izt}\,dt=\frac{1}{2}\,\frac{1}{a+b}\;\frac{\sin\dfrac{a\pi}{a+b}}{\operatorname{ch}\dfrac{z\pi}{a+b}+\cos\dfrac{a\pi}{a+b}}\,.$$

Выражение в правой части последнего равенства положительно на вещественной оси, что следует из неравенств

$$\operatorname{ch}\frac{x\pi}{a+b}\geq 1,\quad x\in\mathbb{R};\qquad \left|\cos\frac{a\pi}{a+b}\right|<1;\qquad \sin\frac{a\pi}{a+b}>0.$$

Тогда

$$\|\widehat{K_{a,b}}\|_{L^1(\mathbb{R})}=\int\limits_{\mathbb{R}}|\widehat{K_{a,b}}(x)|\,dx=\int\limits_{\mathbb{R}}\widehat{K_{a,b}}(x)\,e^{-i0x}\,dx=K_{a,b}(0)=\frac{a}{a+b}.$$

Лемма 1 доказана. □

В качестве следствия леммы 1 приведем равенство

$$\widehat{K_{b,a}}(z)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{a+b}\,\frac{\sin\dfrac{a\pi}{a+b}}{\operatorname{ch}\dfrac{z\pi}{a+b}-\cos\dfrac{a\pi}{a+b}},\quad |\Im z|<a. \tag{2.3}$$

Следующее утверждение о представлении функции, аналитической в полосе, через ее граничные значения является известной формулой Пуассона.

Лемма 2. *Для произвольных $x \in \mathbb{R}$, $0 < y < Y$ и функции f из $H^p(\Pi_Y)$, $1 \le p \le \infty$, справедливо равенство*

$$f(x+iy) = \frac{1}{2Y} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\sin \alpha\pi}{\operatorname{ch} \dfrac{(x-t)\pi}{Y} + \cos\alpha\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{2Y} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\sin \alpha\pi}{\operatorname{ch} \dfrac{(x-t)\pi}{Y} - \cos\alpha\pi} f(t+iY)\,dt. \quad (2.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим отображение

$$\zeta = i\frac{1+ie^{\frac{z\pi}{Y}}}{1-ie^{\frac{z\pi}{Y}}}, \quad (2.5)$$

переводящее полосу $\Pi_Y = \{z\colon 0 < \Im z < Y\}$ в единичный круг $D = \{\zeta\colon\ |\zeta| < 1\}$. Граница полосы Π_Y — прямые $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}+iY$; они отображаются соответственно в левую и правую дуги единичной окружности. Для функции $f \in H^p(\Pi_Y)$ обозначим через g функцию, аналитическую в единичном круге D, определенную равенством $f(z) = g(\zeta(z))$. Убедимся, что функция g принадлежит пространству Харди $H^p(D)$.

В случае $p = \infty$ этот факт вытекает из равенства

$$\sup\{|g(\zeta)|\colon \zeta \in D\} = \sup\{|f(z)|\colon z \in \Pi_Y\}.$$

Рассмотрим случай $1 \le p < \infty$. Вследствие существования (некасательных предельных) граничных значений функции f почти в каждой точке границы полосы Π_Y (прямых $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}+iY$) функция g также имеет предельные граничные значения почти всюду на единичной окружности, которые будем обозначать $g(e^{i\tau}) := \lim_{r\to 1-0} g(re^{i\tau})$. Тогда имеет место равенство

$$\lim_{r\to 1-0} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |g(re^{i\tau})|^p\,d\tau \right)^{1/p} = \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |g(e^{i\tau})|^p\,d\tau \right)^{1/p}. \quad (2.6)$$

Производя в последнем интеграле замену переменных (2.5) и учитывая, что дифференциалы связаны равенством

$$d\tau = \pm\frac{\pi}{Y} \frac{1}{\operatorname{ch} \dfrac{t\pi}{Y}}\,dt$$

со знаком “плюс” в интеграле по прямой $\mathbb{R}$ и “минус” — по $\mathbb{R}+iY$, получим, что величина (2.6) равна

$$\left(\frac{1}{2Y} \int\limits_{\mathbb{R}} |f(t)|^p \frac{dt}{\operatorname{ch} \dfrac{\pi t}{Y}} + \frac{1}{2Y} \int\limits_{\mathbb{R}} |f(t+iY)|^p \frac{dt}{\operatorname{ch} \dfrac{\pi t}{Y}} \right)^{1/p}.$$

Следовательно, из условия $f \in H^p(\Pi_Y)$ вытекает конечность величины (2.6) — нормы функции g в пространстве $H^p(D)$.

В результате получили: для произвольного p, $1 \le p \le \infty$, если $f \in H^p(\Pi_Y)$, то $g \in H^p(D)$ (и тем более пространству $H^1(D)$). Тогда по теореме Фихтенгольца (см., например, [5, гл. 2, § 5.3]) функция g в круге D представима через свои граничные значения по формуле Пуассона

$$g(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} g(e^{i\tau})\, \Re\left(\frac{e^{i\tau}+\zeta}{e^{i\tau}-\zeta} \right) d\tau. \quad (2.7)$$

Производя в равенстве (2.7) замену переменных (2.5) и используя равенство

$$\Re\left(\frac{e^{i\tau}+\zeta}{e^{i\tau}-\zeta} \right) = \frac{\sin\alpha\pi \operatorname{ch} \dfrac{x\pi}{Y}}{\operatorname{ch} \dfrac{(x-t)\pi}{Y} \pm \cos\alpha\pi}, \quad z = x+iy,$$

получаем равенство (2.4). Лемма 2 доказана. □

Следствие 1. *Для произвольных $x\in\mathbb{R}$, $0<y<Y$ и функции f из класса Q справедливо равенство*

$$f(x+iy)=\frac{1}{2Y}e^{-\sigma y}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{e^{i\sigma(x-t)}\sin\alpha\pi}{\operatorname{ch}\dfrac{(x-t)\pi}{Y}+\cos\alpha\pi}f(t)\,dt+\frac{1}{2Y}e^{\sigma(Y-y)}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{e^{i\sigma(x-t)}\sin\alpha\pi}{\operatorname{ch}\dfrac{(x-t)\pi}{Y}-\cos\alpha\pi}f(t+iY)\,dt. \tag{2.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя формулу Пуассона (2.4) к функции $e^{-i\sigma z}f(z)$ и умножая полученное равенство на $e^{i\sigma z}$, будем иметь

$$f(x+iy)=\frac{1}{2Y}e^{i\sigma z}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{e^{-i\sigma t}\sin\alpha\pi}{\operatorname{ch}\dfrac{(x-t)\pi}{Y}+\cos\alpha\pi}f(t)\,dt+\frac{1}{2Y}e^{i\sigma z}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{e^{-i\sigma(t+iY)}\sin\alpha\pi}{\operatorname{ch}\dfrac{(x-t)\pi}{Y}-\cos\alpha\pi}f(t+iY)\,dt$$

$$=\frac{1}{2Y}e^{-\sigma y}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{e^{i\sigma(x-t)}\sin\alpha\pi}{\operatorname{ch}\dfrac{(x-t)\pi}{Y}+\cos\alpha\pi}\,f(t)\,dt+\frac{1}{2Y}e^{\sigma(Y-y)}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{e^{i\sigma(x-t)}\sin\alpha\pi}{\operatorname{ch}\dfrac{(x-t)\pi}{Y}-\cos\alpha\pi}f(t+iY)\,dt.\quad\square$$

Лемма 3. *Для произвольного неотрицательного числа δ справедливо неравенство*

$$\omega(\delta)\ge\delta^{\alpha}. \tag{2.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае $p=\infty$ рассмотрим (целую) функцию, определяемую равенством

$$f_\sigma(z)=e^{i\sigma z},\quad \sigma\in\mathbb{R}.$$

На прямой $\mathbb{R}+i\eta$ справедливо тождество $|f_\sigma(x+i\eta)|\equiv e^{-\sigma\eta}$, и, следовательно, $I_\eta^\infty(f_\sigma)=e^{-\sigma\eta}$. Отсюда вытекает, что при любом σ функция $e^{\sigma Y}f_\sigma$ принадлежит классу Q. Обозначая $\delta=e^{\sigma Y}$ и используя определение модуля непрерывности (1.2), получаем оценку

$$\omega(\delta)\ge I_y^\infty(e^{\sigma Y}f_\sigma)=e^{\sigma(Y-y)}=\delta^{\alpha}.$$

Для обоснования оценки (2.9) при $1\le p<\infty$ рассмотрим функцию

$$f_{\sigma,h}(z)=\frac{1}{h}\int\limits_{\sigma-h}^{\sigma+h}\varphi\left(\frac{t-\sigma}{h}\right)e^{izt}dt=e^{i\sigma z}\int\limits_{-1}^{1}\varphi(t)\,e^{ihzt}\,dt,$$

где $h>0$ и φ — неотрицательная, бесконечно дифференцируемая функция с носителем в $[-1,1]$. Непосредственно из определения функции $f_{\sigma,h}$ вытекает равенство

$$I_\eta^p(f_{\sigma,h})=\frac{1}{h}\,e^{-\eta\sigma}I_{h\eta}^p(f_{0,1}).$$

Следовательно, функция $f_{\sigma,h}he^{Y\sigma}/I_{hY}^p(f_{0,1})$ принадлежит классу Q. Используя обозначение $\delta=e^{\sigma Y}$ и определение модуля непрерывности (1.2), для произвольного положительного h получаем оценку

$$\omega(\delta)\ge I_y^p\left(\frac{f_{\sigma,h}he^{Y\sigma}}{I_{hY}^p(f_{0,1})}\right)=\delta^{\alpha}\,\frac{I_{hy}^p(f_{0,1})}{I_{hY}^p(f_{0,1})}.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $h\to+0$, получаем оценку (2.9). Лемма 3 доказана. $\square$

Теперь нетрудно получить и оценку снизу величины $\Delta(N)$.

Следствие 2. *Для произвольного положительного числа N справедливо неравенство*

$$\Delta(N)\ge\beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta}. \tag{2.10}$$

Действительно, из определения величины $\Delta(N)$ и леммы 3 имеем

$$\Delta(N) = \sup_{\delta\ge 0}\{\omega(\delta) - N\delta\} \ge \sup_{\delta\ge 0}\{\delta^\alpha - N\delta\} = \beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta}. \qquad \square$$

Лемма 4. *Для оператора A_σ, определенного равенствами* (1.9), (1.10), *где σ — произвольное вещественное число, имеют место неравенства*

$$U(A_\sigma) \le \beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta}, \qquad \|A_\sigma\| \le N, \quad \text{где} \quad N = \alpha\,e^{-y\sigma}. \tag{2.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равенства (2.8) и формул (1.9), (1.10) следует соотношение

$$f(x+iy) - (A_\sigma f)(x+iy) = \frac{1}{2Y}e^{\sigma(Y-y)}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\sigma(x-t)}\,\sin\alpha\pi}{\operatorname{ch}\dfrac{(x-t)\pi}{Y} - \cos\alpha\pi}\,f(t+iY)\,dt, \tag{2.12}$$

которое означает, что разность $f - A_\sigma f$ представима в виде свертки следа функции f на прямой $\mathbb{R} + iY$ с функцией U_σ, определяемой формулой

$$\mathrm{U}_\sigma(z) = \frac{1}{2Y}\frac{e^{i\sigma z}\,e^{\sigma Y}\sin\alpha\pi}{\operatorname{ch}\left(\dfrac{z}{Y} - i\beta\right)\pi - \cos\alpha\pi}. \tag{2.13}$$

Функции $\widehat{K_{a,b}}$, $\widehat{K_{b,a}}$, заданные равенствами (2.2), (2.3), связаны с ядром оператора (1.10) и уклонения (2.13) формулами

$$\mathcal{A}_\sigma(z) = e^{i\sigma z}\widehat{K_{a,b}}(z-iy), \qquad \mathrm{U}_\sigma(z) = e^{i\sigma(z-iY)}\widehat{K_{b,a}}(z-iy), \quad a = Y-y = \alpha Y, \quad b = y = \beta Y,$$

и, следовательно, по лемме 1 справедливы равенства

$$\|\mathcal{A}_\sigma\|_{L^1(\mathbb{R}+iy)} = \alpha e^{-\sigma y}, \qquad \|\mathrm{U}_\sigma\|_{L^1(\mathbb{R}+iy)} = \beta e^{\sigma(Y-y)}.$$

Откуда, используя определение оператора (1.9) и представление уклонения (2.12), получаем неравенства

$$J_y^p(A_\sigma f) \le \alpha e^{-\sigma y} J_0^p(f), \qquad J_y^p(f - A_\sigma f) \le \beta e^{\sigma(Y-y)} J_Y^p(f).$$

И поэтому

$$\|A_\sigma\| \le \alpha e^{-y\sigma}, \qquad U(A_\sigma) \le \beta e^{(Y-y)\sigma}.$$

Лемма 4 доказана. $\square$

Отметим, что неравенства (2.11) являются равенствами; экстремальными здесь являются функции f_σ (для $p=\infty$) и семейство функций $f_{\sigma,h}$ (для $1 \le p < \infty$), определенные в лемме 3. Этот факт следует из приведенных далее доказательств основных теорем.

Лемма 4 позволяет получить оценки сверху для величин $E(N)$ и $l(\delta)$.

Следствие 3. *Для произвольного положительного числа N и неотрицательного δ справедливы неравенства*

$$E(N) \le \beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta}, \tag{2.14}$$

$$l(\delta) \le \delta^\alpha. \tag{2.15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть параметр N определяется равенством $N = \alpha\,e^{-y\sigma}$, в котором σ — произвольное вещественное число. Тогда, используя определение (1.1) величины $E(N)$ и неравенство (2.11), получаем

$$E(N) = \inf\left\{U(T)\colon T \in \mathcal{L}_y^p(N)\right\} \le U(A_\sigma) \le \beta\alpha^{\alpha/\beta}N^{-\alpha/\beta}.$$

Из определения величины $l(\delta)$, используя предыдущее неравенство, получаем

$$l(\delta) = \inf_{N>0}\{E(N) + N\delta\} \le \inf_{N>0}\left\{\beta\alpha^{\alpha/\beta}N^{-\alpha/\beta} + N\delta\right\} = \delta^\alpha.$$

3. Доказательство основных результатов

Объединяя вместе неравенства (1.3) теоремы A, (2.10) следствия 2 и (2.14) следствия 3, получаем цепочку неравенств

$$\beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta} \le \Delta(N) \le E(N) \le \beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta}.$$

Откуда вытекает равенство

$$E(N) = \beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta}.$$

Это означает, что и в (2.11) имеют место равенства, а оператор A_σ является экстремальным в задаче 1. Теорема 1 доказана. □

Объединяя вместе неравенства (1.8) теоремы B, (2.9) леммы 3 и (2.15) следствия 3, получаем цепочку неравенств

$$\delta^\alpha \le \omega(\delta) \le \mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta) \le \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) \le l(\delta) \le \delta^\alpha.$$

Откуда вытекает равенство

$$\omega(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) = \delta^\alpha.$$

В частности, для параметров σ и δ, связанных равенством $\delta = e^{\sigma Y}$, в цепочке

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta) \le \mathcal{U}(A_\sigma, \delta) \le \sup\left\{ I_y^p(f - A_\sigma f) + I_y^p(A_\sigma(f-q))\colon f \in Q,\, I_0^p(f-q) \le \delta \right\}$$
$$= U(A_\sigma) + \|A_\sigma\|\,\delta = \delta^\alpha$$

все неравенства являются равенствами, что означает экстремальность (линейного ограниченного) оператора A_σ в задаче 3. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арестов В.В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 6 (312). С. 89–124.
2. **Ибрагимов И.И.** Теория приближения целыми функциями. Баку: Изд-во “Элм”, 1979. 465 с.
3. **Osipenko K.Yu.** Optimal recovery of analytic functions. Huntington: NOVA Science Publ. Inc., 2000. 220 p.
4. **Полиа Г., Сеге Г.** Задачи и теоремы из анализа: в 2 т. М.: Наука, 1978. Т. 1. 392 с.
5. **Привалов И.И.** Граничные свойства аналитических функций. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. 336 с.
6. **Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.** Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 799 с.
7. **Стечкин С.Б.** Неравенства между нормами производных произвольной функции // Acta Sci. Math. 1965. Vol. 26, no. 3–4. P. 225–230.
8. **Стечкин С.Б.** Наилучшее приближение линейных операторов // Мат. заметки. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 137–148.

Акопян Роман Размикович
канд. физ.-мат. наук
зав. кафедрой
Озёрский технологический институт НИЯУ МИФИ
Уральский федеральный университет
e-mail: R.Akopyan@vm.oti.ru

Поступила 10.05.2011

Том 17 № 3 2011

УДК 517.518

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ОЦЕНКАХ ПОРЯДКА РОСТА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ КРАТНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СУММ ФУРЬЕ[1]

Н. Ю. Антонов

Пусть $\{S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x})\}_{k=1}^{\infty}$ — некоторая последовательность прямоугольных частичных сумм кратного тригонометрического ряда Фурье функции f, $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность положительных чисел. Рассматривается вопрос о том, при каких условиях на класс $\varphi(L)$ для любой функции f из этого класса возможны оценки вида $S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x}) = o(\lambda_k)$ п.в. с правой частью, зависящей лишь от k.

Ключевые слова: кратные тригонометрические ряды Фурье, оценки порядка роста.

N. Yu. Antonov. Note on estimates for the growth order of sequences of multiple rectangular Fourier sums.

Let $\{S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x})\}_{k=1}^{\infty}$ be some sequence of rectangular partial sums of the multiple trigonometric Fourier series of a function f, and let $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ be a nondecreasing sequence of positive numbers. We investigate conditions on the belonging of the function f to the classes $\varphi(L)$ under which estimates of the following form are possible:

$$S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x}) = o(\lambda_k) \quad \text{a.e.}$$

where the right-hand side depends on k only.

Keywords: multiple trigonometric Fourier series, growth order estimates.

Пусть d — натуральное число, $\mathbb{T}^d = [-\pi,\pi)^d$ — d-мерный тор, $\varphi\colon\ [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ — неубывающая функция. Обозначим через $\varphi(L)(\mathbb{T}^d)$ множество всех определенных на $\mathbb{T}^d$ измеримых по Лебегу вещественнозначных функций f, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_{\mathbb{T}^d} \varphi(|f(\mathbf{t})|)d\mathbf{t} < \infty.$$

Пусть $f \in L(\mathbb{T}^d)$, $\mathbb{Z}^d$ — целочисленная решетка в $\mathbb{R}^d$, $\mathbf{k} = (k_1,\dots,k_d) \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{kx} = k_1x_1 + \ldots + k_dx_d$,

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kx}} \tag{1}$$

— кратный тригонометрический ряд Фурье функции f. Пусть $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_d)$ — вектор с неотрицательными целочисленными координатами. Обозначим через $S_{\mathbf{n}}(f,\mathbf{x})$ значение $\mathbf{n}$-й прямоугольной частичной суммы ряда (1)

$$S_{\mathbf{n}}(f,\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_d)\colon\ |k_j|\leqslant n_j,\ 1\leqslant j\leqslant d} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kx}}.$$

В случае $d = 1$ хорошо известно [1], что для произвольной функции $f \in L(\mathbb{T})$ для почти всех $x \in \mathbb{T}$ справедлива оценка

$$S_n(f,x) = o(\ln n). \tag{2}$$

[1]Работа выполнена в рамках программ фундаментальных исследований Президиума РАН “Математическая теория управления” и Отделения математических наук РАН “Современные проблемы теоретической математики” при финансовой поддержке УрО РАН (проекты 09-П-1-1013, 09-Т-1-1004), а также при поддержке РФФИ (проект 11-01-00347).

К. И. Осколков [2] обобщил соотношение (2) на случай произвольной подпоследовательности последовательности сумм Фурье: для любой последовательности натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ и любой функции $f \in L(\mathbb{T})$

$$S_{n_k}(f,x) = o(\ln k) \quad \text{п.в.} \tag{3}$$

В случае $d = 2$ Г. А. Карагулян [3] получил следующий двумерный аналог оценки (3): для любой последовательности $\mathbf{n}_k = (n_k^1, n_k^2)$ и для каждой функции $f \in L\ln^+ L(\mathbb{T}^2)$

$$S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x}) = o(\ln^2 k) \quad \text{п.в.} \tag{4}$$

В работе [4] автором показано, что если $f \in L(\ln^+ L)^2(\mathbb{T}^2)$, то справедлив аналог оценки (4) с $\ln k$ вместо $\ln^2 k$ в правой части.

Пусть последовательность $\mathbf{n}_k = (n_k^1, n_k^2, \dots, n_k^d)$ представима в виде

$$n_k^j = \alpha_j m_k + O(1), \quad k \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant j \leqslant d,$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ — неотрицательные вещественные числа, а $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел. Тогда [5] для любой функции f из класса $L(\ln^+ L)^{d-1}(\mathbb{T}^d)$ при почти всех $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d$ справедлива оценка

$$S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x}) = o(\ln k). \tag{5}$$

Отметим, что во всех приведенных выше результатах оценки последовательностей сумм Фурье обладают тем свойством, что их правая часть зависит лишь от порядкового номера частичной суммы в данной последовательности и не зависит от порядка роста координат вектора индекса частичной суммы. В настоящей работе рассматривается вопрос о том, для каких классов $\varphi(L)(\mathbb{T}^d)$ подобные оценки могут иметь место.

Теорема 1. *Пусть $\{\mathbf{n}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность d-мерных векторов с неотрицательными целочисленными координатами такая, что*

$$\min_{1\leqslant j\leqslant d} n_k^j \to \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty, \tag{6}$$

$\{\lambda_l\}_{l=1}^{\infty}$ — произвольная неубывающая последовательность положительных чисел, функция $\varphi\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ такая, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(u)$ возрастающая и выпуклая, а $\varphi(u^{1/2})$ вогнутая. Предположим, что существует функция $g \in \varphi(L)(\mathbb{T}^d)$, у которой последовательность $S_{\mathbf{n}_k}(g,\mathbf{x})$ не сходится по мере. Тогда найдутся подпоследовательность $\{\mathbf{n}_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ и функция $f \in \varphi(L)(\mathbb{T}^d)$ такие, что

$$\sup_{l\in\mathbb{N}} \frac{|S_{\mathbf{n}_{k_l}}(f,\mathbf{x})|}{\lambda_l} = +\infty \quad \text{п.в.}$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $S_n(f,\mathbf{x})$ n-ю кубическую частичную сумму ряда (1), т. е. частичную сумму $S_{\mathbf{n}}(f,\mathbf{x})$, у которой $\mathbf{n} = (n, n, \dots, n)$. Известно следующее утверждение.

Теорема A (С. В. Конягин [6], см. также [7; 8]). *Суммируемая функция $f \in \varphi(L)(\mathbb{T}^d)$, для которой $S_n(f,\mathbf{x})$ не сходится по мере, существует тогда и только тогда, когда*

$$\liminf_{u\to\infty} \frac{\varphi(u)}{u(\ln u)^{d-1}} = 0. \tag{7}$$

Непосредственным следствием теоремы 1 и теоремы A является

Теорема 2. *Пусть $\{\lambda_l\}_{l=1}^{\infty}$ — произвольная неубывающая последовательность положительных чисел, функция $\varphi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ удовлетворяет условию (7), $\varphi(0) = 0$, $\varphi(u)$ возрастающая и выпуклая и $\varphi(u^{1/2})$ вогнутая. Тогда найдутся последовательность $\{n_l\}_{l=1}^{\infty}$ и функция $f \in \varphi(L)(\mathbb{T}^d)$ такие, что*

$$\sup_{l\in\mathbb{N}} \frac{|S_{n_l}(f,\mathbf{x})|}{\lambda_l} = +\infty \quad \text{п.в.}$$

Из оценки (5) в качестве частного случая следует, что для любой последовательности натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ и любой функции $f \in L(\ln^+ L)^{d-1}(\mathbb{T}^d)$ для соответствующей подпоследовательности последовательности кубических частичных сумм ряда Фурье функции f справедлива оценка

$$S_{n_k}(f, \mathbf{x}) = o(\ln k) \quad \text{п.в.} \tag{8}$$

Теорема 2 показывает, в частности, что для классов $\varphi(L)(\mathbb{T}^d)$, не содержащихся в классе $L(\ln^+ L)^{d-1}(\mathbb{T}^d)$, оценки, подобные (8), с правой частью вида $o(\lambda_k)$, зависящей лишь от k, невозможны.

Доказательство теоремы 1. Пусть для функции $g \in \varphi(L)(\mathbb{T}^d)$ последовательность $S_{\mathbf{n}_k}(g, \mathbf{x})$ не сходится по мере. Тогда найдутся числа $\alpha, \sigma > 0$ такие, что для бесконечного числа номеров k

$$\operatorname{mes}\Big\{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d \colon\, |S_{\mathbf{n}_k}(g, \mathbf{x}) - g(\mathbf{x})| > \sigma\Big\} \geqslant \alpha. \tag{9}$$

Положим для $l \in \mathbb{N}$ $\mu_l = \lambda_l \rho_l$, где $\rho_l > 0$, $\rho_l \to \infty$ при $l \to \infty$. Для каждого $\varepsilon > 0$ и любой функции $h \in \varphi(L)(\mathbb{T}^d)$ найдется (см., например, [9, лемма 2]) кратный тригонометрический полином $T(\mathbf{x})$ такой, что

$$\int\limits_{\mathbb{T}^d} \varphi(|h(\mathbf{t}) - T(\mathbf{t})|)d\mathbf{t} < \varepsilon.$$

Поэтому найдется последовательность полиномов $T^{(l)}(\mathbf{x})$, для которых

$$\int\limits_{\mathbb{T}^d} \varphi(\mu_l|g(\mathbf{t}) - T^{(l)}(\mathbf{t})|)d\mathbf{t} < \frac{\alpha}{2} \min\left\{\varphi\left(\frac{\sigma\mu_l}{2}\right), 1\right\}, \quad l \in \mathbb{N}.$$

В силу условия (6) теоремы можно выбрать последовательность номеров $\{k_l\}_{l=1}^{\infty}$, удовлетворяющих условию (9) и таких, что величина $\min\{n_{k_l}^j \colon 1 \leqslant j \leqslant d\}$ больше степени полинома $T^{(l)}$ по каждой переменной, откуда $T^{(l)}(\mathbf{x}) = S_{\mathbf{n}_{k_l}}(T^{(l)}, \mathbf{x})$. Тогда для $l \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned}
&\Big\{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d \colon\, |S_{\mathbf{n}_{k_l}}(g, \mathbf{x}) - g(\mathbf{x})| > \sigma\Big\} \\
&= \Big\{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d \colon\, |S_{\mathbf{n}_{k_l}}(g, \mathbf{x}) - S_{\mathbf{n}_{k_l}}(T^{(l)}, \mathbf{x}) + T^{(l)}(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})| > \sigma\Big\} \\
&\subset \Big\{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d \colon\, |S_{\mathbf{n}_{k_l}}(g - T^{(l)}, \mathbf{x})| + |T^{(l)}(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})| > \sigma\Big\} \\
&\subset \Big\{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d \colon\, |S_{\mathbf{n}_{k_l}}(g - T^{(l)}, \mathbf{x})| > \frac{\sigma}{2}\Big\} \cup \Big\{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d \colon\, |T^{(l)}(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})| > \frac{\sigma}{2}\Big\}.
\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что

$$\begin{aligned}
\operatorname{mes}\Big\{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d \colon\, |T^{(l)}(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})| > \frac{\sigma}{2}\Big\} &= \operatorname{mes}\Big\{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d \colon\, \varphi\Big(\mu_l|T^{(l)}(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})|\Big) > \varphi\left(\frac{\sigma\mu_l}{2}\right)\Big\} \\
&\leqslant \frac{1}{\varphi\left(\frac{\sigma\mu_l}{2}\right)} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \varphi(|g(\mathbf{t}) - T^{(l)}(\mathbf{t})|)d\mathbf{t} < \frac{\alpha}{2},
\end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned}
\operatorname{mes}\Big\{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d \colon\, |S_{\mathbf{n}_{k_l}}(g - T^{(l)}, \mathbf{x})| > \frac{\sigma}{2}\Big\} &\geqslant \operatorname{mes}\Big\{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d \colon\, |S_{\mathbf{n}_{k_l}}(g, \mathbf{x}) - g(\mathbf{x})| > \sigma\Big\} \\
&- \operatorname{mes}\Big\{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d \colon\, |T^{(l)}(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})| > \frac{\sigma}{2}\Big\} > \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}.
\end{aligned}$$

Положим $f_l(\mathbf{x}) = \lambda_l \left(g(\mathbf{x}) - T^{(l)}(\mathbf{x})\right)$. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{T}^d} \varphi(\rho_l |f_l(\mathbf{t})|) d\mathbf{t} = \int\limits_{\mathbb{T}^d} \varphi(\mu_l |g(\mathbf{t}) - T^{(l)}(\mathbf{t})|) d\mathbf{t} < \frac{\alpha}{2} \tag{10}$$

и

$$\operatorname{mes} \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{T}^d \colon \ \frac{|S_{\mathbf{n}_{k_l}}(f_l, \mathbf{x})|}{\lambda_l} > \frac{\sigma}{2} \right\} > \frac{\alpha}{2}. \tag{11}$$

Для завершения доказательства воспользуемся сформулированной ниже теоремой Стейна о пределах последовательностей операторов.

Оператор $V\colon\ L(\mathbb{T}^d) \to L(\mathbb{T}^d)$ называется оператором типа (φ, φ), если существует константа $A > 0$ такая, что для всех $f \in \varphi(L)$

$$\int\limits_{\mathbb{T}^d} \varphi(|V(f, x)|) dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{T}^d} \varphi(A|f(x)|) dx.$$

Оператор V инвариантен относительно сдвига, если

$$V(f(\cdot + s), x) = V(f(\cdot), x + s), \quad x, s \in \mathbb{T}^d.$$

Теорема B [10, теорема 3]. *Пусть $\{V_l\}_{l=1}^{\infty}$ — последовательность линейных операторов из $L(\mathbb{T}^d)$ в $L(\mathbb{T}^d)$, каждый из которых является оператором типа (φ, φ) и инвариантен относительно сдвига. Пусть φ удовлетворяет условиям*

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(u) \ \text{ выпуклая и возрастающая на } [0, +\infty), \\ \varphi(u^{1/2}) \ \text{ вогнутая на } [0, +\infty).$$

Предположим, что для каждой функции $g \in \varphi(L)(\mathbb{T}^d)$

$$\limsup_{l \to \infty} |V_l(g, \mathbf{x})| < \infty$$

для всех $\mathbf{x}$ из некоторого (зависящего от g) множества положительной меры. Пусть

$$V^*(g, \mathbf{x}) = \sup_{l \geqslant 1} |V_l(g, \mathbf{x})|.$$

Тогда найдется положительное число K такое, что для всех $g \in \varphi(L)(\mathbb{T}^d)$ и для всех $z > 0$

$$\operatorname{mes}\{\mathbf{x} : V^*(g, \mathbf{x}) > z\} \leqslant \int\limits_{\mathbb{T}^d} \varphi\left(\frac{K|g(\mathbf{x})|}{z}\right) d\mathbf{x}. \tag{12}$$

Так как последовательность функций f_l удовлетворяет условиям (10) и (11), то для последовательности операторов

$$V_l(f, \mathbf{x}) = \frac{|S_{\mathbf{n}_{k_l}}(f, \mathbf{x})|}{\lambda_l}$$

не выполняется условие (12) теоремы B. Применяя теорему, противоположную к обратной для теоремы B, получаем, что существует $f \in \varphi(L)(\mathbb{T}^d)$ такая, что

$$\limsup_{l \to \infty} |V_l(f, \mathbf{x})| = \sup_{l \in \mathbb{N}} \frac{|S_{\mathbf{n}_{k_l}}(f, \mathbf{x})|}{\lambda_l} = +\infty \quad \text{п.в.}$$

Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Hardy G.H.** On the summability of Fourier series // Proc. London Math. Soc. 1913. Vol. 12. P. 365–372.
2. **Осколков К.И.** Подпоследовательности сумм Фурье интегрируемых функций // Тр. МИАН. 1985. Т. 167. С. 239–260.
3. **Карагулян Г.А.** Преобразование Гильберта и экспоненциальные интегральные оценки прямоугольных частичных сумм двойных рядов Фурье // Мат. сб. 1996. Т. 187, № 3. С. 55–74.
4. **Антонов Н.Ю.** О скорости роста произвольных последовательностей двойных прямоугольных сумм Фурье // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 31–37.
5. **Антонов Н.Ю.** О скорости роста последовательностей кратных прямоугольных сумм Фурье // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 10–29.
6. **Конягин С.В.** О перестановках функций и расходимости рядов Фурье по кубам // Тр. МИАН. 1989. Т. 189. С. 98–109.
7. **Гецадзе Р.Д.** О расходимости по мере кратных рядов Фурье // Сообщ. АН Грузинской ССР. 1986. Т. 122, № 2. С. 269–271.
8. **Гецадзе Р.Д.** О расходимости по мере кратных рядов Фурье // Некоторые вопросы теории функций и функционального анализа. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1988. Т. 4. С. 59–76.
9. **Антонов Н.Ю.** О сходимости почти всюду по кубам кратных тригонометрических рядов Фурье // Изв. РАН. Сер. мат. 2004. Т. 68, № 2. С. 3–22.
10. **Stein E.M.** On limits of sequences of operators // Ann. Math. 1961. Vol. 74, no. 1. P. 140–170.

Поступила 30.03.2011

Антонов Николай Юрьевич
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: Nikolai.Antonov@imm.uran.ru

Том 17 № 3 2011

УДК 517.5

НЕРАВЕНСТВА ТИПА КОЛМОГОРОВА ДЛЯ НОРМ ПРОИЗВОДНЫХ РИССА ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович

Пусть $L^1_{\infty,s}(\mathbb{R}^m)$ — пространство функций $f \in L_\infty(\mathbb{R}^m)$ таких, что $\partial f/\partial x_i \in L_s(\mathbb{R}^m)$ для каждого $i = 1, ..., m$. Получены новые точные неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса $\|D^\alpha f\|_\infty$ функций $f \in L^1_{\infty,s}(\mathbb{R}^m)$. Решена задача Стечкина о приближении неограниченных операторов D^α ограниченными на классе функций $f \in L^1_{\infty,s}(\mathbb{R}^m)$ таких, что $\|\nabla f\|_s \le 1$, а также задача об оптимальном восстановлении оператора D^α на элементах этого класса, заданных с погрешностью δ.

Ключевые слова: дробная производная, неравенства типа Колмогорова, приближение операторов.

V. F. Babenko, N. V. Parfinovich. Kolmogorov-type inequalities for the norms of Riesz derivatives of multivariable functions and some applications.

Let $L^1_{\infty,s}(\mathbb{R}^m)$ be the space of functions $f \in L_\infty(\mathbb{R}^m)$ such that $\partial f/\partial x_i \in L_s(\mathbb{R}^m)$ for each $i = 1, ..., m$. New sharp Kolmogorov-type inequalities are obtained for the norms of the Riesz derivatives $\|D^\alpha f\|_\infty$ of functions $f \in L^1_{\infty,s}(\mathbb{R}^m)$. Stechkin's problem on the approximation of unbounded operators D^α by bounded operators on the class of functions $f \in L^1_{\infty,s}(\mathbb{R}^m)$ such that $\|\nabla f\|_s \le 1$, as well as the problem on the optimal reconstruction of the operator D^α on elements of this class given with error δ, is solved.

Keywords: fractional derivative, Kolmogorov-type inequalities, approximation of operators.

Введение

Неравенства, оценивающие нормы промежуточных производных функций одной и многих переменных через нормы самих функций и нормы производных более высокого порядка, играют важную роль во многих областях математики и ее приложений. Особенно важны неулучшаемые неравенства такого типа, и на протяжении почти ста лет усилия многих математиков были направлены на их получение. Для функций одной переменной одним из наиболее ярких результатов и поныне остается неравенство Колмогорова [1; 2], полученное им в 1939 г. В этой связи неравенства для промежуточных производных часто называются неравенствами типа Колмогорова. К настоящему времени известно значительное количество точных неравенств типа Колмогорова для функций одной переменной. Обзоры многих результатов в этом направлении и дальнейшие ссылки можно найти в [3–8]. Для производных целого порядка функций многих переменных точных неравенств типа Колмогорова известно значительно меньше (см., например, [9–15]).

Во многих вопросах анализа возникает необходимость наряду с производными целых порядков рассматривать и производные дробных порядков (см., например, [16]). Некоторые известные точные неравенства типа Колмогорова для производных дробного порядка можно найти в работах [17–22; 23, гл. 2].

Задача о точных неравенствах типа Колмогорова тесно связана с задачей Стечкина о приближении неограниченного оператора ограниченными на заданном классе элементов Q, а также с задачей оптимального восстановления неограниченного оператора на классе Q в предположении, что элементы Q заданы с известной погрешностью (см. [3; 4; 6, § 7.1].

В данной статье мы получим новые точные неравенства, оценивающие L_∞-норму производной Рисса D^α функций многих переменных через L_∞-норму самой функции и L_s-норму $(1 \le s \le \infty)$ ее градиента, а также решим задачу наилучшего приближения оператора D^α

на классе W_s^1 функций f таких, что $\|\nabla f\|_s \le 1$, и задачу оптимального восстановления оператора D^α на элементах этого класса, заданных с погрешностью.

Статья организована следующим образом. В разд. 1 мы приведем необходимые определения, постановки задач и известные результаты, непосредственно примыкающие к теме данной статьи. В разд. 2 мы получим оценки уклонения $D^\alpha f$ от так называемой усеченной производной Рисса $D_h^\alpha f$ (именно она окажется впоследствии оператором наилучшего приближения для D^α) на классе W_s^1. В разд. 3 с помощью результатов разд. 2 мы получим неравенство типа Колмогорова, оценивающее равномерную норму $D^\alpha f$ через равномерную норму f и L_s-норму ∇f, в аддитивной и мультипликативной форме, установим точность полученных неравенств и найдем модуль непрерывности оператора D^α на классе W_s^1. Это позволит в разд. 4 завершить решение задачи Стечкина и решить задачу оптимального восстановления оператора D^α на заданных с погрешностью функциях класса W_s^1. Наконец, в разд. 5 мы решим задачу Колмогорова о необходимых и достаточных условиях существования функции, имеющей заданные значения $\|f\|_\infty$, $\|D^\alpha f\|_\infty$ и $\|\nabla f\|_s$.

1. Определения, постановки задач, смежные результаты

Пусть $\mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}$) — евклидово пространство точек $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $|x| = \Big(\sum\limits_{i=1}^m x_i^2\Big)^{1/2}$. Через $L_s(\mathbb{R}^m)$ обозначим пространство измеримых функций $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ с конечной нормой

$$\|f\|_s = \begin{cases} \Bigg(\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^m} |f(t)|^s\,dt\Bigg)^{1/s}, & 1 \le s < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in\mathbb{R}^m} |f(t)|, & s = \infty. \end{cases}$$

Производная Рисса порядка α, $0 < \alpha < 1$, функции $f:\ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ определяется равенством (см. [16, гл. 5, § 25, (25.59)])

$$(D^\alpha f)(x) := \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}_m} \frac{f(x) - f(x+t)}{|t|^{m+\alpha}}\,dt,$$

где

$$d_{m,1}(\alpha) = \frac{\pi^{1+n/2}}{2^\alpha \sin\Big(\dfrac{\alpha\pi}{2}\Big)\Gamma\Big(1+\dfrac{\alpha}{2}\Big)\Gamma\Big(\dfrac{n+\alpha}{2}\Big)}$$

— нормирующий множитель [16, гл. 5, § 26, (26.7)]. Отметим, что производная Рисса D^α реализует [16, гл. 5, § 25, п. 4] дробную степень $(-\triangle)^{\alpha/2}$ оператора Лапласа.

Для функции $f \in L_\infty(\mathbb{R}^m)$, локально абсолютно непрерывной по каждой переменной при почти всех фиксированных значениях остальных переменных, определены понимаемые в смысле Соболева частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_m}$ [24, гл. 4, п. 4.1, п. 4.4.4]. Положим

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x)\right).$$

Для $1 \le s \le \infty$ через $L^1_{\infty,s} = L^1_{\infty,s}(\mathbb{R}^m)$ обозначим пространство функций $f \in L_\infty(\mathbb{R}^m)$ таких, что $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \in L_s(\mathbb{R}^m)$ для каждого $i = 1, \ldots, m$. Отметим, что если $f \in L^1_{\infty,s}$, то $|\nabla f| \in L_s(\mathbb{R}^m)$. Через W_s^1 обозначим класс функций из $L^1_{\infty,s}$ таких, что $\|\nabla f\|_s \le 1$ (здесь и везде ниже мы пишем $\|\nabla f\|_s$ вместо $\|\,|\nabla f|\,\|_s$).

Пусть X и Y — банаховы пространства, $A:\ X \to Y$ — оператор (необязательно линейный) с областью определения $D_A \subset X$, $Q \subset D_A$ — некоторое множество.

Функция
$$\Omega(\delta)=\Omega(\delta,A,Q):=\sup_{\substack{f\in Q\\ \|f\|_X\le\delta}}\|Af\|_Y,\quad \delta>0, \tag{1.1}$$
называется модулем непрерывности оператора A на множестве Q. Задача отыскания функции $\Omega(\delta)$ для заданных оператора A и множества Q является абстрактной версией задачи о неравенствах типа Колмогорова.

Через $\mathcal{L}=\mathcal{L}(X,Y)$ будем обозначать пространство линейных ограниченных операторов $S:\ X\to Y$. Для $N>0$ полагаем
$$E_N(A,Q)=\inf_{\substack{S\in\mathcal{L}(X,Y)\\ \|S\|\le N}}\sup_{f\in Q}\|Af-Sf\|_Y. \tag{1.2}$$

Задача С. Б. Стечкина о наилучшем приближении оператора A на множестве Q линейными ограниченными операторами состоит в том, чтобы при любом $N>0$ вычислить величину (1.2), а также указать экстремальный оператор, т. е. оператор, реализующий точную нижнюю грань в правой части. Эта задача впервые возникла в исследованиях С. Б. Стечкина в 1965 г. Постановка задачи, первые важные результаты и решение этой задачи для дифференциальных операторов малых порядков представлены в [25]. Обзор дальнейших результатов можно найти, например, в [3; 4].

Пусть
$$l(\delta,A,Q)=\inf_{N\ge 0}\big\{E_N(A,Q)+N\delta\big\}.$$
Следующая теорема С. Б. Стечкина [25] (см. также [6, теорема 7.1.1]) дает простую, но часто используемую и эффективную оценку снизу величины наилучшего приближения оператора через его модуль непрерывности.

Теорема A (С. Б. Стечкин). *Если A — однородный (в частности, линейный) оператор, Q — центрально-симметричное выпуклое множество из области определения оператора A, то выполняются неравенства*
$$E_N(A,Q)\ge\sup_{\delta>0}\big\{\Omega(\delta,A,Q)-N\delta\big\}=\sup_{f\in Q}\big\{\|Af\|_Y-N\|f\|_X\big\},\quad N\ge 0,$$
$$\Omega(\delta,A,Q)\le l(\delta,A,Q),\quad \delta\ge 0.$$
Если при этом существуют элемент $f\in Q$ и линейный ограниченный оператор T такие, что
$$\|Af\|_Y=\sup_{f\in Q}\|Af-Tf\|_Y+\|T\|\,\|f\|_X, \tag{1.3}$$
то справедливы равенства
$$\Omega(\|f\|_X,A,Q)=\|Af\|_Y,$$
$$E_{\|T\|}(A,Q)=\sup_{f\in Q}\|Af-Tf\|_Y=\|Af\|_Y-\|T\|\,\|f\|_X,$$
и, следовательно, оператор T является экстремальным в задаче (1.2) *при $N=\|T\|$, а элемент f — в задаче* (1.1) *при $\delta=\|f\|_X$.*

Многие задачи численного анализа, теории функций и других разделов математики являются некорректными задачами восстановления оператора A на элементах класса $Q\subset D_A$ в предположении, что элементы класса Q заданы с известной погрешностью. Восстановление осуществляется с помощью некоторого множества $\mathcal{R}=\mathcal{R}(X,Y)\subset\mathcal{O}(X,Y)$, где $\mathcal{O}=\mathcal{O}(X,Y)$ — совокупность всех отображений, действующих из X в Y.

Для числа $\delta\ge 0$ и оператора A положим
$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{R};A,Q)=\inf_{T\in\mathcal{R}}\sup_{\substack{f\in Q,\,\eta\in X,\\ \|f-\eta\|_X\le\delta}}\|Af-Tf\|_Y. \tag{1.4}$$

Задача оптимального восстановления оператора A с помощью множества отображений (методов восстановления) $\mathcal{R}$ на элементах класса Q, заданных с погрешностью δ, состоит в том, чтобы найти величину (1.4) и указать оптимальный (т. е. реализующий точную нижнюю грань в (1.4)) метод восстановления.

Связь задачи (1.4) с неравенствами типа Колмогорова, с одной стороны, и задачей приближения неограниченных операторов ограниченными — с другой, устанавливается следующей теоремой (см. [6, теорема 7.1.2]).

Теорема B. *Если Q — уравновешенное множество и A — однородный оператор, то*

$$\Omega(\delta, A, Q) \le \mathcal{E}_\delta(\mathcal{O}; A, Q) \le \mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}; A, Q) \le l(\delta, A, Q).$$

Если при этом существует элемент $f \in Q$ и оператор $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ со свойством (1.3), *то*

$$\|Af\|_Y = \Omega(\delta, A, Q) = \mathcal{E}_\delta(\mathcal{O}; A, Q) = \mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}; A, Q), \quad \delta = \|f\|_X,$$

и для соответствующего δ оператор T является оптимальным.

Мы будем рассматривать сформулированные задачи в случае, когда $X = L_\infty(\mathbb{R}^m)$, $Y = L_\infty(\mathbb{R}^m)$, $A = D^\alpha$ и $Q = W_s^1$. При этом для решения задачи отыскания модуля непрерывности $\Omega(\delta, D^\alpha, W_s^1)$ мы ниже получим неулучшаемые неравенства типа Колмогорова, оценивающие $\|D^\alpha f\|_\infty$ через $\|f\|_\infty$ и $\|\nabla f\|_s$ для функции $f \in L^1_{\infty,s}$, в аддитивной и мультипликативной форме.

Отметим, что из результатов [26] следует, что для $f \in L^1_{\infty,\infty}$ имеют место утверждения.

Теорема C. *Пусть $0 < \alpha < 1$. Тогда для любой функции $f \in L^1_{\infty,\infty}$ имеет место точное неравенство*

$$\|D^\alpha f\|_\infty \le \frac{2^{1-\alpha}\sigma_{m-1}}{\alpha(1-\alpha)d_{m,1}(\alpha)} \|f\|_\infty^{1-\alpha} \, \|\nabla f\|_\infty^\alpha \,, \tag{1.5}$$

где σ_{m-1} — площадь поверхности единичной сферы S^{m-1} пространства $\mathbb{R}^m$. Неравенство (1.5) *обращается в равенство для функции*

$$f_h(t) = \begin{cases} |t| - \dfrac{h}{2}\,, & |t| \le h, \\ \dfrac{h}{2}\,, & |t| > h, \end{cases}$$

где $h > 0$.

Теорема D. *Пусть $0 < \alpha < 1$, $N > 0$. Тогда*

$$E_N(D^\alpha, W_\infty^1) = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{(1-\alpha)/\alpha} \left(\frac{\sigma_{m-1}}{d_{m,1}(\alpha)}\right)^{1/\alpha} N^{(\alpha-1)/\alpha}.$$

Отметим также, что для производных дробного порядка в смысле Маршо (см. [16, гл. 2, § 5, (5.57)–(5.58)]) функций одной переменной точные неравенства, оценивающие L_∞-нормы таких производных через L_∞-нормы самих функций и L_s-нормы их первых производных, получены в работе [20].

2. Оценка сверху нормы усеченной производной Рисса и ее уклонения от D^α

Пусть $h > 0$. Обозначим через B_h множество точек x пространства $\mathbb{R}^m$, для которых $|x| \le h$. Пусть $s > m$ и α таково, что $0 < \alpha < 1 - m/s$. Для заданного $h > 0$ рассмотрим оператор

$$D_h^\alpha f(x) = \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus B_h} \frac{f(x) - f(x+t)}{|t|^{m+\alpha}}\, dt,$$

называемый усеченной производной Рисса. В [26] показано, что D_h^α — ограниченный оператор, действующий из $L_\infty(\mathbb{R}^m)$ в $L_\infty(\mathbb{R}^m)$, и справедлива следующая

Лемма 1. *Пусть $h > 0$ и $0 < \alpha < 1$. Тогда* $\|D_h^\alpha\| = \dfrac{2\sigma_{m-1}}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} h^{-\alpha}$.

Оценку уклонения усеченной производной Рисса от D^α и дальнейшие результаты мы выпишем в терминах некоторой специальной функции, которую для $t \in \mathbb{R}^m$ определим следующим образом. Для $s > m$, $0 < \alpha < 1 - m/s$ и $h > 0$ положим

$$\psi_h(t) = \psi_{h,s,\alpha}(t)$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_0^{|t|} \left(\frac{1}{\gamma^{m-1}} \left(\frac{1}{\gamma^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right) \right)^{s'-1} d\gamma - \frac{1}{2} \int_0^h \left(\frac{1}{\gamma^{m-1}} \left(\frac{1}{\gamma^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right) \right)^{s'-1} d\gamma, & |t| \le h, \\ \displaystyle\frac{1}{2} \int_0^h \left(\frac{1}{\gamma^{m-1}} \left(\frac{1}{\gamma^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right) \right)^{s'-1} d\gamma, & |\mathrm{t}| > \mathrm{h}, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $1/s + 1/s' = 1$.

Несложные вычисления показывают, что $\psi_h \in L^1_{\infty,s}$ при любом $h > 0$ и

$$\|\nabla \psi_h\|_s = \left\| \frac{1}{|\cdot|^{m-1}} \left(\frac{1}{|\cdot|^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right)_+ \right\|_{s'}^{s'-1} = h^{m/s + (1-m-\alpha)(s'-1)} \|\nabla \psi_1\|_s, \tag{2.2}$$

где $x_+ = \max\{x, 0\}$. Ясно также, что

$$\|\psi_h\|_\infty = \frac{1}{2} \int_0^h \left[\frac{1}{\gamma^{m-1}} \left(\frac{1}{\gamma^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right) \right]^{s'-1} d\gamma = h^{1 + (1-m-\alpha)(s'-1)} \|\psi_1\|_\infty. \tag{2.3}$$

Теперь для любой функции $f \in L^1_{\infty,s}$ оценим уклонение $|D^\alpha f(x) - D_h f(x)|$. Имеем

$$|D^\alpha f(x) - D_h^\alpha f(x)| \le \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int_{B_h} \frac{|f(x) - f(x+t)|}{|t|^{m+\alpha}} \, dt.$$

Отметим (см., например, [27, теорема 6.9]), что для почти всех x

$$|f(x) - f(x+t)| \le \int_0^{|t|} \left| f_t'\Big(x + \frac{\gamma t}{|t|}\Big) \right| d\gamma \le \int_0^{|t|} \left| \nabla f\Big(x + \frac{\gamma t}{|t|}\Big) \right| d\gamma, \tag{2.4}$$

где через f_t' обозначена производная функции f в направлении $t/|t|$.

Используя (2.4), переходя к полярным координатам и меняя затем порядок интегрирования, получим, что для почти всех x

$$|D^\alpha f(x) - D_h f(x)| \le \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int_{B_h} \int_0^{|t|} \frac{\left| \nabla f\Big(x + \dfrac{\gamma t}{|t|}\Big) \right|}{|t|^{m+\alpha}} \, d\gamma \, dt$$

$$= \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int_{S^{m-1}} \int_0^h \frac{\rho^{m-1}}{\rho^{m+\alpha}} \, d\rho \int_0^\rho |\nabla f(x + \gamma x')| \, d\gamma \, dx'$$

$$= \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{S^{m-1}} dx' \int\limits_0^h |\nabla f(x+\gamma x')|\, d\gamma \int\limits_\gamma^h \frac{d\rho}{\rho^{1+\alpha}}$$

$$= \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{S^{m-1}} \int\limits_0^h |\nabla f(x+\gamma x')| \gamma^{m-1} \left(\frac{1}{|\gamma x'|^{m-1+\alpha}} - \frac{1}{h^\alpha |\gamma x'|^{m-1}} \right) d\gamma\, dx'$$

$$= \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{B_h} |\nabla f(x+y)| \left(\frac{1}{|y|^{m-1+\alpha}} - \frac{1}{h^\alpha |y|^{m-1}} \right) dy.$$

Оценивая последний интеграл с помощью неравенства Гельдера и учитывая соотношение (2.2), получим для почти каждого x

$$|D^\alpha f(x) - D_h^\alpha f(x)| \le \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \|\nabla f\|_s \left\| \frac{1}{|\cdot|^{m-1}} \left(\frac{1}{|\cdot|^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right)_+ \right\|_{s'}$$

$$= \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \|\nabla f\|_s \|\nabla \psi_h\|_s^{s-1} = \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \|\nabla f\|_s \|\nabla \psi_1\|_s^{s-1} h^{1-\alpha-m/s}. \tag{2.5}$$

Таким образом, справедлива

Лемма 2. *Пусть $s > m$ и α таково, что $0 < \alpha < 1 - m/s$. Тогда для любого $h > 0$ и для любой функции $f \in L^1_{\infty,s}$ справедлива оценка*

$$\|D^\alpha f - D_h^\alpha f\|_\infty \le \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \|\nabla f\|_s \|\nabla \psi_1\|_s^{s-1} h^{1-\alpha-m/s}.$$

Из лемм 1 и 2 следует

Лемма 3. *Пусть $s > m$ и α таково, что $0 < \alpha < 1 - m/s$. Пусть также*

$$h_N = \left(\frac{2\sigma_{m-1}}{\alpha d_{m,1}(\alpha) N} \right)^{1/\alpha} \quad \text{для} \quad N > 0.$$

Тогда $\|D^\alpha_{h_N}\| = N$ и

$$E_N(D^\alpha, W^1_s) \le \sup_{f \in W^1_s} \|D^\alpha f - D^\alpha_{h_N} f\|_\infty \le \frac{\alpha^{\frac{m/s-1}{\alpha}} d_{m,1}^{\frac{m/s-1}{\alpha}}(\alpha)}{(2\sigma_{m-1})^{1+\frac{m/s-1}{\alpha}}} \|\nabla \psi_1\|_s^{s-1} N^{1+\frac{m/s-1}{\alpha}}.$$

3. Неравенства типа Колмогорова

Из лемм 1 и 2 для $f \in L^1_{\infty,s}$ и $0 < \alpha < 1 - m/s$ следует

$$\|D^\alpha f\|_\infty \le \|D^\alpha f - D_h f\|_\infty + \|D_h f\|_\infty$$

$$\le \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \left(\|\nabla f\|_s \|\nabla \psi_1\|_s^{s-1} h^{1-\alpha-m/s} + 2\sigma_{m-1} \|f\|_\infty h^{-\alpha} \right). \tag{3.1}$$

Покажем, что при любом $h > 0$ неравенство (3.1) обращается в равенство для функции $f(t) = \psi_h(t)$. Для этого прежде всего покажем, что функция $D^\alpha \psi_h$ непрерывна в каждой точке $x \in \mathbb{R}^m$. Действительно, для $f = \psi_h$ усеченная производная $D^\alpha \psi_h(x)$ непрерывна для всех $x \in \mathbb{R}^m$ и соотношение (2.4) имеет место при любом $x \in \mathbb{R}^m$. Следовательно, оценка (2.5) справедлива для любого x. Фиксируя x, при любом $\delta \in \mathbb{R}^m$ будем иметь

$$|(D^\alpha - D^\alpha_h)(\psi_h(x) - \psi_h(x+\delta))| \le \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \|\nabla \psi_h(\cdot) - \nabla \psi_h(\cdot + \delta)\|_s \|\nabla \psi_1\|_s^{s-1} h^{1-\alpha-m/s}.$$

Поскольку $\|\nabla f(\cdot) - \nabla f(\cdot+\delta)\|_s \to 0,\ \delta \to 0$, видим, что функция $D^\alpha\psi_h - D_h^\alpha\psi_h$ непрерывна в $\mathbb{R}^m$. Непрерывность $D^\alpha\psi_h$ установлена. Отсюда следует, что $\|D^\alpha\psi_h\|_\infty \ge |D^\alpha\psi_h(0)|$.

Вычислим $|D^\alpha\psi_h(0)|$. Используя определение ψ_h, имеем

$$|D^\alpha\psi_h(0)| = \left|\frac{1}{d_{m,1}(\alpha)}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{\psi_h(0)-\psi_h(t)}{|t|^{m+\alpha}}\,dt\right|$$

$$= \left|\frac{1}{d_{m,1}(\alpha)}\int\limits_{B_h}\frac{dt}{|t|^{m+\alpha}}\int\limits_0^{|t|}\left[\frac{1}{\gamma^{m-1}}\left(\frac{1}{\gamma^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)\right]^{s'-1}d\gamma\right.$$

$$\left.+\frac{1}{d_{m,1}(\alpha)}\int\limits_{\mathbb{R}^m\setminus B_h}\frac{dt}{|t|^{m+\alpha}}\int\limits_0^{h}\left[\frac{1}{\gamma^{m-1}}\left(\frac{1}{\gamma^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)\right]^{s'-1}d\gamma\right|.$$

Переходя к полярным координатам и меняя затем порядок интегрирования по ρ и γ в первом слагаемом, получаем

$$|D^\alpha\psi_h(0)| = \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)}\left|\int\limits_{S^{m-1}}dx'\int\limits_0^h\frac{d\rho}{\rho^{1+\alpha}}\int\limits_0^\rho\left[\frac{1}{\gamma^{m-1}}\left(\frac{1}{\gamma^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)\right]^{s'-1}d\gamma\right.$$

$$\left.+\int\limits_{S^{m-1}}dx'\int\limits_h^\infty\frac{d\rho}{\rho^{1+\alpha}}\int\limits_0^h\left[\frac{1}{\gamma^{m-1}}\left(\frac{1}{\gamma^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)\right]^{s'-1}d\gamma\right|$$

$$= \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\left\{\sigma_{m-1}\int\limits_0^h\left[\frac{1}{\gamma^{m-1}}\left(\frac{1}{\gamma^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)\right]^{s'-1}d\gamma\int\limits_\gamma^h\frac{d\rho}{\rho^{\alpha+1}}\right.$$

$$\left.+\sigma_{m-1}h^{-\alpha}\int\limits_0^h\left[\frac{1}{\gamma^{m-1}}\left(\frac{1}{\gamma^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)\right]^{s'-1}\gamma^{m-1}\,d\gamma\right\}$$

$$= \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\left\{\sigma_{m-1}\int\limits_0^h\left[\frac{1}{\gamma^{m-1}}\left(\frac{1}{\gamma^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)\right]^{s'}\gamma^{m-1}\,d\gamma\right.$$

$$\left.+\sigma_{m-1}h^{-\alpha}\int\limits_0^h\left[\frac{1}{\gamma^{m-1}}\left(\frac{1}{\gamma^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)\right]^{s'-1}\gamma^{m-1}\,d\gamma\right\}$$

$$= \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\left\{\left\|\frac{1}{|\cdot|^{m-1}}\left(\frac{1}{|\cdot|^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)_+\right\|_{s'}^{s'}+\sigma_{m-1}h^{-\alpha}\int\limits_0^h\left[\frac{1}{\gamma^{m-1}}\left(\frac{1}{\gamma^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)\right]^{s'-1}\gamma^{m-1}\,d\gamma\right\}.$$

Отсюда, учитывая (2.2) и (2.3), имеем

$$|D^\alpha\psi_h(0)| = \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\left\{\|\nabla\psi_h\|_s^s + 2\sigma_{m-1}\|\psi_h\|_\infty\,h^{-\alpha}\right\}$$

$$= \frac{h^{m+(1-\alpha-m)s'}}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\left\{\|\nabla\psi_1\|_s^s + 2\sigma_{m-1}\|\psi_1\|_\infty\right\} = h^{m+(1-\alpha-m)s'}|D^\alpha\psi_1(0)|. \tag{3.2}$$

Переписав (3.2) в виде

$$|D^\alpha\psi_h(0)| = \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\left\{\|\nabla\psi_h\|_s\,\|\nabla\psi_1\|_s^{s-1}h^{1-\alpha-m/s} + 2\sigma_{m-1}\|\psi_h\|_\infty\,h^{-\alpha}\right\},$$

убеждаемся в точности (3.1). Таким образом, нами доказана

Теорема 1. *Пусть $s > m$ и α таково, что $0 < \alpha < 1 - m/s$. Тогда для любой функции $f \in L^1_{\infty,s}$ при каждом $h > 0$ имеет место точное неравенство*

$$\|D^\alpha f\|_\infty \le \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \left(\|\nabla f\|_s \, \|\nabla \psi_1\|_s^{s-1} \, h^{1-\alpha-m/s} + 2\sigma_{m-1} \|f\|_\infty h^{-\alpha} \right). \tag{3.3}$$

Неравенство (3.3) *обращается в равенство для функции ψ_h, определенной формулой* (2.1).

В (3.3) положим

$$h = \left(\frac{\|f\|_\infty}{\|\nabla f\|_s} \frac{\|\nabla \psi_1\|_s}{\|\psi_1\|_\infty} \right)^{\frac{1}{1-m/s}}.$$

Тогда

$$\|D^\alpha f\|_\infty \le \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \Bigg[\|\nabla f\|_s \, \|\nabla \psi_1\|_s^{s-1} \left(\frac{\|f\|_\infty}{\|\nabla f\|_s} \frac{\|\nabla \psi_1\|_s}{\|\psi_1\|_\infty} \right)^{\frac{1-\alpha-m/s}{1-m/s}}$$

$$+ 2\sigma_{m-1} \|f\|_\infty \left(\frac{\|f\|_\infty}{\|\nabla f\|_s} \frac{\|\nabla \psi_1\|_s}{\|\psi_1\|_\infty} \right)^{\frac{\alpha}{1-m/s}} \Bigg]$$

$$= \|f\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} \|\nabla f\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}} \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \frac{\|\psi_1\|_\infty^{\frac{\alpha}{1-m/s}}}{\|\nabla \psi_1\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}}} \left[\frac{\|\nabla \psi_1\|_s^s}{\|\psi_1\|_\infty} + 2\sigma_{m-1} \right]$$

$$= \|f\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} \|\nabla f\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}} \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \frac{\|\nabla \psi_1\|_s^s + 2\sigma_{m-1} \|\psi_1\|_\infty}{\|\psi_1\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} \|\nabla \psi_1\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}}}.$$

Используя (3.2), получим

$$\|D^\alpha f\|_\infty \le \frac{\|D^\alpha \psi_1\|_\infty}{\|\psi_1\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} \|\nabla \psi_1\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}}} \|f\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} \|\nabla f\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}}.$$

С помощью (2.2), (2.3) и (3.2) непосредственной подстановкой убеждаемся, что последнее неравенство обращается в равенство для $\psi_h(t)$, $h > 0$. Таким образом, доказана

Теорема 2. *Пусть $s > m$ и α таково, что $0 < \alpha < 1 - m/s$. Тогда для любой функции $f \in L^1_{\infty,s}$ имеет место точное неравенство*

$$\|D^\alpha f\|_\infty \le \frac{\|D^\alpha \psi_1\|_\infty}{\|\psi_1\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} \|\nabla \psi_1\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}}} \|f\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} \|\nabla f\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}}, \tag{3.4}$$

где функция ψ_1 определена соотношением (2.1). *Неравенство* (3.4) *обращается в равенство для функции ψ_h, $h > 0$.*

Из теоремы 2 вытекает

Следствие. *В условиях теоремы* 1 *для всех $\delta > 0$*

$$\Omega\left(\delta, D^\alpha, W_s^1\right) = \frac{\|D^\alpha \psi_1\|_\infty}{\|\psi_1\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} \|\nabla \psi_1\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}}} \delta^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}}.$$

4. Наилучшее приближение оператора D^α ограниченными и его оптимальное восстановление по неточно заданной информации на классе W_s^1

Пусть $h_N = \left(\dfrac{2\sigma_{m-1}}{\alpha d_{m,1}(\alpha) N}\right)^{1/\alpha}$ для $N > 0$. Из теоремы 1 и леммы 3 следует, что выполняется условие (1.3) теоремы A с оператором $D^\alpha_{h_N}$ и функцией $\dfrac{\psi_h}{\|\nabla\psi_h\|_s}$. Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Пусть $N > 0$, $s > m$ и α таково, что $0 < \alpha < 1 - m/s$. Тогда*

$$E_N(D^\alpha, W_s^1) = \frac{\alpha^{\frac{m/s-1}{\alpha}} d_{m,1}^{\frac{m/s-1}{\alpha}}(\alpha)}{(2\sigma_{m-1})^{1+\frac{m/s-1}{\alpha}}} \|\nabla\psi_1\|_s^{s-1} N^{1+\frac{m/s-1}{\alpha}}.$$

При этом оператор

$$D_{h_N} f(x) = \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus B_{h_N}} \frac{f(x) - f(x+t)}{|t|^{m+\alpha}}\, dt, \quad h_N = \left(\frac{2\sigma_{m-1}}{\alpha d_{m,1}(\alpha) N}\right)^{1/\alpha}, \tag{4.1}$$

является экстремальным оператором.

Теперь, пользуясь теоремой B, мы можем получить значение величины наилучшего восстановления оператора D^α с помощью множества отображений $\mathcal{L}(L_\infty(\mathbb{R}^m),\, L_\infty(\mathbb{R}^m))$ и $\mathcal{O}(L_\infty(\mathbb{R}^m),\, L_\infty(\mathbb{R}^m))$ на элементах класса W_s^1, заданных с погрешностью δ. Выберем h из условия

$$\frac{\|\psi_h\|_\infty}{\|\nabla\psi_h\|_s} = \left\|\frac{\psi_h}{\|\nabla\psi_h\|_s}\right\|_\infty = \delta,$$

т. е. положим

$$h = \left(\delta\, \frac{\|\nabla\psi_1\|_s}{\|\psi_1\|_\infty}\right)^{\frac{1}{1-m/s}}.$$

Отметим, что функция $\psi_h/\|\nabla\psi_h\|_s \in W_s^1$. Для этой функции и оператора D_h^α, как уже отмечалось, выполнено условие (1.3) теоремы A и, следовательно, в силу теоремы B

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{O}, D^\alpha, W_s^1) = \mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}, D^\alpha, W_s^1) = \left\|D^\alpha \frac{\psi_h}{\|\nabla\psi_h\|_s}\right\|_\infty = \Omega(\delta, D^\alpha, W_s^1).$$

Таким образом, справедлива

Теорема 4. *Пусть $N > 0$, $s > m$ и α таково, что $0 < \alpha < 1 - m/s$. Тогда для всех $\delta > 0$*

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{O}, D^\alpha, W_s^1) = \mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}, D^\alpha, W_s^1) = \frac{\|D^\alpha\psi_1\|_\infty}{\|\psi_1\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} \|\nabla\psi_1\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}}}\, \delta^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}}.$$

При этом оператор (4.1) *является экстремальным оператором.*

5. Задача Колмогорова

Неравенства для норм промежуточных производных тесно связаны также с задачей Колмогорова о необходимых и достаточных условиях существования функции, для которой заданные числа являются точными гранями модулей ее производных соответствующих порядков [1; 2]. Некоторые известные результаты в этом направлении изложены, например, в [6].

Мы рассмотрим задачу Колмогорова в следующей постановке. Пусть числа M_0, M_α, M_∇ заданы. Требуется найти необходимое и достаточное условия для существования функции $f \in L^1_{\infty,s}$ такой, что

$$\|f\|_\infty = M_0, \qquad \|D^\alpha f\|_\infty = M_\alpha, \qquad \|\nabla f\|_s = M_\nabla.$$

Решение этой задачи дает

Теорема 5. *Пусть $s > m$ и α таково, что $0 < \alpha < 1 - m/s$. Пусть M_0, M_α, M_∇ — положительные числа. Для существования функции $f \in L^1_{\infty,s}$ такой, что*

$$\|f\|_\infty = M_0, \qquad \|D^\alpha f\|_\infty = M_\alpha, \qquad \|\nabla f\|_s = M_\nabla,$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$M_\alpha \le \frac{\|D^\alpha \psi_1\|_\infty}{\|\psi_1\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} \|\nabla \psi_1\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}}} M_0^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} M_\nabla^{\frac{\alpha}{1-m/s}}. \tag{5.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость следует из теоремы 2. Докажем достаточность. Так как выполнено условие (5.1), то найдется $0 < L_0 < M_0$ такое, что

$$M_\alpha = \frac{\|D^\alpha \psi_1\|_\infty}{\|\psi_1\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} \|\nabla \psi_1\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}}} L_0^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} M_\nabla^{\frac{\alpha}{1-m/s}}.$$

Пусть h_0 выбрано из условий $\|\nabla \psi_{h_0}\|_s = M_\nabla$ и $\|\psi_{h_0}\|_\infty = L_0$, т. е. с учетом (2.2) и (2.3)

$$h_0 = \left(\frac{L_0}{M_\nabla} \frac{\|\nabla \psi_1\|_s}{\|\psi_1\|_\infty} \right)^{\frac{s}{s-m}}.$$

Тогда в силу теоремы 2

$$\|D^\alpha \psi_{h_0}\|_\infty = \frac{\|D^\alpha \psi_1\|_\infty}{\|\psi_1\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} \|\nabla \psi_1\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}}} L_0^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} M_\nabla^{\frac{\alpha}{1-m/s}},$$

откуда получаем $M_\alpha = \|D^\alpha \psi_{h_0}\|_\infty$. В качестве искомой функции f возьмем $f = \psi_{h_0} + M_0 - L_0$. Ясно, что

$$\|f\|_\infty = M_0, \qquad \|D^\alpha f\|_\infty = M_\alpha, \qquad \|\nabla f\|_s = M_\nabla.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Колмогоров А.Н.** О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале // Учен. записки МГУ. Математика. 1939. Т. 30, № 3. С. 3–16.
2. **Колмогоров А.Н.** О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале // Избр. тр.: Математика, механика. М.: Наука, 1985. С. 252–263.
3. **Арестов В.В., Габушин В.Н.** Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // Изв. вузов. Математика. 1995. № 11. С. 42–63.
4. **Арестов В.В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, № 6. С. 88–124.
5. **Тихомиров В.М., Магарил-Ильяев Г.Г.** Неравенства для производных: Комментарии к избр. тр. А. Н. Колмогорова. М.: Наука, 1985. С. 387–390.
6. Неравенства для производных и их приложения / В.Ф. Бабенко, Н.П. Корнейчук, В.А. Кофанов, С.А. Пичугов. Киев: Наук. думка, 2003. 590 с.

7. **Kwong M.K., Zettl A.** Norm inequalities for derivatives and differences // Lecture Notes Math. Vol. 1536. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1992. 150 p.
8. **Mitrinović D.S., Peĉarić J.E., Fink A.M.** Inequalities involving functions and their integrals and derivatives. Dordrecht; Boston; London: Kluver Acad. Publ., 1991. 587 p.
9. **Коновалов В.Н.** Точные неравенства для норм функций, третьих частных и вторых смешанных производных // Мат. заметки. 1978. Т. 23, вып. 1. С. 67–78.
10. **Буслаев А.П., Тихомиров В.М.** О неравенствах для производных в многомерном случае // Мат. заметки. 1979. Т. 25, вып. 1. С. 59–74.
11. **Тимошин О.А.** Точные неравенства между нормами производных второго и третьего порядков // Докл. РАН. 1995. Т. 344, № 1. С. 20–22.
12. **Тимофеев В.Г.** Неравенства типа Ландау для функций нескольких переменных // Мат. заметки. 1985. Т. 37, вып. 5. С. 676–689.
13. **Babenko V.F., Kofanov V.A., Pichugov S.A.** Multivariate inequalities of Kolmogorov type and their applications // Multivariate approximation and splines / Eds. G. Nërberger, J.W. Schmidt, G. Walz. Basel: Birkhuser Verlag, 1997. P. 1–12.
14. **Бабенко В.Ф.** О точных неравенствах типа Колмогорова для функций двух переменных // Докл. НАН Украины. 2000. № 5. С. 7–11.
15. **Babenko V.F., Pichugov S.A.** Kolmogorov type inequalities for fractional derivatives of Hölder functions of two variables // East J. Approx. 2007. Vol. 13, no. 3. P. 321–329.
16. **Самко С.Г., Килбас А.А., Марычев О.И.** Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. Минск, 1987. 650 с.
17. **Гейсберг С.П.** Обобщение неравенства Адамара // Исследование по некоторым проблемам конструктивной теории функций: сб. науч. тр. ЛОМИ. Т. 50. Ленинград, 1965. С. 42–54.
18. **Arestov V.V.** Inequalities for fractional derivatives on the half-line // Approximation theory: proc. conf. Warsaw: PWN-Pol. Sci. Publ., 1979. P. 19–34.
19. **Magaril-Il'jaev G.G., Tihomirov V.M.** On the Kolmogorov inequality for fractional derivatives on the half-line // Anal. Math. 1981. Vol. 7, no. 1. P. 37–47.
20. **Бабенко В.Ф., Чурилова М.С.** О неравенствах типа Колмогорова для производных дробного порядка // Вестн. Днепропетровского ун-та. Математика. 2001. Т. 6. С. 16–20.
21. **Бабенко В.Ф., Пичугов С.А.** Точные оценки для норм дробных производных функций многих переменных, удовлетворяющих условию Гельдера // Мат. заметки. 2010. Т. 87, вып. 1. С. 26–34.
22. **Babenko V.F., Parfinovych N.V., Pichugov S.A.** Sharp Kolmogorov-type inequalities for norms of fractional derivatives of multivariate functions // Укр. мат. журн. 2010. Т. 62, № 3. С. 301–314.
23. Теория аппроксимации и гармонический анализ / В.П. Моторный, В.Ф. Бабенко, А.А. Довгошей, О.И. Кузнецова. Киев: Наук. думка, 2010. 302 с.
24. **Никольский С.М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969. 480 с.
25. **Стечкин С.Б.** Наилучшее приближение ограниченных операторов // Мат. заметки. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 137–148.
26. **Babenko V.F., Churilova M.S.** Kolmogorov type inequalities for hypersingular integrals with homogeneous characteristic // Banach J. Math. 2007. Vol. 1. P. 66–77.
27. **Либ Э., Лосс М.** Анализ. Новосибирск: Науч. книга, 1998. 258 с.

Поступила 30.12.2010

Бабенко Владислав Федорович
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор
Днепропетровский национальный ун-т
Институт прикладной математики
и механики НАН Украины
e-mail: babenko.vladislav@gmail.com

Парфинович Наталья Викторовна
канд. физ.-мат. наук, доцент
зав. кафедрой
Днепропетровский национальный ун-т
e-mail: nparfinovich@yandex.ru

Том 17 № 3 2011

УДК 517.5

ОЦЕНКИ ФУНКЦИИ ЛЕБЕГА СУММ ФУРЬЕ ПО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ ПОЛИНОМАМ, ОРТОГОНАЛЬНЫМ С ВЕСОМ, НЕ ПРИНАДЛЕЖАЩИМ ПРОСТРАНСТВАМ L^r $(r>1)$[1]

В. М. Бадков

Получена двусторонняя поточечная оценка для функции Лебега сумм Фурье по тригонометрическим полиномам, ортогональным с 2π-периодическим весом, отличающимся от функции $1/|\sin(\tau/2)|$ некоторым множителем, медленно меняющимся в нуле. Рассматриваемый вес не принадлежит пространству L^r ни при каком $r>1$. В виде следствия аналогичный результат получен для многочленов, ортогональных на отрезке $[-1,1]$.

Ключевые слова: функция Лебега, ортогональные полиномы, периодический вес.

V. M. Badkov. Estimates of the Lebesgue function of Fourier sums over trigonometric polynomials orthogonal with a weight not belonging to the spaces L^r $(r>1)$.

A two-sided pointwise estimate is obtained for the Lebesgue function of Fourier sums with respect to trigonometric polynomials orthogonal with a 2π-periodic weight that differs from the function $1/|\sin(\tau/2)|$ by some factor slowly changing at zero. The weight under consideration does not belong to the space L^r for any $r>1$. A similar result for polynomials orthogonal on the interval $[-1,1]$ is obtained in the form of a corollary.

Keywords: Lebesgue function, orthogonal polynomials, periodic weight.

1. Введение

Всюду ниже $\mathbb{R}:=(-\infty,\infty)$, $\mathbb{Z}_+:=\{0,1,\dots\}$, $\mathbb{N}:=\{1,2,\dots\}$, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость. При $1\le r\le\infty$ через $L^r[a,b]$ обозначается пространство измеримых комплекснозначных функций F с конечной нормой $\|F\|_{L^r[a,b]}$, где

$$\|F\|_{L^r[a,b]}:=\Big(\int\limits_a^b |F(\tau)|^r\,d\tau\Big)^{1/r}\ (1\le r<\infty),\qquad \|F\|_{L^\infty[a,b]}:=\operatorname{ess}\sup_{a\le\tau\le b}|F(\tau)|.$$

Для 2π-периодической F полагаем $L^r:=L^r[0,2\pi]$, $\|F\|_r:=(2\pi)^{-1/r}\|F\|_{L^r[0,2\pi]}$.

Модулем непрерывности называется неубывающая непрерывная полуаддитивная на $[0,\infty)$ функция $\omega(\delta)$, для которой $\omega(0)=0$. Если при этом $2\omega(a/2+b/2)\ge\omega(a)+\omega(b)$ для любых $a,b\ge 0$, то говорят, что $\omega(\delta)$ — вогнутый модуль непрерывности. Под модулем непрерывности в L^r функции F понимается величина $\omega(F;\delta)_r:=\sup_{|\lambda|\le\delta}\|F(\lambda+\cdot)-F(\cdot)\|_r$.

Функция $L(x)>0$ называется медленно меняющейся в нуле, если она измерима на $[0,A]$ $(A>0)$ и $\lim\limits_{x\to+0}[L(\lambda x)/L(x)]=1$ для любого $\lambda>0$ (см. [19]).

Весом называют суммируемую неотрицательную не эквивалентную нулю функцию. Если $\varphi(\tau)$ — 2π-периодический вес, удовлетворяющий условию Сегё $\ln\varphi(\tau)\in L^1$, то имеет смысл

[1]Работа выполнена в рамках программ фундаментальных исследований Президиума РАН “Математическая теория управления” и ОМН РАН “Современные проблемы теоретической математики” при финансовой поддержке УрО РАН (проекты 09-П-1-1013, 09-Т-1-1004), а также при поддержке РФФИ (проект 11-01-00462).

функция Сегё

$$\pi(\varphi;z) := \exp\left(-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\tau}+z}{e^{i\tau}-z}\ln\varphi(\tau)\,d\tau\right) \qquad (|z|<1).$$

Пусть $\{p_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ — система алгебраических многочленов, ортонормированная на $[-1,1]$ с весом $p(t)$ (см. [16; 18]), $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ — система алгебраических многочленов, ортонормированная на окружности $|z|=1$ с 2π-периодическим весом $\varphi(\tau)$ (см. [16; 18]), а $\{\Phi_n(\tau)\}_{n=0}^{\infty}$ — ортонормированная на $[0,2\pi]$ с весом $\varphi(\tau)$ система тригонометрических полиномов, полученная при ортогонализации последовательности $1,\cos\tau,\sin\tau,\cos 2\tau,\sin 2\tau,\dots$ методом Шмидта (см. [5]). Через $S_n^{(p)}(f;x)$ обозначим n-ю ($n\in\mathbb{Z}_+$) сумму Фурье функции $f(t)$ по системе $\{p_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$, а через $s_n(F;\theta)$ — n-ю ($n\in\mathbb{Z}_+$) сумму Фурье функции $F(\tau)$ по системе $\{\Phi_k(\tau)\}_{k=0}^{\infty}$. Важную роль при исследовании вопросов сходимости этих сумм играют функции Лебега

$$L_n^{(p)}(x) := \sup\{|S_n^{(p)}(f;x)| :\ f\in L^{\infty}[-1,1],\ \|f\|_{L^{\infty}[-1,1]}\le 1\} = \int_{-1}^{1}\Bigl|\sum_{\nu=0}^{n}p_\nu(x)p_\nu(t)\Bigr|p(t)\,dt, \tag{1.1}$$

$$L_{\varphi,n}(\theta) := \sup\{|s_{\varphi,2n}(F;\theta)| :\ F\in L^{\infty},\ \|F\|_{\infty}\le 1\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Bigl|\sum_{k=0}^{2n}\Phi_k(\theta)\Phi_k(\tau)\Bigr|\varphi(\tau)\,d\tau. \tag{1.2}$$

В случае веса Якоби $p(t)=(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}$ ($\alpha,\beta>-1$) вместо $L_n^{(p)}(x)$ пишут $L_n^{\alpha,\beta}(x)$.

С. А. Агаханов и Г. И. Натансон получили в [1] оценку сверху, а в [2] — двустороннюю поточечную оценку для $L_n^{\alpha,\beta}(x)$ при α и $\beta\ge -1/2$. В [3] оценка сверху для $L_n^{\alpha,\beta}(x)$ получена для остальных значений α и $\beta>-1$. В частности, в [3] доказано, что

$$L_n^{\alpha,\beta}(x) \le C_1(\alpha,\beta)\left[1+\ln(1+n\sqrt{1-x^2})\right] \quad (x\in[-1,1];\ \ n\in\mathbb{N};\ \ \alpha,\beta\in(-1,-1/2)). \tag{1.3}$$

В [15] и [20] доказано, что (1.3) является двусторонней оценкой. В [8] и [20] (см. также [21]) получена двусторонняя поточечная оценка для функции Лебега (1.1) в случае обобщенного веса Якоби. При этом в [20] аналогичный результат установлен для функции Лебега (1.2) в случае тригонометрического обобщенного веса Якоби $\varphi(\tau)$. В частности, оказалось, что если вес $\varphi(\tau)=h(\tau)|\sin(\tau/2)|^{\gamma}$ ($-1<\gamma<0$) удовлетворяет условиям $0<h(\tau)\in C_{2\pi}$ и $\omega(h;\tau)_{\infty}\tau^{-1}\in L^1(0,\pi)$, то для $L_{\varphi,n}(\theta)$ имеют место неравенства

$$C_2(h,\gamma)[1+\ln(1+n|\sin(\theta/2)|)] < L_{\varphi,n}(\theta) < C_3(h,\gamma)[1+\ln(1+n|\sin(\theta/2)|)], \tag{1.4}$$

в которых $C_2(h,\gamma)$ и $C_3(h,\gamma)$ — положительные константы, $n\in\mathbb{N}$, $\theta\in\mathbb{R}$.

Для получения оценок функций $L_n^{(p)}(x)$ и $L_{\varphi,n}(\theta)$ в [8] и [20] применялись установленные в [4–7] оценки и асимптотические формулы для ортогональных полиномов $p_n(t)$, $\varphi_n(e^{i\tau})$ и $\Phi_n(\tau)$, соответствующих весам $p(t)$ и $\varphi(\tau)$ обобщенного якобиева типа. В [9–11] оценивались величины $|\varphi_n^{(j)}(e^{i\theta})|$ ($j,n\in\mathbf{Z}_+,\ n>j$) для более общих весов $\varphi(\tau)$, что позволило С. Е. Памятных [17] и С. Л. Сандаковой [22] получить двусторонние поточечные оценки для функции Лебега $L_{\varphi,n}(\theta)$. Однако в [17] и [22] $\varphi\in L^r$ при некотором $r=r(\varphi)>1$. В настоящей работе $L_{\varphi,n}(\theta)$ оценивается в случае веса $\varphi(\tau)$, который не принадлежит L^r ни при каком $r>1$. При этом используется полученная в [14] новая информация о поведении $|\varphi_n^{(j)}(e^{i\theta})|$ ($j,n\in\mathbf{Z}_+,\ n>j$) для такого $\varphi(\tau)$.

Основными результатами настоящей статьи являются следующие теоремы, дающие оценки для $L_{\varphi,n}(\theta)$, по форме совпадающие с (1.4).

Теорема 1. *Пусть вес φ задан формулой*

$$\varphi(\tau) := h(\tau)|\sin(\tau/2)|^{-1}g(|\sin(\tau/2)|) \qquad (\tau\in\mathbb{R}), \tag{1.5}$$

где $g(t)$ — вогнутый модуль непрерывности, медленно меняющийся в нуле,

$$t^{-1}g(t) \in L^1[0,1], \tag{1.6}$$

$$0 < h(\tau) \in C_{2\pi}, \quad \omega(h;\tau)_\infty \tau^{-1} \in L^1[0,\pi]. \tag{1.7}$$

Тогда найдутся положительные константы $C_4 = C_4(\varphi)$ и $C_5 = C_5(\varphi)$ такие, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ выполняются неравенства

$$C_4[1+\ln(1+n|\sin(\theta/2)|)] \le L_{\varphi,n}(\theta) \le C_5[1+\ln(1+n|\sin(\theta/2)|)]. \tag{1.8}$$

Теорема 2. *Теорема* 1 *сохраняет силу при замене в ее формулировке условий* (1.7) *условиями*

$$h(-\tau) = h(\tau), \qquad 0 \le h(\tau), \qquad h,\, 1/h \in L^\infty, \tag{1.9}$$

$$\omega(h;\delta)_2 = O(\sqrt{\delta}) \qquad (\delta \to +0). \tag{1.10}$$

Заметим, что если $\varphi(\tau) = p(\cos\tau)|\sin\tau|$ и $F(\tau) = f(\cos\tau)$, то $S_n^{(p)}(f;\cos\theta) = s_{\varphi,2n}(F;\theta)$ (см. [5, формулы (2.17) и (4.77)]). Для таких весов φ и p из формул (1.1) и (1.2) следует, что $L_n^{(p)}(\cos\theta) \le L_{\varphi,n}(\theta)$. Поэтому для веса

$$p(t) := H(t)\frac{g(\sqrt{1-t})}{(1-t)\sqrt{1+t}}$$

при условии, что $g(t)$ и $h(\tau) = H(\cos\tau)$ удовлетворяют условиям теорем 1 или 2, из последних вытекает справедливость аналогичного (1.3) неравенства

$$L_n^{(p)}(x) \le C_6(p)[1+\ln(1+n\sqrt{1-x})] \qquad (x \in [-1,1];\ \ n \in \mathbb{N}). \tag{1.11}$$

Так как при доказательстве первого из неравенств (1.8) используются четные функции $F(\tau)$, то оценка (1.11) является двусторонней.

2. Оценки многочленов, ортогональных на окружности, и соответствующего ядра Сегё

Рассмотрим ядра

$$D_{\varphi,n}(\theta,\tau) := \Phi_0(\theta)\Phi_0(\tau) + \Phi_1(\theta)\Phi_1(\tau) + \dots + \Phi_n(\theta)\Phi_n(\tau) \qquad (n \in \mathbb{Z}_+;\ \ \theta,\tau \in \mathbb{R}), \tag{2.1}$$

$$K_n(z,\zeta) := \varphi_0(z)\overline{\varphi_0(\zeta)} + \varphi_1(z)\overline{\varphi_1(\zeta)} + \dots + \varphi_n(z)\overline{\varphi_n(\zeta)} \qquad (n \in \mathbb{Z}_+;\ \ z,\zeta \in \mathbb{C}). \tag{2.2}$$

Как известно (см. [5; 13 и 23]),

$$D_{\varphi,2n}(\theta,\tau) = e^{-in(\theta-\tau)}K_{\varphi,2n}(e^{i\theta}, e^{i\tau}) \qquad (n \in \mathbb{Z}_+;\ \ \theta,\ \tau \in \mathbb{R}). \tag{2.3}$$

Поэтому вместо (1.2) можно пользоваться формулой

$$L_{\varphi,n}(\theta) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |K_{\varphi,2n}(e^{i\theta}, e^{i\tau})|\varphi(\tau)\,d\tau \qquad (\theta \in \mathbb{R},\ \ n \in \mathbb{Z}_+). \tag{2.4}$$

Для оценки подынтегрального выражения в (2.4) нам понадобится следующее предложение.

Предложение 1 [14, теорема 5.1]. *Пусть вес φ определяется формулой (1.5), в которой $g(t)$ — вогнутый модуль непрерывности, медленно меняющийся в нуле и удовлетворяющий условию (1.6), для $h(\tau)$ выполнены ограничения (1.7). Тогда найдутся положительные константы $C_7 = C_7(\varphi)$ и $C_8 = C_8(\varphi)$ такие, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\tau \in \mathbb{R}$ выполняются неравенства*

$$C_7\rho_n(\tau) \le |\varphi_n(e^{i\tau})| \le C_8\rho_n(\tau), \tag{2.5}$$

где $\rho_n(\tau)$ определяется равенствами

$$\rho_n(\tau) := \mu_n + |\sin(\tau/2)|(|\sin(\tau/2)| + n^{-1})^{-1/2}[g(|\sin(\tau/2)| + n^{-1})]^{-1/2}, \tag{2.6}$$

$$\mu_n := n^{-1/2}[g(n^{-1})]^{1/2}[G(n^{-1})]^{-1}, \tag{2.7}$$

$$G(t) := \int_0^t \frac{g(u)}{u}\,du. \tag{2.8}$$

Предложение 2 [14, теорема 5.3]. *Предложение* 1 *сохраняет силу при замене в его формулировке условий* (1.7) *условиями* (1.9) *и* (1.10).

Лемма 1. *Если вес $\varphi(\tau)$ удовлетворяет условиям предложения* 1 *или предложения* 2, *то для ядра Сегё* (2.2) *имеет место оценка*

$$|K_{\varphi,n}(e^{i\theta}, e^{i\tau})| \le C_9(a,\varphi)\{[G(n^{-1})]^{-1} + n^2[g(n^{-1})]^{-1}|\theta\tau|\} \qquad (|\theta|, |\tau| \le an^{-1}), \tag{2.9}$$

где a — фиксированное положительное число, $n \ge n_0(a) \ge 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь (2.5) и (2.2), имеем

$$|K_{\varphi,n}(e^{i\theta}, e^{i\tau})| \le C_{10}(\varphi) + C_{11}(a,\varphi)[\rho_1(\theta)\rho_1(\tau) + \cdots + \rho_n(\tau)\rho_n(\theta)]. \tag{2.10}$$

Из (2.6)–(2.8) следует, что

$$\rho_n(\tau) \asymp \mu_n + |\tau| n^{1/2}[g(n^{-1})]^{-1/2} \qquad (|\tau| \le an^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}). \tag{2.11}$$

Из (2.10) в силу (2.11) и аналогичной формулы для $\rho_n(\theta)$ следует, что

$$|K_{\varphi,n}(e^{i\theta}, e^{i\tau})| \le C_{12}(\varphi) + C_{13}(a,\varphi)[A_{n,1} + (|\theta| + |\tau|)A_{n,2} + |\theta\tau|A_{n,3}], \tag{2.12}$$

где

$$A_{n,1} := \sum_{k=1}^n \mu_k^2, \qquad A_{n,2} := \sum_{k=1}^n \mu_k k^{1/2}[g(k^{-1})]^{-1/2}, \qquad A_{n,3} := \sum_{k=1}^n k[g(k^{-1})]^{-1}.$$

В силу (2.5) $A_{n,1} \asymp |\varphi_1(1)|^2 + \cdots + |\varphi_n(1)|^2$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} A_{n,1} = \infty$ (см. [16, примечания к гл. 1, формула (2)]). Из (2.7) и (2.8) следует, что

$$A_{n,1} \asymp \int_1^n t^{-1}g(t^{-1})[G(t^{-1})]^{-2}\,dt = \int_{1/n}^1 g(u)[G(u)]^{-2}u^{-1}\,du. \tag{2.13}$$

По правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to+0} \int_x^1 g(u)[G(u)]^{-2}u^{-1}\,du \Big[\frac{1}{G(x)}\Big]^{-1} = 1.$$

Поэтому из (2.13) следует, что

$$A_{n,1} \asymp \frac{1}{G(n^{-1})}. \tag{2.14}$$

Пользуясь (2.7) и (2.8), находим, что

$$A_{n,2} = \sum_{k=1}^{n} [G(k^{-1})]^{-1} \asymp \int\limits_{1}^{n} \frac{1}{G(x^{-1})}\, dx = \int\limits_{1/n}^{1} \frac{dt}{t^2 G(t)}. \tag{2.15}$$

Применяя правило Лопиталя, получаем, что

$$\lim_{x\to+0} \int\limits_{x}^{1} \frac{dt}{t^2G(t)} \left[\frac{1}{xG(x)}\right]^{-1} = \lim_{x\to+0} \frac{1}{1+g(x)} = 1,$$

откуда и из (2.15) вытекает соотношение

$$A_{n,2} \asymp \frac{n}{G(n^{-1})}. \tag{2.16}$$

Аналогично находим, что

$$A_{n,3} \asymp \int\limits_{1/n}^{1} \frac{dt}{t^3 g(t)} \le \frac{1}{g(n^{-1})} \int\limits_{1/n}^{1} \frac{dt}{t^3} \le \frac{n^2}{2g(n^{-1})}. \tag{2.17}$$

Из (2.12), (2.14), (2.16) и (2.17) следует (2.9). Лемма доказана. □

Лемма 2. *Пусть вес* $\varphi(\tau)$ *удовлетворяет условиям предложения* 1 *или предложения* 2. *Тогда найдется константа* $C_{14} = C_{14}(a,\varphi)$ *такая, что выполняется неравенство*

$$|K_{\varphi,n}(e^{i\theta}, e^{i\tau})| \le C_{14}|\varphi_n(e^{i\theta})| \frac{[g(|\tau|)]^{-1/2}|\tau|^{1/2}}{|\sin[(\tau-\theta)/2]| + n^{-1}} \qquad (n\in\mathbb{N},\quad \theta\in\mathbb{R},\quad an^{-1} \le |\tau| \le \pi). \tag{2.18}$$

Доказательство. Предположим, что многочлен $Q_n(z)$ степени n не имеет нулей в круге $|z|<1$. Тогда справедливо неравенство (см. [16, формула (9.8)])

$$|Q_n(z)| \le 2|Q_n((1-n^{-1})z)| \qquad (|z| \le 1 + (2n)^{-1},\quad n\ge 2). \tag{2.19}$$

Воспользуемся равенством [16, гл. 1]

$$K_{\varphi,n}(z,\zeta) = [\varphi_n^*(z)\overline{\varphi_n^*(\zeta)} - z\overline{\zeta}\varphi_n(z)\overline{\varphi_n(\zeta)}](1-z\overline{\zeta})^{-1}. \tag{2.20}$$

Так как $|\varphi(z)| < |\varphi^*(z)|$, если $|z|<1$, и $|\varphi(e^{i\tau})| = |\varphi^*(e^{i\tau})|$, то при $|\zeta|\le 1$ и $|z|<1$ правая часть формулы (2.19) не равна нулю. Поэтому в силу (2.19) для всех $\theta,\tau\in\mathbb{R}$ и $n\ge 2$

$$|K_{\varphi,n}(e^{i\theta}, e^{i\tau})| \le 2|K_{\varphi,n}(e^{i\theta}, (1-n^{-1})e^{i\tau})| \le C_{15}\frac{|\varphi_n(e^{i\theta})\varphi_n^*((1-n^{-1})e^{i\tau})|}{|\sin[(\tau-\theta)/2]| + n^{-1}}. \tag{2.21}$$

Формула (2.21) с не зависящей от φ константой C_{15} имеет место для любого веса $\varphi(\tau)$.

Если вес $\varphi(\tau)$ удовлетворяет условиям предложения 1 или предложения 2, то найдется константа $C_{16} = C_{16}(\varphi)$ такая, что справедливо неравенство [14, формула (4.22)]

$$|\varphi_n^*((1-n^{-1})e^{i\tau})| \le C_{16}|\pi(\varphi, (1-(2n)^{-1})e^{i\tau})|. \tag{2.22}$$

При этом по теореме 2.1 из [9] найдутся положительные константы $C_{17} = C_{17}(\varphi)$ и $C_{18} = C_{18}(\varphi)$ такие, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\tau \in \mathbb{R}$

$$C_{17} \le |\pi(\varphi, (1-(2n)^{-1})e^{i\tau})| \, [|\sin(\tau/2)| + n^{-1}]^{-1/2} [g(|\sin(\tau/2)| + n^{-1})]^{1/2} \le C_{18}. \tag{2.23}$$

В силу (2.23) выполняется условие

$$|\pi(\varphi, (1-(2n)^{-1})e^{i\tau})| \le C_{19}(a,\varphi)[g(|\tau|)]^{-1/2}|\tau|^{1/2} \qquad (an^{-1} \le |\tau| \le \pi). \tag{2.24}$$

Из (2.21), (2.22) и (2.24) следует (2.18). Лемма доказана. □

Лемма 3. *Пусть вес $\varphi(\tau)$ удовлетворяет условиям предложения* 1 *или предложения* 2. *Тогда найдутся константы $C_{20} = C_{20}(\varphi) > 0$ и $C_{21} = C_{21}(\varphi) > 0$, при которых выполняются неравенства*

$$K_{\varphi,2n}(e^{iu}, e^{iu}) \le C_{20} n |\varphi_{2n+1}(e^{iu})|^2 \qquad (n \in \mathbb{N}, \quad n^{-1} \le |u| \le \pi), \tag{2.25}$$

$$K_{\varphi,2n}(e^{iu}, e^{iu}) \ge C_{21} n |\varphi_{2n+1}(e^{iu})|^2 \qquad (n \in \mathbb{N}, \quad u \in \mathbb{R}). \tag{2.26}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу установленного в [9, формула (11.5)] равенства

$$2\Re\{e^{i\theta}\varphi_n'(e^{i\theta})\overline{\varphi_n(e^{i\theta})}\} = n|\varphi_n(e^{i\theta})|^2 + K_{\varphi,n-1}(e^{i\theta}, e^{i\theta}) \qquad (n \in \mathbb{N}, \quad \theta \in \mathbb{R})$$

справедливо неравенство

$$K_{\varphi,2n}(e^{iu}, e^{iu}) \le 2|\varphi_{2n+1}(e^{iu})\varphi_{2n+1}'(e^{iu})| \qquad (n \in \mathbb{Z}_+, \quad u \in \mathbb{R}). \tag{2.27}$$

Воспользуемся оценкой [14, предложение 4 и теорема 5.2]

$$|\varphi_{2n+1}'(e^{iu})| \le C_{22}(\varphi)(2n+1)|\pi(\varphi; (1-(4n+2)^{-1})e^{iu})| \qquad (n \in \mathbb{Z}_+, \quad u \in \mathbb{R}). \tag{2.28}$$

В силу (2.24), (2.6) и (2.5)

$$|\pi(\varphi; (1-(4n+2)^{-1})e^{iu})| \le C_{23}(\varphi)|\varphi_{2n+1}(e^{iu})| \qquad (n \in \mathbb{N}, \quad n^{-1} \le |u| \le \pi). \tag{2.29}$$

Из (2.27)–(2.29) следует (2.25).

Пользуясь (2.2) и (2.5), получаем неравенство

$$K_{\varphi,2n}(e^{iu}, e^{iu}) \ge C_7(\varphi)[\rho_{n+1}^2(u) + \rho_{n+2}^2(u) + \dots + \rho_{2n}^2(u)] \qquad (n \in \mathbb{N}, \quad u \in \mathbb{R}). \tag{2.30}$$

В силу (2.6)–(2.8)

$$\rho_\nu^2(u) \ge C_{24}(\varphi)\rho_{2n+1}^2(u) \qquad (\nu = n+1, n+2, \dots, 2n+1). \tag{2.31}$$

Из (2.30) и (2.31) следует (2.26).

3. Оценка функции Лебега сверху

При доказательстве теоремы 1 можно считать, что $|\theta| \le \varepsilon$, где ε — фиксированное число из интервала $(0,1)$. В самом деле, если $\psi(\tau) := (1-\cos\tau)\varphi(\tau)$ и $\{\Psi_k(\tau)\}_{k=0}^\infty$ — система тригонометрических полиномов, ортонормированная на $[0, 2\pi]$ с весом $\psi(\tau)$, то для сумм Фурье функции F, соответствующих весам $\varphi(\tau)$ и $\psi(\tau)$, выполняется неравенство [5, следствие 4.2]

$$|s_{\psi,2n}(F;\theta) - s_{\varphi,2n}(F;\theta)| \le C_{25}(\varphi)\|F\|_\infty[|\Psi_{2n-1}(\theta)| + |\Psi_{2n}(\theta)|] \qquad (n \in \mathbb{N}, \quad \theta \in \mathbb{R}). \tag{3.1}$$

Из (3.1) следует, что при $n \to \infty$ равномерно по $\theta \in \mathbb{R}$

$$L_{\varphi,n}(\theta) = L_{\psi,n}(\theta) + O(1)(|\Psi_{2n-1}(\theta)| + |\Psi_{2n}(\theta)|). \tag{3.2}$$

Поскольку при $|\theta| \in [\varepsilon, \pi]$ система $\{\Psi_k(\theta)\}_{k=0}^{\infty}$ равномерно ограничена [9, разд. 13] и выполняется условие $L_{\psi,n}(F;\theta) \asymp \ln(n+2)$ [22, теорема 1.1], то из (3.2) вытекает равномерное по θ соотношение $L_{\varphi,n}(\theta) \asymp \ln(n+2)$ $(\varepsilon \le |\theta| \le \pi)$, равносильное (1.8) при таких θ.

Пусть $|\theta| \le n^{-1}$. Тогда в силу (2.11)

$$I_1 := \frac{1}{2\pi}\int_{-2/n}^{2/n} |K_{\varphi,2n}(e^{i\theta}, e^{i\tau})|\varphi(\tau)\,d\tau \le C_{26}(\varphi)\int_0^{2/n}\left[\frac{1}{G(n^{-1})} + \frac{n\tau}{g(n^{-1})}\right]\frac{g(\tau)}{\tau}\,d\tau \le C_{27}(\varphi). \tag{3.3}$$

Применяя (2.20) и (2.7), находим, что

$$I_2 := \frac{1}{2\pi}\int_{2/n\le|\tau|\le\pi} |K_{\varphi,2n}(e^{i\theta}, e^{i\tau})|\varphi(\tau)\,d\tau \le C_{28}(\varphi)\rho_n(\theta)\int_{2/n\le|\tau|\le\pi}\frac{[g(|\tau|)]^{1/2}|\tau|^{-1/2}}{|\sin[(\tau-\theta)/2]| + n^{-1}}\,d\tau. \tag{3.4}$$

В последнем интеграле $2^{-1}|\tau-\theta| \le 1 + 2^{-1}\pi$, в силу чего $|\sin[(\tau-\theta)/2]| \asymp |\tau-\theta| \ge ||\tau| - |\theta||$. При этом $||\tau| - |\theta|| = |\tau| - |\theta| \ge 2^{-1}|\tau|$. Поэтому из (3.4) следует, что

$$I_2 \le C_{29}(\varphi)\rho_n(\theta)\int_{2/n}^{\pi}[g(\tau)]^{1/2}\tau^{-3/2}\,d\tau. \tag{3.5}$$

Так как $g(\tau)$ — вогнутый модуль непрерывности, медленно меняющийся в нуле, то при достаточно малом $d > 0$ функция $\tau^{-1/2}g(\tau)$ убывает на $[0, d]$, а на $[d, \pi]$ функция $[g(\tau)]^{1/2}\tau^{-3/2}$ ограничена. Поэтому из (3.5) следует, что

$$I_2 \le C_{30}(\varphi)\rho_n(\theta)[g(n^{-1})]^{1/2}n^{1/2}. \tag{3.6}$$

На основании (2.7), (2.8), (2.10) правая часть (3.6) ограничена, что вместе с (1.2) и (3.3) приводит к неравенству

$$L_{\varphi,n}(\theta) \le C_{31}(\varphi) \qquad \Big(|\theta| \le \frac{1}{n},\ \ n \in \mathbb{N}\Big). \tag{3.7}$$

Предположим теперь, что $n^{-1} \le |\theta| \le 2^{-1}\pi$. Тогда, применяя лемму 2 (в которой меняем ролями θ и τ), приходим к оценке

$$I_3 := \int_{-1/(2n)}^{1/(2n)} |K_{\varphi,2n}(e^{i\theta}, e^{i\tau})|\varphi(\tau)\,d\tau \le C_{32}(\varphi)\frac{|\theta|^{1/2}}{[g(|\theta|)]^{1/2}}\int_{-1/(2n)}^{1/(2n)}\frac{|\varphi_{2n}(e^{i\tau})|\varphi(\tau)}{|\sin[(\tau-\theta)/2]| + (2n)^{-1}}\,d\tau. \tag{3.8}$$

Пользуясь (2.5) и тем, что в (3.8) $|\sin[(\tau-\theta)/2]| + (2n)^{-1} \ge C_{33}|\theta|$, получаем неравенство

$$I_3 \le C_{34}(\varphi)[|\theta|g(|\theta|)]^{-1/2}\int_0^{1/(2n)}\big\{\mu_{2n} + \tau n^{1/2}[g(n^{-1})]^{-1/2}\big\}\frac{g(\tau)}{\tau}\,d\tau. \tag{3.9}$$

В силу (2.7), (2.8) и возрастания функции $g(t)t$ при $t \ge 0$ из (3.9) следует, что

$$I_3 \le C_{35}(\varphi)[|\theta|g(|\theta|)]^{-1/2}n^{-1/2}[g(n^{-1})]^{1/2} \le C_{36}(\varphi) \qquad \Big(\frac{1}{n} \le |\theta| \le \frac{\pi}{2}\Big). \tag{3.10}$$

Из (2.5) и (2.6) вытекает неравенство

$$|\varphi_{2n}(e^{i\theta})| \le C_{37}(\varphi)\frac{|\theta|^{1/2}}{[g(|\theta|)]^{1/2}} \qquad \Big(\frac{1}{n} \le |\theta| \le \pi\Big). \tag{3.11}$$

Предполагая, что $n^{-1} \le |\theta| \le 2^{-1}\pi$, на основании (2.18) и (3.11) имеем оценку

$$I_4 := \int\limits_{1/(2n)\le|\tau|\le\pi} |K_{\varphi,2n}(e^{i\theta}, e^{i\tau})|\varphi(\tau)\,d\tau \le C_{38}(\varphi)\frac{|\theta|^{1/2}}{[g(|\theta|)]^{1/2}} \int\limits_{1/(2n)}^{\pi} \frac{[g(\tau)]^{1/2}\tau^{-1/2}}{|\tau-|\theta||+n^{-1}}\,d\tau. \tag{3.12}$$

Если $(2n)^{-1} \le \tau \le |\theta|/2$, то $|\tau-|\theta||+n^{-1} \ge |\theta/2|$, в силу чего

$$I_5 := \frac{|\theta|^{1/2}}{[g(|\theta|)]^{1/2}} \int\limits_{1/(2n)}^{|\theta|/2} \frac{[g(\tau)]^{1/2}\tau^{-1/2}}{|\tau-|\theta||+n^{-1}}\,d\tau \le C_{39}(\varphi). \tag{3.13}$$

Если $|\theta|/2 \le \tau \le |2\theta|$, то $[g(\tau)]^{1/2}\tau^{-1/2} \asymp [g(|\theta|)]^{1/2}|\theta|^{-1/2}$. Поэтому

$$I_6 := \frac{|\theta|^{1/2}}{[g(|\theta|)]^{1/2}} \int\limits_{|\theta|/2}^{2|\theta|} \frac{[g(\tau)]^{1/2}\tau^{-1/2}}{|\tau-|\theta||+n^{-1}}\,d\tau \le C_{40}(\varphi)\ln(1+n|\theta|). \tag{3.14}$$

При $2|\theta| \le \tau \le \pi$ имеем неравенство $|\tau-|\theta||+n^{-1} > \tau-|\theta| \ge \tau/2$. Поэтому

$$I_7 := \frac{|\theta|^{1/2}}{[g(|\theta|)]^{1/2}} \int\limits_{2|\theta|}^{\pi} \frac{[g(\tau)]^{1/2}\tau^{-1/2}}{|\tau-|\theta||+n^{-1}}\,d\tau \le C_{41}(\varphi)\frac{|\theta|^{1/2}}{[g(|\theta|)]^{1/2}} \int\limits_{2|\theta|}^{\pi} [g(\tau)]^{1/2}\tau^{-3/2}\,d\tau \le C_{42}(\varphi). \tag{3.15}$$

Из (1.2), (3.8), (3.10), (3.12)–(3.15) следует оценка

$$L_{\varphi,n}(\theta) \le C_{43}(\varphi)[1+\ln(1+n|\sin(\theta/2)|)] \qquad \Big(\frac{1}{n} \le |\theta| \le \frac{2}{\pi}\Big). \tag{3.16}$$

Если $|\theta| \le n^{-1}$, то (3.16) следует из (3.7).

4. Оценка функции Лебега снизу

В этом разделе доказывается первое из неравенств (1.8), т. е. неравенство

$$C_4[1+\ln(1+n|\sin(\theta/2)|)] \le L_{\varphi,n}(\theta). \tag{4.1}$$

При этом используется формула

$$L_{\varphi,n}(\theta) = \sup\big\{|s_{\varphi,2n}(F;\theta)| : \ F \in L^\infty,\ \|F\|_\infty \le 1\big\}, \tag{4.2}$$

где

$$s_{\varphi,n}(F;\theta) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(\tau)D_{\varphi,n}(\theta,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau \qquad (n \in \mathbb{Z}_+,\ \ \theta \in \mathbb{R}), \tag{4.3}$$

причем $D_{\varphi,n}(\theta,\tau)$ определяется равенством (2.1).

В силу (4.3) для $F(\tau) \equiv 1$ все суммы $s_{\varphi,2n}(F;\theta) \equiv 1$. Поэтому из (4.2) следует неравенство

$$L_{\varphi,n}(\theta) \ge 1 \qquad (n \in \mathbb{Z}_+,\ \theta \in \mathbb{R}). \tag{4.4}$$

Из (2.3) и формулы Кристоффеля — Дарбу [16, гл. 1]

$$(1-z\overline{\xi})K_{\varphi,2n}(z,\xi)=\varphi^*_{2n+1}(z)\overline{\varphi^*_{2n+1}(\xi)}-\varphi_{2n+1}(z)\overline{\varphi_{2n+1}(\xi)}\qquad (n\in\mathbb{Z}_+;\quad z,\zeta\in\mathbb{C})$$

вытекает следующая (впервые полученная в [23]) формула:

$$D_{\varphi,2n}(\theta,\tau)\sin[(\tau-\theta)/2]=\Im[e^{i(n+1/2)(\theta-\tau)}\overline{\varphi_{2n+1}(e^{i\theta})}\varphi_{2n+1}(e^{i\tau})]\qquad (n\in\mathbb{N};\quad \theta,\tau\in\mathbb{R}). \tag{4.5}$$

Представляя $\varphi_n(e^{i\tau})$ в виде $\varphi_n(e^{i\tau})=|\varphi_n(e^{i\tau})|e^{i\gamma_n(\tau)}$, где $\gamma_n(\tau)$ — какая-либо из ветвей функции $\arg\varphi_n(e^{i\tau})$, выводим из (4.5) соотношение

$$D_{\varphi,2n}(\theta,\tau)\sin[(\tau-\theta)/2]=|\varphi_{2n+1}(e^{i\theta})\varphi_{2n+1}(e^{i\tau})|\sin A_n(\tau,\theta), \tag{4.6}$$

где

$$A_n(\tau,\theta)=\gamma_{2n+1}(\tau)-\gamma_{2n+1}(\theta)-(n+1/2)(\tau-\theta). \tag{4.7}$$

В [12, лемма 3.1] (см. также [13, лемма 13.3]) установлено, что

$$\gamma_n(\tau)-\gamma_n(\theta)=\frac{n}{2}(\tau-\theta)+\frac{1}{2}\int_\theta^\tau\frac{K_{n-1}(e^{iu},e^{iu})}{|\varphi_n(e^{iu})|^2}\,du. \tag{4.8}$$

Из (4.7) и (4.8) получаем, что

$$A_n(\tau,\theta)=\frac{1}{2}\int_\theta^\tau\frac{K_{2n}(e^{iu},e^{iu})}{|\varphi_{2n+1}(e^{iu})|^2}\,du. \tag{4.9}$$

Из (4.9) видно, что $A_n(\tau,\theta)$ строго возрастает по τ. Так как $A_n(\tau'',\theta)-A_n(\tau',\theta)=A_n(\tau'',\tau')$, а подынтегральная функция в (4.9) 2π-периодична, то

$$A_n(\tau+2\pi,\theta)-A_n(\tau,\theta)=A_n(\tau+2\pi,\tau)=A_n(2\pi,0). \tag{4.10}$$

В силу соотношений [16, формула (1.20)]

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-iku}}{|\varphi_{2n+1}(e^{iu})|^2}\,du=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-iku}\varphi(u)\,du\qquad (k=0,1,\ldots,2n+1)$$

ν-й многочлен, ортонормированный с весом $|\varphi_{2n+1}(e^{iu})|^{-2}$, при $\nu=0,1,\ldots,2n+1$ совпадает с $\varphi_\nu(z)$, имея одинаковое с $\varphi_\nu(z)$ детерминантное представление [16, формула (8.5)]. Следовательно, $A_n(2\pi,0)=(2n+1)\pi$, и из (4.10) следует, что когда τ пробегает отрезок длины 2π, то значения $A_n(\tau,\theta)$, строго возрастая, пробегают отрезок длины $(2n+1)\pi$.

Пусть $A_n(z_k,\theta)=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$. Точки $\tau=z_k$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ суть нули функции $\sin A_n(\tau,\theta)$ (как функции от τ). При $k\in\mathbb{Z}\setminus\{k:\ k=(2n+1)\nu\ (\nu\in\mathbb{Z})\}$ точка $\tau=z_k$ является нулем ядра $D_{\varphi,2n}(\theta,\tau)$. При $k=(2n+1)\nu$ $(\nu\in\mathbb{Z})$, очевидно, $D(\theta,z_k)=D(\theta,\theta)>0$. Точки $z_1<z_2<\ldots<z_{2n}$ принадлежат $(\theta,\theta+2\pi)$. Других нулей в $(\theta,\theta+2\pi)$ ядро $D_{\varphi,2n}(\theta,\tau)$ (как функция от τ) не имеет, являясь тригонометрическим полиномом порядка не выше n.

В силу (4.9) и (2.26)

$$\pi=A_n(z_{k+1},\theta)-A_n(z_k,\theta)=\frac{1}{2}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\frac{K_{2n}(e^{iu},e^{iu})}{|\varphi_{2n+1}(e^{iu})|^2}\,du\geq\frac{1}{2}C_{21}n(z_{k+1}-z_k).$$

Поэтому

$$z_{k+1}-z_k\leq\frac{2\pi}{C_{21}n}\qquad (n\in\mathbb{N},\quad k\in\mathbb{Z}). \tag{4.11}$$

Пусть $A/n \le \theta \le \pi/8$ $(A \ge 1)$ и $z_N \le 2\theta < z_{N+1}$. Тогда при достаточно больших n $(n > n_1)$ в силу (4.11) будут выполняться неравенства

$$z_{N+1} \le 2\theta + (z_{N+1} - z_N) \le \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{C_{21}n} \le \frac{\pi}{2}. \tag{4.12}$$

В силу (4.12), (2.25) и (4.9) при $k = 0, 1, \dots, N$ выполняются соотношения

$$\pi = A_n(z_{k+1}, \theta) - A_n(z_k, \theta) = A_n(z_{k+1}, z_k) \le \frac{1}{2} C_{20} n (z_{k+1} - z_k).$$

Поэтому

$$z_{k+1} - z_k \ge \frac{2\pi}{C_{20}n} \qquad (n \in \mathbb{N}; \quad k = 0, 1, \dots, N). \tag{4.13}$$

Пусть ζ_{2k-1} и ζ_{2k} $(k = 0, 1, \dots, N)$ — точки, удовлетворяющие условиям $A_n(\zeta_{2k-1}, \theta) = \pi/6 + k\pi$ и $A_n(\zeta_{2k}, \theta) = 5\pi/6 + k\pi$. Тогда в силу (4.9) и (2.25) имеем соотношения

$$\frac{2\pi}{3} = A_n(\zeta_{2k}, \theta) - A_n(\zeta_{2k-1}, \theta) = A_n(\zeta_{2k}, \zeta_{2k-1}) \le \frac{1}{2} C_{20} n (\zeta_{2k} - \zeta_{2k-1}),$$

из которых следует, что

$$\zeta_{2k} - \zeta_{2k-1} \ge \frac{4\pi}{3C_{20}n} \qquad (n \in \mathbb{N}; \quad k = 1, 2, \dots, N). \tag{4.14}$$

Отрезок $e_k := [\zeta_{2k-1}, \zeta_{2k}]$ содержится в интервале (z_k, z_{k+1}). При этом

$$|\sin A_n(\tau, \theta)| \ge \frac{1}{2} \qquad (\tau \in e_k; \quad k = 1, 2, \dots, N). \tag{4.15}$$

Так как при $\tau \in e_k$ в силу (4.11) $\tau - \theta \le z_{k+1} - z_0 \le 2\pi(k+1)/(C_{21}n)$ $(k = 1, 2, \dots, N)$, то

$$\frac{1}{\sin[(\tau - \theta)/2]} \ge \frac{2}{\tau - \theta} \ge \frac{C_{21}n}{\pi(k+1)} \qquad (\tau \in e_k; \quad k = 1, 2, \dots, N). \tag{4.16}$$

Если вес (1.5) удовлетворяет условиям теорем 1 или 2, то из (2.5) и (2.6) следует существование положительных констант $C_{44}(\varphi)$ и $C_{45}(\varphi)$ таких, что выполняются неравенства

$$C_{44}(\varphi) \le |\varphi_{2n+1}(e^{i\tau})| \sqrt{\varphi(\tau)} \le C_{45}(\varphi) \qquad \Big(\frac{1}{n} \le |\tau| \le \pi\Big). \tag{4.17}$$

Кроме того, найдутся положительные константы $C_{46}(\varphi)$ и $C_{47}(\varphi)$, при которых

$$C_{46}(\varphi) \le \frac{\varphi(\tau)}{\varphi(\theta)} \le C_{47}(\varphi) \qquad \Big(\frac{1}{n} \le |\theta| \le \frac{\pi}{2}, \quad |\theta| \le |\tau| \le 3|\theta|\Big). \tag{4.18}$$

Определим четную функцию $F(\tau) = F_{n,\theta}(\tau)$ равенствами

$$F(\tau) = \operatorname{sign} D_{\varphi,2n}(\theta, \tau) \qquad \big(\tau \in E_{n,\theta} := [\zeta_1, \zeta_2] \cup \dots \cup [\zeta_{2N-1}, \zeta_{2N}]\big),$$

$$F(\tau) = 0 \qquad (\tau \in [0, \pi] \setminus E_{n,\theta}).$$

Тогда в силу (4.2) будем иметь неравенство

$$L_{\varphi,n}(\theta) \ge \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} |F(\tau) D_{\varphi,2n}(\theta, \tau)| \varphi(\tau)\, d\tau - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} |F(\tau) D_{\varphi,2n}(\theta, \tau)| \varphi(\tau)\, d\tau = J_1 - J_2. \tag{4.19}$$

Поскольку $z_{2N} \le 2\theta$, то, применяя (4.5), (4.17) и (4.18), получаем, что

$$J_2 \le C_{48}(\varphi) \int\limits_{-z_{2N}}^{-z_1} \frac{d\tau}{|\sin[(\tau-\theta)/2]|} \le C_{49}(\varphi) \ln \frac{\theta + z_{2N}}{\theta + z_1} \le C_{49}(\varphi) \ln 3. \tag{4.20}$$

В силу (4.6), (4.13)–(4.18)

$$J_1 \ge C_{50}(\varphi) \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \ge C_{51}(\varphi) \ln N. \tag{4.21}$$

В силу (4.11) $\theta = 2\theta - \theta \le z_{N+1} - \theta = z_{N+1} - z_0 \le 2\pi(N+1)/(C_{21}n)$. Поэтому

$$N \ge \frac{C_{21} n \theta}{2\pi} - 1. \tag{4.22}$$

Из (4.19)–(4.22) найдутся константы $C_{52}(\varphi) > 0$ и $C_{53}(\varphi) > 0$ такие, что выполняется неравенство

$$L_{\varphi,n}(\theta) \ge C_{52}(\varphi) \ln(n\theta + 1) - C_{53}(\varphi) \qquad \Big(\frac{A}{n} \le \theta \le \frac{\pi}{8}\Big). \tag{4.23}$$

Из (4.23) и (4.4) выводим справедливость оценки (4.1) при $\theta \in [0, \pi]$. Аналогично доказывается ее справедливость при $\theta \in [-\pi, 0]$. Иной способ рассуждений состоит в использовании легко проверяемого равенства $L_{\varphi,n}(-\theta) = L_{\psi,n}(\theta)$, где $\psi(\tau) = \varphi(-\tau)$. Такой вес $\psi(\tau)$ удовлетворяет условиям теорем 1 и 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Агаханов С.А., Натансон Г.И.** Приближение функций суммами Фурье — Якоби // Докл. АН СССР. 1966. Т. 166, № 1. С. 9–10.
2. **Агаханов С.А., Натансон Г.И.** Функция Лебега сумм Фурье — Якоби // Вестн. ЛГУ. Сер. математика, механика и астрономия. 1968. № 1, вып. 1. С. 11–23.
3. **Бадков В.М.** Оценки функции Лебега и остатка ряда Фурье — Якоби // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9, № 6. С. 1263–1283.
4. **Бадков В.М.** Сходимость в среднем и почти всюду рядов Фурье по многочленам, ортогональным на отрезке // Мат. сб. 1974. Т. 95, № 2. С. 229–262.
5. **Бадков В.М.** Приближение функций в равномерной метрике суммами Фурье по ортогональным полиномам // Тр. МИАН. 1980. Т. 145. С. 20–62.
6. **Бадков В.М.** Равномерные асимптотические представления ортогональных полиномов // Тр. МИАН СССР. 1983. Т. 164. С. 6–36.
7. **Бадков В.М.** Равномерные асимптотические представления ортогональных многочленов // Приближение функций полиномами и сплайнами. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. С. 41–53.
8. **Бадков В.М.** Двусторонние оценки функции Лебега и остатка ряда Фурье по ортогональным многочленам // Аппроксимация в конкретных и абстрактных банаховых пространствах. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1987. С. 31–45.
9. **Бадков В.М.** Асимптотические и экстремальные свойства ортогональных полиномов при наличии особенностей у веса // Тр. МИАН. 1992. Т. 198. С. 41–88.
10. **Бадков В.М.** Асимптотика многочленов второго рода и двусторонние поточечные оценки их производных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 1. С. 71–83.
11. **Бадков В.М.** Поточечные оценки снизу модулей производных многочлена, ортогонального на окружности с весом, имеющим особенности // Мат. сб. 1995. Т. 186, № 6. С. 3–14.
12. **Бадков В.М.** О нулях ортогональных полиномов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 30–46.
13. **Бадков В.М.** Введение в единую теорию алгебраических и тригонометрических ортогональных полиномов: учеб. пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2006. 132 с.
14. **Бадков В.М.** Поточечные оценки многочленов, ортогональных на окружности с весом, не принадлежащим пространствам L^r $(r > 1)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 1. С. 66–78.

15. **Беленький А.М.** О разложении функций в ряд Фурье — Якоби // Конструктивная теория функций и отображений. Киев, 1981. С. 35–48.
16. **Геронимус Я.Л.** Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке. М.: Физматгиз, 1958. 240 с.
17. **Памятных С.Е.** Оценки функций Лебега сумм Фурье по ортогональным полиномам // Снежинск и наука: тез. докл. межотрасл. науч.-практ. конф. Снежинск: Изд-во СФТИ, 2000. С. 23–24.
18. **Сегё Г.** Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.
19. **Сенета Е.** Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985. 144 с.
20. **Badkov V.M.** Estimations for the Lebesgue function and the remainder of the Fourier series with respect to orthogonal polynomials // Functions, series, operators. Amsterdam etc.: North-Holland, 1983. P. 165–181.
21. **Badkov V.M.** Equiconvergence of Fourier sums in orthogonal polynomials // Proc. Steklov Inst. Math. 2004. Suppl. 1. P. S101–S127.
22. **Sandakova S.L.** Two-sided pointwise estimate for Lebesgue function of Fourier sums with respect to trigonometric orthogonal polynomials // Proc. Steklov Inst. Math. 2004. Suppl. 1. P. S107–S123.
23. **Szegö G.** On bi-orthogonal systems of trigonometric polynomials // Magy. Tud. Akad. Mat. Kut. Intéz. Közl. 1963 (1964). K. 8, № 3. Old. 255–273.

Бадков Владимир Михайлович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: Vladimir.Badkov@imm.uran.ru

Поступила 30.03.2011

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 3 2011

УДК 517.51

ВЛИЯНИЕ ГЛАДКОСТИ НА ПОГРЕШНОСТЬ АППРОКСИМАЦИИ ПРОИЗВОДНЫХ ПРИ ЛОКАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ НА ТРИАНГУЛЯЦИЯХ[1]

Н. В. Байдакова

Работа посвящена одной из проблем интерполяции функции на треугольнике. Рассматривается большой класс интерполяционных условий, обеспечивающих гладкость порядка m результирующей кусочно-полиномиальной функции на триангулированной области. Известно, что при гладкости $m \geq 1$ во многих имеющихся оценках сверху величин погрешности аппроксимации производных функции порядка 2 и выше производными интерполяционных многочленов, определенных на элементе триангуляции, присутствует синус наименьшего угла в знаменателе. Это приводит к необходимости наложения “условия наименьшего угла” на триангуляцию. Ранее было показано, что влияние наименьшего угла можно ослабить (это не означает, что его можно исключить полностью во всех случаях). Основная цель данной работы — показать, что для большого множества способов выбора условий интерполяции, в том числе традиционных, при $m \geq 1$ влияние наименьшего угла треугольника на величину погрешности аппроксимации производных функции производными интерполяционного многочлена является существенным для ряда производных порядка 2 и выше. В случае $m = 0$ существенным является влияние среднего (наибольшего) угла. Как следствие будут усилены результаты по неулучшаемости полученных ранее оценок сверху.

Ключевые слова: многомерная интерполяция, метод конечных элементов, аппроксимация.

N. V. Baidakova. Influence of smoothness on the error of approximation of derivatives under local interpolation on triangulations.

The paper is concerned with one problem of function interpolation on a triangle. We consider a large class of interpolation conditions guaranteeing the smoothness of order m of the resulting piecewise polynomial function on the triangulated domain. It is known that, for smoothness $m \geq 1$, the known upper estimates for the error of approximation of derivatives of order 2 and above by derivatives of interpolation polynomials defined on a triangulation element contain the sine of the smallest angle in the denominator. As a result, the “smallest angle condition” must be imposed on the triangulation. It was shown earlier that the influence of the smallest angle could be weakened (which does not mean that it can be eliminated in all cases). The principal aim of this paper is to show that, for a large number of methods of choosing interpolation conditions, including traditional conditions, the influence of the smallest angle of the triangle on the error of approximation of derivatives of a function by derivatives of the interpolation polynomial is essential for a number of derivatives of order 2 and above for $m \geq 1$. In the case $m = 0$, the influence of the middle (largest) angle is important. As a consequence, the results on the unimprovability of the upper estimates obtained earlier are strengthened.

Keywords: multidimensional interpolation, finite element method, approximation.

1. Введение

Пусть функция $f(x, y)$ определена на области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$; пусть $f \in W^{n+1}M$, где $W^{n+1}M$ — множество функций, непрерывных на Ω вместе со всеми своими частными производными до порядка $n+1$ включительно, у которых все производные порядка $n+1$ ограничены по модулю константой M. Пусть имеется триангуляция области Ω, т. е. область разбита на конечное число треугольников таким образом, что любые два треугольника либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину или общее ребро. Если два треугольника имеют общее ребро, их называют соседними. На каждом треугольнике для $f(x, y)$ строится многочлен $P_n(x, y)$ степени n по совокупности переменных типа Лагранжа, Эрмита или Биркгофа, интерполирующий

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00347) и УрО РАН (проекты 09-П-1-1013, 09-С-1-1007) в рамках программы Президиума РАН “Математическая теория управления” и интеграционного проекта, выполняемого совместно учеными УрО РАН и СО РАН.

функцию $f(x, y)$ (и ее производные, если речь идет о многочленах Эрмита или Биркгофа) в узлах треугольника (всего задается $(n+1)(n+2)/2$ условий на каждом треугольнике), такой, что результирующая кусочно-полиномиальная функция на Ω имеет гладкость m ($m \in \mathbb{Z}_+$), $n \geq 4m+1$. Последнее ограничение на соотношение между n и m является естественным и будет прокомментировано позднее. Построенная кусочно-полиномиальная функция аппроксимирует $f(x, y)$, а ее производные аппроксимируют производные функции $f(x, y)$. Оценки аппроксимации производных обычно зависят от геометрических характеристик треугольников триангуляции, в связи с чем на триангуляцию, как правило, накладываются определенные требования. Часто используемым ограничением на триангуляцию является так называемое "условие наименьшего угла" — ограничение снизу величин наименьших углов треугольников. Это связано с тем, что во многих известных оценках сверху величин погрешности аппроксимации производных функции производными интерполяционных кусочно-полиномиальных функций в знаменателях присутствуют синусы наименьших углов треугольников, составляющих разбиение исходной области. В качестве примера можно указать полученные в начале 70-х гг. прошлого века оценки А. Женишека [1], Дж. Брэмбла и М. Зламала [2], а также достаточно универсальные оценки сходимости Ф. Сьярле и П. Равьяра [3] для широкого класса многомерных областей (отметим, что в большинстве указанных здесь и ниже работ речь идет не только о полученных авторами оценках, но и о выборе ими способов интерполяции). В силу того что имеются ввиду локальные методы построения кусочно-полиномиальной функции, далее можно ограничиться рассмотрением одного треугольника триангуляции.

Пусть T — произвольный треугольник; a_i $(i = 1, 2, 3)$ — вершины T; n_{ij} $(i, j = 1, 2, 3;$ $i \neq j)$ — единичная нормаль к стороне $[a_i, a_j]$; α, β, θ — углы при вершинах a_1, a_2, a_3. Поместим треугольник T в прямоугольную систему координат Oxy так, что для некоторых положительных a, b, h координаты вершин будут записываться следующим образом: $a_1 = (b, 0)$, $a_2 = (-a, 0)$, $a_3 = (0, h)$. Пусть $0 < \alpha \leq \beta \leq \theta$, откуда следует, что $a \leq b$, и диаметр T равен $a + b \triangleq H$. Через $D^s_{\xi_1 \ldots \xi_s}$ будем обозначать производную порядка s по направлениям произвольных единичных векторов $\xi_1, \ldots, \xi_s$. Договоримся далее писать, что для функции $g_1(x, y)$, определенной на треугольнике T и, как правило, связанной тем или иным образом с рассматриваемой задачей интерполяции функции f многочленом P_n, и функции $g_2(M, a, b, h, H, \alpha, \beta)$ имеет место отношение

$$g_1(x, y) \overset{(\gtrsim)}{\lesssim} g_2(M, a, b, h, H, \alpha, \beta),$$

если существует число $C(n, m) > 0$, не зависящее от функций g_1 и g_2 и геометрических характеристик треугольника (допускающее зависимость только от степени n интерполяционного многочлена и гладкости m результирующей кусочно-полиномиальной функции), такое, что

$$g_1(x, y) \overset{(\geq)}{\leq} C(n, m) g_2(M, a, b, h, H, \alpha, \beta).$$

Отметим также, что в ряде работ, на которые мы будем ссылаться, при записи оценок аппроксимации производных использовалась величина $\gamma(\varphi) = \max\{1, \operatorname{ctg} \varphi\}$, где φ — некоторый угол. Поскольку $(\sin \varphi)^{-1} \lesssim \gamma(\varphi) \lesssim (\sin \varphi)^{-1}$, вместо $\gamma(\varphi)$ будем писать $(\sin \varphi)^{-1}$.

Рассмотрим часто встречающийся в литературе случай $n = 4m+1$. Интерес к нему обусловлен тем, что $n = 4m+1$ является наименьшей степенью, обеспечивающей гладкость m результирующей кусочно-полиномиальной функции на Ω [4; 5] (отсюда происходит ограничение на соотношение между n и m, о котором речь шла выше). На каждой из сторон $[a_p, a_q]$ выделим множество точек $\{b^j_{(pq)k}\}^k_{j=1}$, $k = 1, \ldots, m$, таких, что при каждом фиксированном k эти точки делят сторону, на которой они лежат, на $k+1$ равных отрезков. Для построения интерполяционного многочлена P_{4m+1} на T зададим значения функции и всех ее производных до порядка $2m$ в вершинах треугольника и по k производных k-го порядка ($k = 1, \ldots, m$) по нормалям к каждой из сторон треугольника

$$\frac{\partial^k P_{4m+1}(a_i)}{\partial x^{k-l} \partial y^l} = \frac{\partial^k f(a_i)}{\partial x^{k-l} \partial y^l}, \quad 0 \leq k \leq 2m, \quad 0 \leq l \leq k, \quad i = 1, 2, 3; \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial^k P_{4m+1}\big(b^j_{(pq)k}\big)}{\partial n^k_{pq}} = \frac{\partial^k f\big(b^j_{(pq)k}\big)}{\partial n^k_{pq}}, \quad 1 \le k \le m, \quad 1 \le j \le k, \quad 1 \le p, q \le 3, \quad p \ne q. \tag{1.2}$$

Оставшиеся $m(m-1)/2$ условий могут варьироваться. В [1] и [2] для условий (1.1), (1.2) и выбираемых некоторыми способами оставшихся условий доказаны оценки

$$\left|D^s_{\xi_1\ldots\xi_s}\left(f(x,y) - P_{4m+1}(x,y)\right)\right| \lesssim MH^{4m+2-s}\,(\sin\alpha)^{-s}, \quad s = 0, \ldots, 4m+1, \quad (x,y) \in T.$$

Такого же рода оценки, но для значительно более общей ситуации и произвольной степени n многочлена доказаны в [3]. Однако еще в 1957 г. Дж. Синжем [6] (см. также ссылку в [7]), а затем в 1976 г. И. Бабушкой и А. Азизом [8] на примере многочленов первой степени было отмечено, что “условие наименьшего угла” в некоторых случаях может быть заменено на более слабое ограничение на наибольший угол. Позднее для случая лагранжевой интерполяции (в этом случае $m = 0$) многочленами степени n по равномерным узлам r-симплекса Ю. Н. Субботиным [9; 10] были получены оценки, неулучшаемые или неулучшаемые с точностью до постоянного множителя, не зависящего от функции и геометрических характеристик симплекса. В частности, в случае треугольника оценки принимают вид

$$\left\|D^s_{\xi_1\ldots\xi_s}\left(f - P_n\right)\right\| \lesssim MH^{n+1-s}(\sin\beta)^{-s}, \quad s = 0, \ldots, n; \tag{1.3}$$

здесь и далее $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{C(T)}$. Из (1.3) следует, что при измельчении триангуляции на плоскости достаточно накладывать ограничения лишь на наибольшие углы треугольников. Кроме того, Ю. Н. Субботиным были получены неулучшаемые с точностью до знака “$\lesssim$” оценки приближения функций и их производных некоторыми интерполяционными многочленами Эрмита и Биркгофа малых степеней на треугольниках и r-симплексах [9–12], позволяющие ослабить “условие наименьшего угла” или устанавливающие, что данное условие является существенным. Этому же направлению посвящены работы Н. В. Латыповой [13] и автора [14], в которых найдены интерполяционные условия типа Биркгофа для построения многочленов степеней $4m+3$ и $4m+1$ на треугольнике, дающие возможность ослабить требования к триангуляции (но не избавляющие полностью от присутствия синуса наименьшего угла в знаменателе в оценках погрешности для производных). В частности, для $n = 4m+1$ в [14] при $m \ge 2$ найдены $m(m-1)/2$ условий, которые вместе с условиями (1.1), (1.2) обеспечивают оценки

$$\left\|\frac{\partial^k\left(f - P_{4m+1}\right)}{\partial x^{k-s}\partial y^s}\right\| \lesssim MH^{4m+2-k}\,(1/\sin\beta)^{\max\{1,s-2m\}}\,(1/\sin\alpha)^{\min\{s-1,2m\}}, \tag{1.4}$$

где $s = 1, \ldots, 4m+1$ (для $s = 0$ в правой части (1.4) остается MH^{4m+2-k}), $k = s, \ldots, 4m+1$. В [14] доказана также неулучшаемость части этих оценок (ниже как следствие основной теоремы неулучшаемость будет получена для большего количества случаев). При $m = 1$ оценки (1.4) для условий (1.1), (1.2), однозначно задающих интерполяционный многочлен P_5, и результаты по неулучшаемости получены в [12]. Поскольку для $\xi = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$, где ϑ — угол между вектором ξ и осью Ox, имеет место $D_\xi = (\partial/\partial x)\cos\vartheta + (\partial/\partial y)\sin\vartheta$, из (1.4) для любых единичных векторов $\xi_1, \ldots, \xi_s$ очевидным образом получаются оценки

$$\left\|D^s_{\xi_1\ldots\xi_s}\left(f - P_{4m+1}\right)\right\| \lesssim MH^{4m+2-s}\,(1/\sin\beta)^{\max\{1,s-2m\}}\,(1/\sin\alpha)^{\min\{s-1,2m\}}, \tag{1.5}$$

$$s = 1, \ldots, 4m+1,$$

(в случае $s = 0$ в правой части остается MH^{4m+2}). Отметим, что традиционной является запись оценок в форме (1.5), однако форма (1.4) более информативна, поскольку позволяет определять направления, в которых оценки производных не зависят от углов треугольника. В [15; 16] для $n = 3$ и $m = 0$ были построены интерполяционные многочлены типа Эрмита, для которых также имеют место оценки (1.3), а точнее, имеют место оценки

$$\left\|\frac{\partial^k\left(f - P_3\right)}{\partial x^{k-s}\partial y^s}\right\| \lesssim MH^{4-k}(\sin\beta)^{-s}, \quad s = 0, \ldots, 3, \quad k = s, \ldots, 3. \tag{1.6}$$

Кроме того, следует отметить работы [17–20].

Заметим, что в оценках производных второго и более высоких порядков, если брать совокупность всех возможных направлений, по которым берутся производные, синус наименьшего угла в знаменателе отсутствует только в (1.3) и (1.6), т. е. в случаях, когда обеспечивается лишь непрерывность кусочно-полиномиальной функции ($m = 0$). Основная цель данной работы — показать, что для большого множества способов выбора условий интерполяции, в том числе традиционных, при $m \geq 1$ влияние наименьшего угла треугольника на величину погрешности аппроксимации производных функции производными интерполяционного многочлена является существенным для производных порядка 2 и выше. В случае $m = 0$ существенным является влияние среднего (наибольшего) угла. Как следствие будут усилены результаты по неулучшаемости оценок (1.4), полученные в [14].

2. Формулировка основной теоремы

Пусть далее d_{ij} обозначает длину стороны $a_i a_j$; τ_{ij} — единичный вектор, направленный от a_i к a_j; $u = (x, y)$ — произвольная точка треугольника. Пусть на треугольнике T, помещенном в систему координат Oxy так, как это было описано выше, по функции $f \in W^{n+1}M$ строится интерполяционный многочлен $P_n(x, y) = P_n(u)$. Пусть сужения $P_n(u)$ и $\partial^k P_n(u)/\partial n_{ij}^k$ $(k = 1, \ldots, m)$ на любую сторону $[a_i, a_j]$ треугольника однозначно определяются интерполяционными условиями, задаваемыми в точках стороны $[a_i, a_j]$ (или в точках прямой, проходящей через a_i и a_j). Если при этом $P_n^*(u)$ — интерполяционный многочлен на соседнем с T треугольнике T^*, $[a_i, a_j]$ — общая сторона T и T^*, условия для нахождения $P_n^*(u)$, задаваемые на $[a_i, a_j]$, совпадают с условиями для $P_n(u)$ и это имеет место для всех соседних треугольников, то обеспечена гладкость C^m кусочно-полиномиальной функции на Ω. Пусть, кроме того, условия для определения $P_n(u)$ задаются таким образом, что для любой стороны $[a_i, a_j]$ треугольника T имеет место равенство

$$\frac{\partial^k \left(f(u) - P_n(u)\right)}{\partial n_{ij}^k}\bigg|_{u\in[a_i,a_j]} = \frac{1}{(n+1-k)!}\,\frac{\partial^{n+1} f(\vartheta_{ij}^k)}{\partial n_{ij}^k \partial \tau_{ij}^{n+1-k}}\; d_{ij}^{n+1-k}\omega_{ij,\,n+1-k}\left(\frac{|u-a_i|}{d_{ij}}\right), \tag{2.1}$$

$$k = 0, \ldots, m, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad i \neq j,$$

где $\vartheta_{ij}^k \in [a_i, a_j]$ (или ϑ_{ij}^k является точкой прямой, проходящей через a_i и a_j, если узлы интерполяции вынесены за пределы треугольника и функция $f(x, y)$ такова, что $\left|\partial^{n+1} f(\vartheta_{ij}^k)/\left(\partial n_{ij}^k \partial \tau_{ij}^{n+1-k}\right)\right| \leq M$); $\omega_{ij,\,n+1-k}$ — многочлен степени $n + 1 - k$ со старшим коэффициентом, равным единице; через $|u - a_i|$ обозначено расстояние между u и a_i.

Рассмотрим функцию

$$f^*(x, y) = \delta_1 M \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \delta_2 M \frac{x^n y}{n!}, \tag{2.2}$$

где δ_1 и δ_2 выбираются таким образом, чтобы $f^* \in W^{n+1}M$, $\delta_1^2 + \delta_2^2 \neq 0$ (аналогичная функция была использована в [12] при $n = 5$ для доказательства неулучшаемости полученных там оценок погрешности аппроксимации производных). Положим

$$e(x, y) = f^*(x, y) - P_n(x, y).$$

Введем определитель

$$D = \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & \ldots & d_m \\ \binom{n-2}{m-1} & \binom{n-2}{m} & \ldots & \binom{n-2}{2m-2} \\ \binom{n-3}{m-2} & \binom{n-3}{m-1} & \ldots & \binom{n-3}{2m-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \binom{n-m}{1} & \binom{n-m}{2} & \ldots & \binom{n-m}{m+1} \end{vmatrix},$$

где

$$d_s = \binom{n-1}{m-1+s}\left(n\omega_{21,n}^{(n-1)}(1) + n\frac{a}{b}\,\omega_{21,n}^{(n-1)}(1) - \omega_{31,n+1}^{(n)}(1)\right) + \binom{n}{m+s}\left(\omega_{31,n}^{(n-1)}(1) - \omega_{21,n}^{(n-1)}(1)\right), \quad (2.3)$$

$$s = 1, \dots, m;$$

положим

$$g = b\,\omega_{31,n+1}^{(n)}(1) - (a+b)\omega_{21,n+1}^{(n)}(1).$$

Теорема. *Пусть многочлен $P_n(x,y)$ (n фиксировано), интерполирующий функцию $f^*(x,y)$ на треугольнике T, удовлетворяет условиям (2.1) при $f = f^*$, и имеют место оценки*

$$\left|\omega_{kl,n+1-j}^{(n-j)}(1)\right| \lesssim 1, \quad j = 0, \dots, m, \quad k,l \in \{1,2,3\}; \quad (2.4)$$

$$|g| \gtrsim a; \quad (2.5)$$

$$|D| \gtrsim 1. \quad (2.6)$$

Тогда найдутся $\alpha_0 > 0$, натуральное число $s_0 \geq 2m+1$ и единичные векторы $\xi_{s1}, \dots, \xi_{ss}$, $s = 1, \dots, n$, такие, что для любого $\alpha < \alpha_0$ имеют место оценки

$$\left\|D^s_{\xi_{s1}\dots\xi_{ss}}(f^* - P_n)\right\| \gtrsim \frac{MH^{n+1-s}}{\sin\beta(\sin\alpha)^{s-1}}, \quad s = 1, \dots, s_0; \quad (2.7)$$

$$\left\|D^s_{\xi_{s1}\dots\xi_{ss}}(f^* - P_n)\right\| \gtrsim \frac{MH^{n+1-s}}{\sin\beta(\sin\alpha)^{s_0-1}}, \quad s = s_0+1, \dots, n. \quad (2.8)$$

Если, кроме того, $m \geq 1$ и

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = 0, \quad (2.9)$$

то найдутся $\widetilde{\alpha}_0 > 0$, натуральные числа $\{r_i\}_{i=0}^{m+1}$, $2m+1 = r_0 < r_1 < \dots < r_{m+1} \leq n$, и единичные векторы $\zeta_{r1}, \dots, \zeta_{rr}$, $r = 2m+2, \dots, n$, такие, что для любого $\alpha < \widetilde{\alpha}_0$ имеют место оценки

$$\left\|D^r_{\zeta_{r1}\dots\zeta_{rr}}(f^* - P_n)\right\| \gtrsim \frac{MH^{n+1-r}}{\sin\beta(\sin\alpha)^{2m}(\operatorname{tg}\beta)^{r-2m-1}}, \quad r = r_1, \dots, r_{m+1}; \quad (2.10)$$

$$\left\|D^r_{\zeta_{r1}\dots\zeta_{rr}}(f^* - P_n)\right\| \gtrsim \frac{MH^{n+1-r}}{\sin\beta(\sin\alpha)^{2m}(\operatorname{tg}\beta)^{r_{m+1}-2m-1}}, \quad r = r_{m+1}+1, \dots, n; \quad (2.11)$$

$$\left\|D^r_{\zeta_{r1}\dots\zeta_{rr}}(f^* - P_n)\right\| \gtrsim \max\left\{\frac{MH^{n+1-r}}{\sin\beta(\sin\alpha)^{p_r}(\operatorname{tg}\beta)^{q_r}}, \frac{MH^{n+1-r}}{\sin\beta(\sin\alpha)^{2m}(\operatorname{tg}\beta)^{r_{i-1}-2m-1}}\right\}, \quad (2.12)$$

$$r = r_{i-1}+1, \dots, r_i - 1, \ i = 1, \dots, m+1,$$

где $p_r = \max\{0, 2m - r_i + r\}$, $q_r = \min\{r_i - 2m, r\} - 1$.

Прежде чем доказывать теорему, сделаем несколько замечаний.

1°. Условие (2.4) означает, что выбор узлов интерполяции не должен зависеть от параметров a, h, b треугольника, т. е. $\left|\omega_{kl,n+1-j}^{(n-j)}(1)\right|$ не должен быстро возрастать при $\alpha \to 0$.

2°. Условие (2.5) не является слишком обременительным, как это может показаться, и выполнено почти всегда, когда выбор узлов интерполяции (а значит, любой соответствующий узлам интерполяции многочлен $\omega_{kl,n+1}$) не зависит от a, b. Обычно на всех сторонах всех треугольников триангуляции задаются однотипные условия интерполяции, т. е.

$$\omega_{kl,n+1-j}(x) = \omega_{pq,n+1-j}(x) \quad (2.13)$$

для любых k, l, p, q и $j = 0, \dots, m$. Поскольку оценки, как правило, получают на множестве всех возможных триангуляций, то (2.13) для любых k и l влечет

$$\omega_{kl,n+1-j}(x) = (-1)^{n+1-j}\omega_{kl,n+1-j}(1-x).$$

В этом случае $\omega_{kl,n+1}^{(n)}(x) = (-1)^{n+1+n}\omega_{kl,n+1}^{(n)}(1-x)$, т. е.

$$\omega_{kl,n+1}^{(n)}(1) = -\omega_{kl,n+1}^{(n)}(0). \tag{2.14}$$

Так как по условию теоремы старший коэффициент многочлена $\omega_{kl,n+1}(x)$ равен единице, т. е. $\omega_{kl,n+1}^{(n)}(x)$ является линейной функцией с ненулевым угловым коэффициентом, то (2.14) означает, что $\omega_{kl,n+1}^{(n)}(1) \neq 0$, и тогда

$$g = b\,\omega_{31,n+1}^{(n)}(1) - (a+b)\omega_{21,n+1}^{(n)}(1) = -a\omega_{31,n+1}^{(n)}(1).$$

Например, условиям (1.1), (1.2) соответствует

$$\omega_{kl,4m+2-j}(x) = x^{2m+1-j}(x-1)^{2m+1-j}\prod_{s=1}^{j}\Big(x - \frac{s}{j+1}\Big), \tag{2.15}$$

$$k, l \in \{1, 2, 3\},\ \ k \neq l; \quad j = 0, \dots, m,$$

а это означает, что данные условия интерполяции удовлетворяют требованию (2.13) и, следовательно, (2.5).

3°. Условие (2.6) также не является обременительным. В частности, если известно, что угол β отделен от $\pi/2$ (тогда $a \gtrsim h$), то это условие может быть исключено из условий теоремы. При этом для простоты лучше в (2.2) положить $\delta_2 = 0$.

Если $\beta \to \pi/2$ при $\alpha \to 0$, то, например, при выполненном условии (2.13) второе слагаемое в (2.3) равно нулю, и тогда для того, чтобы имело место (2.6), достаточно в силу леммы 1 (см. ниже) потребовать

$$\Big|n\Big(1 + \frac{a}{b}\Big)\omega_{21,n}^{(n-1)}(1) - \omega_{31,n+1}^{(n)}(1)\Big| \gtrsim 1.$$

В частности, для интерполяционных условий (1.1), (1.2), удовлетворяющих (2.15), последняя оценка имеет место, если $|b - na| \gtrsim b$, а это условие выполняется в силу того, что $\beta \to \pi/2$ при $\alpha \to 0$ (n фиксировано по условию теоремы), т. е. $na/b \lesssim h/b \to 0$.

Также следует отметить, что определитель D может быть вычислен методом разложения по первой строке с последующим применением леммы 1.

4°. Оценки (2.8) (а также, возможно, часть оценок (2.7)) и (2.10)–(2.12) выписаны для производных одного и того же порядка, и выбирать можно ту, у которой правая часть больше для конкретного треугольника.

5°. Так как α — наименьший угол треугольника, то $\sin\alpha \lesssim \operatorname{tg}\alpha \lesssim \sin\alpha$, поэтому во всех оценках вместо $\sin\alpha$ можно писать $\operatorname{tg}\alpha$. В то же время $\operatorname{tg}\beta$ нельзя заменить на $\sin\beta$, так как если, например, треугольник T — равнобедренный при $\beta = \theta$, то $\sin\alpha \lesssim \cos\beta \lesssim \sin\alpha$, т. е. $1/\operatorname{tg}\beta \to 0$, в то время как $1/\sin\beta \gtrsim 1$.

3. Доказательство теоремы

Напомним, что доказательство ведется для достаточно малых значений α.

Лемма 1. *Пусть* $s_0, \dots, s_k \in \mathbb{N}$, $k \le s_0 < \dots < s_k$. *Положим* $s_{-1} = -1$. *Тогда*

$$\Delta_n(s_0, \dots, s_k) \triangleq \begin{vmatrix} \binom{n}{s_0} & \binom{n}{s_1} & \dots & \binom{n}{s_k} \\ \binom{n-1}{s_0-1} & \binom{n-1}{s_1-1} & \dots & \binom{n-1}{s_k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{n-k}{s_0-k} & \binom{n-k}{s_1-k} & \dots & \binom{n-k}{s_k-k} \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{k} \prod_{i=0}^{k-j} \frac{\binom{n-1-s_{j-1}-i}{s_j-1-s_{j-1}}}{\binom{s_{i+j}-1-s_{j-1}}{s_j-1-s_{j-1}}}. \tag{3.1}$$

Отметим, что точное значение $\Delta_n(s_0, \dots, s_k)$ не имеет принципиального значения для доказательства теоремы; достаточно того, что $\Delta_n(s_0, \dots, s_k) \ne 0$.

Доказательство. Воспользуемся тем, что $\binom{r-1}{s-1} - \binom{r}{s} = -\binom{r-1}{s}$. Из каждой строки определителя со второй по $(k+1)$-ю вычтем предыдущую, вынесем множитель (-1) из этих строк. Далее из строк с третьей по $(k+1)$-ю вычтем предыдущую и т. д. (выполняем данную процедуру k раз). Получаем

$$\Delta_n(s_0, \dots, s_k) = (-1)^{k(k+1)/2} \begin{vmatrix} \binom{n}{s_0} & \binom{n}{s_1} & \dots & \binom{n}{s_k} \\ \binom{n-1}{s_0} & \binom{n-1}{s_1} & \dots & \binom{n-1}{s_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{n-k}{s_0} & \binom{n-k}{s_1} & \dots & \binom{n-k}{s_k} \end{vmatrix}. \tag{3.2}$$

В случае $s_i = s_0 + i$, $i = 1, \dots, k$, определитель из правой части (3.2) вычислен в [21, задача 317]. Мы будем использовать тот же метод вычисления, действуя по индукции. Из $(i+1)$-й строки, $i = 0, \dots, k$, вынесем множитель $(n-i)(n-i-1)\cdots(n-i-s_0+1)$; из $(j+1)$-го столбца, $j = 0, \dots, k$, вынесем множитель $1/\left(s_j(s_j-1)\cdots(s_j-s_0+1)\right)$. Тогда

$$\Delta_n(s_0, \dots, s_k) = (-1)^{k(k+1)/2} \prod_{i=0}^{k} \frac{(n-i)!}{(n-i-s_0)!} \frac{(s_i-s_0)!}{s_i!} \begin{vmatrix} 1 & \binom{n-s_0}{s_1-s_0} & \dots & \binom{n-s_0}{s_k-s_0} \\ 1 & \binom{n-1-s_0}{s_1-s_0} & \dots & \binom{n-1-s_0}{s_k-s_0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \binom{n-k-s_0}{s_1-s_0} & \dots & \binom{n-k-s_0}{s_k-s_0} \end{vmatrix}.$$

Из каждой строки с первой по k-ю вычтем следующую и разложим получившийся определитель по первому столбцу, в результате имеем

$$\Delta_n(s_0, \dots, s_k) = (-1)^{k(k+1)/2+(k+2)} \prod_{i=0}^{k} \frac{\binom{n-i}{s_0}}{\binom{s_i}{s_0}} \begin{vmatrix} \binom{n-1-s_0}{s_1-1-s_0} & \binom{n-1-s_0}{s_2-1-s_0} & \dots & \binom{n-1-s_0}{s_k-1-s_0} \\ \binom{n-2-s_0}{s_1-1-s_0} & \binom{n-2-s_0}{s_2-1-s_0} & \dots & \binom{n-2-s_0}{s_k-1-s_0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{n-k-s_0}{s_1-1-s_0} & \binom{n-k-s_0}{s_2-1-s_0} & \dots & \binom{n-k-s_0}{s_k-1-s_0} \end{vmatrix}.$$

Первый шаг индукции завершен. В результате мы получили определитель, аналогичный определителю из правой части (3.2), но его порядок на единицу меньше. Продолжая процесс, получим (3.1). Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *Если выполнены условия* (2.4)–(2.6), *то имеют место оценки* (2.7), (2.8).

Доказательство. Пусть для определенности нормаль n_{31} образует острый угол с осью Oy. Данное предположение не влияет на общность результатов. Рассмотрим сужения $\partial^j e(x,y)/(\partial n_{31}^j)$, $j = 0, \dots, m$, на отрезок $[a_3, a_1]$. Отметим, что $\tau_{31} = (\cos\alpha, -\sin\alpha)$, $n_{31} =$

$(\sin\alpha, \cos\alpha)$. Используя условие (2.1), вид функции f^* и расположение треугольника в системе координат, получим

$$\frac{\partial^n e(a_1)}{\partial\tau_{31}^{n-j}\partial n_{31}^j} = \frac{1}{(n+1-j)!}\frac{\partial^{n+1} f^*(\vartheta_{31}^j)}{\partial\tau_{31}^{n+1-j}\partial n_{31}^j}(b^2+h^2)^{1/2}\omega_{31,n+1-j}^{(n-j)}(1)$$

$$= \frac{M}{(n+1-j)!}\,(b^2+h^2)^{1/2}\omega_{31,n+1-j}^{(n-j)}(1)\bigl(\delta_1\cos^{n+1-j}\alpha\sin^j\alpha$$

$$-\,\delta_2(n+1-j)\cos^{n-j}\alpha\sin^{j+1}\alpha + \delta_2 j\cos^{n+2-j}\alpha\sin^{j-1}\alpha\bigr)$$

$$= \frac{Mb\cos^n\alpha}{(n+1-j)!}\,\omega_{31,n+1-j}^{(n-j)}(1)\bigl(\delta_1\operatorname{tg}^j\alpha - \delta_2(n+1-j)\operatorname{tg}^{j+1}\alpha + \delta_2 j\operatorname{tg}^{j-1}\alpha\bigr).$$

Тогда для $k = 0,\ldots,m$ имеют место равенства

$$\frac{\partial^n e(a_1)}{\partial\tau_{31}^{n-k}\partial y^k} = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{\partial^n e(a_1)}{\partial\tau_{31}^{n-j}\partial n_{31}^j}\sin^{k-j}\alpha\cos^j\alpha = (-1)^k Mb\mu_k\sin^k\alpha\cos^n\alpha, \tag{3.3}$$

где

$$\mu_k = \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{(n+1-j)!}\binom{k}{j}\omega_{31,n+1-j}^{(n-j)}(1)\biggl(\delta_1 - \delta_2(n+1-j)\operatorname{tg}\alpha + \frac{\delta_2 j}{\operatorname{tg}\alpha}\biggr). \tag{3.4}$$

Отметим, что с учетом (2.4) имеют место оценки

$$|\mu_0| \lesssim 1; \qquad |\mu_k| \lesssim \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \quad k = 1,\ldots,m. \tag{3.5}$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial^n e(a_1)}{\partial\tau_{31}^{n-k}\partial y^k} = \sum_{i=k}^n \binom{n-k}{i-k}\frac{\partial^n e(a_1)}{\partial x^{n-i}\partial y^i}\cos^{n-i}\alpha(-\sin\alpha)^{i-k}$$

$$= (-1)^k\frac{\cos^n\alpha}{\sin^k\alpha}\sum_{i=k}^n(-1)^i\binom{n-k}{i-k}\frac{\partial^n e(a_1)}{\partial x^{n-i}\partial y^i}\operatorname{tg}^i\alpha. \tag{3.6}$$

Рассмотрим сужения $\partial^n e/\bigl(\partial x^{n-i}\partial y^i\bigr)$ на сторону $[a_2, a_1]$ для $i = 0,\ldots,m$. Так как f^* имеет вид (2.2), многочлен $\partial^i P_n(x,0)/\bigl(\partial y^i\bigr)$ совпадает с $\partial^i f^*(x,0)/\bigl(\partial y^i\bigr)$ при $i = 2,\ldots,m$, т. е. $\partial^n e(a_1)/\bigl(\partial x^{n-i}\partial y^i\bigr) = 0$ при $i = 2,\ldots,m$. Для $i = 0, 1$ согласно (2.1) получаем

$$\frac{\partial^n e(a_1)}{\partial x^n} = \frac{M\delta_1}{(n+1)!}(a+b)\omega_{21,n+1}^{(n)}(1), \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial^n e(a_1)}{\partial x^{n-1}\partial y} = \frac{M\delta_2}{n!}(a+b)\omega_{21,n}^{(n-1)}(1). \tag{3.8}$$

Таким образом, объединяя (3.3) и (3.6), приходим к системе линейных уравнений относительно величин $\partial^n e(a_1)/\bigl(\partial x^{n-i}\partial y^i\bigr)$

$$\sum_{i=m+1}^{2m+1}(-1)^i\binom{n-k}{i-k}\frac{\partial^n e(a_1)}{\partial x^{n-i}\partial y^i}\operatorname{tg}^i\alpha = -\sum_{i=2m+2}^{n}(-1)^i\binom{n-k}{i-k}\frac{\partial^n e(a_1)}{\partial x^{n-i}\partial y^i}\operatorname{tg}^i\alpha + \widetilde{\mu}_k, \tag{3.9}$$

$$k = 0,\ldots,m,$$

где

$$\widetilde{\mu}_k = Mb\mu_k\sin^{2k}\alpha, \quad k = 2,\ldots,m; \tag{3.10}$$

$$\widetilde{\mu}_0 = -\frac{\partial^n e(a_1)}{\partial x^n} + n\frac{\partial^n e(a_1)}{\partial x^{n-1}\partial y}\ \operatorname{tg}\alpha + Mb\mu_0,$$

$$\widetilde{\mu}_1 = \frac{\partial^n e(a_1)}{\partial x^{n-1}\partial y}\ \operatorname{tg}\alpha + Mb\mu_1\sin^2\alpha.$$

Используя (3.4), (3.7) и (3.8), можем $\widetilde{\mu}_0$ представить в виде

$$\widetilde{\mu}_0 = \widetilde{\mu}_{00} + \widetilde{\mu}_{01}, \tag{3.11}$$

где

$$\widetilde{\mu}_{00} = \frac{M\delta_1}{(n+1)!}\Big(b\omega^{(n)}_{31,n+1}(1) - (a+b)\omega^{(n)}_{21,n+1}(1)\Big),$$

$$\widetilde{\mu}_{01} = \frac{M\delta_2 h}{n!}\left(n\omega^{(n-1)}_{21,n}(1) + n\frac{a}{b}\omega^{(n-1)}_{21,n}(1) - \omega^{(n)}_{31,n+1}(1)\right).$$

Аналогично для некоторых $\phi_i(n,\delta_1,\delta_2,\alpha)$ величина $\widetilde{\mu}_1$ представляется в виде

$$\widetilde{\mu}_1 = M\delta_1 b\sin^2\alpha\left(\phi_1(n,\delta_1,\delta_2,\alpha)\omega^{(n)}_{31,n+1}(1) + \phi_2(n,\delta_1,\delta_2,\alpha)\omega^{(n-1)}_{31,n}(1)\right)$$

$$+\frac{M\delta_2}{n!}h\omega^{(n-1)}_{21,n}(1) + \frac{M\delta_2}{n!}\ \frac{ah}{b}\omega^{(n-1)}_{21,n}(1) - \frac{M\delta_2}{n!}\omega^{(n-1)}_{31,n}(1)b\sin\alpha\cos\alpha,$$

где $|\phi_i(n,\delta_1,\delta_2,\alpha)| \lesssim 1$, $i=1,2$. Так как $ah/b = b\operatorname{tg}^2\alpha/\operatorname{tg}\beta$, $b\sin\alpha\cos\alpha = h - h\sin^2\alpha$, то с учетом (2.4) будет

$$\widetilde{\mu}_1 = \widetilde{\mu}_{11} + \widetilde{\mu}_{12}, \tag{3.12}$$

где

$$\widetilde{\mu}_{11} = \frac{M\delta_2 h}{n!}\big(\omega^{(n-1)}_{21,n}(1) - \omega^{(n-1)}_{31,n}(1)\big),$$

$$\widetilde{\mu}_{12} = Mb\phi_3(n,\delta_1,\delta_2,\alpha)\ \frac{\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\ + Mb\phi_4(n,\delta_1,\delta_2,\alpha)\sin^2\alpha,$$

$$|\phi_i(n,\delta_1,\delta_2,\alpha)| \lesssim 1, \quad i=3,4.$$

Разрешим систему (3.9) относительно $m+1$ неизвестных, стоящих в левой части, которые будем считать базисными, по формулам Крамера. Тогда

$$\frac{\partial^n e(a_1)}{\partial x^{n-i}\partial y^i} = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = m+1,\dots,2m+1,$$

где Δ представляет собой определитель $\Delta_n(m+1,\dots,2m+1)$, у которого каждый столбец умножен на $(-\operatorname{tg}\alpha)^{s+m}$, где s — номер столбца, т. е.

$$\Delta = (-\operatorname{tg}\alpha)^{(m+1)(3m+2)/2}\Delta_n(m+1,\dots,2m+1) = (-\operatorname{tg}\alpha)^{(m+1)(3m+2)/2}\prod_{j=0}^{m}\frac{\binom{n-j}{m+1}}{\binom{m+1+j}{m+1}};$$

Δ_i — определитель, получающийся в результате замены i-го столбца Δ на столбец правых частей (3.9). Таким образом,

$$\frac{\partial^n e(a_1)}{\partial x^{n-i}\partial y^i} = (\operatorname{tg}\alpha)^{-i}\sum_{s=2m+2}^{n}\nu_{is}\frac{\partial^n e(a_1)}{\partial x^{n-s}\partial y^s}tg^s\alpha + \varphi_i, \quad i=m+1,\dots,2m+1, \tag{3.13}$$

где $\varphi_i = \left(\sum_{k=0}^m \nu_{ik}\widetilde{\mu}_k\right)/\operatorname{tg}^i\alpha$; коэффициенты ν_{jl} могут зависеть только от n и m. Принимая во внимание (2.4), (3.5), (3.10)–(3.12), можно утверждать, что

$$|\varphi_i| = \frac{\left|\nu_{i0}\left(\widetilde{\mu}_{00}+\widetilde{\mu}_{01}\right) + \nu_{i1}\left(\widetilde{\mu}_{11}+\widetilde{\mu}_{12}\right) + \sum\limits_{k=2}^{m}\nu_{ik}\widetilde{\mu}_k\right|}{\operatorname{tg}^i\alpha}$$

$$\lesssim \frac{M|g|}{\operatorname{tg}^i \alpha} + \frac{Mh}{\operatorname{tg}^i \alpha} + \frac{Mb\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}\beta\, tg^i\alpha} + \frac{Mb\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}^i \alpha} + \frac{Mb\sin^3\alpha}{\operatorname{tg}^i \alpha} \lesssim \frac{M|g|}{\operatorname{tg}^i \alpha} + \frac{Mb}{\operatorname{tg}^{i-1} \alpha} \lesssim \frac{M(|g|+h)}{\operatorname{tg}^i \alpha}\,, \quad (3.14)$$

$$i = m+1, \dots, 2m.$$

Рассмотрим более детально случай $i = 2m+1$:

$$\varphi_{2m+1} = \frac{(-1)^{(m+2)+m(3m+1)/2}}{\operatorname{tg}^{2m+1}\alpha}\widetilde{\mu}_0 \Delta_{n-1}(m, \dots, 2m-1)$$

$$- \frac{(-1)^{(m+2)+m(3m+1)/2}}{\operatorname{tg}^{2m+1}\alpha}\widetilde{\mu}_1 \begin{vmatrix} \binom{n}{m+1} & \binom{n}{m+2} & \dots & \binom{n}{2m} \\ \binom{n-2}{m-1} & \binom{n-2}{m} & \dots & \binom{n-2}{2m-2} \\ \binom{n-3}{m-2} & \binom{n-3}{m-1} & \dots & \binom{n-3}{2m-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{n-m}{1} & \binom{n-m}{2} & \dots & \binom{n-m}{m+1} \end{vmatrix} + \frac{1}{\operatorname{tg}^{2m+1}\alpha}\sum_{k=2}^{m} \nu_{2m+1,k}\widetilde{\mu}_k$$

$$= \frac{\kappa(-1)^{m(m+1)/2}}{\operatorname{tg}^{2m+1}\alpha}\widetilde{\mu}_{00} + \frac{(-1)^{m(m+1)/2}}{\operatorname{tg}^{2m+1}\alpha} \begin{vmatrix} \widetilde{d}_1 & \widetilde{d}_2 & \dots & \widetilde{d}_m \\ \binom{n-2}{m-1} & \binom{n-2}{m} & \dots & \binom{n-2}{2m-2} \\ \binom{n-3}{m-2} & \binom{n-3}{m-1} & \dots & \binom{n-3}{2m-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{n-m}{1} & \binom{n-m}{2} & \dots & \binom{n-m}{m+1} \end{vmatrix}$$

$$+ \frac{\lambda(-1)^{m(m+1)/2}}{\operatorname{tg}^{2m+1}\alpha}\widetilde{\mu}_{12} + \frac{1}{\operatorname{tg}^{2m+1}\alpha}\sum_{k=2}^{m} \nu_{2m+1,k}\widetilde{\mu}_k,$$

где $1 \lesssim \kappa, \lambda \lesssim 1$ в силу леммы 1,

$$\widetilde{d}_s = \widetilde{\mu}_{01}\binom{n-1}{m-1+s} - \widetilde{\mu}_{11}\binom{n}{m+s}.$$

Таким образом,

$$\varphi_{2m+1} = \frac{\kappa(-1)^{m(m+1)/2}}{\operatorname{tg}^{2m+1}\alpha}\frac{M\delta_1 g}{(n+1)!} + \frac{(-1)^{m(m+1)/2}}{\operatorname{tg}^{2m+1}\alpha}\frac{M\delta_2 h}{n!}D$$

$$+ \frac{\lambda(-1)^{m(m+1)/2}}{\operatorname{tg}^{2m+1}\alpha}\widetilde{\mu}_{12} + \frac{1}{\operatorname{tg}^{2m+1}\alpha}\sum_{k=2}^{m} \nu_{2m+1,k}\widetilde{\mu}_k. \quad (3.15)$$

Оценим слагаемые в правой части (3.15). В силу (2.5) и (2.6) получаем

$$\Big|\frac{\kappa(-1)^{m(m+1)/2}}{\operatorname{tg}^{2m+1}\alpha}\frac{M\delta_1 g}{n!}\Big| \gtrsim \frac{M|\delta_1||g|}{\operatorname{tg}^{2m+1}\alpha} \gtrsim \frac{M|\delta_1|a}{\operatorname{tg}^{2m+1}\alpha},$$

$$\Big|\frac{(-1)^{m(m+1)/2}}{\operatorname{tg}^{2m+1}\alpha}\frac{M\delta_2 h}{n!}D\Big| \gtrsim \frac{M|\delta_2|h}{\operatorname{tg}^{2m+1}\alpha}\,.$$

Для оценки третьего слагаемого правой части (3.15) используем вид $\widetilde{\mu}_{12}$:

$$\Big|\frac{\lambda(-1)^{m(m+1)/2}}{\operatorname{tg}^{2m+1}\alpha}\widetilde{\mu}_{12}\Big| \lesssim \frac{Mb\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}^{2m+1}\alpha} + \frac{Mb\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}^{2m+1}\alpha} \lesssim \frac{Mb\sin\alpha}{\sin\beta\operatorname{tg}^{2m}\alpha}\,.$$

Остается оценить четвертое слагаемое. Используя (3.5) и (3.10), имеем

$$\Big|\frac{1}{\operatorname{tg}^{2m+1}\alpha}\sum_{k=2}^{m} \nu_{2m+1,k}\widetilde{\mu}_k\Big| \lesssim \frac{Mb}{\operatorname{tg}^{2m-2}\alpha} \lesssim \frac{Mb\sin\alpha}{\sin\beta\operatorname{tg}^{2m}\alpha}\,.$$

Данные оценки вместе с тем, что α является достаточно малой величиной, означают, что, выбрав δ_1 и δ_2 таким образом, чтобы первое и второе слагаемые правой части (3.15) имели одинаковые знаки, получим

$$|\varphi_{2m+1}| \gtrsim \frac{M(|g|+h)}{\operatorname{tg}^{2m+1}\alpha} - \frac{Mb\sin\alpha}{\sin\beta\operatorname{tg}^{2m}\alpha} \gtrsim \frac{Mb(|g|+h)}{h\operatorname{tg}^{2m}\alpha} - \frac{Mb\sin\alpha}{\sin\beta\operatorname{tg}^{2m}\alpha} \gtrsim \frac{Mb(|g|+h)}{h\operatorname{tg}^{2m}\alpha}. \tag{3.16}$$

Из (3.13) и (3.16) следует, что найдется $s_0 \geq 2m+1$ такое, что

$$\left|\frac{\partial^n e(a_1)}{\partial x^{n-s_0}\partial y^{s_0}}\right| = \left|\frac{\partial^n\left(f^*(a_1)-P_n(a_1)\right)}{\partial x^{n-s_0}\partial y^{s_0}}\right| \gtrsim \frac{Mb(|g|+h)}{h\operatorname{tg}^{s_0-1}\alpha}. \tag{3.17}$$

С учетом (2.5) получаем оценку

$$\left|\frac{\partial^n e(a_1)}{\partial x^{n-s_0}\partial y^{s_0}}\right| \gtrsim \frac{MH}{\sin\beta\operatorname{tg}^{s_0-1}\alpha}. \tag{3.18}$$

Рассмотрим случай, когда $s_0 \geq 2$ (это выполнено всегда для $m \neq 0$). Напомним, что $e(x,y)$ является многочленом. Более того, в силу (2.2) и того, что $s_0 \geq 2$, на всем треугольнике T имеет место тождество

$$\frac{\partial^n e(x,y)}{\partial x^{n-s_0}\partial y^{s_0}} \equiv \frac{\partial^n e(a_1)}{\partial x^{n-s_0}\partial y^{s_0}}. \tag{3.19}$$

Рассмотрим $\partial^n e(x,y)/\left(\partial x^{n-s_0}\partial y^{s_0}\right)$ на отрезке, соединяющем точки $(-a/2, h/2)$ и $(b/2, h/2)$. Согласно неравенству Маркова [22, §3.5], примененному $n-s_0$ раз, на этом отрезке найдутся точки $(\theta_k, h/2)$, $k=0,\dots,n-s_0-1$, $-a/2 \leq \theta_k \leq b/2$, такие, что

$$\left|\frac{\partial^{k+s_0} e(\theta_k, h/2)}{\partial x^k\partial y^{s_0}}\right| \gtrsim \frac{MH^{n+1-(k+s_0)}}{\sin\beta\operatorname{tg}^{s_0-1}\alpha}, \quad k=0,\dots,n-s_0-1.$$

Рассмотрим теперь $\partial^{k+s_0} e(x,y)/\left(\partial x^k\partial y^{s_0}\right)$, $k=0,\dots,n-s_0$, на отрезке, соединяющем $(\theta_k, 0)$ и $(\theta_k, h/2)$. Применим (s_0-1) раз неравенство Маркова. Тогда на таком отрезке найдутся точки (θ_k, ϑ_j), $j=1,\dots,s_0$, $0 \leq \vartheta_j \leq h/2$, такие, что

$$\left|\frac{\partial^{k+j} e(\theta_k, \vartheta_j)}{\partial x^k\partial y^j}\right| \gtrsim \frac{MH^{n+1-(k+j)}}{\sin\beta\operatorname{tg}^{j-1}\alpha}, \quad j=1,\dots,s_0-1, \quad k=0,\dots,n-s_0. \tag{3.20}$$

Если $s_0 = 1$ (это означает, что $m=0$), то достаточно рассмотреть (3.18) и применить $(n-1)$ раз неравенство Маркова на отрезке, соединяющем точки a_2 и a_1. Лемма 2 доказана. □

Лемма 3. *Если* $m \geq 1$ *и выполнены условия* (2.4)–(2.6), (2.9), *то имеют место оценки* (2.10)–(2.12).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В ходе доказательства леммы 2 для некоторого $s_0 \geq 2m+1$ были получены оценки (3.17). Принимая во внимание (3.19), мы можем утверждать, что оценка (3.17) имеет место во всех точках треугольника T, в том числе в точке a_2. Пусть точная оценка для $|\partial^n e(a_2)/(\partial x^{n-s_0}\partial y^{s_0})|$ имеет вид

$$\left|\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-s_0}\partial y^{s_0}}\right| \gtrsim \frac{Mb(|g|+h)K_{s_0}(\alpha,\beta)}{h\operatorname{tg}^{s_0-1}\alpha}, \tag{3.21}$$

где $K_{s_0}(\alpha,\beta) \gtrsim 1$ (в частности, допускается $K_{s_0}(\alpha,\beta) \to +\infty$ при $\alpha \to 0$). Пусть $\{m+1,\dots,2m\} = \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$, где $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \varnothing$, и множества $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ характеризуются тем, что

$$\left|\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-i}\partial y^i}\right| \lesssim \frac{Mb(|g|+h)}{h\operatorname{tg}^{i-1}\alpha}, \quad i \in \mathcal{I}_1;$$

$$\Big|\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-i}\partial y^i}\Big| \gtrsim \frac{Mb(|g|+h)K_i(\alpha,\beta)}{h\,\mathrm{tg}^{i-1}\alpha}\,, \quad i\in\mathcal{I}_2, \tag{3.22}$$

где $K_i(\alpha,\beta)\to+\infty$ при $\alpha\to 0$. Пусть все оценки в (3.22) являются точными. Если $\mathcal{I}_2\neq\varnothing$, то среди функций $K_i(\alpha,\beta)$ из правых частей неравенств (3.22) выберем наиболее быстро растущую при $\alpha\to 0$, т. е. выберем $i_0\in\mathcal{I}_2$ такое, что

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{K_i(\alpha,\beta)}{K_{i_0}(\alpha,\beta)}\lesssim 1 \quad \text{для всех} \quad i\in\mathcal{I}_2.$$

Тогда в силу (3.13) найдется $s\in\{2m+2,\dots,n\}$, для которого имеет место неравенство

$$\Big|\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-s}\partial y^s}\Big| \gtrsim \frac{Mb(|g|+h)K_{i_0}(\alpha,\beta)}{h\,\mathrm{tg}^{i_0-1}\alpha}\frac{\mathrm{tg}^{i_0}\alpha}{\mathrm{tg}^{s}\alpha} = \frac{Mb(|g|+h)K_{i_0}(\alpha,\beta)}{h\,\mathrm{tg}^{s-1}\alpha}\,, \tag{3.23}$$

так как при условиях (3.22) оценки (3.14) приводят к неравенствам

$$\Big|\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-i_0}\partial y^{i_0}}-\varphi_{i_0}\Big| \gtrsim \frac{Mb(|g|+h)K_{i_0}(\alpha,\beta)}{h\,\mathrm{tg}^{i_0-1}\alpha}-\frac{M(|g|+h)}{\mathrm{tg}^{i_0}\alpha}$$

$$=\frac{Mb(|g|+h)K_{i_0}(\alpha,\beta)}{h\,\mathrm{tg}^{i_0-1}\alpha}-\frac{Mb(|g|+h)}{h\,\mathrm{tg}^{i_0-1}\alpha}\gtrsim\frac{Mb(|g|+h)K_{i_0}(\alpha,\beta)}{h\,\mathrm{tg}^{i_0-1}\alpha}\,.$$

Если (3.23) имеет место для некоторого $s\geq 3m+2$, то лемма доказана, поскольку остается лишь нужное число раз применить неравенство Маркова, как это было сделано при доказательстве леммы 2.

Остается рассмотреть случай, когда для любого s, для которого выполнено (3.23), имеет место неравенство $s\leq 3m+1$. В силу выбора i_0 и неравенств (3.21), (3.23) найдется $2m+1\leq s_*\leq 3m+1$, для которого

$$\Big|\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-i}\partial y^i}\Big/\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-s_*}\partial y^{s_*}}\Big| \lesssim (\mathrm{tg}\,\alpha)^{s_*-i}\,, \quad i=m+1,\dots,s_*-1, \tag{3.24}$$

и

$$\Big|\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-s_*}\partial y^{s_*}}\Big| \gtrsim \frac{Mb(|g|+h)}{h\,\mathrm{tg}^{s_*-1}} \gtrsim \frac{Mb(a+h)}{h\,\mathrm{tg}^{s_*-1}} \gtrsim \frac{MH}{\sin\beta(\mathrm{tg}\,\alpha)^{s_*-1}} \tag{3.25}$$

(если $\mathcal{I}_2=\varnothing$, то $s_*=2m+1$).

Положим

$$m_*=\begin{cases} m, & \text{если } s_*\leq 3m,\\ m-1, & \text{если } s_*=3m+1\end{cases}$$

(если $s_*=3m+1$, оценки (2.10) достаточно доказать для m производных $\partial^n e(a_2)/\left(\partial x^{n-s_i}\partial y^{s_i}\right)$, $s_i\geq s_*+1$, $i=1,\dots,m$).

Составим систему линейных уравнений, аналогичную (3.9). Пусть для определенности нормаль n_{23} образует острый угол с осью Oy. Тогда $\tau_{23}=(\cos\beta,\sin\beta)$, $n_{23}=(-\sin\beta,\cos\beta)$. Рассмотрим сужения $\partial^j e(x,y)/(\partial n_{23}^j)$, $j=0,\dots,m$, на отрезок $[a_2,a_3]$. Как и при доказательстве леммы 2, используя условие (2.1) и вид функции f^*, получим

$$\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial\tau_{23}^{n-j}\partial n_{23}^j}=\frac{(-1)^j Ma\cos^n\beta}{(n+1-j)!}\;\omega^{(n-j)}_{23,n+1-j}(0)\left(\delta_1\,\mathrm{tg}^j\beta+\delta_2(n+1-j)\,\mathrm{tg}^{j+1}\beta-\delta_2 j\,\mathrm{tg}^{j-1}\beta\right).$$

Тогда для $k=0,\dots,m$ имеют место равенства

$$\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial\tau_{23}^{n-k}\partial y^k}=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial\tau_{23}^{n-j}\partial n_{23}^j}\sin^{k-j}\beta\cos^j\beta=Ma\mu_k\sin^k\beta\cos^n\beta, \tag{3.26}$$

где

$$\mu_k = \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{(n+1-j)!}\binom{k}{j}\omega_{23,n+1-j}^{(n-j)}(0)\Big(\delta_1 + \delta_2(n+1-j)\operatorname{tg}\beta - \frac{\delta_2 j}{\operatorname{tg}\beta}\Big).$$

Так как $\omega_{23,n+1-j}^{(n-j)}(0) = (-1)^{n-j}\omega_{32,n+1-j}^{(n-j)}(1)$, то с учетом (2.4) будет

$$|\mu_0| \lesssim 1 + \operatorname{tg}\beta; \qquad |\mu_k| \lesssim \operatorname{tg}\beta + 1/\operatorname{tg}\beta, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Аналогично (3.6)–(3.8) получаем

$$\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial\tau_{23}^{n-k}\partial y^k} = \frac{\cos^n\beta}{\sin^k\beta}\sum_{i=k}^{n}\binom{n-k}{i-k}\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-i}\partial y^i}\operatorname{tg}^i\beta; \tag{3.27}$$

$$\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^n} = \frac{M\delta_1}{(n+1)!}(a+b)\omega_{21,n+1}^{(n)}(0); \tag{3.28}$$

$$\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-1}\partial y} = \frac{M\delta_2}{n!}(a+b)\omega_{21,n}^{(n-1)}(0); \tag{3.29}$$

$$\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-i}\partial y^i} = 0, \quad i = 2, \ldots, m. \tag{3.30}$$

Объединяя (3.26)–(3.30) и отбрасывая при необходимости одно уравнение, получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=s_*+1}^{n}\binom{n-k}{i-k}\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-i}\partial y^i}\operatorname{tg}^i\beta = -\sum_{i=m+1}^{s_*}\binom{n-k}{i-k}\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-i}\partial y^i}\operatorname{tg}^i\beta + \widetilde{\mu}_k, \tag{3.31}$$

$$k = 0, \ldots, m_*,$$

где

$$|\widetilde{\mu}_k| \lesssim Ma\sin^{2k}\beta\,(\operatorname{tg}\beta + 1/\operatorname{tg}\beta) \lesssim MH, \quad k = 2, \ldots, m_*; \tag{3.32}$$

$$|\widetilde{\mu}_0| = \Big| -\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^n} - n\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-1}\partial y}\ \operatorname{tg}\beta + Ma\mu_0\Big| \lesssim MH(1+\operatorname{tg}\beta); \tag{3.33}$$

$$|\widetilde{\mu}_1| \lesssim \Big| -\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-1}\partial y}\ \operatorname{tg}\beta\Big| + \big|Ma\,(\operatorname{tg}\beta + 1/\operatorname{tg}\beta)\sin^2\beta\big| \lesssim MH\operatorname{tg}\beta. \tag{3.34}$$

Наличие системы (3.31) вместе с (3.24) и выписанными оценками для $\widetilde{\mu}_k$, $k = 0, \ldots, m_*$, означает, что найдутся натуральные числа $s_1, \ldots, s_{m_*}$, $s_i \geq s_* + 1$ для $i = 1, \ldots, m_*$ такие, что для них имеют место оценки

$$\Big|\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-s_i}\partial y^{s_i}}\Big| \gtrsim \frac{MH}{\sin\beta(\operatorname{tg}\beta)^{s_i - s_*}(\operatorname{tg}\alpha)^{s_*-1}}\,. \tag{3.35}$$

Докажем от противного.

Пусть (3.35) имеет место для $s_1, \ldots, s_k$, $k < m_*$, $s_i \geq s_* + 1$ для $i = 1, \ldots, k$, и других таких s_i нет. Выберем произвольным образом $s_{k+1}, \ldots, s_{m_*} \in \{s_* + 1, \ldots, n\} \setminus \{s_1, \ldots, s_k\}$. Для простоты, не ограничивая общности, будем считать, что $s_1 < s_2 < \ldots < s_{m_*}$. Обозначим $\mathcal{J} = \{s_1, \ldots, s_{m_*}\}$, $\mathcal{S} = \{s_* + 1, \ldots, n\} \setminus \mathcal{J}$. Разрешим систему (3.31) относительно $\partial^n e(a_2)/\left(\partial x^{n-i}\partial y^i\right)$, $i \in \mathcal{J}$, по формулам Крамера

$$\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-i}\partial y^i} = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i \in \mathcal{J}.$$

Основной определитель Δ этой системы — это $\Delta_n(s_1,\dots,s_{m_*})$, у которого каждый столбец умножен на $\operatorname{tg}^{s_i}\beta$, где i — номер столбца; Δ_i — определитель, получающийся в результате замены i-го столбца Δ на столбец правых частей (3.31). Таким образом,

$$\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-i}\partial y^i} = (\operatorname{tg}\beta)^{-i}\Bigg(\sum_{s=m+1}^{s_*}\nu_{is}\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-s}\partial y^s}tg^s\beta + \sum_{s\in\mathcal{S}}\nu_{is}\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-s}\partial y^s}tg^s\beta + \sum_{k=0}^{m}\nu_{ik}\widetilde{\mu}_k\Bigg), \quad i\in\mathcal{J},$$

где коэффициенты ν_{jl} могут зависеть только от n и m, причем

$$\nu_{is_*} = \pm\frac{\Delta_n(s_*, s_1,\dots,s_{i-1},s_{i+1},\dots,s_{m_*})}{\Delta_n(s_1,\dots,s_{m_*})}\neq 0.$$

Тогда

$$\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-i}\partial y^i} = R_i + (\operatorname{tg}\beta)^{-i}\sum_{s\in\mathcal{S}}\nu_{is}\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-s}\partial y^s}tg^s\beta, \quad i\in\mathcal{J}, \tag{3.36}$$

где

$$R_i = \nu_{is_*}\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-s_*}\partial y^{s_*}}(\operatorname{tg}\beta)^{s_*-i}\Bigg(1+\sum_{s=m+1}^{s_*-1}\frac{\nu_{is}}{\nu_{is_*}}\left(\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-s}\partial y^s}\Big/\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-s_*}\partial y^{s_*}}\right)(\operatorname{tg}\beta)^{s-s_*}$$
$$+\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{\nu_{ik}}{\nu_{is_*}}\;\frac{\widetilde{\mu}_k}{\operatorname{tg}^{s_*}\beta}\Big/\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-s_*}\partial y^{s_*}}\right)\Bigg).$$

Применяя (3.24), (3.25), (3.32), (3.33), (3.34) и (2.9), придем к неравенству

$$|R_i| \gtrsim \left|\frac{\partial^n e(a_2)}{\partial x^{n-s_*}\partial y^{s_*}}\right|(\operatorname{tg}\beta)^{s_*-i}\left(1-\sum_{s=m+1}^{s_*-1}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\right)^{s_*-s} - \frac{(1+\operatorname{tg}\beta)\sin\beta\operatorname{tg}^{s_*-1}\alpha}{\operatorname{tg}^{s_*}\beta}\right)$$
$$\gtrsim \frac{MH}{\sin\beta(\operatorname{tg}\beta)^{i-s_*}(\operatorname{tg}\alpha)^{s_*-1}}\left(1-\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}-\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\right)^{s_*-1}(\cos\beta+\sin\beta)\right)$$
$$\gtrsim \frac{MH}{\sin\beta(\operatorname{tg}\beta)^{i-s_*}(\operatorname{tg}\alpha)^{s_*-1}}\;. \tag{3.37}$$

Таким образом, (3.36) и (3.37) приводят к искомому противоречию: должно быть не менее m_* индексов $s_1,\dots,s_{m_*}$, для которых имеет место (3.35).

Для доказательства оценок (2.10)–(2.12) остается применить теорему Маркова, как это было сделано в лемме 2. Лемма 3 и теорема доказаны. □

З а м е ч а н и е 1. Оценки (1.4) неулучшаемы при $s=1,\dots,2m+1$, $k=s,\dots,s+2m$.

Отметим, что ранее неулучшаемость оценок (1.4) для части производных была доказана в [14], а замечание 1 несколько расширяет множество производных, для которых имеет место неулучшаемость оценок.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из (3.18) и (3.20). □

З а м е ч а н и е 2. Оценки (2.7) неулучшаемы при $n=4m+1$, $s=1,\dots,2m+1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из (1.5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ženišek A.** Interpolation polynomials on the triangle // Numer. Math. 1970. Vol. 15, no. 4. P. 283–296.
2. **Bramble J.H., Zlamal M.** Triangular elements in the finite element method // Math. Comp. 1970. Vol. 24, no. 112. P. 809–820.
3. **Ciarlet P.G., Raviart P.A.** General Lagrange and Hermite interpolation in R^n with applications to finite element methods // Arch. Rational Mech. Anal. 1972. Vol. 46, no. 3. P. 177–199.

4. **Ženišek A.** Polynomial approximation on tetrahedrons in the finite element method // J. Approx. Theory. 1973. Vol. 7, no. 4. P. 334–351.
5. **Ženišek A.** A general theorem on triangular finite $C^{(m)}$-elements // Rev. Francaise Automat. Informat. Recherche Operationelle Ser. Rouge Anal. Numer. 1974. Vol. 8, no. 2. P. 119–127.
6. **Synge J.L.** The hypercircle in mathematical physics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1957. 424 p.
7. **Zlamal M., Ženišek A.** Mathematical aspect of the finite element method // Technical, physical and mathematical principles of the finite element method / Eds. V. Kolar et al. Praha: Acad. VED, 1971. P. 15–39.
8. **Babuška I., Aziz A.K.** On the angle condition in the finite element method // SIAM J. Numer. Anal. 1976. Vol. 13, no. 2. P. 214–226.
9. **Субботин Ю.Н.** Многомерная кусочно-полиномиальная интерполяция // Методы аппроксимации и интерполяции / Под ред. А. Ю. Кузнецова. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1981. С. 148–153.
10. **Субботин Ю.Н.** Зависимость оценок многомерной кусочно-полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик триангуляции // Тр. МИАН СССР. 1989. Т. 189. С. 117–137.
11. **Субботин Ю.Н.** Погрешность аппроксимации интерполяционными многочленами малых степеней на n-симплексах // Мат. заметки. 1990. Т. 48, вып. 4. С. 88–100.
12. **Субботин Ю.Н.** Зависимость оценок аппроксимации интерполяционными полиномами пятой степени от геометрических характеристик треугольника // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 2. С. 110–119.
13. **Латыпова Н.В.** Оценки погрешности аппроксимации многочленами степени $4k+3$ на треугольнике // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2002. Т. 8, № 1. С. 203–226.
14. **Baidakova N.V.** On some interpolation process by polynomials of degree $4m+1$ on the triangle // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1999. Vol. 14, no. 2. P. 87–107.
15. **Субботин Ю.Н.** Новый кубический элемент в МКЭ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 120–130.
16. **Байдакова Н.В.** Об одном способе эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 47–52.
17. **Ženišek A.** Maximum-angle condition and triangular finite elements of Hermite type // Math. Comp. 1995. Vol. 64, no. 211. P. 929–941.
18. **Латыпова Н.В.** Погрешность кусочно-кубической интерполяции на треугольнике // Вестн. Удм. ун-та. Сер. Математика. 2003. Вып. 1. С. 3–18.
19. **Куприянова Ю.В.** Об одной теореме из теории сплайнов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48, № 2. С. 206–211.
20. **Матвеева Ю.В.** Об эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике с использованием смешанных производных // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Математика. Механика. Информатика. 2007. Т. 7, вып. 1. С. 23–27.
21. **Фаддеев Д.К., Соминский И.С.** Сборник задач по высшей алгебре. М.: Наука, 1977. 288 с.
22. **Корнейчук Н.П.** Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987. 424 с.

Байдакова Наталия Васильевна
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: baidakova@imm.uran.ru

Поступила 15.04.2011

Том 17 № 3 2011

УДК 517.5

О ВЫПУКЛЫХ ЗАМКНУТЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ТЕЛАХ БЕЗ НАИБОЛЕЕ УДАЛЕННЫХ ТОЧЕК, ЗАМЫКАНИЕ ДОПОЛНЕНИЯ КОТОРЫХ АНТИПРОКСИМИНАЛЬНО[1]

В. С. Балаганский

Построено ограниченное выпуклое замкнутое чебышёвское аппроксимативно компактное тело M в $X = L_1[0,1]$ такое, что M — множество без наиболее удаленных точек, а $\overline{X\backslash M}$ антипроксиминально.

Ключевые слова: антипроксиминальное множество, наиболее удаленные точки.

V. S. Balaganskii. On convex closed bounded bodies without farthest points such that the closure of their complement is antiproximinal.

A bounded closed convex Chebyshev approximative compact body $M \subset X = L_1[0,1]$ without farthest points is constructed such that $\overline{X\backslash M}$ is antiproximinal.

Keywords: antiproximinal set, farthest points.

В работе рассматривается связь между антипроксиминальностью выпуклого ограниченного замкнутого тела M с антипроксиминальностью замыкания его дополнения и отсутствием в M наиболее удаленных точек.

Введем следующие обозначения: X — вещественное банахово пространство ($X \in (B)$); $xy = d(x,y) = \|x-y\|$, $xM = d(x,M) = \inf\{xy\colon y \in M\}$ — расстояние от x до $M \subset X$; $Mx = \sup\{xy\colon y \in M\}$; $P_M\colon x \mapsto P_M(x) = \{y \in M\colon xy = xM\}$ — метрическая проекция; $F_M\colon x \mapsto F_M(x) = \{y \in M\colon xy = Mx\}$ — метрическая антипроекция; $\mathbb{B}(x,r) = \{z \in X\colon xz \le r\}$ — шар в X, $\mathbb{S}(X^*) = \{f \in X^*\colon \|f\| = 1\}$ — единичная сфера в X^* с центром в 0; $\overline{M}$, ∂M — замыкание и граница множества M соответственно; $\operatorname{int} M$ — множество внутренних точек M.

Непустое подмножество $M \ne X$ банахова пространства X называется *антипроксиминальным*, если для любой точки $x \in X\backslash M$ в множестве M нет ближайшей точки, т. е. $P_M(x) = \varnothing$.

Непустое подмножество $N \ne X$ банахова пространства X называется *множеством без наиболее удаленных точек*, если для любой точки $x \in X$ в множестве N нет самой удаленной точки, т. е. $F_N(x) = \varnothing$.

Множество $M \subset X$ банахова пространства X называется *множеством существования*, если для любой точки $x \in X$ множество $P_M(x)$ непусто.

Множество $M \subset X$ банахова пространства X называется *чебышёвским*, если для любой точки $x \in X$ множество $P_M(x)$ одноточечно.

Множество $M \subset X$ банахова пространства X называется *аппроксимативно компактным*, если для любой точки $x \in X$ каждая минимизирующая последовательность $\{y_n\} \in M$ имеет подпоследовательность, сходящуюся к элементу из M.

Будем говорить, что F удовлетворяет на Ω условию Липшица (с постоянной Липшица l), если для любых $x_1, x_2 \in \Omega$
$$\|F(x_1) - F(x_2)\| \le l\|x_1 - x_2\|.$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00347) и УрО РАН (проект 09-П-1-1013) в рамках программы Президиума РАН “Математическая теория управления”.

Выпуклые замкнутые ограниченные антипроксиминальные множества рассматривались в работах многих авторов (см. [1–6] и приведенную там библиографию). Известно [6], что в пространстве l_1 с некоторой новой эквивалентной нормой можно построить антипроксиминальное множество с ограниченным выпуклым дополнением. В [4] такие множества построены в бесконечномерных пространствах $C(Q)$, $L_\infty(S,\Sigma,\mu)$, $L_1(S,\Sigma,\mu)$. В [3] доказано, что в рефлексивном банаховом пространстве нет антипроксиминальных множеств с выпуклым дополнением. М. Эдельштейн [6] построил в l_1 пример ограниченного центрально-симметричного выпуклого множества без наиболее удаленных точек, в [5] такие множества построены в довольно широком классе банаховых пространств.

Следующая тривиальная лемма показывает, что если M — выпуклое замкнутое ограниченное антипроксиминальное тело, то M — множество без наиболее удаленных точек, а $\overline{X\setminus M}$ антипроксиминально.

Лемма 1. *Пусть $X \in (B)$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(a) *если $M \subset X$ — выпуклое замкнутое антипроксиминальное тело, то $A = \overline{X\setminus M}$ тоже антипроксиминально*;

(b) *если $M \subset X$ — замкнутое ограниченное антипроксиминальное множество, то M — множество без наиболее удаленных точек.*

Доказательство п. (a). Допустим противное: для некоторой точки $x \in \operatorname{int} M$ существует $y \in P_A(x)$. Ясно, что $y \in \partial M$, тогда по теореме Хана — Банаха найдутся линейный непрерывный функционал $f \in \mathbb{S}(X^*)$ и число $c \in \mathbb{R}$ такие, что $f(y) = c$ и для любого $z \in M$ будет $f(z) \le c$, а для любого $z \in \operatorname{int} M$ будет $f(z) < c$. Пусть $H = \{z \in X\colon f(z) = c\}$. Так как $y \in \mathbb{B}(x, xy) \cap H$, $\mathbb{B}(x, xy) \subset M$, $H \cap \operatorname{int} M = \varnothing$, то $y \in P_H(x)$. Тогда для $v = 2y - x$ имеем $f(v) > c$, следовательно, $v \notin M$, а так как $y \in P_H(v)$, то $y \in P_M(v)$. Противоречие с антипроксиминальностью множества M.

Доказательство п. (b). Допустим противное: для некоторой точки $x \in X$ существует $y \in F_M(x)$. Ясно, что $y \in M \cap \partial\mathbb{B}(x, xy)$. Тогда для $z = 2y - x$ имеем $z \notin \mathbb{B}(x, xy)$ и $zy = d(z, \mathbb{B}(x, xy))$, а так как $y \in M \subset \mathbb{B}(x, xy)$, то $y \in P_M(z)$. Противоречие с антипроксиминальностью множества M. $\square$

В связи с предыдущей леммой возникает вопрос: *будет ли антипроксиминальным выпуклое замкнутое ограниченное тело M, если M — множество без наиболее удаленных точек и $\overline{X\setminus M}$ антипроксиминально*?

Следующий пример показывает, что это не так.

Пусть

$$X = L_1[0,1], \qquad M = \left\{x \in X\colon \int\limits_0^1 (1+t)|x(t)|\,dt \le 1\right\}, \qquad A = \overline{X\setminus M}.$$

В работе [5] доказано, что A антипроксиминально в $L_1[0,1]$, а M — множество без наиболее удаленных точек в $L_1[0,1]$. Тем не менее имеет место следующий факт.

Теорема. *M — выпуклое аппроксимативно компактное чебышёвское тело в $X = L_1[0,1]$, метрическая проекция P_M удовлетворяет условию Липшица с константой $k = 2$ и константу k уменьшить нельзя.*

Для доказательства теоремы нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть $0 \le a < b \le 1$, $\alpha > 0$, $D = \left\{z \in L_1[a,b]\colon \int_a^b (1+t)|z(t)|\,dt \le \alpha\right\}$, $x \in L_1[a,b]\setminus D$. Пусть a_0 — минимальное из чисел $\gamma \in [a,b]$ таких, что $\int_a^\gamma (1+t)|x(t)|\,dt = \alpha$.*

Тогда $d(x,D)=\int_{a_0}^{b}|x(t)|\,dt$ *и* $P_D(x)=y$, *где* y *определена следующим образом*: $y(t)=x(t)$ *при* $a\le t\le a_0$, $y(t)=0$ *при* $a_0<t\le b$.

Доказательство. Так как $x\in X\backslash D$, то $\int_a^b(1+t)|x(t)|\,dt>\alpha$, и $a_0<b$. Ясно, что $y\in D$. Докажем, что $y=P_D(x)$. Допустим противное: существует точка $z\in D$, $z\ne y$, такая, что $xy\ge xz$. Так как $\widehat{z}(t)=\min\{|x(t)|,|z(t)|\}\operatorname{sign}(x(t))\in D$, $x\widehat{z}\le xz$, то считаем без потери общности, что $x(t)z(t)\ge 0$, $|z(t)|\le|x(t)|$ для всех точек $t\in[a,b]$, $\int_a^b(1+t)|z(t)|\,dt=\alpha$. Если $\int_{a_0}^b(1+t)|z(t)|\,dt=\delta>0$, то

$$\int\limits_a^{a_0}(1+t)|x(t)-z(t)|\,dt=\int\limits_a^{a_0}(1+t)|x(t)|\,dt-\int\limits_a^{a_0}(1+t)|z(t)|\,dt=\delta>0.$$

Тогда

$$\int\limits_{a_0}^{b}|z(t)|\,dt<\frac{\delta}{1+a_0},\qquad \int\limits_a^{a_0}|x(t)-z(t)|\,dt>\frac{\delta}{1+a_0}. \tag{1}$$

В силу (1) получаем

$$\int\limits_a^b|x(t)-z(t)|\,dt=\int\limits_a^{a_0}|x(t)-z(t)|\,dt+\int\limits_{a_0}^b(|x(t)|-|z(t)|)\,dt$$

$$>\frac{\delta}{1+a_0}+\int\limits_{a_0}^b|x(t)|\,dt-\frac{\delta}{1+a_0}=\int\limits_{a_0}^b|x(t)|\,dt=\int\limits_a^b|x(t)-y(t)|\,dt.$$

Следовательно, мы можем считать, что $\operatorname{supp}z:=\{t\in[a,b]\colon z(t)\ne 0\}\subset[a,a_0]$, тогда $z=y\in P_D(x)$, $c=\|x-y\|=\int_{a_0}^b|x(t)|\,dt$. □

Доказательство теоремы. Докажем, что M — чебышёвское множество. Для всех $x\in M$ справедливо $P_M(x)=x$. Пусть теперь $x\in X\backslash M$. Возьмем в качестве a_0 минимальное из чисел $a\in[0,1]$ таких, что $\int_0^a(1+t)|x(t)|\,dt=1$. Так как $x\in X\backslash M$, то $\int_0^1(1+t)|x(t)|\,dt>1$, и $a_0<1$. Пусть $y(t)=x(t)$ при $0\le t\le a_0$ и $y(t)=0$ при $a_0<t\le 1$. По лемме 2 $y=P_M(x)$.

Докажем, что множество M аппроксимативно компактно. Допустим противное: найдутся число $\varepsilon>0$, точка $x\in X$ и последовательность $y_n\in M$ такие, что $xy_n\to d(x,M)$, $yy_n>\varepsilon$, где $y=P_M(x)$. Если $x\in M$, то $d(x,M)=0$, а тогда $xy_n\to d(x,M)=0$ и $y_n\to x=y$. Считаем без потери общности, что $x\notin M$, и полагаем, что y и a_0 определены, как в предыдущем абзаце. Тогда $a_0<1$, $\int_{a_0}^1(1+t)|x(t)|\,dt=\beta>0$, и по лемме 2 расстояние $d(x,M)=\int_{a_0}^1|x(t)|\,dt$.

Если найдется подпоследовательность y_{n_k} такая, что $\int_{a_0}^1(1+t)|y_{n_k}(t)|\,dt\to 0$, то

$$\int\limits_{a_0}^1|y_{n_k}(t)|\,dt\to 0$$

и

$$d(x,M)=\lim_{k\to\infty}\|x-y_{n_k}\|=\lim_{k\to\infty}\biggl(\int\limits_0^{a_0}|x(t)-y_{n_k}(t)|\,dt+\int\limits_{a_0}^1|x(t)-y_{n_k}(t)|\,dt\biggr)$$

$$\geq \varliminf_{k\to\infty}\left(\int\limits_0^{a_0}|x(t)-y_{n_k}(t)|\,dt+\int\limits_{a_0}^1(|x(t)|-|y_{n_k}(t)|)\,dt\right)$$

$$\geq \varliminf_{k\to\infty}\int\limits_0^{a_0}|x(t)-y_{n_k}(t)|\,dt+\int\limits_{a_0}^1|x(t)|\,dt=\varliminf_{k\to\infty}\int\limits_0^{a_0}|x(t)-y_{n_k}(t)|\,dt+d(x,M),$$

следовательно,

$$\varliminf_{k\to\infty}\int\limits_0^{a_0}|x(t)-y_{n_k}(t)|\,dt=0 \qquad \text{и} \qquad \varliminf_{k\to\infty}\int\limits_0^{a_0}|y(t)-y_{n_k}(t)|\,dt=0.$$

Тогда

$$0<\varepsilon\leq \varliminf_{k\to\infty}\int\limits_0^1\,|y(t)-y_{n_k}(t)|\,dt=\varliminf_{k\to\infty}\left(\int\limits_0^{a_0}|x(t)-y_{n_k}(t)|\,dt+\int\limits_{a_0}^1|y_{n_k}(t)|\,dt\right)=0,$$

противоречие.

Далее считаем, что $\int_{a_0}^1(1+t)|y_n(t)|\,dt=\alpha_n\to\alpha>0$, $\alpha_n>0$, $\int_0^1(1+t)|y_n(t)|\,dt=1$, $\int_0^{a_0}(1+t)|y_n(t)|\,dt=1-\alpha_n$.

Пусть $\gamma_n\in[0,a_0]$ — минимальное из чисел γ таких, что $\int_0^{\gamma}(1+t)\,|x(t)|\,dt=1-\alpha_n$.

Полагаем $\mu_n=1$, если $\alpha_n\geq\beta$; если же $\alpha_n\leq\beta$, то пусть $\mu_n\in[a_0,1]$ — минимальное из чисел μ таких, что $\int_{a_0}^{\mu}(1+t)|x(t)|\,dt=\alpha_n$. Считаем без потери общности, что $\gamma_n\to\gamma\in[0,a_0]$, $\mu_n\to\mu\in[a_0,1]$.

Определим функцию

$$\widetilde{y}_n(t)=\begin{cases} x(t) & \text{при} \quad t\in[0,\gamma_n]\cup(\alpha_0,\mu_n],\\ 0 & \text{при} \quad t\in(\gamma_n,\alpha_0]\cup(\mu_n,1].\end{cases}$$

Для этой функции

$$\int\limits_0^1(1+t)|\widetilde{y}_n(t)|\,dt=\int\limits_0^{\gamma_n}(1+t)|x(t)|\,dt+\int\limits_{a_0}^{\mu_n}(1+t)|x(t)|\,dt\leq 1.$$

Имеем $\widetilde{y}_n\in M$, $\widetilde{y}_n y=\int_0^1|\widetilde{y}_n(t)-y(t)|\,dt\geq\int_{a_0}^1|\widetilde{y}_n(t)|\,dt\geq\min\{\alpha_n/2,\beta/2\}$. Применяя лемму 2 для отрезков $[0,a_0]$ и $[a_0,1]$, получаем, что $x\widetilde{y}_n\leq xy_n$, $x\widetilde{y}_n\to d(x,M)$. Так как $\gamma_n\to\gamma\in[0,a_0]$, $\mu_n\to\mu\in[a_0,1]$, то по критерию компактности Рисса для $L_p[0,1]$ (см., например, [8, гл. 9, § 1, теорема 2]) последовательность $\widetilde{y}_n$ содержит некоторую подпоследовательность $\widetilde{y}_{n_k}$, сходящуюся к некоторой точке $z\in P_M(x)$. Но $\varliminf_{n\to\infty}\widetilde{y}_n y\geq\varliminf_{n\to\infty}\min\{\alpha_n/2,\beta/2\}=\min\{\alpha/2,\beta/2\}>0$, следовательно, $z\neq y$, противоречие с чебышёвостью множества M.

Докажем липшицевость метрической проекции P_M с константой 2. Возьмем две произвольные функции $f,g\in X$, $f\neq g$. Если $f,g\in M$, то тогда $P_M(f)=f$, $P_M(g)=g$, $\|f-g\|=\|P_M(f)-P_M(g)\|$, и все доказано. Считаем без потери общности, что $f\notin M$, т. е. $\int_0^1(1+t)|f(t)|dt>1$.

Пусть a_0 — минимальное из чисел $a \in [0,1]$ таких, что $\int_0^a (1+t)|f(t)|\,dt = 1$; пусть $b_0 = 1$, если $\int_0^{a_0} (1+t)|g(t)|\,dt \le 1$, а когда $\int_0^1 (1+t)|g(t)|\,dt > 1$, то b_0 — минимальное из чисел $b \in [0,1]$ таких, что $\int_0^b (1+t)|g(t)|\,dt = 1$. Имеем $a_0 < 1$. Обозначим $\widetilde{f} = P_A(f)$, $\widetilde{g} = P_A(g)$. По лемме 2 $\widetilde{f}(t) = f(t)$ при $t \le a_0$; $\widetilde{f}(t) = 0$ при $a_0 < t \le 1$; $\widetilde{g}(t) = g(t)$ при $t \le b_0$; $\widetilde{g}(t) = 0$ при $b_0 < t \le 1$. Считаем без потери общности, что $a_0 \le b_0$. Если $a_0 = b_0$, то

$$\int_0^1 |\widetilde{f}(t) - \widetilde{g}(t)|\,dt = \int_0^{a_0} |f(t) - g(t)|\,dt,$$

и все доказано; считаем, что $a_0 < b_0$, тогда

$$0 \le \rho := \int_0^{a_0} (1+t)|g(t)|\,dt < 1.$$

Пусть c_0 — минимальное из чисел $c \in [0, a_0]$ таких, что $\int_0^c (1+t)|f(t)|\,dt = \rho$. По лемме 2

$$\int_0^{a_0} |f(t) - g(t)|\,dt \ge \int_{c_0}^{a_0} |f(t)|\,dt. \tag{2}$$

Имеем

$$\int_{c_0}^{a_0} (1+t)\,|f(t)|\,dt = 1 - \rho, \qquad \int_{a_0}^{b_0} (1+t)|g(t)|\,dt = 1 - \rho, \qquad \rho < 1,$$

следовательно,

$$\int_{c_0}^{a_0} |f(t)|\,dt > \frac{1-\rho}{1-a_0}, \qquad \int_{a_0}^{b_0} |g(t)|\,dt < \frac{1-\rho}{1-a_0};$$

тогда в силу (2)

$$\int_0^{a_0} |f(t) - g(t)|\,dt \ge \int_{c_0}^{a_0} |g(t)|\,dt.$$

Используя последнее неравенство, получаем

$$\int_0^1 |\widetilde{f}(t) - \widetilde{g}(t)|\,dt = \int_0^{a_0} |f(t) - g(t)|\,dt + \int_{a_0}^{b_0} |g(t)|\,dt \le 2\int_0^{a_0} |f(t) - g(t)|\,dt$$

$$\le 2\biggl(\int_0^{a_0} |f(t) - g(t)|\,dt + \int_{a_0}^{b_0} |f(t) - g(t)|\,dt + \int_{b_0}^{1} |f(t) - g(t)|\,dt\biggr) = 2\int_0^1 |f(t) - g(t)|\,dt.$$

Докажем, что константу Липшица k нельзя взять меньшей 2. Рассмотрим последовательности f_n и g_n, определенные следующим образом:

$$f_n(t) \equiv c_n \quad \text{при} \quad 0 \le t \le \frac{1}{n}, \qquad f_n(t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad \frac{1}{n} < t \le 1, \qquad \text{где} \quad \int_0^{1/n} (1+t)c_n\,dt = 1;$$

$$g_n(t) \equiv s_n \quad \text{при} \quad 0 \le t \le \frac{1}{n^2}, \qquad g_n(t) \equiv c_n \quad \text{при} \quad \frac{1}{n^2} < t \le 1, \qquad \text{где} \quad \int\limits_0^{1/n^2} (1+t)s_n\,dt = 1.$$

Применяя лемму 2, получаем, что $P_M(f_n) = f_n$, $P_M(g_n) = \widetilde{g}_n$, где

$$\widetilde{g}_n(t) \equiv s_n \quad \text{при} \quad 0 \le t \le \frac{1}{n^2}, \qquad \widetilde{g}_n(t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad \frac{1}{n^2} < t \le 1.$$

Имеем

$$\|f_n - g_n\| = \int\limits_0^{1/n^2} (s_n - c_n)\,dt \to 1, \qquad \|P_M(f_n) - P_M(g_n)\| = \int\limits_0^{1/n^2} (s_n - c_n)\,dt + \int\limits_{1/n^2}^{1/n} c_n\,dt \to 2,$$

следовательно, в условии Липшица константа не может быть меньше 2. □

З а м е ч а н и е 1. Множество M из доказанной теоремы представляет интерес и без “антипроксиминальных” свойств. Так в работах [9; 10] построено ограниченное аппроксимативно компактное множество, которое не является локально компактным. В [11] построен пример выпуклого аппроксимативно компактного тела в c_0. Здесь множество M является выпуклым чебышёвским аппроксимативно компактным телом с метрической проекцией, удовлетворяющей условию Липшица с константой 2 в пространстве $L_1[0,1]$ (пространство с очень плохими геометрическими свойствами).

В заключение рассмотрим взаимосвязь между множествами без наиболее удаленных точек и антипроксиминальными множествами с выпуклым ограниченным дополнением.

О п р е д е л е н и е. Пространство $X \in (CLUR)$, если из условий $x, x_n \in \mathbb{S}(X)$, $\|x + x_n\|/2 \to 1$ вытекает существование сходящейся подпоследовательности x_{n_k}.

Нам потребуется следующая лемма, доказанная в [7].

Лемма 3. *Пусть X — линейное нормированное пространство, $N \ne \varnothing$, $N \subset X$ — замкнутое ограниченное множество, $\alpha > \inf\{Nx \colon x \in X\}$, $N(\alpha) = \{x \in X \colon Nx \ge \alpha\}$. Тогда*

(a) *$X \backslash N(\alpha)$ непусто, ограничено и выпукло*;

(b) *$xN(\alpha) + Nx = \alpha$ для всех x таких, что $Nx \le \alpha$.*

Предложение. *Пусть X — банахово пространство, N — ограниченное замкнутое непустое множество. Тогда*

(a) *если существует число $\alpha_0 > \inf_{v\in X} Nv$ такое, что для любого $\alpha > \alpha_0$ множество $N(\alpha)$ антипроксиминально, то N — множество без наиболее удаленных точек*;

(b) *если $X \in (CLUR)$, N — непустое замкнутое ограниченное множество без наиболее удаленных точек, $\alpha > \inf_{v\in X} Nv$, то множество $N(\alpha)$ антипроксиминально.*

Д о к а з а т е л ь с т в о п. (a). Допустим противное: N не является множеством без наиболее удаленных точек, т. е. существуют $x \in X$, $z \in F_N(x)$, $\beta := Nx$. Возьмем произвольное число $\alpha > \beta$. Тогда $x \in X\backslash N(\alpha)$. Пусть $y \in \partial N(\alpha)$, $x \in [z, y]$.

По лемме 3 получаем

$$\alpha = Nx + xN(\alpha) = Ny \ge yz, \qquad xz + xN(\alpha) = Nx + xN(\alpha) \ge yz,$$

откуда $xN(\alpha) \ge yz - xz = xy$, $y \in P_{N(\alpha)}(x)$, следовательно, множество $N(\alpha)$ не антипроксиминально, и в силу произвольности α утверждение п. (a) доказано.

Пункт (b) доказан в [5]. □

В замечании 2 мы приводим пример, уточняющий п. (b). Для его построения нам потребуется следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть* $X = L_1[0,1]$, $N = \left\{z \in X: \int_0^1 (1+t)|z(t)|\,dt \le 1\right\}$. *Тогда для любого* $x \in X$ *справедливо равенство* $Nx = \|x\| + 1$.

Доказательство. Для произвольного $y \in N$ имеем $\|y\| \le 1$, действительно,

$$\|y\| = \int\limits_0^1 |y(t)|\,dt \le \int\limits_0^1 (1+t)\,|y(t)|\,dt \le 1.$$

Тогда $\|x - y\| \le \|x\| + \|y\| \le \|x\| + 1$, и в силу произвольности y получаем, что $Nx \le \|x\| + 1$.

С другой стороны, возьмем последовательность $y_n \in N$ такую, что для любого $t \in [0,1]$ $y_n(t)\,x(t) \le 0$ и $y_n(t) = 0$ при $t > 1/n$. Тогда $\int_0^1 |y_n(t)|\,dt \to 1$, и, следовательно,

$$\|x - y_n\| = \int\limits_0^1 |x(t)|\,dt + \int\limits_0^{1/n} |y_n(t)|\,dt \to \|x\| + 1.$$

Лемма доказана. □

Замечание 2. Условие $X \in (CLUR)$ из п. (b) существенно — так, для пространства $X = L_1[0,1]$ и множества $N = \left\{z \in X: \int_0^1 (1+t)\,|z(t)|\,dt \le 1\right\}$ по лемме 4 при любом $\alpha > 1$ множество $N(\alpha)$ есть дополнение до открытого шара, и, следовательно, является множеством существования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Cobzaş, S.**, Antiproximinal sets in Banach spaces // Acta Univ. Carolin. Math. Phys. 1999. Vol. 40, no. 2 P. 43–52.
2. **Балаганский В.С.** Антипроксиминальные множества в пространствах непрерывных функций // Мат. заметки. 1996. Т. 60, вып. 5. С. 643–657.
3. **Балаганский В.С.** Об аппроксимативных свойствах множеств с выпуклым дополнением // Мат. заметки. 1995. Т. 57, вып. 1. С. 20–29.
4. **Балаганский В.С.** Аппроксимативные свойства множеств с выпуклым дополнением // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1998. Т. 5. С. 205–226.
5. **Балаганский В.С.** О ближайших и наиболее удаленных точках // Мат. заметки. 1998. Т. 63, вып. 2. С. 289–291.
6. **Edelstein M.A.** Weakly proximinal sets // J. Approx. Theory. 1976. Vol. 18, no. 1. P. 1–8.
7. **Балаганский В.С.** О связи аппроксимативных и геометрических свойств множеств // Аппроксимация в конкретных абстрактных банаховых пространствах: сб. науч. тр. Ин-та математики и механики УНЦ АН СССР. Свердловск, 1987. С. 46–53.
8. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 744 с.
9. **Бородин П.А.** Пример ограниченного аппроксимативно компактного множества, не являющегося компактным // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49, № 4. С. 157–158.
10. **Пятышев И.А.** Пример ограниченного аппроксимативно компактного множества, не являющегося локально компактным // Успехи мат. наук. 2007. Т. 62, № 5. С. 163–164.
11. **Пятышев И.А.** Пример выпуклого аппроксимативно компактного тела в пространстве c_0 // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2005. № 3. С. 57–59.

Балаганский Владимир Сергеевич
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: Vladimir.Balaganskii@imm.uran.ru

Поступила 14.03.2011

Том 17 № 3 2011

УДК 517.5

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ О МИНИМУМЕ СВОБОДНОГО ЧЛЕНА НЕОТРИЦАТЕЛЬНОГО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА

А. С. Белов

Решается новая экстремальная задача о минимуме свободного члена неотрицательного четного тригонометрического полинома со следующими условиями на коэффициенты: все коэффициенты полинома, кроме свободного члена, не меньше единицы, и сумма всех коэффициентов полинома, кроме свободного члена, равна заданному значению. В результате уточняется известный результат Фейера.

Ключевые слова: экстремальная задача, неотрицательный тригонометрический полином.

A. S. Belov. On the extremal problem about the minimum of the free term of a nonnegative trigonometric polynomial.

A new extremal problem is solved about the minimum of the free term of a nonnegative even trigonometric polynomial with the following conditions on its coefficients: all coefficients except for the free term are greater than or equal to 1 and the sum of all coefficients except for the free term is equal to a specified value. As a result, Fejér's known result is improved.

Keywords: extremal problem, nonnegative trigonometric polynomial.

Введение

Пусть n — натуральное число. Через $\mathbb{T}_n^+$ обозначим множество всех неотрицательных тригонометрических полиномов вида

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx), \qquad T_n(x) \ge 0 \quad \text{при всех} \ \ x. \tag{0.1}$$

Говорят, что коэффициенты полинома (0.1) монотонны, если $2a_0 \ge a_1 \ge \cdots \ge a_n \ge 0$. При каждом натуральном n обозначим через $\mathbb{W}_n$ совокупность всех неотрицательных тригонометрических полиномов вида (0.1) таких, что $a_k \ge 1$ при всех $k = 1, \ldots, n$. Положим

$$c_k = 2^{-2k}(k!)^{-2}(2k)!, \quad k = 0,\, 1,\, 2, \ldots \tag{0.2}$$

Заметим, что $c_0 = 1$, $c_1 = 1/2$ и последовательность $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ строго убывает. Для каждого натурального n введем обозначение $b_k^n = b_{n-k}^n = c_k$, $k = 0, \ldots, [n/2]$, где квадратные скобки обозначают целую часть. Пусть

$$V_n(x) = \frac{1}{2}\Big|\sum_{k=0}^{n} b_k^n e^{ikx}\Big|^2 = \sum_{k=0}^{n} a_k^n \cos(kx), \tag{0.3}$$

где $a_k^n = \sum_{j=0}^{n-k} b_j^n b_{j+k}^n$ при $k = 1, \ldots, n$ и $a_0^n = (1/2)\sum_{k=0}^{n}(b_k^n)^2$. Обозначим $M(n) = a_0^n$.

В статье [1] доказано, что для каждого натурального n полином $V_n \in \mathbb{W}_n$, он имеет монотонные коэффициенты, верно равенство $M(n) = (1/2)\sum_{k=0}^{n} c_{[k/2]}^2$ и V_n является единственным экстремальным полиномом задачи $M(n) = \min\{a_0 : \ T_n \in \mathbb{W}_n\}$, т. е. для любого полинома $T_n \in \mathbb{W}_n$ вида (0.1), который отличен от полинома V_n, справедливо неравенство $a_0 > M(n)$. Для натурального n положим

$$\psi(n) = \sum_{k=1}^{n} a_k^n = V_n(0) - M(n) = \frac{1}{2}\Big|\sum_{k=0}^{n} c_{[k/2]}\Big|^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} c_{[k/2]}^2. \tag{0.4}$$

Из представления [1, формула (18)] видим, что при натуральных $n \ge 3$ коэффициент $a_1^n > 1$. Поэтому $\psi(1) = 1$, $\psi(2) = 2$ и $\psi(n) > n$ при $n \ge 3$.

Для каждого натурального n и любого $h \in [c_{[n/2]}, c_0]$ обозначим

$$b_k^n(h) = \max\{c_k,\, c_{n-k},\, h\} = b_{n-k}^n(h), \quad k = 0, \dots, n, \tag{0.5}$$

$$V_n(h;x) = \frac{1}{2}\Big|\sum_{k=0}^{n} b_k^n(h) e^{ikx}\Big|^2 = \sum_{k=0}^{n} a_k^n(h)\cos(kx), \qquad a_0^n(h) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(b_k^n(h))^2, \tag{0.6}$$

$$a_k^n(h) = \sum_{j=0}^{n-k} b_j^n(h) b_{j+k}^n(h) = \sum_{j=0}^{n-k} b_j^n(h) b_{n-j-k}^n(h) \quad \text{при} \quad k = 1, \dots, n, \tag{0.7}$$

$$f_n(h;x) = e^{-inx/2}\sum_{k=0}^{n} b_k^n(h) e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} b_k^n(h)\cos\big((n/2-k)x\big), \tag{0.8}$$

$$g_n(h;x) = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} 2b_k^n(h)\sin\big((n/2-k)x\big) \tag{0.9}$$

и

$$\gamma_n(h) = V_n(h;0) - a_0^n(h) = \frac{1}{2}\Big|\sum_{k=0}^{n} b_k^n(h)\Big|^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(b_k^n(h))^2. \tag{0.10}$$

Введенные выше обозначения используются на протяжении всего дальнейшего изложения.

Из (0.6) следует, что полином $V_n(h) \in \mathbb{T}_n^+$. Сначала мы изучим некоторые свойства этого полинома, а затем докажем, что он является единственным экстремальным полиномом некоторой задачи о минимуме свободного члена неотрицательного тригонометрического полинома, которую мы сформулируем чуть ниже. Формулы (0.5), (0.6) и (0.7) позволяют достаточно легко выписать полином $V_n(h;x)$ при конкретных n. Например, $V_1(h;x) = 1 + \cos(x)$ при $h = 1$, $V_2(h;x) = (1 + h^2/2) + 2h\cos(x) + \cos(2x)$ при $h \in [1/2, 1]$ и так далее. Через

$$F_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\Big(1 - \frac{k}{n+1}\Big)\cos(kx) = \frac{\sin^2((n+1)x/2)}{2(n+1)\sin^2(x/2)} \tag{0.11}$$

будем обозначать ядро Фейера. Полином $F_n \in \mathbb{T}_n^+$ и имеет монотонные коэффициенты. Заметим также, что в силу (0.3) и (0.11) верны равенства

$$V_n(c_{[n/2]};x) = V_n(x), \qquad V_n(c_0;x) = (n+1)F_n(x) \quad \text{при всех } x. \tag{0.12}$$

Условимся, что натуральные числа n и m всегда связаны равенством $m = n - [n/2]$. Можно также пользоваться формулой $m = [(n+1)/2]$, т. е. всегда либо $n = 2m-1$, либо $n = 2m$.

В разд. 1 будет доказана

Теорема 1. *Для каждого натурального n и любого $h \in [c_s, c_{s-1}]$, где $s = 1, \dots, [n/2]$, полином $V_n(h) \in \mathbb{W}_n$ и, более того,*

$$2a_0^n(h) > a_1^n(h) > \ldots > a_{n-s}^n(h) = 1 + 2(h - c_s) \ge 1, \tag{0.13}$$

$$a_{n-s+1}^n(h) = \ldots = a_n^n(h) = 1. \tag{0.14}$$

В частности, коэффициенты полинома $V_n(h)$ монотонны.

Затем в разд. 2 будет доказана

Теорема 2. *Для каждого натурального n и любого $h \in [c_{[n/2]}, c_0]$ полином $V_n(h)$ имеет на сегменте $[0, \pi]$ ровно $m = n - [n/2]$ нулей*

$$0 < x_1^n(h) < \ldots < x_m^n(h) \le \pi, \tag{0.15}$$

причем каждый из этих нулей двойной кратности и

$$x_j^n(h) \in \Big(\frac{2\pi j - \pi}{n+1}, \frac{2\pi j}{n+1}\Big] \quad \textit{при всех } j = 1, \ldots, \big[n/2\big]. \tag{0.16}$$

Более того, в случае нечетного n нуль $x_m^n = \pi$,

$$V_n(h; x) = 2^{n-1}(\cos x + 1) \prod_{j=1}^{m-1} (\cos x - \cos x_j^n(h))^2, \tag{0.17}$$

$$(-1)^{j-1}\big(\sin(x_j^n(h)/2) g_n(h; x_j^n(h)) - h\big) > 0 \quad \textit{при всех} \;\; j = 1, \ldots, m, \tag{0.18}$$

а в случае четного n нуль $x_m^n < \pi$,

$$V_n(h; x) = 2^{n-1} \prod_{j=1}^{m} (\cos x - \cos x_j^n(h))^2, \tag{0.19}$$

$$(-1)^{j-1}\big(\sin(x_j^n(h)/2) g_n(h; x_j^n(h)) - h\cos(x_j^n(h)/2)\big) > 0 \quad \textit{при} \;\; j = 1, \ldots, m. \tag{0.20}$$

Для каждого натурального n и любого числа $h \in [c_s,\, c_{s-1}]$, где $s = 1, \ldots, [n/2]$, положим

$$\beta_1^n(h) = \frac{-h}{4sc_s + h(n-2s)}\,. \tag{0.21}$$

В силу (0.15) для каждого натурального n существуют однозначно определенные [4, гл. 10, § 1] числа

$$\lambda_1^n(h), \ldots, \lambda_m^n(h), \quad \text{где} \quad m = n - [n/2], \tag{0.22}$$

которые будем называть соответствующими полиному $V_n(h)$ множителями, такие, что

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k^n(h) = 1, \qquad \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^n(h) \cos(j x_k^n(h)) = \beta_1^n(h) \quad \text{при} \;\; j = 1, \ldots, m-1. \tag{0.23}$$

Оказывается, что соответствующие полиному $V_n(h)$ множители (0.22) всегда положительны, так как в разд. 3 будет доказана

Теорема 3. *Для каждого натурального n и любого $h \in [c_{[n/2]},\, c_0]$ соответствующие полиному $V_n(h)$ множители*

$$\lambda_k^n(h) > 0 \quad \textit{при всех} \quad k = 1, \ldots, n - \big[n/2\big]. \tag{0.24}$$

Для каждого $j = 0, 1, \ldots$ определим числа

$$\beta_j^n(h) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^n(h) \cos(j x_k^n(h)), \quad \text{где} \quad m = n - \big[n/2\big]. \tag{0.25}$$

Из (0.23) следует, что $\beta_0^n(h) = 1$ и $\beta_j^n(h) = \beta_1^n(h)$ при $j = 1, \ldots, m-1$. В разд. 4 доказывается

Теорема 4. *Для каждого натурального* n *и любого* $h \in [c_s, c_{s-1}]$, *где* $s = 1, \ldots, [n/2]$, *числа*

$$\beta_j^n(h) \le \beta_1^n(h) \qquad \text{при всех} \quad j = 1, \ldots, n, \tag{0.26}$$

причем

$$\beta_j^n(h) = \beta_1^n(h) \qquad \text{при всех} \quad j = 1, \ldots, n-s \tag{0.27}$$

и

$$\beta_j^n(h) = \beta_1^n(h) + \bigl(1 - \beta_1^n(h)\bigr)\Bigl(c_{j+s-n-1}(h - c_{s-1}) + \sum_{\nu=n-s+2}^{j} c_{j-\nu}(c_{n+1-\nu} - c_{n-\nu})\Bigr) \tag{0.28}$$

при всех $j = n-s+1, \ldots, n$.

В разд. 5, существенным образом используя теоремы 1–4, мы докажем следующую теорему, которая, по сути, является основным результатом этой статьи.

Теорема 5. *Для каждого натурального* n *и любого* $h \in [c_{[n/2]}, c_0]$ *для произвольного тригонометрического полинома* $T_n \in \mathbb{W}_n$ *вида* (0.1), *который отличен от полинома* $V_n(h)$ *и для которого*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \ge \gamma_n(h), \tag{0.29}$$

справедлива оценка $a_0 > a_0^n(h)$.

Теперь опишем экстремальную задачу, которую позволяет решить теорема 5. В разд. 5 будет доказана

Лемма. *Для каждого натурального* n *функция* $\gamma_n(h)$ *как функция от* $h \in [c_{[n/2]}, c_0]$ *строго возрастает. Более того, если* $h \in [c_s, c_{s-1}]$, *где* $s = 1, \ldots, [n/2]$, *то*

$$\gamma_n(h) = 8(sc_s)^2 - \sum_{k=0}^{s-1} c_k^2 + 4s(n+1-2s)c_s h + \frac{1}{2}(n+1-2s)(n-2s)h^2. \tag{0.30}$$

При всех $j = 0, \ldots, [n/2]$ положим $\gamma_j^n = c_j^2\bigl((n+1)n/2 + 1 + j(2n+3) + 2j^2\bigr) - \sum_{k=0}^{j} c_k^2$. Тогда из (0.30) и (0.4) имеем $\gamma_n(c_j) = \gamma_j^n$ при $j = 0, \ldots, [n/2]$ и $\gamma_{[n/2]}^n = \psi(n)$. Поэтому

$$\psi(n) = \gamma_{[n/2]}^n < \ldots < \gamma_0^n = \frac{1}{2}n(n+1). \tag{0.31}$$

Пусть функция $h_n(\gamma)$ определена на сегменте $[\psi(n), n(n+1)/2]$ и является обратной к функции $\gamma = \gamma_n(h)$. В частности, $h_n(\gamma_j^n) = c_j$ при $j = 0, \ldots, [n/2]$. При всех $\gamma \in [\psi(n), n(n+1)/2]$ положим $V_n^\gamma(x) = V_n(h_n(\gamma); x)$, и пусть

$$V_n^\gamma(x) = \frac{2\gamma}{n} F_n(x) \qquad \text{при всех} \qquad \gamma \ge \frac{n(n+1)}{2}. \tag{0.32}$$

Как следствие теоремы 5 в разд. 5 будет доказана

Теорема 6. *Для каждого* $\gamma \ge \psi(n)$ *полином* V_n^γ *является единственным экстремальным полиномом в следующей задаче о минимуме свободного члена неотрицательного тригонометрического полинома*:

$$K_n(\gamma) = \min\Bigl\{a_0 \colon T_n \in \mathbb{W}_n, \sum_{k=1}^{n} a_k = \gamma\Bigr\}. \tag{0.33}$$

В частности, $K_n(\gamma) = a_0^n(h_n(\gamma))$ *при* $\gamma \in [\psi(n), n(n+1)/2]$ *и* $K_n(\gamma) = \gamma/n$ *при* $\gamma \ge n(n+1)/2$. *Более того, экстремальный полином* V_n^γ *имеет монотонные коэффициенты и при* $\gamma \ge \psi(n)$ *функция* $K_n(\gamma)$ *непрерывна и строго возрастает.*

Отметим, что для каждого $s = 1, \ldots, [n/2]$ при $\gamma \in [\gamma_s^n, \gamma_{s-1}^n]$ можно пользоваться формулами

$$h_n(\gamma) = \frac{2\Big(\gamma - 8(sc_s)^2 + \sum_{k=0}^{s-1} c_k^2\Big)(n+1-2s)^{-1/2}}{4sc_s(n+1-2s)^{1/2} + \Big(2(n-2s)\Big(\gamma + \sum_{k=0}^{s-1} c_k^2\Big) + 16(sc_s)^2\Big)^{1/2}} \tag{0.34}$$

и

$$K_n(\gamma) = \sum_{k=0}^{s-1} c_k^2 + \frac{1}{2}(n+1-2s)h_n^2(\gamma). \tag{0.35}$$

Из (0.34) и (0.35), в частности, вытекает, что функция $K_n(\gamma)$ имеет при $\gamma \geq \psi(n)$ не убывающую непрерывную производную $K_n'(\gamma)$, причем $K_n'(\gamma)$ строго возрастает на $[\psi(n), n(n+1)/2]$, $K_n'(\gamma) = 1/n$ при $\gamma \geq n(n+1)/2$ и

$$K_n'(\gamma_j^n) = \frac{1}{(n+2j)} \quad \text{при всех} \quad j = 0, \ldots, [n/2]. \tag{0.36}$$

Теорема 6 полностью решает экстремальную задачу (0.33) при $\gamma \geq \psi(n)$. Но задачу (0.33) естественно рассматривать при $\gamma \geq n$. Например, при $\gamma = n$ единственный экстремальный полином $V_n^n(x) = -\min_t\big(\sum_{j=1}^n \cos(jt)\big) + \sum_{k=1}^n \cos(kx)$. Оказывается, верна

Теорема 7. *Для каждого натурального n экстремальный полином в задаче* (0.33) *существует для любого числа $\gamma \geq n$, причем функция $K_n(\gamma)$ непрерывна и выпукла вниз на всем промежутке $[n, +\infty)$. Более того, при $n \geq 3$ функция $K_n(\gamma)$ на отрезке $[n, \psi(n)]$ строго убывает.*

Эта теорема доказывается в разд. 6. Также в конце разд. 6 для примера будет доказано, что для случая $n = 3$ при $3 \leq \gamma \leq \psi(3) = 3 + 1/4$ полином

$$V_3^\gamma(x) = K_3(\gamma) + (\gamma - 2)\cos x + \cos(2x) + \cos(3x), \tag{0.37}$$

где

$$K_3(\gamma) = \frac{9\gamma + 7}{54} + \frac{(16 - 3\gamma)}{27}\sqrt{16 - 3\gamma}, \tag{0.38}$$

является единственным экстремальным полиномом задачи (0.33). Аналогично, для $n = 4$ и $4 \leq \gamma \leq \psi(4) = 4 + 3/8$ полином

$$V_4^\gamma(x) = K_4(\gamma) + (\gamma - 3)\cos x + \cos(2x) + \cos(3x) + \cos(4x), \tag{0.39}$$

где

$$K_4(\gamma) = 24t_\gamma^4 + 8t_\gamma^3 - 6t_\gamma^2, \quad \text{а} \quad t_\gamma = \frac{3}{4}\cos\Big(\frac{1}{3}\arccos\Big(\frac{35 - 8\gamma}{27}\Big)\Big) - \frac{1}{8}, \tag{0.40}$$

является единственным экстремальным полиномом задачи (0.33). Таким образом, задача (0.33) при $1 \leq n \leq 4$ решена и для случая $\gamma \geq n$. Случай $n \geq 5$ и $\gamma \in (n, \psi(n))$ в этой статье не рассматривается. Сформулированные результаты анонсированы в [2]. Там же указаны приложения теоремы 6 к решению других экстремальных задач.

Теперь перейдем к доказательствам изложенных результатов.

1. Доказательство теоремы 1

В этом разделе мы считаем зафиксированными натуральные числа n и $s = 1, \ldots, [n/2]$ и число

$$h \in [c_s,\, c_{s-1}]. \tag{1.1}$$

Поэтому иногда, особенно при преобразованиях, мы для краткости опускаем символы n и h, т. е. $b_j = b_j^n(h)$, $a_k = a_k^n(h)$.

В силу (0.5) имеем

$$b_{n-j}^n(h) = b_j^n(h) = c_j \quad \text{при} \quad j = 0, \ldots, s-1, \qquad b_j^n(h) = h \quad \text{при} \quad j = s, \ldots, n-s. \tag{1.2}$$

При $|t| < 1$, возведя обе части разложения $(1-t)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ в квадрат, получим для положительных чисел (0.2) равенства

$$\sum_{j=0}^{k} c_j c_{k-j} = 1 \quad \text{при всех} \quad k \geq 0. \tag{1.3}$$

По индукции из (0.2) сразу получаем, что

$$2k\, c_k = (2k-1) c_{k-1} \quad \text{и} \quad \sum_{j=0}^{k-1} c_j = 2k\, c_k \quad \text{при всех} \quad k \geq 1. \tag{1.4}$$

Поэтому

$$a_0^n(h) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n} (b_j^n(h))^2 = \sum_{j=0}^{s-1} c_j^2 + \frac{1}{2}(n+1-2s)h^2 \tag{1.5}$$

и

$$\sum_{j=0}^{n} b_j^n(h) = 2 \sum_{j=0}^{s-1} c_j + (n+1-2s)h = 4sc_s + (n+1-2s)h. \tag{1.6}$$

При $k = 1, \ldots, n-s+1$ из (0.7) и (1.2) имеем

$$a_k^n(h) = \sum_{j=0}^{s-1} b_j b_{j+k} + \sum_{j=s}^{n-k} b_{n-j} b_{n-j-k} = \sum_{j=0}^{s-1} c_j b_{j+k} + \sum_{j=0}^{n-k-s} b_{k+j} b_j\,. \tag{1.7}$$

Пусть $k = 1, \ldots, \min(s, n-2s+1)$. Тогда $s+k-1 \leq n-s$, и в силу (1.7) и (1.2) получаем

$$a_k^n(h) = 2 \sum_{j=0}^{s-k-1} c_j c_{j+k} + 2 \sum_{j=s-k}^{s-1} c_j h + \sum_{j=s}^{n-k-s} b_{k+j} b_j = 2 \sum_{j=0}^{s-k-1} c_j c_{j+k} + 2h \sum_{j=s-k}^{s-1} c_j + (n+1-2s-k)h^2. \tag{1.8}$$

Пусть $k = \max(s, n-2s+1), \ldots, n-s+1$. Тогда $n-s-k \leq s-1$, и из (1.7) и (1.2) выводим

$$a_k^n(h) = 2 \sum_{j=0}^{n-k-s} c_j h + \sum_{j=n-k-s+1}^{s-1} c_j c_{n-j-k}\,.$$

Но в силу (1.3) имеем

$$\sum_{j=n-k-s+1}^{s-1} c_j c_{n-j-k} = \sum_{j=0}^{n-k} c_j c_{n-j-k} - \sum_{j=0}^{n-k-s} c_j c_{n-j-k} - \sum_{j=s}^{n-k} c_j c_{n-j-k} = 1 - 2 \sum_{j=0}^{n-k-s} c_j c_{n-j-k}\,.$$

Поэтому

$$a_k^n(h) = 2h \sum_{j=0}^{n-k-s} c_j + 1 - 2 \sum_{j=0}^{n-k-s} c_j c_{n-j-k} \quad \text{при} \quad k = \max(s,\, n-2s+1), \ldots, n-s+1. \tag{1.9}$$

Если $3s \le n+1$ и $k = s, \ldots, n-2s+1$, то из (1.7) и (1.2) получаем

$$a_k^n(h) = 2\sum_{j=0}^{s-1} c_j b_{j+k} + \sum_{j=s}^{n-k-s} b_{k+j} b_j = 2h \sum_{j=0}^{s-1} c_j + (n+1-k-2s)h^2. \tag{1.10}$$

Если $3s \ge n+1$ и $k = n-2s+1, \ldots, s$, то из (1.7) и (1.2) имеем

$$a_k^n(h) = 2 \sum_{j=0}^{n-k-s} c_j b_{j+k} + \sum_{j=n-k-s+1}^{s-1} c_j b_{j+k} = 2 \sum_{j=0}^{s-1-k} c_j c_{j+k} + 2 \sum_{j=s-k}^{n-k-s} c_j h$$

$$+ \sum_{j=n-k-s+1}^{s-1} c_j c_{n-j-k} = 1 - 2 \sum_{j=0}^{n-k-s} c_j c_{n-j-k} + 2 \sum_{j=0}^{s-1-k} c_j c_{j+k} + 2h \sum_{j=s-k}^{n-k-s} c_j. \tag{1.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Из (1.5) и (1.8) при $k=1$ имеем

$$2a_0^n(h) - a_1^n(h) = 2\sum_{j=0}^{s-2} c_j(c_j - c_{j+1}) + c_{s-1}^2 + (c_{s-1} - h)^2 \ge c_{s-1}^2 > 0. \tag{1.12}$$

При $k = n-s+1, \ldots, n$ из (1.2) и (1.3) получаем $a_k^n(h) = \sum_{j=0}^{n-k} b_j b_{n-j-k} = \sum_{j=0}^{n-k} c_j c_{n-k-j} = 1$ и

$$a_{n-s}^n(h) = \sum_{j=0}^{s} b_j b_{s-j} = 2h + \sum_{j=1}^{s-1} c_j c_{s-j} = 2(h - c_s) + 1. \tag{1.13}$$

В частности, (0.14) доказано.

Из (1.8) при $k = 1, \ldots, \min(s-1, n-2s)$ вытекает, что

$$a_k^n(h) - a_{k+1}^n(h) = 2 \sum_{j=0}^{s-k-2} c_j(c_{j+k} - c_{j+k+1}) + 2c_{s-k-1}(c_{s-1} - h) + h^2 > 0.$$

Из (1.1) и (1.9) при $k = \max(s, n-2s+1), \ldots, n-s-1$ получаем

$$a_k^n(h) - a_{k+1}^n(h) = 2 \sum_{j=0}^{n-s-k-1} c_j(c_{n-j-k-1} - c_{n-j-k}) + 2c_{n-s-k}(h - c_s) > 0.$$

Если $3s \le n+1$, то при $k = s, \ldots, n-2s$ из (1.10) имеем $a_k^n(h) - a_{k+1}^n(h) = h^2 > 0$. Если же $3s \ge n+1$, то при $k = n-2s+1, \ldots, s-1$ из (1.1) и (1.11) получаем

$$a_k^n(h) - a_{k+1}^n(h) = 2 \sum_{j=0}^{n-s-k-1} c_j(c_{n-j-k-1} - c_{n-j-k})$$

$$+ 2c_{n-s-k}(h - c_s) + 2 \sum_{j=0}^{s-k-2} c_j(c_{j+k} - c_{j+k+1}) + 2c_{s-k-1}(c_{s-1} - h) > 0.$$

Отсюда, из (1.12) и (1.13) следует (0.13). Значит, полином $V_n(h) \in \mathbb{W}_n$, и теорема 1 доказана.

2. Доказательство теоремы 2

Как и в разд. 1, здесь считаем зафиксированными натуральные числа n, $m = n-[n/2]$, $s = 1,\dots,[n/2]$ и число h, которое удовлетворяет условию (1.1), и в некоторых случаях опускаем символы n и h: $b_j = b_j^n(h)$, $a_k = a_k^n(h)$, $x_k = x_k^n(h)$.

Пусть

$$t_n(x) = \sum_{k=1}^{[n/2]}(b_{k-1}-b_k)\sin(kx) \quad \text{и} \quad u_n(x) = b_{[n/2]} + \sum_{k=1}^{[n/2]}(b_{k-1}-b_k)(1-\cos(kx)).$$

Поскольку $b_{k-1}-b_k \ge 0$ при $k = 1,\dots,[n/2]$, то при всех x полином $u_n(x) \ge b_{[n/2]} \ge c_{[n/2]} > 0$. Из (1.1) и (1.2) получаем, что $t_n(x) = \sum_{k=1}^{s-1}(c_{k-1}-c_k)\sin(kx) + (c_{s-1}-h)\sin(sx)$. Из (1.4) видим, что $c_{k-1}-c_k = c_{k-1}/(2k)$ при $k \ge 1$. Пусть $\theta = (c_{s-1}-h)/(c_{s-1}-c_s)$. Тогда из (1.1) вытекает, что $\theta \in [0,\,1]$, и, исключая случай $s=1$, $\theta=0$, имеем

$$2t_n(x) = \sum_{k=1}^{s-1}c_{k-1}\frac{\sin(kx)}{k} + \theta c_{s-1}\frac{\sin(sx)}{s} = \sum_{k=1}^{s-1}(c_{k-1}-c_k)\sum_{j=1}^{k}\frac{\sin(jx)}{j}$$

$$+ (1-\theta)c_{s-1}\sum_{j=1}^{s-1}\frac{\sin(jx)}{j} + \theta c_{s-1}\sum_{j=1}^{s}\frac{\sin(jx)}{j} > 0$$

при всех $x \in (0,\,\pi)$, поскольку (см. [3, гл. 2, теорема 9.4]) при таких значениях x верна оценка $\sum_{j=1}^{k}\sin(jx)/j > 0$ при всех $k \ge 1$. Таким образом,

$$t_n(x) > 0 \quad \text{при всех} \quad x \in (0,\pi), \tag{2.1}$$

кроме случая $s=1$, $h=1$. Отметим, что в силу (0.6) и (0.8) верно равенство

$$2V_n(h;x) = |f_n(h;x)|^2. \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Пусть сначала $n = 2m-1$. Тогда из (0.8) имеем

$$\sin(x/2)f_n(h;x) = \sum_{k=0}^{m-1}2b_k\cos\big((n/2-k)x\big)\sin(x/2)$$
$$= b_0\sin(mx) - \sum_{k=1}^{m-1}(b_{k-1}-b_k)\sin((m-k)x) = \sin(mx)u_n(x) + \cos(mx)t_n(x). \tag{2.3}$$

Случай $s=1$, $h=1$ пока исключим. Тогда из (2.1) получаем

$$(-1)^{j-1}\sin\Big(\frac{2\pi j-\pi}{2(n+1)}\Big)f_n\Big(h;\frac{2\pi j-\pi}{n+1}\Big) = u_n\Big(\frac{2\pi j-\pi}{n+1}\Big) > 0 \quad \text{при} \quad j=1,\dots,m$$

и

$$(-1)^j\sin\Big(\frac{\pi j}{n+1}\Big)f_n\Big(h;\frac{2\pi j}{n+1}\Big) = t_n\Big(\frac{2\pi j}{n+1}\Big) > 0 \quad \text{при} \quad j=1,\dots,m-1.$$

Поэтому при всех $j = 1,\dots,m-1$ существует такая точка x_j, что $(n+1)x_j \in (2\pi j-\pi,\,2\pi j)$ и $\sin(x_j/2)f_n(h;x_j) = 0$. Пусть $x_m = \pi$. Поскольку (см. (2.3)) функция $\sin(x/2)f_n(h;x)$ является тригонометрическим полиномом степени m по синусам с единичным старшим коэффициентом, то $\sin(x/2)\,f_n(h;x) = 2^{m-1}\sin x\prod_{j=1}^{m-1}(\cos x-\cos x_j)$. Следовательно, этот полином не имеет других нулей на $(0,\,\pi]$, т. е. нули $x_j = x_j^n(h)$ определяются единственным образом, справедливо (0.16) и

$$f_n(h;x) = 2^m\cos(x/2)\prod_{j=1}^{m-1}(\cos x-\cos x_j^n(h)). \tag{2.4}$$

Отсюда и из (2.2) вытекает (0.17). Если $s = 1$ и $h = 1$, то $t_n(x) = 0$ и $\sin(x/2)f_n(h;x) = \sin(mx)u_n(x)$. Поэтому все нули полинома $\sin(x/2)f_n(h;x)$ на $(0,\,\pi]$ совпадают с нулями функции $\sin(mx)$, т. е. $x_j = 2\pi j/(n+1)$ при всех $j = 1,\dots,m$, и опять верны (0.16), (2.4) и (0.17).

Из (0.9) имеем

$$\sin(x/2)g_n(h;x) = \sum_{k=0}^{m-1} 2b_k \sin((n/2-k)x)\sin(x/2) = b_{m-1} - \cos(mx)u_n(x) + \sin(mx)t_n(x).$$

Поскольку в силу (1.2) коэффициент $b_{m-1} = h$, при $j = 1,\dots,m$ получаем равенство

$$\sin(x_j/2)g_n(h;x_j) - h = \sin(mx_j)t_n(x_j) - \cos(mx_j)u_n(x_j),$$

и из (2.3) вытекает равенство

$$\sin(mx_j)u_n(x_j) + \cos(mx_j)t_n(x_j) = \sin(x_j/2)f_n(h;x_j) = 0.$$

Из этого равенства видим, что $t_n(x_j) = -u_n(x_j)\sin(mx_j)/\cos(mx_j)$. Отсюда, из (0.16) и из первого равенства находим, что

$$(-1)^{j-1}(\sin(x_j/2)g_n(h;x_j) - h) = \frac{u_n(x_j)(-1)^j}{\cos(mx_j)} > 0,$$

т. е. (0.18) доказано.

Теперь предположим, что число $n = 2m$. Из (0.8) имеем

$$\sin(x/2)f_n(h;x) = \Big(b_m + \sum_{k=0}^{m-1} 2b_k\cos((m-k)x)\Big)\sin(x/2) = b_0\sin\big((m+1/2)x\big)$$
$$-\sum_{k=1}^{m}(b_{k-1}-b_k)\sin\big((m+1/2-k)x\big) = \sin\big((m+1/2)x\big)u_n(x) + \cos\big((m+1/2)x\big)t_n(x). \quad (2.5)$$

Случай $s = 1$, $h = 1$ пока исключим. Тогда из (2.1) при $j = 1,\dots,m$ получаем

$$(-1)^{j-1}\sin\Big(\frac{2\pi j-\pi}{2(n+1)}\Big)f_n\Big(h;\frac{2\pi j-\pi}{n+1}\Big) = u_n\Big(\frac{2\pi j-\pi}{n+1}\Big) > 0$$

и

$$(-1)^j\sin\Big(\frac{\pi j}{n+1}\Big)f_n\Big(h;\frac{2\pi j}{n+1}\Big) = t_n\Big(\frac{2\pi j}{n+1}\Big) > 0.$$

Поэтому при всех $j = 1,\dots,m$ существует такая точка x_j, что $(n+1)x_j \in (2\pi j-\pi,\, 2\pi j)$ и $\sin(x_j/2)f_n(h;x_j) = 0$. Поскольку (см. (0.8)) функция $f_n(h;x)$ является тригонометрическим полиномом степени m по косинусам со старшим коэффициентом 2, то справедливо разложение $f_n(h;x) = 2^m\prod_{j=1}^m(\cos x - \cos x_j)$. Следовательно, этот полином не имеет других нулей на $(0,\,\pi]$, т. е. нули $x_j = x_j^n(h)$ определяются единственным образом, справедливо (0.16) и

$$f_n(h;x) = 2^m\prod_{j=1}^m(\cos x - \cos x_j^n(h)). \quad (2.6)$$

Отсюда и из (2.2) вытекает (0.19). Если $s = 1$ и $h = 1$, то $t_n(x) = 0$ и $\sin(x/2)f_n(h;x) = \sin((m+1/2)x)u_n(x)$. Поэтому все нули полинома $f_n(h;x)$ на $(0,\,\pi]$ совпадают с нулями функции $\sin((m+1/2)x)$, т. е. $x_j = 2\pi j/(n+1)$ при всех $j = 1,\dots,m$, и снова верны (0.16) и (0.19).

Из (0.9) видим, что

$$\sin(x/2)g_n(h;x) = \sum_{k=0}^{m-1} 2b_k\sin((m-k)x)\sin(x/2)$$

$$= b_m\cos(x/2) - \cos((m+1/2)x)u_n(x) + \sin((m+1/2)x)t_n(x).$$

Поскольку в силу (1.2) коэффициент $b_m = h$, при $j = 1, \ldots, m$ получаем равенство

$$\sin(x_j/2)g_n(h; x_j) - h\cos(x_j/2) = \sin((m+1/2)x_j)t_n(x_j) - \cos((m+1/2)x_j)u_n(x_j),$$

и из (2.5) вытекает равенство

$$\sin((m+1/2)x_j)u_n(x_j) + \cos((m+1/2)x_j)t_n(x_j) = \sin(x_j/2)f_n(h; x_j) = 0.$$

Из этого равенства находим, что $t_n(x_j) = -u_n(x_j)\sin((m+1/2)x_j)/\cos((m+1/2)x_j)$. Отсюда, из (0.16) и из первого равенства получаем, что

$$(-1)^{j-1}(\sin(x_j/2)g_n(h; x_j) - h\cos(x_j/2)) = \frac{u_n(x_j)(-1)^j}{\cos((m+1/2)x_j)} > 0,$$

т. е. (0.20) доказано. Теорема 2 полностью доказана.

3. Доказательство теоремы 3

В этом разделе считаем зафиксированными натуральные числа n, $m = n - [n/2]$, $k = 1, \ldots, m$, $s = 1, \ldots, [n/2]$ и число h, которое удовлетворяет условию (1.1), и, как и ранее, иногда опускаем символы n и h: $b_j = b_j^n(h)$, $a_\nu = a_\nu^n(h)$, $x_j = x_j^n(h)$, $\lambda_\nu = \lambda_\nu^n(h)$, $\beta_1 = \beta_1^n(h)$.

Пусть полином

$$H_k(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j \cos(jx) \tag{3.1}$$

таков, что $H_k(x_k) = 1$, $H_k(x_\nu) = 0$ при всех $\nu = 1, \ldots, m$, $\nu \neq k$. Этот полином [4, гл. 10, § 1] существует и единствен. Из (3.1) вытекает, что

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_k(x)\,dx, \qquad \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j = H_k(0). \tag{3.2}$$

Отсюда и из (0.23) имеем

$$\alpha_0 + \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j \beta_1 = \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu \cos(jx_\nu) = \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu H_k(x_\nu) = \lambda_k.$$

Используя формулы (3.2), получаем

$$\lambda_k = (1-\beta_1)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_k(x)dx + \beta_1 H_k(0). \tag{3.3}$$

Заметим, что в силу (0.21) и (1.6)

$$\beta_1 < 0, \qquad \frac{\beta_1}{1-\beta_1}\sum_{j=0}^{n} b_j = -h. \tag{3.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3. Пусть сначала число $n = 2m$. Тогда из (0.8) следует, что $f_n(h; x) = b_m + \sum_{j=0}^{m-1} 2b_j \cos((m-j)x)$. Из (2.6) вытекает, что в качестве полинома (3.1) можно взять $H_k(x) = \varkappa_k \sin x_k f_n(h; x)/(\cos x - \cos x_k)$, где $\varkappa_k = -1/f_n'(h; x_k)$, причем по теореме 2 имеем $f_n'(h; x_k) = (-1)^k \sin x_k 2^m \prod_{j=1}^{k-1}(\cos x_j - \cos x_k)\prod_{j=k+1}^{m}(\cos x_k - \cos x_j)$. Поэтому

$$(-1)^{k-1}\varkappa_k > 0, \qquad H_k(0) = \varkappa_k \frac{\sin x_k}{1-\cos x_k}\sum_{j=0}^{n} b_j \tag{3.5}$$

и

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_k(x)dx = \kappa_k \sin x_k \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f_n(h;x)-f_n(h;x_k)}{\cos x-\cos x_k}dx$$

$$= \kappa_k \sin x_k \sum_{j=0}^{m-1} 2b_j \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos((m-j)x)-\cos((m-j)x_k)}{\cos x-\cos x_k}dx.$$

Поскольку [1, лемма 6] при целых неотрицательных ν верно равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\nu x)-\cos(\nu x_k)}{\cos x-\cos x_k}dx = \frac{\sin(\nu x_k)}{\sin x_k}, \tag{3.6}$$

в обозначении (0.9) получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_k(x)dx = \kappa_k \sum_{j=0}^{m-1} 2b_j \sin((m-j)x_k) = \kappa_k g_n(h;x_k).$$

Отсюда, из (3.3), (3.4), (3.5) и (0.20) следует

$$\lambda_k = (1-\beta_1)\kappa_k g_n(h;x_k) + \beta_1\kappa_k \frac{\sin x_k}{1-\cos x_k}\sum_{j=0}^{n} b_j = \frac{\kappa_k(1-\beta_1)}{\sin(x_k/2)}\big(\sin(x_k/2)g_n(h;x_k) - h\cos(x_k/2)\big) > 0,$$

т. е. верно (0.24).

Пусть теперь число $n = 2m-1$. В этом случае из (0.8) и (0.9) следуют равенства

$$\cos(x/2)f_n(h;x) = \sum_{j=0}^{m-1} 2b_j \cos((n/2-j)x)\cos(x/2) = \sum_{j=0}^{m-1} b_j\big(\cos((m-j)x)+\cos((m-j-1)x)\big),$$

$$\cos(x/2)g_n(h;x) = \sum_{j=0}^{m-1} 2b_j \sin\big((n/2-j)x\big)\cos(x/2) = \sum_{j=0}^{m-1} b_j\big(\sin((m-j)x)+\sin((m-j-1)x)\big). \tag{3.7}$$

Из (2.4) вытекает, что $\cos(x/2)f_n(h;x) = 2^{m-1}\prod_{j=1}^{m}(\cos x-\cos x_j)$. Тогда в качестве полинома (3.1) можно взять $H_k(x) = \kappa_k \cos(x/2)f_n(h;x)/(\cos x-\cos x_k)$, где

$$\frac{1}{\kappa_k} = (-1)^{k-1}2^{m-1}\prod_{j=1}^{k-1}(\cos x_j-\cos x_k)\prod_{j=k+1}^{m}(\cos x_k-\cos x_j).$$

Поэтому по теореме 2 имеем

$$(-1)^{k-1}\kappa_k > 0, \qquad H_k(0) = \kappa_k \frac{1}{1-\cos x_k}\sum_{j=0}^{n} b_j \tag{3.8}$$

и

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_k(x)dx = \frac{\kappa_k}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(x/2)f_n(h;x)-\cos(x_k/2)f_n(h;x_k)}{\cos x-\cos x_k}dx$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} \kappa_k b_j \Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos((m-j)x)-\cos((m-j)x_k)}{\cos x-\cos x_k}dx$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos((m-j-1)x)-\cos((m-j-1)x_k)}{\cos x-\cos x_k}dx\Big). \tag{3.9}$$

Отсюда и из (3.6) в обозначении (3.7) при $x_k \neq \pi$ получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}H_k(x)dx=\kappa_k\sum_{j=0}^{m-1}b_j\Big(\frac{\sin((m-j)x_k)}{\sin(x_k)}+\frac{\sin((m-j-1)x_k)}{\sin(x_k)}\Big)=\kappa_k\frac{\cos(x_k/2)g_n(h;x_k)}{\sin(x_k)}.$$

Из этого равенства, из (3.3), (3.4), (3.8) и (0.18) следует

$$\lambda_k=(1-\beta_1)\kappa_k\frac{\cos(x_k/2)g_n(h;x_k)}{\sin(x_k)}+\beta_1\kappa_k\frac{1}{1-\cos x_k}\sum_{j=0}^{n}b_j$$

$$=\frac{\kappa_k(1-\beta_1)}{(1-\cos(x_k))}\big(\sin(x_k/2)g_n(h;x_k)-h\big)>0,$$

т. е. также верно (0.24).

Пусть теперь $x_k=\pi$. Тогда $k=m$. Поскольку [1, лемма 6] при целых неотрицательных ν верно равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos(\nu x)-\cos(\nu\pi)}{\cos x-\cos\pi}dx=(-1)^{\nu-1}\nu,$$

в обозначении (3.7) из (3.9) получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}H_k(x)dx=\kappa_k\sum_{j=0}^{m-1}b_j((-1)^{m-j-1}(m-j)+(-1)^{m-j}(m-j-1))$$

$$=\kappa_k\sum_{j=0}^{m-1}b_j(-1)^{m-j-1}=\frac{1}{2}\kappa_k g_n(h;x_k).$$

Отсюда, из (3.3), (3.4), (3.8) и (0.18) следует

$$2\lambda_k=(1-\beta_1)\kappa_k g_n(h;x_k)+\beta_1\kappa_k\sum_{j=0}^{n}b_j=\kappa_k(1-\beta_1)(g_n(h;\pi)-h)>0,$$

т. е. опять верно (0.24). Теорема 3 полностью доказана.

4. Доказательство теоремы 4

В этом разделе считаем зафиксированными натуральные числа n, $m=n-[n/2]$, $s=1,\dots,[n/2]$ и число h, которое удовлетворяет условию (1.1), и в некоторых случаях опускаем символы n и h: $b_j=b_j^n(h)$, $x_k=x_k^n(h)$, $\lambda_k=\lambda_k^n(h)$, $\beta_j=\beta_j^n(h)$. Будем также использовать обозначения

$$r_j=\beta_j-\beta_1 \quad \text{при всех} \quad j\geq 0. \tag{4.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 4. Прежде всего докажем, что верно (0.27) и справедливы рекуррентные соотношения

$$\sum_{k=0}^{\nu-1}c_k r_{\nu-k}=(1-\beta_1)(h-c_{n-\nu}) \quad \text{при всех} \quad \nu=n-s+1,\dots,n. \tag{4.2}$$

Рассмотрим сначала случай $n = 2m-1$. Тогда при всех $\nu \geq m$ и $k = 1, \ldots, m$ имеем

$$0 = \cos((\nu - n/2)x_k) f_n(h; x_k) = \sum_{j=0}^{m-1} 2b_j \cos((n/2 - j)x_k) \cos((\nu - n/2)x_k)$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} b_j (\cos((\nu - j)x_k) + \cos((n - j - \nu)x_k)).$$

Отсюда в обозначениях (0.25) получаем

$$\sum_{j=0}^{m-1} b_j (\beta_{\nu-k} + \beta_{|\nu+j-n|}) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{m-1} b_j \lambda_k (\cos((\nu - j)x_k) + \cos((n - j - \nu)x_k)) = 0.$$

Следовательно, в силу (1.2), (4.1) и (0.21) имеем

$$\sum_{j=0}^{m-1} b_j r_{\nu-j} + \sum_{j=0}^{m-1} b_j r_{|\nu+j-n|} = -2\beta_1 \sum_{j=0}^{m-1} b_j = -\beta_1(4sc_s + (n+1-2s)h) = h(1-\beta_1)$$

при всех $\nu \geq m$. Из (0.23) следует, что $r_0 = 1 - \beta_1$ и $r_j = 0$ при $j = 1, \ldots, m-1$. Удаляя из второй суммы нулевые члены, получаем

$$\sum_{j=0}^{m-1} b_j r_{\nu-j} + b_{n-\nu}(1-\beta_1) = h(1-\beta_1) \quad \text{при всех} \quad \nu = m, \ldots, n. \tag{4.3}$$

Из (4.3) и (1.2) при $\nu = m, \ldots, n-s$ имеем $b_{n-\nu} = h$ и $r_\nu + \sum_{j=1}^{m-1} b_j r_{\nu-j} = 0$. Отсюда последовательно получаем $r_m = 0, \ldots, r_{n-s} = 0$. Таким образом,

$$r_j = 0 \quad \text{при всех} \quad j = 1, \ldots, n-s, \tag{4.4}$$

и из (4.1) вытекает (0.27). При $\nu = n-s+1, \ldots, n$ из (4.3), (4.4) и (1.2) следует равенство

$$\sum_{j=0}^{\nu-1} c_j r_{\nu-j} = \sum_{j=0}^{s-1} c_j\, r_{\nu-j} = \sum_{j=0}^{m-1} b_j r_{\nu-j} = (1-\beta_1)(h - c_{n-\nu}),$$

т. е. верно (4.2).

Теперь пусть $n = 2m$. Тогда при всех $\nu \geq m$ и $k = 1, \ldots, m$ имеем

$$0 = \cos((\nu - m)x_k) f_n(h; x_k) = \Big(b_m + \sum_{j=0}^{m-1} 2b_j \cos((m-j)x_k)\Big) \cos((\nu - m)x_k)$$

$$= \sum_{j=0}^{m} b_j \cos((\nu - j)x_k) + \sum_{j=0}^{m-1} b_j \cos((n - j - \nu)x_k).$$

Отсюда получаем

$$\sum_{j=0}^{m} b_j \beta_{\nu-j} + \sum_{j=0}^{m-1} b_j \beta_{|\nu+j-n|} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{m} b_j \lambda_k \cos((\nu - j)x_k) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{m-1} b_j \lambda_k \cos((n - j - \nu)x_k) = 0.$$

Следовательно, в силу (1.2), (4.1) и (0.21) имеем

$$\sum_{j=0}^{m} b_j r_{\nu-j} + \sum_{j=0}^{m-1} b_j r_{|\nu+j-n|} = -\beta_1 \Big(b_m + 2\sum_{j=0}^{m-1} b_j\Big) = -\beta_1(4sc_s + (n+1-2s)h) = h(1-\beta_1) \tag{4.5}$$

при всех $\nu \geq m$. Поскольку из (0.23) следует, что $r_0 = 1 - \beta_1$ и $r_j = 0$ при $j = 1, \ldots, m-1$, то при $\nu = m$ из (4.5) видим, что $2b_0 r_m + b_m r_0 = h(1-\beta_1)$. Отсюда, поскольку $b_m = h$, выводим, что $r_m = 0$. Удаляя в (4.5) из второй суммы нулевые члены, получаем

$$r_\nu + \sum_{j=1}^{m} b_j r_{\nu-j} + b_{n-\nu}(1-\beta_1) = h(1-\beta_1) \quad \text{при всех} \quad \nu = m+1, \ldots, n. \tag{4.6}$$

Из (4.6) и (1.2) при $\nu = m+1, \ldots, n-s$ имеем $b_{n-\nu} = h$ и $r_\nu + \sum_{j=1}^{m} b_j r_{\nu-j} = 0$. Отсюда последовательно получаем $r_{m+1} = 0, \ldots, r_{n-s} = 0$. Таким образом,

$$r_j = 0 \quad \text{при всех} \quad j = 1, \ldots, n-s, \tag{4.7}$$

и из (4.1) опять вытекает (0.27). При $\nu = n-s+1, \ldots, n$ из (4.6), (4.7) и (1.2) следует, что

$$\sum_{j=0}^{\nu-1} c_j r_{\nu-j} = \sum_{j=0}^{s-1} c_j r_{\nu-j} = \sum_{j=0}^{m} b_j r_{\nu-j} = (1-\beta_1)(h - c_{n-\nu}),$$

т. е. снова верно (4.2).

Из (4.2) формулу (0.28) можно доказать по индукции. Но мы приведем доказательство, основанное на свойствах степенных рядов. При $|t| \leq 1/2$ из (0.27) и (4.2) имеем

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k\Big)\Big(\sum_{j=0}^{n} r_j t^j\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r_0 t^k + \sum_{\nu=1}^{n}\Big(\sum_{k=0}^{\nu-1} c_k r_{\nu-k}\Big) t^\nu + O(t^{n+1})$$

$$= (1-\beta_1)\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k + \sum_{\nu=n-s+1}^{n} (1-\beta_1)(h - c_{n-\nu}) t^\nu + O(t^{n+1})$$

$$= (1-\beta_1)\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k + (1-\beta_1) h \sum_{\nu=n-s+1}^{\infty} t^\nu - (1-\beta_1) \sum_{\nu=n-s+1}^{n} c_{n-\nu} t^\nu + O(t^{n+1}).$$

Значит,

$$\sum_{j=0}^{n} r_j t^j = (1-t)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k\Big)^2 \Big(\sum_{j=0}^{n} r_j t^j\Big) = (1-\beta_1) + (1-\beta_1) h (1-t)\Big(\sum_{j=n-s+1}^{\infty} t^j\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k\Big)$$

$$- (1-\beta_1)(1-t)\Big(\sum_{\nu=n-s+1}^{n} c_{n-\nu} t^\nu\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k\Big) + O(t^{n+1}) = (1-\beta_1)$$

$$+ (1-\beta_1) h t^{n-s+1}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k\Big) - (1-\beta_1)\Big(c_{s-1} t^{n-s+1} + \sum_{\nu=n-s+2}^{n} (c_{n-\nu} - c_{n+1-\nu}) t^\nu\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k\Big)$$

$$+ O(t^{n+1}) = (1-\beta_1) + (1-\beta_1)(h - c_{s-1}) \sum_{j=n-s+1}^{\infty} c_{j+s-n-1} t^j$$

$$- (1-\beta_1) \sum_{j=n-s+2}^{n} \Big(\sum_{\nu=n-s+2}^{j} (c_{n-\nu} - c_{n+1-\nu}) c_{j-\nu}\Big) t^j + O(t^{n+1}).$$

Сравнивая коэффициенты при t^j, получаем, что при $j = n-s+1, \ldots, n$ коэффициенты $r_j = (1-\beta_1)(h-c_{s-1})c_{j+s-n-1} - (1-\beta_1)\sum_{\nu=n-s+2}^{j}(c_{n-\nu} - c_{n+1-\nu})c_{j-\nu}$. Этим доказана формула (0.28), и из (1.1) имеем $r_j \leq 0$. Отсюда, из (0.27) и (4.1) вытекает (0.26). Более того, если $h \in [c_s, c_{s-1})$, то из (0.28) следует, что $r_j < 0$ при всех $j = n-s+1, \ldots, n$. Если же $h = c_{s-1}$, то $r_{n-s+1} = 0$ и $r_j < 0$ при всех $j = n-s+2, \ldots, n$. Теорема 4 полностью доказана.

5. Доказательство теорем 5 и 6

Пусть натуральное число n зафиксировано и $m = n - [n/2]$.

Доказательство теоремы 5. Мы докажем несколько больше, чем сформулировано в теореме 5. Пусть число h удовлетворяет условию (1.1), т. е. $h \in [c_s,\, c_{s-1}]$ при некотором $s = 1, \dots, [n/2]$. Положим $\lambda_j = \lambda_j^n(h)$, $x_j = x_j^n(h)$ при $j = 1, \dots, m$ и $\beta_k = \beta_k^n(h)$ при $k = 1, \dots, n$. Тогда для любого неотрицательного тригонометрического полинома T_n вида (0.1), который удовлетворяет условию (0.29) и условию

$$a_k \geq 1 \quad \text{при всех} \quad k = n - s + 1, \dots, n, \tag{5.1}$$

в обозначениях (0.25) и (0.21) в силу теорем 3 и 4 имеем

$$0 \leq \sum_{j=1}^{m} \lambda_j T_n(x_j) = a_0\beta_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k\beta_k$$

$$= a_0 + \beta_1 \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} a_k(\beta_k - \beta_1) \leq a_0 + \beta_1\gamma_n(h) + \sum_{k=1}^{n}(\beta_k - \beta_1). \tag{5.2}$$

В (5.2) в качестве полинома T_n можно взять полином $V_n(h)$. В этом случае в (5.2) по теоремам 1–4 всюду будут знаки равенства. Поэтому $\beta_1\gamma_n(h) + \sum_{k=1}^{n}(\beta_k - \beta_1) = -a_0^n(h)$. Отсюда и из (5.2) для любого неотрицательного тригонометрического полинома T_n вида (0.1), который удовлетворяет условиям (0.29) и (5.1),

$$a_0 \geq a_0^n(h). \tag{5.3}$$

Предположим, что в (5.3) имеет место знак равенства. В этом случае в (5.2) всюду должны быть знаки равенства. В частности, $T_n(x_j) = 0$ при всех $j = 1, \dots, m$, причем все нули двойные, поскольку полином T_n неотрицателен. Значит, $T_n = C\,V_n(h)$ для некоторой постоянной $C \geq 0$. Поскольку $a_0 = a_0^n(h)$, то $C = 1$, и полином $T_n = V_n(h)$. Теорема 5 полностью доказана. □

Используя те же обозначения, что и при доказательстве теоремы 5, рассмотрим более подробно случай $h = c_0 = 1$. В этом случае $s = 1$ в (1.1), и из (0.21) и (0.28) получаем $\beta_k = \beta_k^n(1) = -1/n$ при всех $k = 1, \dots, n$ и для любого неотрицательного тригонометрического полинома T_n вида (0.1) из (5.2) имеем $0 \leq \sum_{j=1}^{m} n\lambda_j T_n(x_j) = na_0 - \sum_{k=1}^{n} a_k$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq na_0 \tag{5.4}$$

для любого неотрицательного тригонометрического полинома T_n вида (0.1). Таким образом, теорема 5 по сути обобщает и уточняет известный [5, отдел 6, § 7, задача 50] результат Фейера. Заметим, что равенство в (5.4) возможно в силу (0.12) только для полинома $T_n = C\,F_n$ для некоторой постоянной $C \geq 0$.

Доказательство леммы. Из (0.10), (1.6) и (1.5) в силу (1.1) имеем

$$\gamma_n(h) = \frac{1}{2}(4sc_s + (n+1-2s)h)^2 - \frac{1}{2}(n+1-2s)h^2 - \sum_{j=0}^{s-1} c_j^2,$$

откуда сразу следует (0.30). Из (0.30) видим, что функция $\gamma_n(h)$ строго возрастает на отрезке $[c_s, c_{s-1}]$ от значения γ_s^n до γ_{s-1}^n. Поэтому верно (0.31), и $\gamma_n(h)$ строго возрастает и непрерывна на отрезке $[c_{[n/2]},\, c_0]$. Лемма доказана. □

Отметим, что при $\gamma \in [\gamma_s^n,\, \gamma_{s-1}^n]$ из (0.30) и уравнения $\gamma = \gamma_n(h)$ получаем (0.34).

Доказательство теоремы 6. Пусть сначала $\gamma \in [\gamma_s^n, \gamma_{s-1}^n]$ при некотором $s = 1, \dots, [n/2]$. Тогда $h = h_n(\gamma) \in [c_s, c_{s-1}]$. Поэтому для любого полинома $T_n \in \mathbb{W}_n$ вида (0.1) с условием $\sum_{k=1}^n a_k \ge \gamma = \gamma_n(h)$, если $T_n \ne V_n^\gamma = V_n(h)$, справедлива оценка $a_0 > a_0^n(h)$. Отсюда следует, что в экстремальной задаче (0.33) полином V_n^γ является единственным экстремальным полиномом и $K_n(\gamma) = a_0^n(h_n(\gamma))$. Из (1.5) вытекает (0.35). Из равенства (0.30) получаем

$$\gamma = 8(sc_s)^2 - \sum_{k=0}^{s-1} c_k^2 + 4s(n+1-2s)c_s h_n(\gamma) + \frac{1}{2}(n+1-2s)(n-2s)h_n^2(\gamma).$$

Дифференцируя это равенство по γ, имеем $1 = (n+1-2s)(4sc_s + (n-2s)h_n(\gamma))h_n'(\gamma)$. Отсюда, из (0.35) и из (0.21) получаем

$$K_n'(\gamma) = (n+1-2s)h_n(\gamma)h_n'(\gamma) = \frac{h_n(\gamma)}{4sc_s + (n-2s)h_n(\gamma)} = -\beta_1^n(h_n(\gamma)) \tag{5.5}$$

при всех $\gamma \in [\gamma_s^n, \gamma_{s-1}^n]$. Из (5.5) сразу получаем и (0.36), и непрерывность, и в силу (0.31) строгое возрастание функции $K_n'(\gamma) = -\beta_1^n(h_n(\gamma))$ на отрезке $[\psi(n), n(n+1)/2]$.

Если же $\gamma > n(n+1)/2$, то полином (0.32) является единственным экстремальным полиномом в экстремальной задаче (0.33) и $K_n(\gamma) = \gamma/n$, поскольку для любого неотрицательного тригонометрического полинома T_n вида (0.1) с условием $\sum_{k=1}^n a_k \ge \gamma$ из результата Фейера (5.4) вытекает, что $a_0 \le \gamma/n$, причем равенство возможно только для полиномов вида $T_n = C\,F_n$, где $C/2 = \gamma/n$, т. е. для полинома (0.32). В частности, из приведенного доказательства вытекает, что при $\gamma \ge \psi(n)$ функция $K_n(\gamma)$ непрерывна, выпукла вниз, строго возрастает и полином V_n^γ является единственным экстремальным полиномом и в экстремальной задаче

$$K_n(\gamma) = \min\Big\{a_0\colon T_n \in \mathbb{W}_n, \sum_{k=1}^n a_k \ge \gamma\Big\}.$$

Таким образом, последняя задача имеет единственный экстремальный полином при $\gamma \ge n$, поскольку при $\gamma \in [n, \psi(n)]$ таковым (см. [1]) является полином (0.3). Теорема 6 доказана.

6. Доказательство теоремы 7

Пусть натуральное число n зафиксировано.

Доказательство теоремы 7. Прежде всего рассмотрим вспомогательную функцию $g(a_1, \dots, a_n) = -\min_x \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx)$ от переменных $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Для любых действительных чисел $x, a_1, \dots, a_n, a_1^*, \dots, a_n^*$ имеем $-g(a_1, \dots, a_n) \le \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) \le \sum_{k=1}^n a_k^* \cos(kx) + \sum_{k=1}^n |a_k - a_k^*|$. Отсюда следует, что $-g(a_1, \dots, a_n) \le -g(a_1^*, \dots, a_n^*) + \sum_{k=1}^n |a_k - a_k^*|$. Поэтому всегда $|\,g(a_1, \dots, a_n) - g(a_1^*, \dots, a_n^*)\,| \le \sum_{k=1}^n |a_k - a_k^*|$, т. е. g удовлетворяет условию Липшица на $\mathbb{R}^n$ и, в частности, непрерывна. Полином вида (0.1) является неотрицательным тогда и только тогда, когда $a_0 \ge g(a_1, \dots, a_n)$. Пусть

$$B_n(\gamma) = \big\{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n\colon a_1 \ge 1, \dots, a_n \ge 1, a_1 + \dots + a_n = \gamma\big\}.$$

Тогда при $\gamma \ge n$ экстремальную задачу (0.33) можно записать в виде

$$K_n(\gamma) = \min\{\,g(a_1, \dots, a_n)\colon (a_1, \dots, a_n) \in B_n(\gamma)\,\},$$

т. е. $K_n(\gamma)$ есть минимум значений непрерывной функции g на компакте $B_n(\gamma)$. Поэтому экстремальный полином в задаче (0.33) существует для каждого $\gamma \ge n$. Выпуклость функции $K_n(\gamma)$ доказывается довольно легко. Действительно, пусть числа $\gamma_1 \ge n$, $\gamma_2 \ge n$ и $K_n(\gamma_1) + \sum_{k=1}^n a_k^{\gamma_1} \cos(kx)$, $K_n(\gamma_2) + \sum_{k=1}^n a_k^{\gamma_2} \cos(kx)$ — соответствующие экстремальные полиномы в задаче (0.33). Тогда при любом $\theta \in [0,1]$ полином $(\theta K_n(\gamma_1) + (1-\theta)K_n(\gamma_2)) + \sum_{k=1}^n (\theta a_k^{\gamma_1} +$

$(1-\theta)a_k^{\gamma_2})\cos(kx)$ удовлетворяет требованиям задачи (0.33), и поэтому $K_n(\theta\gamma_1+(1-\theta)\gamma_2)\le\theta K_n(\gamma_1)+(1-\theta)K_n(\gamma_2)$, т. е. функция $K_n(\gamma)$ выпукла вниз при $\gamma\ge n$, а значит, и непрерывна при $\gamma>n$. Поскольку в точке $\gamma=\psi(n)$ она (см. [1]) принимает наименьшее значение, то ее левая производная в точке $\gamma=\psi(n)$ не положительна и на промежутке $(n,\psi(n)]$ не убывает. Так как (см. [1]) экстремальный полином (0.3), дающий наименьшее значение свободного члена, единствен, то в любой сколь угодно малой левой окрестности точки $\gamma=\psi(n)$ функция $K_n(\gamma)$ не может быть константой. Следовательно, она не может быть константой ни на каком интервале. Поэтому она строго убывает на отрезке $[n,\,\psi(n)]$. Теперь перейдем к доказательству непрерывности функции $K_n(\gamma)$ в точке $\gamma=n$, где $n\ge 3$. При $\gamma>n$ в задаче (0.33) существует экстремальный полином $K_n(\gamma)+\sum_{k=1}^n a_k^\gamma\cos(kx)$. Для каждого $k=1,\dots,n$ имеем $n-1+a_k^\gamma\le\sum_{k=1}^n a_k^\gamma=\gamma$. Значит, $a_k^\gamma-1\in[0,\gamma-n]$ и при $\gamma\to n+0$ коэффициент $a_k^\gamma\to 1$. Поскольку при любом x полином $K_n(\gamma)+\sum_{k=1}^n a_k^\gamma\cos(kx)\ge 0$, то в пределе получим $K_n(n+0)+\sum_{k=1}^n\cos(kx)\ge 0$. Поэтому $K_n(n+0)\ge K_n(n)$. Но $K_n(n)\ge K_n(n+0)$ в силу монотонности. Поэтому $K_n(n+0)=K_n(n)$, т. е. функция $K_n(\gamma)$ непрерывна в точке $\gamma=n$. Теорема 7 полностью доказана. □

Пусть $n=3$. При $3\le\gamma\le\psi(3)=3+1/4$ положим $v_\gamma=\arccos t_\gamma$, где $t_\gamma=(\sqrt{16-3\gamma}-1)/6$. Тогда $4t_\gamma\ge 1$, и в силу (0.37) и (0.38) получаем

$$V_3^\gamma(x)=2(\cos x-t_\gamma)^2(2\cos x+4t_\gamma+1)\ge 0$$

и $\cos v_\gamma-\cos(kv_\gamma)<0$ при $k=2,\dots,n$. Поэтому для любого полинома $T_n\in\mathbb{W}_n$ вида (0.1), который удовлетворяет условию $\sum_{k=1}^n a_k=\gamma$, имеем $0\le T_n(v_\gamma)=a_0+\gamma\cos v_\gamma+\sum_{k=1}^n a_k(\cos(kv_\gamma)-\cos v_\gamma)\le a_0+\gamma\cos v_\gamma+\sum_{k=1}^n(\cos(kv_\gamma)-\cos v_\gamma)$, причем для полинома $V_n^\gamma(x)$ здесь всегда равенства. Следовательно, $a_0\ge K_n(\gamma)$ и равенство возможно только при условиях $T_n(v_\gamma)=0$ и $a_k=1$ при всех $k=2,\dots,n$. Тогда $a_1=\gamma-n+1$, и полином $T_n=V_n^\gamma$, т. е. полином (0.37) является единственным экстремальным полиномом задачи (0.33).

Аналогично, если $n=4$ и $4\le\gamma\le\psi(4)=4+3/8$, положим $v_\gamma=\arccos t_\gamma$, где использовано обозначение (0.40). Тогда в силу (0.39) и (0.40) получаем

$$V_4^\gamma(x)=(\cos x-t_\gamma)^2\left(2(2\cos x+2t_\gamma+1/2)^2+(4t_\gamma+1/2)^2-27/4\right)\ge 0$$

и $\cos v_\gamma-\cos(kv_\gamma)<0$ при $k=2,\dots,n$. Далее, дословно повторяя предыдущее доказательство, только считая, что $n=4$, видим, что полином (0.39) является единственным экстремальным полиномом задачи (0.33).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белов А.С.** Об одной экстремальной задаче о минимуме тригонометрического полинома // Изв. РАН. Сер. мат. 1993. Т. 57, № 6. С. 212–226.
2. **Белов А.С.** Об экстремальных задачах на множестве неотрицательных тригонометрических полиномов // Современные проблемы теории функций и их приложения: тез. докл. 12-й Сарат. зимн. шк. Саратов: Изд-во “Колледж”, 2004. С. 19–21.
3. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965. 616 с.
4. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965. 538 с.
5. **Полиа Г., Сегё Г.** Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2. М.: Наука, 1978. 432 с.

Белов Александр Сергеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Ивановский государственный университет
e-mail: asbel@ivanovo.ac.ru

Поступила 27.10.2010

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 3 2011

УДК 517.518.86

НЕСКОЛЬКО ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ[1]

М. В. Дейкалова

Обсуждаются три взаимосвязанные экстремальные задачи на множестве $\mathcal{P}_{n,m}$ алгебраических многочленов заданного порядка n на единичной сфере $\mathbb{S}^{m-1}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ размерности $m \geq 2$. (1) Норма функционала $F(\eta) = F_h P_n = \int_{\mathbb{G}(\eta)} P_n(x)dx$, являющегося интегралом по сферическому слою $\mathbb{G}(\eta) = \{x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{S}^{m-1} \colon h' \leq x_m \leq h''\}$, определяемому парой вещественных чисел $\eta = (h', h'')$, $-1 \leq h' < h'' \leq 1$, на множестве $\mathcal{P}_{n,m}$ с нормой пространства $L(\mathbb{S}^{m-1})$ суммируемых функций на сфере. (2) Наилучшее приближение в $L_\infty(\mathbb{S}^{m-1})$ характеристической функции χ_η слоя $\mathbb{G}(\eta)$ подпространством $\mathcal{P}^{\perp}_{n,m}$ функций из $L_\infty(\mathbb{S}^{m-1})$, ортогональных пространству многочленов $\mathcal{P}_{n,m}$. (3) Наилучшее приближение в пространстве $L(\mathbb{S}^{m-1})$ функции χ_η самим пространством многочленов $\mathcal{P}_{n,m}$. Приведено решение всех трех задач для значений h', h'', являющихся соседними корнями многочлена одного переменного порядка $n+1$, наименее уклоняющегося от нуля в пространстве $L^\phi_1(-1,1)$ на интервале $(-1,1)$ с ультрасферическим весом $\phi(t) = (1-t^2)^\alpha$, $\alpha = (m-3)/2$. Исследованы соответствующие одномерные задачи в пространстве функций, суммируемых на $(-1,1)$ с произвольным, необязательно ультрасферическим весом.

Ключевые слова: евклидова сфера, характеристическая функция сферического слоя, алгебраические многочлены, аппроксимация на сфере.

M. V. Deikalova. Several extremal approximation problems for the characteristic function of a spherical layer.

We discuss three related extremal problems on the set $\mathcal{P}_{n,m}$ of algebraic polynomials of a given degree n on the unit sphere $\mathbb{S}^{m-1}$ of the Euclidean space $\mathbb{R}^m$ of dimension $m \geq 2$. (1) The norm of the functional $F(\eta) = F_h P_n = \int_{\mathbb{G}(\eta)} P_n(x)dx$, which is equal to the integral over the spherical layer $\mathbb{G}(\eta) = \{x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{S}^{m-1} \colon h' \leq x_m \leq h''\}$ defined by a pair of real numbers $\eta = (h', h'')$, $-1 \leq h' < h'' \leq 1$, on the set $\mathcal{P}_{n,m}$ with the norm of the space $L(\mathbb{S}^{m-1})$ of functions summable on the sphere. (2) The best approximation in $L_\infty(\mathbb{S}^{m-1})$ of the characteristic function χ_η of the layer $\mathbb{G}(\eta)$ by the subspace $\mathcal{P}^{\perp}_{n,m}$ of functions from $L_\infty(\mathbb{S}^{m-1})$ that are orthogonal to the space of polynomials $\mathcal{P}_{n,m}$. (3) The best approximation in the space $L(\mathbb{S}^{m-1})$ of the function χ_η by the space of polynomials $\mathcal{P}_{n,m}$. We present the solution of all three problems for the values h' and h'' which are neighboring roots of the polynomial in a single variable of degree $n+1$ that deviates the least from zero in the space $L^\phi_1(-1,1)$ on the interval $(-1,1)$ with ultraspherical weight $\phi(t) = (1-t^2)^\alpha$, $\alpha = (m-3)/2$. We study the respective one-dimensional problems in the space of functions summable on $(-1,1)$ with arbitrary not necessary ultraspherical weight.

Keywords: Euclidean sphere, characteristic function of a spherical layer, algebraic polynomials, approximation on a sphere.

1. Пусть $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, есть евклидово пространство со скалярным произведением

$$xy = \sum_{k=1}^{m} x_k y_k, \qquad x = (x_1, \ldots, x_m), \qquad y = (y_1, \ldots, y_m),$$

и нормой $|x| = \sqrt{xx}$. При $r > 0$ рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^m$ шар $\mathbb{B}^m(r) = \{x \in \mathbb{R}^m \colon |x| \leq r\}$ и сферу $\mathbb{S}^{m-1}(r) = \{x \in \mathbb{R}^m \colon |x| = r\}$ радиуса r с центром в начале координат; единичные шар и сферу $(r = 1)$ будем обозначать соответственно через $\mathbb{B}^m$ и $\mathbb{S}^{m-1}$. С помощью пары чисел

$$\eta = (h', h''), \qquad -1 \leq h' < h'' \leq 1,$$

определим сферический слой

$$\mathbb{G}(\eta) = \{x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{S}^{m-1} \colon h' \leq x_m \leq h''\} \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00462) и Аналитической ведомственной целевой программы “Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2011 гг.)” (проект 2.1.1/14118).

с центром в “северном полюсе” $e_m = (0, \dots, 0, 1)$ сферы. В случае $h'' = 1,\ h' = h,\ -1 < h < 1$, множество (1) является сферической шапочкой

$$\mathbb{C}(h) = \{x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{S}^{m-1} \colon x_m \geq h\}.$$

Сделаем несколько замечаний относительно рассматриваемых в данной работе мер и интегралов. На множествах $\mathbb{R}^k, \mathbb{B}^k(r)$ и $\mathbb{S}^{k-1}(r)$ $(1 \leq k \leq m,\ r > 0)$ рассматривается классическая мера Лебега (соответствующей размерности), и для измеримого подмножества E этих множеств символом $|E|$ обозначается (соответствующая) мера множества E. Для измеримой, суммируемой на E функции f ее интеграл (Лебега) по множеству E будет записываться в виде $\int_E f(x)dx$. Впрочем, ниже в большинстве случаев интегралы можно понимать в римановском смысле (относительно соответствующей меры Жордана). Пусть $L(E) = L_1(E)$ есть пространство функций, измеримых и суммируемых на E, наделенное нормой $\|f\|_{L(E)} = \int_E |f(x)|dx$. На множестве E мы будем рассматривать еще пространство $L_\infty(E)$ измеримых существенно ограниченных функций с нормой $\|f\|_{L_\infty(E)} = \operatorname{ess\,sup}\{|f(x)| \colon x \in E\}$; это пространство является сопряженным для $L(E)$.

Обозначим через $\mathcal{P}_{n,m}$ множество алгебраических многочленов

$$P_n(x) = \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_m \leq n, \\ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}_+^m}} c_\alpha x^\alpha,$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m}, \qquad x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m,$$

степени (не выше) n от m переменных с вещественными коэффициентами c_α. С помощью пары вещественных чисел $\eta = (h', h'')$, $-1 \leq h' < h'' \leq 1$, определим в пространстве $\mathcal{P}_{n,m}$ линейный функционал $F = F(\eta)$ формулой

$$F(\eta)P_n = \int\limits_{\mathbb{G}(\eta)} P_n(x)\, dx, \qquad P_n \in \mathcal{P}_{n,m}. \tag{2}$$

В данной работе нас интересует норма $\lambda_{n,m}(\eta)$ функционала (2) на пространстве $\mathcal{P}_{n,m}$ с нормой пространства $L(\mathbb{S}^{m-1})$, т. е. величина

$$\lambda_{n,m}(\eta) = \sup\{|F(\eta)P_n| \colon P_n \in \mathcal{P}_{n,m},\ \|P_n\|_{L(\mathbb{S}^{m-1})} \leq 1\};$$

отметим, что $\lambda_{n,m}(\eta)$ является наименьшей константой в неравенстве

$$|F(\eta)P_n| \leq \lambda_{n,m}(\eta) \|P_n\|_{L(\mathbb{S}^{m-1})}, \qquad P_n \in \mathcal{P}_{n,m}. \tag{3}$$

Многочлен $P_n^* \in \mathcal{P}_{n,m},\ P_n^* \not\equiv 0$, называют экстремальным в задаче (3), если на этом многочлене неравенство (3) обращается в равенство. Из свойства линейности функционала (2) следует, что если многочлен P_n^* является экстремальным, то для любой константы $c \neq 0$ многочлен cP_n^* также является экстремальным.

Функционал (2) определяется характеристической функцией

$$\chi_\eta(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{G}(\eta), \\ 0, & x \notin \mathbb{G}(\eta) \end{cases} \tag{4}$$

сферического слоя $\mathbb{G}(\eta)$, а именно

$$F(\eta)P_n = \int\limits_{\mathbb{S}^{m-1}} \chi_\eta(x) P_n(x)\, dx, \qquad P_n \in \mathcal{P}_{n,m}.$$

Пусть $\mathcal{P}_{n,m}^{\perp}$ есть подпространство функций из $L_\infty(\mathbb{S}^{m-1})$, ортогональных пространству многочленов $\mathcal{P}_{n,m}$, т. е. множество всех функций $\varphi \in L_\infty(\mathbb{S}^{m-1})$, обладающих свойством

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{m-1}} \varphi(x)P_n(x)\,dx = 0, \qquad P_n \in \mathcal{P}_{n,m}.$$

Рассмотрим наилучшее приближение

$$\omega_{n,m}(\eta) = \omega(\chi_\eta, \mathcal{P}_{n,m}^{\perp}) = \inf\{\|\chi_\eta - \varphi\|_{L_\infty(\mathbb{S}^{m-1})} \colon \varphi \in \mathcal{P}_{n,m}^{\perp}\} \tag{5}$$

в $L_\infty(\mathbb{S}^{m-1})$ функции χ_η подпространством $\mathcal{P}_{n,m}^{\perp}$. Функцию $\varphi^* \in \mathcal{P}_{n,m}^{\perp}$, на которой достигается нижняя грань в (5), называют экстремальной в задаче (5).

Впервые задачи типа (3) и (5) изучал Л. В. Тайков [1; 2] на множестве $\mathcal{T}_n$ тригонометрических полиномов

$$f_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

порядка (не выше) n с вещественными коэффициентами в связи с исследованием наилучшей константы $c(n)$ в неравенстве типа Джексона — Никольского

$$\|f_n\|_{C_{2\pi}} \le c(n)\|f_n\|_{L_{2\pi}}, \qquad f_n \in \mathcal{T}_n,$$

между $C_{2\pi}$ и $L_{2\pi}$ нормами

$$\|f_n\|_{C_{2\pi}} = \max\{|f_n(t)| \colon t \in \mathbb{R}\}, \qquad \|f_n\|_{L_{2\pi}} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f_n(t)|\,dt$$

тригонометрических полиномов заданного порядка. Л. В. Тайков вычислил норму $\tilde{c}(n)$ функционала

$$Ff_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi/(2(n+1))}^{\pi/(2(n+1))} f_n(t)\,dt, \qquad f_n \in \mathcal{T}_n,$$

на подпространстве $\mathcal{T}_n$ с нормой пространства $L_{2\pi}$, т. е. нашел наименьшую константу $\tilde{c}(n)$ в неравенстве

$$|Ff_n| \le \tilde{c}(n)\|f_n\|_{L_{2\pi}}, \qquad f_n \in \mathcal{T}_n; \tag{6}$$

а именно он доказал, что *при* $n \ge 1$ *справедливы следующие утверждения*:

1) *имеет место равенство*

$$\tilde{c}(n) = \frac{1}{2};$$

2) *полином*

$$\widetilde{f}_n(t) = \frac{\cos(n+1)t}{\cos t - \cos(\pi/(2(n+1)))}$$

является экстремальным в неравенстве (6).

Л. В. Тайков [1; 2] получил этот результат (а также ряд других результатов) с привлечением соответствующей двойственной задачи типа (5). В данной работе для исследования наилучшей константы в неравенстве (3) будет применен аналогичный подход.

Пусть ρ_{n+1} есть алгебраический многочлен (со старшим коэффициентом, равным 1), наименее уклоняющийся от нуля в пространстве $L_1^{\phi}(-1,1)$ функций, суммируемых на интервале $(-1,1)$ с ультрасферическим весом

$$\phi(t) = \phi_m(t) = (1-t^2)^{\alpha}, \qquad \alpha = \alpha(m) = \frac{m-3}{2}. \tag{7}$$

Известно, что все $n+1$ нулей $t_k,\ 1 \le k \le n+1$, многочлена ρ_{n+1} простые и лежат на $(-1,1)$; занумеруем их в порядке убывания так, что $t_k < t_{k-1},\ 2 \le k \le n+1$. Удобно добавить к множеству нулей концы отрезка, положив $t_0 = 1$, $t_{n+2} = -1$. Поскольку вес (7) — четная функция, то нули многочлена ρ_{n+1} расположены симметрично относительно нуля и, значит, $t_{n+2-k} = -t_k,\ 0 \le k \le n+2$.

Введем обозначение пар

$$\eta_k = (t_{k+1}, t_k), \qquad 0 \le k \le n+1, \tag{8}$$

и рассмотрим соответствующий каждой из этих пар точек сферический слой

$$\mathbb{G}_k = \mathbb{G}(\eta_k) = \{x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{S}^{m-1} \colon t_{k+1} \le x_m \le t_k\}. \tag{9}$$

При $1 \le k \le n$ определим многочлен одного переменного порядка $n-1$ формулой

$$p^*_{n-1,k}(t) = \frac{\rho_{n+1}(t)}{(t - t_{k+1})(t - t_k)}. \tag{10}$$

Одним из основных в данной работе является следующее утверждение.

Теорема 1. *При всех $m \ge 3,\ n \ge 1$ для $\eta_k = (t_{k+1}, t_k),\ 1 \le k \le n$, справедливы следующие утверждения*:

1) *имеют место равенства*

$$\lambda_{n-1,m}(\eta_k) = \omega_{n-1,m}(\eta_k) = \frac{1}{2}, \tag{11}$$

$$\lambda_{n,m}(\eta_k) = \omega_{n,m}(\eta_k) = \frac{1}{2}; \tag{12}$$

2) *многочлен* (10) *и функция*

$$\varphi^*_{n,k} = \frac{(-1)^k}{2} \operatorname{sign} \rho_{n+1}$$

как зональные функции одного переменного $t = x_m,\ x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{S}^{m-1}$, являются экстремальными соответственно в задачах (3) *и* (5) *для многочленов как порядка $n-1$, так и порядка n* (*т. е. как в* (11), *так и в* (12)).

В работе [3] доказано, что утверждения (12) имеют место при $k = 0$ и $k = n+1$. В частности, при $k = 0$ сферический слой (9) превращается в сферическую шапочку

$$\mathbb{C}(t_1) = \{x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{S}^{m-1} \colon x_m \ge t_1\}.$$

Положим

$$p^*_{n,0}(t) = \frac{\rho_{n+1}(t)}{t - t_1}.$$

В [3] доказано, что в данном случае многочлен $p^*_{n,0}$ и функция $\varphi^*_{n,0} = (1/2) \operatorname{sign} \rho_{n+1}$ как зональные функции одного переменного $t = x_m,\ x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{S}^{m-1}$, являются экстремальными соответственно в задачах (3) и (5). Впрочем, этот факт будет следовать из приведенных ниже лемм 3, 4 и теоремы 5.

В данной работе наряду с задачами (3) и (5) исследуется наилучшее приближение

$$e_{n,m}(\chi_\eta) = e(\chi_\eta, \mathcal{P}_{n,m})_{L(\mathbb{S}^{m-1})} = \inf\{\|\chi_\eta - P_n\|_{L(\mathbb{S}^{m-1})} \colon P_n \in \mathcal{P}_{n,m}\} \tag{13}$$

в пространстве $L(\mathbb{S}^{m-1})$ характеристической функции (4) слоя (1) подпространством $\mathcal{P}_{n,m}$ алгебраических многочленов.

Ниже в теоремах 2 и 3 будет приведено решение задачи (13) для значений параметров $h',\ h''$, заключенных между любыми двумя соседними точками $\{t_k\}_{k=0}^{n+2}$, т. е. удовлетворяющих условию

$$t_{k+1} \le h' < h'' \le t_k, \qquad 0 \le k \le n+1. \tag{14}$$

Теорема 2. *При всех $m \ge 3$, $n \ge 1$ для пары $\eta = (h', h'')$ значений параметров h', h'', удовлетворяющих условию* (14), *имеет место равенство*

$$e_{n,m}(\chi_\eta) = |\mathbb{S}^{m-2}| \int\limits_{h'}^{h''} \phi(t)\,dt = |\mathbb{G}(\eta)|$$

и многочлен $P \equiv 0$ является экстремальным.

Поскольку в условиях теоремы 2 экстремальным является многочлен, тождественно равный нулю, то можно утверждать, что при любом ν со свойством $0 \le \nu \le n$ имеет место равенство

$$e_{\nu,m}(\chi_\eta) = |\mathbb{S}^{m-2}| \int\limits_{h'}^{h''} \phi(t)\,dt = |\mathbb{G}(\eta)|.$$

Следующее утверждение дополняет теорему 2 в случае $h' = t_{k+1}$, $h'' = t_k$ при $1 \le k \le n$. А именно в нем указано более богатое множество экстремальных многочленов в классе многочленов порядка n и $n-1$. При $1 \le k \le n$ определим многочлен $q^*_{n-1,k}$ порядка $n-1$ формулой

$$q^*_{n-1,k}(t) = A\frac{\rho_{n+1}(t)}{(t-t_{k+1})(t-t_k)}, \tag{15}$$

где константа A выбрана из условия

$$0 \le q^*_{n-1,k}(t) \le 1, \qquad t \in (t_{k+1}, t_k).$$

Теорема 3. *При всех $m \ge 3$, $n \ge 1$ для $\eta_k = (t_{k+1}, t_k)$, $1 \le k \le n$, справедливы следующие утверждения*:

1) *имеют место равенства*

$$e_{n-1,m}(\chi_{\eta_k}) = e_{n,m}(\chi_{\eta_k}) = |\mathbb{S}^{m-2}| \int\limits_{t_{k+1}}^{t_k} \phi(t)\,dt = |\mathbb{G}(\eta_k)|;$$

2) *многочлены* (15) *как зональные функции одного переменного $t = x_m$, $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{S}^{m-1}$, являются экстремальными в задаче* (13) *для многочленов как порядка $n-1$, так и порядка n.*

При обосновании всех трех теорем будут использоваться результаты и соображения работ автора [3; 4], а также предшествующих работ Л. В. Тайкова [1; 2], А. Г. Бабенко и Ю. В. Крякина [5; 6].

2. В работе [3] обсуждались задачи вида (3) и (5) в более общей ситуации. Пусть E есть некоторое измеримое подмножество (ненулевой меры) пространства $\mathbb{R}^m$, $m \ge 1$, или сферы $\mathbb{S}^{m-1}(r)$, $m \ge 2$. Предположим, что υ — некоторая функция, измеримая, суммируемая, неотрицательная, почти всюду отличная от нуля на E, которая в дальнейшем будет называться весом. Обозначим через $L_1^\upsilon(E)$ (линейное) пространство измеримых на E функций f, для которых произведение $f\upsilon$ суммируемо на E; это есть банахово пространство относительно нормы (см., например, [7, гл. 3, § 4])

$$\|f\|_{L_1^\upsilon(E)} = \int\limits_E |f(x)|\upsilon(x)\,dx, \qquad f \in L_1^\upsilon(E).$$

Известно (см., например, [7, гл. 4, § 8, теорема 5]), что сопряженным для пространства $L_1^v(E)$ является пространство $L_\infty(E)$ измеримых, существенно ограниченных функций f на E с нормой

$$\|f\|_{L_\infty(E)} = \operatorname{ess\,sup}\{|f(x)|\colon x \in E\} = \inf\{M\colon |f(x)| \le M \text{ п. в. на } E\}, \qquad f \in L_\infty(E).$$

Пусть $\psi \in L_\infty(E)$ есть конкретная измеримая, ограниченная на E функция, а $\mathcal{F}$ — некоторое линейное (необязательно замкнутое) подпространство пространства $L_1^v(E)$. На множестве $\mathcal{F}$ рассмотрим (линейный) функционал

$$\Psi f = \int\limits_E \psi(x) f(x) v(x)\, dx, \qquad f \in \mathcal{F}. \tag{16}$$

Обозначим через $c(\Psi, \mathcal{F})$ наилучшую (т. е. наименьшую возможную) константу в неравенстве

$$|\Psi f| \le c(\Psi, \mathcal{F}) \|f\|_{L_1^v(E)}, \qquad f \in \mathcal{F}; \tag{17}$$

константу $c(\Psi, \mathcal{F})$ можно интерпретировать как норму функционала (16) на подпространстве $\mathcal{F} \subset L_1^v(E)$.

Обозначим через $\mathcal{F}^\perp = \mathcal{F}^\perp(v)$ подпространство функций из $L_\infty(E)$, ортогональных пространству $\mathcal{F}$ (с весом v), т. е. множество всех функций $\varphi \in L_\infty(E)$, обладающих свойством

$$\int\limits_E \varphi(x) f(x) v(x)\, dx = 0, \qquad f \in \mathcal{F}.$$

Рассмотрим наилучшее приближение

$$\omega(\psi, \mathcal{F}^\perp) = \inf\{\|\psi - \varphi\|_{L_\infty(E)}\colon \varphi \in \mathcal{F}^\perp\} \tag{18}$$

в $L_\infty(E)$ функции ψ подпространством $\mathcal{F}^\perp \subset L_\infty(E)$.

Следующее утверждение доказано в [3]; оно является аналогом соответствующего утверждения Л. В. Тайкова [1; 2]. В дальнейшем относительно измеримой на множестве E функции f будем говорить, что $f \not\equiv 0$, если множество $E(f \ne 0) = \{t \in E\colon f(t) \ne 0\}$ точек из E с ненулевыми значениями функции имеет ненулевую меру.

Лемма 1. *При сделанных предположениях справедливы следующие утверждения.*

1) *Имеет место равенство*

$$c(\Psi, \mathcal{F}) = \omega(\psi, \mathcal{F}^\perp).$$

2) *В задаче* (18) *существует экстремальная функция* $\varphi^* \in \mathcal{F}^\perp$. *Если подпространство* $\mathcal{F}$ *является конечномерным, то в задаче* (17) *также существует экстремальная функция* $f^* \in \mathcal{F}$.

3) *Функция* $\widetilde{f} \in \mathcal{F}$, $\widetilde{f} \not\equiv 0$, *и функция* $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{F}^\perp$ *являются экстремальными соответственно в задачах* (17) *и* (18) *в том и только том случае, если существует константа* R *такая, что выполняются следующие два условия*:

$$\psi - \widetilde{\varphi} = R \operatorname{sign} \widetilde{f} \qquad \text{п. в. на } E(\widetilde{f} \ne 0),$$

$$|\psi - \widetilde{\varphi}| \le |R| \qquad \text{п. в. на } E.$$

При этом обязательно $|R| = c(\Psi, \mathcal{F}) = \omega(\psi, \mathcal{F}^\perp)$.

3. Функция (4) является зональной, а именно

$$\chi_\eta(x)=\zeta_\eta(x_m),\qquad x=(x_1,\ldots,x_m),$$

где

$$\zeta_\eta(t)=\begin{cases}1, & t\in(h',h''),\\ 0, & t\notin(h',h'').\end{cases}\tag{19}$$

Из этого факта следует, что задачи (3) и (5) сводятся к одномерным задачам в пространстве $L_1^{\phi}(-1,1)$ функций, суммируемых на интервале $(-1,1)$ с ультрасферическим весом (7) (см. [3]). Обсудим вначале соответствующие одномерные задачи для произвольного, необязательно ультрасферического веса.

Пусть υ есть функция, суммируемая, неотрицательная, почти всюду отличная от нуля на $(-1,1)$, которую будем называть весом. Обозначим через $L_1^{\upsilon}(-1,1)$ пространство измеримых на $(-1,1)$ функций f, для которых произведение $f\upsilon$ суммируемо на $(-1,1)$; это есть банахово пространство относительно нормы

$$\|f\|_{L_1^{\upsilon}(-1,1)}=\int_{-1}^{1}|f(t)|\upsilon(t)\,dt,\qquad f\in L_1^{\upsilon}(-1,1).$$

Рассмотрим задачу о наилучшем приближении функции $\zeta\in L_1^{\upsilon}(-1,1)$ в пространстве $L_1^{\upsilon}(-1,1)$ множеством $\mathcal{P}_n=\mathcal{P}_{n,1}$ многочленов одного переменного порядка n. Задача состоит в вычислении величины

$$E_n^{\upsilon}(\zeta)=\inf\{\|\zeta-g_n\|_{L_1^{\upsilon}(-1,1)}\colon g_n\in\mathcal{P}_n\}\tag{20}$$

и нахождении экстремального многочлена, на котором достигается нижняя грань в (20). Отметим, что поскольку пространство $\mathcal{P}_n$ конечномерное, то экстремальный многочлен обязательно существует. Относительно задачи (20) хорошо известен следующий результат (см., например, [8, теорема 3.3.2; 9, гл. 1, § 6] или [10, гл. 3, § 10]).

Лемма 2. *Для того чтобы многочлен $\overline{g}_n\in\mathcal{P}_n$ являлся экстремальным в задаче* (20), *достаточно, а если функция ζ и многочлен $\overline{g}_n$ почти всюду на $(-1,1)$ не совпадают, то и необходимо, чтобы выполнялось следующее соотношение ортогональности*:

$$\int_{-1}^{1}f_n(t)\upsilon(t)\,\mathrm{sign}\,(\zeta(t)-\overline{g}_n(t))\,dt=0,\qquad f_n\in\mathcal{P}_n.$$

При этом

$$E_n^{\upsilon}(\zeta)=\left|\int_{-1}^{1}\zeta(t)\upsilon(t)\,\mathrm{sign}\,(\zeta(t)-\overline{g}_n(t))\,dt\right|.$$

Для конкретной функции $\zeta(t)=t^{n+1}$ задача (20) является известной задачей о многочлене, наименее уклоняющемся от нуля. В этом случае (20) принимает вид

$$E_{n+1}^{\upsilon}=\inf\{\|g_{n+1}\|_{L_1^{\upsilon}(-1,1)}\colon g_{n+1}\in\mathcal{P}_{n+1}^{1}\},\tag{21}$$

где $\mathcal{P}_{n+1}^{1}$ есть множество многочленов порядка $n+1$ со старшим коэффициентом, равным 1. Обозначим через ϱ_{n+1} экстремальный многочлен задачи (21), называемый многочленом порядка $n+1$, наименее уклоняющимся от нуля. В силу леммы 2 многочлен ϱ_{n+1} характеризуется тем, что его знак ортогонален с весом υ пространству $\mathcal{P}_n$, а точнее, обладает свойством

$$\int_{-1}^{1}g_n(t)\upsilon(t)\,\mathrm{sign}\,(\varrho_{n+1}(t))\,dt=0,\qquad g_n\in\mathcal{P}_n.\tag{22}$$

Все $n+1$ нулей $\tau_k,\ 1 \le k \le n+1$, многочлена ϱ_{n+1} простые и лежат на $(-1,1)$; занумеруем их в порядке убывания так, что $\tau_k < \tau_{k-1},\ 2 \le k \le n+1$. Добавим к множеству нулей концы отрезка, положив $\tau_0 = 1,\ \tau_{n+2} = -1$. Для пары точек (τ_{k+1}, τ_k) в этом разделе вновь будем использовать обозначение (8), так что

$$\eta_k = (\tau_{k+1}, \tau_k), \qquad 0 \le k \le n+1.$$

На множестве $\mathcal{P}_n$ многочленов (одного переменного порядка $n \ge 1$) рассмотрим линейный функционал

$$\Phi(\eta; \upsilon) g_n = \int\limits_{h'}^{h''} g_n(t)\upsilon(t)\,dt, \qquad g_n \in \mathcal{P}_n, \tag{23}$$

определяемый парой $\eta = (h', h'')$ вещественных чисел $-1 \le h' < h'' \le 1$ и весом υ. Обозначим через $\Lambda_n(\eta;\upsilon)$ наилучшую константу в неравенстве

$$|\Phi(\eta;\upsilon)g_n| \le \Lambda_n(\eta;\upsilon)\|g_n\|_{L_1^\upsilon(-1,1)}, \qquad g_n \in \mathcal{P}_n, \tag{24}$$

которую можно интерпретировать как норму функционала (23) на подпространстве $\mathcal{P}_n$ пространства $L_1^\upsilon(-1,1)$.

Обозначим через $\mathcal{P}_n^\perp(\upsilon)$ множество функций $\varphi \in L_\infty(-1,1)$, ортогональных пространству многочленов $\mathcal{P}_n$ с весом υ, т. е. обладающих свойством

$$\int\limits_{-1}^{1} \varphi(t) g_n(t)\upsilon(t)\,dt = 0, \qquad g_n \in \mathcal{P}_n.$$

Рассмотрим величину наилучшего приближения

$$\Omega_n(\eta;\upsilon) = \Omega(\zeta_\eta, \mathcal{P}_n^\perp(\upsilon)) = \inf\{\|\zeta_\eta - \varphi\|_{L_\infty(-1,1)} \colon \varphi \in \mathcal{P}_n^\perp(\upsilon)\} \tag{25}$$

в $L_\infty(-1,1)$ функции ζ_η подпространством $\mathcal{P}_n^\perp(\upsilon) \subset L_\infty(-1,1)$.

При $1 \le k \le n$ положим

$$p_{n-1,k}(t) = \frac{\varrho_{n+1}(t)}{(t-\tau_{k+1})(t-\tau_k)}\,. \tag{26}$$

Следующее утверждение является одним из основных в данной работе.

Теорема 4. *При $n \ge 1$ для $\eta_k = (\tau_{k+1}, \tau_k),\ 1 \le k \le n$, относительно задач* (24) *и* (25) *справедливы следующие утверждения*:

1) *имеют место равенства*

$$\Lambda_{n-1}(\eta_k;\upsilon) = \Omega_{n-1}(\eta_k;\upsilon) = \frac{1}{2}\,, \tag{27}$$

$$\Lambda_n(\eta_k;\upsilon) = \Omega_n(\eta_k;\upsilon) = \frac{1}{2}\,; \tag{28}$$

2) *многочлен* (26) *и функция*

$$\varphi_{n,k} = \frac{(-1)^k}{2}\operatorname{sign}\varrho_{n+1} \tag{29}$$

являются экстремальными соответственно в задачах (24) *и* (25) *для многочленов как порядка $n-1$, так и порядка n (т. е. как в* (27), *так и в* (28)).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Многочлен ϱ_{n+1} обладает свойством (22), т. е. его знак ортогонален на $(-1,1)$ с весом υ множеству $\mathcal{P}_n$ многочленов порядка n. Следовательно, функции (29) принадлежат пространствам $\mathcal{P}_n^{\perp}(\upsilon) \subset \mathcal{P}_{n-1}^{\perp}(\upsilon)$. Нетрудно понять, что всюду на $(-1,1)$, за исключением конечного числа точек, имеет место соотношение

$$\zeta_{\eta_k} - \varphi_{n,k} = \frac{(-1)^{k-1}}{2} \operatorname{sign} p_{n-1,k}.$$

В силу леммы 1 отсюда следуют все утверждения теоремы 4. □

Теорема 5. *При всех $n \ge 1$ утверждение* (28) *имеет место также для значений $k = 0$ и $k = n+1$. Экстремальными в задаче* (25) *являются функции*

$$\varphi_{n,0} = \frac{1}{2} \operatorname{sign} \varrho_{n+1}, \qquad k = 0,$$

$$\varphi_{n,n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \operatorname{sign} \varrho_{n+1}, \qquad k = n+1.$$

В задаче (24) *экстремальными являются многочлены*

$$p_{n,0}(t) = \frac{\varrho_{n+1}(t)}{t-\tau_1}, \qquad k = 0,$$

$$p_{n,n+1}(t) = \frac{\varrho_{n+1}(t)}{t-\tau_{n+1}}, \qquad k = n+1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу свойства (22) многочлена ϱ_{n+1} функции

$$\varphi_{n,0} = \frac{1}{2} \operatorname{sign} \varrho_{n+1}, \qquad \varphi_{n,n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \operatorname{sign} \varrho_{n+1}$$

принадлежат пространству $\mathcal{P}_n^{\perp}(\upsilon)$. Нетрудно понять, что всюду на $(-1,1)$, за исключением конечного числа точек, справедливы равенства

$$\zeta_{\eta_0} - \varphi_{n,0} = \frac{1}{2} \operatorname{sign}\, p_{n,0}, \qquad \zeta_{\eta_{n+1}} - \varphi_{n,n+1} = \frac{(-1)^n}{2} \operatorname{sign}\, p_{n,n+1}.$$

Воспользовавшись теперь леммой 1, получаем утверждение теоремы 5. □

Рассмотрим одномерную задачу о наилучшем приближении

$$E_n^{\upsilon}(\zeta_\eta) = \inf\{\|\zeta_\eta - g_n\|_{L_1^{\upsilon}(-1,1)} \colon g_n \in \mathcal{P}_n\} \tag{30}$$

функции (19) в $L_1^{\upsilon}(-1,1)$ множеством $\mathcal{P}_n$. Ниже в теоремах 6 и 7 будет приведено решение этой задачи для значений параметров h', h'', заключенных между любыми двумя соседними точками $\{\tau_k\}_{k=0}^{n+2}$, т. е. удовлетворяющих условию

$$\tau_{k+1} \le h' < h'' \le \tau_k, \qquad 0 \le k \le n+1. \tag{31}$$

Теорема 6. *При $n \ge 1$ для пары $\eta = (h', h'')$ значений параметров h', h'', удовлетворяющих условию* (31), *имеет место равенство*

$$E_n^{\upsilon}(\zeta_\eta) = \int_{h'}^{h''} \upsilon(t)\, dt \tag{32}$$

и многочлен $g_n \equiv 0$ является экстремальным в задаче (30).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого многочлена $g_n \in \mathcal{P}_n$ имеем

$$\|\zeta_\eta - g_n\|_{L_1^\upsilon(-1,1)} = \int\limits_{-1}^{1} |\zeta_\eta(t) - g_n(t)|\upsilon(t)\,dt \geq \left|\int\limits_{-1}^{1} \big(\operatorname{sign}\varrho_{n+1}(t)\big)\big(\zeta_\eta(t) - g_n(t)\big)\upsilon(t)\,dt\right|.$$

Применяя теперь свойство (22) и условие (31), получаем

$$\|\zeta_\eta - g_n\|_{L_1^\upsilon(-1,1)} \geq \left|\int\limits_{-1}^{1} \big(\operatorname{sign}\varrho_{n+1}(t)\big)\zeta_\eta(t)\upsilon(t)\,dt\right| = \int\limits_{h'}^{h''} \upsilon(t)\,dt.$$

Итак, для произвольного многочлена $g_n \in \mathcal{P}_n$ справедливо неравенство

$$\|\zeta_\eta - g_n\|_{L_1^\upsilon(-1,1)} \geq \int\limits_{h'}^{h''} \upsilon(t)\,dt.$$

На многочлене $g_n \equiv 0$ это неравенство обращается в равенство. Отсюда следует равенство (32) и экстремальность многочлена $g_n \equiv 0$. Теорема доказана. □

Очевидно, что в условиях теоремы 6 при любом ν, $0 \leq \nu \leq n$, имеет место равенство

$$E_\nu^\upsilon(\zeta_\eta) = \int\limits_{h'}^{h''} \phi(t)\,dt$$

и многочлен $g_\nu \equiv 0$ является экстремальным.

В случае $h' = \tau_{k+1}$, $h'' = \tau_k$ при $1 \leq k \leq n$ в задаче (30) имеется довольно богатое семейство экстремальных многочленов. При $1 \leq k \leq n$ определим многочлен $q_{n-1,k}$ одного переменного порядка $n-1$ формулой

$$q_{n-1,k}(t) = A\frac{\varrho_{n+1}(t)}{(t-\tau_{k+1})(t-\tau_k)}\,, \tag{33}$$

где константа A выбрана из условия

$$0 \leq q_{n-1,k}(t) \leq 1, \qquad t \in (\tau_{k+1}, \tau_k). \tag{34}$$

Теорема 7. *При $n \geq 1$ для $\eta_k = (\tau_{k+1}, \tau_k)$, $1 \leq k \leq n$, имеют место равенства*

$$E_{n-1}^\upsilon(\zeta_{\eta_k}) = E_n^\upsilon(\zeta_{\eta_k}) = \int\limits_{\tau_{k+1}}^{\tau_k} \upsilon(t)\,dt \tag{35}$$

и многочлен (33) *является экстремальным в задаче* (30) *для многочленов как порядка n, так и порядка $n-1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим вначале, что $n \geq 2$ и первое неравенство в условии (34) строгое, т. е. константа A выбрана так, что

$$0 < q_{n-1,k}(t) \leq 1, \qquad t \in (\tau_{k+1}, \tau_k).$$

В этих предположениях имеет место соотношение

$$\operatorname{sign}(\zeta_{\eta_k} - q_{n-1,k}) = (-1)^k \operatorname{sign}\varrho_{n+1}. \tag{36}$$

Поскольку $q_{n-1,k} \in \mathcal{P}_{n-1} \subset \mathcal{P}_n$, то из (36) в силу свойства (22) и леммы 2 следует утверждение (35) при сделанных предположениях.

При $n=1$ имеем
$$q_{n-1,k}(t)=q_{0,0}(t)=A.$$
При выборе константы A из условия $0<A<1$ проходят те же рассуждения, что и выше, причем
$$\|\zeta_{\eta_k}-A\|=\int\limits_{\tau_{k+1}}^{\tau_k}\upsilon(t)\,dt.$$
Случай $A=1$ получается отсюда предельным переходом при $A\to 1$.

Случай $A=0$ получается из предыдущих рассуждений предельным переходом при $A\to 0$ при всех $n\ge 1$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 7 не содержит решения задачи (30) для двух крайних ступенек отрезка, а точнее, для $\eta=\eta_k$ при $k=0$ и $k=n+1$. С помощью соображений работы [3] это можно сделать в существенно более общей ситуации — для ступенек (19), одним из концов которых является конец ± 1 отрезка, а вторым является произвольный нуль $\tau_k,\ 1\le k\le n+1$, многочлена ϱ_{n+1}, т. е. для пар $\eta=(h',h'')$ с $h'=\tau_k$, $h''=1$ и $h'=-1$, $h''=\tau_k$. Для ультрасферического веса (7) задача (30) во всех этих случаях была исследована в леммах 7 и 8 работы автора [3]. Используя те же соображения, нетрудно получить решение задачи (30) во всех перечисленных случаях уже для произвольного веса υ.

Обсудим случай $h''=1,\ h'=h\in(-1,1)$. В этой ситуации функция (19) принимает вид
$$\zeta_h(t)=\begin{cases}1, & t\in(h,1),\\ 0, & t\in(-1,h).\end{cases} \tag{37}$$
Нас интересует наилучшее приближение
$$E_n^{\upsilon}(\zeta_h)=\inf\{\|\zeta_h-g_n\|_{L_1^{\upsilon}(-1,1)}\colon g_n\in\mathcal{P}_n\} \tag{38}$$
функции (37) в пространстве $L_1^{\upsilon}(-1,1)$ множеством алгебраических многочленов порядка n. Относительно величины (38) справедливы следующие утверждения.

При всех $n\ge 1,\ 1\le k\le n+1$
$$E_{n-1}^{\upsilon}(\zeta_{\tau_k})_{L_1^{\upsilon}(-1,1)}=E_n^{\upsilon}(\zeta_{\tau_k})_{L_1^{\upsilon}(-1,1)}=\left|\int\limits_{\tau_k}^{1}\upsilon(t)\operatorname{sign}\varrho_{n+1}(t)\,dt\right|.$$
Более того, при $2\le k\le n+1$ экстремальным в (38) является многочлен $g_{n-1,k}$ порядка $n-1$, который интерполирует функцию ζ_{τ_k} в точках $\tau_\nu,\ 1\le\nu\le n+1,\ \nu\ne k$. При $k=1$ экстремальным в (38) является многочлен порядка n
$$g_{n,1}(t)=A\frac{\varrho_{n+1}(t)}{t-\tau_1}\,,$$
где константа A выбрана из условия $0\le g_{n,1}(t)\le 1$ для $t\in(\tau_1,1)$; в частности, экстремальным является многочлен $g_{n,1}\equiv 0$.

Отметим еще, что для единичного веса $\upsilon\equiv 1$ задача (38) при любом $h\in(-1,1)$ решена в работе автора [4].

4. Многомерные задачи (3) и (5) взаимосвязаны с одномерными задачами (24) и (25) для ультрасферического веса (7). А именно, как частный случай лемм 2 и 3 работы [3] справедливы следующие утверждения.

Лемма 3. *При всех $m \geq 3$, $n \geq 0$ для любых $\eta = (h', h'')$, $-1 \leq h' < h'' \leq 1$, справедливы следующие два утверждения.*

1) *Имеют место равенства*

$$\lambda_{n,m}(\eta) = \Lambda_n(\eta, \phi).$$

2) *Многочлен $g_n \in \mathcal{P}_n$, $g_n \not\equiv 0$, является экстремальным в задаче* (24) *для ультрасферического веса $\upsilon = \phi$ в том и только в том случае, если этот многочлен как зональный многочлен одного переменного $t = x_m$, $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{S}^{m-1}$, является экстремальным в задаче* (3).

Лемма 4. *При всех $m \geq 3$, $n \geq 0$ для любых $\eta = (h', h'')$, $-1 \leq h' < h'' \leq 1$, справедливы следующие два утверждения.*

1) *Имеют место равенства*

$$\omega_{n,m}(\eta) = \Omega_n(\eta, \phi).$$

2) *Функция $\varphi_n \in \mathcal{P}_n^{\perp}(\phi)$ является экстремальной в задаче* (25) *для веса $\upsilon = \phi$ в том и только в том случае, если эта функция как зональная функция одного переменного $t = x_m$, $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{S}^{m-1}$, является экстремальной в задаче* (5).

Утверждение теоремы 1 следует из двух последних лемм и теоремы 4.

5. Основной целью данного раздела является исследование наилучшего приближения

$$e_{n,m}(\chi_\eta) = e(\chi_\eta, \mathcal{P}_{n,m})_{L(\mathbb{S}^{m-1})} = \inf\{\|\chi_\eta - P_n\|_{L(\mathbb{S}^{m-1})} \colon P_n \in \mathcal{P}_{n,m}\} \tag{39}$$

в пространстве $L(\mathbb{S}^{m-1})$ характеристической функции (4) слоя (1) подпространством $\mathcal{P}_{n,m}$ алгебраических многочленов. Задаче (39) соответствует одномерная задача о наилучшем приближении

$$E_n^{\phi}(\zeta_\eta) = \inf\{\|\zeta_\eta - g_n\|_{L_1^{\phi}(-1,1)} \colon g_n \in \mathcal{P}_n\} \tag{40}$$

функции (19) в пространстве $L_1^{\phi}(-1, 1)$ суммируемых на отрезке функций с ультрасферическим весом (7) множеством $\mathcal{P}_n$, которая является задачей (30) для ультрасферического веса. Следующее утверждение содержится в лемме 5 работы [3].

Лемма 5. *При всех $m \geq 3$, $n \geq 0$ для любых $\eta = (h', h'')$, $-1 \leq h' < h'' \leq 1$, справедливы следующие два утверждения.*

1) *Имеет место равенство*

$$e_{n,m}(\chi_\eta) = \left|\mathbb{S}^{m-2}\right| E_n^{\phi}(\zeta_\eta).$$

2) *Многочлен $g_n \in \mathcal{P}_n$ является экстремальным в задаче* (40) *в том и только в том случае, если этот многочлен как зональный многочлен одного переменного $t = x_m$, $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{S}^{m-1}$, является экстремальным в задаче* (39).

Теоремы 2 и 3 следуют из леммы 5 и соответственно теорем 6 и 7.

6. Важную роль в приведенных выше результатах играют алгебраические многочлены со старшим коэффициентом, равным 1, наименее уклоняющиеся от нуля в пространстве $L_1^{\phi}(-1, 1)$ функций, суммируемых на интервале $(-1, 1)$ с ультрасферическим весом (7). В настоящее время явный вид таких многочленов известен лишь при $m = 2$ $(\alpha = -1/2)$ и $m = 3$ $(\alpha = 0)$.

Случай $m = 2$ $(\alpha = -1/2)$. С помощью многочлена Чебышева первого рода (порядка $n \geq 1$)

$$T_n(t) = \cos n\theta, \qquad \theta = \arccos t, \qquad t \in [-1, 1], \tag{41}$$

определим многочлен

$$\rho_n(t) = \frac{T_n(t)}{2^{n-1}}; \tag{42}$$

он имеет единичный старший коэффициент (см., например, [9, гл. 1, § 6; 11, гл. 3, § 1]). Как следует из более общего результата С. Н. Бернштейна [12, ч. 1, п. 2,3], именно этот многочлен наименее уклоняется от нуля в пространстве $L_1^{\phi}(-1,1)$ с весом Чебышева $\phi(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$ и величина наилучшего уклонения равна 2^{2-n}. В силу (41) нулями многочлена (42) являются точки

$$t_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}, \qquad 1 \le k \le n.$$

Случай $m = 3$ ($\alpha = 0$). Рассмотрим многочлен Чебышева второго рода (порядка $n \ge 1$)

$$U_n(t) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \qquad \theta = \arccos t, \qquad t \in [-1,1]. \tag{43}$$

Тогда многочлен

$$\rho_n(t) = \frac{U_n(t)}{2^n} \tag{44}$$

как раз и является многочленом порядка n, наименее уклоняющимся от нуля в пространстве $L(-1,1)$ с единичным весом, и величина наилучшего уклонения равна 2^{1-n} (см., например, [9, гл. 1, § 6; 11, гл. 3, § 6]). Впервые этот факт доказали А. Н. Коркин и Е. И. Золотарев [13]. В силу (43) нулями многочлена (44) являются точки

$$t_k = \cos\frac{k\pi}{n+1}, \qquad 1 \le k \le n.$$

В частности, при $m = 3$ теорема 1 принимает следующий вид.

Теорема 8. *В случае* $m = 3$ *при всех* $n \ge 1$ *для*

$$\eta_k = \Bigl(\cos\frac{(k+1)\pi}{n+2}, \cos\frac{k\pi}{n+2}\Bigr), \qquad 1 \le k \le n,$$

справедливы следующие утверждения:

1) *имеют место равенства*

$$\lambda_{n-1,3}(\eta_k) = \omega_{n-1,3}(\eta_k) = \frac{1}{2}, \tag{45}$$

$$\lambda_{n,3}(\eta_k) = \omega_{n,3}(\eta_k) = \frac{1}{2}; \tag{46}$$

2) *многочлен*

$$p_{n-1,k}(t) = \frac{U_{n+1}(t)}{\Bigl(t - \cos\frac{(k+1)\pi}{n+2}\Bigr)\Bigl(t - \cos\frac{k\pi}{n+2}\Bigr)}$$

и функция

$$\varphi_{n,k}(t) = \frac{(-1)^k}{2}\operatorname{sign} U_{n+1}(t)$$

как зональные функции одного переменного $t = x_3$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2$, *являются экстремальными соответственно в задачах* (3) *и* (5) *для многочленов как порядка* $n-1$, *так и порядка* n (*т. е. как в* (45), *так и в* (46)).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тайков Л.В.** Один круг экстремальных задач для тригонометрических полиномов // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20, № 3. С. 205–211.
2. **Тайков Л.В.** О наилучшем приближении ядер Дирихле // Мат. заметки. 1993. Т. 53, вып. 6. С. 116–121.
3. **Дейкалова М.В.** Функционал Тайкова в пространстве алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере // Мат. заметки. 2008. Т. 84, вып. 4. С. 532–551.
4. **Дейкалова М.В.** Интегральное приближение характеристической функции сферической шапочки // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 144–155.
5. **Бабенко А.Г., Крякин Ю.В.** О приближении ступенчатых функций тригонометрическими полиномами в интегральной метрике // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 12, № 1. С. 27–56.
6. **Бабенко А.Г., Крякин Ю.В.** Интегральное приближение характеристической функции интервала тригонометрическими полиномами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 19–37.
7. **Данфорд Н., Шварц Дж.Т.** Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во “УРСС”, 2004. 896 с.
8. **Корнейчук Н.П.** Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука, 1976. 320 с.
9. **Даугавет И.К.** Введение в теорию приближения функций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. 184 с.
10. **DeVore R.A., Lorentz G.G.** Constructive approximation // Grundlehren Math. Wiss. Vol. 303. Berlin: Springer-Verlag, 1993. 449 p.
11. **Суетин П.К.** Классические ортогональные многочлены. М.: Наука; Физматлит, 1979. 416 с.
12. **Бернштейн С.Н.** О многочленах, ортогональных на конечном отрезке // Собр. соч.: в 4 т. М.: Изд-во АН СССР, 1954. Т. 2. С. 7–106.
13. **Korkine A., Zolotareff G.** Sur un certain minimum // Коркин А.Н. Сочинения. Т. 1. СПб: С.-Петерб. ун-т, 1911. С. 329–349.

Дейкалова Марина Валерьевна
канд. физ.-мат. наук
доцент
Уральский федеральный университет
e-mail: Marina.Deikalova@usu.ru

Поступила 26.02.2011

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 3 2011

УДК 517.518

ВАРИАНТ ЗАДАЧИ ТУРАНА ДЛЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНО-ОПРЕДЕЛЕННЫХ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ[1]

А. В. Ефимов

Пусть $G_m(\mathbb{B})$ есть класс функций от m переменных с носителем в единичном шаре $\mathbb{B}$ с центром в начале координат, непрерывных на пространстве $\mathbb{R}^m$, нормированных условием $f(0) = 1$ и имеющих неотрицательное преобразование Фурье. В работе изучается задача о наибольшем значении $\Phi_m(a)$ нормированных интегралов по сфере $\mathbb{S}_a$ радиуса a, $0 < a < 1$, с центром в начале координат пространства $\mathbb{R}^m$ от функций из класса $G_m(\mathbb{B})$. Доказано, что в этой задаче можно ограничиться сферически симметричными функциями из класса. Доказано существование экстремальной функции и получено ее представление в виде самосвертки радиальной функции. Выписано интегральное уравнение для решения задачи при любом $m \geq 3$. Вычислены значения $\Phi_3(a)$ для $1/3 \leq a < 1$.

Ключевые слова: задача Турана, положительно-определенные функции, многомерные функции.

A. V. Efimov. A version of the Turan problem for positive definite functions of several variables.

Let $G_m(\mathbb{B})$ be the class of functions of m variables with support in the unit ball $\mathbb{B}$ centered at the origin of the space $\mathbb{R}^m$, continuous on the space $\mathbb{R}^m$, normed by the condition $f(0) = 1$, and having a nonnegative Fourier transform. In this paper, we study the problem of finding the maximum value $\Phi_m(a)$ of normed integrals of functions from the class $G_m(\mathbb{B})$ over the sphere $\mathbb{S}_a$ of radius a, $0 < a < 1$, centered at the origin. It is proved that we may consider spherically symmetric functions only. The existence of an extremal function is proved and a presentation of such a function as the self-convolution of a radial function is obtained. An integral equation is written for a solution of the problem for any $m \geq 3$. The values $\Phi_3(a)$ are obtained for $1/3 \leq a < 1$.

Keywords: Turan problem, positive definite functions, multidimensional functions.

Введение

В работе рассматривается один из вариантов задачи Турана для положительно определенных функций нескольких переменных с малым носителем. Пусть D — замкнутое центрально симметрическое тело в $\mathbb{R}^m$, $\mathscr{G}_m(D)$ — класс функций $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами:

1) $f \in C(\mathbb{R}^m)$;

2) $\operatorname{supp} f \subset D$;

3) преобразование Фурье функции f неотрицательно

$$\widehat{f}(t) = \int\limits_{x\in\mathbb{R}^m} f(x) e^{-2\pi i\, tx}\, dx \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}^m. \tag{0.1}$$

Отметим сразу, что поскольку преобразование Фурье функции $f \in \mathscr{G}_m(D)$ неотрицательно и сама функция непрерывна в точке 0, то (см., например, [8, гл. 1, § 1, следствие 1.26]) преобразование Фурье (0.1) этой функции суммируемо, имеет место формула

$$f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \widehat{f}(t) e^{2\pi i\, tx}\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

и как следствие справедлива оценка

$$|f(x)| \leq f(0) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \widehat{f}(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^m. \tag{0.2}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00462).

Обозначим через $G_m = G_m(D)$ подмножество функций f из $\mathscr{G}_m(D)$, удовлетворяющих дополнительному условию $f(0) = 1$.

Задача Турана в ее классическом варианте заключается в исследовании величины

$$AE(D) = \sup_{f \in G_m(D)} \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)dx = \sup_{f \in G_m(D)} \widehat{f}(0). \tag{0.3}$$

Аналог этой задачи для 2π-периодических функций одного переменного был предложен П. Тураном в 1970 г.; в этом случае множество D является отрезком: $D = [-h, h]$, $0 < h \le \pi$. В 1972 г. С. Б. Стечкин [9] решил ее для $h = 2\pi/N$, $N = 2, 3, \ldots$; окончательное решение этой задачи получили В. И. Иванов, Д. В. Горбачев, Ю. Д. Рудомазина (см. работу [6] и приведенную там библиографию). Решение задачи (0.3) для функций одного переменного на числовой оси ($m = 1$) еще в 1945 г. получили Боас и Кас [14]. В 1997 г. задача для многомерного куба была решена Н. Н. Андреевым [1]; он также дал оценки величины (0.3) при $m = 3, 4$ для октаэдра $D = \{t \in T^m \colon |t_1| + |t_2| + \ldots + |t_m| \le h\}$. В 2000 г. Д. В. Горбачев [4] решил задачу Турана для m-мерных евклидовых шаров. В 2001 г. В. В. Арестов и Е. Е. Бердышева решили задачу Турана для правильного шестиугольника на плоскости [2], а в 2002 — для класса многогранников, которыми можно покрыть пространство $\mathbb{R}^m$ с помощью сдвигов [13]. Задаче Турана посвящено много работ Ревеза и Колонцакиса (см. [16] и приведенную там библиографию).

Мы будем рассматривать следующую модифицированную задачу Турана. В качестве носителя D возьмем m-мерный евклидов шар $\mathbb{B} = \mathbb{B}_1^m(0)$ единичного радиуса с центром в начале координат пространства $\mathbb{R}^m$ и будем искать точную верхнюю грань

$$\Phi_m(a) = \sup_{f \in G_m(\mathbb{B})} \left| \frac{\displaystyle\int\limits_{|x|=a} f(x)dx}{\displaystyle\int\limits_{|x|=a} dx} \right| \tag{0.4}$$

среднего значения функций $f \in G_m(\mathbb{B})$ по сфере $\mathbb{S}_a = \mathbb{S}_a^{m-1}(0)$ радиуса a с центром в начале координат пространства $\mathbb{R}^m$ при $0 < a < 1$.

В 1945 г. Боас и Кас [14] нашли величину (0.4) для одномерного случая. В 2003 г. В. В. Арестов, Е. Е. Бердышева и Х. Беренс [12] рассмотрели периодический аналог последней задачи и получили двусторонние оценки для величины (0.4). В том же году В. Эм, Т. Нейтинг и Д. Ричардс [15] привели ряд оценок для величины (0.4) на полуинтервале [1/2, 1).

Результатами данной работы являются следующие пять утверждений.

Теорема 1. *При всех $0 < a < 1$ и $m \ge 2$ в (0.4) можно ограничиться радиальными функциями.*

Теорема 2. *Для $m \ge 3$ при всех $a \in (0, 1)$ в (0.4) существует экстремальная (радиальная) функция.*

Теорема 2 для одномерного случая ($m = 1$) содержится в [14]. Следующая теорема существенно сужает класс функций, на котором следует искать экстремум в (0.4).

Теорема 3. *При $m \ge 3$ для всех значений a, $0 < a < 1$, в (0.4) существует экстремальная (радиальная) функция, представимая в виде самосвертки $\alpha * \alpha$ функции α, обладающей свойствами: α — радиальная, $\alpha \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}^m)$, $\operatorname{supp} \alpha \in \mathbb{B}_{1/2}^m(0)$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} \alpha^2(x)\, dx = 1$.*

Следующие теоремы дают точные значения (0.4) при $1/3 \le a < 1$ для $m = 3$.

Теорема 4. *Пусть* $m = 3$, $1/2 \le a < 1$. *Тогда* $\Phi_3(a) = \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{1}{a} - 1\right)$.

Теорема 5. *Пусть* $m = 3$, $1/3 \le a < 1/2$. *Тогда* $\Phi_3(a)$ *является решением уравнения*

$$\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}a\Phi_3(a)}\left(\frac{1}{2} - a\right)\right) = \mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2a\Phi_3(a)}(1 - 3a)\right)\right).$$

1. Редукция к одномерной задаче

Пусть $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — суммируемая (на $\mathbb{R}^m$) радиальная функция; нам удобно считать, что g есть функция одного переменного: $g(r)$, $r = |x| = \sqrt{\sum_{k=1}^m x_k^2}$, $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Тогда преобразование Фурье функции g может быть записано в виде

$$(Fg)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} g(|x|)e^{-2\pi ixt}\,dx = \int\limits_0^\infty g(r) \int\limits_{\mathbb{S}^{m-1}(r)} e^{-2\pi i\xi t}\,d\xi\,dr = \int\limits_0^\infty g(r)I(t,r)\,dr, \tag{1.1}$$

где

$$I(t,r) = \int\limits_{\mathbb{S}^{m-1}(r)} e^{-2\pi i\xi t}\,d\xi. \tag{1.2}$$

Известно [11, гл. 2, § 15, пп. 4, 5], что

$$I(t,r) = \int\limits_{|x|=r} e^{-2\pi ixt}\,dx = \left(\frac{r}{a}\right)^{m/2} 2\pi a J_{m/2-1}(2\pi ar); \quad a = |t|. \tag{1.3}$$

Здесь

$$J_\rho(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\;\Gamma(\rho + 1/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^\rho \int\limits_0^\pi e^{iz\cos\theta}\sin^{2\rho}\theta d\theta = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k\left(\frac{1}{2}z\right)^{\rho+2k}}{k!\Gamma(\rho + k + 1)} \tag{1.4}$$

есть функция Бесселя соответствующего порядка [10, §§ 17.3, 17.2].

Формула (1.3), в частности, показывает, что интеграл (1.2) на самом деле зависит не просто от t, а от $a = |t|$; переобозначим функцию (1.2) через $\mathcal{I}(a,r)$. Итак, имеет место формула

$$(Fg)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} g(r)e^{-2\pi ixt}\,dx = \int\limits_0^\infty g(r)\mathcal{I}(a,r)\,dr, \tag{1.5}$$

где

$$\mathcal{I}(a,r) = \int\limits_{|x|=r} e^{-2\pi ixt}\,dx = \left(\frac{r}{a}\right)^{m/2} 2\pi a J_{m/2-1}(2\pi ar), \quad a = |t|. \tag{1.6}$$

Обозначим через $\mathcal{B}_m$ оператор, который функции g сопоставляет функцию одного переменного $a \ge 0$ по формуле

$$(\mathcal{B}_m g)(a) = \int\limits_0^\infty g(r)\mathcal{I}(a,r)\,dr. \tag{1.7}$$

Оператор (1.7) называют преобразованием Фурье — Бесселя, или преобразованием Бесселя. Формулу (1.5) можно записать в виде

$$(Fg)(t) = (\mathcal{B}_m g)(a), \quad a = |t|.$$

В дальнейшем нам потребуется связь между $\mathcal{I}(a,r)$ и $\mathcal{I}(r,a)$. Убедимся, что

$$\mathcal{I}(r,a) = \left(\frac{a}{r}\right)^{m-1} \mathcal{I}(a,r). \tag{1.8}$$

Действительно, умножив выражение (1.6) на $\left(\dfrac{a}{r}\right)^{m-1}$, получаем

$$\left(\frac{a}{r}\right)^{m-1} \mathcal{I}(a,r) = \left(\frac{a}{r}\right)^{m-1} \left(\frac{r}{a}\right)^{m/2} 2\pi a J_{m/2-1}(2\pi ra) = \left(\frac{a}{r}\right)^{m/2} 2\pi r J_{m/2-1}(2\pi ra).$$

Последнее выражение в силу формулы (1.6) есть $\mathcal{I}(r,a)$; формула (1.8) проверена.

Функции $f \in G_m(\mathbb{B})$ сопоставим радиальную функцию $g(|x|)$, полученную с помощью операции усреднения S

$$g(|x|) = (Sf)(|x|) = \frac{\displaystyle\int\limits_{|y|=|x|} f(y)dy}{\displaystyle\int\limits_{|y|=|x|} dy}, \qquad x \in \mathbb{R}^m, \quad x \neq 0; \tag{1.9}$$
$$g(0) = (Sf)(0) = \lim\nolimits_{x\to 0} g(x) = f(0).$$

Очевидно, что функция g радиальная с носителем в шаре радиуса 1.

Лемма 1. *Для $f \in L(\mathbb{R}^m)$ при всех $t \in \mathbb{R}^m$ имеет место формула*

$$(Fg)(t) = \big(S\widehat{f}\,\big)(a), \quad a = |t|. \tag{1.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проинтегрируем преобразование Фурье (0.1) функции $f \in L(\mathbb{R}^m)$ по сфере $\mathbb{S}_a$ радиуса $a > 0$; получившуюся функцию переменного $a > 0$ обозначим через Ψ. Имеем

$$\Psi(a) = \int\limits_{\mathbb{S}_a} \widehat{f}(\tau)d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x) \int\limits_{\mathbb{S}_a} e^{-2\pi i x\tau}\, d\tau\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x) I(x,a)\, dx, \tag{1.11}$$

где $I(x,a) = \int_{\mathbb{S}_a} e^{-2\pi i xt}\, dt$. Таким образом, функцию (1.11) можно записать в виде

$$\Psi(a) = \int\limits_{\mathbb{S}_a} \widehat{f}(\tau)d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)\mathcal{I}(r,a)\, dx, \quad r = |x|. \tag{1.12}$$

Преобразуем последний интеграл в (1.12) с помощью формулы (1.1). Имеем

$$\Psi(a) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)\mathcal{I}(r,a)\, dx = \int\limits_0^\infty \mathcal{I}(r,a) \int\limits_{\mathbb{S}^{m-1}(r)} f(\xi)\, d\xi\, dr = \int\limits_0^\infty \Omega_m(r)\mathcal{I}(r,a)g(r)\, dr,$$

где $\Omega_m(r)$ — площадь сферы $\mathbb{S}^{m-1}(r)$ радиуса r. Следовательно,

$$\Psi(a) = \int\limits_0^\infty \Omega_m(r)\mathcal{I}(r,a)g(r)\, dr = \Omega'_m \int\limits_0^\infty r^{m-1}\mathcal{I}(r,a)g(r)\, dr, \quad \Omega'_m = \Omega_m(1). \tag{1.13}$$

Согласно формуле (1.8) имеем $r^{m-1}\mathcal{I}(r,a) = a^{m-1}\mathcal{I}(a,r)$. Поэтому (1.13) влечет

$$\Psi(a) = \Omega'_m a^{m-1} \int\limits_0^\infty \mathcal{I}(a,r)g(r)\, dr = \Omega_m(a) \int\limits_0^\infty \mathcal{I}(a,r)g(r)\, dr. \tag{1.14}$$

Сравнение формул (1.1), (1.2) и (1.14) показывает, что

$$\widehat{g}(a) = (Fg)(t) = \frac{1}{\Omega_m(a)}\Psi(a), \quad a = |t|,$$

т. е. справедлива формула (1.10). Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 1. Функции $f \in G_m(\mathbb{B})$ сопоставим с помощью формулы (1.9) радиальную функцию $g = Sf$. Носитель функции g, очевидно, лежит в шаре $\mathbb{B}$. В силу леммы 1 преобразование Фурье функции g неотрицательное. Таким образом, функция $g = Sf$ принадлежит тому же классу $G_m(\mathbb{B})$. Помимо того, средние значения по сфере $\mathbb{S}(p)$ произвольного радиуса p функций g и f совпадают. Отсюда и следует утверждение теоремы 1.

2. Существование экстремальной функции при $m \geq 3$

В силу рассуждений раздела 1 исходную задачу можно заменить на эквивалентную одномерную. Обозначим через $\mathscr{K}_m$ множество функций $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами:

1) $f \in C(\mathbb{R}^+)$;

2) $\operatorname{supp} f \in [0,\, 1]$;

3) f имеет неотрицательное преобразование Бесселя

$$(B_m f)(a) = 2\pi a \int\limits_0^1 f(x) \left(\frac{x}{a}\right)^{m/2} J_{m/2-1}(2\pi a x)\, dx \geq 0, \quad a \geq 0, \tag{2.1}$$

где J_ρ есть функция Бесселя (1.4).

Как следствие свойства (0.2) для функций $f \in \mathscr{K}_m,\ m \geq 2$, справедлива оценка

$$|f(x)| \leq f(0), \quad x \geq 0.$$

В множестве $\mathscr{K}_m$ выделим класс K_m функций, удовлетворяющих дополнительному условию $f(0) = 1$. Одномерная задача состоит в том, чтобы на классе функций K_m найти величину

$$\Phi_m(a) = \sup\{|f(a)|\colon\ f \in K_m\}, \quad 0 < a < 1; \tag{2.2}$$

в силу теоремы 1 эта величина совпадает с (0.4). В дальнейшем мы будем пользоваться формулировкой как исходной задачи, так и эквивалентной одномерной.

Основная цель данного раздела — доказательство теоремы 2. Для одномерного случая ($m = 1$) утверждение этой теоремы содержится в [14]. Важным шагом к обоснованию теоремы 2 при $m \geq 3$ является случай $m = 3$. Этот случай будет исследован ниже в лемме 4. Для доказательства же леммы 4 нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 2. *Для любой функции $\varphi \in \mathscr{K}_3$ произведение $\varphi(x)x$ непрерывно дифференцируемо на полуоси $[0, +\infty)$, т. е. $\varphi(x)x \in C^1[0, +\infty)$, и более того $|(\varphi(x)x)'| \leq \varphi(0),\ x \geq 0$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathscr{K}_3$. Поскольку (см., например, [10, § 17.24]) $J_{1/2}(z) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\sin z$, то при $m = 3$ преобразование Фурье — Бесселя (2.1) функции φ принимает вид

$$2\pi a \int\limits_0^1 \varphi(x) \left(\frac{x}{a}\right)^{3/2} J_{1/2}(2\pi a x)\, dx = \frac{2}{a} \int\limits_0^1 \varphi(x) x \sin(2\pi a x)\, dx, \quad a \geq 0.$$

Таким образом, условие неотрицательности преобразования Фурье — Бесселя (2.1) функции φ в случае $m = 3$ состоит в том, что

$$\int\limits_0^1 \varphi(x) x \sin(ax)\, dx \ge 0 \quad \text{при} \quad a \ge 0. \tag{2.3}$$

Введем обозначение $\psi(x) = \varphi(x)x$ и продолжим функцию ψ по нечетности на $(-\infty, 0)$. Тогда условие (2.3) можно записать в виде

$$\int\limits_{-1}^1 \psi(x) \sin(ax)\, dx \ge 0 \quad \text{при} \quad a \ge 0. \tag{2.4}$$

Разложим функцию ψ в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$

$$\psi(x) \sim \sum_k c_k \sin(kx). \tag{2.5}$$

В силу (2.4) все коэффициенты c_k в (2.5) неотрицательные. По теореме Пэли (см., например, [3, гл. 4, § 2]) ряд (2.5) сходится равномерно, и как следствие

$$\psi(x) = \sum_k c_k \sin(kx), \quad x \in [-\pi, \pi]. \tag{2.6}$$

Функция ψ дифференцируема в 0, и ее производная равна $\varphi(0)$ в силу непрерывности функции φ. По теореме Фату [3, гл. 1, § 58] ряд $\sum_k c_k k$, полученный почленным дифференцированием ряда (2.6) в точке 0, будет суммироваться методом Пуассона к $\psi'(0)$, т. е. $\lim_{r\to 1} \sum_k k c_k r^k = \psi'(0) = \varphi(0)$. Поскольку $\sum_k k c_k r^k \ge r^N \sum_{k=1}^N k c_k$, то $\sum_{k=1}^N k c_k \le \psi'(0)$. Значит, ряд $\sum_{k=1}^\infty k c_k$ сходится, и его сумма равна $\psi'(0)$.

В этом случае ряд $\sum_k c_k k \cos(kx)$, полученный почленным дифференцированием ряда (2.6), мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum_k c_k k$ (с неотрицательными членами) и, следовательно, сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$. Поэтому функция ψ непрерывно дифференцируема на $[-\pi, \pi]$, причем

$$\psi'(x) = \sum_k c_k k \cos(kx), \quad x \in [-\pi, \pi],$$

и как следствие $|\psi'(x)| \le \psi'(0) = \varphi(0),\ x \in [-\pi, \pi]$.

Вне отрезка $[-\pi, \pi]$ функция ψ непрерывно дифференцируема, поскольку она непрерывна на всей оси и ее носитель содержится в $[-1, 1] \subset [-\pi, \pi]$. Лемма 2 доказана. □

Лемма 3. *Из любой последовательности функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subset K_3$ можно выделить подпоследовательность $\{\varphi_{k_n}\}_{n=1}^\infty$, для которой последовательность функций $\{x\varphi_{k_n}(x)\}_{n=1}^\infty$ равномерно сходится на $[0, \infty)$ к функции вида $\psi(x) = x\varphi(x)$, где $\varphi \in \mathscr{K}_3$; при этом $0 \le \varphi(0) \le 1$.*

Доказательство. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ — некоторая последовательность функций из K_3. В силу леммы 2 множество функций $\psi_k(x) = x\varphi_k(x),\ k \ge 1$, равностепенно непрерывно. Кроме того, оно равномерно ограничено, а точнее, для функций из этого множества выполняется неравенство $|\psi_k(x)| \le 1,\ x \in [0, 1]$, так как $|\varphi_k(x)| \le 1$ на $[0, 1]$. Следовательно, применима теорема Арцела, в силу которой найдется подпоследовательность $\{\psi_{k_n}\}$, сходящаяся в метрике $C[0, 1]$, а на самом деле в $C[0, \infty)$ к некоторой (непрерывной на $[0, \infty)$) функции ψ. Но тогда последовательность $\varphi_{k_n} = \psi_{k_n}/x$ сходится равномерно вне любой окрестности 0 к функции $\varphi(x) = \psi(x)/x$, определенной и непрерывной на множестве $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Поскольку последовательность $\{\psi_{k_n}\}$ сходится к функции ψ равномерно, то при $n \to \infty$

$$\int\limits_0^1 \psi_{k_n}(x)\sin(ax)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int\limits_0^1 \psi(x)\sin(ax)\,dx; \tag{2.7}$$

как следствие $\int_0^1 \psi(x)\sin(ax)\,dx \geq 0$ при $a \geq 0$. Таким образом, $(B_3\varphi)(a) \geq 0$ при $a \geq 0$.

Докажем теперь, что функция φ продолжается по непрерывности в точку нуль и предельное значение $\varphi(0)$ удовлетворяет условию $0 \leq \varphi(0) \leq 1$. Вновь, как и в доказательстве предыдущей леммы, функции ψ на отрезке $[0,\pi]$ сопоставим ее ряд Фурье по синусам

$$\psi(x) \sim \sum_{j=1}^{\infty} c_j \sin(jx). \tag{2.8}$$

С помощью рассуждений, приведенных в доказательстве леммы 2, убеждаемся, что каждая из функций ψ_{k_n} разлагается в ряд Фурье

$$\psi_{k_n}(x) = \sum_j c_j^n \sin(jx), \quad x \in [0,\pi],$$

коэффициенты которого обладают свойствами

$$c_j^n \geq 0, \quad j \geq 1; \qquad \sum_j c_j^n j = 1. \tag{2.9}$$

Принимая во внимание (2.7), имеем при любом $j \geq 1$

$$c_j^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} c_j\,. \tag{2.10}$$

Следовательно, коэффициенты разложения (2.8) неотрицательные

$$c_j \geq 0, \qquad j \geq 1. \tag{2.11}$$

Вновь с помощью теоремы Пэли, так же, как и при обосновании формулы (2.6), заключаем, что ряд (2.8) сходится равномерно и имеет место равенство

$$\psi(x) = \sum_j c_j \sin(jx), \quad x \in [0,\pi].$$

Из (2.9)–(2.11) следует, что

$$0 \leq \sum_j c_j j \leq 1. \tag{2.12}$$

Если $\sum_j c_j j = 0$, то $c_j = 0$ в силу неотрицательности коэффициентов $c_j,\ j \geq 1$; как следствие $\psi \equiv 0$, а значит, и $\varphi \equiv 0$. В этом случае все утверждения леммы имеют место со значением $\varphi(0) = 0$. Будем теперь считать, что $\sum_j c_j j > 0$. Из (2.12) следует, что функция ψ непрерывно дифференцируема при $x \geq 0$ и $0 < \psi'(0) = \sum_j c_j j \leq 1$. Отсюда вытекает, что $\lim_{x\to 0}\varphi(x) = \lim_{x\to 0}(\psi(x)/x) = \psi'(0)$. Положив $\varphi(0) = \psi'(0) = \sum_j c_j j$, получаем функцию φ, непрерывную на $[0, \infty)$, у которой $0 < \varphi(0) \leq 1$. Лемма 3 доказана. $\square$

Лемма 3 дает возможность доказать теорему 2 для $m = 3$.

Лемма 4. *При $m = 3$ для всех $a \in (0,1)$ в (0.4) существует экстремальная (радиальная) функция.*

Доказательство. Пусть $\{\varphi_k\}$ — последовательность функций из K_3, модули значений которых в точке a, $0 < a < 1$, сходятся к предельному значению $\Phi_3(a)$

$$|\varphi_k(a)| \to \Phi_3(a) \quad \text{при} \quad k \to +\infty. \tag{2.13}$$

Тогда для последовательности функций $\psi_k(x) = x\varphi_k(x)$ будет выполняться предельное соотношение $|\psi_k(a)| \to a\Phi_3(a)$, $k \to +\infty$.

Согласно лемме 3 из последовательности $\{\varphi_k\}$ можно выделить последовательность с описанными в лемме свойствами. Будем считать, что последовательность $\{\varphi_k\}$ уже обладает этими свойствами. Таким образом, существует функция $\varphi \in \mathscr{K}_3$, к которой последовательность $\{\varphi_k\}$ сходится равномерно на любой полуоси $[r, \infty)$, $r > 0$, и эта функция обладает перечисленными в лемме свойствами.

Если $\varphi(0) = 0$, то в силу (2.13) имеем $\Phi(a) = 0$; это значение будет достигаться на любой функции из класса K_m. Предположим, что $\varphi(0) \neq 0$, а точнее, $0 < \varphi(0) \leq 1$. В этом случае функция $\varphi(x) = \varphi(x)/\varphi(0)$ принадлежит классу K_3, и в силу (2.13) ее значение в точке a по модулю больше либо равно $\Phi(a)$. Следовательно, на самом деле $\varphi(0) = 1$, и, значит, $\varphi \in K_3$. Более того, функция φ является экстремальной в задаче (2.2). Лемма 4 доказана. $\square$

Следующее утверждение позволит доказать теорему 2 уже при любом $m \geq 3$.

Лемма 5. *При любом $m \geq 1$ имеет место вложение $K_{m+1} \subseteq K_m$.*

Доказательство. Пусть $f \in G_{m+1}$ радиальная. Тогда

$$\widehat{f}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^{m+1}} f(x)e^{-2\pi ixt}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^{m+1}} f(x)\cos\left(2\pi\sum_{i=1}^{m+1} x_it_i\right)dx$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{m+1}} f(x)\cos\left(2\pi\sum_{i=2}^{m+1} x_it_i\right)\cos(2\pi x_1t_1)dx - \int\limits_{\mathbb{R}^{m+1}} f(x)\sin\left(2\pi\sum_{i=2}^{m+1} x_it_i\right)\sin(2\pi x_1t_1)dx.$$

Запишем последний интеграл в виде повторного

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \sin\left(2\pi\sum_{i=2}^{m+1} x_it_i\right)dx_2\cdots dx_{m+1}\int\limits_{\mathbb{R}} \sin(2\pi x_1t_1)f(x)dx_1.$$

Поскольку функция $f(x)$ как функция одного переменного x_1 четная при любых $x_2, \ldots, x_{m+1}$, то внутренний интеграл, а значит, и весь последний интеграл обращаются в 0. Разложим выражение $\cos(2\pi\sum_{l=2}^{m+1} x_lt_l)$ на сумму произведений $\cos(2\pi x_lt_l)$ и $\sin(2\pi x_jt_j)$. Любое слагаемое, содержащее $2\pi\sin(x_jt_j)$ для любого j, обращается в нуль. Таким образом, имеем

$$\widehat{f}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^{m+1}} f(x)\prod_{i=1}^{m+1}\cos(2\pi x_it_i)dx$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \cos(2\pi x_1t_1)dx_1\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)\prod_{i=2}^{m+1}\cos(2\pi x_it_i)dx_2\cdots dx_{m+1} \tag{2.14}$$

Запишем соотношение (2.14) в терминах преобразования Фурье — Бесселя. Пусть $g(y)$, $y \in [0, \infty)$, — функция одного переменного такая, что $g(|x|) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$. Положим $z = \left(\sum_{i=2}^{m+1} x_i^2\right)^{1/2}$, $r = \left(\sum_{i=2}^{m+1} t_i^2\right)^{1/2}$ и $\xi_r(x_1) = B_mg\left(\sqrt{z^2 + x_1^2}\right)$. Тогда (2.14) можно записать в виде

$$(B_{m+1}g)\left(\sqrt{r^2 + t_1^2}\right) = \int\limits_{\mathbb{R}} \cos(2\pi x_1t_1)\xi_r(x_1)dx_1.$$

Поскольку носитель функции $f(x)$ сосредоточен в шаре радиуса 1, то носитель функции $\xi_r(x_1)$ сосредоточен на отрезке $[-1, 1]$; кроме того, $\xi_r(x_1)$ четная. Следовательно,

$$\widehat{\xi_r}(t_1) = \int\limits_{\mathbb{R}} \cos(2\pi x_1 t_1)\xi_r(x_1)dx_1 = (B_{m+1}g)(|t|) = \widehat{f}(t) \geq 0.$$

Поскольку преобразование Фурье от $\xi_r(x_1)$ неотрицательно, то, как было замечено ранее, существует обратное преобразование Фурье, и, следовательно, $\xi_r(0) \geq 0$. Однако $\xi_r(0) = B_m g(z) = (B_m g)(r)$ является преобразованием Фурье f как функции от m переменных.

Лемма доказана. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2 при $m > 3$. Рассмотрим экстремальную для точки $a \in (0,1)$ последовательность функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\varphi_k \in K_m$, задачи (2.2). В силу леммы 5 данную последовательность можно рассматривать как последовательность функций из K_3. Тогда в силу леммы 3 существуют подпоследовательность $\{\varphi_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ и функция $\varphi(x) \in \mathscr{K}_3$ со свойствами $x\varphi_{k_n}(x) \rightrightarrows x\varphi(x)$ и $0 \leq \varphi(0) \leq 1$. Однако в таком случае и $(B_m\varphi_{k_n})(a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (B_m\varphi)(a)$ как интегральное преобразование от $x\varphi_{k_n}(x)$. Следовательно, $(B_m\varphi)(a) \geq 0$ и $\varphi \in \mathscr{K}_m$. Ясно, что $\varphi(0) > 0$ и $|\varphi(a)/\varphi(0)| \geq \Phi_m(a)$. Таким образом, $\varphi/\varphi(0) \in K_m$ — экстремальная для точки a. Теорема 2 доказана.

3. Экстремальные свойства самосверток радиальных функций. Доказательство теоремы 3

В этом разделе мы докажем, что для $m \geq 3$ в задаче (0.4) можно ограничиться рассмотрением m-мерных самосверток радиальных функций.

Для доказательства теоремы 3 нам потребуется следующая лемма.

Лемма 6. *Пусть $a = \sum a_i$, $\sum b_i = 1$, $b_i > 0$. Тогда*

$$\inf_i \frac{a_i}{b_i} \leq a \leq \sup_i \frac{a_i}{b_i}, \tag{3.1}$$

причем любое из этих неравенств обращается в равенство тогда и только тогда, когда отношение a_i/b_i не зависит от индекса i.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\inf_i \frac{a_i}{b_i} \leq \frac{a_i}{b_i} \leq \sup_i \frac{a_i}{b_i}\,.$$

Следовательно,

$$a = \sum a_i \leq \sup_i \frac{a_i}{b_i} \sum b_i = \sup_i \frac{a_i}{b_i}\,, \qquad a = \sum a_i \geq \inf_i \frac{a_i}{b_i} \sum b_i = \inf_i \frac{a_i}{b_i}\,.$$

Условия обращения (3.1) в равенства очевидны. Лемма доказана. □

Для доказательства теоремы 3 нам потребуется следующая теорема. В этой теореме и ниже используется обозначение

$$v \tilde{*} u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} v(z)u(x+z)\,dz, \quad v, u \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}^m).$$

Теорема (Рудин [17]). *Любая радиальная функция $\varphi \in \mathscr{G}_m(\mathbb{B})$ представима в виде*

$$\varphi(x) = \sum_k \alpha_k \tilde{*} \alpha_k(x) + \sum_k \sum_{l=1}^{m} \omega_{kl} \tilde{*} \omega_{kl}(x), \tag{3.2}$$

где ω_k *и* α_k *— радиальные функции из* $\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^m)$ *с носителем в шаре радиуса* $1/2$*, каждая из функций* ω_k *абсолютно непрерывна как функция одного переменного на отрезке* $[0,1/2]$ *и частные производные* $\omega_{kl}(x) = \dfrac{\partial}{\partial x_l}\omega_k(\|x\|)$, $\quad l = 1,\ldots,m$, *принадлежат пространству* $\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^m)$*. Ряд* (3.2) *сходится в метрике* $\mathbb{C}(\mathbb{R}^m)$.

В исходной формулировке теоремы Рудина [17] предполагались гладкость функции φ и комплекснозначность функций ω_k и α_k. Однако, как было замечено в [15], теорема несложным образом обобщается на случай непрерывной φ и вещественных ω_k, α_k.

Лемма 7. *При* $m \geq 3$ *для любого* $a \in (0,1)$ *относительно экстремальной функции* φ *задачи* (0.4) *может иметь место лишь одна из следующих двух возможностей*:

1) *функция* φ *есть самосвертка* $\varphi = \alpha\tilde{*}\alpha$ *радиальной функции* $\alpha \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}^m)$*, носитель которой лежит в шаре* $\mathbb{B}^m_{1/2}(0)$;

2) *функция* φ *имеет вид* $\varphi = S(w_l\tilde{*}w_l)$*, где функция* $w_l \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}^m)$ *есть частная производная* $w_l(x) = \dfrac{\partial}{\partial x_l}w(|x|)$, $l = 1,\ldots,m$, *радиальной функции* $w \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}^m)$ *с носителем в шаре радиуса* $1/2$*, абсолютно непрерывной как функции одного переменного на отрезке* $[0,1/2]$.

Доказательство. Рассмотрим усреднение (1.9) радиальной функции $\varphi \in \mathscr{G}_m(\mathbb{B})$

$$(S\varphi)(a) = \varphi(a) = \frac{1}{\Omega_m(a)}\int\limits_{|x|=a}\varphi(x)\,dx = \sum_k \alpha_k\tilde{*}\alpha_k(a) + \sum_k\sum_{l=1}^{m}(S\omega_{kl}\tilde{*}\omega_{kl})(a).$$

Занумеруем каким-либо образом функции в двух последних суммах; в результате получим представление $\varphi(a) = \sum\limits_j \psi_j(a)$. Как нетрудно понять, каждая из функций в последнем представлении обладает свойством $\psi_j(0) > 0$. Применяя лемму 6 к правой части последнего соотношения и считая, что $a_i = \psi_i(a)$ и $b_i = \psi_i(0)$, получаем неравенства

$$\inf_i \frac{\psi_i(a)}{\psi_i(0)} \leq \varphi(a) \leq \sup_i \frac{\psi_i(a)}{\psi_i(0)}. \tag{3.3}$$

При этом если хотя бы одно из неравенств обращается в равенство, то и второе неравенство обращается в равенство, и $\dfrac{\psi_i(a)}{\psi_i(0)} = \dfrac{\psi_j(a)}{\psi_j(0)}$ для всех i,j.

Возьмем теперь в качестве φ экстремальную радиальную функцию задачи (0.4) для точки a; существование такой функции гарантировано теоремой 2. В силу неравенства (3.3) и условий выполнения равенства можно утверждать, что экстремальная функция φ совпадет с одной из функций вида $\alpha_k\tilde{*}\alpha_k$ или $(S\omega_{kl}\tilde{*}\omega_{kl})$. Лемма 7 доказана. $\square$

Покажем, что вторая ситуация с указанными в лемме 7 условиями на самом деле не может иметь места. Отметим, что функция w_l, описанная в лемме, имеет вид $w_l(x) = \dfrac{w'(|x|)}{|x|}x_l = g(|x|)x_l$, где g — радиальная функция. В следующей лемме изучаются именно такие функции.

Лемма 8. *Пусть* $m \geq 3$*. Предположим, что измеримая функция* $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *обладает следующими тремя свойствами*:

1) $\operatorname{supp} g \in [0,\,1/2]$;

2) *функция* $f(x) = g(|x|)x_l$ *принадлежит пространству* $\mathbb{L}_2\big(\mathbb{B}^m_{1/2}\big)$;

3) $S(|f|\widetilde{*}|f|)(a) > 0$ *при некотором* $a\colon 0 < a < 1$.

Тогда имеет место неравенство

$$|S(f\widetilde{*}f)(a)| < S(|f|\widetilde{*}|f|)(a). \tag{3.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположение о том, что функция $f(x) = g(|x|)x_l$ принадлежит пространству $\mathbb{L}_2\big(\mathbb{B}^m_{1/2}\big)$ в терминах функции g означает, что

$$\int\limits_0^{1/2} (g(r))^2 r^{m+1} dr < \infty.$$

Следовательно, при любом δ, $0 < \delta < 1/2$, на отрезке $[\delta,\, 1/2]$ функция g суммируема. Впрочем, на всем отрезке $[0,\, 1/2]$ функция g может не быть суммируемой, т. е. $\int_0^{1/2} |g(r)|\, dr = +\infty$.

По определению

$$S(|f|\widetilde{*}|f|)(a) = \frac{1}{\Omega_m(a)} \int\limits_{\mathbb{S}_a} \int\limits_{\mathbb{R}^m} |f(x)||f(x+t)|\, dx\, d\mathbb{S}_a(t), \tag{3.5}$$

где $\mathbb{S}_a$ — сфера радиуса a с центром в начале координат пространства $\mathbb{R}^m$. Далее дифференциал $d\mathbb{S}_a(t)$ будем обозначать dt. По условию леммы число (3.5) положительное, следовательно, существует точка $t_0 \in \mathbb{S}_a$ такая, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} |f(x)||f(x+t_0)| dx > 0. \tag{3.6}$$

Интеграл Лебега по множеству от суммируемой неотрицательной функции обращается в нуль тогда и только тогда, когда функция почти всюду на этом множестве обращается в нуль. Поэтому (3.6) влечет

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} |f(x)| dx = \int\limits_{\mathbb{B}^m_{1/2}} |f(x)| dx > 0.$$

Так как $f(x) = g(|x|)x_l$, то последнее свойство влечет

$$\int\limits_0^{1/2} |g(r)|\, dr > 0; \tag{3.7}$$

отметим еще раз, что последний интеграл может быть равен $+\infty$. Рассмотрим множество Υ чисел $r > 0$ таких, что интеграл $I(r,\delta) = \int_{\max(r-\delta,0)}^{r+\delta} |g(x)|\, dx$ положительный (возможно, и равный $+\infty$) при любом $\delta > 0$. Покажем, что множество Υ непусто. В силу (3.7) существует δ, $0 < \delta < 1/2$, такое, что $\int_\delta^{1/2} |g(r)|\, dr > 0$. Разобьем исходный отрезок $[0,\, 1/2]$ на два равных отрезка и выберем тот из них, на котором интеграл положителен. Продолжая этот процесс, получаем последовательность вложенных отрезков, которые содержат одну общую точку. Как несложно убедиться, эта точка будет принадлежать Υ.

Нетрудно заметить, что множество Υ замкнуто. Положим $R = \max \Upsilon$; имеем $1/2 \geq R > 0$. Из определения числа R заключаем, что

$$\int\limits_R^{1/2} |g(r)| dr = 0. \tag{3.8}$$

Кроме того, поскольку $R \in \Upsilon$, то при любом ε, $0 < \varepsilon < R$, справедливо неравенство

$$\int\limits_{R-\varepsilon}^{R} |g(r)| dr > 0. \tag{3.9}$$

Далее, докажем, что $2R > a$. Предположим, что $2R \le a$. Возьмем $t_0 \in \mathbb{S}_a$ со свойством (3.6). Рассмотрим функцию $\gamma(x) = f(x)f(x+t_0)$. Пусть $|x| \ge R$. Тогда в силу (3.8) функция f и, следовательно, функция γ почти всюду обращаются в 0. Пусть теперь $|x| < R$. Тогда $|x+t_0| > a - R \ge R$, и, следовательно, $f(x+t_0)$ и $\gamma(x)$ равны нулю почти всюду в этой области. Таким образом, функция γ обращается в нуль почти всюду на $\mathbb{R}^m$, что противоречит (3.6).

Для доказательства (3.4) достаточно построить измеримое множество $\Theta \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}_a$, на котором имеет место неравенство

$$\Big|\int\limits_{\Theta} f(x)f(x+t)dt\,dx\Big| < \int\limits_{\Theta} |f(x)||f(x+t)|dt\,dx. \tag{3.10}$$

Покажем, что в качестве Θ можно взять множество

$$\Theta(\varepsilon) = \{(x,t)\colon R-\varepsilon \le |x| \le R,\ |x_l| \le \varepsilon,\ t \in \Lambda(x)\},$$

$$\Lambda(x) = \{t\colon t \in \mathbb{S}_a,\ R-\varepsilon \le |x+t| \le R\},$$

для достаточно малого ε. Возьмем

$$0 < \varepsilon < \min\Big(a,\ \frac{2R-a}{2}\Big). \tag{3.11}$$

Докажем, что правый интеграл в (3.10) по множеству $\Theta(\varepsilon)$ отличен от нуля. Имеем

$$\int\limits_{\Theta(\varepsilon)} |f(x)||f(x+t)|\,dt\,dx = \int\limits_{\substack{R-\varepsilon\le|x|\le R\\ |x_l|\le\varepsilon}} |f(x)| \int\limits_{\substack{t\in\mathbb{S}_a\\ R-\varepsilon\le|x+t|\le R}} |f(x+t)|\,dt\,dx. \tag{3.12}$$

В силу свойства (3.9) функция $|f(x)|$ положительная на некотором подмножестве положительной меры множества, поэтому достаточно доказать, что для $x \in X = \{R-\varepsilon \le |x| \le R, |x_l| \le \varepsilon\}$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Lambda(x)} |f(x+t)|\,dt > 0. \tag{3.13}$$

Для обоснования (3.13) преобразуем последний интеграл. Множество интегрирования $\Lambda(x) = \{t \in \mathbb{S}_a\colon R-\varepsilon \le |x+t| \le R\}$ в интеграле (3.13) является пересечением сферы $\mathbb{S}_a$ и кольца $\mathbb{K}(R-\varepsilon, R)(-x) = \{t\colon R-\varepsilon \le |x+t| \le R\}$ с центром в точке $-x$. Опишем более точно это множество. Убедимся, что при любом ρ, удовлетворяющем условию $R-\varepsilon \le \rho \le R$, сфера $\mathbb{S}_\rho(-x)$ радиуса ρ с центром в точке $-x$ пересекается со сферой $\mathbb{S}_a$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $\rho < |x| + a$ и $\rho > ||x| - a|$. Достаточно проверить, что выполняются неравенства $R < |x| + a$ и $R - \varepsilon > ||x| - a|$. Поскольку $(R-\varepsilon) \le |x| \le R$ и в соответствии с (3.11) выполнено условие $0 < \varepsilon < a$, то справедливо неравенство $R < |x| + a$. Проверим теперь неравенство $R - \varepsilon > |x| - a$. Если $|x| \ge a$, то в силу свойства $\varepsilon < a$ имеем $|x| - a < R - \varepsilon$. Пусть теперь $|x| \le a$. Тогда, поскольку $R - \varepsilon \le |x| \le R$ и в силу (3.11) выполняется свойство $\varepsilon < (2R-a)/2$, имеем $a - |x| = (2R - |x|) - (2R - a) \le (R+\varepsilon) - (2R-a) < R - \varepsilon$. Тем самым неравенство $R - \varepsilon > |x| - a$ также проверено. Таким образом, множество $\Lambda(x) \subset \mathbb{S}_a$ является сферическим слоем $\Lambda(x) = \cup\{\mathbb{S}_a \cap \mathbb{S}_\rho(-x)\colon \rho \in [R-\varepsilon, R]\}$.

Для любого $\rho \in [R-\varepsilon,\ R]$ множество $\mathbb{S}_a \cap \mathbb{S}_\rho(-x)$ является $(m-2)$-мерной сферой $\mathbb{S}_r^{m-2}(z)$ некоторого радиуса $r = r(\rho)$ с центром в некоторой точке $z = z(\rho)$, принадлежащей прямой $\ell(x) = \{\eta x\colon \eta \in (-\infty, +\infty)\}$. Центр $z = z(\rho)$ и радиус $r = r(\rho)$ сферы можно выписать явно. Сделаем это лишь для центра $z = z(\rho)$. Точка z имеет вид $z = \eta x$, $\eta \in \mathbb{R}$, и характеризуется тем, что для всех точек $\mathbb{S}_a \cap \mathbb{S}_\rho(-x)$ разность $t - z$ ортогональна x. Таким образом, должны выполняться два соотношения $|t|^2 = r^2 + |z|^2,\ t \in \mathbb{S}_a$, и $\|t+x\|^2 = r^2 + \|x+z\|^2,\ t \in \mathbb{S}_\rho(-x)$. Эти соотношения можно переписать в виде $a^2 = r^2 + \eta^2|x|^2$, $\rho^2 = r^2 + (\eta+1)^2|x|^2$. Преобразуем второе выражение $\rho^2 = r^2 + (\eta+1)^2|x|^2 = r^2 + \eta^2|x|^2 + (2\eta+1)|x|^2 = a^2 + (2\eta+1)|x|^2$. Отсюда находим, что $\eta = (\rho^2 - a^2 - |x|^2)/(2|x|^2)$. Следовательно,

$$z = z(\rho) = \frac{\rho^2 - a^2 - |x|^2}{2|x|^2}x. \tag{3.14}$$

Обозначим через $\theta = \theta(\rho) \in [0,\, \pi]$ угол между векторами $-x$ и $t \in \mathbb{S}_a \cap \mathbb{S}_\rho(-x)$; имеем

$$\cos\theta = \frac{a^2 + |x|^2 - \rho^2}{2a|x|}.$$

Для значений $\rho \in [R-\varepsilon,\, R]$ угол $\theta = \theta(\rho)$ возрастает (непрерывно) от значения $\theta_1 = \theta(R)$ до $\theta_2 = \theta(R-\varepsilon)$. С помощью этого обозначения центр (3.14) и радиус сферы $s = s(x,\theta) = \mathbb{S}_a \cap \mathbb{S}_\rho(-x) = \mathbb{S}^{m-2}_{r(\rho)}(z(\rho))$ можно записать в виде

$$z = z(\theta) = -(\cos\theta)\frac{x}{|x|}, \quad r = r(\theta) = a\sin\theta.$$

Для точек $t \in \mathbb{S}_a \cap \mathbb{S}_\rho(-x)$ имеем $\|t+x\|^2 = |t|^2 + 2(t,x) + |x|^2 = a^2 - 2a|x|\cos\theta + |x|^2$. Поэтому интеграл в (3.13) можно представить в виде

$$\int\limits_{\Lambda(x)} |f(x+t)|\,dt = a\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \left|g\left(\sqrt{a^2 + |x|^2 - 2a|x|\cos\theta}\right)\right| \int\limits_{s(x,\theta)} |x_l + t_l|\,ds(t)\,d\theta. \tag{3.15}$$

Ввиду (3.9) функция $|g(\sqrt{a^2 + |x|^2 - 2a|x|\cos\theta})|$ положительна на некотором подмножестве положительной меры отрезка $[\theta_1,\, \theta_2]$. Докажем, что $\int_{s(x,\theta)} |x_l + t_l|\,ds(t) > 0$ для всех $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Сфера $s(x,\theta)$ ортогональна вектору x. Отсюда нетрудно вывести, что величина $(x_l + t_l)$ во внутреннем интеграле (3.15) принимает все значения из отрезка

$$\bigl[x_l + z_l - r(\theta)\kappa_l(z),\, x_l + z_l + r(\theta)\kappa_l(z)\bigr], \quad \text{где} \quad \kappa_l(z) = \Bigl(\sqrt{|z|^2 - z_l^2}\,\Bigr)\Big/|z|. \tag{3.16}$$

Для интеграла в левой части неравенства (3.10) справедливы формулы, аналогичные (3.12) и (3.15). Поэтому для справедливости неравенства (3.10) достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\left|\int\limits_{s(x,\theta)} (x_l + t_l)\,ds(t)\right| < \int\limits_{s(x,\theta)} |x_l + t_l|\,ds(t)$$

для всех $s(x,\theta)$, т. е. для x, удовлетворяющих условиям $R - \varepsilon \le |x| \le R$, $|x_l| \le \varepsilon$ и $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Для этого достаточно выбрать ε так, чтобы $(x_l + t_l)$ принимало как отрицательные, так и положительные значения на сфере $s(x,\theta)$.

Как уже было отмечено выше, величина $(x_l + t_l)$ принимает все значения из отрезка (3.16). Поэтому для того чтобы величина $(x_l + t_l)$ принимала как отрицательные, так и положительные значения, достаточно выбрать ε так, чтобы выполнялось неравенство $r(\theta)\kappa_l(z) > |z_l + x_l|$. При $\varepsilon \to +0$ имеем $|x| \to R$ и $\rho \to R$. Поэтому

$$\cos\theta_1, \cos\theta_2 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \frac{R^2 + a^2 - R^2}{2aR} = \frac{a}{2R} < 1; \qquad \sin\theta_1, \sin\theta_2 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \sqrt{1 - \Bigl(\frac{a}{2R}\Bigr)^2} > 0.$$

Следовательно,

$$r(\theta) = a\sin\theta \to r_0 = a\sqrt{1 - \Bigl(\frac{a}{2R}\Bigr)^2} > 0.$$

Исследуем теперь поведение величины $\kappa_l(z) = \left(\sqrt{|z|^2 - z_l^2}\right)/|z|$ при $\varepsilon \to +0$. В силу (3.14) и условия $|x_l| < \varepsilon$ для $x \in X$ имеем

$$|z| = \left|\frac{\rho^2 - a^2 - |x|^2}{2|x|}\right| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \frac{a^2}{2R}, \qquad |z_l| = \frac{|z|}{|x|}|x_l| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0,$$

а значит, $\kappa_l(z) \to 1$, $\varepsilon \to 0$. Таким образом, для достаточно малых ε будет выполняться неравенство $r(\theta)\kappa_l(z) > |z_l + x_l|$. Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 3. Утверждения теоремы следуют из теоремы 2, лемм 7 и 8.

4. Необходимые и достаточные условия экстремальности функции в задаче (0.4) для $m \geq 3$

Пусть $\mathfrak{L}_2(\mathbb{B}_{1/2})$ есть пространство комплекснозначных измеримых функций, квадрат которых суммируем на шаре $\mathbb{B}_{1/2} = \mathbb{B}^m_{1/2}(0)$ радиуса $1/2$ с центром в начале координат пространства $\mathbb{R}^m$. Это пространство наделено стандартным скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_{\mathbb{B}_{1/2}} f(y)\overline{g(y)}dy$ и соответствующей нормой. Будем отождествлять пространство $\mathfrak{L}_2(\mathbb{B}_{1/2})$ с подпространством функций из $\mathfrak{L}_2(\mathbb{R}^m)$, зануляющихся вне шара $\mathbb{B}_{1/2}$. Для значения параметра $a > 0$ обозначим через $\mathscr{S}_a$ интегральный оператор, который определен на пространстве $\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^m)$ соотношением

$$(\mathscr{S}_a f)(y) = \frac{1}{\Omega_m(a)} \int\limits_{\mathbb{S}_a} f(y+t)\,dt, \tag{4.1}$$

т. е. сопоставляет функции ее среднее значение по сфере радиуса a с центром в точке y. Как следует из теоремы Фубини, для любой функции $f \in \mathfrak{L}_2(\mathbb{B}_{1/2})$ интеграл (4.1) определен почти для всех x. Более того, в силу обобщенной теоремы Минковского функция (4.1) принадлежит пространству $\mathfrak{L}_2(\mathbb{B}_{1/2})$, и имеет место неравенство $\|\mathscr{S}_a f\|_{\mathfrak{L}_2(\mathbb{B}_{1/2})} \leq \|f\|_{\mathfrak{L}_2(\mathbb{B}_{1/2})}$. Таким образом, $\mathscr{S}_a$ есть линейный ограниченный оператор в пространстве $\mathfrak{L}_2(\mathbb{B}_{1/2})$, норма которого не превосходит единицы (а на самом деле, как нетрудно показать, она равна единице). Легко проверить, что оператор (4.1) является самосопряженным. Следовательно, спектр оператора (4.1) вещественный, более того спектр лежит на отрезке $[-1, 1]$ (см., например, [7, гл. 7]).

Нас интересуют некоторые свойства оператора (4.1) в пространстве $\mathbb{L}_2(\mathbb{B}_{1/2}) \subset \mathfrak{L}_2(\mathbb{B}_{1/2})$ вещественнозначных функций из $\mathfrak{L}_2(\mathbb{B}_{1/2})$. Ниже символом $S_a f$ обозначается среднее значение функции f по сфере $\mathbb{S}_a$ радиуса a с центром в точке $0 \in \mathbb{R}^m$, т. е. $S_a f = (Sf)(a) = (\mathscr{S}_a f)(0)$.

Пусть $\lambda \neq 0$ — собственное значение оператора (4.1) и $\alpha_\lambda \in \mathbb{L}_2(\mathbb{B}_{1/2})$ — соответствующая собственная функция с нормой, равной 1, так что

$$\mathscr{S}_a \alpha_\lambda = \lambda \alpha_\lambda. \tag{4.2}$$

Положим $\varphi_\lambda = \alpha_\lambda \widetilde{*} \alpha_\lambda$. Имеем $\widehat{\varphi_\lambda} \geq 0$ и $\varphi_\lambda \in G_m(\mathbb{B})$. Рассмотрим среднее значение $S_a\varphi_\lambda$ от функции φ_λ по сфере радиуса a с центром в 0

$$(S_a\varphi_\lambda) = (S_a(\alpha_\lambda * \alpha_\lambda)) = S_a\left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} \alpha_\lambda(y)\alpha_\lambda(t+y)\,dy\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \alpha_\lambda(y)(\mathscr{S}_a\alpha_\lambda)(y)\,dy = \lambda\,.$$

Таким образом, $S_a\varphi_\lambda = \lambda$.

В силу теоремы 3 экстремальная для точек $|x| = a$ функция φ задачи (0.4) представима в виде $\varphi = \alpha\widetilde{*}\alpha$, где α — радиальная функция с носителем в шаре $\mathbb{B}_{1/2}$ радиуса $1/2$ с центром в точке нуль пространства $\mathbb{R}^m$. Можно считать, что $\alpha \geq 0$ почти всюду. Сейчас, в частности, будет показано, что α является собственной функцией оператора (4.1).

Применим принцип вариации. Предположим, что функция h обладает свойствами $h \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}^m)$, $\|h\|_{\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^m)} = 1$, $\operatorname{supp} h \subseteq \mathbb{B}^m_{1/2}$. Пусть $\Delta(x) = uh(x)$, где $u \in \mathbb{R}$, причем $\Delta \neq -\alpha$. В силу свойства экстремальности функции $\alpha\widetilde{*}\alpha$ и леммы 1 при $|x| = a$ справедливо неравенство

$$S_a\left(\frac{\{(\alpha+\Delta)\widetilde{*}(\alpha+\Delta)\}}{\{(\alpha+\Delta)\widetilde{*}(\alpha+\Delta)\}(0)}\right) \le (\alpha\widetilde{*}\alpha)(x). \tag{4.3}$$

Преобразуем левую часть неравенства (4.3). Это выражение имеет вид

$$\frac{(\alpha\widetilde{*}\alpha)(x) + 2S_a(\Delta\widetilde{*}\alpha) + S_a(\Delta\widetilde{*}\Delta)}{(\alpha\widetilde{*}\alpha)(0) + 2(\Delta\widetilde{*}\alpha)(0) + (\Delta\widetilde{*}\Delta)(0)},$$

или, что то же самое,

$$\frac{(\alpha\widetilde{*}\alpha)(x) + 2uS_a(h\widetilde{*}\alpha) + u^2 S_a(h\widetilde{*}h)}{1 + 2u(h\widetilde{*}\alpha)(0) + u^2}. \tag{4.4}$$

Поскольку функция $\alpha\widetilde{*}\alpha$ экстремальная, то частная производная выражения (4.4) по u в точке $u = 0$ должна быть равна нулю. Следовательно, для любой функции h с описанными выше свойствами должно выполняться равенство

$$S_a(h\widetilde{*}\alpha) = (h\widetilde{*}\alpha)(0)(\alpha\widetilde{*}\alpha)(x). \tag{4.5}$$

Исходя из определения (1.9) операции усреднения, имеем

$$S_a(h\widetilde{*}\alpha) = \frac{1}{\Omega_m(a)}\int\limits_{|y|=a}(h\widetilde{*}\alpha)(y)dy = \frac{1}{\Omega_m(a)}\int\limits_{|y|=a}\int\limits_{\mathbb{R}^m} h(t)\alpha(t+y)\,dtdy = \int\limits_{\mathbb{R}^m} h(t)(\mathscr{S}_a\alpha)(t)\,dt.$$

Поэтому соотношение (4.5) можно переписать в виде

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} h(t)\big((\mathscr{S}_a\alpha)(t) - (\alpha\widetilde{*}\alpha)(x)\alpha(t)\big)\,dt. \tag{4.6}$$

Поскольку (4.6) выполняется для любой функции h с носителем в шаре радиуса $1/2$ такой, что $\|h\| = 1$, то для почти всех $t \in \mathbb{B}_{1/2}$ справедливо равенство

$$(\mathscr{S}_a\alpha)(t) = \varphi(x)\alpha(t). \tag{4.7}$$

Таким образом, число $\lambda = \varphi(x)$ является собственным значением оператора (4.1), и α — соответствующая собственная функция. Поэтому, как уже было показано выше, имеет место равенство $S_a\varphi = \varphi(x)$, где $|x| = a$.

Итак, на данном этапе можно утверждать следующее. Паре $(\lambda, \alpha_\lambda)$, состоящей из собственного значения и соответствующей собственной функции оператора (4.1), можно сопоставить радиальную функцию $\varphi = S(\alpha_\lambda\widetilde{*}\alpha_\lambda) \in G_m$, значение которой для всех $x\colon |x| = a$ в точности равно λ. Кроме того, значение $\varphi(x)$ экстремальной функции $\varphi \in G_m$ согласно (4.7) является собственным значением оператора (4.1). Следовательно, для оператора (4.1) существует максимальное собственное значение, и оно в точности равно $\Phi_m(a)$. Таким образом, справедлива следующая лемма.

Лемма 9. *Пусть $m \ge 3$. Если $\varphi = \alpha\widetilde{*}\alpha$ — экстремальная функция в задаче* (0.4) *для точек $x\colon |x| = a$, где α — радиальная функция из $\mathbb{L}_2(\mathbb{B}_{1/2})$ с нормой, равной* 1, *то*

1) *α есть собственная функция оператора* (4.1);

2) *значение $\Phi_m(a)$ задачи* (0.4) *является соответствующим собственным значением, и более того это есть максимальное собственное значение λ_{max} оператора* (4.1).

Наша ближайшая цель — записать значение $\mathscr{S}_a\alpha$ оператора (4.1) на радиальных функциях $\alpha \in \mathbb{L}_2(\mathbb{B}_{1/2})$ в виде однократного интеграла и на этом пути получить интегральное уравнение, а как следствие и некоторые новые свойства экстремальной функции задачи (0.4). В этих рассуждениях используется следующий известный факт. Для суммируемой на единичной сфере $\mathbb{S}^{m-1} = \{z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{R}^m \colon |z| = 1\}$ пространства $\mathbb{R}^m$ функции f справедлива формула [5, формула (28)]

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{m-1}} f(z)\,dz = \int\limits_{-1}^{1} (1-p^2)^{(m-3)/2} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{S}^{m-2}} f(p, \sqrt{1-p^2}z')\,dz' \Bigg) dp, \tag{4.8}$$

которая выражает интеграл по сфере $\mathbb{S}^{m-1}$ через интегралы по сечениям сферы плоскостями $z_1 = p$, $p \in [-1, 1]$, являющимся в свою очередь сферами на единицу меньшей размерности.

Для радиальной функции α интеграл $\int_{\mathbb{S}_a} \alpha(y-z)\,dz$ является радиальной функцией переменного y. Поэтому можно считать, что $y = (\eta, 0, \dots, 0)$, где $\eta \ge 0$. С помощью формулы (4.8) имеем

$$\int\limits_{\mathbb{S}_a} \alpha(|y-z|)\,dz = a^{m-1} \int\limits_{\mathbb{S}_1} \alpha(|y-az|)\,dz$$

$$= a^{m-1} \int\limits_{-1}^{1} (1-p^2)^{(m-3)/2} \int\limits_{\mathbb{S}^{m-2}} \alpha\left(\sqrt{(\eta-ap)^2 + a^2(1-p^2)|z'|^2}\right) dz'dp$$

$$= a^{m-1}\Omega_{m-1}(1) \int\limits_{-1}^{1} (1-p^2)^{(m-3)/2} \alpha(\sqrt{\eta^2 - 2a\eta p + a^2}\,)\,dp.$$

Сделав замену $\tau = \sqrt{\eta^2 - 2a\eta p + a^2}$, в результате получим

$$\int_{\mathbb{S}_a} \alpha(y-z)\,dz = a\Omega_{m-1}(a) \int\limits_{|\eta-a|}^{\eta+a} \left(1 - \left(\frac{\eta^2 + a^2 - \tau^2}{2a\eta}\right)^2\right)^{(m-3)/2} \alpha(\tau)\frac{\tau}{a\eta}\,d\tau.$$

Таким образом, (4.2) для радиальной функции α эквивалентно соотношению

$$\int\limits_{|\eta-a|}^{\eta+a} \left(1 - \left(\frac{\eta^2 + a^2 - \tau^2}{2a\eta}\right)^2\right)^{(m-3)/2} \alpha(\tau)\frac{\tau}{\eta}\,d\tau = \lambda \frac{\Omega_m(a)}{\Omega_{m-1}(a)}\,\alpha(\eta). \tag{4.9}$$

Левая часть последнего уравнения непрерывна по η для $\eta > 0$ и имеет конечный предел в точке $\eta = 0$. Следовательно, если функция $\alpha(\eta)$ удовлетворяет (4.9), то она непрерывная на $[0,\, 1/2]$. Таким образом, верна следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть $m \ge 3$. Если $\varphi = \alpha \widetilde{*} \alpha$ — экстремальная функция задачи* (0.4) *для точек $x\colon |x| = a$, где α — радиальная неотрицательная функция из $\mathbb{L}_2(\mathbb{B}_{1/2})$ с нормой, равной* 1, *то*

1) *функция α удовлетворяет уравнению*

$$\int\limits_{|\eta-a|}^{\eta+a} \left(1 - \left(\frac{\eta^2 + a^2 - \tau^2}{2a\eta}\right)^2\right)^{(m-3)/2} \alpha(\tau)\tau\,d\tau = \lambda \frac{\Omega_m(a)}{\Omega_{m-1}(a)} \eta\alpha(\eta), \quad \eta \in [0,\, 1/2], \tag{4.10}$$

где λ — некоторая постоянная;

2) $\Phi_m(a)$ *является максимальным значением λ, при котором существуют решения уравнения* (4.10) *при сделанных ограничениях на α.*

5. Точные значения $\Phi_3(a)$, $1/3 \le a < 1$

В данном разделе будут вычислены значения величины $\Phi_m(a)$ при $m = 3$ для значений $1/3 \le a < 1$, т.е. доказаны теоремы 4 и 5. Воспользуемся теоремой 6. Необходимо найти максимальное значение константы λ, при котором существует непрерывная (неотрицательная) функция $\alpha\colon [0, 1/2] \to \mathbb{R}^+$, являющаяся решением уравнения

$$\int\limits_{|a-\eta|}^{a+\eta} y\,\alpha(\tau)\,dy = 2\lambda a\,\eta\alpha(\eta), \quad \eta \in [0, 1/2]. \tag{5.1}$$

Положим $\chi(\tau) = \tau\alpha(\tau)$, $c = 2a\lambda$. Тогда уравнение (5.1) примет вид

$$\int\limits_{|a-\eta|}^{a+\eta} \chi(\tau)\,d\tau = c\chi(\eta), \quad x \in [0, 1/2]. \tag{5.2}$$

Нам предстоит найти максимальное значение параметра c, при котором существует решение χ уравнения (5.2) при условии $\chi(0) = 0$ и существовании правой производной в 0.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 4 ($1/2 \le a < 1$). Уравнение (5.2) преобразуется к виду

$$\int\limits_{\min(1/2,\, a-\eta)}^{1/2} \chi(\tau)\,d\tau = c\chi(\eta), \quad \eta \in [0, 1/2]. \tag{5.3}$$

Видно, что $\chi(\eta) = 0$ при $0 \le \eta \le a - 1/2$. Далее считаем, что $\eta \ge a - 1/2$. Продифференцировав (5.3) по η, получим

$$\chi(a - \eta) = c\chi'(\eta). \tag{5.4}$$

Продифференцировав еще раз и подставив в (5.4) $a - \eta$ вместо η, получим однородное дифференциальное уравнение

$$c^2\chi''(\eta) + \chi(\eta) = 0,$$

общее решение которого имеет вид $\chi(\eta) = c_1 \cos\dfrac{\eta}{c} + c_2 \sin\dfrac{\eta}{c}$. Подставив это выражение χ в (5.4), получим условия на коэффициенты c_1 и c_2

$$c_1 \cos\frac{a}{c} - c_2\Bigl(1 - \sin\frac{a}{c}\Bigr) = 0, \tag{5.5}$$

$$c_1\left(1 + \sin\frac{a}{c}\right) - c_2 \cos\frac{a}{c} = 0. \tag{5.6}$$

Принимая во внимание граничное условие $\chi\Bigl(a - \dfrac{1}{2}\Bigr) = 0$, имеем

$$c_1 \cos\left(\frac{a}{c} - \frac{1}{2c}\right) + c_2 \sin\left(\frac{a}{c} - \frac{1}{2c}\right) = 0. \tag{5.7}$$

Заметим, что определитель системы (5.5), (5.6) равен 0. Рассмотрим два случая:

a) $\sin\dfrac{a}{c} \ne 1$. Тогда система (5.5), (5.6) эквивалентна системе

$$c_1 = \rho\left(1 - \sin\frac{a}{c}\right), \quad c_2 = \rho\cos\frac{a}{c}\,.$$

Подставив эти выражения в (5.7), получим соотношение $\cos\left(\dfrac{a}{c} - \dfrac{1}{2c}\right) = \sin\dfrac{1}{2c}$. Отсюда, поскольку $\sin\dfrac{a}{c} \ne 1$, имеем $c = (1-a)/\bigl(\pi/2 + 2\pi k\bigr)$. Следовательно, максимальное значение параметра c равно

$$c_{\max} = 2\frac{1-a}{\pi}.$$

Заметим, что $\sin\dfrac{a}{c_{\max}} \neq 1$ при $1/2 < a < 1$. При $a = 1/2$ имеем $c_{\max} = 1/\pi$, но $\sin\dfrac{a}{c_{\max}} = 1$. При рассмотрении случая б) будет доказано, что такое $c_{\max}$ подходит и при $a = 1/2$.

б) $\sin\dfrac{a}{c} = 1$. Тогда $c = a/(\pi/2 + 2\pi k)$. Следовательно, $c_{\max} = 2a/\pi$. Данное значение $c_{\max}$ меньше, чем в предыдущем случае, за исключением $a = 1/2$. Легко убедиться, что $a = 1/2$ и $c = 1/\pi$ удовлетворяют уравнению (5.7).

Таким образом,

$$c_{\max} = 2\frac{1-a}{\pi} \quad \text{и} \quad \Phi_3(a) = \lambda_{\max}(a) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{a} - 1\right).$$

Теорема 4 доказана. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 5 ($1/3 \le a < 1/2$). Вид уравнения (5.2) будет зависеть от расположения параметра $\eta \in [0, 1/2]$; здесь возможны три следующие ситуации.

а) Если $0 \le \eta < 1/2 - a$, то (5.2) превращается в уравнение $\displaystyle\int_{a-\eta}^{a+\eta} \chi(\tau)\,d\tau = c\chi(\eta)$, дифференцируя которое, получаем уравнение $c\chi'(\eta) = \chi(a+\eta) + \chi(a-\eta)$.

б) Если $1/2 - a \le \eta \le a$, то (5.2) превращается в интегральное уравнение $\displaystyle\int_{a-\eta}^{1/2} \chi(\tau)\,d\tau = c\chi(\eta)$, дифференцируя которое, получаем соотношение $c\chi'(\eta) = \chi(a-\eta)$.

в) Если $\eta > a$, то имеем интегральное уравнение $\displaystyle\int_{\eta-a}^{1/2} \chi(\tau)\,d\tau = c\chi(\eta)$, дифференцируя которое, получаем $c\chi'(\eta) = -\chi(\eta - a)$.

Из б) и в) следует, что $\chi(a-\eta) = \chi(a+\eta)$ при $\eta \le 1/2 - a$. Для того чтобы составить дифференциальные уравнения (аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 4), рассмотрим несколько случаев.

1) При $0 \le \eta < 1/2 - a$ имеем $c\chi'(\eta) = \chi(a+\eta) + \chi(a-\eta) = 2\chi(a-\eta)$. Продифференцировав это уравнение и воспользовавшись п. б), получим дифференциальное уравнение $\chi''(\eta) + (2/c^2)\chi(\eta) = 0$. Отсюда, принимая во внимание граничное условие $\chi(0) = 0$, получаем

$$\chi(\eta) = c_1 \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{c}\eta\right).$$

2) При $\eta > a$, воспользовавшись случаем 1), получаем $\chi(\eta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} c_1 \cos\dfrac{\sqrt{2}}{c}(\eta - a)$.

3) При $2a - 1/2 \le \eta \le a$ аналогично случаю 2) получаем $\chi(\eta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} c_1 \cos\dfrac{\sqrt{2}}{c}(a - \eta)$.

4) При $1/2 - a < \eta < 2a - 1/2$ имеем $c\chi'(\eta) = \chi(a-\eta)$. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 4, находим $\chi(\eta) = c_2 \sin\dfrac{\eta}{c} + c_3 \cos\dfrac{\eta}{c}$, где константы c_2 и c_3 удовлетворяют условиям

$$c_3 \cos\frac{a}{c} - c_2\left(1 - \sin\frac{a}{c}\right) = 0, \quad c_3\left(1 + \sin\frac{a}{c}\right) - c_2 \cos\frac{a}{c} = 0.$$

Позже мы докажем, что $\lambda_{\max}(a) > 1/\pi$. Принимая это во внимание, можем считать, что $\sin\dfrac{a}{c} \neq 1$, откуда (так же, как в теореме 4) находим

$$c_3 = \rho\left(1 - \sin\frac{a}{c}\right), \quad c_2 = \rho\cos\frac{a}{c}\,. \tag{5.8}$$

Поскольку функция χ должна быть непрерывна на $[0,\, 1/2]$, то остается лишь приравнять ее значения в крайних точках рассмотренных отрезков

$$\begin{aligned} c_1 \sin\frac{\sqrt{2}}{c}\left(\frac{1}{2} - a\right) &= c_2 \sin\frac{1}{c}\left(\frac{1}{2} - a\right) + c_3 \cos\frac{1}{c}\left(\frac{1}{2} - a\right), \\ \frac{1}{\sqrt{2}} c_1 \cos\frac{\sqrt{2}}{c}\left(\frac{1}{2} - a\right) &= c_2 \sin\frac{1}{c}\left(2a - \frac{1}{2}\right) + c_3 \cos\frac{1}{c}\left(2a - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Подставив сюда выражения (5.8), получим

$$\begin{aligned} c_1 \sin\frac{\sqrt{2}}{c}\left(\frac{1}{2}-a\right) &= \rho\left(\sin\frac{1}{c}\left(\frac{1}{2}-2a\right)+\cos\frac{1}{c}\left(a-\frac{1}{2}\right)\right), \\ \frac{1}{\sqrt{2}}c_1 \cos\frac{\sqrt{2}}{c}\left(\frac{1}{2}-a\right) &= \rho\left(\cos\frac{1}{c}\left(\frac{1}{2}-2a\right)+\sin\frac{1}{c}\left(a-\frac{1}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Поделив первое слагаемое на второе и разложив сумму синуса и косинуса, получим

$$\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\sqrt{2}}{c}\left(\frac{1}{2}-a\right)\right)=\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{c}(1-3a)\right)\right). \tag{5.9}$$

Пусть $c > (2a)/\pi$. Левая часть соотношения (5.9) строго убывает по c (при $1/3 \le a < 1/2$), в пределе при $c \to +\infty$ стремится к 0, а правая строго возрастает при $a \ne 1/3$, постоянна при $a = 1/3$ и в пределе при $c \to +\infty$ стремится к 1. Таким образом, уравнение (5.9) имеет самое большее один корень. Легко убедиться, что при $c = (2a)/\pi$ правая часть строго меньше левой. Значит, решение этого уравнения относительно c строго больше $(2a)/\pi$, и $\lambda_{\max} > 1/\pi$. Теорема 5 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Андреев Н.Н.** Экстремальная задача для периодических функций с малым носителем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1997. № 1. С. 29–32.
2. **Арестов В.В., Бердышева Е.Е.** Задача Турана для положительно определенных функций с носителем в шестиугольнике // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2001. Т. 7, № 1. С. 21–29.
3. **Бари Н.К.** Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. 936 с.
4. **Горбачев Д.В.** Экстремальная задача для периодических функций с носителем в шаре // Мат. заметки. 2001. Т. 69, вып. 3. С. 346–352.
5. **Дейкалова М.В.** Функционал Тайкова в пространстве алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере // Мат. заметки. 2008. Т. 84, вып. 4. С. 532–551.
6. **Иванов В.И.** О задачах Турана и Дельсарта для периодических положительно определенных функций // Мат. заметки. 2006. Т. 80, вып. 6. С. 934–939.
7. **Люстерник Л.А., Соболев В.И.** Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.
8. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 333 с.
9. **Стечкин С.Б.** Одна экстремальная задача для тригонометрических рядов с неотрицательными коэффициентами // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1972. Vol. 23, no. 3–4. P. 289–291.
10. **Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.** Курс современного анализа. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. 515 с.
11. **Шилов Г.Е.** Математический анализ. М.: Наука, 1965. 327 с.
12. **Arestov V.V., Berdysheva E.E., Berens H.** On pointwise Turan's problem for positive definite functions // East J. Approx. 2003. Vol. 9, no. 1. P. 31–42.
13. **Arestov V.V., Berdysheva E.E.** The Turan problem for a class of polytopes // East J. Approx. 2002. Vol. 8, no. 3. P. 381–388.
14. **Boas R.P., Jr. and Kac M.** Inequalities for Fourier transforms of positive functions // Duke Math. J. 1945. Vol. 12, no. 1. P. 189–206.
15. **Ehm W., Gneiting T., Richards D.** Convolution roots of radial positive definite functions with compact support // Trans. Amer. Math. Soc. 2004. Vol. 356. P. 4655–4685.
16. **Revesz S.G.** Turan's extremal problem on locally compact abelian groups // arXiv.org e-Print arcive, id: arXiv:0904.1824v1. URL: http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0904/0904.1824v1.pdf.
17. **Rudin W.** An extension theorem for positive-definite functions // Duke Math. J. 1970. Vol. 37. P. 49–53.

Ефимов Андрей Владимирович
аспирант
Уральский федеральный университет
e-mail: anothar@ya.ru

Поступила 02.02.2011

Том 17 № 3 2011

УДК 517.977

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ В ЗАДАЧЕ КОММИВОЯЖЕРА[1]

Е. Е. Иванко

В работе формулируются и доказываются единообразные достаточные условия устойчивости оптимальных маршрутов в задаче коммивояжера при различных искажениях начальных данных: добавлении и удалении вершин, изменении матрицы стоимости перемещений. Приводятся полиномиальные алгоритмы, использующие полученные достаточные условия для построения областей устойчивости на конечных множествах. Демонстрируются результаты экспериментов в метрических задачах коммивояжера на целочисленной решетке.

Ключевые слова: задача коммивояжера, маршрутная задача, устойчивость, комбинаторная оптимизация.

E. E. Ivanko. Sufficient stability conditions in the traveling salesman problem.

Uniform sufficient conditions for the stability of optimal routes in the traveling salesman problem under various distortions of initial data are formulated and proved. The distortions include addition and removal of vertices and changes in the travel cost matrix. Polynomial-time algorithms are presented, which use the obtained sufficient conditions to construct stability domains on finite sets. Results of experiments in metric traveling salesman problems on the integer lattice are demonstrated.

Keywords: traveling salesman problem, routing problem, stability, combinatorial optimization.

Введение

Задача коммивояжера является одной из классических вычислительно трудных задач в области дискретной оптимизации. Изначально она была сформулирована как задача обнаружения кратчайшего маршрута обхода заданных точек на плоскости с возвратом в начальную позицию и ассоциировалась с работой странствующего торговца, стремящегося оптимизировать свой маршрут. Задача оказалась сложной и глубокой, довольно быстро переросла свою изначальную постановку, оставив, однако, традиционное название целому классу различных дочерних маршрутных задач. На сегодняшний день маршрутная задача в общем виде — это задача поиска "целесообразного" в том или ином смысле порядка на заданном множестве. Помимо собственно классических приложений, связанных с логистикой, подобные постановки представляют интерес при управлении робототехникой в условиях ограничений на энергоресурс, в области биоинформатики, при оптимизации конвейеров и организации вычислительных сетей.

В данной работе мы изучаем достаточные условия устойчивости оптимальных маршрутов в задаче коммивояжера при различных возмущениях начальных данных, включая добавление и удаление вершин. Существует ряд работ, посвященных устойчивости решений дискретных оптимизационных задач в целом [1–3] и задачи коммивояжера в частности [4–7]. Однако, как правило, устойчивость оптимального решения задачи коммивояжера исследуется в случае изменения стоимостей попарных перемещений между вершинами при неизменном количестве вершин. Кроме того, в указанных выше работах анализ устойчивости оптимального решения задачи коммивояжера проводится на основе анализа устойчивости метода (обычно метода математического программирования) вычисления этого оптимального решения. В настоящей

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 10-08-00484-а, 10-01-96020-р_урал_а) и программы 09-П-1-1014.

работе достаточные условия устойчивости получены в результате исследования внутренней структуры самой задачи безотносительно к методу ее решения.

Ранее в статье [8] автор рассматривал достаточные условия устойчивости оптимальных маршрутов при изменении размерности матрицы смежности (добавлении и удалении вершин). Данная статья обобщает полученные результаты, предлагая единообразные достаточные условия устойчивости также и при сохранении размерности матрицы смежности в случае изменения весов ребер (перемещение вершин). Кроме того, по сравнению с [8] существенно расширены достаточные условия сохранения оптимальных маршрутов при удалении вершин. Результаты в области добавления вершин аналогичны результатам работы [8], они приводятся и доказываются в настоящей статье в новых обозначениях для целостности изложения.

1. Обозначения

Рассмотрим некоторое множество X, в рамках которого будем вести все дальнейшие рассуждения. Зададим на X произвольную функцию стоимости перемещений для каждой упорядоченной пары элементов из X

$$d\colon X \times X \to \mathbb{R},$$

где $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел. Пусть в X выделено n-элементное подмножество $S = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset X$, которое мы будем называть далее *исходным множеством вершин*. В S зафиксированы два различных элемента: s — вершина старта и t — вершина финиша (в связи с чем полагаем $|S| > 2$). Без ограничения общности считаем, что $s \triangleq a_1, t \triangleq a_n$. Сужение функции d на множество $S \times S$ определяет традиционную для задач TSP (Traveling Salesman Problem) матрицу стоимостей перемещений между элементами исходного множества.

Рассмотрим множество $G(n)$ всех перестановок индексов элементов множества S, сохраняющих начальный и конечный индексы:

$$G(n) = \big\{\gamma\colon \overline{1,n} \leftrightarrow \overline{1,n} \mid \gamma(1) = 1, \gamma(n) = n\big\}.$$

Заданное множество перестановок соответствует традиционному определению множества маршрутов обхода S с фиксированными вершинами старта и финиша. В данной работе, однако, в связи с изменением множества посещаемых вершин целесообразно определять маршрут в терминах кортежей вершин множества S:

$$M_s^t(S) = \{(a_{\gamma(1)}, \ldots, a_{\gamma(n)})\colon \gamma \in G(n)\} \subset X^n,$$

где $n = |S|$ и согласно определению $a_{\gamma(1)} = a_1 = s; a_{\gamma(n)} = a_n = t$. Между маршрутами-перестановками в традиционном смысле и кортежами посещаемых вершин из $M_s^t(S)$ существует очевидное взаимно-однозначное соответствие $\Theta\colon\ G(n) \leftrightarrow M_s^t(S)$, где $\forall \gamma \in G(n)\ \ \Theta(\gamma) = (a_{\gamma(1)}, \ldots, a_{\gamma(n)})$. Подчеркнем, что в силу введенных выше обозначений $((b_1, \ldots, b_n) \in M_s^t(S)) \Rightarrow ((b_1 = s)\ \&\ (b_n = t))$.

Длиной всякого маршрута $\alpha = (b_1, \ldots, b_n) \in M_s^t(S)$ будем называть значение функции $D\colon\ M_s^t(S) \to \mathbb{R}$, где

$$D(\alpha) = \sum_{i=1}^{n-1} d(b_i, b_{i+1}).$$

Для произвольного множества вершин $S\colon |S| < \infty$ с заданными начальной s и конечной t вершинами введем длину оптимального обхода

$$D^* = \min_{\alpha \in M_s^t(S)} D(\alpha).$$

Все маршруты $\alpha_0 \in M_s^t(S)$, длина которых совпадает с D^*, будем называть *оптимальными* на $M_s^t(S)$.

Введем операции вставки, удаления и перемещения одной вершины в маршруте. Подчеркнем, что при определяемых ниже изменениях в множестве посещаемых вершин начальная s и конечная t вершины остаются неизменными. Пусть задан маршрут $\alpha = (b_1, \ldots, b_n) \in M_s^t(S)$, отмечена некоторая позиция в маршруте $i \in \overline{1, n-1}$ и зафиксирован $z \in X \setminus S$, тогда операцией вставки элемента z в маршрут α после i-й вершины будем называть функцию

$$Ins\colon (X \setminus S) \times \overline{1, n-1} \times M_s^t(S) \to \bigcup_{y \in X \setminus S} M_s^t(S \cup \{y\}),$$

определенную как

$$Ins\,(z, i, (b_1, \ldots, b_n)) = (b_1, \ldots, b_i, z, b_{i+1}, \ldots, b_n) \in M_s^t(S \cup \{z\}).$$

Операцией удаления i-й вершины из маршрута α назовем функцию

$$Del\colon \overline{2, n-1} \times M_s^t(S) \to \bigcup_{j \in \overline{2, n-1}} M_s^t(S \setminus \{b_j\}),$$

заданную в виде

$$Del\,(i, (b_1, \ldots, b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, \ldots, b_n)) = (b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n) \in M_s^t(S \setminus \{b_i\}).$$

И, наконец, операцию замены i-й вершины маршрута α на элемент z введем как функцию

$$Mov\colon (X \setminus S) \times \overline{2, n-1} \times M_s^t(S) \to \bigcup_{\substack{y \in X \setminus S \\ j \in \overline{2, n-1}}} M_s^t(S \setminus \{b_j\} \cup \{y\}),$$

где

$$Mov\,(z, i, (b_1, \ldots, b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, \ldots, b_n)) = (b_1, \ldots, b_{i-1}, z, b_{i+1}, \ldots, b_n) \in M_s^t(S \setminus \{b_i\} \cup \{z\}).$$

Кроме того, нам потребуется множество

$$S^* \triangleq \Big\{(x, y) \in S^2 \setminus \{(s, t)\} \mid x \neq y \;\&\; x \neq e \;\&\; y \neq s\Big\}. \tag{1.1}$$

В следующей лемме мы покажем, что S^* совпадает с совокупностью всех пар последовательных вершин во всех маршрутах из $M_s^t(S)$.

Лемма. *Пусть заданы множество X, функция стоимости $d\colon X^2 \to \mathbb{R}$, исходное множество вершин $S \subset X\colon |S| < \infty$, начальная и конечная вершины $(s, t) \in S^2$, тогда*

$$S^* = \Big\{(x, y) \in S^2 \mid \exists \alpha = (b_1, \ldots, b_n) \in M_s^t(S)\ \exists i \in \overline{1, n-1}\colon\ (x = b_i) \;\&\; (y = b_{i+1})\Big\}.$$

Доказательство. Пусть $(x, y) \in S^*$, если $x \neq s \;\&\; y \neq t$, то рассмотрим маршрут $\alpha = (s, x, y, b_1, \ldots, b_{n-4}, t)$, где $\{b_1, \ldots, b_{n-4}\} = S \setminus \{x, y, s, t\}$. Если $x = s \;\&\; y \neq t$, то $\alpha = (x, y, b_1, \ldots, b_{n-3}, t)$, где $\{b_1, \ldots, b_{n-3}\} = S \setminus \{t, x, y\}$. Наконец, если $x \neq s \;\&\; y = t$, то $\alpha = (s, b_1, \ldots, b_{n-3}, x, y)$, где $\{b_1, \ldots, b_{n-3}\} = S \setminus \{s, x, y\}$. Во всех рассмотренных случаях очевидно $\alpha \in M_s^t(S)$, а последний случай $x = s \;\&\; y = t$ невозможен по построению S^*. Обратно, если $\exists \alpha = (b_1, \ldots, b_n) \in M_s^t(S)\ \exists i \in \overline{1, n-1}$: $(x = b_i) \;\&\; (y = b_{i+1})$, то для (x, y) условия, определяющие множество (1.1), очевидно выполнены, если только $|S| > 2$. $\square$

Введем теперь удобные обозначения для длин измененных маршрутов. Пусть, как прежде, $\alpha = (b_1, \ldots, b_n) \in M_s^t(S)$, тогда

$$\forall z \in X \setminus S \quad \forall i \in \overline{1, n-1} \quad D(Ins(z, i, \alpha)) = D(\alpha) + \triangle_I(z, b_i, b_{i+1}), \tag{1.2}$$

где $\triangle_I$ — оператор, показывающий изменение длины маршрута при вставке вершины:

$$\forall w \in X \setminus S \quad \forall (x,y) \in S^*$$
$$\triangle_I(w,x,y) \triangleq d(x,w) + d(w,y) - d(x,y).$$

В случае удаления аналогичным образом запишем

$$\forall i \in \overline{2, n-1} \quad D(Del(i,\alpha)) = D(\alpha) + \triangle_D(b_i, b_{i-1}, b_{i+1}), \tag{1.3}$$

где $\triangle_D$ — оператор, показывающий изменение длины маршрута при удалении вершины

$$\forall (x,y) \in S^* \;\; \forall v \in S \setminus \{x,y,s,t\}$$
$$\triangle_D(v,x,y) \triangleq d(x,y) - d(x,v) - d(v,y).$$

Наконец, для случая перемещения имеем

$$\forall z \in X \setminus S \quad \forall i \in \overline{2, n-1} \quad D(Mov(z,i,\alpha)) = D(\alpha) + \triangle_M(z, b_i, b_{i-1}, b_{i+1}), \tag{1.4}$$

где $\triangle_M$ — оператор, показывающий изменение длины маршрута при перемещении вершины:

$$\forall w \in X \setminus S \;\; \forall (x,y) \in S^* \;\; \forall v \in S \setminus \{x,y,s,t\}$$
$$\triangle_M(w,v,x,y) \triangleq d(x,w) + d(w,y) - d(x,v) - d(v,y).$$

Заметим, что операцию перемещения можно представить как последовательность операций удаления существующей и вставки в маршрут новой вершины. Теперь, пользуясь введенными обозначениями, мы готовы сформулировать теоремы об устойчивости.

2. Достаточные условия устойчивости

Теоретическую часть статьи мы начнем с рассмотрения достаточных условий устойчивости оптимального маршрута в случае добавления новой вершины к маршруту. А именно, мы будем интересоваться условиями, при которых добавляемая вершина может быть вставлена в существующий оптимальный маршрут за полиномиальное от величины $|S|$ число операций без потери оптимальности нового маршрута. Пример, демонстрирующий существенность условий теорем 1 и 2, приводится в [8]. Тот же пример можно модифицировать для демонстрации существенности условий теоремы 3, здесь мы не станем на этом останавливаться. Следующая теорема повторяет результат, полученный в работе [8] и приводится для целостности изложения. Отметим, что в новых обозначениях доказательство данной теоремы существенно упростилось.

Теорема 1. *Пусть заданы множество X, функция стоимости $d\colon X^2 \to \mathbb{R}$, исходное множество вершин $S \subset X\colon |S| < \infty$, начальная и конечная вершины $(s,t) \in S^2$, оптимальный маршрут $\alpha_0 = (b_1^0, \ldots, b_n^0) \in M_s^t(S)$, тогда $\forall z \in X \setminus S$ $\forall i \in \overline{1, n-1}$, маршрут $Ins(z,i,\alpha_0) \in M_s^t(S \cup \{z\})$ оптимален, если выполнено условие*

$$\triangle_I(z, b_i^0, b_{i+1}^0) = \min_{(x,y)\in S^*} \triangle_I(z,x,y). \tag{2.1}$$

Доказательство. Пусть для некоторых $z \in X \setminus S$, $i \in \overline{1, n-1}$ выполнены условия (2.1). Обозначим $\widetilde{\alpha}_0 = Ins(z,i,\alpha_0)$. Рассмотрим произвольный маршрут

$$\widetilde{\beta} = (b_1, \ldots, b_j, z, b_{j+1}, \ldots, b_n) \in M_s^t(S \cup \{z\}),$$

допуская $b_j = b_1$ или $b_{j+1} = b_n$. Пусть $\beta = (b_1, \ldots, b_j, b_{j+1}, \ldots, b_n) \in M_s^t(S)\colon Ins(z,j,\beta) = \widetilde{\beta}$. Пользуясь выражением (1.2), распишем длину маршрута $\widetilde{\beta}$

$$D(\widetilde{\beta}) = D(Ins(z,j,\beta)) = D(\beta) + \triangle_I(z, b_j, b_{j+1}).$$

Аналогичным образом распишем

$$D(\widetilde{\alpha}_0) = D(Ins(z, i, \alpha_0)) = D(\alpha_0) + \triangle_I(z, b_i^0, b_{i+1}^0).$$

Маршрут α_0 оптимален на множестве $M_s^t(S)$, следовательно, $D(\alpha_0) \leq D(\beta)$. С другой стороны, по условию (2.1), учитывая, что согласно лемме из разд. 1 $(b_j, b_{j+1}) \in S^*$, имеем $\triangle_I(z, b_i^0, b_{i+1}^0) \leq \triangle_I(z, b_j, b_{j+1})$, откуда вытекает искомое неравенство

$$D(\widetilde{\alpha}_0) = D(\alpha_0) + \triangle_I(z, b_i^0, b_{i+1}^0) \leq D(\beta) + \triangle_I(z, b_j, b_{j+1}) = D(\widetilde{\beta}),$$

справедливое для всякого $\widetilde{\beta} \in M_s^t(S \cup \{z\})$. Следовательно, $\widetilde{\alpha}_0$ — оптимальный маршрут на множестве $M_s^t(S \cup \{z\})$. □

Полиномиальность проверки условий (2.1) легко видеть непосредственно. Строго она следует из предложения 1 разд. 4. Похожим образом сформулируем и докажем достаточное условие устойчивости в случае удаления вершины из оптимального маршрута. Предложенные в теореме 2 условия позволяют за полиномиальное от величины $|S|$ число операций выяснить, возможно ли изъять вершину оптимального маршрута без потери оптимальности. Отметим, что сформулированные в теореме 2 достаточные условия существенно шире аналогичных из работы [8].

Теорема 2. *Пусть заданы множество X, функция стоимости $d\colon X^2 \to \mathbb{R}$, исходное множество вершин $S \subset X\colon |S| < \infty$, начальная и конечная вершины $(s, t) \in S^2$, оптимальный маршрут $\alpha_0 = (b_1^0, \ldots, b_n^0) \in M_s^t(S)$, тогда $\forall i \in \overline{2, n-1}$ маршрут $Del(i, \alpha_0) \in M_s^t(S \setminus \{b_i^0\})$ оптимален, если выполнено хотя бы одно из условий*

$$\exists x_0 \in S \setminus \{e, b_i^0\}\colon\ \triangle_D(b_i^0, b_{i-1}^0, b_{i+1}^0) \leq \min_{\substack{(x_0, y) \in S^* \\ y \neq b_i^0}} \triangle_D(b_i^0, x_0, y), \tag{2.2}$$

$$\exists y_0 \in S \setminus \{s, b_i^0\}\colon\ \triangle_D(b_i^0, b_{i-1}^0, b_{i+1}^0) \leq \min_{\substack{(x, y_0) \in S^* \\ x \neq b_i^0}} \triangle_D(b_i^0, x, y_0). \tag{2.3}$$

Доказательство. Пусть без ограничения общности для некоторого $i \in \overline{2, n-1}$ выполнено условие (2.2). Обозначим маршрут $Del(i, \alpha_0)$ как $\widetilde{\alpha}_0$. Рассмотрим произвольный маршрут $\widetilde{\beta}$ обхода множества $S \setminus \{b_i^0\}$. Вершина x_0 (выбранная из условия (2.2)) должна содержаться в маршруте $\widetilde{\beta}$. Учитывая это, для дальнейших рассуждений маршрут $\widetilde{\beta}$ удобно записать в виде

$$\widetilde{\beta} = (b_1, \ldots, x_0, b_{j+1}, \ldots, b_n) \in M_s^t(S \setminus \{b_i^0\}),$$

полагая $x_0 = b_{j-1}$, допуская $b_1 = x_0$ и опуская индекс j в нумерации. Рассмотрим маршрут β, получающийся из $\widetilde{\beta}$ вставкой вершины b_i^0 непосредственно после x_0,

$$\beta = (b_1, \ldots, x_0, b_i^0, b_{j+1}, \ldots, b_n) \in M_s^t(S)\colon\ Del(j, \beta) = \widetilde{\beta}.$$

Воспользуемся выражением (1.3)

$$D(\widetilde{\beta}) = D(Del(j, \beta)) = D(\beta) + \triangle_D(b_i^0, x_0, b_{j+1}).$$

Распишем аналогичным образом длину маршрута $\widetilde{\alpha}_0$

$$D(\widetilde{\alpha}_0) = D(Del(i, \alpha_0)) = D(\alpha_0) + \triangle_D(b_i^0, b_{i-1}^0, b_{i+1}^0).$$

Маршрут α_0 оптимален на множестве $M_s^t(S)$, следовательно, $D(\alpha_0) \leq D(\beta)$. Кроме того, учитывая, что $(x_0, b_{j+1}) \in S^*$ и $x_0 \neq b_{j+1}$, по условию (2.2) имеем $\triangle_D(b_i^0, b_{i-1}^0, b_{i+1}^0) \leq \triangle_D(b_i^0, x_0, b_{j+1})$, следовательно, для произвольного маршрута $\widetilde{\beta} \in M_s^t(S \setminus \{b_i^0\})$ справедливо

$$D(\widetilde{\alpha}_0) = D(\alpha_0) + \triangle_D(b_i^0, b_{i-1}^0, b_{i+1}^0) \leq D(\beta) + \triangle_D(b_i^0, x_0, b_{j+1}) = D(\widetilde{\beta}),$$

что означает оптимальность маршрута $D(\widetilde{\alpha}_0)$ на множестве $M_s^t(S \setminus \{b_i^0\})$.

Аналогичным образом можно показать утверждение теоремы в случае выполнения условий (2.3), достаточно лишь для всякого маршрута

$$\widetilde{\beta} = (b_1, \ldots, b_{j-1}, y_0, \ldots, b_n) \in M_s^t(S \setminus \{b_i^0\}),$$

где $b_{j+1} = y_0$, допускается $y_0 = b_n$ и индекс j в нумерации пропускается, выбрать маршрут

$$\beta = (b_1, \ldots, b_{j-1}, b_i^0, y_0, \ldots, b_n) \in M_s^t(S)\colon\ Del(j, \beta) = \widetilde{\beta}. \qquad \square$$

Полиномиальность проверки условий (2.2), (2.3) легко показать (см. предложение 2 разд. 4). Рассмотрим, наконец, случай перемещения вершины. Говоря о перемещении, мы имеем в виду замену одной из вершин множества $S \setminus \{s, t\}$ на некоторый элемент множества $X \setminus \{S\}$. Если у нас имеется оптимальный маршрут обхода исходного множества и заменяемая вершина в этом маршруте находится на i-й позиции, то при замене мы получим маршрут, совпадающий с исходным оптимальным во всех позициях кроме i-й, на которой в результирующем маршруте расположена новая вершина. Следующая теорема дает достаточные условия (проверяемые за полиномиальное от величины $|S|$ количество операций), при выполнении которых новый маршрут остается оптимальным.

Теорема 3. *Пусть заданы множество X, функция стоимости $d\colon X^2 \to \mathbb{R}$, исходное множество вершин $S \subset X\colon |S| < \infty$, начальная и конечная вершины $(s, t) \in S^2$, оптимальный маршрут $\alpha_0 = (b_1^0, \ldots, b_n^0) \in M_s^t(S)$, тогда для произвольной вершины $b_i^0 \in S \setminus \{s, t\}$, где $i \in \overline{2, n-1}$, и произвольного элемента $z \in X \setminus S$ маршрут $Mov(z, i, \alpha_0) \in M_s^t(S \setminus \{b_i^0\} \cup \{z\})$ оптимален, если выполнено условие*

$$\triangle_M(z, b_i^0, b_{i-1}^0, b_{i+1}^0) = \min_{\substack{(x,y) \in S^* \\ b_i^0 \notin \{x,y\}}} \triangle_M(z, b_i^0, x, y). \tag{2.4}$$

Доказательство. Пусть для некоторых $z \in X \setminus S$, $i \in \overline{2, n-1}$ выполнено условие (2.4). Обозначим $\widetilde{\alpha}_0 = Mov(z, i, \alpha_0)$. Для любого маршрута

$$\widetilde{\beta} = (b_1, \ldots, b_{j-1}, z, b_{j+1}, \ldots, b_n) \in M_s^t(S \setminus \{b_i^0\} \cup \{z\}),$$

где допускаем $b_1 = b_{j-1}$ или $b_n = b_{j+1}$, выберем соответствующий маршрут

$$\beta = (b_1, \ldots, b_{j-1}, b_i^0, b_{j+1}, \ldots, b_n) \in M_s^t(S)\colon\ Mov(z, j, \beta) = \widetilde{\beta}.$$

Пользуясь выражением (1.4), распишем длину маршрута $\widetilde{\beta}$

$$D(\widetilde{\beta}) = D(Mov(z, j, \beta)) = D(\beta) + \triangle_M(z, b_i^0, b_{j-1}, b_{j+1}).$$

Аналогичным образом распишем

$$D(\widetilde{\alpha}_0) = D(Mov(z, i, \alpha_0)) = D(\alpha_0) + \triangle_M(z, b_i^0, b_{i-1}^0, b_{i+1}^0).$$

В силу оптимальности маршрута α_0 на множестве $M_s^t(S)$ имеем $D(\alpha_0) \le D(\beta)$. С другой стороны, учитывая, что $(b_{j-1}, b_{j+1}) \in S^*$ и $b_i^0 \notin \{b_{j-1}, b_{j+1}\}$, по условию (2.4) имеем

$$\triangle_M(z, b_i^0, b_{i-1}^0, b_{i+1}^0) \le \triangle_M(z, b_i^0, b_{j-1}, b_{j+1}),$$

откуда

$$D(\widetilde{\alpha}_0) = D(\alpha_0) + \triangle_M(z, b_i^0, b_{i-1}^0, b_{i+1}^0) \le D(\beta) + \triangle_M(z, b_i^0, b_{j-1}, b_{j+1}) = D(\widetilde{\beta}),$$

выполняющееся для любого $\widetilde{\beta} \in M_s^t(S \setminus \{b_i^0\} \cup \{z\})$. Следовательно, $\widetilde{\alpha}_0$ — оптимальный маршрут на множестве $M_s^t(S \setminus \{b_i^0\} \cup \{z\})$. □

Полиномиальность проверки условий (2.4) следует из предложения 3 раздела 4. Завершая теоретическую часть, приведем некоторые соображения о топологических свойствах областей устойчивости при добавлении и перемещении вершин в случае, когда функция стоимости d является метрикой. Используя выражения (2.1), (2.4) для всякого фиксированного оптимального маршрута $\alpha_0 = (b_1^0, \ldots, b_n^0) \in M_s^t(S)$ и позиции i, запишем области устойчивости на множестве X:

$$F_1(z) \triangleq \triangle_I(z, b_i^0, b_{i+1}^0) - \min_{(x,y)\in S^*} \triangle_I(z, x, y),$$

$$F_2(z) \triangleq \triangle_M(z, b_i^0, b_{i-1}^0, b_{i+1}^0) - \min_{\substack{(x,y)\in S^* \\ b_i^0 \notin \{x,y\}}} \triangle_M(z, b_i^0, x, y),$$

$$\Phi_1(i, \alpha_0) = \{z \in X \mid F_1(z) = 0\}, \quad \Phi_2(i, \alpha_0) = \{z \in X \mid F_2(z) = 0\}. \tag{2.5}$$

Если функция стоимости перемещений d является метрикой, то функции F_1 и F_2 непрерывны. Поскольку согласно (2.5) образы $F_1(\Phi_1)$ и $F_2(\Phi_2)$ являются замкнутыми множествами ($F_1(\Phi_1) = F_2(\Phi_2) = \{0\}$), то прообразы $\Phi_1(i, \alpha_0)$ и $\Phi_2(i, \alpha_0)$ соответствующих непрерывных отображений F_1 и F_2 замкнуты. Иначе говоря, если X — метрическое пространство, то при добавлении и перемещении вершин в оптимальном маршруте области устойчивости (2.5) оптимального маршрута в X являются замкнутыми множествами. В частности, полученное свойство гарантирует, что "дырки" (если они существуют) в областях устойчивости маршрутной задачи в линейном пространстве состоят только из внутренних точек.

Из результатов экспериментов (см. разд. 5) можно предположить, что указанные области устойчивости также линейно связны и односвязны, однако доказательство этого факта пока не найдено.

3. Пример аналитической области устойчивости на евклидовой плоскости

Приведенные в предыдущем разделе достаточные условия иногда позволяют аналитически описать области устойчивости для метрических задач коммивояжера. Следует отметить, что аналитическое описание таких областей — это нетривиальная задача, не имеющая на сегодняшний день алгоритма решения и требующая исследования в каждом отдельном случае. Ниже предложен один простой пример такой области устойчивости при перемещении вершины. Рассмотрим задачу коммивояжера на евклидовой плоскости $X = \mathbb{R}^2$ (см. рис. 1)

$$\forall\ a = (a_x, a_y), \quad b = (b_x, b_y) \in X \quad d(a, b) = \sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2}.$$

Пусть задано исходное множество $S \subset X\colon |S| = n$, начальная и конечная вершины $s, t \in S$ и оптимальный маршрут $\alpha_0 = (b_1, \ldots, b_n) \in M_s^t(S)$. Пусть далее A, C, B — некоторые не лежащие на одной прямой последовательные вершины оптимального маршрута $\alpha_0 : \exists i \in \overline{2, n-1}\colon\ b_{i-1} = A,\ b_i = C,\ b_{i+1} = B$, расположенные так, что углы $\angle BAC$ и $\angle ABC$ не превосходят $\pi/2$, а значит, $\exists H \in [AB]\colon\ [CH] \perp [A, B]$. Проведем прямую d через точку C так, чтобы $d \perp [CH]$. Прямая d разделяет плоскость $\mathbb{R}^2$ на две полуплоскости.

Если множество S устроено таким образом, что полуплоскость δ с границей d не содержит вершин A и B, но содержит все вершины множества $S \setminus \{A, B\}$, то при перемещении вершины C в любую точку $O \in [CH]$ маршрут

$$\widetilde{\alpha}_0 = (b_1, \ldots, A, O, B, \ldots, b_n),$$

где мы допускаем $b_1 = A$ или $b_n = B$, будет оптимальным на множестве $M_s^t(S \setminus \{C\} \cup \{O\})$.

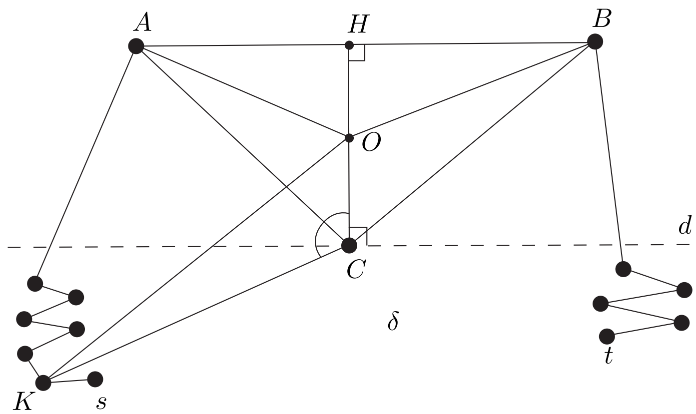


Рис. 1. Пример аналитической области устойчивости при перемещении вершины для маршрутной задачи на евклидовой плоскости.

Покажем это с помощью теоремы 3, проверив условие (2.4), записываемое в данном случае для $\forall O \in [CH]$ в виде

$$\triangle_M(O,C,A,B) = \min_{\substack{(x,y)\in S^*\\ C\notin\{x,y\}}} \triangle_M(O,C,x,y), \tag{3.1}$$

где S^* определена выражением (1.1).

Заметим сначала, что для всякой точки $K \in \delta \cup d$ расстояние от K до C будет увеличиваться при “движении C к H”:

$$\forall K \in \delta \cup d \quad |KO| - |KC| \geq 0. \tag{3.2}$$

Это легко показать, пользуясь теоремой косинусов. Запишем $|KO|^2 = |KC|^2 + |CO|^2 - 2|CO||KC|\cdot\cos\angle KCO$. По построению плоскости δ угол $\angle KCO \geq \pi/2$, значит, $\cos\angle KCO \leq 0$, из чего следует, что $|KO| > |KC|$, если $|CO| > 0$, и $|KO| = |KC|$, если $|CO| = 0$.

С другой стороны, для A и B справедливо обратное — при “движении C к H” расстояние между любой из вершин A, B и движущейся C уменьшается:

$$|AO| - |AC| \leq 0, \quad |BO| - |BC| \leq 0. \tag{3.3}$$

Действительно, пользуясь теоремой Пифагора (при $|CO| > 0$): $|OH| < |CH| \Rightarrow |OH|^2 < |CH|^2 \Rightarrow |OH|^2 + |AH|^2 < |CH|^2 + |AH|^2 \Rightarrow |OA|^2 < |CA|^2 \Rightarrow |OA| < |CA|$ (аналогично $|OB| < |CB|$).

Возвращаясь к доказательству (3.1), распишем левую часть проверяемого условия

$$\triangle_M(O,C,A,B) = d(A,O) + d(O,B) - d(A,C) - d(C,B) = \underbrace{|AO| - |AC|}_{q_1\leq 0} + \underbrace{|BO| - |BC|}_{q_2\leq 0} \overset{(3.3)}{\leq} 0.$$

Распишем теперь правую часть (3.1):

$$\forall (x,y) \in S^*\colon\ C \notin \{x,y\}$$
$$\triangle_M(O,C,x,y) = d(x,O) + d(O,y) - d(x,C) - d(C,y) = \underbrace{|xO| - |xC|}_{w_1} + \underbrace{|yO| - |yC|}_{w_2}.$$

Далее возможны три случая:

1) $\{x,y\} \cap \{A,B\} = \varnothing$; в этом случае согласно (3.2) $w_1 \geq 0$ и $w_2 \geq 0$;

2) $|\{x,y\} \cap \{A,B\}| = 1$; один из элементов x, y совпадает с одним из элементов A, B, а второй принадлежит множеству $S \setminus \{A,B\}$; в этом случае одна из величин w_1, w_2 совпадает с одним из значений q_1, q_2 (неположительна), а вторая по (3.2) неотрицательна;

3) $\{x,y\} = \{A,B\}$; в этом случае $q_1 + q_2 = w_1 + w_2$.

Во всех трех случаях имеем неравенство $q_1 + q_2 \leq w_1 + w_2$, выполняющееся для $\forall (x,y) \in S^*\colon\ C \notin \{x,y\}$, что и доказывает верность условия (3.1) для всякого $O \in [C,H]$.

4. Алгоритмы

Построение аналитических областей устойчивости в задаче коммивояжера является отдельной сложной задачей. На практике нередко более удобными оказываются численные подходы. В настоящем разделе предлагаются алгоритмы построения областей устойчивости на конечном множестве возможных изменений начальных данных. С помощью приведенных алгоритмов в следующем разделе строятся области устойчивости на ограниченном участке целочисленной решетки на евклидовой плоскости.

Обрисуем кратко общую структуру алгоритмов. Для всякого возможного возмущения (из конечного множества допустимых возмущений) начальных данных рассчитывается (не более, чем за $O(n^2)$ операций) величина $\triangle^0$, использующаяся для проверки выполнения достаточных условий соответствующей теоремы. Для всякой вершины известного оптимального маршрута проверяется (с использованием $\triangle^0$) выполнение соответствующего достаточного условия. Если условие выполняется, то возмущение (вставка, удаление, перемещение вершины) может быть отнесено к найденной вершине, при этом результирующий маршрут сохранит оптимальность.

Приведенные ниже алгоритмы изложены наглядно, быть может, в ущерб быстродействию.

А л г о р и т м 1.

1. Пусть заданы множество $X\colon |X| < \infty$, функция стоимости $d\colon X^2 \to \mathbb{R}$, исходное множество вершин $S \subset X$, начальная и конечная вершины $(s,t) \in S^2$, оптимальный маршрут $\alpha_0 = (b_1^0, \ldots, b_n^0) \in M_s^t(S)$. Пусть, кроме того, каждому ребру (b_i^0, b_{i+1}^0) маршрута α_0, где $i \in \overline{1, n-1}$, поставлен в соответствие свой “цвет” $C_i \in \mathbb{N}$ ($C_i \neq C_j$, если $i \neq j$).

2. Для всякого $z \in X \setminus S$

   (a) рассчитаем $\triangle^0(z) = \min\limits_{\substack{(x,y)\in S^* \\ z\notin\{x,y\}}} \triangle_I(z,x,y)$;

   (b) переберем позиции $\overline{1, n-1}$ в оптимальном маршруте α_0. Если

$$\exists i \in \overline{1, n-1}\colon\ \triangle_I(z, b_i^0, b_{i+1}^0) = \triangle^0(z),$$

   то $Ins(z, i, \alpha_0)$ — оптимальный маршрут на $M_s^t(S \cup \{z\})$; отметим в этом случае точку z “цветом” C_i.

Предложение 1. *Верхнюю асимптотическую оценку вычислительной сложности алгоритма* 1 *можно записать как* $O(n^2|X|)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Шаг 2 алгоритма 1 повторяется не более $|X|$ раз. Для каждого повторения необходимо рассчитать $\triangle^0(z)$ за $O(|S^*|) = O(n^2)$ операций на шаге 2(a), после чего перебрать все позиции в оптимальном маршруте за $O(n)$ операций на шаге 2(b). Суммарная верхняя оценка вычислительной сложности составит $(O(n^2) + O(n))|X| = O(n^2|X|)$. $\square$

Перейдем к изложению алгоритма для случая удаления вершины из оптимального маршрута. Заметим, что, опираясь на принцип Беллмана, мы можем удалить произвольное количество последовательных вершин с начала либо с конца любого оптимального маршрута без потери оптимальности, поэтому при построении алгоритма мы будем интересоваться только устойчивым удалением внутренних точек оптимального маршрута $z \in S \setminus \{s,t\}$.

А л г о р и т м 2.

1. Пусть заданы множество X, функция стоимости $d\colon\ X^2 \to \mathbb{R}$, исходное множество вершин $S \subset X\colon |S| < \infty$, начальная и конечная вершины $(s,t) \in S^2$, оптимальный маршрут $\alpha_0 = (b_1^0, \ldots, b_n^0) \in M_s^t(S)$.

2. Для всякого $i \in \overline{2, n-1}$ выполним:

   (a) для всякого $x_0 \in S \setminus \{t, b_i^0\}$ рассчитаем

$$\triangle_1^0(b_i^0, x_0) = \min_{(x_0,y)\in S^* y\neq b_i^0} \triangle_D(b_i, x_0, y);$$

(b) для всякого $y_0 \in S \setminus \{s, b_i^0\}$ рассчитаем

$$\triangle_2^0(b_i^0, y_0) = \min_{\substack{(x,y_0)\in S^* \\ x\neq b_i^0}} \triangle_D(b_i^0, x, y_0);$$

(c) переберем все $v \in S \setminus \{s, t, b_i^0\}$; если

$$\exists v_0 \in S \setminus \{s,t,b_i^0\}\colon\ \triangle_D(b_i^0, b_{i-1}^0, b_{i+1}^0) \le \triangle_1^0(b_i^0, v_0) \text{ или } \triangle_D(b_i^0, b_{i-1}^0, b_{i+1}^0) \le \triangle_2^0(b_i^0, v_0),$$

то $Del(i, \alpha_0)$ — оптимальный маршрут на множестве $M_s^t(S \setminus \{b_i^0\})$;

(d) если

$$\triangle_D(b_i^0, b_{i-1}^0, b_{i+1}^0) \le \triangle_1^0(b_i^0, s) \text{ или } \triangle_D(b_i^0, b_{i-1}^0, b_{i+1}^0) \le \triangle_2^0(b_i^0, t),$$

то $Del(i_0, \alpha_0)$ — оптимальный маршрут на множестве $M_s^t(S \setminus \{b_i^0\})$.

Отметим, что в работе [8] были предложены условия 2(d) без учета совокупности условий 2(c).

Предложение 2. *Верхнюю асимптотическую оценку вычислительной сложности алгоритма* 2 *можно записать как* $O(n^3)$.

Доказательство. Шаг 2 алгоритма 2 повторяется не более n раз — для каждого элемента $S \setminus \{s,t\}$. На всяком повторении шага 2 необходимо выполнить шаги 2(a), 2(b), 2(c) и 2(d). В каждом из шагов 2(a) и 2(b) расчет минимума повторяется не более n раз (для всех допустимых x_0, y_0), требуя на всяком повторении не более $O(n)$ операций для расчета соответствующего минимума. Шаг 2(c) потребует не более $O(n)$ операций — для всякого $v \in S \setminus \{s,t,z\}$. Шаг 2(d) требует фиксированного числа операций $O(1)$. Следовательно, вычислительная сложность алгоритма 2 не превосходит $n(nO(n)+nO(n)+O(n)+O(1)) = O(n^3)$. □

Рассмотрим, наконец, алгоритм расчета позиций, в которые возможно перемещение вершин оптимального маршрута без потери оптимальности.

Алгоритм 3.

1. Пусть заданы множество $X\colon |X| < \infty$, функция стоимости $d\colon X^2 \to \mathbb{R}$, исходное множество вершин $S \subset X$, начальная и конечная вершины $(s,t) \in S^2$, оптимальный маршрут $\alpha_0 = (b_1^0, \ldots, b_n^0) \in M_s^t(S)$. Пусть, кроме того, каждой вершине b_i^0 маршрута α_0, где $i \in \overline{2, n-1}$, поставлен в соответствие свой "цвет" $C_i \in \mathbb{N}$ ($C_i \ne C_j$, если $i \ne j$).

2. Для всяких $z \in X \setminus S,\ i \in \overline{2, n-1}$

(a) рассчитаем $\triangle^0(z, b_i^0) = \min\limits_{\substack{(x,y)\in S^* \\ b_i^0\notin\{x,y\}}} \triangle_M(z, b_i^0, x, y)$;

(b) если $\triangle_M(z, b_i^0, b_{i-1}^0, b_{i+1}^0) = \triangle^0(z, b_i^0)$, то $Mov(z, i, \alpha_0)$ — оптимальный маршрут на множестве $M_s^t(S \setminus \{b_i^0\} \cup \{z\})$.

Предложение 3. *Верхнюю асимптотическую оценку вычислительной сложности алгоритма* 3 *можно записать как* $O(n^3|X|)$.

Доказательство. Шаг 2 алгоритма 3 повторяется не более $n|X|$ раз. Для каждого повторения на шаге 2(a) необходимо рассчитать соответствующий минимум, что потребует $O(|S^*|) = O(n^2)$ операций. Следовательно, вычислительная сложность алгоритма 3 не превосходит $n|X|O(n^2) = O(n^3|X|)$. □

Перейдем к изложению результатов экспериментов.

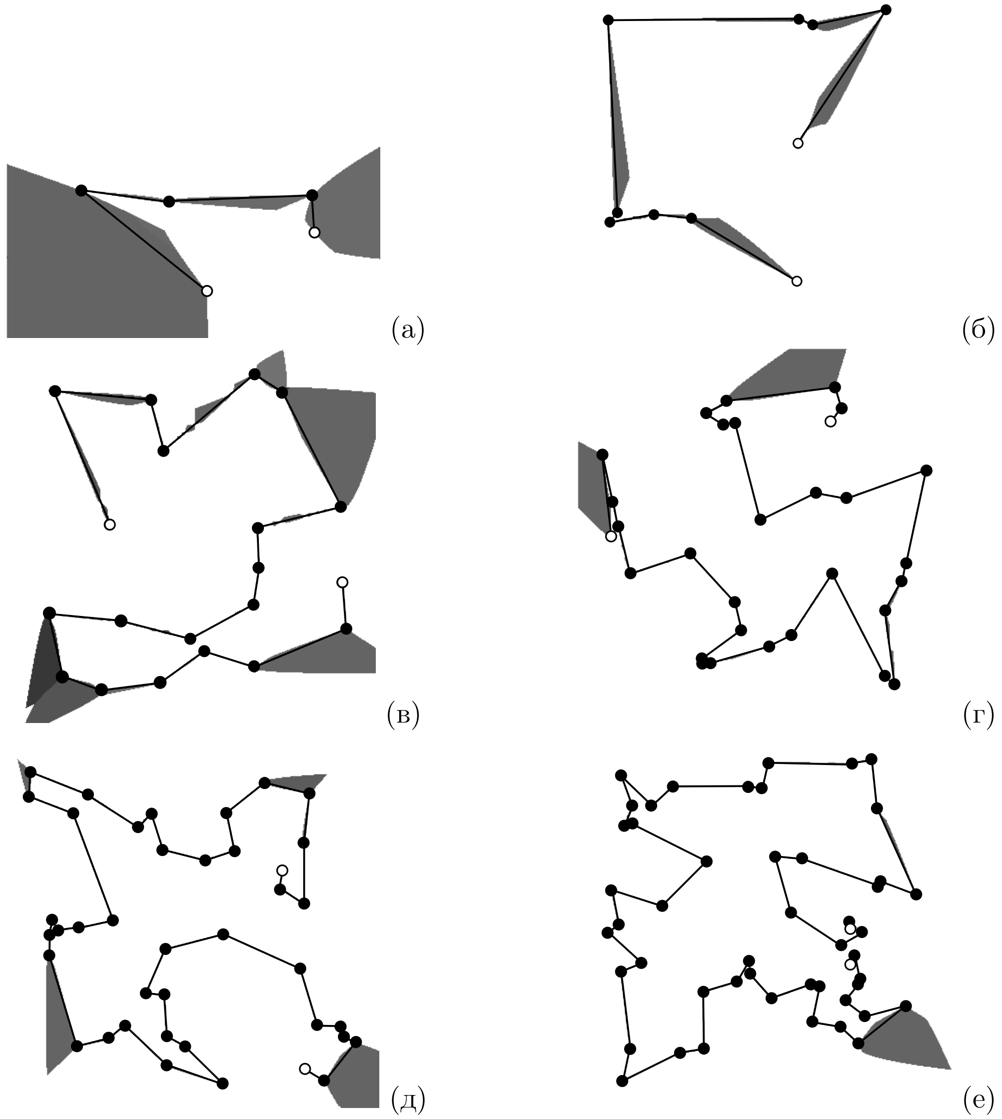


Рис. 2. Примеры областей устойчивости оптимальных маршрутов в задаче коммивояжера на ограниченном участке целочисленной решетки евклидовой плоскости при добавлении вершины. Рассмотрены оптимальные маршруты, содержащие (а) — 5, (б) — 10, (в) — 20, (г) — 30, (д) — 40 и (е) — 50 вершин. Фиксированные начало и конец маршрутов обозначены выколотыми кружками. При добавлении новой вершины в область целочисленной решетки, отмеченную серым цветом, возможно включение добавленной вершины в соответствующее (содержащееся в) области ребро оптимального маршрута без потери оптимальности.

5. Эксперименты

В настоящем разделе мы продемонстрируем применение сформулированных выше алгоритмов для построения областей устойчивости в маршрутной задаче на евклидовой плоскости внутри участка целочисленной решетки $\overline{1,400} \times \overline{1,400}$. Итак, пусть $X = \{(x, y)\colon\ x, y \in \overline{1,400}\}$, задано исходное множество $S \subset X$, в котором выделены начальная s и конечная t вершины $s, t \in S\colon\ s \neq t$. Для любых двух вершин множества X задана функция стоимости перемещения как целая часть евклидова расстояния между этими вершинами

$$\forall a = (a_x, a_y), \quad b = (b_x, b_y) \in X \quad d(a, b) = \left[\sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2}\right].$$

Взятие целой части обусловлено использованием при проведении экспериментов программы для решения целочисленных маршрутных задач Concorde [9].

Результаты экспериментов представлены на рис. 2–4. Каждый рисунок содержит 400×400 пикселей, а каждый пиксел рисунка соответствует элементу определенного выше множества X. Интересно отметить, что независимо от размерности задачи приведенные в настоящей работе достаточные условия в большинстве случаев позволяют для всех рассмотренных видов искажений (вставка, удаление и перемещение вершины) указать содержательные, неочевидные области устойчивости на плоскости.

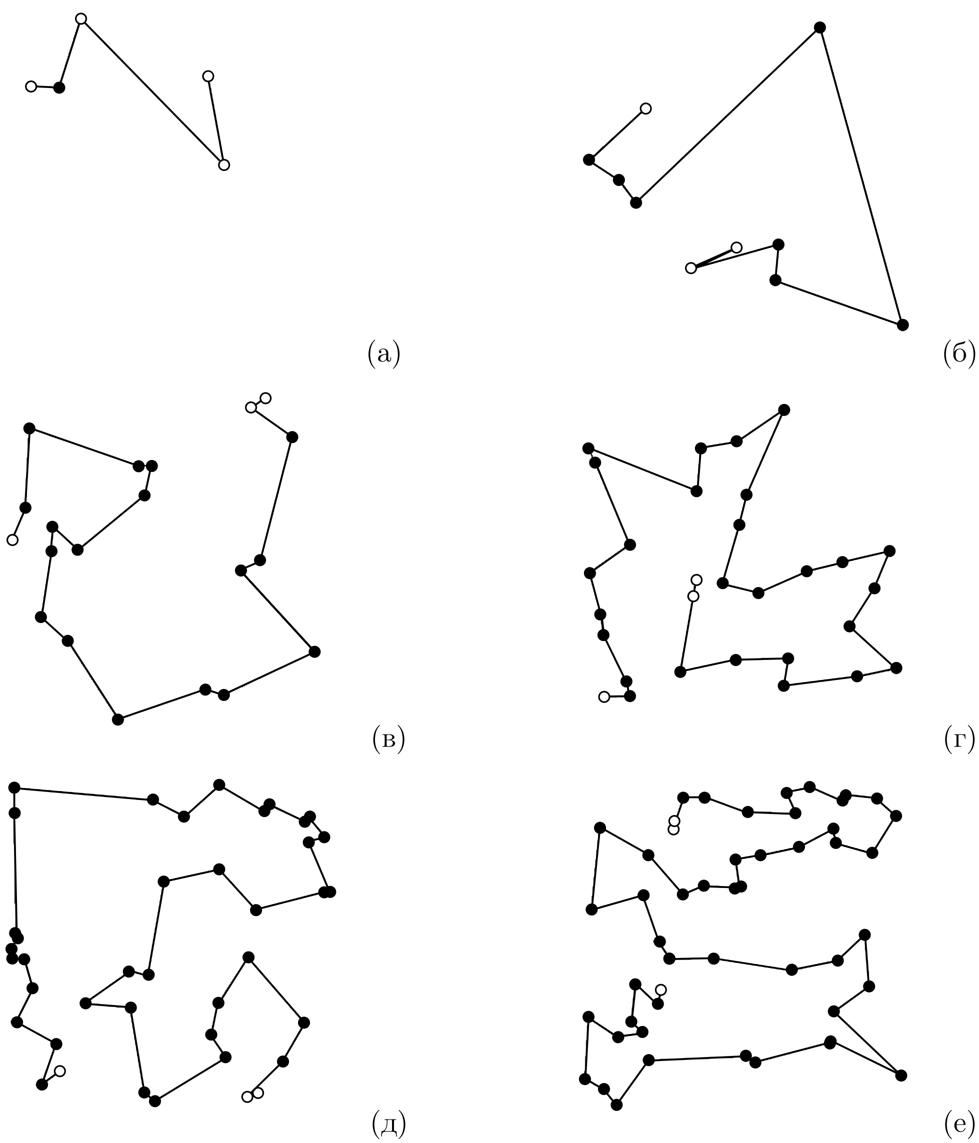


Рис. 3. Примеры областей устойчивости на множестве вершин оптимальных маршрутов в задаче коммивояжера на ограниченном участке целочисленной решетки евклидовой плоскости при удалении вершины. Рассмотрены оптимальные маршруты, содержащие (а) — 5, (б) — 10, (в) — 20, (г) — 30, (д) — 40 и (е) — 50 вершин. Фиксированные начало и конец маршрутов обозначены выколотыми кружками. При удалении вершины, обозначенной выколотым кружком, оптимальность маршрута не нарушается.

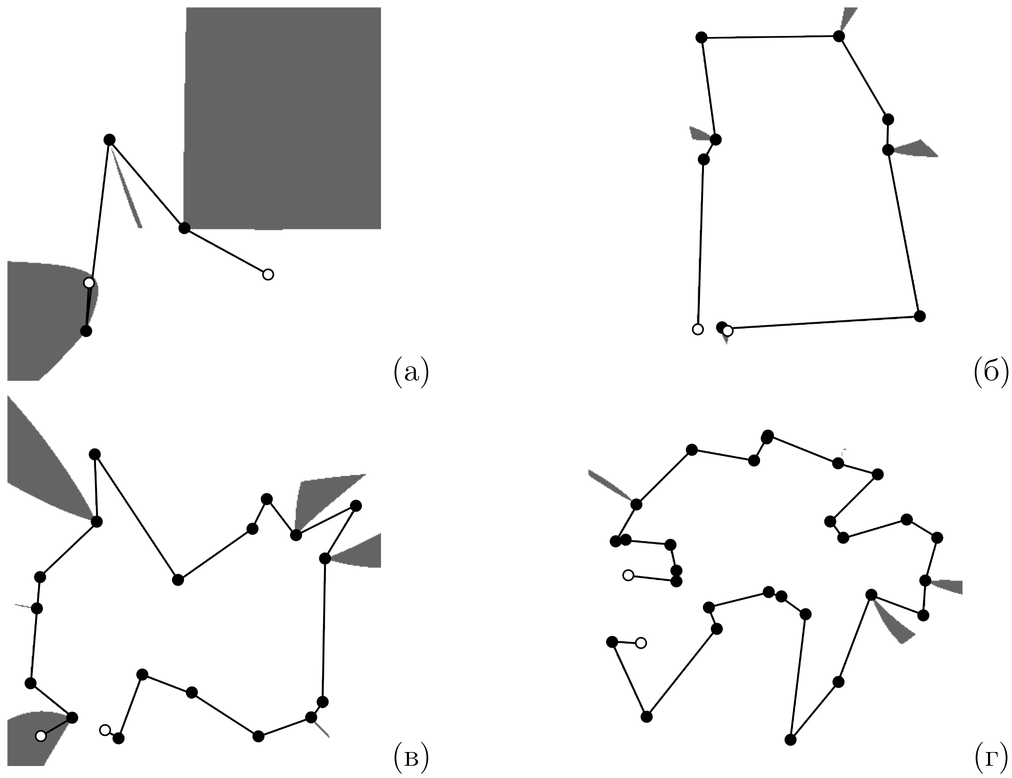


Рис. 4. Примеры областей устойчивости оптимальных маршрутов в задаче коммивояжера на ограниченном участке целочисленной решетки евклидовой плоскости при перемещении вершины. Рассмотрены оптимальные маршруты, содержащие (а) — 5, (б) — 10, (в) — 20, (г) — 30 вершин. Фиксированные начало и конец маршрутов обозначены выколотыми кружками. При перемещении вершины в область целочисленной решетки, отмеченную серым цветом, возможно включение новой вершины на место перемещенной (содержащейся в области) вершины оптимального маршрута без потери оптимальности.

6. Заключение

В работе сформулированы и доказаны достаточные условия устойчивости оптимальных маршрутов в задаче коммивояжера при различных возмущениях начальных данных. Под возмущением понималось добавление, удаление и перемещение одной вершины маршрута. При этом нас интересовала устойчивость оптимального маршрута в смысле “быстрой” (полиномиальной по времени) проверки оптимальности нового, учитывающего возмущения маршрута.

Приводится пример построения аналитической области устойчивости в задаче коммивояжера на плоскости. Обсуждаются некоторые топологические свойства построенных областей. Изложены алгоритмы, эксплуатирующие полученные достаточные условия, проведена оценка вычислительной сложности изложенных алгоритмов, приведены результаты экспериментов по построению областей устойчивости для маршрутной задачи на ограниченном участке целочисленной решетки евклидовой плоскости.

Следует отметить, что полученные достаточные условия, несмотря на малую вычислительную сложность, требующуюся для их проверки, позволяют получать содержательные области устойчивости в маршрутных задачах относительно большой размерности (|S|=50).

Настоящая работа резюмирует начатые прежде исследования в области достаточных условий устойчивости оптимальных решений в задаче коммивояжера. В ходе дальнейших исследований предполагается применить изложенный подход к другим задачам комбинаторной оптимизации, в частности к задаче n-коммивояжеров (GTSP), распределительной задаче и задаче об упаковке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Емеличев В.А., Кузьмин К.Г., Леонович А.М.** Устойчивость в векторных комбинаторных задачах оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 79–92.
2. **Sotscov Yu.N., Leontev V.K., Gordeev E.** Some concepts of stability analysis in combinatorial optimization // Discrete Appl. Math. 1995. Vol. 58. P. 169–190.
3. **Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И.** Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений // Кибернетика и системный анализ. 2005. Т. 41, № 4. С. 89–100.
4. **Девятерикова М.В., Колоколов А.А.** Об устойчивости некоторых алгоритмов целочисленного программирования // Изв. вузов. 2003. № 12. С. 41–48. (Математика.)
5. **Poort E.S.** Aspects of sensitivity analysis for the traveling salesman problem: PhD dissertation. Groningen: University of Groningen, 1997. 191 p.
6. **Леонтьев В.К.** Устойчивость задачи коммивояжера // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1975. Т. 15, № 5. С. 1298–1409.
7. Stability aspects of the traveling salesman problem based on k-best solutions / M. Libura, van der E.S. Poort, G. Sierksma, J.A. Veen // Discrete Appl. Math. 1998. Vol. 87. P. 159–185.
8. **Иванко Е.Е.** Достаточные условия устойчивости оптимального маршрута в задаче коммивояжера при добавлении новой вершины и при удалении существующей // Вестн. Удм. ун-та. 2010. № 1. С. 46–56. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
9. Concorde TSP Solver. URL: http://www.tsp.gatech.edu/concorde/index.html .

Иванко Евгений Евгеньевич
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: ivanko@ural.ru

Поступила 20.01.2011

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 3 2011

УДК 517.518.8

ТОЧНЫЕ КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА ДЛЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ $\mathcal{L}$-СПЛАЙНОВ ФОРМАЛЬНО САМОСОПРЯЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА[1]

В. А. Ким

Построена функция Лебега и найдены точные константы Лебега для интерполяционных периодических и для интерполяционных ограниченных $\mathcal{L}$-сплайнов формально самосопряженного дифференциального оператора произвольного порядка, характеристический многочлен которого имеет ноль хотя бы одним своим корнем.

Ключевые слова: $\mathcal{L}$-сплайн, точные константы Лебега, функция Лебега, формально самосопряженный дифференциальный оператор.

V. A. Kim. Sharp Lebesgue constants for interpolatory $\mathcal{L}$-splines of a formally self-adjoint differential operator.

The Lebesgue function is constructed and sharp Lebesgue constants are found for both interpolatory periodic and interpolatory bounded $\mathcal{L}$-splines of a formally self-adjoint differential operator of arbitrary order such that at least one of the roots of its characteristic polynomial is zero.

Keywords: $\mathcal{L}$-spline, sharp Lebesgue constants, Lebesgue function, formally self-adjoint differential operator.

Введение

Как известно, теория $\mathcal{L}$-сплайнов естественным образом обобщает классическую теорию полиномиальных сплайнов. В [1] получены формулы точных констант Лебега для интерполяционных полиномиальных сплайнов произвольной степени с равномерными узлами. В работе [2] было показано, что для формально самосопряженных дифференциальных операторов последовательность точных констант Лебега по порядку этих операторов ограничена. В [3] найдена асимптотика по порядку точных констант Лебега для формально самосопряженных дифференциальных операторов нечетного порядка. В работах [4; 5] получены значения точных констант Лебега для интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов третьего порядка соответственно для дифференциальных операторов $D(D^2-\beta^2),\ \beta>0$ и $D(D-\alpha)(D-\beta),\ \alpha<0<\beta$.

Данная работа обобщает результаты работы [1] на случай формально самосопряженного дифференциального оператора произвольного порядка; в отличие от [1] автором использован удобный с вычислительной точки зрения аппарат B-сплайнов.

1. Постановка задачи

Пусть $h>0$ и

$$\mathcal{L}_{2n+1}=D\prod_{i=1}^{n}(D^2-\alpha_i^2),\qquad \mathcal{L}_{2n+2}=D^2\prod_{i=1}^{n}(D^2-\alpha_i^2),\qquad n\in\mathbb{N}, \tag{1}$$

— формально самосопряженные дифференциальные операторы для набора вещественных параметров $\alpha_i,\ i=\overline{1,n}$.

О п р е д е л е н и е 1. $\mathcal{L}_{2n+1}$-сплайном называется вещественная функция $S=S(x)$, удовлетворяющая условиям:

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00347).

(1) $\mathcal{L}_{2n+1}S = 0$ на каждом из интервалов $(2hj - h, 2hj + h),\ j \in \mathbb{Z}$;   (2) $S \in C^{2n-1}(\mathbb{R})$.

О п р е д е л е н и е 2. $\mathcal{L}_{2n+2}$-сплайном называется вещественная функция $S = S(x)$, удовлетворяющая условиям:

(1) $\mathcal{L}_{2n+2}S = 0$ на каждом из интервалов $(2hj, 2hj + 2h),\ j \in \mathbb{Z}$;   (2) $S \in C^{2n}(\mathbb{R})$.

З а м е ч а н и е 1. Если порядок дифференциального оператора в определениях 1 и 2 не важен, будем называть так определенные функции $\mathcal{L}$-сплайнами.

О п р е д е л е н и е 3. $\mathcal{L}$-сплайн $S(f) = S(f, x)$ называется интерполяционным для вещественной функции $f = f(x)$, если $S(f, 2hj) = f(2hj),\ j \in \mathbb{Z}$.

О п р е д е л е н и е 4. Функция

$$\mathfrak{L}^{\Phi}_{\infty}(x) = \max_{\|f\|_{\infty}=1} |S(f, x)|$$

называется функцией Лебега для интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов. Если интерполяционные $\mathcal{L}$-сплайны и интерполируемые функции $2hp$-периодичны, $p \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, то функция Лебега будет обозначаться $\mathfrak{L}^{\Phi}_{p}(x)$.

О п р е д е л е н и е 5. Пусть оператор $L^{\mathcal{L}}_{\infty}$ действует по правилу $L^{\mathcal{L}}_{\infty}f = S(f)$ и $L^{\mathcal{L}}_{\infty}\colon C_{\infty} \to C_{\infty}$, а $L^{\mathcal{L}}_{p}$ действует по правилу $L^{\mathcal{L}}_{p}f = S(f)$ и $L^{\mathcal{L}}_{p}\colon C_p \to C_p$. Тогда величины

$$\|L^{\mathcal{L}}_{\infty}\|^{\infty}_{\infty} = \max_{x\in\mathbb{R}} \mathfrak{L}^{\Phi}_{\infty}(x), \qquad \|L^{\mathcal{L}}_{p}\|^{\infty}_{\infty} = \max_{x\in\mathbb{R}} \mathfrak{L}^{\Phi}_{p}(x)$$

называются точными константами Лебега для интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов.

В данной работе построено представление функции Лебега для интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов через B-сплайны, найдена точка, в которой функция Лебега принимает значение точной константы Лебега, и выписаны значения точных констант Лебега для интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов.

2. Представление интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов через B-сплайны

Всюду далее будем использовать следующие обозначения:

$$\phi(t)_+ = \begin{cases} \phi(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \qquad \phi(t)_- = \begin{cases} 0, & t > 0, \\ \phi(t), & t \leq 0. \end{cases}$$

О п р е д е л е н и е 6. Согласно [6] обобщенной разностью порядка $2n + \mu,\ n \in \mathbb{N}$, $\mu \in \{1, 2\}$, для произвольной последовательности $\{y_m\}^{+\infty}_{m=-\infty}$ называется

$$\Delta_{2n+\mu}y_m = (T - E)^{\mu} \prod_{i=1}^{n} \bigl(T^2 - (e^{2h\alpha_i} + e^{-2h\alpha_i})T + E\bigr)y_m,$$

где $Ty_m = y_{m+1}$ и $Ey_m = y_m$.

О п р е д е л е н и е 7. Пусть $\Phi_{2n+\mu} \in \ker \mathcal{L}_{2n+\mu}$, $\Phi^{(\nu)}_{2n+\mu}(0) = \delta_{\nu,2n+\mu-1},\ \nu = \overline{0, 2n + \mu - 1}$, где $\delta_{\nu,2n+\mu-1}$ — символ Кронекера. B-сплайном порядка $2n + \mu,\ n \in \mathbb{N},\ \mu \in \{1, 2\}$, называется функция

$$B_{2n+\mu}(x) = \Delta_{2n+\mu}\Phi_{2n+\mu}(x - 2nh - \mu h)_+$$

с шагом обобщенной разности $2h$.

Корректность данного определения следует, в частности, из леммы 2, приведенной ниже.

З а м е ч а н и е 2. Если $\phi \in \ker \mathcal{L}_{2n+\mu}$, то $\Delta_{2n+\mu}\phi = 0$. В частности, будет использовано, что $\Delta_{2n+\mu}\Phi_{2n+\mu} = 0$.

Лемма 1. $B_{2n+\mu}(x) = B_{2n+\mu}(-x),\ n \in \mathbb{N},\ \mu \in \{1, 2\},\ x \in \mathbb{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия $\Phi^{(\nu)}_{2n+\mu}(0) = \delta_{\nu,2n+\mu-1}$, $\nu = \overline{0, 2n+\mu-1}$, определяют $\Phi_{2n+\mu}(x)$ единственным образом, тогда единственным образом определена и $\Phi^{(2n+\mu-1)}_{2n+\mu}(x)$. Кроме того, $\Phi^{(2n+\mu-1)}_{2n+\mu}(0) = 1$, следовательно, $\Phi^{(2n+\mu-1)}_{2n+\mu}(x)$ — четная, иначе, $2n+\mu-1$ раз интегрируя $\Phi^{(2n+\mu-1)}_{2n+\mu}(-x)$ с условиями $\Phi^{(\nu)}_{2n+\mu}(0) = 0$, $\nu = \overline{0, 2n+\mu-2}$, имели бы $(-1)^{\mu-1}\Phi_{2n+\mu}(-x)$, удовлетворяющую всем условиям на $\Phi_{2n+\mu}(x)$, при этом с $\Phi_{2n+\mu}(x)$ не совпадающую. Интегрируя $2n+\mu-1$ раз четную $\Phi^{(2n+\mu-1)}_{2n+\mu}(x)$ с условиями $\Phi^{(\nu)}_{2n+\mu}(0) = 0$, $\nu = \overline{0, 2n+\mu-2}$, получаем четность $\Phi_{2n+1}(x)$ и нечетность $\Phi_{2n+2}(x)$.

Обозначая через $A_j, j = \overline{0, 2n+\mu}$, множество констант, которые не требуется выписывать явно, имеем

$$\begin{aligned}
B_{2n+\mu}(x) &= \Delta_{2n+\mu}\Phi_{2n+\mu}(x - 2nh - \mu h)_+ \\
&= (T-E)^\mu \prod_{i=1}^{n} (T^2 - (e^{2h\alpha_i} + e^{-2h\alpha_i})T + E)\Phi_{2n+\mu}(x - 2nh - \mu h)_+ \\
&= \sum_{j=0}^{2n+\mu} A_j T^j \Phi_{2n+\mu}(x - 2nh - \mu h)_+ = \sum_{j=0}^{2n+\mu} A_j \Phi_{2n+\mu}(x - 2nh - \mu h + 2hj)_+ \\
&= (-1)^{\mu+1} \sum_{j=0}^{2n+\mu} A_j \Phi_{2n+\mu}(-x + 2nh + \mu h - 2hj)_- = (-1)^{\mu+1} \sum_{j=0}^{2n+\mu} A_j T^{-j} \Phi_{2n+\mu}(-x + 2nh + \mu h)_- \\
&= (-1)^{\mu+1}(T^{-1} - E)^\mu \prod_{i=1}^{n} (T^{-2} - (e^{2h\alpha_i} + e^{-2h\alpha_i})T^{-1} + E)\Phi_{2n+\mu}(-x + 2nh + \mu h)_- \\
&= -(T-E)^\mu \prod_{i=1}^{n} (T^2 - (e^{2h\alpha_i} + e^{-2h\alpha_i})T + E)\Phi_{2n+\mu}(-x - 2nh - \mu h)_- \\
&= -\Delta_{2n+\mu}\Phi_{2n+\mu}(-x - 2nh - \mu h)_- \,.
\end{aligned}$$

И далее, $B_{2n+\mu}(-x) - B_{2n+\mu}(x) = \Delta_{2n+\mu}\Phi_{2n+\mu}(-x-2nh-\mu h)_+ + \Delta_{2n+\mu}\Phi_{2n+\mu}(-x-2nh-\mu h)_- = \Delta_{2n+\mu}\Phi_{2n+\mu}(-x - 2nh - \mu h) = 0$ по замечанию 2. Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. $S(f,x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum\limits_{l=-\infty}^{+\infty} \sum\limits_{s=1}^{n} \dfrac{x_s^{n-1+|k-l|}}{P'(x_s)} B_{2n+\mu}(x - 2hl) \right] f(2hk),$ *где* $x_1, \ldots, x_n$ *— нули на* $(-1, 0)$ *многочлена* $P(z) = \sum_{l=0}^{2n} B_{2n+\mu}(2h(l-n))z^l$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем искать интерполяционный $\mathcal{L}$-сплайн в виде

$$S(f,x) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} C_l B_{2n+\mu}(x - 2hl), \tag{2}$$

исходя из условий интерполяции

$$\begin{aligned}
f(2hj) = S(f, 2hj) &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} C_l B_{2n+\mu}(2h(j-l)) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} C_{l+j} B_{2n+\mu}(-2hl) \\
&= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} C_{l+j} B_{2n+\mu}(2hl) = \sum_{l=-n}^{n} C_{l+j} B_{2n+\mu}(2hl) = \sum_{l=0}^{2n} C_{l-n+j} B_{2n+\mu}(2h(l-n)).
\end{aligned}$$

Характеристический многочлен данной разностной схемы имеет вид

$$P(z) = \sum_{l=0}^{2n} B_{2n+\mu}(2h(l-n))z^l = \sum_{l=0}^{2n} \Delta_{2n+\mu}\Phi_{2n+\mu}\big((l - 2n - \mu/2)2h\big)_+ z^l = \Pi^*_{2n+\mu-1}(z, 1-\mu/2),$$

который определен в [6]. Из теоремы 2.3 и следствия 2.4 работы [7] следует, что все нули многочлена $P(z)$ отрицательны и просты. Из [6] также следует, что $P(-1) \neq 0$. Кроме того, по лемме 1 выполнено $P(z) = z^{2n} P(1/z),\ z \neq 0$.

В силу вышесказанного выполнены условия теоремы 1 из [8], согласно которой

$$C_j = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=1}^{n} \frac{x_s^{n-1+|k|}}{P'(x_s)} f(2h(j+k)), \qquad j \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

где $x_1, \dots, x_n$ — нули многочлена $P(z)$, лежащие на интервале $(-1, 0)$. Подставляя (3) в (2), получаем

$$\begin{aligned} S(f,x) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \Big[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=1}^{n} \frac{x_s^{n-1+|k|}}{P'(x_s)} f(2h(l+k)) \Big] B_{2n+\mu}(x - 2hl) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big[\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=1}^{n} \frac{x_s^{n-1+|k-l|}}{P'(x_s)} B_{2n+\mu}(x - 2hl) \Big] f(2hk). \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

3. Представление функции Лебега для интерполяционных периодических $\mathcal{L}$-сплайнов через B-сплайны

З а м е ч а н и е 3. Для следующих двух множеств дифференциальных операторов, определенных на $\mathbb{C}^1(\mathbb{R})$,

$$D_j \phi(x) = \frac{d\phi(x)}{dx} - \beta_j \phi(x), \qquad j = \overline{1, m},$$

и

$$\widetilde{D}_1 \phi = \frac{d}{dx} \frac{\phi(x)}{e^{\beta_1 x}}, \qquad \widetilde{D}_j = \frac{d}{dx} \frac{\phi(x)}{e^{(\beta_j - \beta_{j-1})x}}, \qquad j = \overline{2, m},$$

где $\beta_j \in \mathbb{R},\ j = \overline{1, m}$, выполняется соотношение $\ker D_m D_{m-1} \cdots D_2 D_1 = \ker \widetilde{D}_m \widetilde{D}_{m-1} \cdots \widetilde{D}_2 \widetilde{D}_1$.

Тогда, справедлива теорема 4.3 из [9, гл. 10] для рассматриваемых дифференциальных операторов (1). В силу этого и способа определения фундаментальных $\mathcal{L}$-сплайнов аналогично полиномиальным справедливы обобщения следствия 1 из [1] для изучаемых периодических интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов и леммы 1 из [1] для фундаментальных периодических $\mathcal{L}$-сплайнов. Сформулируем их в качестве лемм.

Лемма 3 [1, следствие 1]. *Для $2hp$-периодического, $p \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$, $\mathcal{L}$-сплайна S число его нулей $Z_{[0,2hp]}(S)$ на периоде, если отождествить кратные и отличающиеся на период, оценивается как*

$$Z_{[0,2hp]}(S) \le \begin{cases} p, & \text{если } p \text{ четно}, \\ p-1, & \text{если } p \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Лемма 3 справедлива и для $\prod_{i=1}^{n}(D^2 - \alpha_i^2)$-сплайнов.

О п р е д е л е н и е 8. Фундаментальным $2hp$-периодическим, $p \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$, $\mathcal{L}$-сплайном $L_p(x)$ называется $\mathcal{L}$-сплайн, удовлетворяющий условию

$$L_p(2h\nu) = \begin{cases} 1, & \nu \bmod p = 0, \\ 0, & \nu \bmod p \neq 0, \end{cases} \qquad \nu \in \mathbb{Z},$$

где $\nu \bmod p$ — остаток от деления ν на p.

Отметим, что в силу $2hp$-периодичности и четности интерполируемых данных и единственности функции $L_p(x)$, вытекающей из леммы 2, следует $2hp$-периодичность и четность самой функции $L_p(x)$.

Лемма 4 [1, лемма 1]. *Для $x \in [0, 2h]$, $p \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ и $\nu = \overline{1, p}$ выполнено*

$$\operatorname{sign} L_p(x - 2h\nu) = \begin{cases} -(-1)^\nu, \quad \nu = \overline{1,p}, & \text{если } p \text{ нечетно,} \\ \left.\begin{array}{l} -(-1)^\nu, \quad \nu = \overline{1, p/2}, \\ \ \ (-1)^\nu, \quad \nu = \overline{p/2+1, p} \end{array}\right\}, & \text{если } p \text{ четно;} \end{cases}$$

функция $\operatorname{sign} L_p(x - 2h\nu)$ *определяется с периодом* $2hp$ *для* $\nu \in \mathbb{Z}\backslash\{1, \ldots, p\}$.

Применив лемму 2 к определению 8, получаем следующую лемму.

Лемма 5. $L_p(x) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=1}^{n} \frac{x_s^{n-1+|kp-l|}}{P'(x_s)} B(x - 2hl), \qquad p \in \mathbb{N}\backslash\{1\}.$

Из лемм 5, 4 и того, что

$$\mathfrak{L}_p^\Phi(x) = \sum_{q=1}^{p} |L_p(x - 2hq)|$$

и

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_s^{n-1+|kp-l|} = \frac{x_s^{p-(|l| \bmod p)} + x_s^{|l| \bmod p}}{1 - x_s^p} x_s^{n-1},$$

где $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $s \in \{1, \ldots, n\}$, $l \in \mathbb{Z}$ и $|l| \bmod p$ — остаток от деления $|l|$ на p, после замены переменного $t = l + q$ следует искомое представление функции Лебега для интерполяционных $2hp$-периодических $\mathcal{L}$-сплайнов, т.е. имеет место

Теорема 1. *Для $x \in [0, 2h]$ и $p \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ функция Лебега $\mathfrak{L}_p^\Phi(x)$ совпадает, если p нечетно, то с функцией*

$$l_p^\Phi(x) = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=1}^{p} \sum_{s=1}^{n} \frac{\left(x_s^{p-(|t-q| \bmod p)} + x_s^{|t-q| \bmod p}\right) x_s^{n-1}}{P'(x_s)(1 - x_s^p)} (-1)^{q-1} B(x - 2ht);$$

если p четно, то с функцией

$$l_p^\Phi(x) = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{q=1}^{p/2} \sum_{s=1}^{n} \frac{\left(x_s^{p-(|t-q| \bmod p)} + x_s^{|t-q| \bmod p}\right) x_s^{n-1}}{P'(x_s)(1 - x_s^p)} (-1)^{q-1} \right.$$
$$\left. + \sum_{q=p/2+1}^{p} \sum_{s=1}^{n} \frac{\left(x_s^{p-(|t-q| \bmod p)} + x_s^{|t-q| \bmod p}\right) x_s^{n-1}}{P'(x_s)(1 - x_s^p)} (-1)^{q} \right] B(x - 2ht),$$

где $|t - q| \bmod p$ — остаток от деления $|t - q|$ на p.

Далее (в лемме 8) будет показано, что функция Лебега $\mathfrak{L}_p^\Phi(x)$ является $2h$-периодической, откуда следует, что теорема 1 позволяет определить $\mathfrak{L}_p^\Phi(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

4. Представление функции Лебега для интерполяционных ограниченных $\mathcal{L}$-сплайнов через B-сплайны

Определение 9. Фундаментальным $\mathcal{L}$-сплайном $L_\infty(x)$ называется $\mathcal{L}$-сплайн, удовлетворяющий условию

$$L_\infty(2h\nu) = \begin{cases} 1, & \nu = 0, \\ 0, & \nu \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Применив лемму 2 к определению 9, получим следующую лемму.

Лемма 6. $L_\infty(x)=\sum\limits_{l=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{s=1}^{n}\dfrac{x_s^{n-1+|l|}}{P'(x_s)}B(x-2hl).$

Лемма 7. $\lim_{p\to\infty}L_p(x)=L_\infty(x)$ *для любого* $x\in\mathbb{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $x_s\in(-1,0)$, $s=\overline{1,n}$, и носители B-сплайнов ограничены, то

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\sum_{s=1}^{n}\frac{x_s^{n-1+|kp-l|}}{P'(x_s)}B(x-2hl)=\begin{cases}0, & k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\},\\ L_\infty(x), & k=0.\end{cases}$$

Кроме того, при $k\neq 0$ имеет место оценка

$$\Big|\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\sum_{s=1}^{n}\frac{x_s^{n-1+|kp-l|}}{P'(x_s)}B(x-2hl)\Big|\leq\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\sum_{s=1}^{n}\Big|\frac{x_s^{n-1}}{P'(x_s)}B(x-2hl)\Big||x_s|^{|kp-l|-|k|}|x_s|^{|k|}$$

$$\leq\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\sum_{s=1}^{n}\Big|\frac{x_s^{n-1}}{P'(x_s)}B(x-2hl)\Big||x_s|^{|k|}\qquad\text{при}\quad p\geq\frac{\mathrm{round}(|x|/2h)+n+|k|+1}{|k|},$$

где $\mathrm{round}(|x|/2h)$ — ближайшее целое к $|x|/2h$. Тогда ряд по k в лемме 5 сходится равномерно. Применим теорему о почленном переходе к пределу для ряда, и лемма 7 доказана. □

Теорема 2. *Для* $x\in[0,2h]$ *функция Лебега* $\mathfrak{L}_\infty^\Phi(x)$ *совпадает с функцией*

$$l_\infty^\Phi(x)=\sum_{t=-\infty}^{0}\sum_{s=1}^{n}\frac{Q_s(t)}{(1+x_s)P'(x_s)}B(x-2ht)+\sum_{t=1}^{+\infty}\sum_{s=1}^{n}\frac{Q_s(-t+1)}{(1+x_s)P'(x_s)}B(x-2ht),$$

где $Q_s(\tau)=(|x_s|^\tau-2|x_s|+|x_s|^{\tau+1})x_s^{n-1-\tau}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая, что

$$\mathfrak{L}_\infty^\Phi(x)=\sum_{q=-\infty}^{+\infty}|L_\infty(x-2hq)|,$$

лемму 7 и следующее из нее равенство

$$\mathrm{sign}\,L_\infty(x-2h\nu)=\lim_{p\to\infty}\mathrm{sign}\,L_p(x-2h\nu)=\begin{cases}-(-1)^\nu, & \nu\in\mathbb{N},\\ (-1)^\nu, & \nu\in\mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}\end{cases}$$

имеем (для $x\in[0,2h]$)

$$\mathfrak{L}_\infty^\Phi(x)=\sum_{q=-\infty}^{0}(-1)^qL_\infty(x-2hq)+\sum_{q=1}^{+\infty}(-1)^{q-1}L_\infty(x-2hq)$$

$$=\sum_{q=-\infty}^{0}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\sum_{s=1}^{n}\frac{x_s^{n-1+|l|}}{P'(x_s)}(-1)^qB(x-2hl-2hq)+\sum_{q=1}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\sum_{s=1}^{n}\frac{x_s^{n-1+|l|}}{P'(x_s)}(-1)^{q-1}B(x-2hl-2hq)$$

$$=\sum_{q=-\infty}^{0}\sum_{t=-\infty}^{+\infty}\sum_{s=1}^{n}\frac{x_s^{n-1+|t-q|}}{P'(x_s)}(-1)^qB(x-2ht)+\sum_{q=1}^{+\infty}\sum_{t=-\infty}^{+\infty}\sum_{s=1}^{n}\frac{x_s^{n-1+|t-q|}}{P'(x_s)}(-1)^{q-1}B(x-2ht)$$

$$=\sum_{t=-\infty}^{+\infty}\sum_{s=1}^{n}\Big[\sum_{q=-\infty}^{0}(-1)^qx_s^{n-1+|t-q|}+\sum_{q=1}^{+\infty}(-1)^{q-1}x_s^{n-1+|t-q|}\Big]\frac{B(x-2ht)}{P'(x_s)}.$$

Учтем, что

$$\sum_{q=-\infty}^{0}(-1)^q x_s^{n-1+|t-q|}+\sum_{q=1}^{+\infty}(-1)^{q-1}x_s^{n-1+|t-q|}=\frac{1}{1+x_s}\times\begin{cases} Q_s(t), & t\in\mathbb{Z}\backslash\mathbb{N},\\ Q_s(-t+1), & t\in\mathbb{N},\end{cases}$$

и теорема 2 доказана. □

Далее (в лемме 11) будет показано, что функция Лебега $\mathfrak{L}_\infty^\Phi(x)$ является $2h$-периодичной, откуда следует, что теорема 2 позволяет определить функцию Лебега $\mathfrak{L}_\infty^\Phi(x)$ для всех $x\in\mathbb{R}$.

5. Точные константы Лебега для интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов

Лемма 8. *Функция Лебега $\mathfrak{L}_p^\Phi(x)$, $p\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$, $2h$-периодична и $\mathfrak{L}_p^\Phi(x)=\mathfrak{L}_p^\Phi(2h-x)$ для любого $x\in[0,2h]$.*

Доказательство. $2h$-периодичность функции Лебега $\mathfrak{L}_p^\Phi$ следует из того, что

$$\mathfrak{L}_p^\Phi(x-2h)=\max_{\|f\|_\infty=1}|S(f,x-2h)|=\max_{\|f\|_\infty=1}|S(f(\cdot+2h),x)|=\mathfrak{L}_p^\Phi(x).$$

В силу того что функция $L_p(x)$ является четной и $2hp$-периодичной, а функция $\mathfrak{L}_p^\Phi(x)$ — $2h$-периодична, имеем

$$\mathfrak{L}_p^\Phi(2h-x)=\mathfrak{L}_p^\Phi(-x)=\sum_{q=1}^{p}|L_p(-x-2hq)|=\sum_{q=1}^{p}|L_p(x+2hq)|$$

$$=\sum_{q=-p}^{-1}|L_p(x-2hq)|=\sum_{q=0}^{p-1}|L_p(x+2hp-2hq)|=\sum_{q=0}^{p-1}|L_p(x-2hq)|=\mathfrak{L}_p^\Phi(x).$$

Лемма 8 доказана. □

Лемма 9. *Если $f_m(x)\to f(x)$ всюду при $m\to\infty$ и $\|f_m\|_\infty\le 1$ для любого $m\in\mathbb{N}$, то $S(f_m,x)\to S(f,x)$ всюду при $m\to\infty$.*

Доказательство. В силу леммы 2 справедливо представление

$$S(f_m,x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Bigg[\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\sum_{s=1}^{n}\frac{x_s^{n-1+|k-l|}}{P'(x_s)}B_{2n+\mu}(x-2hl)\Bigg]f_m(2hk), \tag{4}$$

и, далее, в силу того что $\|f_m\|_\infty\le 1$ для любого $m\in\mathbb{N}$, имеем для любого $k\in\mathbb{Z}$

$$\left|\Bigg[\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\sum_{s=1}^{n}\frac{x_s^{n-1+|k-l|}}{P'(x_s)}B_{2n+\mu}(x-2hl)\Bigg]f_m(2hk)\right|\le\left|\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\sum_{s=1}^{n}\frac{x_s^{n-1+|k-l|}}{P'(x_s)}B_{2n+\mu}(x-2hl)\right|.$$

Тогда в силу ограниченности носителей B-сплайнов и признака Вейерштрасса ряд в (4) сходится равномерно, и, применяя в нем почленный переход к пределу, получаем $S(f_m,x)\to S(f,x)$ всюду при $m\to\infty$. Лемма 9 доказана. □

Лемма 10. *Для любого $x\in[0,2h]$*

$$\lim_{p\to\infty}\mathfrak{L}_p^\Phi(x)=\mathfrak{L}_\infty^\Phi(x).$$

Доказательство. В силу леммы 7 равенство

$$\mathrm{sign} L_\infty(x-2h\nu)=\lim_{p\to\infty}\mathrm{sign} L_p(x-2h\nu)$$

справедливо для любых $\nu\in\mathbb{Z}$ и $x\in[0,2h]$. При этом l_∞^Φ интерполирует значения $\{\mathrm{sign}L_\infty(x-2h\nu),\ \nu\in\mathbb{Z},\ x\in[0,2h]\}$, а l_p^Φ интерполирует значения $\{\mathrm{sign}L_p(x-2h\nu),\ \nu\in\mathbb{Z},\ x\in[0,2h]\}$. Применяя лемму 9, получаем

$$l_\infty^\Phi(x)=\lim_{p\to\infty} l_p^\Phi(x)$$

для любого $x\in\mathbb{R}$, и нужное утверждение следует из теорем 1 и 2. Лемма 10 доказана. □

Лемма 11. *Функция Лебега* $\mathfrak{L}_\infty^\Phi(x)$ $2h$*-периодична и* $\mathfrak{L}_\infty^\Phi(x)=\mathfrak{L}_\infty^\Phi(2h-x)$ *для любого* $x\in[0,2h]$.

Доказательство. $2h$-периодичность функции Лебега $\mathcal{L}_\infty^\Phi(x)$ доказывается так же, как для $\mathcal{L}_p^\Phi(x)$ в лемме 8. Соотношение $\mathfrak{L}_\infty^\Phi(x)=\mathfrak{L}_\infty^\Phi(2h-x)$ выполняется в силу лемм 8, 10. □

Замечание 4. Функция $(l_p^\Phi)'(x)$, $p\in\mathbb{N}\backslash\{1\}\cup\{\infty\}$, для интерполяционных $\mathcal{L}_{2n+1}$-сплайнов нечетного порядка в представлениях теорем 1 и 2 является $\prod_{i=1}^n(D^2-\alpha_i^2)$-сплайном.

Замечание 5. Функция $(l_p^\Phi)'(x)$, $p\in\mathbb{N}\backslash\{1\}\cup\{\infty\}$, для интерполяционных $\mathcal{L}_{2n+2}$-сплайнов четного порядка в представлениях теорем 1 и 2 является $D\prod_{i=1}^n(D^2-\alpha_i^2)$-сплайном.

Лемма 12. $\max_{x\in[0,2h]}\mathfrak{L}_p^\Phi(x)=\mathfrak{L}_p^\Phi(h)$, $p\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$.

Доказательство. Пусть p нечетно. Тогда график функции $l_p^\Phi(x)$ проходит через точки $\{(0,1)\}\cup\cup_{\nu=1}^p\{(2h\nu,-(-1)^\nu)\}$ и, следовательно, $Z_{[2h,2hp]}(l_p^\Phi)\ge p-1$. По теореме Ролля, учтя, что $l_p^\Phi(0)=l_p^\Phi(2h)=1$, имеем $Z_{[0,2hp]}((l_p^\Phi)')\ge p-1$ в предположении, что нуль $(l_p^\Phi)'(x)$ на $(0,2h)$ единствен. Если предположить неединственность нуля $(l_p^\Phi)'(x)$ на $(0,2h)$, то в силу леммы 8 выполнено $Z_{[0,2hp]}((l_p^\Phi)')\ge p+1$. Однако по замечаниям 4 и 5 и лемме 3 справедливо $Z_{[0,2hp]}((l_p^\Phi)')\le p-1$. Таким образом, нуль $(l_p^\Phi)'(x)$ на $[0,2h]$ единствен и по лемме 8 и теореме 1 совпадает с $x=h$.

Пусть p четно. Тогда график функции $l_p^\Phi(x)$ проходит через точки $\{(0,1)\}\cup\cup_{\nu=1}^{p/2}\{(2h\nu,-(-1)^\nu)\}\cup\cup_{\nu=p/2+1}^p\{(2h\nu,(-1)^\nu)\}$ и, следовательно, $Z_{[2h,hp]}(l_p^\Phi)\ge p/2-1$ и $Z_{[2h(p/2+1),2hp]}(l_p^\Phi)\ge p/2-1$. По теореме Ролля, учтя, что $l_p^\Phi(0)=l_p^\Phi(2h)=1$ и $l_p^\Phi(hp)=l_p^\Phi(2h(p/2+1))=1$, имеем $Z_{[0,2hp]}((l_p^\Phi)')\ge p-2$ в предположении, что нуль $(l_p^\Phi)'(x)$ на $(0,2h)$ единствен. Если предположить неединственность нуля $(l_p^\Phi)'(x)$ на $(0,2h)$, то в силу леммы 8 и hp-периодичности интерполируемых данных, а следовательно, и $l_p^\Phi(x)$, выполнено $Z_{[0,2hp]}((l_p^\Phi)')\ge p+2$. Однако по замечаниям 4 и 5 и лемме 3 справедливо $Z_{[0,2hp]}((l_p^\Phi)')\le p$. Таким образом, нуль $(l_p^\Phi)'(x)$ на $[0,2h]$ единствен и по лемме 8 и теореме 1 совпадает с $x=h$.

По теореме 1 нуль функции Лебега $\mathfrak{L}_p^\Phi(x)$ на $[0,2h]$ единствен и совпадает с $x=h$. Лемма 12 доказана. □

В силу лемм 10 и 12 справедлива

Лемма 13. $\max_{x\in[0,2h]}\mathfrak{L}_\infty^\Phi(x)=\mathfrak{L}_\infty^\Phi(h)$.

В силу теоремы 1, леммы 12, ограниченности носителей B-сплайнов и периодичности функции Лебега $\mathfrak{L}_p^\Phi(x)$ справедлива

Теорема 3. *Точная константа Лебега для интерполяционных $2hp$-периодических, $p \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $\mathcal{L}$-сплайнов равна:*

если p нечетно, то

$$\|L_p^{\mathcal{L}}\|_\infty^\infty = \sum_{t=-n}^{n+1}\sum_{q=1}^{p}\sum_{s=1}^{n}\frac{(x_s^{p-(|t-q| \bmod p)} + x_s^{|t-q| \bmod p})x_s^{n-1}}{P'(x_s)(1-x_s^p)}(-1)^{q-1}B(h-2ht);$$

если p четно, то

$$\|L_p^{\mathcal{L}}\|_\infty^\infty = \sum_{t=-n}^{n+1}\left[\sum_{q=1}^{p/2}\sum_{s=1}^{n}\frac{(x_s^{p-(|t-q| \bmod p)} + x_s^{|t-q| \bmod p})x_s^{n-1}}{P'(x_s)(1-x_s^p)}(-1)^{q-1}\right.$$

$$\left.+\sum_{q=p/2+1}^{p}\sum_{s=1}^{n}\frac{(x_s^{p-(|t-q| \bmod p)} + x_s^{|t-q| \bmod p})x_s^{n-1}}{P'(x_s)(1-x_s^p)}(-1)^{q}\right]B(h-2ht),$$

где $|t-q| \bmod p$ — остаток от деления $|t-q|$ на p.

В силу теоремы 2, леммы 13, ограниченности носителей B-сплайнов и периодичности функции Лебега $\mathfrak{L}_\infty^\Phi(x)$ справедлива

Теорема 4. *Точная константа Лебега для интерполяционных ограниченных $\mathcal{L}$-сплайнов*

$$\|L_\infty^{\mathcal{L}}\|_\infty^\infty = \sum_{t=-n}^{0}\sum_{s=1}^{n}\frac{Q_s(t)}{(1+x_s)P'(x_s)}B(h-2ht) + \sum_{t=1}^{n+1}\sum_{s=1}^{n}\frac{Q_s(-t+1)}{(1+x_s)P'(x_s)}B(h-2ht),$$

где $Q_s(\tau) = (|x_s|^\tau - 2|x_s| + |x_s|^{\tau+1})x_s^{n-1-\tau}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Richards F.** Best bounds for the uniform periodic spline interpolation operator // J. Approx. Theory. 1973. Vol. 7, no. 3. P. 302–317.
2. **Tzimbalario J.** Lebesgue constants for cardinal $\mathcal{L}$-spline interpolation // Can. J. Math. 1977. Vol. 29, no. 2. P. 441–448.
3. **Morsche H.G. ter.** On the Lebesgue constants for cardinal $\mathcal{L}$-spline interpolation // J. Approx. Theory. 1985. Vol. 45, no. 3. P. 232–246.
4. **Ким В.А.** Точные константы Лебега для интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов третьего порядка // Мат. заметки. 2008. Т. 84, вып. 1. С. 59–68.
5. **Ким В.А.** Точные константы Лебега для интерполяционных ограниченных $\mathcal{L}$-сплайнов третьего порядка // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, вып. 2. С. 330–341.
6. **Шарма А., Цимбаларио И.** Некоторые линейные дифференциальные операторы и обобщенные разности // Мат. заметки. 1977. Т. 21, вып. 2. С. 161–172.
7. **Micchelli C.A.** Cardinal $\mathcal{L}$-splines // Studies in spline functions and approximation theory. New York: Acad. press, 1976. P. 203–250.
8. **Субботин Ю.Н.** О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Тр. МИАН. 1965. Т. 78. С. 24–42.
9. **Karlin S.** Total positivity. Stanford: Stanford Univ. Press, 1968. Vol. 1. 576 p.

Ким Владимир Аркадьевич
аспирант
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: vkim1986@gmail.com

Поступила 23.02.2011

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 3 2011

УДК 517.537, 517.962

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ ПО ЗНАЧЕНИЯМ n-Х РАЗНОСТЕЙ С ШАГОМ $1/n$ [1]

С. В. Конягин, А. Ю. Попов

В статье решена задача о восстановлении функций, аналитических в специального вида областях, содержащих отрезок $[0,1]$, по значениям n-х разностей с шагом $1/n$, взятых в точке 0.

Ключевые слова: аналитическая функция, базис в пространстве аналитических функций.

S. V. Konyagin, A. Yu. Popov. On the reconstruction of functions by the values of the nth differences with step $1/n$.

We study the problem of the reconstruction of functions by the values of the nth differences with step $1/n$ taken at the point 0. The problem is solved for functions that are analytic in special domains containing the interval $[0,1]$.

Keywords: analytic function, basis in the space of analytic functions.

В работе рассматривается задача о восстановлении функции f, аналитической в некоторой окрестности отрезка $[0,1]$, по значениям n-х разностей с шагом $1/n$, взятых в точке 0:

$$\ell_n(f) = \Delta^n_{1/n} f(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f\Big(\frac{k}{n}\Big), \qquad n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{1}$$

Первоначальная постановка задачи, принадлежащая Л. Брутману и Е. Пассоу [4], такова. Верно ли, что если $f \in C[0,1]$, то равенства

$$\ell_n(f) = 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0 \tag{2}$$

влекут за собой тождество

$$f(x) \equiv 0, \qquad 0 \le x \le 1? \tag{3}$$

Ответ на этот вопрос пока не известен даже для $f \in C^\infty[0,1]$. Б. Боянов доказал (устное сообщение) справедливость импликации (2)$\Rightarrow$(3) в предположении аналитичности функции f в эллипсе

$$\Big\{ z = x + iy\colon \quad \frac{(x-0.5)^2}{(17/16)^2} + \frac{y^2}{(15/16)^2} < 1 \Big\}.$$

Мы улучшаем этот результат, показывая, что для положительного ответа на вопрос Л. Брутмана и Е. Пассоу достаточно потребовать аналитичности функции f в некоторой окрестности круга $K_1 = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z-0.5| \le 0.5\}$ или даже эллипса $K_2 = \{z = x+iy\colon\ 4(x-0.5)^2 + 9y^2 \le 1\}$. Весьма вероятно, что импликация (2)$\Rightarrow$(3) верна для функций, аналитических всего лишь в какой-нибудь сколь угодно малой окрестности отрезка $[0,1]$, но доказать это мы не можем.

Нетрудно убедиться в том, что система линейных функционалов (1) обладает биортогональной системой полиномов $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, $\deg P_n = n$, т. е. такой, что $\ell_n(P_k) = \delta_{n,k}$, где $\delta_{n,k}$ —

[1]Исследования С. В. Конягина поддержаны грантом РФФИ (проект 11-01-00329). Исследования А. Ю. Попова — грантом РФФИ (проект 09-01-00225) и Программой государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-7322.2010.1).

символ Кронекера. Высказанное утверждение является общим фактом, верным для произвольной системы линейных функционалов $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$, определенных на пространстве всех многочленов, и таких, что

$$L_n(z^k) = 0 \quad \forall k < n, \qquad L_n(z^n) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{4}$$

Действительно, поскольку $L_0(\mathbf{1}) \neq 0$, то в качестве P_0 берем константу $c_0 = 1/L_0(\mathbf{1})$. По условию $L_n(c_0) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Теперь предположим, что для $m \in \mathbb{N}_0$ уже построен набор $\{P_k(z)\}_{k=0}^{m}$ многочленов таких, что $\deg P_k = k$, $L_n(P_k) = \delta_{n,k}$. Тогда полагаем

$$P_{m+1}(z) = \frac{z^{m+1} - \sum\limits_{k=0}^{m} L_k(z^{m+1})P_k(z)}{L_{m+1}(z^{m+1})}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) сразу видно, что $L_n(P_{m+1}) = 0$ при $n > m+1$ и $L_{m+1}(P_{m+1}) = 1$. При $n \leq m$ ввиду биортогональности построенных многочленов системе функционалов $\{L_n\}$

$$L_n(P_{m+1}) = \frac{L_n(z^{m+1}) - \sum\limits_{k=0}^{m} L_k(z^{m+1})L_n(P_k(z))}{L_{m+1}(z^{m+1})} = \frac{L_n(z^{m+1}) - \sum\limits_{k=0}^{m} \delta_{n,k}L_k(z^{m+1})}{L_{m+1}(z^{m+1})} = 0$$

(по свойству символа Кронекера $\sum_{k=0}^{m} \delta_{n,k}L_k(z^{m+1}) = L_n(z^{m+1})$ при всех $n \leq m$). Таким образом, для системы многочленов, задаваемой рекуррентными формулами (5), имеем

$$L_n(P_k) = \delta_{n,k} \quad \text{для всех} \quad n, k \in \mathbb{N}_0.$$

Мы решаем задачу о разложении функции f в ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \ell_n(f)P_n(z) \tag{6}$$

по полиномам, биортогональным системе функционалов (1). Перед тем как сформулировать результат, введем несколько обозначений. Положим

$$W(\zeta) = (\zeta-1)^{-1}\left(\frac{\zeta-1}{\zeta}\right)^{\zeta} \equiv (\zeta-1)^{-1}\exp\left(\zeta \ln\frac{\zeta-1}{\zeta}\right), \qquad \zeta \in \mathbb{C}\setminus[0,1].$$

Поскольку отображение $\xi = (\zeta-1)/\zeta$ переводит $\mathbb{C}\setminus[0,1]$ в $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$, то мы определяем $\ln((\zeta-1)/\zeta) = \ln\xi$ как главную ветвь логарифма, делая разрез по лучу $(-\infty,0]$. Этим функция $W(\zeta)$ корректно определена и, как легко видеть, голоморфна в $\overline{\mathbb{C}}\setminus[0,1]$. Имеем

$$\lim_{\zeta\to 1} W(\zeta) = \lim_{\zeta\to 0} W(\zeta) = 1, \qquad W(\infty) = 0.$$

Через D_R, $0 \leq R \leq 1$, обозначим область в $\mathbb{C}$, являющуюся дополнением к компакту на сфере Римана $\{\zeta \in \overline{\mathbb{C}} : |W(\zeta)| \leq R\}$. Очевидно, что $D_0 = \mathbb{C}$ и области D_R убывают по R в смысле вложения.

Несложно доказывается

Лемма 1. *При любом $R \in [0,1]$ область D_R является звездообразной относительно точки $\zeta = 0.5$ и имеет аналитическую границу. Если $0 < R_1 < R_2 \leq 1$, то замыкание D_{R_2} лежит в D_{R_1}. Область D_1 содержится как в круге K_1, так и в эллипсе K_2, границы которых имеют с границей D_1 только две общие точки $\zeta = 0$ и $\zeta = 1$.*

Основным результатом статьи является

Теорема 1. *Если $R \in [0,1)$, то любая функция f, аналитическая в D_R, разлагается в ряд* (6), *равномерно сходящийся к ней на любом компакте внутри D_R.*

Следствие 1. *Если функция f аналитична в какой-нибудь окрестности $\overline{D}_1$, то она разлагается в ряд* (6), *равномерно сходящийся в $\overline{D}_1$ и, в частности, на* $[0,1]$.

Следствие 1 вместе с леммой 1 влечет за собой усиление цитированного результата Б. Боянова, сформулированного в начале статьи.

У нас есть основания предполагать, что следствие 1 является почти окончательным результатом. По нашему мнению, всякий равномерно сходящийся на $[0,1]$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z)$ равномерно сходится также на любом компакте внутри D_1, а значит, его сумма голоморфна в D_1. Однако доказать это мы не умеем.

Следствие 2. *Для функций f, аналитических в некоторой окрестности $\overline{D}_1$, справедлива импликация* (2)$\Rightarrow$(3).

З а м е ч а н и е. В данной задаче интерполирования функций конечными разностями произведение шага разности на ее порядок постоянно. Если рассматривать более общие последовательности разностей $\Delta_{h_n}^n f(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(kh_n)$, где $h_n = O(1/n)$, то аналог следствия 2 не будет верен даже для целых функций конечного экспоненциального типа. Несложно проверить, что для функции $g(z) = \sin(2\pi z)$ справедливы равенства $\Delta_{1/n}^n g(0) = 0$, если n четно; $\Delta_{1/(2n)}^n g(0) = 0$, если n нечетно. Таким образом, из равенства нулю всех конечных разностей n-го порядка ($n \in \mathbb{N}_0$) функции g, взятых в точке 0, шаг которых равен то $1/n$, то $1/(2n)$, вовсе не следует, что сама функция g является тождественным нулем, даже если она целая.

Перед доказательством теоремы проведем подготовительную работу. Переформулируем теорему в терминах базисности некоторых систем функций. Это позволит применить развитый аппарат теории базисов в пространствах аналитических функций. Напомним сперва несколько фундаментальных фактов из теории таких пространств.

Пусть D — односвязная область в $\mathbb{C}$ (необязательно ограниченная, в частности, случай $D = \mathbb{C}$ не исключается). Обозначим $A(D)$ пространство функций, аналитических в области D, в котором задана стандартная топология. Под сказанным понимается следующее. Пусть $F = \{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ — какая-либо система компактов в $\mathbb{C}$, являющихся замыканием своей внутренности, такая что 1) $F_n \subset \operatorname{int} F_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$, 2) $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = D$. Через $AC(F_n)$ обозначим (банахово) пространство функций, непрерывных на F_n и голоморфных внутри F_n, с нормой $\|f\|_{F_n} = \max\{|f(z)|:\ z \in F_n\}$. Проективный предел пространств $AC(F_n)$ и будет $A(D)$. Доказано [1, гл. 3], что заданная таким способом топология в $A(D)$ не зависит от выбора системы F, обладающей перечисленными свойствами. Пространство $A^*(D)$ всех линейных непрерывных функционалов на $A(D)$ с топологией равномерной сходимости по системе ограниченных в $A(D)$ множеств (необходимые определения см. в [1, гл. 3]), как обычно, отождествляется с пространством всех функций $\gamma(z)$, аналитических в некоторой окрестности ∞, $\gamma(\infty) = 0$, и допускающих аналитическое продолжение в некоторую окрестность замкнутого множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ или, что то же самое, в $\overline{\mathbb{C}} \setminus F_n$ для некоторого $n = n(\gamma)$. Иначе говоря, $A^*(D)$ — индуктивный предел топологических пространств $\{A_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus F_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Мы пишем A_0 вместо A в знак того, что берутся функции из $A(\overline{\mathbb{C}} \setminus F_n)$, обращающиеся в нуль на бесконечности. Пространство функций, аналитических в односвязной области, мы уже определили. Здесь, правда, области $\overline{\mathbb{C}} \setminus F_n$ лежат на сфере Римана, но, как легко понять, никаких трудностей это не привносит. При таком отождествлении действие функционала $\gamma \in A^*(D) = A_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus D)$ на функцию $f \in A(D)$ задается формулой

$$\langle f, \gamma \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\gamma} f(\zeta)\gamma(\zeta)\, d\zeta. \tag{7}$$

Интеграл в (7) берется по какой-либо простой замкнутой спрямляемой кривой, лежащей одновременно в D и в области голоморфности функции γ. При определенных указанным способом топологиях в $A(D)$ и в $A^*(D) = A_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus D)$ эти пространства являются рефлексивными, то есть сопряженными друг к другу. Мы напомнили фрагменты известной теории, изложенные в [1, гл. 3].

Нетрудно понять, что теорема 1 может быть записана в следующей эквивалентной форме.

Теорема 2. *Система полиномов* $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$, *биортогональная к системе функционалов* (1), *образует базис в каждом из пространств* $A(D_R)$, $0 \le R < 1$.

А так как в рефлексивном пространстве Фреше X базисность какой-либо системы его элементов равносильна базисности биортогональной к ней системы в X^* [2, гл. 6], то приходим к следующему предложению, равносильному теореме 1.

Теорема 3. *Система функционалов* (1) *образует базис в каждом из пространств* $A^*(D_R) = A_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus D_R)$, $0 \le R < 1$.

Пока эффект от этих переформулировок не ощущается. Но если найти, какими функциями γ_n, аналитическими в окрестности бесконечно удаленной точки, задаются рассматриваемые в статье функционалы ℓ_n, и прояснить, что означает базисность системы $\{\gamma_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ в пространствах $A_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus D_R)$, то, как будет видно из дальнейшего, теорема 1 трансформируется так, что в ее доказательстве окажется возможным использовать известные методы теории функций.

Нетрудно убедиться в том, что для любых $n \in \mathbb{N}_0$, $\lambda, h \in \mathbb{C}$, $h \ne 0$, и функции f, голоморфной в некоторой окрестности O отрезка $[\lambda, \lambda + nh]$, справедливо равенство

$$\Delta_h^n f(\lambda) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(\lambda + kh) = \frac{n! h^n}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\prod\limits_{k=0}^{n} (\zeta - \lambda - kh)}. \tag{8}$$

Интегрирование в (8) ведется по любому простому замкнутому спрямляемому контуру C, охватывающему отрезок $[\lambda, \lambda + nh]$ и лежащему в O. Действительно, по теореме о вычетах имеем

$$\frac{n! h^n}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\prod\limits_{k=0}^{n} (\zeta - \lambda - kh)} = n! h^n \sum_{k=0}^{n} \frac{f(\lambda + kh)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \ne k}}^{n} (\lambda + kh - \lambda - jh)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n! f(\lambda + kh)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \ne k}}^{n} (k - j)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(\lambda + kh).$$

Из (7) и (8) с учетом сделанных выше замечаний заключаем, что теорема 1 эквивалентна следующему утверждению.

Теорема 4. *Система функций*

$$\gamma_n(\zeta) = \prod_{k=0}^{n} (\zeta - k/n)^{-1}, \qquad n \in \mathbb{N}_0, \tag{9}$$

образует базис в каждом из пространств $A_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus D_R)$, $0 \le R < 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пространства вида $A_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus D)$ (D — область в $\mathbb{C}$) сложно устроены: они не только ненормируемы, но даже неметризуемы. Проще доказывать базисность систем функций в пространствах Фреше вида $A_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{D})$. Поэтому мы начнем со сведения задачи к доказательству базисности системы (9) в пространствах именно такого вида. Исходя из определения топологии в пространстве $A_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus D_R)$, мы должны установить, что, каковы бы ни были число $R\in[0,1)$ и функция γ, голоморфная в некоторой окрестности множества $\overline{\mathbb{C}}\setminus D_R$ (а значит, и в окрестности $\overline{\mathbb{C}}\setminus D_{R_1}$ при каком-либо $R_1>R$), она разлагается в ряд

$$\gamma(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\gamma_n(\zeta), \tag{10}$$

сходящийся равномерно хотя бы на одном из компактов в $\overline{\mathbb{C}}$, внутренность которого содержит в себе $\mathbb{C}\setminus D_R$ (например, на $\overline{\mathbb{C}}\setminus D_{0.5(R+R_1)}$). Кроме того, последовательность коэффициентов $\{b_n\}$ в разложении (10) определяется по функции γ единственным образом. Теперь представим себе, что мы уже доказали базисность системы функций (9) во всех пространствах $A_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{D}_\rho)$, $0<\rho<1$ (здесь через $\overline{D}_\rho$ обозначены замыкания множеств D_ρ). Под $A_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{D}_\rho)$ в соответствии с принятыми выше терминологией и обозначениями понимаются пространства функций, аналитических на открытых и односвязных на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$ областях $\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{D}_\rho$ и обращающихся в нуль на бесконечности. В них рассматривается стандартная топология, о которой мы рассказали выше. Тогда, естественно, всякая функция $\gamma\in A_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus D_{R_1})$ единственным способом разлагается в ряд (10), сходящийся равномерно на любом компакте внутри $\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{D}_{R_1}$, что и требовалось! Итак, мы будем доказывать базисность системы (9) в пространствах $A_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{D}_R)$ для всех $R\in(0,1]$. Исходя из приведенных выше определений, нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Пусть U — односвязная область в $\overline{\mathbb{C}}$, $\infty\in U$, $\zeta_0\in\mathbb{C}\setminus U$. Через V обозначим образ U при отображении $z=(\zeta-\zeta_0)^{-1}$ (предполагается, что U находится в ζ-плоскости, а V — в z-плоскости). Тогда множество $A(V)$ состоит в точности из функций $\{f(z)=z^{-1}\gamma(\zeta_0+z^{-1})\colon \gamma\in A_0(U)\}$. Если наделить $A(V)$ и $A_0(U)$ стандартными топологиями, о которых было говорено выше, то данное отображение является заодно и топологическим изоморфизмом между пространствами $A(V)$ и $A_0(U)$.

Из сказанного выше вытекает, что базисность системы функций (9) в пространствах $A_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{D}_R)$, $0<R\leqslant 1$, равносильна базисности системы функций

$$F_n(z)=z^{-1}\gamma_n(0.5+z^{-1})\equiv z^{-1}\prod_{k=0}^{n}(0.5+z^{-1}-k/n)^{-1}=z^n\prod_{k=0}^{n}(1+z(0.5-k/n))^{-1} \tag{11}$$

в пространствах $A(G_R)$, $0<R\leqslant 1$, где области G_R в z-плоскости суть образы областей $\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{D}_R$ в ζ-плоскости при отображении $z=(\zeta-0.5)^{-1}$.

Зададим области G_R в более простой аналитической форме. Для этого вспомним, что множество D_R определялось как дополнение к компакту на сфере Римана $\{\zeta\in\overline{\mathbb{C}}\colon\ |W(\zeta)|\leqslant R\}$. Следовательно, $G_R=\{z\in\mathbb{C}\colon\ |W(0.5+z^{-1})|<R\}$. Имеем

$$\begin{aligned}W(0.5+z^{-1})&=(0.5+z^{-1}-1)^{0.5+z^{-1}-1}(0.5+z^{-1})^{-0.5-z^{-1}}\\&=\Bigl(\frac{z^{-1}-0.5}{z^{-1}+0.5}\Bigr)^{1/z}((z^{-1}-0.5)(z^{-1}+0.5))^{-1/2}\\&=z(1-0.25z^2)^{-1/2}\Bigl(\frac{1-0.5z}{1+0.5z}\Bigr)^{1/z}\equiv 2w(0.5z),\end{aligned}$$

где

$$w(s)=\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}\Bigl(\frac{1-s}{1+s}\Bigr)^{1/(2s)},\qquad s\in\mathbb{C}\setminus((-\infty,-1]\cup[1,+\infty)). \tag{12}$$

Под $\big((1-s)/(1+s)\big)^{1/(2s)}$ мы понимаем функцию

$$\exp\Big(\frac{1}{2s}\ln\frac{1-s}{1+s}\Big)=\exp\Big(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^{2n}}{2n+1}\Big),\qquad |s|<1,$$

а вне круга $|s|<1$ функция $\ln\big((1-s)/(1+s)\big)$ определяется как однозначное аналитическое продолжение главной ветви этого логарифма в $\mathbb{C}\setminus\big((-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\big)$.

Таким образом,

$$G_R=\{z\in\mathbb{C}\colon\ |w(0.5z)|<0.5R\},\qquad 0<R\leqslant 1. \tag{13}$$

Найдем асимптотику функций $F_n(z)$ при $n\to\infty$ и $z\in\mathbb{C}\setminus\big((-\infty,-2]\cup[2,+\infty)\big)$. Воспользуемся квадратурной формулой (см. [3, гл. 9, § 5])

$$0.5g(0)+\sum_{k=1}^{n-1}g(k/n)+0.5g(1)=n\int\limits_0^1 g(t)dt+O(M/n),$$

справедливой для любой функции $g\in C^2[0,1]$, где $M=\max\{|g''(t)|:\ t\in[0,1]\}$, а постоянная в O абсолютная. Полагая в ней

$$g(t)=g(z,t)=\ln(1+z(0.5-t))$$

$\big($под $\ln(1+\lambda z),\ \lambda\in[-1/2,1/2]$, мы понимаем главную ветвь логарифма, разрез делается по $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)\big)$ и учитывая, что на любом компакте K, лежащем в области $\mathbb{C}\setminus((-\infty,-2]\cup[2,+\infty))$, функция $\partial^2g(z,t)/\partial t^2$ ограничена по абсолютной величине некоторой постоянной (своей для каждого такого компакта K), получаем асимптотическое равенство

$$\ln\prod_{k=0}^{n}(1+z(0.5-k/n))=\sum_{k=0}^{n}\ln(1+z(0.5-k/n))$$

$$=0.5\ln(1+0.5z)+0.5\ln(1-0.5z)+n\int\limits_0^1\ln(1+z(0.5-t))\,dt+O(1/n) \tag{14}$$

равномерно на K. Вычислив интеграл

$$\int\limits_0^1\ln(1+z(0.5-t))\,dt=-1-z^{-1}\ln\frac{1-0.5z}{1+0.5z}+0.5\ln(1-0.25z^2),$$

на основании соотношений (11) и (12) приходим к асимптотике

$$F_n(z)=(1-0.25z^2)^{-1/2}\Big(ez(1-0.25z^2)^{-1/2}\Big(\frac{1-0.5z}{1+0.5z}\Big)^{1/z}\Big)^n\exp(O(1/n))$$

$$=(1-0.25z^2)^{-1/2}(2ew(0.5z))^n(1+O(1/n))\qquad(n\to\infty), \tag{15}$$

равномерной по z на любом компакте внутри $\mathbb{C}\setminus((-\infty,-2]\cup[2,+\infty))$.

Теперь нам потребуется еще одно вспомогательное утверждение, которое для сохранения связности изложения мы докажем ниже.

Лемма 2. *При любых $R\in(0,1]$ области G_R являются звездообразными относительно точки $z=0$, а функция $w(z/2)$ является в них однолистной.*

Лемма 2 позволяет сделать замену переменной $w = w(z/2)$ в области $G_1 = \bigcup_{R\in(0,1)} G_R$. Из (13) видно, что области G_R при таком отображении перейдут в круг $\{w \in \mathbb{C}\colon\ |z| < 0.5R\}$, в G_1 у отображения w имеется обратное $z = \phi(w)$, $\phi \in A(|w| < 0.5)$. В итоге наша задача свелась к доказательству базисности систем функций (числовые множители $(2e)^{-n}$ на свойство системы образовывать базис не влияют)

$$\Phi_n(w) = (2e)^{-n} F_n(\phi(w)), \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

в пространствах функций $A(|w| < 0.5R)$, $0 < R \le 1$. Функции $\Phi_n(w)$ в силу (15) представимы в виде

$$\Phi_n(w) = b_n(w) w^n, \qquad b_n(w) = (1 - 0.25\phi^2(w))^{-1/2}(1 - O(1/n)) \qquad (n \to \infty). \tag{16}$$

Множитель $(1 - 0.25\phi^2(w))^{-1/2} \equiv (1 - 0.25z^2)^{-1/2}$ не имеет нулей в круге $|w| < 0.5$ и (что особенно важно!) $\Phi_n(0) = 1$. Для того чтобы убедиться в справедливости последнего утверждения, заметим, что остаток $O(1/n)$ в (14), представляющий из себя при каждом n некоторую n-ю функцию от z, обращается в нуль в точке $z = 0$, а множитель $1 + O(1/n)$ в (15) и в (16) не что иное, как экспонента от этого остатка. Поэтому $b_n(0) = (1 - 0.25\phi^2(0))^{-1/2} = 1$.

Теперь воспользуемся теоремой Ю. А. Казьмина о базисности близких систем [5]. Пусть заданы положительное число r и две последовательности функций $\{a_n(w)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n(w)\}_{n=0}^{\infty}$, предкомпактные в пространстве $A(|w| < r)$ и удовлетворяющие условиям $a_n(0) = b_n(0) = 1$ и $\lim_{n\to\infty}(a_n(w) - b_n(w)) = 0$ в топологии $A(|w| < r)$.

Тогда либо обе системы функций

$$\{w^n a_n(w)\}_{n=0}^{\infty}, \qquad \{w^n b_n(w)\}_{n=0}^{\infty}$$

образуют базис в $A(|w| < r)$, либо ни одна из них не обладает этим свойством.

Положив $a_n(w) = a(w) = (1 - 0.2\phi^2(w))^{-1/2}$ (функции $b_n(w)$ определены в (16)) убеждаемся в том, что все условия цитированной теоремы Ю. А. Казьмина выполнены. Следовательно, достаточно доказать базисность системы $\{a(w)w^n\}_{n=0}^{\infty}$ в пространствах $A(|w| < r)$, $0 < r \le 0.5$. Но базисность такой системы сразу следует из необращения в нуль функции $a(w)$: оператор умножения на нее непрерывен и обратим, а свойства системы образовывать базисность сохраняется при действии на функции этой системы непрерывным обратимым оператором. Тем самым теорема 1 будет полностью доказана, если доказать лемму 2. □

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 2. Обозначим $w_1(z) = w(z/2)$. Функция w_1 определена на множестве $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -2] \cup [2, +\infty))$. При этом функцию w_1 можно доопределить на $[2, +\infty)$ так, чтобы она стала непрерывной во множестве

$$Q = \{z:\ \Re z \ge 0,\ \Im z \ge 0\}.$$

В качестве f возьмем ветвь функции $\ln w_1$ такую, что f действительна на $(0, 2]$. Мы имеем

$$\Im f(z) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & z \in (0, +i\infty), \\ 0, & z \in (0, 2], \\ \pi\Big(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{z}\Big), & z \in [2, +\infty). \end{cases} \tag{17}$$

Далее,

$$f'(z) = \frac{1}{z^2} \ln \frac{2 + z}{2 - z},$$

где берется ветвь логарифма, действительная при $z \in (0, 2]$. Покажем, что

$$\Re(z f'(z)) > 0 \qquad (z \in Q \setminus \{0\}). \tag{18}$$

Обозначим $g(z) = \ln((2+z)/(2-z)) = z^2 f'(z)$. Если $z \in Q \setminus \{0\}$, то

$$\Im \frac{g(z)}{z} = \int_0^1 \Im g'(tz)\,dt = \int_0^1 \Im \frac{4}{4-(tz)^2}\,dt \geq 0,$$

причем неравенство строгое, если $\Im z > 0$. Далее, $\Re g(z) \geq 0$, $\Im g(z) \geq 0$ для любого $z \in Q$. Таким образом, если arg обозначает значение аргумента из $(-\pi, \pi]$, то для любого $z \in Q$ мы имеем

$$0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leq \arg \frac{g(z)}{z} \leq \pi, \qquad 0 \leq \arg g(z) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда следует, что $\arg(g(z)/z) < \pi/2$, и (18) доказано.

Пусть $R > 0$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Из равенства

$$\frac{d\Im(f(Re^{i\varphi}))}{d\varphi} = \Re(Re^{i\varphi} f'(Re^{i\varphi}))$$

и неравенства (18) вытекает, что функция $\Im(f(Re^{i\varphi}))$ как функция от φ строго возрастает на $[0, \pi/2]$; поэтому в силу (17)

$$0 \leq \Im(f(Re^{i\varphi})) < \pi/2 \qquad (\varphi \in [0, \pi/2]),$$

т. е. $w_1(z) \in Q$ для любого $z \in Q$. Далее, из (18) следует, что $|w_1(z)|$ возрастает вдоль любого луча $Re^{i\varphi}$, где $\varphi \in [0, \pi/2]$ фиксировано, а $R \in [0, +\infty)$. Кроме того, $\lim_{R\to+\infty} |w_1(Re^{i\varphi})| = 1$. Поэтому для любого $t \in (0, 1/2]$ существует ровно одно $R = R_t(\varphi)$ такое, что $|w_1(Re^{i\varphi})| = t$, причем $R_t(0) \leq R_{1/2}(0) = 2$. В силу непрерывности функции w_1 функция R_t непрерывна на $[0, \pi/2]$, и мы имеем кривую Γ'_t, соединяющую точки $R_t(0)$ и $iR_t(\pi/2)$ и содержащуюся в Q. Отражая Γ'_t относительно мнимой, действительной осей и нуля, мы получим (вместе с Γ'_t) четыре дуги замкнутой кривой Γ_t. При движении по каждой из этих дуг против часовой стрелки аргумент $w_1(z)$ возрастает на $\pi/2$. Для каждого $R \in (0, 1]$ границей области G_R является $(1/2)\Gamma_{R/2}$. Ясно, что область G_R является звездообразной относительно точки $z = 0$. В силу принципа максимума для любого w, $|w| < 1$, уравнение $w(z) = 1$ имеет единственное решение во множестве $\{z : z \in G_1\}$. Лемма доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Маркушевич А.И.** Избранные главы теории аналитических функций. М.: Наука, 1976. 192 с.
2. **Эдвардс Р.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1969. 1072 с.
3. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Физматгиз, 1962. 808 с.
4. **Brutman L., Passow E.** On a divided differences problem // East J. Approx. 1997. Vol. 3, no. 4. P. 495–501.
5. **Казьмин Ю.А.** Теорема о базисности близких систем и ее приложения // Мат. заметки. 1988. Т. 44, вып. 1. С. 80–88.

Конягин Сергей Владимирович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: konyagin@mi.ras.ru

Поступила 10.01.2011

Попов Антон Юрьевич
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: mysfed@rambler.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 3 2011

УДК 517.983.23

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНОГО ЗАМКНУТОГО ОПЕРАТОРА

Л. Ф. Коркина, М. А. Рекант

В банаховом пространстве заданы линейный замкнутый плотно определенный оператор и некоторая область Ω, лежащая в его регулярном множестве и содержащая отрицательную полуось вещественной оси. Предполагаются известными степенные оценки нормы резольвенты оператора в нуле и в бесконечности. На базе интегральной формулы Коши в работе введены операторные функции, порождаемые скалярными функциями, аналитическими в некоторой области, не содержащей нуля и содержащей дополнение Ω, и имеющими степенные оценки модуля в нуле и в бесконечности. Исследуются некоторые свойства операторных функций, изучаемые ранее авторами для случая оператора с ограниченным обратным, в частности, мультипликативное свойство.

Ключевые слова: линейный замкнутый оператор, функции от оператора, мультипликативное свойство, обратимость.

L. F. Korkina, M. A. Rekant. Some classes of functions of a linear closed operator.

A linear closed densely defined operator and some domain Ω lying in the regular set of the operator and containing the negative real semiaxis of the real line are specified in a Banach space. We assume that power estimates for the norm of the resolvent operator are known at zero and infinity. We use the Cauchy integral formula to introduce operator functions generated by scalar functions that are analytic in a certain domain not containing the origin and containing the complement of Ω and have power estimates for their absolute values at zero and infinity. We study some properties of operator functions, which were studied by the authors earlier for the case of an operator whose inverse operator is bounded; in particular, we study the multiplicative property.

Keywords: linear closed operator, functions of an operator, multiplicative property, invertibility.

Пусть X — комплексное банахово пространство, A — линейный оператор, действующий в X, с областью определения $D(A)$ и множеством значений $\operatorname{Im} A$. Разными авторами решалась задача построения операторных функций по заданным скалярным функциям определенного класса при различных предположениях на оператор A. Изучаются, в частности, такие свойства отображения φ, ставящего в соответствие скалярной функции операторную, как аддитивность, мультипликативность. Выясняется, когда оператор $(\varphi f)(A)$ (f — скалярная функция заданного класса, в частности, степенная функция) непрерывен, вполне непрерывен, каковы его спектр и сопряженный к $(\varphi f)(A)$ оператор (см., например, [1–6]).

Пусть A — плотно определенный линейный инъективный оператор со значениями в X; известна оценка нормы резольвенты оператора A в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{C}$, содержащей неположительную вещественную полуось. В работе [7] рассматриваются операторные функции, порождаемые скалярными функциями, аналитическими в некоторой области, содержащей $\mathbb{C}\setminus\Omega$, и имеющими степенную асимптотическую оценку модуля на бесконечности. Данная работа обобщает ряд результатов [7] в случае, когда ограниченность оператора A^{-1} не предполагается, а норма резольвенты оператора A и скалярные функции рассматриваемого класса имеют, вообще говоря, различные асимптотические оценки в нуле и в бесконечности.

Переходим к изложению результатов работы.

Пусть $D(\varphi)$ $(0 < \varphi < \pi)$ — область в $\mathbb{C}$, содержащая отрицательную вещественную полуось, с границей $L(\varphi) = L_1(\varphi) \cup L_2(\varphi)$, где

$$L_1(\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{C}:\ \lambda = te^{i\varphi},\ t \geqslant 0\}, \qquad L_2(\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{C}:\ \lambda = te^{-i\varphi},\ t \geqslant 0\}.$$

Обход контура $L(\varphi)$ задается так, что область $D(\varphi)$ остается справа.

Будем предполагать, что в резольвентном множестве $\rho(A)$ оператора A лежит множество $\overline{D(\varphi_0)} \setminus \{0\}$ при некотором $\varphi_0 \in (0, \pi)$ и в нем справедлива оценка нормы его резольвенты $R(\lambda) = R_A(\lambda) = (A - \lambda E)^{-1}$ (E — единичный оператор):

$$\|R(\lambda)\| \leqslant \frac{C_0}{|\lambda|^{\rho}(|\lambda|+1)^{\gamma-\rho}} \qquad (C_0 > 0, \quad \rho \geqslant 0, \quad \gamma \leqslant 1). \tag{1}$$

Введем следующие классы функций.

Для $\varphi \in (\varphi_0, \pi)$, $\tau, \sigma \in \mathbb{R}$ через $F_0(\varphi, \tau, \sigma)$ обозначим множество функций f, непрерывных в $\mathbb{C} \setminus (D(\varphi) \cup \{0\})$ и аналитических в $\mathbb{C} \setminus \overline{D(\varphi)}$, причем при некотором $C \in \mathbb{R}$ и всех $\lambda \notin D(\varphi) \cup \{0\}$ имеет место неравенство

$$|f(\lambda)| \leqslant C|\lambda|^{\tau}(|\lambda|+1)^{\sigma-\tau}.$$

Через $\mathcal{F}_0$ обозначим объединение всех таких классов $F_0(\varphi, \tau, \sigma)$.

Для $\varphi \in (\varphi_0, \pi)$, æ, ν, τ, $\sigma \in \mathbb{R}$ через $F_1(\varphi, æ, \nu, \tau, \sigma)$ обозначим множество функций f, непрерывных в $\mathbb{C} \setminus (D(\varphi) \cup \{0\})$ и аналитических в $\mathbb{C} \setminus \overline{D(\varphi)}$, причем при некоторых $C_1, C_2 > 0$ и всех $\lambda \notin D(\varphi) \cup \{0\}$ имеют место неравенства

$$C_1|\lambda|^{æ}(|\lambda|+1)^{\nu-æ} \leqslant |f(\lambda)| \leqslant C_2|\lambda|^{\tau}(|\lambda|+1)^{\sigma-\tau}.$$

Через $\mathcal{F}_1$ обозначим объединение всех таких классов $F_1(\varphi, æ, \nu, \tau, \sigma)$.

Введем следующие скалярную и операторные функции (зависящие от m и $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $(m \geqslant n)$ и $\lambda_0 \in D(\varphi_0)$ как от параметров):

$$\begin{gathered} g(\lambda; m, n, \lambda_0) = (\lambda - \lambda_0)^m \lambda^{-n}, \\ g(A; m, n, \lambda_0) = (A - \lambda_0 E)^m A^{-n}, \\ \widehat{g}(A; m, n, \lambda_0) = A^{-n}(A - \lambda_0 E)^m. \end{gathered} \tag{2}$$

Заметим, что оператор $g(A; m, n, \lambda_0)$ замкнут, так как обратный к нему оператор $A^n R^m(\lambda_0)$ (с учетом неравенства $m \geqslant n$) непрерывен на X. Кроме того, замыкание $\overline{\widehat{g}(A; m, n, \lambda_0)}$ оператора $\widehat{g}(A; m, n, \lambda_0)$ совпадает с $g(A; m, n, \lambda_0)$, так как оператор $\widehat{g}^{-1}(A; m, n, \lambda_0) = R^m(\lambda_0)A^n$ определен на плотном в X множестве $D(A^n)$ [2, введение, § 5, п. 4] и на этом множестве совпадает с $A^n R^m(\lambda_0)$, т. е. $\overline{\widehat{g}^{-1}(A; m, n, \lambda_0)} = g^{-1}(A; m, n, \lambda_0)$. Следовательно,

$$\overline{\widehat{g}(A; m, n, \lambda_0)} = g(A; m, n, \lambda_0). \tag{3}$$

Лемма 1. *Пусть оператор $T\colon X \to X$ непрерывен, операторы P, Q свои области определения из X отображают в X, операторы Q и TQ имеют замыкания, $P \subset \overline{Q}$. Тогда $TP \subset \overline{TQ}$.*

Доказательство вытекает из соответствующих определений. □

Следствие 1. *Если в условиях леммы $\overline{P} = \overline{Q}$, то $\overline{TP} = \overline{TQ}$.*

Лемма 2. *Пусть $B\colon D(B) \subset X \to X$, $\overline{D(B)} = X$, оператор B^{-1} существует и непрерывен на X, $P_s(B) = \sum_{j=0}^{s} \alpha_j B^j$ $(\alpha_s \neq 0)$, $n \geqslant s$. Тогда $\overline{P_s(B)\big|_{D(B^n)}} = P_s(B)$.*

Доказательство. Сначала установим, что $\overline{B^s\big|_{D(B^n)}} = B^s$. Так как B^s отображает $D(B^n)$ на $D(B^{n-s})$, то B^{-s} отображает $D(B^{n-s})$ на $D(B^n)$. Поскольку $D(B^{n-s})$ плотно в X и оператор B^{-s} непрерывен, то $\overline{B^{-s}\big|_{D(B^{n-s})}} = B^{-s}$, т. е. $\overline{B^s\big|_{D(B^n)}} = B^s$.

В силу того что $P_s(B) = (\sum_{j=0}^{s} \alpha_j B^{j-s}) B^s$ и оператор $\sum_{j=0}^{s} \alpha_j B^{j-s}$ непрерывен, по следствию 1 с учетом замкнутости оператора $P_s(B)$ [1, гл. 7, § 9, п. 7] имеем

$$\overline{P_s(B)\big|_{D(B^n)}} = \overline{\Big(\sum_{j=0}^{s} \alpha_j B^{j-s}\Big) B^s\Big|_{D(B^n)}} = \overline{\Big(\sum_{j=0}^{s} \alpha_j B^{j-s}\Big) B^s} = \overline{P_s(B)} = P_s(B).$$

Лемма доказана. □

Лемма 3. *Пусть B — линейный плотно определенный в X оператор со значениями в X, $\rho(B) \neq \varnothing$, $P_s(B) = \sum_{j=0}^{s} \alpha_j B^j$ $(\alpha_s \neq 0)$, $n \geqslant s$. Тогда $\overline{P_s(B)\big|_{D(B^n)}} = P_s(B)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\lambda_0 \in \rho(A)$, $C = B - \lambda_0 E$. Тогда оператор C^{-1} непрерывен на X, $P_s(B) = P_s(C + \lambda_0 E) = Q_s(C)$ (Q_s — многочлен степени s), $D(B^n) = D(C^n)$, т. е. по лемме 2

$$\overline{P_s(B)\big|_{D(B^n)}} = \overline{Q_s(C)\big|_{D(C^n)}} = Q_s(C) = P_s(B).$$

Лемма доказана. □

Теорема 1. *Пусть $B:\ D(B) \subset X \to X$ — линейный инъективный оператор, $\overline{D(B)} = \overline{\operatorname{Im} B} = X$, $\rho(B) \neq \varnothing$, $P_s(B) = \sum_{j=0}^{s} \alpha_j B^j$ $(\alpha_s \neq 0)$, $n \geqslant s$. Тогда*

$$\overline{P_s(B)\big|_{D(B^n)\cap D(B^{-n})}} = P_s(B). \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Установим, что

$$P_s(B)\big|_{D(B^n)} \subset \overline{P_s(B)\big|_{D(B^n)\cap D(B^{-n})}}. \tag{5}$$

Пусть $\lambda \in \rho(B)$, $x \in D(B^n)$, $z = (B - \lambda E)^n x$, т. е. $x = R_B^n(\lambda) z$. Так как $\overline{D(B)} = \overline{\operatorname{Im} B} = X$ и $\rho(B^{-1}) \neq \varnothing$ (поскольку $\rho(B) \neq \varnothing$), то $\overline{\operatorname{Im} B^n} = \overline{D(B^{-n})} = X$ [2], т. е. существует такая последовательность $\{z_m\} \subset \operatorname{Im} B^n$, что $z_m \to z$ при $m \to \infty$. Введем $x_m = R_B^n(\lambda) z_m$. При этом $\{x_m\} \subset D(B^n)$. Так как $B^{-n} R_B^n(\lambda) = R_B^n(\lambda) B^{-n}$, то $\{x_m\} \subset D(B^{-n})$, следовательно, $\{x_m\} \subset D(B^n) \cap \operatorname{Im} B^n$. Кроме того, $x_m = R_B^n(\lambda) z_m \to R_B^n(\lambda) z = x$, $P_s(B) x_m = P_s(B) R_B^n(\lambda) z_m \to P_s(B) R_B^n(\lambda) z = P_s(B) x$ в силу непрерывности оператора $P_s(B) R_B^n(\lambda)$. Таким образом, (5) имеет место. Поскольку $P_s(B)\big|_{D(B^n)\cap \operatorname{Im} B^n} \subset P_s(B)\big|_{D(B^n)}$, с учетом леммы 3 получаем (4). Теорема доказана. □

Следствие 2. *В предположении, что $\overline{\operatorname{Im} A} = X$, функции $g(A; m, n, \lambda_0)$ и $\widehat{g}(A; m, n, \lambda_0)$ оператора A при фиксированных $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \geqslant n$ и $\lambda_0 \in D(\varphi_0)$ плотно определены в X.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество

$$D(\widehat{g}(A; m, n, \lambda_0)) = D(A^m) \cap D(A^{-n}) = D(A^m) \cap \operatorname{Im}(A^n)$$

плотно в X, а тогда и $\overline{D(g(A; m, n, \lambda_0))} = X$, что и требовалось. □

Введем функции от оператора с помощью следующего определения.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $f \in \mathcal{F}_0$, причем $f \in F_0(\varphi, \tau, \sigma)$ $(\varphi \in (\varphi_0, \pi),\ \tau, \sigma \in \mathbb{R})$. Предполагая, что $\lambda_0 \in D(\varphi)$, $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ удовлетворяют неравенствам

$$m \geqslant n, \qquad \rho - \tau - n < 1, \qquad \gamma - \sigma + m - n > 1, \tag{6}$$

зададим операторы

$$f(A; m, n, \lambda_0) = -\frac{1}{2\pi i}\, g(A; m, n, \lambda_0) \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{f(\lambda)}{g(\lambda; m, n, \lambda_0)} R(\lambda)\, d\lambda, \tag{7}$$

$$\widehat{f}(A; m, n, \lambda_0) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{f(\lambda)}{g(\lambda; m, n, \lambda_0)} R(\lambda)\, d\lambda\ \widehat{g}(A; m, n, \lambda_0), \tag{8}$$

$$\widetilde{f}(A; m, n, \lambda_0) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{f(\lambda)}{g(\lambda; m, n, \lambda_0)} R(\lambda)\, d\lambda\ g(A; m, n, \lambda_0). \tag{9}$$

Заметим, что интегральный оператор в (7)–(9) в силу (6) непрерывен на X. Так как оператор в (2) замкнут, то формула (7) задает замкнутый оператор. Кроме того,

$$\widehat{f}(A;m,n,\lambda_0) \subset \widetilde{f}(A;m,n,\lambda_0) \subset f(A;m,n,\lambda_0); \tag{10}$$

последнее включение следует из соотношений

$$R(\lambda)g(A;m,n,\lambda_0) \subset g(A;m,n,\lambda_0)R(\lambda),$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L(\varphi_0)} g(A;m,n,\lambda_0)\frac{f(\lambda)}{g(\lambda;m,n,\lambda_0)}R(\lambda)\,d\lambda \subset f(A;m,n,\lambda_0).$$

Из (10) вытекает, что операторы (8), (9) имеют замыкания.

Из (3) и (10) с учетом следствия 1 получаем

$$\overline{\widehat{f}(A;m,n,\lambda_0)} = \overline{\widetilde{f}(A;m,n,\lambda_0)} \subset f(A;m,n,\lambda_0).$$

Для доказательства следующей далее теоремы 2 нам понадобится ряд лемм. При этом доказательство лемм 4–6 проводится аналогично доказательству соответствующих лемм из [7].

Лемма 4. *Пусть* $\varphi \in (\varphi_0,\pi)$, $\tau-\rho>-1$, $\sigma-\gamma<-1$, $h \in F_0(\varphi,\tau,\sigma)$. *Тогда*

$$\int\limits_{L(\varphi)} h(\mu)R(\mu)\,d\mu = \int\limits_{L(\varphi_0)} h(\mu)R(\mu)\,d\mu.$$

Лемма 5. *Пусть* $\varphi \in (\varphi_0,\pi)$, $\tau>-1$, $\sigma<-1$, $h \in F_0(\varphi,\tau,\sigma)$. *Тогда*

$$\int\limits_{L(\varphi)} h(\mu)\,d\mu = 0.$$

Лемма 6. *Пусть* $\varphi \in (\varphi_0,\pi)$, $\tau>-1$, $\sigma<0$, $\lambda \notin \overline{D(\varphi)}$, $h \in F_0(\varphi,\tau,\sigma)$. *Тогда*

$$\int\limits_{L(\varphi)} \frac{h(\mu)}{\mu-\lambda}\,d\mu = 2\pi i\,h(\lambda).$$

При доказательстве этих лемм используется тот факт, что произведения соответствующих функций h на μ стремятся к нулю при $\mu \to 0$ и $\mu \to \infty$.

Лемма 7. *Для любых* $\mu_1,\mu_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

$$|\mu_1-\mu_2| \geqslant q(|\mu_1|+|\mu_2|),$$

где $q = \left|\sin\dfrac{\arg\mu_1-\arg\mu_2}{2}\right|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Минимизируя по $t = \dfrac{|\mu_1|}{|\mu_2|}$ отношение

$$\frac{|\mu_1-\mu_2|^2}{(|\mu_1|+|\mu_2|)^2} = \frac{t^2+1-2t\cos\theta}{(t+1)^2} \qquad (\theta = \arg\mu_1-\arg\mu_2),$$

получаем результат леммы. □

Лемма 8. *Интеграл* $I = \int_0^{+\infty} ds \int_0^{+\infty} \frac{s^{\alpha_1}(s+1)^{\beta_1} t^{\alpha_2}(t+1)^{\beta_2}}{s+t}\, dt$ *сходится тогда и только тогда, когда*

$$\alpha_1 > -1, \qquad \alpha_2 > -1, \qquad \alpha_1 + \alpha_2 > -1, \tag{11}$$

$$\alpha_1 + \beta_1 < 0, \qquad \alpha_2 + \beta_2 < 0, \qquad \alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 < -1. \tag{12}$$

Доказательство заключается в стандартном исследовании на сходимость несобственного интеграла. □

Из лемм 7 и 8 вытекает

Следствие 3. *Пусть* $\varphi_1, \varphi_2 \in (-\pi, \pi]$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$. *Тогда условия* (11), (12) *задают область сходимости интеграла*

$$\int\limits_{L(\varphi_1)} |d\mu_1| \int\limits_{L(\varphi_2)} \frac{|\mu_1|^{\alpha_1}(|\mu_1|+1)^{\beta_1}|\mu_2|^{\alpha_2}(|\mu_2|+1)^{\beta_2}}{|\mu_1 - \mu_2|}\, |d\mu_2|. \tag{13}$$

Лемма 9. *Если* $f_j \in F_0(\varphi, \tau_j, \sigma_j)$ $(j = 1, 2)$, *то* $f_1 f_2 \in F_0(\varphi, \tau, \sigma)$ *с* $\tau = \tau_1 + \tau_2$ *и* $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$.

Справедливость леммы устанавливается непосредственной проверкой. □

Теорема 2. *Пусть* $\rho \geqslant 1$, $f_j \in F_0(\varphi, \tau_j, \sigma_j)$ $(\varphi \in (\varphi_0, \pi),\ j = 1, 2)$, *числа* $m_j, n_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *удовлетворяют неравенствам*

$$\begin{gathered} m_j \geqslant n_j, \qquad \rho - \tau_j - n_j < 1, \qquad \gamma - \sigma_j + m_j - n_j > 1 \qquad (j = 1, 2), \\ \rho - \tau_1 - \tau_2 - n_1 - n_2 < 1, \end{gathered} \tag{14}$$

$\lambda_0 \in D(\varphi)$. *Тогда*

$$f_1(A; m_1, n_1, \lambda_0) f_2(A; m_2, n_2, \lambda_0) \subset (f_1 f_2)(A; m_1 + m_2, n_1 + n_2, \lambda_0), \tag{15}$$

$$\widetilde{f}_1(A; m_1, n_1, \lambda_0) \widetilde{f}_2(A; m_2, n_2, \lambda_0) \supset (\widetilde{f_1 f_2})(A; m_1 + m_2, n_1 + n_2, \lambda_0). \tag{16}$$

Доказательство. Сначала установим (15) для случая, когда выполняется (14) с $m_j = n_j = 0$, причем в этой ситуации (15) является равенством. Прежде всего заметим, что по лемме 9 произведение $f_1 f_2 \in F_0(\varphi, \tau_1 + \tau_2, \sigma_1 + \sigma_2)$, причем $\tau = \tau_1 + \tau_2$, $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ удовлетворяют (6) с $m = n = 0$. Пусть $\varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 \leqslant \varphi$. С учетом лемм 4–6 имеем

$$f_1(A; 0, 0, \lambda_0) f_2(A; 0, 0, \lambda_0) = -\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{L(\varphi_1)} f_1(\mu_1) R(\mu_1) d\mu_1 \int\limits_{L(\varphi_2)} f_2(\mu_2) R(\mu_2) d\mu_2$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{L(\varphi_1)} d\mu_1 \int\limits_{L(\varphi_2)} f_1(\mu_1) f_2(\mu_2) \frac{R(\mu_1) - R(\mu_2)}{\mu_1 - \mu_2}\, d\mu_2$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2} \Bigg[\int\limits_{L(\varphi_1)} f_1(\mu_1) R(\mu_1)\, d\mu_1 \int\limits_{L(\varphi_2)} \frac{f_2(\mu_2)}{\mu_1 - \mu_2}\, d\mu_2 - \int\limits_{L(\varphi_2)} f_2(\mu_2) R(\mu_2)\, d\mu_2 \int\limits_{L(\varphi_1)} \frac{f_1(\mu_1)}{\mu_1 - \mu_2}\, d\mu_1 \Bigg]$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L(\varphi_1)} f_1(\mu_1) f_2(\mu_1) R(\mu_1)\, d\mu_1 = (f_1 f_2)(A; 0, 0, \lambda_0).$$

Зависимости от λ_0 в действительности здесь нет, так как $g(\lambda;0,0,\lambda_0)=1$, $g(A;0,0,\lambda_0)=E$. В процессе преобразований был изменен порядок интегрирования по кривым $L(\varphi_1)$ и $L(\varphi_2)$. Для обоснования допустимости этого убедимся в сходимости интеграла

$$\int\limits_{L(\varphi_1)} |d\mu_1| \int\limits_{L(\varphi_2)} \frac{|f_1(\mu_1)|\,|f_2(\mu_2)|\,\|R(\mu_2)\|}{|\mu_1-\mu_2|}\,|d\mu_2|. \tag{17}$$

Заметим, что подынтегральная функция $\chi(\mu_1,\mu_2)$ удовлетворяет неравенству

$$\chi(\mu_1,\mu_2)\leqslant \frac{C|\mu_1|^{\tau_1}(1+|\mu_1|)^{\sigma_1-\tau_1}|\mu_2|^{\tau_2-\rho}(1+|\mu_2|)^{\sigma_2-\tau_2+\rho-\gamma}}{|\mu_1-\mu_2|}\equiv\Psi(\mu_1,\mu_2).$$

Интеграл $\int_{L(\varphi_1)}|d\mu_1|\int_{L(\varphi_2)}\Psi(\mu_1,\mu_2)\,|d\mu_2|$ сходится при заданных ограничениях на параметры по следствию о сходимости интеграла (13). Отсюда вытекает сходимость интеграла (17).

Теперь установим (15) в предположениях (14). Пусть $h_j(\mu)=\dfrac{f_j(\mu)}{g(\mu;m_j,n_j,\lambda_0)}$ $(j=1,2)$. Тогда $h_j\in F_0(\varphi;\tau_j+n_j,\sigma_j-m_j+n_j)$, причем

$$\rho-(\tau_j+n_j)<1,\qquad \gamma-(\sigma_j-m_j+n_j)>1,\qquad \rho-(\tau_1+n_1)-(\tau_2+n_2)<1.$$

Поэтому по доказанному в частном случае

$$h_1(A;0,0,\lambda_0)h_2(A;0,0,\lambda_0)=(h_1h_2)(A;0,0,\lambda_0).$$

Кроме того,

$$g(A;m_1,n_1,\lambda_0)g(A;m_2,n_2,\lambda_0)=g(A;m_1+m_2,n_1+n_2,\lambda_0), \tag{18}$$

поскольку равны непрерывные операторы, обратные к операторам в обеих частях (18). Таким образом,

$$\begin{gathered} f_1(A;m_1,n_1,\lambda_0)f_2(A;m_2,n_2,\lambda_0)=g(A;m_1,n_1,\lambda_0)h_1(A;0,0,\lambda_0)g(A;m_2,n_2,\lambda_0)h_2(A;0,0,\lambda_0)\\ \subset g(A;m_1,n_1,\lambda_0)g(A;m_2,n_2,\lambda_0)h_1(A;0,0,\lambda_0)h_2(A;0,0,\lambda_0)\\ =g(A;m_1+m_2,n_1+n_2,\lambda_0)(h_1h_2)(A;0,0,\lambda_0)=(f_1f_2)(A;m_1+m_2,n_1+n_2,\lambda_0), \end{gathered}$$

т. е. имеет место (15). Аналогично устанавливается (16). Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е. При $\rho\geqslant 1$ условие $\rho-\tau_1-\tau_2-n_1-n_2<1$ вытекает из остальных неравенств (14).

Теорема 3. *Пусть* $\lambda_0\in D(\varphi_0)$, $m,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $n-\rho>-1$, $n-m-\gamma<-1$. *Тогда*

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L(\varphi_0)}\frac{R(\lambda)}{g(\lambda;m,n,\lambda_0)}\,d\lambda=A^nR^m(\lambda_0). \tag{19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $\dfrac{R(\lambda)}{g(\lambda;m,n,\lambda_0)}$ непрерывна в $\overline{D(\varphi_0)}\setminus\{0,\lambda_0\}$ и аналитична в $D(\varphi_0)\setminus\{\lambda_0\}$, причем интеграл в (19) сходится абсолютно. Поэтому

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L(\varphi_0)}\frac{R(\lambda)}{g(\lambda;m,n,\lambda_0)}\,d\lambda=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L(\varphi_0)}\frac{\lambda^nR(\lambda)}{(\lambda-\lambda_0)^m}\,d\lambda$$

$$=\operatorname*{res}_{\lambda_0}\frac{\lambda^nR(\lambda)}{(\lambda-\lambda_0)^m}=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{\lambda\to\lambda_0}[\lambda^nR(\lambda)]^{(m-1)}=\frac{1}{(m-1)!}\sum_{j=0}^{n}C_{m-1}^{j}(\lambda^n)^{(j)}\Big|_{\lambda=\lambda_0}R^{(m-1-j)}(\lambda_0)$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!(m-1-j)!} \, \frac{n!}{(n-j)!} \lambda_0^{n-j} (m-1-j)! \, R^{m-j}(\lambda_0)$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \left(C_n^j (\lambda_0 E)^{n-j} (A - \lambda_0 E)^j \right) R^m(\lambda_0) = A^n R^m(\lambda_0).$$

Теорема доказана. □

Теорема 4. *Пусть* $\lambda_0 \in D(\varphi_0)$, $k, \ell \in \mathbb{Z}$, $k \leqslant \ell$, $f_j(\lambda) = \lambda^j$, $f(\lambda) = \sum_{j=k}^{\ell} \alpha_j f_j(\lambda)$ $(\alpha_j \in \mathbb{C}$, $\alpha_k, \alpha_\ell \neq 0)$, $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \geqslant n$, $n + k - \rho > -1$, $n + \ell - m - \gamma < -1$. *Тогда*

$$f_j(A; m, n, \lambda_0) = A^j = \overline{\widetilde{f}_j(A; m, n, \lambda_0)} \qquad (k \leqslant j \leqslant \ell), \tag{20}$$

$$f(A; m, n, \lambda_0) \supset \sum_{j=k}^{\ell} \alpha_j A^j \supset \widetilde{f}(A; m, n, \lambda_0). \tag{21}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Установим сначала первое из равенств (20). Имеем

$$f_j(A; m, n, \lambda_0) = -\frac{1}{2\pi i} \, g(A; m, n, \lambda_0) \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{\lambda^j}{g(\lambda; m, n, \lambda_0)} \, R(\lambda) \, d\lambda$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \, g(A; m, n, \lambda_0) \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{R(\lambda) \, d\lambda}{g(\lambda; m, n+j, \lambda_0)} = (A - \lambda_0 E)^m A^{-n} A^{n+j} R^m(\lambda_0).$$

Заметим, что

$$A^{-n} A^{n+j} R^m(\lambda_0) = A^j R^m(\lambda_0). \tag{22}$$

В самом деле, так как $0 \leqslant n + j \leqslant m$, то оператор $A^{n+j} R^m(\lambda_0)$ непрерывен на X, т. е. при $j \geqslant 0$ соотношение (22) имеет место (область определения обеих частей в (22) равна X). Пусть $j < 0$. Тогда, поскольку $0 \leqslant n + j \leqslant m$, то

$$A^{-n} A^{n+j} R^m(\lambda_0) = A^j A^{-n-j} A^{n+j} R^m(\lambda_0) = A^j R^m(\lambda_0).$$

Таким образом,

$$f_j(A; m, n, \lambda_0) = (A - \lambda_0 E)^m A^j R^m(\lambda_0) = \begin{cases} A^j (A - \lambda_0 E)^m R^m(\lambda_0), & j \geqslant 0, \\ (A - \lambda_0 E)^m R^m(\lambda_0) A^j, & j < 0 \end{cases}$$

и, следовательно, $f_j(A; m, n, \lambda_0) = A^j$. Отсюда вытекает первое из соотношений (20).

Докажем теперь, что $\overline{\widetilde{f}_j(A; m, n, \lambda_0)} = A^j$. Пусть $M = D(A^{m-n}) \cap D(A^{-n})$, $x \in M$, $y = A^{m-n} x$. Заметим, что $M \subset D(A^j)$ (поскольку $0 \leqslant n + j \leqslant m$), $x = A^{n-m} y$, $A^{-n} x = A^{-m} y$, т. е. $y \in D(A^{-m})$. Справедливы равенства

$$A^j x = A^j A^{n-m} y = A^{j+(n-m)} y = A^{n+j} A^{-m} y$$

$$= A^{n+j} R^m(\lambda_0)(A - \lambda_0 E)^m A^{-m} y = A^{n+j} R^m(\lambda_0)(A - \lambda_0 E)^m A^{-n} A^{n-m} y$$

$$= A^{n+j} R^m(\lambda_0)(A - \lambda_0 E)^m A^{-n} x = \widetilde{f}_j(A; m, n, \lambda_0) x.$$

Так как $D(\widetilde{f}_j(A; m, n, \lambda_0)) = M$, то $\widetilde{f}_j(A; m, n, \lambda_0) = A^j\big|_M$, т. е. (с учетом теоремы 1)

$$\overline{\widetilde{f}_j(A; m, n, \lambda_0)} = \overline{A^j\big|_M} = A^j,$$

и имеет место (20).

Теперь заметим, что

$$\widetilde{f}(A;m,n,\lambda_0)=\sum_{j=k}^{\ell}\alpha_j\widetilde{f}_j(A;m,n,\lambda_0)\subset\sum_{j=k}^{\ell}\alpha_jA^j$$
$$=\sum_{j=k}^{\ell}\alpha_jf_j(A;m,n,\lambda_0)\subset f(A;m,n,\lambda_0),$$

т. е. имеет место (21). Теорема доказана. □

Теорема 5. *Пусть* $m_0,n_0,m,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $m\geqslant n$, $m_0\geqslant n_0$,

$$n-n_0-\rho>-1,\qquad m_0-n_0-m+n-\gamma<-1,$$

$\lambda_0,\lambda\in D(\varphi_0)$. *Тогда*

$$-\frac{g(A;m,n,\lambda)}{2\pi i}\int\limits_{L(\varphi_0)}\frac{g(\mu;m_0,n_0,\lambda_0)}{g(\mu;m,n,\lambda)}R(\mu)\,d\mu=g(A;m_0,n_0,\lambda_0),\tag{23}$$

а если $\overline{\operatorname{Im}A}=X$, *то*

$$\overline{-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L(\varphi_0)}\frac{g(\mu;m_0,n_0,\lambda_0)}{g(\mu;m,n,\lambda)}R(\mu)\,d\mu\;g(A;m,n,\lambda)}=g(A;m_0,n_0,\lambda_0).\tag{24}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\int\limits_{L(\varphi_0)}\frac{g(\mu;m_0,n_0,\lambda_0)}{g(\mu;m,n,\lambda)}R(\mu)d\mu\int\limits_{L(\varphi_0)}\frac{(\mu-\lambda_0)^{m_0}\mu^{-n_0}}{(\mu-\lambda)^m\mu^{-n}}R(\mu)d\mu$$

$$=\sum_{k=0}^{m_0}C_{m_0}^k(-\lambda_0)^{m_0-k}\int\limits_{L(\varphi_0)}\frac{R(\mu)d\mu}{(\mu-\lambda)^m\mu^{n_0-k-n}}=\sum_{k=0}^{m_0}C_{m_0}^k(-\lambda_0)^{m_0-k}\int\limits_{L(\varphi_0)}\frac{R(\mu)d\mu}{g(\mu;m,n+k-n_0,\lambda)}$$

$$=-2\pi i\sum_{k=0}^{m_0}C_{m_0}^k(-\lambda_0)^{m_0-k}A^{k+n-n_0}R^m(\lambda)=-2\pi i(A-\lambda_0E)^{m_0}A^{n-n_0}R^m(\lambda)$$

(здесь была использована теорема 3). Поэтому обратный к левой части в (23) оператор, равный

$$\big((A-\lambda E)^mA^{-n}(A-\lambda_0E)^{m_0}A^{n-n_0}R^m(\lambda)\big)^{-1}=(A-\lambda E)^mA^{n_0-n}R^{m_0}(\lambda_0)A^nR^m(\lambda),$$

содержит оператор

$$(A-\lambda E)^mA^{-n}(A^{n_0}R^{m_0}(\lambda_0))(A^nR^m(\lambda))=(A-\lambda E)^mA^{-n}(A^nR^m(\lambda))(A^{n_0}R^{m_0}(\lambda_0))=A^{n_0}R^{m_0}(\lambda_0).$$

Последний оператор непрерывен на X, т. е. оператор, обратный к левой части (23), определен на X и совпадает с $A^{n_0}R^{m_0}(\lambda_0)$. Отсюда вытекает (23).

Пусть $\overline{\operatorname{Im}A}=X$. Оператор, обратный к оператору, стоящему под знаком замыкания в левой части равенства (24), равен

$$A^nR^m(\lambda)(A-\lambda E)^mA^{n_0-n}R^{m_0}(\lambda_0)$$

и содержится в $A^{n_0}R^{m_0}(\lambda_0)$. Таким образом, он определен на плотном множестве (по теореме 1) и непрерывен. Поэтому его замыкание совпадает с $A^{n_0}R^{m_0}(\lambda_0)$. Отсюда вытекает (24).

Теорема доказана. □

Теорема 6. *Пусть* $f \in F_0(\varphi, \tau, \sigma)$, *числа* m_j, $n_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *таковы, что* $m_j \geqslant n_j$,

$$\tau + n_j - \rho > -1, \qquad \sigma - m_j + n_j - \gamma < -1,$$

$\lambda_j \in D(\varphi_0)$ $(j = 1, 2)$. *Тогда*

$$f(A; m_1, n_1, \lambda_1) = f(A; m_2, n_2, \lambda_2), \tag{25}$$

а если $\overline{\mathrm{Im} A} = X$, *то*

$$\overline{\widetilde{f}(A; m_1, n_1, \lambda_1)} = \overline{\widetilde{f}(A; m_2, n_2, \lambda_2)}. \tag{26}$$

Доказательство. Пусть $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, причем $m \geqslant n$, $n - n_j - \rho > -1$, $n - n_j - m + m_j - \gamma < -1$ $(j = 1, 2)$, $\lambda \in D(\varphi_0)$. Тогда с учетом теорем 5 и 2 имеем

$$f(A; m_j, n_j, \lambda_j) = -\frac{1}{2\pi i}\, g(A; m_j, n_j, \lambda_j) \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{f(\mu)}{g(\mu; m_j, n_j, \lambda_j)} R(\mu)\, d\mu$$

$$= \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 g(A; m, n, \lambda) \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{g(\mu; m_j, n_j, \lambda_j)}{g(\mu; m, n, \lambda)} R(\mu)\, d\mu \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{f(\mu) R(\mu)\, d\mu}{g(\mu; m_j, n_j, \lambda_j)}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} g(A; m, n, \lambda) \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{f(\mu)\, g(\mu; m_j, n_j, \lambda_j) R(\mu)\, d\mu}{g(\mu; m_j, n_j, \lambda_j)\, g(\mu; m, n, \lambda)} = f(A; m, n, \lambda),$$

откуда вытекает (25).

Пусть $\overline{\mathrm{Im}\, A} = X$. Используя (9) и (24), имеем

$$\widetilde{f}(A; m_j, n_j, \lambda_j) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{f(\mu) R(\mu)\, d\mu}{g(\mu; m_j, n_j, \lambda_j)} g(A; m_j, n_j, \lambda_j),$$

$$g(A; m_j, n_j, \lambda_j) = \overline{-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{g(\mu; m_j, n_j, \lambda_j)}{g(\mu; m, n, \lambda)} R(\mu)\, d\mu\, g(A; m, n, \lambda)}.$$

Отсюда по следствию 1 и теореме 2

$$\overline{\widetilde{f}(A; m_j, n_j, \lambda_j)} = \overline{\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{f(\mu) R(\mu)\, d\mu}{g(\mu; m_j, n_j, \lambda_j)} \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{g(\mu; m_j, n_j, \lambda_j)}{g(\mu; m, n, \lambda)} R(\mu)\, d\mu\, g(A; m, n, \lambda)}$$

$$= \overline{-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{f(\mu) R(\mu)\, d\mu}{g(\mu; m, n, \lambda)} d\mu\, g(A; m, n, \lambda)} = \overline{\widetilde{f}(A; m, n, \lambda)},$$

т. е. имеет место (26). Теорема доказана. □

Следствие 4. *Если в условиях теоремы* $n_1 \leqslant n_2$, $m_1 - n_1 \leqslant m_2 - n_2$, *то*

$$\widetilde{f}(A; m_1, n_1, \lambda_1) \supset \widetilde{f}(A; m_2, n_2, \lambda_2). \tag{27}$$

Действительно, в условиях следствия

$$D(A^{-n_1}) \supset D(A^{-n_2}), \quad D(A^{m_1 - n_1}) \supset D(A^{m_2 - n_2}),$$

и потому

$$D(\widetilde{f}(A; m_1, n_1, \lambda_1)) = D(g(A; m_1, n_1, \lambda_1)) \supset D(g(A; m_2, n_2, \lambda_2)) = D(\widetilde{f}(A; m_2, n_2, \lambda_2)),$$

и, следовательно, (27) вытекает из теоремы 6. □

Теорема 6 позволяет ввести следующее определение операторных функций.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $f \in F_0(\varphi,\tau,\sigma)$. Положим

$$f(A) = f(A;m,n,\lambda), \qquad \widetilde{f}(A) = \overline{\widetilde{f}(A;m,n,\lambda)},$$

где $\lambda \in D(\varphi_0)$, а числа $m,n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ удовлетворяют неравенствам (6).

Таким образом, каждой функции $f \in \mathcal{F}_0$ ставятся в соответствие операторные функции $f(A)$ и $\widetilde{f}(A)$. При этом они представляют собой плотно определенные замкнутые линейные операторы, и $\widetilde{f}(A) \subset f(A)$. В частности, если один из этих операторов непрерывен, то они равны.

В случае непрерывности A^{-1} при аналогичных предположениях относительно A в [7] были введены функции $\widehat{f}(A)$ оператора A для f из соответствующего класса скалярных функций. Далее будет показано, что $\widetilde{f}(A) = \widehat{f}(A)$ при естественных ограничениях. Это верно в том числе и для $f(\lambda) = \lambda^z = e^{z(\ln|\lambda|+i\arg\lambda)}$ ($\operatorname{Re} z \geq 0$, $|\arg\lambda| < \pi$). При этом $\widehat{f}(A) = A^z$ [7].

Через $B(\lambda_0, r_0)$ обозначим открытый круг с центром в точке $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ радиусом $r_0 > 0$.

Теорема 7. *Пусть оператор A^{-1} непрерывен, $\overline{B(0,a_0)} \subset \rho(A)$, $\Omega(a_0,\varphi_0) = D(\varphi_0)\cup B(0,a_0)$, $\Gamma(a_0,\varphi_0) = \partial\Omega(a_0,\varphi_0)$ обходится так, что $\Omega(a_0,\varphi_0)$ остается справа, на $\overline{\Omega(a_0,\varphi_0)}$ справедлива оценка* (1) *с $\rho = 0$, $a \in (0,a_0)$, $\varphi \in (\varphi_0,\pi)$, $f \in F_0(\varphi,0,\sigma)$. Тогда $\widetilde{f}(A) = \widehat{f}(A)$, где $\widehat{f}(A)$ вводится в* [7] *формулой*

$$\widehat{f}(A) = -\frac{1}{2\pi i}\overline{\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \lambda^{-m} f(\lambda) R(\lambda)\, d\lambda\, A^m}$$

для $m > \sigma - \gamma + 1$ ($m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $m > \sigma-\gamma+1$. Подставляя в (9) $n = 0$ и используя то, что $f \in F_0(\varphi,0,\sigma)$ и интеграл в (9) абсолютно сходится, имеем

$$\widetilde{f}(A) = -\frac{1}{2\pi i}\overline{\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \frac{f(\lambda)}{g(\lambda;m,0,\lambda_0)} R(\lambda)\, d\lambda\, g(A;m,0,\lambda_0)}.$$

Заметим теперь, что для достаточно больших $p \in \mathbb{N}$ с учетом леммы 3

$$g(A;m,0,\lambda_0) = (A-\lambda_0 E)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k (-\lambda_0)^{m-k} A^k = \overline{\sum_{k=0}^{m} C_m^k (-\lambda)_0^{m-k} A^k\Big|_{D(A^p)}}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\overline{\sum_{k=0}^{m} C_m^k (-\lambda)_0^{m-k} \int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \lambda^{k-p} R(\lambda)\, d\lambda A^p} = -\frac{1}{2\pi i}\overline{\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} (\lambda-\lambda_0)^m \lambda^{-p} R(\lambda)\, d\lambda\, A^p}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\overline{\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} g(\lambda;m,0,\lambda_0)\lambda^{-p} R(\lambda)\, d\lambda\, A^p}.$$

Применяя следствие 1, получаем

$$\widetilde{f}(A) = -\frac{1}{4\pi^2}\overline{\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \frac{f(\lambda)}{g(\lambda;m,0,\lambda_0)} R(\lambda)\, d\lambda \int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} g(\lambda;m,0,\lambda_0)\lambda^{-p} R(\lambda)\, d\lambda\, A^p}.$$

На основании утверждения 3 из [7] произведение интегралов в правой части предыдущей формулы равно $-2\pi i \int_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} f(\lambda)\lambda^{-p} R(\lambda)\,d\lambda$, т. е. $\widetilde{f}(A) = \widehat{f}(A)$, что и требовалось. $\square$

Доказательство следующей теоремы близко к доказательству теоремы 6. В нем также используются теорема 2 и следствие 1.

Теорема 8. *Пусть* $f \in F_0(\varphi, \tau, \sigma)$, $h \in F_1(\varphi, æ, \nu, \tau_1, \sigma_1)$, $\tau - æ - \rho > -1$, $\sigma - \nu - \gamma < -1$. *Тогда*

$$f(A) = -\frac{1}{2\pi i} h(A) \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{f(\lambda)}{h(\lambda)} R(\lambda)\,d\lambda;$$

если $\overline{\operatorname{Im} A} = X$, *то*

$$\widetilde{f}(A) = -\frac{1}{2\pi i} \overline{\int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{f(\lambda)}{h(\lambda)} R(\lambda)\,d\lambda\, \widetilde{h}(A)}.$$

Лемма 10. *Пусть оператор* A *инъективен и* $B = A^{-1}$. *Тогда* $\overline{D(\varphi_0)} \setminus \{0\} \subset \rho(B)$ *и при некотором* $C_1 > 0$ *и всех* $\mu \in \overline{D(\varphi_0)} \setminus \{0\}$

$$\|R_B(\mu)\| \leqslant \frac{C_1}{|\mu|^{\rho_1}(|\mu|+1)^{\gamma_1-\rho_1}}, \tag{28}$$

где $\rho_1 = 2 - \gamma$, $\gamma_1 = \min\{2 - \rho, 1\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mu \neq 0$ и $\lambda = \dfrac{1}{\mu} \in \rho(A)$,

$$B - \mu E = A^{-1} - \mu E = \mu \left(\frac{1}{\mu} E - A \right) A^{-1},$$

т. е.

$$(B - \mu E)^{-1} = -\frac{1}{\mu} A R_A\left(\frac{1}{\mu}\right) = -\lambda A R_A(\lambda) = -\lambda(E + \lambda R_A(\lambda)) = -\lambda E - \lambda^2 R_A(\lambda)$$

— непрерывный на X оператор. Поэтому ввиду (1)

$$\|R_B(\mu)\| \leqslant |\lambda| + |\lambda|^2 \|R_A(\lambda)\| \leqslant |\lambda| + \frac{C_0}{|\lambda|^{\rho-2}(|\lambda|+1)^{\gamma-\rho}}$$

$$= \frac{1}{|\mu|} + \frac{C_0}{|\mu|^{2-\gamma}(|\mu|+1)^{\gamma-\rho}} \leqslant \frac{C_1}{|\mu|^{\rho_1}(|\mu|+1)^{\gamma_1-\rho_1}},$$

т. е. имеет место (28). Лемма доказана. $\square$

Теорема 9. *Пусть* $f(\lambda) = \sum_{j=k}^{\ell} \alpha_j \lambda^j$, $k \geqslant 0$ *или* ($\ell \leqslant 0$ *и* $\overline{\operatorname{Im} A} = X$). *Тогда*

$$f(A) = \sum_{j=k}^{\ell} \alpha_j A^j = \widetilde{f}(A). \tag{29}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай $k \geqslant 0$. Для $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, удовлетворяющих условиям $n + k - \rho > -1$, $n + \ell - m - \gamma < -1$, с использованием теоремы 3 имеем следующие равенства непрерывных на X операторов:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{f(\mu)}{g(\mu; m, n, \lambda_0)} R(\mu)\,d\mu = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=k}^{\ell} \alpha_j \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{R(\mu)}{g(\mu; m, n+j, \lambda_0)}\,d\mu$$

$$= \sum_{j=k}^{\ell} \alpha_j A^{n+j} R^m(\lambda_0) = A^n \sum_{j=k}^{\ell} \alpha_j A^j R^m(\lambda_0).$$

Отсюда

$$f(A) = f(A; m, n, \lambda_0) = -\frac{1}{2\pi i} g(A, m, n, \lambda_0) \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{f(\mu)}{g(\mu; m, n, \lambda_0)} R(\mu)\, d\mu$$

$$= (A - \lambda_0 E)^m \sum_{j=k}^{\ell} \alpha_j A^j R^m(\lambda_0) = \Big(\sum_{j=k}^{\ell} \alpha_j A^j\Big)(A - \lambda_0 E)^m R^m(\lambda_0) = \sum_{j=k}^{\ell} \alpha_j A^j.$$

Пусть теперь $\ell \leqslant 0$ и $\overline{\operatorname{Im} A} = X$. Положим $B = A^{-1}$, $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$ $(\lambda \in \rho(A) \setminus \{0\})$. Тогда $R_A(\lambda) = -\mu B R_B(\mu)$. При $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ таких, что $n + k - \rho > -1$, $m - n - \ell + \gamma > -2$, сделаем в интеграле $\int_{L(\varphi_0)} \dfrac{f(\lambda)}{g(\lambda; m, n, \lambda_0)} R_A(\lambda)\, d\lambda$ замену переменной $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$, полагая $f_1(\mu) = f\left(\dfrac{1}{\mu}\right)$, $\mu_0 = \dfrac{1}{\lambda_0}$. При этом по доказанному в предыдущем случае с учетом леммы 10 имеем

$$f_1(B) = \sum_{j=-\ell}^{-k} \alpha_{-j} B^j = \sum_{j=k}^{\ell} \alpha_j A^j.$$

Справедливы соотношения

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{f(\lambda)}{g(\lambda; m, n, \lambda_0)} R_A(\lambda)\, d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{-f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^m \lambda^{1-n}} B R_B\left(\frac{1}{\lambda}\right) d\lambda$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{f_1(\mu)}{\left(\dfrac{1}{\mu} - \dfrac{1}{\mu_0}\right)^m \mu^{n-1}} B R_B(\mu) \frac{d\mu}{\mu^2} = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{\mu_0^m f_1(\mu) \mu^{m-n-1}}{(\mu_0 - \mu)^m} B R_B(\mu)\, d\mu$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} (-\mu_0)^m B \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{f_1(\mu)}{g(\mu; m, m-n-1, \mu_0)} R_B(\mu)\, d\mu$$

$$= (-\mu_0)^m B\, B^{m-n-1} f_1(B) R_B^m(\mu_0) = (-\mu_0)^m B^{m-n} f_1(B) R_B^m(\mu_0)$$

(аналогичный последнему интеграл был вычислен при рассмотрении случая $k \geqslant 0$);

$$g(A; m, n, \lambda_0) = (A - \lambda_0 E)^m A^{-n} = \sum_{j=0}^{m} C_m^j (-\lambda_0)^{m-j} A^j A^{-n}$$

$$= \Big(\sum_{j=0}^{m} C_m^j (-\lambda_0)^{m-j} A^{j-m}\Big) A^m A^{-n} = \Big(\sum_{j=0}^{m} C_m^j (-\lambda_0)^{m-j} B^{m-j}\Big) B^{-m} B^n$$

$$= (-\lambda_0)^m \sum_{j=0}^{m} C_m^j (-\mu_0)^j B^{m-j} B^{-m} B^n = (-\lambda_0)^m (B - \mu_0 E)^m B^{-m} B^n.$$

Таким образом,

$$f(A; m, n, \lambda_0) = -\frac{1}{2\pi i} g(A, m, n, \lambda_0) \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{f(\lambda)}{g(\lambda; m, n, \lambda_0)} R(\lambda)\, d\lambda$$

$$= (B - \mu_0 E)^m B^{-m} B^n B^{m-n} f_1(B) R_B^m(\mu_0)$$

$$= (B-\mu_0 E)^m B^{-m} B^m f_1(B) R_B^m(\mu_0) \subset (B-\mu_0 E)^m f_1(B) R_B^m(\mu_0)$$
$$= f_1(B)(B-\mu_0 E)^m R_B^m(\mu_0) = f_1(B) = \sum_{j=k}^{\ell} \alpha_j A^j,$$

т. е. $f(A;m,n,\lambda_0) \subset \sum_{j=k}^{\ell} \alpha_j A^j$. В силу первого из включений (21) имеет место первое из равенств (29).

Учитывая второе из соотношений (21) и равенство

$$D(\widetilde{f}(A;m,n,\lambda_0)) = D(A^{m-n}) \cap D(A^{-n}),$$

имеем

$$\widetilde{f}(A;m,n,\lambda_0) = \sum_{j=k}^{\ell} \alpha_j A^j \Big|_{D(A^{m-n})\cap D(A^{-n})},$$

откуда в силу теоремы 1 следует второе из соотношений (29). Теорема доказана. □

Теорема 10. *Пусть $f \in \mathcal{F}_1$. Тогда существуют $[f(A)]^{-1}$, $[\widetilde{f}(A)]^{-1}$, причем*

$$[f(A)]^{-1} = \left(\frac{1}{f}\right)(A), \tag{30}$$

$$[\widetilde{f}(A)]^{-1} = \widetilde{\left(\frac{1}{f}\right)}(A). \tag{31}$$

Доказательство. Пусть $h(\lambda) = 1/f(\lambda)$, $x \in D(h(A))$, $\lambda_0 \in D(\varphi_0)$, числа $m,n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ считаем достаточно большими. Тогда (с учетом теорем 2, 3)

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{f(\lambda)}{g(\lambda;m,n,\lambda_0)} R(\lambda)\,d\lambda\, g(A;m,n,\lambda_0) \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{h(\lambda)}{g(\lambda;m,n,\lambda_0)} R(\lambda)\,d\lambda\, x$$
$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 g(A;m,n,\lambda_0)\Bigg(\int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{f(\lambda)}{g(\lambda;m,n,\lambda_0)} R(\lambda)\,d\lambda \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{h(\lambda)}{g(\lambda;m,n,\lambda_0)} R(\lambda)\,d\lambda\Bigg) x$$
$$= -\frac{1}{2\pi i} g(A;m,n,\lambda_0)\Bigg(\int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{R(\lambda)}{g(\lambda;2m,2n,\lambda_0)}\,d\lambda\Bigg) x$$
$$= (A-\lambda_0 E)^m A^{-n} A^{2n} R^{2m}(\lambda_0) x = A^n R^m(\lambda_0) x.$$

Таким образом, имеет смысл выражение $f(A)h(A)x$, равное

$$g(A;m,n,\lambda_0) A^n R^m(\lambda_0) x = x.$$

Аналогично, $h(A)f(A)x = x$ для $x \in D(f(A))$, т. е. (30) установлено.

Докажем (31). Пусть $x \in D(\widetilde{h}(A))$. Так как $\widetilde{h}(A) = \overline{\widetilde{h}(A;2m,2n,\lambda_0)}$, то существует такая последовательность $\{x_k\} \subset D(\widetilde{h}(A;2m,2n,\lambda_0)) = D(A^{2m-2n}) \cap D(A^{-2n})$, что $x_k \to x$, $\widetilde{h}(A;2m,2n,\lambda_0)x_k \to \widetilde{h}(A)x$ при $k \to \infty$. По следствию 4

$$\widetilde{h}(A;2m,2n,\lambda_0)x_k = \widetilde{h}(A;m,n,\lambda_0)x_k$$

и в силу теоремы 2 имеет смысл выражение $\widetilde{f}(A)\widetilde{h}(A)x_k$, равное

$$\widetilde{f}(A;m,n,\lambda_0)\,\widetilde{h}(A;m,n,\lambda_0)x_k = (\widetilde{fh})(A;2m,2n,\lambda_0)x_k = (fh)(A;2m,2n,\lambda_0)x_k = x_k.$$

Таким образом,

$$\widetilde{h}(A)x_k = \widetilde{h}(A; 2m, 2n, \lambda_0)x_k \to \widetilde{h}(A)x,$$

$$\widetilde{f}(A)\widetilde{h}(A)x_k = x_k \to x \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Следовательно, в силу замкнутости оператора $\widetilde{f}(A)\widetilde{h}(A)$ имеем $x \in D(\widetilde{f}(A))$ и $\widetilde{f}(A)\widetilde{h}(A)x = x$. Аналогично, для $x \in D(\widetilde{f}(A))$ выполняется $\widetilde{h}(A)\widetilde{f}(A)x = x$, т. е. справедливо равенство (31). Теорема доказана. □

Теорема 11. *Пусть* $f_j \in \mathcal{F}_0$ $(j = 1, 2)$. *Тогда*

$$f_1(A)\, f_2(A) \subset (f_1 f_2)(A), \tag{32}$$

$$\overline{\widetilde{f}_1(A)\, \widetilde{f}_2(A)} \supset (\widetilde{f_1 f_2})(A). \tag{33}$$

Если оператор $f_2(A)$ *непрерывен, то*

$$f_1(A)\, f_2(A) = (f_1 f_2)(A), \tag{34}$$

а если $\widetilde{f}_1(A)$ *непрерывен, то*

$$\overline{\widetilde{f}_1(A)\, \widetilde{f}_2(A)} = (\widetilde{f_1 f_2})(A). \tag{35}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $\lambda_0 \in D(\varphi_0)$ и достаточно больших $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ по теореме 2

$$f_1(A)\, f_2(A) = f_1(A; m, n, \lambda_0)\, f_2(A; m, n, \lambda_0) \subset (f_1 f_2)(A; 2m, 2n, \lambda_0) = (f_1 f_2)(A),$$

$$\widetilde{f}_1(A)\, \widetilde{f}_2(A) \supset \widetilde{f}_1(A; m, n, \lambda_0)\, \widetilde{f}_2(A; m, n, \lambda_0) \supset (\widetilde{f_1 f_2})(A; 2m, 2n, \lambda_0),$$

т. е. (32), (33) имеют место.

Пусть оператор $f_2(A)$ непрерывен. Тогда для $\lambda_0 \in D(\varphi_0)$ и достаточно больших $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ имеем

$$(f_1 f_2)(A) = -\frac{1}{2\pi i}\, g(A; 2m, 2n, \lambda_0) \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{f_1(\lambda) f_2(\lambda) R(\lambda)\, d\lambda}{g(\lambda; 2m, 2n, \lambda_0)}$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2} g^2(A; m, n, \lambda_0) \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{f_1(\lambda) R(\lambda)\, d\lambda}{g(\lambda; m, n, \lambda_0)} \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{f_2(\lambda) R(\lambda)\, d\lambda}{g(\lambda; m, n, \lambda_0)}.$$

Поскольку

$$-\frac{1}{4\pi^2} g(A; m, n, \lambda_0) \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{f_1(\lambda) R(\lambda)\, d\lambda}{g(\lambda; m, n, \lambda_0)} \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{f_2(\lambda) R(\lambda)\, d\lambda}{g(\lambda; m, n, \lambda_0)}$$

$$\supset -\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{f_1(\lambda) R(\lambda)\, d\lambda}{g(\lambda; m, n, \lambda_0)} g(A; m, n, \lambda_0) \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{f_2(\lambda) R(\lambda)\, d\lambda}{g(\lambda; m, n, \lambda_0)}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{f_1(\lambda) R(\lambda)\, d\lambda}{g(\lambda; m, n, \lambda_0)} f_2(A)$$

— непрерывный на X оператор, то последнее включение можно заменить равенством, т. е.

$$-\frac{1}{2\pi i}\, g(A; m, n, \lambda_0) \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{f_1(\lambda) R(\lambda)\, d\lambda}{g(\lambda; m, n, \lambda_0)} f_2(A) = f_1(A) f_2(A),$$

и имеет место (34).

Пусть теперь оператор $\widetilde{f}_1(A)$ непрерывен. Заметим, что в этом случае $\widetilde{f}_1(A) = f_1(A)$. Покажем, что
$$\widetilde{f}_1(A)\widetilde{f}_2(A) \subset \widetilde{f_1 f_2}(A). \tag{36}$$

Пусть $x \in D(\widetilde{f}_1(A)\widetilde{f}_2(A)) = D(\widetilde{f}_2(A))$, $\lambda_0 \in D(\varphi_0)$, $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ достаточно велики и последовательность $\{x_k\} \subset D(\widetilde{f}_2(A; 2m, 2n, \lambda_0)) = D(g(A; 2m, 2n, \lambda_0))$ такова, что $x_k \to x$, $\widetilde{f}_2(A; m, n, \lambda_0)x_k \to \widetilde{f}_2(A)x$ при $k \to \infty$. Тогда
$$(\widetilde{f_1 f_2})(A; 2m, 2n, \lambda_0)x_k = \widetilde{f}_1(A; m, n, \lambda_0)\widetilde{f}_2(A; m, n, \lambda_0)x_k$$
$$= \widetilde{f}_1(A)\widetilde{f}_2(A; m, n, \lambda_0)x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \widetilde{f}_1(A)\widetilde{f}_2(A)x.$$
Отсюда $x \in D((\widetilde{f_1 f_2})(A))$ и $(\widetilde{f_1 f_2})(A)x = \widetilde{f}_1(A)\widetilde{f}_2(A)x$, т. е. (36) имеет место. Из (33) и (36) следует (35). Теорема доказана. $\square$

З а м е ч а н и е. Пусть f_j и $1/f_j \in \mathcal{F}_0$ $(j = 1, 2)$. Тогда, если оператор $(1/f_1)(A)$ непрерывен на X, то имеет место (34), а если $(1/f_2)(A)$ непрерывен, то имеет место (35).

Для доказательства достаточно в (34) и (35) перейти к обратным операторам с помощью теоремы 10.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Данфорд Н., Шварц Дж.Т.** Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 895 с.
2. **Крейн С.Г.** Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1967. 275 с.
3. **Рудин У.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. 449 с.
4. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М.А. Красносельский [и др.] М.: Наука, 1966. 499 с.
5. **Соболевский П.Е., Чеботарева Л.М.** О дробных степенях плохо позитивных операторов // Тр. мат. фак-та Воронеж. ун-та. Воронеж, 1971. Вып. 3. С. 112–118.
6. **Martinez C., Miguel S., Javier P.** A functional calculus and fractional powers for multivalued linear operators // Osaka J. Math. 2000. Vol. 37, no. 3, P. 551–576.
7. **Коркина Л.Ф., Рекант М.А.** Расширение класса степенных операторных функций // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. № 38. С. 80–90. (Математика и механика; вып. 8).

Коркина Людмила Федоровна
канд. физ.-мат. наук
доцент
Уральский федеральный университет

Поступила 17.10.2010

Рекант Марк Александрович
канд. физ.-мат. наук
доцент
Уральский федеральный университет
e-mail: Mark.Rekant@usu.ru

Том 17 № 3 2011

УДК 517.977

О ЗАДАЧАХ ВЫВЕДЕНИЯ РАКЕТЫ-НОСИТЕЛЯ НА ЗАДАННЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ[1]

Е. К. Костоусова, В. И. Починский

Рассматриваются задачи оптимального программного управления ракетой-носителем типа Союз-2 с целью выведения максимальной массы ракеты-носителя на заданные околоземные эллиптические орбиты и в фиксированную точку орбиты, а также оценивания множества достижимых точек орбиты. Разработаны численные алгоритмы нахождения допустимых управлений, основанные на решении вспомогательных задач оптимального управления с использованием явных формул для параметров орбиты и сопряженной системы. Исследован вопрос о возможности улучшения базовых управлений, построенных в НПО автоматики им. акад. Н.А. Семихатова. Обширное численное моделирование подтвердило близость базовых управлений к оптимальным и позволило найти точечные внутренние оценки множеств достижимости.

Ключевые слова: оптимальное управление, оскулирующая орбита, численные методы, множества достижимости.

E. K. Kostousova, V. I. Pochinskii. On problems of putting a carrier rocket into specified elliptic orbits.

We consider problems of an optimal program control of a carrier rocket of Soyuz-2 type aimed at placing a maximum mass of the carrier rocket into specified near-earth elliptic orbits and to a fixed point of an orbit as well as the problem of estimating the set of reachable points of an orbit. Numerical algorithms are developed for finding admissible controls. The algorithms are based on solving auxiliary problems of optimal control with the use of explicit formulas for parameters of the orbit and of the conjugate system. The question of the possibility of improving the base controls constructed at the Semikhatov Research and Production Association of Automation is investigated. As a result of extensive numerical modeling, it has been confirmed that the base controls are close to optimal ones and pointwise internal estimates for reachable sets have been found.

Keywords: optimal control, osculating orbit, numerical methods, reachable sets.

1. Введение

Рассматриваются задачи оптимального программного управления [6] ракетой-носителем (РН) типа Союз-2 с целью выведения максимальной массы РН на заданные околоземные эллиптические орбиты. Исходная постановка характеризуется сложной нелинейной динамикой и наличием дополнительных фазовых ограничений. Рассматриваемая РН имеет три ступени, которым соответствуют следующие друг за другом временны́е участки управления. В упрощенном виде можно считать, что первый (атмосферный) участок $[t_{\rm s}, t_1]$ начинается стартом в момент $t_{\rm s}$ и заканчивается в момент t_1 отделением первой ступени; второй участок $[t_1, t_2]$ (уже практически безатмосферный) заканчивается отделением второй ступени; конечная точка третьего участка $[t_2, t_{\rm f}]$ — это момент выхода на орбиту. Управлениями служат угловые скорости разворотов РН по углам тангажа и рыскания. Для учета внешних изменяющихся факторов (в первую очередь ветра, замеренного по данным метеозондирования) программное управление должно определяться оперативно перед стартом. В НПО автоматики им. акад. Н. А. Семихатова разработан [8;9] способ построения базового управления $\boldsymbol{u}^{\rm base}(t)$, $t \in [t_{\rm s}, t_{\rm f}^{\rm base}]$, выводящего РН на заданную оскулирующую орбиту (определяемую пятью параметрами), удовлетворяющего всем ограничениям и реализуемого на штатной аппаратуре.

[1]Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН "Математическая теория управления" при поддержке УрО РАН (проект 09-П-1-1014), при поддержке интеграционного проекта УрО и СО РАН (09-С-1-1010) и программы ориентированных фундаментальных исследований УрО РАН (проект 10-1-02-НПО).

В настоящей работе исследуется вопрос о возможности улучшения этого управления на активном участке $[t_0, t_f]$, где $t_0 = t_1$ или t_2, и как следствие получения оценки эффективности $\boldsymbol{u}^{\mathrm{base}}$. Рассматриваются задачи оптимального выведения РН на эллиптические орбиты, заданные четырьмя параметрами, на эллиптическую орбиту, заданную пятью параметрами, а также в фиксированную точку орбиты; рассматривается также задача оценивания множества достижимых точек орбиты. Орбиты предполагаются отличными от круговых. Представлены алгоритмы нахождения допустимых управлений, основанные на решении вспомогательных задач оптимального управления с использованием явных формул для параметров орбиты и сопряженной системы. Приведены результаты моделирования. Работа дополняет результаты, анонсированные в [5, пп. 2,3], и продолжает начатые там исследования.

Упомянем, что имеется много исследований по решению задач выведения РН на орбиту в несколько иных постановках, в частности, когда рассматривается плоское движение, управлениями служат углы тангажа и рыскания и т. п. (см., например, [1; 2], библиографию из [8]).

Основные обозначения, использованные в работе. Векторно-матричные обозначения: $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$; $\top$ — знак транспонирования; $\|x\| = (\sum_{i=1}^n (x_i)^2)^{1/2}$ — евклидова норма $x \in \mathbb{R}^n$; $\boldsymbol{e}^i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^\top \in \mathbb{R}^n$ — i-й единичный орт в $\mathbb{R}^n$ (единица стоит на i-м месте); $\mathbb{R}^{n\times m}$ — совокупность действительных $n\times m$-матриц $A = \{a_i^j\} = \{a^1 \ldots a^m\}$ с элементами a_i^j, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, и со столбцами a^j (верхним индексом нумеруются столбцы, нижним — компоненты векторов); I — единичная матрица; 0 — нулевая матрица (вектор) произвольной размерности; $a \times b$ — векторное произведение векторов $a, b \in \mathbb{R}^3$ — в системе координат $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$, $\boldsymbol{e}^3$ вычисляется по формуле:

$$a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\boldsymbol{e}^1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\boldsymbol{e}^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\boldsymbol{e}^3. \tag{1.1}$$

Геодезические постоянные и данные пуска РН: a — большая полуось общего земного эллипсоида (ОЗЭ); R — средний радиус Земли; g_0 — гравитационная постоянная на экваторе; C_{20} — коэффициент второй зональной гармоники; e_1^2 — второй эксцентриситет ОЗЭ; Π_0, φ, λ — азимут пуска, геодезические широта и долгота точки старта.

$x = (x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ и $v = (v_1, v_2, v_3)^\top = \dot{x} \in \mathbb{R}^3$ — координаты и компоненты скорости центра масс РН в инерциальной стартовой системе координат, которая имеет начало в центре Земли и получена параллельным переносом стартовой системы координат в момент старта (ее начало совмещено с точкой старта, основная плоскость, определяемая первой и третьей осями, касается поверхности Земли, первая ось направлена в сторону полета РН в начальной части траектории и образует угол Π_0 с северным направлением меридиана, вторая ось направлена по нормали к основной плоскости вверх от поверхности Земли, третья ось дополняет систему до правой).

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ и $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)^\top = \dot{\xi} \in \mathbb{R}^3$ — координаты и компоненты скорости РН в инерциальной экваториальной системе координат (ее начало совмещено с центром Земли, ось $0\xi_1$ — на линии пересечения плоскости экватора и плоскости гринвического меридиана в момент старта, ось $0\xi_3$ — по оси вращения Земли, ось $0\xi_2$ дополняет систему до правой).

$D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ — постоянная ортогональная матрица перехода между упомянутыми системами координат (определяется значениями Π_0, φ, λ):

$$x = D\xi, \quad v = D\nu, \quad \xi = D^{-1}x, \quad \nu = D^{-1}v, \quad \text{причем } D^{-1} = D^\top. \tag{1.2}$$

ϑ, ψ — углы тангажа и рыскания носителя.

$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)^\top \in \mathbb{R}^2$, где $\boldsymbol{u}_1 = \dot{\vartheta}$, $\boldsymbol{u}_2 = \dot{\psi}$ — угловые скорости изменения углов тангажа и рыскания (программные управляющие воздействия); $\boldsymbol{u}^{\max} = (\boldsymbol{u}_1^{\max}, \boldsymbol{u}_2^{\max})^\top \in \mathbb{R}^2$ определяет ограничение на модули управлений: $|\boldsymbol{u}_j(t)| \le \boldsymbol{u}_j^{\max}$ (в расчетах $\boldsymbol{u}_j^{\max} = 1$ град/с), $j = 1, 2$.

$\boldsymbol{u}^{\mathrm{base}}(t)$ — базовое программное управление, найденное в НПО автоматики (кусочно-постоянная функция); $t_{\mathrm{f}}^{\mathrm{base}}$ — конечный момент t_{f} промежутка управления для базового управления.

$x = (x^\top, v^\top, \vartheta, \psi)^\top \in \mathbb{R}^8$ — (“расширенный”) вектор состояния; в ряде случаев обозначаем также $x = (x^\top, v^\top)^\top \in \mathbb{R}^6$.

i, Ω, $h_{\max}$, $h_{\min}$, ω — параметры орбиты выведения [1; 11]: i — наклонение орбиты; Ω — долгота восходящего узла; $h_{\max}$ и $h_{\min}$— максимальная и минимальная высоты орбиты над сферой радиуса R; ω — аргумент перигея.

u — угол в плоскости орбиты, называемый [1, с. 195; 11, с. 100] аргументом широты.

θ — полярный угол в плоскости орбиты, называемый [11, с. 41] истинной аномалией.

$\bar{i}$, $\bar{\Omega}$, $\bar{h}_{\max}$, $\bar{h}_{\min}$, $\bar{\omega}$, $\bar{u}$ — желаемые значения параметров орбиты и аргумента широты.

$\Delta_i = i - \bar{i}$, $\Delta_\Omega = \Omega - \bar{\Omega}$, $\Delta_{h_{\max}} = h_{\max} - \bar{h}_{\max}$, $\Delta_{h_{\min}} = h_{\min} - \bar{h}_{\min}$, $\Delta_\omega = \omega - \bar{\omega}$, $\Delta_u = u - \bar{u}$ — отклонения параметров орбиты и аргумента широты от желаемых значений.

$\bar{\Delta}_i$, $\bar{\Delta}_\Omega$, $\bar{\Delta}_{h_{\max}}$, $\bar{\Delta}_{h_{\min}}$, $\bar{\Delta}_\omega$, $\bar{\Delta}_u$ — допустимые отклонения параметров орбиты и аргумента широты от желаемых значений.

$O = (i, \Omega, h_{\max}, h_{\min}, \omega, u)^\top \in \mathbb{R}^6$ — вектор, компонентами которого являются параметры орбиты и аргумент широты.

$\bar{O}$, $\Delta_O = O - \bar{O}$, $\bar{\Delta}_O \in \mathbb{R}^6$ — соответственно, желаемое значение вектора O, отклонение вектора O от желаемого значения и допустимое отклонение от желаемого значения: $\bar{O} = (\bar{i}, \bar{\Omega}, \bar{h}_{\max}, \bar{h}_{\min}, \bar{\omega}, \bar{u})^\top$, $\bar{\Delta}_O = (\bar{\Delta}_i, \bar{\Delta}_\Omega, \bar{\Delta}_{h_{\max}}, \bar{\Delta}_{h_{\min}}, \bar{\Delta}_\omega, \bar{\Delta}_u)^\top$.

Используются также обозначения $O = (i, \Omega, h_{\max}, h_{\min})^\top \in \mathbb{R}^4$, $O = (i, \Omega, h_{\max}, h_{\min}, \omega)^\top \in \mathbb{R}^5$, а иногда еще и обозначение $O = (i, \Omega, h_{\max}, h_{\min}, \omega, u, \theta)^\top \in \mathbb{R}^7$, и соответствующие векторы $\bar{O}$, $\Delta_O = O - \bar{O}$ и $\bar{\Delta}_O$ из $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^5$ и $\mathbb{R}^7$.

2. Постановка задач

Будем использовать модель, при которой уравнения движения центра масс РН на завершающем активном участке $[t_0, t_\mathrm{f}]$ имеют вид

$$\begin{aligned} &\dot{x} = v; \\ &\dot{v} = W(t,x)\, h(\vartheta, \psi) + g(x); \\ &\dot{\vartheta} = \boldsymbol{u}_1; \\ &\dot{\psi} = \boldsymbol{u}_2, \quad t \in [t_0, t_\mathrm{f}], \end{aligned} \qquad \text{где } h(\vartheta,\psi) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\psi \\ \sin\vartheta\cos\psi \\ -\sin\psi \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Здесь $x, v \in \mathbb{R}^3$ — координаты и скорости центра масс в инерциальной стартовой системе координат; $W(t,x) \in \mathbb{R}^1$ — величина модуля реактивного ускорения; $g(x) \in \mathbb{R}^3$ — гравитационное ускорение; ϑ и ψ — углы тангажа и рыскания; $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^2$ — управление с ограничением

$$\boldsymbol{u}(t) \in \boldsymbol{U} \quad \text{при п.в. } t \in [t_0, t_\mathrm{f}], \quad \text{где } \boldsymbol{U} = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{u}_j| \le \boldsymbol{u}_j^{\max},\ j = 1, 2\}. \tag{2.2}$$

Начальный момент t_0 и начальные условия $x(t_0) = x_0$, $v(t_0) = v_0$, $\vartheta(t_0) = \vartheta_0$, $\psi(t_0) = \psi_0$ для системы (2.1) считаем заданными (это данные расчета на управлении $\boldsymbol{u}^{\text{base}}$).

Принимается, что после выключения двигателя третьей ступени движение РН происходит под действием только гравитационных сил. С достаточной степенью точности траектория движения в окрестности момента t_f описывается оскулирующей орбитой на момент t_f. Эта эллиптическая орбита может быть описана пятью параметрами, в качестве которых берем наклонение орбиты i, долготу восходящего узла Ω, максимальную $h_{\max}$ и минимальную $h_{\min}$ высоты орбиты и аргумент перигея ω. Положение на орбите задаем аргументом широты u.

Заданы желаемые значения параметров эллиптической орбиты $\bar{i}$, $\bar{\Omega}$, $\bar{h}_{\max}$ и $\bar{h}_{\min}$ и допустимые отклонения от них типа $|i - \bar{i}| \le \bar{\Delta}_i$. Допустимые орбиты предполагаются отличными от круговых ($h_{\max} \ne h_{\min}$). В задаче выведения РН на орбиту (заданную пятью параметрами) заданы еще значения $\bar{\omega}$, $\bar{\Delta}_\omega$. Для выведения РН в заданную точку орбиты дополнительно заданы еще и значения $\bar{u}$, $\bar{\Delta}_u$ для аргумента широты.

Введем вектор, компонентами которого являются рассматриваемые параметры орбиты: $O = (i, \Omega, h_{\max}, h_{\min})^\top \in \mathbb{R}^4$ либо $O = (i, \Omega, h_{\max}, h_{\min}, \omega)^\top \in \mathbb{R}^5$, либо параметры орбиты и аргумент широты: $O = (i, \Omega, h_{\max}, h_{\min}, \omega, u)^\top \in \mathbb{R}^6$. Ограничения на O имеют вид

$$|O - \bar{O}| \le \bar{\Delta}_O \tag{2.3}$$

(векторные неравенства здесь и ниже понимаем покомпонентно), где $\bar{O} = (\bar{i}, \bar{\Omega}, \bar{h}_{\max}, \bar{h}_{\min}, \bar{\omega}, \bar{u})^\top$ и $\bar{\Delta}_O = (\bar{\Delta}_i, \bar{\Delta}_\Omega, \bar{\Delta}_{h_{\max}}, \bar{\Delta}_{h_{\min}}, \bar{\Delta}_\omega, \bar{\Delta}_u)^\top$ для случая $O \in \mathbb{R}^6$ (и аналогично для $O \in \mathbb{R}^4$, $O \in \mathbb{R}^5$). Как известно [1; 11], значения O однозначно определяются значениями $x(t_\mathrm{f})$ и $v(t_\mathrm{f})$.

Величина выводимой массы РН $m(t_\mathrm{f})$ рассматривается как максимизируемый критерий качества. Предполагается, что масса РН $m(t)$ (она учитывается при вычислении $W(t,x)$ в (2.1)) находится из уравнения типа $\dot{m} = -\mu(t)$ с заданной функцией $\mu(t) > 0$. Это сводит задачу выведения максимальной массы РН на заданную орбиту к задаче быстродействия.

Запишем систему (2.1) в компактной форме, обозначив через $x \in \mathbb{R}^8$ вектор $x = (x^\top, v^\top, \vartheta, \psi)^\top$, где в правой части фигурируют $x \in \mathbb{R}^3$, $v \in \mathbb{R}^3$, ϑ, ψ из уравнений (2.1) (использование одного и того же обозначения x для $x \in \mathbb{R}^3$ и $x \in \mathbb{R}^8$ в каждом конкретном контексте, по-видимому, не должно вызвать путаницы):

$$\dot{x} = f(t, x, \boldsymbol{u}), \quad t \in [t_0, t_\mathrm{f}]; \quad x(t_0) = x_0, \qquad \text{где } x_0 = (x_0^\top, v_0^\top, \vartheta_0, \psi_0)^\top. \tag{2.4}$$

З а д а ч а 1. Для системы (2.4) с заданными t_0 и x_0 найти $\boldsymbol{u}(\cdot)$, удовлетворяющее (2.2), обеспечивающее (2.3) и минимизирующее значение функционала $J_0[\boldsymbol{u}(\cdot)] = t_\mathrm{f}$.

Формулировка задачи 1 включает в себя *задачи оптимального выведения РН на заданные орбиты* (при $\bar{O} \in \mathbb{R}^4$ и $\bar{O} \in \mathbb{R}^5$) и *в заданную точку орбиты* (при $\bar{O} \in \mathbb{R}^6$).

Управления, удовлетворяющие (2.2) и обеспечивающее (2.3), назовем *допустимыми*.

Постановка задачи 1 не содержит фазовых ограничений на координаты точек падения отделяемых частей. Поэтому решение задачи 1 представляет интерес с точки зрения изучения возможности улучшения $\boldsymbol{u}^{\mathrm{base}}$ либо на участке после отделения 1-й ступени, т. е. при $t_0 = t_1$ (что интересно для некоторых космодромов), либо на участке полета последней ступени ($t_0 = t_2$).

Пусть задана орбита, т. е. вектор $\bar{O} \in \mathbb{R}^5$. Тогда при фиксированном t_f можно рассмотреть задачу о нахождении *множества достижимости* $\bar{U}(t_\mathrm{f})$ — множества таких значений аргумента широты $u \in [0, 2\pi]$, для каждого из которых существует $\boldsymbol{u}(\cdot)$, удовлетворяющее (2.2) и порождающее решение системы (2.4) с заданными t_0, x_0 такое, что $u(t_\mathrm{f}) = u$ и $O = \bar{O} \in \mathbb{R}^5$. Одномерное множество $\bar{U}(t_\mathrm{f}) \subseteq [0, 2\pi]$ описывает в терминах аргумента широты множество всех точек заданной орбиты, которые могут быть достигнуты в момент t_f из x_0.

Поскольку в задаче 1 допускается выведение на орбиту с допустимой погрешностью, возникает

З а д а ч а 2. Найти / оценить множество $U(t_\mathrm{f})$, которое отличается от $\bar{U}(t_\mathrm{f})$ тем, что в его определении условие $O = \bar{O}$ заменяется на (2.3), где $O, \bar{O}, \bar{\Delta}_O \in \mathbb{R}^5$.

Заметим, что при этом в множество $U(t_\mathrm{f})$ фактически попадают значения u, соответствующие точкам разных (но "близких" с точностью до выполнения условия (2.3)) орбит.

Интересно рассмотреть многозначную функцию $U(t_\mathrm{f})$ на некотором промежутке $[t_\mathrm{f}^{\min}, t_\mathrm{f}^{\max}]$, где $t_\mathrm{f}^{\min} \geq t_\mathrm{f}^{\mathrm{orb}}$, а $t_\mathrm{f}^{\mathrm{orb}}$ — оптимальное значение критерия качества в задаче 1 при $\bar{O} \in \mathbb{R}^5$: $t_\mathrm{f}^{\mathrm{orb}} = \inf J_0[\boldsymbol{u}(\cdot)]$. Очевидно, при $t_\mathrm{f} < t_\mathrm{f}^{\mathrm{orb}}$ множества $U(t_\mathrm{f})$ пусты. Значение $t_\mathrm{f}^{\max}$ определяется величиной минимально необходимой выводимой массы ($m(t_\mathrm{f}^{\max}) \geq \bar{m}$). Практический интерес представляет случай, когда $t_\mathrm{f}^{\max} - t_\mathrm{f}^{\min}$ невелико (порядка 3 секунд).

Точное нахождение множеств достижимости для нелинейных систем обычно весьма затруднительно. В теории управления разрабатываются разные подходы к созданию численных методов для аппроксимации этих множеств, нахождения внутренних и внешних оценок. Один из них состоит в оценивании множества объединением конечного числа точек.

Называем множество $\tilde{U}$ *точечной внутренней оценкой множества* U, если $\tilde{U}$ состоит из конечного числа точек и выполняется включение $\tilde{U} \subseteq U$.

Ниже описаны численные алгоритмы для решения задачи 1 и нахождения точечных внутренних оценок множеств $U(t_\mathrm{f})$ из задачи 2. Представлены результаты, полученные при решении задачи 1 для трех исходных данных, которые условимся обозначать через ИД1 (запуск РН с космическим аппаратом "Меридиан" с полигона Плисецк), ИД2 ("Corot", Байконур) и ИД3

("Метеор", Байконур) соответственно. В ИД1 имеем, в частности, $t_0 = t_2 \approx 352$ с, $t_{\mathrm{f}}^{\mathrm{base}} \approx 587$ с, $\bar{O} \in \mathbb{R}^4$, $\bar{h}_{\max} = 204240$ м, $\bar{h}_{\min} = 14526$ м, $\bar{i} \approx 62.79°$, $\bar{\Omega} \approx 310.53°$. В ИД2 $t_0 = t_1 \approx 175$ с, $t_{\mathrm{f}}^{\mathrm{base}} \approx 616$ с, $\bar{O} \in \mathbb{R}^4$ или $\bar{O} \in \mathbb{R}^5$, $\bar{h}_{\max} = 229455$ м, $\bar{h}_{\min} = 220320$ м (заданная орбита близка к круговой), $\bar{i} = 90°$, $\bar{\Omega} \approx 62.73°$, $\bar{\omega} \approx 62.06°$. В ИД3 $t_0 = t_2 \approx 348$ с, $t_{\mathrm{f}}^{\mathrm{base}} \approx 617$ с, $\bar{O} \in \mathbb{R}^6$ — значение O на $\boldsymbol{u}^{\mathrm{base}}$, $\bar{h}_{\max} = 240000$ м, $\bar{h}_{\min} = 190000$ м, $\bar{i} \approx 98.81°$, $\bar{\Omega} \approx 75.38°$, $\bar{\omega} \approx 23.64°$, $\bar{u} \approx 63.48$. Допустимые отклонения $\bar{\Delta}_i = \bar{\Delta}_\Omega \approx 0.0058°$ $(= 0.346')$, $\bar{\Delta}_{h_{\max}} = \bar{\Delta}_{h_{\min}} = 346$ м, $\bar{\Delta}_\omega = \bar{\Delta}_u \approx 0.0333°$ $(= 2')$. Для ИД3 построены внутренние оценки множеств $U(t_{\mathrm{f}})$.

3. Конкретизация математической модели движения

Конкретизируем математическую модель управляемого движения РН из разд. 2.

Формулы для гравитационного ускорения $g(x)$ в соответствии с нормальным потенциалом модели "Параметры Земли 1990 г." [12] и с использованием обозначений из разд. 1 имеют вид

$$g(x) = g_0\Big(\frac{a}{\|x\|}\Big)^2\bigg(-\frac{x}{\|x\|} + C_{20}\Big(\frac{a}{\|x\|}\Big)^2\tilde{f}(x)\bigg);\ \tilde{f}(x) = \bigg(1.5 - 7.5\,\Big(\frac{x^\top d^3}{\|x\|}\Big)^2\bigg)\frac{x}{\|x\|} + 3\,\frac{x^\top d^3}{\|x\|}\,d^3,$$

где $d^3 = D\boldsymbol{e}^3$ — это 3-й столбец матрицы D из (1.2), а матрица D имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} -\cos\Pi_0\,\sin\varphi\,\cos\lambda - \sin\Pi_0\,\sin\lambda & -\cos\Pi_0\,\sin\varphi\,\sin\lambda + \sin\Pi_0\,\cos\lambda & \cos\Pi_0\,\cos\varphi \\ \cos\varphi\,\cos\lambda & \cos\varphi\,\sin\lambda & \sin\varphi \\ \sin\Pi_0\,\sin\varphi\,\cos\lambda - \cos\Pi_0\,\sin\lambda & \sin\Pi_0\,\sin\varphi\,\sin\lambda + \cos\Pi_0\,\cos\lambda & -\sin\Pi_0\,\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Величина W модуля ускорения от реактивных сил определяется соотношениями

$$W = \frac{\mathcal{P}(t,x)}{m(t)};\quad \mathcal{P}(t,x) = C_1(t) - C_2(t)p(H),\quad H = \|x\| - \frac{a}{\big(1 + \mathrm{e}_1^2\,(x^\top d^3)^2\,\|x\|^{-2}\big)^{1/2}},$$

где C_j — кусочно-постоянные функции ($C_2{\equiv}0$ при $t{\in}(t_2, t_{\mathrm{f}})$), $p(H)$ — давление на высоте H.

Условия (2.3) также требуют дальнейшей конкретизации.

Сначала найдем явные формулы, выражающие зависимость i, Ω, $h_{\max}$, $h_{\min}$ от x и v (аргумент t_{f} для упрощения обозначений пока опускаем). Из [11, с. 35, 36, 48] следует, что

$$\cos i = c_3/\|c\|,\ \operatorname{tg}\Omega = -c_1/c_2,\ \text{где } c = \xi\times\nu;\ h_{\max} = a_{\mathrm{or}}(1{+}e_{\mathrm{or}}){-}R,\ h_{\min} = a_{\mathrm{or}}(1{-}e_{\mathrm{or}}){-}R, \quad (3.1)$$

где c — вектор из интеграла площадей [11, с. 35], перпендикулярный к плоскости орбиты, a_{or} и e_{or} — большая полуось и эксцентриситет орбиты. Учитывая (1.2) и ортогональность D, имеем

$$\|\xi\| = \|x\|,\quad \|\nu\| = \|v\|,\quad \xi^\top\nu = x^\top v,\quad c = D^\top(x\times v). \quad (3.2)$$

С использованием тождества Лагранжа (гласящего, что $(a{\times}b)^\top(c{\times}d) = (a^\top c)(b^\top d){-}(b^\top c)(a^\top d)$ для произвольных $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ [3, с. 388]), можно записать

$$\|c\|^2 = \|\xi\times\nu\|^2 = \|\xi\|^2\|\nu\|^2 - (\xi^\top\nu)^2 = \|x\times v\|^2 = \|x\|^2\|v\|^2 - (x^\top v)^2; \quad (3.3)$$

$$\cos i = \frac{(d^3)^\top(x\times v)}{\big(\|x\|^2\|v\|^2 - (x^\top v)^2\big)^{1/2}},\quad \operatorname{tg}\Omega = -\frac{(d^1)^\top(x\times v)}{(d^2)^\top(x\times v)}.$$

Найдем теперь зависимость от x, v для $h_{\max}$ и $h_{\min}$. Из [11, формула (2.4.18)] и сравнения записи уравнений движения спутника в задаче двух тел в виде [11, формула (2.1.7)] и (2.1) при $W(t,x) \equiv 0$, $C_{20} = 0$ следует, что $\|v\|^2 = g_0 a^2(2/\|x\| - 1/a_{\mathrm{or}})$, откуда

$$a_{\mathrm{or}} = \frac{\|x\|}{2 - (g_0a^2)^{-1}\|x\|\,\|v\|^2} = \frac{1}{2\,\|x\|^{-1} - \gamma\|v\|^2},\quad \text{где } \gamma = \frac{1}{g_0a^2}. \quad (3.4)$$

Из [11, формулы (2.4.7), (2.2.29)] с учетом (3.3) вытекает, что

$$e_{\mathrm{or}} = (1 - p_{\mathrm{or}}/a_{\mathrm{or}})^{1/2},\quad p_{\mathrm{or}} = \|c\|^2/(g_0a^2) = \gamma\,\big(\|x\|^2\|v\|^2 - (x^\top v)^2\big), \quad (3.5)$$

где $p_{\rm or}$ — фокальный параметр эллиптической орбиты. Из (3.1) имеем

$$h_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{\|x\|}{2-\gamma\|x\|\|v\|^2}\left(1 \pm \left(1-\gamma\left(\|x\|^2\|v\|^2-(x^\top v)^2\right)\frac{2-\gamma\,\|x\|\,\|v\|^2}{\|x\|}\right)^{1/2}\right)-R.$$

Найдем формулы для вычисления ω. Имеем [11, с. 100] $\omega = u-\theta$, где u — аргумент широты, θ — истинная аномалия. Выпишем зависимости $\sin u$, $\cos u$, $\sin\theta$, $\cos\theta$ от x, v.

Из [11, формулы (2.3.5),(4.3.2),(4.3.3), (2.2.31)] следует, что $\sin\theta = (\gamma\, p_{\rm or})^{1/2}\,\xi^\top\nu/(\|\xi\|e_{\rm or})$, $\cos\theta = (p_{\rm or}/\|\xi\|-1)\,/e_{\rm or}$. Отсюда с учетом (3.2) имеем

$$\sin\theta = \frac{(\gamma\, p_{\rm or})^{1/2}\, x^\top v}{\|x\|e_{\rm or}}, \quad \text{где } \gamma = \frac{1}{g_0 a^2}, \quad \cos\theta = \frac{p_{\rm or}\,\|x\|^{-1}-1}{e_{\rm or}}, \tag{3.6}$$

где зависимости $e_{\rm or}$, $p_{\rm or}$ от x, v уже приведены выше. Из [11, формулы (4.3.4)] следует, что $\cos u = \xi^\top w/\|\xi\|$, $\sin u = \|w\times(\xi/\|\xi\|)\|\,\mathrm{sign}\,\xi_3$, где $w=(\cos\Omega,\sin\Omega,0)^\top\in\mathbb{R}^3$, откуда

$$\cos u = \frac{x^\top Dw}{\|x\|}, \quad \sin u = \frac{\mathrm{sign}\,(x^\top d^3)\,\|w\times(D^\top x)\|}{\|x\|}, \quad \text{где } w=(\cos\Omega,\sin\Omega,0)^\top. \tag{3.7}$$

Выражения для компонент $w = w(x,v)$ получим из [11, формулы (4.2.8),(2.2.10)] с учетом (3.2):

$$\sin\Omega = \frac{c_1}{\|c\|\sin i} = \frac{(x\times v)^\top d^1}{\|x\times v\|\sin i}, \quad \cos\Omega = -\frac{c_2}{\|c\|\sin i} = -\frac{(x\times v)^\top d^2}{\|x\times v\|\sin i}.$$

Поскольку $0\le i\le\pi$ [11, с. 104], найдем $\sin i = \left(1-(\cos i)^2\right)^{1/2}$ с учетом (3.1), (3.2). В результате

$$\sin\Omega = \frac{(x\times v)^\top d^1}{\delta(x,v)^{1/2}}, \quad \cos\Omega = -\frac{(x\times v)^\top d^2}{\delta(x,v)^{1/2}}, \quad \text{где } \delta(x,v) = \left((x\times v)^\top d^1\right)^2+\left((x\times v)^\top d^2\right)^2. \tag{3.8}$$

Теперь значения $\cos\omega$ и $\sin\omega$ могут быть найдены с помощью известных тождеств

$$\cos\omega = \cos(u-\theta) = \cos u\cos\theta+\sin u\sin\theta, \quad \sin\omega = \sin(u-\theta) = \sin u\cos\theta-\cos u\sin\theta. \tag{3.9}$$

Выше приведены формулы для функций синуса и косинуса углов i, Ω, θ, u, ω как функций от $x(t_{\rm f})$, $v(t_{\rm f})$. Углы можно восстановить с помощью обратных тригонометрических функций. При этом важно условиться о диапазонах изменения этих углов и, поскольку между углами имеется связь $\omega = u-\theta$, о том, какие два из трех углов θ, u, ω считать "независимыми". Поскольку нам нужно выполнить ограничения на ω, примем в соответствии с [11, с. 99, с. 123], что $0\le i<\pi$, $0\le\Omega<2\pi$, $0\le\omega<2\pi$, $0\le u<2\pi$, $\theta = u-\omega$ (при этом угол θ уже не обязан лежать в диапазоне $[0,2\pi]$). Это позволит, в частности, избежать эффекта паразитического скачкообразного изменения аргумента перигея ω, описанного в [5], что важно при использовании выбранных нами итерационных численных методов.

4. Предлагаемые подходы к решению задач и численные методы

4.1. Вспомогательные задачи оптимального управления

Известны способы решения задач оптимального управления со свободным временем (см., например, [14, с. 68; 13, с. 820]). Однако в нашем распоряжении имелось значение $t_{\rm f}^{\rm base}$ — эффективная верхняя оценка для оптимального значения $t_{\rm f}^{\rm opt} = \inf J_0[\boldsymbol{u}(\cdot)]$ в задаче 1. Поэтому для нахождения допустимых управлений, лучших, чем $\boldsymbol{u}^{\rm base}$, было решено использовать вспомогательную задачу 3 (последовательность вспомогательных задач) оптимального управления на фиксированном промежутке времени, более простую для решения, чем задача 1.

Считаем значение t_f фиксированным. Рассмотрим функционал типа

$$J[\boldsymbol{u}(\cdot)] = \Phi(x(t_\mathrm{f})), \quad \text{где } \Phi(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\alpha_k(\tilde{\Phi}_k(x))^2, \tag{4.1}$$

где $\alpha_k > 0$ — заданные (выбранные) весовые коэффициенты, $\tilde{\Phi}_k(x)$ — невязки в терминах тех или иных функций от вектора состояния, соответствующие операторному уравнению, получающемуся из условий типа (2.3) при нулевых правых частях, K — число неравенств в (2.3).

З а д а ч а 3. Для системы (2.4) с заданными t_0, x_0, t_f определить управление $\boldsymbol{u}(\cdot)$, удовлетворяющее условиям (2.2) и минимизирующее значение функционала $J[\boldsymbol{u}(\cdot)]$ вида (4.1).

Рассмотрим три способа выбора функции $\Phi(x)$ в функционале $J[\boldsymbol{u}(\cdot)]$.

Первый способ был реализован нами в [5]. При этом предлагалось вначале подменить в задаче 1 условия (2.3) другими условиями типа $|\tilde{F}(O) - p| \le \delta$, где вектор-функция $\tilde{F}(O)$ и векторы p и δ выбраны следующим образом. Введем вектор-функции[2] $\tilde{F}(O)$ и $F(x,v)$:

$$\tilde{F}(O) = (\cos i, \tan\Omega, h_{\max}{+}R, h_{\min}{+}R, \cos\omega, \cos u)^\top = F(x,v) \qquad (x, v \in \mathbb{R}^3), \tag{4.2}$$

и условия (2.3) на O заменим на упомянутые выше условия, записанные в терминах функции $\tilde{F}(O)$, а в конечном итоге — функции $F(x,v)$. С учетом приведенных в разд. 3 формул имеем

$$\begin{gathered} F_1(x,v) = \frac{(x\times v)^\top d^3}{\|x\times v\|} = \frac{(x\times v)^\top d^3}{\left(\|x\|^2\|v\|^2 - (x^\top v)^2\right)^{1/2}}; \qquad F_2(x,v) = -\frac{(x\times v)^\top d^1}{(x\times v)^\top d^2}; \\ F_{3,4}(x,v) = \frac{\|x\|}{2-\gamma\|x\|\|v\|^2}\left(1 \pm \left(1 - \gamma\left(\|x\|^2\|v\|^2 - (x^\top v)^2\right)\frac{2-\gamma\,\|x\|\,\|v\|^2}{\|x\|}\right)^{1/2}\right); \end{gathered} \tag{4.3}$$

$$F_5(x,v) = \cos u\cos\theta + \sin u \sin\theta; \qquad F_6(x,v) = \cos u, \tag{4.4}$$

где правые части (4.4) определяются формулами (3.4), (3.5), (3.6), (3.7), (3.8). Учитывая малость значений компонент $\bar{\Delta}_O$, заменим (2.3) условиями $|F(x(t_\mathrm{f}), v(t_\mathrm{f})) - p| \le \delta$, где векторы $p, \delta \in \mathbb{R}^6$ вычисляются по $\bar{O}, \bar{\Delta}_O$. У нас каждая компонента $\tilde{F}_k$ функции $\tilde{F}$ зависит только от одной k-й компоненты O_k вектора O. Для простоты изложения считаем, что каждая функция $\tilde{F}_k(O_k)$ монотонна на $\mathcal{O}_k{=}[\bar{O}_k{-}(\bar{\Delta}_O)_k, \bar{O}_k{+}(\bar{\Delta}_O)_k]$, и находим p_k, δ_k так, чтобы неравенство $|\tilde{F}_k(O_k){-}\,p_k|{\le}\delta_k$ описывало всю область значений $\tilde{F}_k(O_k)$ на $\mathcal{O}_k$. В частности, при наших исходных данных полагаем $p_1 = (\cos(\bar{i} - \bar{\Delta}_i) + \cos(\bar{i} + \bar{\Delta}_i))\,/\,2$, $\delta_1 = (\cos(\bar{i} - \bar{\Delta}_i) - \cos(\bar{i} + \bar{\Delta}_i))\,/\,2$ и аналогично для p_k, δ_k, $k = 5, 6$ (учтено монотонное убывание функции arccos в окрестности заданных значений), $p_2{=}(\mathrm{tg}(\bar{\Omega}{+}\bar{\Delta}_\Omega){+}\,\mathrm{tg}(\bar{\Omega}{-}\bar{\Delta}_\Omega))\,/\,2$, $\delta_2{=}(\mathrm{tg}(\bar{\Omega}{+}\bar{\Delta}_\Omega){-}\,\mathrm{tg}(\bar{\Omega}{-}\bar{\Delta}_\Omega))\,/\,2$, $p_3{=}R{+}h_{\max}$, $\delta_3{=}\bar{\Delta}_{h_{\max}}$, $p_4{=}R{+}h_{\min}$, $\delta_4{=}\bar{\Delta}_{h_{\min}}$. Допуская некоторую вольность, чтобы не вводить новых обозначений, будем вектор-функцию $F(x,v)$, $x, v{\in}\mathbb{R}^3$, обозначать также символом $F(x)$, $x{\in}\mathbb{R}^8$. Фактически, $F(x)$ не зависит от x_7, x_8. Ограничения $|F(x(t_\mathrm{f}), v(t_\mathrm{f})) - p| \le \delta$ принимают вид

$$|F(x(t_\mathrm{f})) - p| \le \delta.$$

Введем функционал $J[\boldsymbol{u}(\cdot)] = J_1[\boldsymbol{u}(\cdot)] = J_1^K[\boldsymbol{u}(\cdot)]$ с

$$\Phi(x) = \Phi_1^K(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\alpha_k\left(F_k(x) - p_k\right)^2, \qquad K \in \{4,5,6\}. \tag{4.5}$$

Функция $\Phi_1^K(x)$ достигает минимального значения (равного 0) в таких точках, что $F(x) = p$ (по крайней мере, одна из которых обеспечивает (2.3)). Если при некотором $t_\mathrm{f} < t_\mathrm{f}^\mathrm{base}$ существует решение задачи 3 и для него выполнено (2.3), то это управление лучше базового $\boldsymbol{u}^\mathrm{base}$

[2]В качестве $\tilde{F}(O)$ можно попробовать взять и другие, чем в (4.2), функции, например, взять $\tilde{F}_2(O) = \cos\Omega$. Вопрос о том, какие функции здесь лучше использовать, требует отдельного рассмотрения.

(чем t_{f} меньше, тем лучше). Если при каком-либо t_{f} условие (2.3) не выполняется ни на одном из (локальных) минимумов задачи 3, то это, скорее всего, свидетельствует о том, что $t_{\mathrm{f}} < t_{\mathrm{f}}^{\mathrm{opt}}$.

Второй естественный способ состоит в построении $J[\boldsymbol{u}(\cdot)] = J_2[\boldsymbol{u}(\cdot)] = J_2^K[\boldsymbol{u}(\cdot)]$ с

$$\Phi(x) = \Phi_2^K(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K} \alpha_k \left(O_k(x) - \bar{O}_k\right)^2, \qquad K \in \{4, 5, 6\},$$

где $O_k(x) = \arccos(F_k(x))$, $k = 1, 5, 6$, $O_2(x) = \arctan(F_2(x))$, $O_k(x) = F_k(x) - R$, $k = 3, 4$, причем углы Ω, ω и u восстанавливаются с учетом знаков значений, которые получаются при вычислении приведенных выше выражений для функций синуса и косинуса этих углов.

В пользу использования J_2 вместо J_1 говорят следующие соображения: минимум $\Phi_2^K(x)$ достигается в точках, соответствующих центру бруса (2.3), а минимум $\Phi_1^K(x)$ — вообще говоря, нет; функционал J_1 может оказаться более многоэкстремальным, чем J_2, ввиду отсутствия монотонности функций $\tilde{F}_k(O_k)$, $k = 2, 5, 6$, на всей области определения $O_k \in [0, 2\pi]$.

Для задачи выведения РН в заданную точку орбиты естественно также ввести $J[\boldsymbol{u}(\cdot)] = J_3[\boldsymbol{u}(\cdot)]$ с

$$\Phi(x) = \Phi_3(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{6} \alpha_k \left(x_k - \bar{x}_k\right)^2,$$

где $\bar{x} \in \mathbb{R}^6$ является решением обратной задачи

$$O(x) = \bar{O} \qquad (\text{считаем здесь } x = (x^\top, v^\top)^\top \in \mathbb{R}^6), \tag{4.6}$$

$\bar{O}$ — желаемое значение вектора $O \in \mathbb{R}^6$. Решение обратной задачи (4.6) может быть найдено в явном виде с использованием (1.2) и формул [1, с. 194] для ξ, ν, куда подставляем $e_{\mathrm{or}} = (h_{\max} - h_{\min})/(h_{\max} + h_{\min} + 2R)$, $a_{\mathrm{or}} = R + (h_{\max} + h_{\min})/2$, $p_{\mathrm{or}} = 2(h_{\max} + R)(h_{\min} + R)/(h_{\max} + h_{\min} + 2R)$, или, что то же самое, формул (4.1.15)–(4.1.20), (2.2.31), (2.3.1), (2.3.5), (2.3.7) из [11].

С учетом [2, с. 178] и накопленного нами в численных экспериментах опыта далее полагаем

$$\alpha_k = \bar{\alpha}_k(\delta_k)^{-2} \text{ для } J_1, \quad \alpha_k = \bar{\alpha}_k((\bar{\Delta}_O)_k)^{-2} \text{ для } J_2, \quad \alpha_k = \bar{\alpha}_k(\bar{x}_k)^{-2} \text{ для } J_3,$$

где $\bar{\alpha}_k$ — фиксированные числа; δ_k, $(\bar{\Delta}_O)_k$, $\bar{x}_k$ — компоненты введенных векторов δ, $\bar{\Delta}_O$, $\bar{x}$. Вектор (строку) из коэффициентов $\bar{\alpha}_k$ (они могут быть разными для разных функционалов) ниже иногда будем называть "маской" коэффициентов; в "стандартной" маске все $\bar{\alpha}_k = 1$. Будем использовать иногда обозначение $J(\bar{\alpha})$, чтобы указать, что в J не все $\bar{\alpha}_k$ равны единицам.

Для приближенного решения задачи типа 1 предлагается выбрать подходящий функционал J, минимизация которого призвана обеспечить (2.3), и решить серию задач 3 для выбранной конечной последовательности значений $t_{\mathrm{f}}^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots$, начиная с некоторого разумного $t_{\mathrm{f}}^{(0)}$ ($t_{\mathrm{f}}^{(0)} = t_{\mathrm{f}}^{\mathrm{base}}$, если известно $t_{\mathrm{f}}^{\mathrm{base}}$), например, задав некоторый шаг Δt_{f} и беря $t_{\mathrm{f}}^{(j)} = t_{\mathrm{f}}^{(j-1)} + \Delta t_{\mathrm{f}}$. Пусть $\boldsymbol{u}^{(j)}$ — управления, найденные при решении задачи 3 при $t_{\mathrm{f}} = t_{\mathrm{f}}^{(j)}$. Если $\boldsymbol{u}^{(0)}$ удовлетворяет (2.3), то строим убывающую последовательность $t_{\mathrm{f}}^{(0)} > t_{\mathrm{f}}^{(1)} > t_{\mathrm{f}}^{(2)} > \ldots$. Тогда, если $\boldsymbol{u}^{(j)}$ при некотором j удовлетворяет (2.3), а $\boldsymbol{u}^{(j+1)}$ — нет, то можно удовлетвориться найденным $\boldsymbol{u}^{(j)}$ (либо повторить процесс с меньшим шагом Δt_{f}). Если же $\boldsymbol{u}^{(0)}$ не удовлетворяет (2.3), то строим возрастающую последовательность $t_{\mathrm{f}}^{(0)} < t_{\mathrm{f}}^{(1)} < t_{\mathrm{f}}^{(2)} < \ldots$ до тех пор, пока не найдем такое j, что $\boldsymbol{u}^{(j)}$ не удовлетворяет (2.3), а $\boldsymbol{u}^{(j+1)}$ удовлетворяет. Тогда можно удовлетвориться найденным $\boldsymbol{u}^{(j+1)}$ (либо повторить процесс с меньшим шагом Δt_{f}).

Пусть t_{f}^* — наименьшее t_{f}, при котором удается найти допустимое управление в задаче 1 с $\bar{O} \in \mathbb{R}^5$ (t_{f}^* — приближенное значение $t_{\mathrm{f}}^{\mathrm{orb}}$), u^* — соответствующее значение аргумента широты.

Точечные внутренние оценки $\tilde{U}(t_{\mathrm{f}})$ для множества $U(t_{\mathrm{f}})$ из задачи 2 при фиксированном $t_{\mathrm{f}} \ge t_{\mathrm{f}}^*$ будем строить следующим образом. Сначала полагаем $\tilde{U}(t_{\mathrm{f}}) = \emptyset$. Возьмем некоторую конечную сетку $\{\bar{u}^k\} \subseteq [0, 2\pi)$ целевых значений аргумента широты. При малых значениях

$|t_\mathrm{f} - t_\mathrm{f}^*|$ узлы такой сетки достаточно сосредоточить вблизи u^*. Будем перебирать упомянутые узлы и для каждого решать задачу 3 с функционалом J (любого из трех типов с шестью слагаемыми в $\Phi(x)$), построенным с использованием значений $\bar{O} \in \mathbb{R}^5$ и $\bar{u}^k$. Если в процессе решения удастся найти управление, при котором удовлетворяются условия (2.2) и ограничения (2.3) для первых пяти компонент O, то соответствующее ему значение u включим в множество $\tilde{U}(t_\mathrm{f})$. После того как переберем все узлы сетки $\{\bar{u}^k\}$, считаем множество $\tilde{U}(t_\mathrm{f})$ построенным. Для оценивания многозначной функции $U(t_\mathrm{f})$ при $t_\mathrm{f} \in [t_\mathrm{f}^*, t_\mathrm{f}^{\max}]$ можно ввести на этом промежутке сетку значений моментов t_f^l и произвести описанные выше вычисления для каждого из них.

Для нахождения допустимых управлений нет надобности находить точные решения задачи 3: такие управления могут получиться при численном решении задачи 3 каким-либо методом спуска в пространстве управлений с использованием сопряженной системы.

4.2. Сопряженные системы для вспомогательных задач

Сопряженная система для задачи 3 может быть записана в виде [14, с. 32, 34]

$$\dot{\Psi} = -f_x^\top \Psi, \quad t \in [t_0, t_\mathrm{f}]; \quad \Psi(t_\mathrm{f}) = \Phi_x(x)\Big|_{x=x(t_\mathrm{f})}. \tag{4.7}$$

Разбивая матрицу $f_x^\top$ на блоки и вводя вспомогательные обозначения, имеем

$$f_x^\top = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 \\ A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 \\ A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \end{pmatrix}, \quad \Phi_x = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad n = 8. \tag{4.8}$$

Прямым дифференцированием получаются следующие формулы для A_i^j, где вместо $x \in \mathbb{R}^8$ опять используются исходные переменные и введено обозначение $\tilde{x} = x/\|x\| \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{lll} A_1^1 = 0 \in \mathbb{R}^{3\times 3}; & A_1^2 = B_1^\mathrm{R} + B_1^\mathrm{g} \in \mathbb{R}^{3\times 3}; & A_1^3 = 0 \in \mathbb{R}^{3\times 2}; \\ A_2^1 = I \in \mathbb{R}^{3\times 3}; & A_2^2 = 0 \in \mathbb{R}^{3\times 3}; & A_2^3 = 0 \in \mathbb{R}^{3\times 2}; \\ A_3^1 = 0 \in \mathbb{R}^{2\times 3}; & & A_3^3 = 0 \in \mathbb{R}^{2\times 2}; \end{array} \tag{4.9}$$

$$B_1^\mathrm{R} = -\frac{C_2(t)}{m(t)}\, p(H)_H\, H_x\, h(\vartheta, \psi)^\top \in \mathbb{R}^{3\times 3},$$

$$H_x = \frac{x}{\|x\|} + \frac{a\mathrm{e}_1^2}{\big(\|x\|^2 + \mathrm{e}_1^2 (x^\top d^3)^2\big)^{3/2}} \cdot \frac{x^\top d^3}{\|x\|}\,\big(\|x\|^2 d^3 - (x^\top d^3) x\big);$$

$$B_1^\mathrm{g} = -\frac{g_0}{\|x\|}\Big(\frac{a}{\|x\|}\Big)^2 \bigg(I - 3\tilde{x}\tilde{x}^\top - 3C_{20}\Big(\frac{a}{\|x\|}\Big)^2 \Big(\frac{1}{2}\big(1 - 5(\tilde{x}^\top d^3)^2\big)\big(I - 5\tilde{x}\tilde{x}^\top\big) + d^3 (d^3)^\top$$
$$- 5\tilde{x}^\top d^3 \big(\tilde{x}(d^3)^\top + d^3 \tilde{x}^\top\big) + 5\tilde{x}^\top d^3\ \tilde{x}\tilde{x}^\top\Big)\bigg) \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \qquad \text{где } \tilde{x} = \frac{x}{\|x\|};$$

$$A_3^2 = \frac{\mathcal{P}(t,x)}{m(t)} \begin{pmatrix} -\sin\vartheta\cos\psi & \cos\vartheta\cos\psi & 0 \\ -\cos\vartheta\sin\psi & -\sin\vartheta\sin\psi & -\cos\psi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}.$$

У нас $p(H)$ задается линейной интерполяцией сеточной функции со значениями $p_0, p_1, \ldots, p_N$ в узлах $H_0 < H_1 < \ldots < H_N$, и имеем $p(H)_H = (p_{j+1} - p_j)/(H_{j+1} - H_j)$ при $H \in (H_j, H_{j+1})$.

Формулы для граничного условия в (4.7) для трех наших функций $\Phi(x)$ имеют вид

$$(\Phi_1^K)_x = \sum_{k=1}^K \alpha_k\,(F_k(x) - p_k)\,(F_k(x))_x, \quad (\Phi_2^K)_x = \sum_{k=1}^K \alpha_k\,\big(O_k(x) - \bar{O}_k\big)\,(O_k(x))_x, \quad x \in \mathbb{R}^8,$$
$$(\Phi_3)_{x_k} = \alpha_k\,(x_k - \bar{x}_k)\,,\ k = 1, \ldots, 6; \quad (\Phi_3)_{x_k} = 0,\ k = 7, 8.$$

Выражения для градиентов $(F_k(x))_x, (O_k(x))_x \in \mathbb{R}^8$, $k = 1, \ldots, K$, запишем в виде

$$(F_k(x))_x = \begin{pmatrix} (F_k(x,v))_x \\ (F_k(x,v))_v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ (O_k(x))_x = \begin{pmatrix} (O_k(x,v))_x \\ (O_k(x,v))_v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \text{(в правых частях } x, v \in \mathbb{R}^3\text{)}.$$

Прямым дифференцированием можно получить

$$\begin{aligned} (F_1(x,v))_x &= -\|x\times v\|^{-1}(d^3\times v) - \|x\times v\|^{-3}(x\times v)^\top d^3\big(\|v\|^2\,x-(x^\top v)\,v\big);\\ (F_1(x,v))_v &= \|x\times v\|^{-1}(d^3\times x) - \|x\times v\|^{-3}(x\times v)^\top d^3\big(-(x^\top v)\,x+\|x\|^2\,v\big); \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} (F_2(x,v))_x &= \big((x\times v)^\top d^2\big)^{-2}\big((x\times v)^\top d^2\,(d^1\times v)-(x\times v)^\top d^1\,(d^2\times v)\big);\\ (F_2(x,v))_v &= \big((x\times v)^\top d^2\big)^{-2}\big(-(x\times v)^\top d^2\,(d^1\times x)+(x\times v)^\top d^1\,(d^2\times x)\big); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (F_{3,4}(x,v))_x &= \big(2\,a_{\rm or}p_{\rm or}^{-1}(1\pm e_{\rm or})\pm e_{\rm or}^{-1}\big)p_{\rm or}a_{\rm or}x\|x\|^{-3}\mp\gamma e_{\rm or}^{-1}\big(\|v\|^2x-(x^\top v)v\big);\\ (F_{3,4}(x,v))_v &= \big(2\,a_{\rm or}p_{\rm or}^{-1}(1\pm e_{\rm or})\pm e_{\rm or}^{-1}\big)p_{\rm or}a_{\rm or}\gamma v\mp\gamma e_{\rm or}^{-1}\big(-(x^\top v)x+\|x\|^2v\big), \end{aligned}$$

где правые части конкретизируются с помощью (1.1), (3.3), (3.4), (3.5).

Выражения для $((F_k(x,v))_x$, $((F_k(x,v))_v$, $k=5,6$, могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} (F_5(x,v))_x &= (\cos u)_x\cos\theta+\cos u\,(\cos\theta)_x+(\sin u)_x\sin\theta+\sin u\,(\sin\theta)_x;\\ (F_5(x,v))_v &= (\cos u)_v\cos\theta+\cos u\,(\cos\theta)_v+(\sin u)_v\sin\theta+\sin u\,(\sin\theta)_v; \end{aligned}$$

$$(F_6(x,v))_x = (\cos u)_x; \qquad (F_6(x,v))_v = (\cos u)_v,$$

где правые части конкретизируются с помощью соотношений (3.6), (3.4), (3.5), (3.7), (3.8) для вычисления значений $\sin u$, $\cos u$, $\sin\theta$, $\cos\theta$ по x, v, а также следующих формул:

$$\begin{aligned} (\sin\theta)_x &= \frac{(\gamma\,p_{\rm or})^{1/2}}{e_{\rm or}\|x\|}\left(-\frac{x^\top v}{\|x\|^2}\Big(1+\frac{p_{\rm or}}{(e_{\rm or})^2\|x\|}\Big)x+v+\frac{\gamma(x^\top v)}{(e_{\rm or})^2p_{\rm or}}\big(\|v\|^2\,x-(x^\top v)\,v\big)\right);\\ (\sin\theta)_v &= \frac{(\gamma\,p_{\rm or})^{1/2}}{e_{\rm or}\|x\|}\left(x-\frac{\gamma(x^\top v)p_{\rm or}}{(e_{\rm or})^2}\,v+\frac{\gamma(x^\top v)}{(e_{\rm or})^2p_{\rm or}}\,\big(-(x^\top v)\,x+\|x\|^2\,v\big)\right); \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} (\cos\theta)_x &= \frac{1}{e_{\rm or}}\left(-\frac{p_{\rm or}}{\|x\|^3}\Big(1+\frac{1}{(e_{\rm or})^2}\Big(\frac{p_{\rm or}}{\|x\|}-1\Big)\Big)x+\gamma\Big(\frac{1}{a_{\rm or}-p_{\rm or}}\Big(\frac{p_{\rm or}}{\|x\|}-1\Big)+\frac{2}{\|x\|}\Big)\big(\|v\|^2\,x-(x^\top v)\,v\big)\right);\\ (\cos\theta)_v &= \frac{\gamma}{e_{\rm or}}\left(-\frac{p_{\rm or}}{(e_{\rm or})^2}\Big(\frac{p_{\rm or}}{\|x\|}-1\Big)v+\Big(\frac{1}{a_{\rm or}-p_{\rm or}}\Big(\frac{p_{\rm or}}{\|x\|}-1\Big)+\frac{2}{\|x\|}\Big)\big(-(x^\top v)\,x+\|x\|^2\,v\big)\right); \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned} (\cos u)_x &= -x^\top Dw\,\|x\|^{-3}\,x+\|x\|^{-1}\Big(Dw+\delta(x,v)^{-1/2}\big((D^\top x)\times w\big)^\top e^3\,\big((Dw)\times v\big)\Big);\\ (\cos u)_v &= -\|x\|^{-1}\delta(x,v)^{-1/2}\big((D^\top x)\times w\big)^\top e^3\,\big((Dw)\times x\big); \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned} (\sin u)_x &= -\mathrm{sign}\,(x^\top d^3)\ \cos u\ \big(1-(\cos u)^2\big)^{-1/2}\,(\cos u)_x;\\ (\sin u)_v &= -\mathrm{sign}\,(x^\top d^3)\ \cos u\ \big(1-(\cos u)^2\big)^{-1/2}\,(\cos u)_v, \end{aligned} \tag{4.14}$$

где $w = w(x,v)\in\mathbb{R}^3$ и $\delta(x,v)$ определены в (3.7), (3.8), а правые части (4.14) конкретизируются с помощью выражений (3.7), (4.13).

В качестве пояснения отметим, что формулы (4.14) получены дифференцированием соотношения $\sin u = \mathrm{sign}\,(x^\top d^3)\,(1-(\cos u)^2)^{1/2}$, которое вытекает из известной тригонометрической формулы и (3.7). Остальные формулы (4.11)–(4.13) получены прямым дифференцированием явных выражений, стоящих в правых частях (3.6), (3.7) и (3.8) путем элементарных, но громоздких выкладок, из которых приведем только некоторые полезные промежуточные соотношения, которые могут представлять и самостоятельный интерес. В частности,

$$(p_{\rm or})_x{=}2\gamma\big(\|v\|^2\,x{-}(x^\top v)\,v\big);\;\;(p_{\rm or})_v{=}2\gamma\big({-}(x^\top v)\,x{+}\|x\|^2\,v\big);\;\;\Big(\frac{1}{a_{\rm or}}\Big)_x{=}\frac{-2}{\|x\|^3}\,x;\;\;\Big(\frac{1}{a_{\rm or}}\Big)_v{=}{-}2\gamma v;$$
$$(e_{\rm or})_x{=}{-}\frac{1}{e_{\rm or}}\Big(\frac{\gamma}{a_{\rm or}}\big(\|v\|^2\,x{-}(x^\top v)\,v\big){-}p_{\rm or}\frac{1}{\|x\|^3}\,x\Big);\;\;(e_{\rm or})_v{=}{-}\frac{\gamma}{e_{\rm or}}\Big(\frac{1}{a_{\rm or}}\big({-}(x^\top v)\,x{+}\|x\|^2\,v\big){-}p_{\rm or}\,v\Big).$$

Кроме того, учитывая соотношения $\big(h^\top(x\times v)\big)_x = v\times h = -h\times v$, $\big(h^\top(x\times v)\big)_v = h\times x$, где h — произвольный вектор (при выводе этих формул были использованы также известные соотношения [3, с. 388] типа $h^\top(x\times v) = (x\times v)^\top h = (v\times h)^\top x$),

$$\cos\Omega\,(d^1\times v) + \sin\Omega\,(d^2\times v) = (\cos\Omega\cdot d^1 + \sin\Omega\cdot d^2)\times v = (Dw)\times v$$

(использованы соотношения [3, с. 388] типа $a\times(b+c) = a\times b + a\times c$), а также $(\sin\Omega)_x = \Omega_x\cos\Omega$, $(\cos\Omega)_x = -\Omega_x\sin\Omega$, $(\sin\Omega)_v = \Omega_v\cos\Omega$, $(\cos\Omega)_v = -\Omega_v\sin\Omega$, можно получить, что

$$\begin{aligned}\Omega_x &= \delta(x,v)^{-1}\big((x{\times}v)^\top d^2\,(d^1{\times}v) - (x{\times}v)^\top d^1\,(d^2{\times}v)\big) = -\delta(x,v)^{-1/2}(Dw){\times}v;\\ \Omega_v &= \delta(x,v)^{-1}\big(-(x{\times}v)^\top d^2\,(d^1{\times}x) + (x{\times}v)^\top d^1\,(d^2{\times}x)\big) = \delta(x,v)^{-1/2}(Dw){\times}x.\end{aligned} \tag{4.15}$$

Найдем теперь выражения для градиентов $(O_k(x))_x\in\mathbb{R}^6$, $k=1,\ldots,6$ (считаем здесь $x\in\mathbb{R}^6$). Имеем $(O_{3,4}(x))_x = (F_{3,4}(x))_x$. Для получения формул градиентов углов воспользуемся формулами следующего типа. Пусть $\phi=\phi(x)$, $x\in\mathbb{R}^6$, — интересующий нас угол (i, Ω, ω, u или θ), известны явные формулы для $\sin\phi(x)$ и $\cos\phi(x)$ и уже найдены явные выражения для градиентов $(\sin\phi(x))_x$ и $(\cos\phi(x))_x$. Имеем (с точностью до постоянного слагаемого) $\phi(x) = \arctan(\sin\phi(x)/\cos\phi(x))$. Дифференцируя это тождество по x: $(\phi(x))_x = (\arctan y)_y\,y_x$, где $y=\sin\phi(x)/\cos\phi(x)$, можно получить с использованием равенств $(\arctan y)_y = 1/(1+y^2)$, $(\sin\phi)^2+(\cos\phi)^2=1$ формулу

$$(\phi(x))_x = \cos\phi\,(\sin\phi(x))_x - \sin\phi\,(\cos\phi(x))_x, \tag{4.16}$$

которой можно пользоваться для вычисления градиентов углов i, Ω, ω, u (с использованием формул, приведенных выше). Можно использовать и другие выражения для вычисления $(\phi(x))_x$. Например, из формул дифференцирования сложной функции $\cos\phi(x)$ получается, что

$$(\phi(x))_x = -(\sin\phi(x))^{-1}\,(\cos\phi(x))_x. \tag{4.17}$$

В частности, с учетом того, что $i(x)\in[0,\pi]$ и, значит, $\sin i(x) = (1-(\cos i(x))^2)^{1/2}$, формулы (4.16), (4.17) применительно к $\phi(x)=i(x)$ могут быть преобразованы к виду $(O_1(x))_x = -(1-(\cos i(x))^2)^{-1/2}(\cos i(x))_x = -(1-(F_1(x))^2)^{-1/2}(F_1(x))_x$, где правая часть конкретизируется с помощью (4.3), (4.10). Для вычисления $(O_2(x))_x$ можно воспользоваться правыми частями формул (4.15) для Ω_x, Ω_v. Для вычисления $(O_5(x))_x$ можно пользоваться формулами, вытекающими из равенства $\omega = u-\theta$ и формул (4.16), примененных к $\phi=u$ и $\phi=\theta$: $(\omega(x))_x = \cos u\,(\sin u)_x - \sin u\,(\cos u)_x - \cos\theta\,(\sin\theta)_x + \sin\theta\,(\cos\theta)_x$, либо формулой, вытекающей из (4.17): $(\omega(x))_x = -(1/\sin\omega(x))\,(F_5(x))_x$, где $\sin\omega(x)$ вычисляется с использованием (3.9).

Сопряженная система может быть использована, в частности, для вычисления производной (Фреше) [14] (или, иначе [10], градиента) $\partial J[\boldsymbol{u}(\cdot)]/\partial\boldsymbol{u}(\cdot)$ функционала $J[\boldsymbol{u}(\cdot)]$. В силу [14, с. 34] имеем $\partial J[\boldsymbol{u}(\cdot)]/\partial\boldsymbol{u}(\cdot) = f_{\boldsymbol{u}}^\top\Psi$, откуда с учетом зависимости правой части (2.1) от управлений получаем

$$\frac{\partial J}{\partial\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{q}(t),\quad \text{где}\;\; \boldsymbol{q}_1(t) = \Psi_7(t),\;\; \boldsymbol{q}_2(t) = \Psi_8(t) \qquad (\boldsymbol{q}\in\mathbb{R}^2). \tag{4.18}$$

Необходимое условие оптимальности управления $\boldsymbol{u}(t)$ (принцип максимума [4, с. 433, 434]) для задачи 3 имеет вид $-q(t)^\top\boldsymbol{u}(t) = \max_{\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{U}}(-q(t)^\top\boldsymbol{u})$, $t\in[t_0,t_{\rm f}]$ (знак минус стоит из-за того, что краевое условие в сопряженной системе (4.7) взято со знаком плюс в отличие от [4; 7; 10]).

Сделаем еще следующие замечания. Сопряженная система была записана в предположении, что углы вычисляются в радианах. При вычислении углов тангажа ϑ и рыскания ψ в градусах перед матрицей A_3^2 из (4.8) должен стоять множитель $180/\pi$. Если вычислять ϑ и ψ в градусах, то отсутствие этого множителя приведет в силу структуры матрицы A из (4.8) к тому, что $\boldsymbol{q}(t)$ будет отличаться от $\partial J/\partial \boldsymbol{u}$ множителем: $\partial J/\partial \boldsymbol{u} = (180/\pi)\,\boldsymbol{q}(t)$. На ходе применяемых нами методов спуска (см. ниже) это сказываться не должно. Важнее учитывать при вычислении в градусах углов i, Ω, ω и u появление соответствующих множителей в ряде слагаемых в граничном условии для сопряженной системы, когда имеем, в частности, $(\Phi_2^K(x))_x = \sum_{k=1}^K \beta_k\,\alpha_k\,\left(O_k(x) - \bar{O}_k\right)\,(O_k(x))_x$, где $\beta_1 = \beta_2 = \beta_5 = \beta_6 = 180/\pi$, $\beta_3 = \beta_4 = 1$.

4.3. Численные методы решения вспомогательных задач

Для решения задачи 3 были опробованы три метода спуска в пространстве управлений — метод сопряженных градиентов (МСГ) [13], следующий в общих чертах варианту IV из [10], метод проекции градиента [10; 14] и простейшая модификация М2 метода последовательных приближений из [7] — с различными вариантами одномерной оптимизации (последняя осложняется тем, что минимизируемая функция, вообще говоря, не является унимодальной). Все три метода используют сопряженную систему из разд. 4.2: первые два — формулу (4.18) для градиента функционала, третий — условие оптимальности $-q(t)^\top \boldsymbol{u}(t) = \max_{\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{U}}(-q(t)^\top \boldsymbol{u})$. Наличие полученных явных формул для сопряженной системы позволяет, в частности, эффективно вычислять градиент функционала и реализовывать методы спуска — значительно эффективнее, чем получилось бы с привлечением численного дифференцирования, особенно если принять во внимание большую чувствительность $h_{\max}$ ($h_{\min}$) и ω к изменению $x(t_{\mathrm{f}})$, $v(t_{\mathrm{f}})$ при задании околокруговых орбит (см. [5]), а также то, что отпадает необходимость подбора шагов для численного дифференцирования (возможно, разных для разных элементов $f_x^\top$ и Φ_x из (4.7)).

Алгоритмы реализованы в системе MATLAB 7. Опробовано 5 способов одномерной оптимизации $J[\boldsymbol{u}^k + \alpha^k s^k] = \min_{\alpha\in[0,\bar{\alpha}^k]} J[\boldsymbol{u}^k + \alpha s^k]$ (где $\boldsymbol{u}^k$ и s^k — управление и направление спуска на k-м шаге), в том числе с использованием стандартных функций MATLAB'а fminbnd (алгоритм основан на методе золотого сечения и параболической интерполяции) и fminsearch (симплексный метод Нелдера и Мида), а также специально написанной функции fminquadr, которая находит точку минимума квадратичной функции, аппроксимирующей исходную (при этом сначала с помощью делений отрезка пополам, с изменением только правого конца интервала, находится такая точка α_0^k, что значения функции в середине отрезка $[0, \alpha_0^k]$ не больше, чем на его концах, и уже на этом отрезке $[0, \alpha_0^k]$ исходная функция аппроксимируется квадратичной).

Реализовано несколько модификаций алгоритмов. В частности, для задачи 3 с $\bar{O} \in \mathbb{R}^6$ и функционалом J_1 предложена оправдавшая себя в ряде случаев модификация, при которой вектор O расширяется до семимерного: $O = (i, \Omega, h_{\max}, h_{\min}, \omega, u, \theta)^\top \in \mathbb{R}^7$, в (4.5) входит $F_7(x) = \cos\theta$, где θ — истинная аномалия, p_7, δ_7 вычисляются на основе $\bar{\theta} = \bar{u} - \bar{\omega}$, $\bar{\Delta}_\theta = \max\{\bar{\Delta}_u, \bar{\Delta}_\omega\}$.

5. Результаты численного моделирования

При численном решении задачи 3 наилучшие результаты дал метод сопряженных градиентов с использованием функции fminquadr[3]. Другими двумя методами (см. разд. 4.3) допустимые управления найти не удалось, хотя локально оба позволяют улучшить исходное управление.

[3]Так, при использовании fminsearch получалось большее число вычислений функционала на каждом шаге спуска по сравнению с fminquadr (для ИД2 и функционалов типа J_1 и J_2 — порядка 50–55 и 15 вычислений для fminsearch и fminquadr соответственно), а также большее общее число вычислений значений функционала. При использовании fminbnd зафиксирован случай, когда не удалось уменьшить значение функции даже на самом первом шаге спуска ввиду неунимодальности $J_1^4[\boldsymbol{u}^0 + \alpha s^0]$.

В таблице ниже приведены данные некоторых численных экспериментов. Она содержит следующие колонки: № п/п — порядковый номер эксперимента (введен для удобства ссылок); ИД — указание исходных данных; $\Delta t_{\mathrm{f}} = t_{\mathrm{f}} - t_{\mathrm{f}}^{\mathrm{base}}$ (определяет промежуток управления); J — тип минимизируемого функционала; метод МСГ — какая одномерная минимизация используется в методе сопряженных градиентов (1 — функция fminsearch; 2 — fminquadr); $\boldsymbol{u}^0$ — описание начального приближения к управлению ($\equiv 0$ — вектор-функция, тождественно равная нулю; $\boldsymbol{u}^{0,1}$, $\boldsymbol{u}^{0,2}$ и $\boldsymbol{u}^{0,3}$ — управления, "навеянные" видом $\boldsymbol{u}^{\mathrm{base}}$, у которых каждая компонента отлична от нуля только на некотором промежутке времени, причем идет по границе области (2.2); $\boldsymbol{u}^{[l]}$ — управление, полученное в результате оптимизации для эксперимента, имеющего в первой колонке таблицы номер l); фл. — флаг, показывающий, чем закончился процесс оптимизации: "+" — найдено допустимое управление; "−" — процесс закончился, найдено управление лучшее (по функционалу), чем исходное; N_{steps} — число произведенных шагов в методе спуска (число интегрирований сопряженной системы); N_{func} — число вычислений значений функционала (число интегрирований управляемой системы); Δ_i, Δ_Ω, $\Delta_{h_{\max}}$, $\Delta_{h_{\min}}$, Δ_ω, Δ_u — отклонения полученных значений параметров орбиты от заданных. Для большей полноты картины приведем также эти значения в начале спуска для эксперимента №1: $\Delta_i = 0.4468°$, $\Delta_\Omega = -3.0881°$, $\Delta_{h_{\max}} = 617720$ м, $\Delta_{h_{\min}} = -1289451$ м; для эксперимента №2: $\Delta_i = -0.3248°$, $\Delta_\Omega = 1.6675°$, $\Delta_{h_{\max}} = 260834$ м, $\Delta_{h_{\min}} = -505520$ м, а также для эксперимента №5: $\Delta_i = 6.6765°$, $\Delta_\Omega = 9.1396°$, $\Delta_{h_{\max}} = 1312860$ м, $\Delta_{h_{\min}} = -3165403$ м, $\Delta_\omega = 218.6183°$. Значения масок коэффициентов были равны: $(1,1,1,1,10^{-4})$ — в экспериментах №№ 9,10; $(1,1,1,1,10^{-2},1,10^{-2})$ — в экспериментах №№ 15,17; $(1,1,1,1,10^{-2},1)$ — в №19. Два из найденных управлений и соответствующие управления $\boldsymbol{u}^{\mathrm{base}}$ приведены на рис. 1, 2.

Некоторые результаты численного решения вспомогательных задач

Данные, метод оптимизации						Результаты оптимизации								
№ п/п	ИД	Δt_{f} (с)	J	Метод МСГ	$\boldsymbol{u}^0$	Фл.	N_{steps}	N_{func}	Δ_i (град)	Δ_Ω (град)	$\Delta_{h_{\max}}$ (м)	$\Delta_{h_{\min}}$ (м)	Δ_ω (град)	Δ_u (град)
1	ИД1	-0.2	J_1^4	2	$\equiv 0$	−	267	2743	-0.0085	-0.0018	-99	-130		
2		-0.2	J_1^4	2	$\boldsymbol{u}^{0,2}$	+	43	396	-0.0041	-0.0024	3	-271		
3	ИД2	-1.2	J_1^4	2	$\equiv 0$	−	60	890	-0.0194	0.0166	-182	-1229	-1.7692	
4		-1.2	J_1^5	2	$\boldsymbol{u}^{[3]}$	−	5	124	-0.0203	0.0153	-194	-1240	-0.0000	
5		-1.2	J_1^4	1	$\equiv 0$	+	76	4104	-0.0028	0.0057	111	-335	2.9555	
6		-1.2	J_1^5	2	$\boldsymbol{u}^{[5]}$	+	2	45	-0.0023	0.0053	73	-248	-0.0000	
7		-1.2	J_2^4	2	$\equiv 0$	+	74	1104	-0.0056	0.0045	-46	-341	2.0283	
8		-1.2	J_2^5	2	$\boldsymbol{u}^{[7]}$	+	2	46	-0.0056	0.0045	-212	-310	0.0001	
9		-1.2	$J_2^5(\bar{\alpha})$	2	$\equiv 0$	+	84	1334	-0.0057	0.0049	-63	-300	0.0180	
10		-1.2	$J_1^5(\bar{\alpha})$	2	$\equiv 0$	+	159	2648	-0.0028	0.0013	-79	-338	-0.0328	
11		-1.2	J_1^4	1	$\boldsymbol{u}^{0,1}$	+	759	38813	-0.0057	0.0051	-96	-336	1.2701	
12		-1.2	J_1^5	1	$\boldsymbol{u}^{[11]}$	+	1	95	-0.0053	0.0051	-24	-278	0.0008	
13	ИД3	0	J_3	2	$\boldsymbol{u}^{0,3}$	+	15	197	0.0001	-0.0001	-282	-67	0.0168	-0.0007
14		0	J_3	2	$\equiv 0$	−	154	1922	0.0012	0.0014	-5727	-671	-3.3544	-0.0022
15		0	$J_1^7(\bar{\alpha})$	2	$\boldsymbol{u}^{[14]}$	+	185	2232	-0.0052	-0.0033	-319	196	-0.0187	-0.0016
16		0	J_1^4	2	$\equiv 0$	+	61	856	-0.0046	0.0005	-201	-72	117.503	-0.0698
17		0	$J_1^7(\bar{\alpha})$	2	$\boldsymbol{u}^{[16]}$	+	294	3491	-0.0058	-0.0034	-301	187	-0.0214	-0.0016
18		0	J_2^4	2	$\equiv 0$	+	39	523	-0.0054	0.0042	-127	-198	117.436	-0.0688
19		0	$J_2^6(\bar{\alpha})$	2	$\boldsymbol{u}^{[18]}$	+	258	3169	-0.0036	-0.0051	-201	38	-0.0106	-0.0016

В результате проведенных экспериментов при исходных данных ИД2[4] с $\bar{O} \in \mathbb{R}^5$ на промежутке управления $[t_1, t_{\mathrm{f}}]$, где $t_{\mathrm{f}} = t_{\mathrm{f}}^{\mathrm{base}} + \Delta t_{\mathrm{f}}$, $\Delta t_{\mathrm{f}} = -1.2$ с, найдено несколько допустимых управлений, в том числе начиная с очень далекого "универсального" начального

[4]Для расчетов вместо $W(t,x)$ была задана функция $W(t)$, и соответственно в (4.9) бралось $B_1^{\mathrm{R}} = 0$.

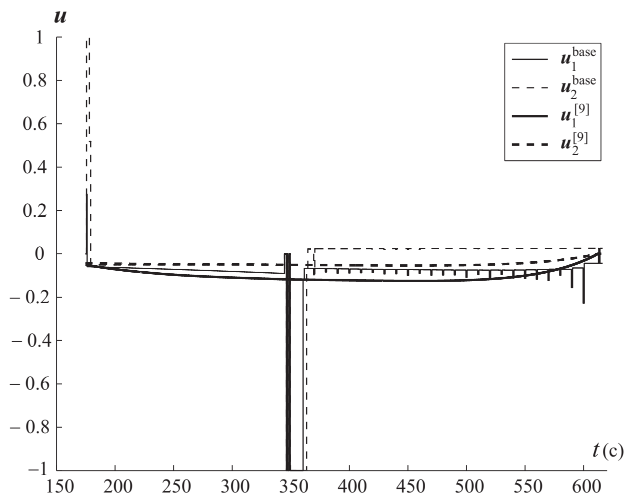


Рис. 1. $\boldsymbol{u}^{\text{base}}$ для ИД2 и найденное $\boldsymbol{u}^{[9]}$, $\Delta t_{\text{f}}{=}-1.2$с.

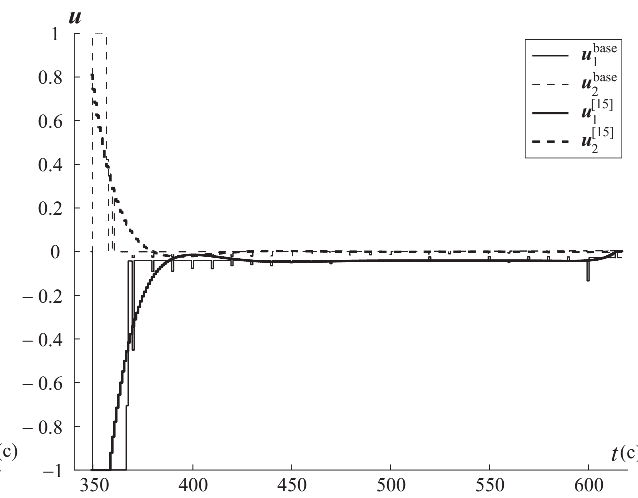


Рис. 2. $\boldsymbol{u}^{\text{base}}$ для ИД3 и найденное $\boldsymbol{u}^{[15]}$.

приближения $\boldsymbol{u}^0 \equiv 0$ (последние оказались довольно "гладкими", визуально похожими по форме и не имеющими участков граничного управления). Упомянутый сдвиг $\Delta t_{\text{f}} = -1.2$ с дает экономию массы примерно на 100.35 кг, что составляет около 1.07% от массы РН в момент $t_{\text{f}}^{\text{base}}$ при базовом управлении. При $\Delta t_{\text{f}} \leq -1.25$ с допустимые управления не найдены. Для ИД1 с $\bar{O} \in \mathbb{R}^4$ допустимое управление удалось найти при $\Delta t_{\text{f}} = -0.2$ с; при $\Delta t_{\text{f}} = -0.25$ с — нет. Для ИД3 с $\bar{O} \in \mathbb{R}^6$ при $\Delta t_{\text{f}} = 0$ найдены четыре допустимых управления (два из них — начиная с $\boldsymbol{u}^0 \equiv 0$); при $\Delta t_{\text{f}} = -0.1$ с — нет.

Найти допустимые управления при $\bar{O} \in \mathbb{R}^4$ обычно оказывалось легче, чем при $\bar{O} \in \mathbb{R}^5$. В первых исследованиях [5] при $\bar{O} \in \mathbb{R}^5$ и минимизации J_1^5 со стандартной маской коэффициентов (1,1,1,1,1) не удалось сразу найти такие управления: все методы "застревали" далеко от точек глобального минимума. Допустимые управления тогда удалось найти в два этапа: на первом проводилась минимизация J_1^K с $K = 4$, на втором — минимизация с $K = 5$ (в качестве начального приближения бралось управление, найденное на первом этапе). В дальнейшем допустимые управления были найдены и путем однократной минимизации функционалов J_2^5 и J_1^5 с экспериментально подобранными масками коэффициентов (но это привело к несколько бо́льшим вычислительным затратам).

Изначально было реализовано обновление МСГ (когда полагается $s^k = -\boldsymbol{q}^k$) через `2*nu` шагов (равно числу переменных, как часто полагается на практике [4, с. 313]), где `nu` — число узлов сетки по управлению (к примеру, `nu` ≈ 460 для ИД2). Оказалось, что может быть полезно проводить обновление чаще. Например, в эксперименте №9, где оно делалось через 40 шагов, имели[5] $N_{\text{steps}} = 84$, $N_{\text{func}} = 1344$, а исходный вариант МСГ нашел допустимое управление за $N_{\text{steps}} = 145$ шагов, $N_{\text{func}} = 2368$.

Приведем результаты нахождения внутренних оценок $\tilde{U}(t_{\text{f}})$ множеств $U(t_{\text{f}})$ для ИД3. При ИД3 получилось $t_{\text{f}}^* = t_{\text{f}}^{\text{base}}$. На рис. 3 показаны точки из $\tilde{U}(t_{\text{f}})$ при $t_{\text{f}} = t_{\text{f}}^{\text{base}} + \Delta t_{\text{f}}$, $\Delta t_{\text{f}} = 0, 1, 2, 3, 4$ с (по оси ординат отложены значения $u - u^{\text{base}}$, $u \in \tilde{U}(t_{\text{f}})$, где u^{base} получено при управлении $\boldsymbol{u}^{\text{base}}$; звездочкой отмечена точка, соответствующая u^{base}). Точки найдены решением вспомогательных задач трех типов (обычно последовательной двух- или трехкратной минимизацией разных функционалов с разными целевыми значениями $\bar{u}$ в них). Число точек на рис. 3 можно было бы увеличить, проведя расчеты при более густых сетках $\{\bar{u}^k\}$, однако наибольший интерес представляют границы $\tilde{U}(t_{\text{f}})$.

Пусть $\overline{u}(t_{\text{f}})$ (не нужно путать с обозначением $\bar{u}$ без аргумента для желаемого значения аргумента широты u) и $\underline{u}(t_{\text{f}})$ — верхняя и нижняя границы множества $\tilde{U}(t_{\text{f}})$ (максимальное и

[5]Для сведения упомянем, что этот расчет занял на персональном компьютере (модель Intel(R) Core(TM)2 Duo CPU, 3.00 ГГц, 2,00 ГБ ОЗУ) 13 мин. (с записью промежуточных результатов в файл). Обновление через 40 шагов делалось также в экспериментах №№ 7,19.

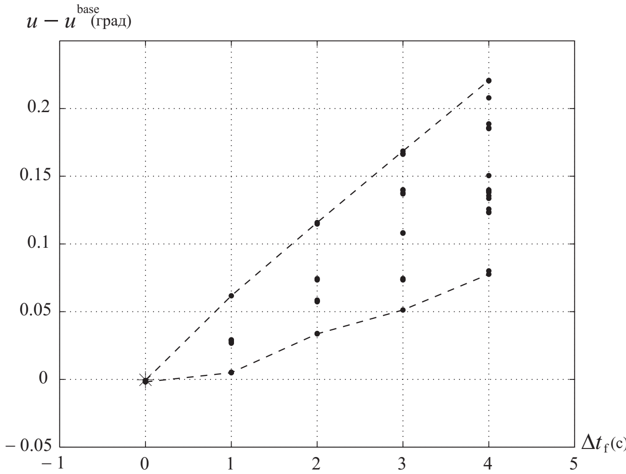


Рис. 3. Значения $u{-}u^{\text{base}}$, $u{\in}\tilde{U}(t_{\text{f}})$, для ИДЗ.

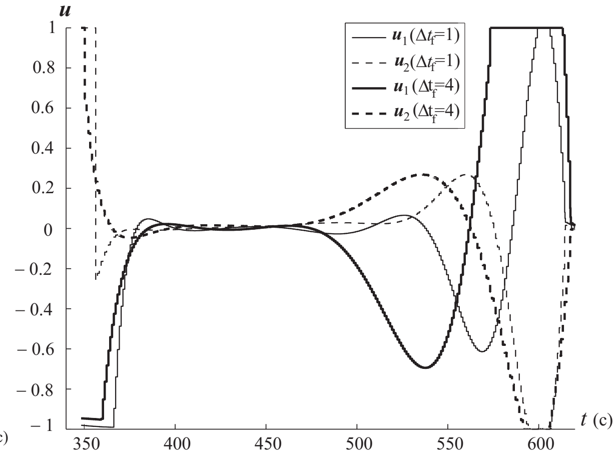


Рис. 4. Управления, давшие $\overline{u}(t_{\text{f}})$ при $\Delta t_{\text{f}}{=}1,4$ с.

минимальное значения аргумента широты, найденные нами при t_{f}), а $\hat{u}(t_{\text{f}}) = \overline{u}(t_{\text{f}}) - \underline{u}(t_{\text{f}})$ — его ширина. Получилось, что значения $\overline{u}(t_{\text{f}}^{\text{base}})$, $\underline{u}(t_{\text{f}}^{\text{base}})$ и u^{base} очень близки, и все три функции $\overline{u}(t_{\text{f}})$, $\underline{u}(t_{\text{f}})$ и $\hat{u}(t_{\text{f}})$ монотонно возрастают (сделать подобный вывод о границах $U(t_{\text{f}})$, вообще говоря, нельзя, так как $\tilde{U}(t_{\text{f}})$ — это только найденные оценки множеств $U(t_{\text{f}})$). При $\Delta t_{\text{f}} = 3$ и 4 с удалось увеличить значение u (по сравнению с получившимся при $\boldsymbol{u}^{\text{base}}$) на $10.13'$ и $13.26'$ (за счет потери массы около 250 и 334 кг соответственно). Управления, давшие $\overline{u}(t_{\text{f}})$ (см. рис. 4) и $\underline{u}(t_{\text{f}})$ при $\Delta t_{\text{f}} = 4$ с и $\underline{u}(t_{\text{f}})$ при $\Delta t_{\text{f}} = 3$ с, получены с помощью последовательной минимизации трех функционалов J_1^4, J_3, $J_1^7(1{,}1{,}1{,}1{,}10^{-2}{,}1{,}10^{-2})$ (с разными $\bar{u} = u^{\text{base}} + \delta u$ в них), начиная с $\boldsymbol{u}^0 \equiv 0$. Заметим, что ввиду монотонного возрастания функции $\underline{u}(t_{\text{f}})$ управления, давшие $\underline{u}(t_{\text{f}})$ при $\Delta t_{\text{f}} > 0$, практического интереса не представляют, так как соответствующие им значения аргумента широты могут быть обеспечены с меньшими энергетическими затратами. Управления, давшие $\overline{u}(t_{\text{f}})$ при $\Delta t_{\text{f}} = 3$ и 1 с (см. рис. 4), найдены последовательной минимизацией J_1^4, J_3, $J_1^7(1{,}1{,}1{,}1{,}10^{-2}{,}10^{1}{,}10^{-2})$ и J_1^4, J_3, $J_1^7(1{,}1{,}1{,}1{,}10^{-2}{,}1{,}10^{-2})$, начиная с $\boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{u}^{0,3}$.

Для нахождения точек множества $\tilde{U}(t_f)$ использовалась многопроцессорная ЭВМ МВС-ИММ, на которой доступен Matlab с Toolbox'ом для параллельных вычислений Parallel Computing Toolbox. Использовались 8 процессоров (по числу доступных тогда лицензий). Полностью автоматизировать процесс нахождения $\tilde{U}(t_f)$ не удалось, так как метод спуска не сразу давал допустимое управление. Применялась следующая технология. Одна программа Job запускает на счет несколько задач на разных процессорах: варианты отличаются только разными значениями $\bar{u}^k$; результаты счета записываются в разные файлы и затем анализируются. Из просчитанных вариантов "вручную" выбираются те, которые кажутся перспективными для продолжения минимизации. Запускается новая Job (с другим функционалом и, возможно, другими значениями $\bar{u}^k$).

6. Заключение

Для задач выведения максимальной массы РН на заданные эллиптические орбиты исследован вопрос о возможности улучшения допустимых базовых управлений $\boldsymbol{u}^{\text{base}}$. Разработаны алгоритмы нахождения допустимых управлений и нахождения точечных внутренних оценок множеств достижимых точек орбиты, основанные на решении вспомогательных задач оптимального управления на конечных промежутках управления с функционалами нескольких типов. Для решения вспомогательных задач применяются численные методы спуска в пространстве управлений с использованием полученных в работе явных формул для соответствующих сопряженных систем. Результаты моделирования не позволяют сделать вывод о безусловном преимуществе использования какого-то одного из упомянутых выше функционалов (пожалуй, все же можно рекомендовать в первую очередь воспользоваться функционалом J_2). Наилучшие результаты (с точки зрения надежности и быстроты нахождения допустимых управлений) дал метод сопряженных градиентов с использованием описанной выше одномерной минимизации с применением квадратичных аппроксимаций. Обширное численное моделирование свидетельствует в пользу близости (по функционалу) базовых управлений, полученных в НПОА, к оптимальным (так, для исходных данных ИД1 и ИД2 достигнутый по сравнению с $\boldsymbol{u}^{\mathrm{base}}$ выигрыш по выводимой массе составил, соответственно[6], порядка 0.2% и 1% от массы РН в момент $t_{\mathrm{f}}^{\mathrm{base}}$ при базовом управлении $\boldsymbol{u}^{\mathrm{base}}$), а найденные для исходных данных ИД3 оценки множеств достижимости на участке полета третьей ступени показывают, что небольшое увеличение значения аргумента широты требует больших энергетических затрат. Таким образом, описанные в статье методы оказались полезны и могут применяться для нахождения допустимых управлений, для оценки максимальной массы РН и, следовательно, оценки эффективности $\boldsymbol{u}^{\mathrm{base}}$, а также для нахождения оценок множеств достижимых точек орбиты.

В заключение авторы выражают глубокую признательность Н.В. Гусевой за реализацию распараллеливания вычислений на многопроцессорной ЭВМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Аппазов Р.Ф., Сытин О.Г.** Методы проектирования траекторий носителей и спутников Земли. М.: Наука, 1987. 440 с.
2. **Брайсон А., Хо Ю-ши.** Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.
3. **Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.** Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986. 544 с.
4. **Васильев Ф.П.** Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980. 520 с.
5. Исследование задачи оптимального выведения полезной нагрузки на заданную эллиптическую орбиту / Т.Д. Думшева, В.Б. Костоусов, Е.К. Костоусова, В.И. Починский // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 57–65.
6. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
7. **Любушин А.А., Черноусько Ф.Л.** Метод последовательных приближений для расчета оптимального управления // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 147–159.
8. **Мазгалин Д.В.** Построение способа управления ракетой-носителем при использовании в качестве управления программных угловых скоростей разворотов // Информационно-управляющие системы. 2010. № 3 (46). С. 21–29.
9. **Мазгалин Д.В., Починский В.И.** Метод определения азимута пуска и программы угла тангажа на атмосферном активном участке полета РН // Вестн. ЮУрГУ. 2010. № 22 (198). С. 47–50. (Компьютерные технологии, управление и радиоэлектроника; вып. 12.).
10. Опыт решения задач оптимального управления / В.С. Орлов, Б.Т. Поляк, В.А. Ребрий, Н.В. Третьяков // Вычислительные методы и программирование: сб. ст. Вып. 9. М.: Изд-во МГУ, 1967. С. 179–192.
11. **Охоцимский Д.Е, Сихарулидзе Ю.Г.** Основы механики космического полета. М.: Наука, 1990. 448 с.
12. Параметры общего земного эллипсоида и гравитационного поля Земли (Параметры Земли 1990 года). М.: РИО ТС ВС РФ, 1991. 37 с.
13. **Поляк Б.Т.** Метод сопряженных градиентов в задачах на экстремум // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1969. Т. 9, № 4. С. 807–821.
14. **Федоренко Р.П.** Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с.

Поступила 25.01.2011

Костоусова Елена Кирилловна
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: kek@imm.uran.ru

Починский Вениамин Иванович
канд. техн. наук
ведущий науч. сотрудник
ФГУП НПОА им. акад. Н. А. Семихатова

[6]Напомним, что для ИД1 и ИД2 допустимые управления строились на участках полета существенно разной длительности — после отделения второй и первой ступеней РН соответственно.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 3 2011

УДК 517.518

НАИЛУЧШЕЕ L_p ПРИБЛИЖЕНИЕ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА ЛИНЕЙНЫМИ ОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ НА КЛАССАХ ФУНКЦИЙ ДВУХ И ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ[1]

А. А. Кошелев

Получены близкие двусторонние оценки величины наилучшего приближения в пространстве $L_p(\mathbb{R}^m)$, $m = 2, 3,\ 1 \le p \le \infty$, оператора Лапласа линейными ограниченными операторами на классе функций, вторая степень оператора Лапласа которых принадлежит пространству $L_p(\mathbb{R}^m)$. Получены оценки наилучшей константы в соответствующем неравенстве Колмогорова и величины ошибки оптимального восстановления значений оператора Лапласа на функциях из указанного класса, заданных с ошибкой. Выписан оператор, уклонение которого от оператора Лапласа близко к наилучшему.

Ключевые слова: оператор Лапласа, приближение неограниченных операторов ограниченными, неравенство Колмогорова, оптимальное восстановление.

A. A. Koshelev. The best L_p approximation of the Laplace operator by linear bounded operators in the classes of functions of two and three variables.

Close two-sided estimates are obtained for the best approximation in the space $L_p(\mathbb{R}^m)$, $m = 2, 3$, $1 \le p \le \infty$, of the Laplace operator by linear bounded operators in the class of functions for which the square of the Laplace operator belongs to the space $L_p(\mathbb{R}^m)$. We estimate the best constant in the corresponding Kolmogorov inequality and the error of the optimal recovery of the values of the Laplace operator on functions from this class given with an error. We write an operator whose deviation from the Laplace operator is close to the best.

Keywords: Laplace operator, approximation of unbounded operators by bounded operators, Kolmogorov inequality, optimal recovery.

1. Постановка задач

Пусть $\mathbb{R}^m$, $m \ge 1$, есть евклидово пространство со скалярным произведением $(X, Y) = \sum_{i=1}^m x_i y_i$ векторов $X = (x_1, \ldots, x_m)$, $Y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ и нормой $\|X\| = \sqrt{(X, X)}$, $X \in \mathbb{R}^m$. Пусть далее $C = C(\mathbb{R}^m)$ есть пространство (вещественнозначных) функций, непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}^m$, с равномерной нормой

$$\|f\|_C = \sup\{|f(X)|:\ X = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m\};$$

$L_\infty = L_\infty(\mathbb{R}^m)$ — пространство измеримых, существенно ограниченных функций на $\mathbb{R}^m$ с нормой

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\{|f(X)|:\ X \in \mathbb{R}^m\};$$

$L_p = L_p(\mathbb{R}^m)$, $1 \le p < \infty$, — пространство измеримых функций f на $\mathbb{R}^m$ с суммируемой степенью $|f|^p$, наделенное нормой

$$\|f\|_p = \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^m} |f(X)|^p\, dX\Bigg)^{1/p};$$

$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ — пространство финитных (т. е. имеющих компактный носитель) бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^m$.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00462).

На дважды дифференцируемых функциях f оператор Лапласа Δ определяется формулой

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}.$$

На классах менее гладких функций оператор Лапласа и его степени Δ^l определяются традиционным путем с помощью теории обобщенных функций, т. е. по схеме Соболева (см., например, [1]). А именно относительно пары измеримых, локально суммируемых функций f, g и натурального числа l говорят, что $g = \Delta^l f$, если для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}$ имеет место равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(X)\ \Delta^l \varphi(X) dX = \int\limits_{\mathbb{R}^m} g(X)\varphi(X) dX.$$

Обозначим через $W_p^{2n} = W_p^{2n}(\mathbb{R}^m)$ ($n \ge 1$, $1 \le p < \infty$) пространство функций $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$, у которых $\Delta^n f \in L_p(\mathbb{R}^m)$. В случае $p = \infty$ через $W_\infty^{2n} = W_\infty^{2n}(\mathbb{R}^m)$ обозначим пространство функций $f \in C(\mathbb{R}^m)$, у которых $\Delta^n f \in L_\infty(\mathbb{R}^m)$. Известно, что если функция f принадлежит пространству W_p^{2n} $(1 \le p \le \infty)$, то на этой функции значение k-й степени оператора Лапласа при $1 \le k < n$ существует и более того $\Delta^k f \in C(\mathbb{R}^m)$ при $p = \infty$ и $\Delta^k f \in L_p(\mathbb{R}^m)$ при $1 \le p < \infty$. В пространстве W_p^{2n} $(1 \le p \le \infty)$ выделим (выпуклый центрально-симметричный) класс функций

$$Q_p^{2n} = \{f \in W_p^{2n}\colon\ \|\Delta^n f\|_p \le 1\}.$$

Обозначим через $\mathcal{L}_p$ множество линейных ограниченных операторов из $L_p(\mathbb{R}^m)$ в $L_p(\mathbb{R}^m)$ при $1 \le p < \infty$ и из $C(\mathbb{R}^m)$ в $C(\mathbb{R}^m)$ при $p = \infty$. Примем следующее обозначение норм операторов $T \in \mathcal{L}_p$:

$$\|T\|_{\mathcal{L}_p} = \|T\|_{L_p(\mathbb{R}^m)\to L_p(\mathbb{R}^m)}, \quad 1 \le p < \infty;$$
$$\|T\|_{\mathcal{L}_\infty} = \|T\|_{C(\mathbb{R}^m)\to C(\mathbb{R}^m)}, \quad p = \infty.$$

Рассмотрим величину уклонения оператора $T \in \mathcal{L}_p$ от оператора Δ^k на классе Q_p^{2n}

$$U(T)_p = \sup\{\|\Delta^k f - Tf\|_p\colon\ f \in Q_p^{2n}\}. \tag{1.1}$$

При $N > 0$ положим

$$E(N) = E(N)_p = E(N; k, n)_p = \inf\{U(T)_p\colon\ \|T\|_{\mathcal{L}_p} \le N\}. \tag{1.2}$$

Величину (1.2) (а точнее, функцию $E(N)$ переменного $N > 0$) называют величиной наилучшего приближения оператора Δ^k линейными ограниченными операторами на классе элементов Q_p^{2n}.

Задачу вычисления величины (1.2) и отыскания экстремального оператора, на котором достигается нижняя грань в (1.2), будем называть задачей (1.2). Эта задача является частным случаем задачи Стечкина о наилучшем приближении неограниченного оператора линейными ограниченными операторами на классе элементов [2].

Для произвольного неотрицательного числа δ положим

$$\omega(\delta) = \omega(\delta)_p = \sup\{\|\Delta^k f\|_p\colon\ f \in Q_p^{2n},\ \|f\|_p \le \delta\}; \tag{1.3}$$

эту функцию переменного $\delta > 0$ называют модулем непрерывности оператора Δ^k на классе Q_p^{2n}. Нетрудно убедиться (см. [3, § 4, формула (4.6)]), что для модуля непрерывности (1.3) справедливо равенство

$$\omega(\delta)_p = \mathcal{K}_p\ \delta^{(n-k)/n}, \quad \mathcal{K}_p = \omega(1), \tag{1.4}$$

где $\mathcal{K}_p$ — наилучшая (наименьшая) константа в неравенстве Колмогорова

$$\|\Delta^k f\|_p \le \mathcal{K}_p\, \|f\|_p^{(n-k)/n}\, \|\Delta^n f\|_p^{k/n}, \quad f \in W_p^{2n}(\mathbb{R}^m). \tag{1.5}$$

Рассмотрим также задачу восстановления значений k-й степени оператора Лапласа Δ^k на элементах класса Q_p^{2n} в предположении, что элементы класса Q_p^{2n} заданы с известной погрешностью $\delta > 0$. Восстановление осуществляется с помощью некоторого множества $\mathcal{R}_p$ операторов (однозначных отображений) пространства $L_p(\mathbb{R}^m)$ в $L_p(\mathbb{R}^m)$ при $1 \le p < \infty$ и пространства $C(\mathbb{R}^m)$ в $C(\mathbb{R}^m)$ при $p = \infty$. В качестве $\mathcal{R}_p$, как правило, берется одно из следующих двух множеств отображений: множество $\mathcal{O}_p$ всех однозначных отображений или множество $\mathcal{L}_p$ всех линейных ограниченных операторов. Для оператора $T \in \mathcal{R}_p$ и числа $\delta \ge 0$ полагаем

$$U_\delta(T)_p = \sup\bigl\{\|\Delta^k f - T\eta\|_p : \ f \in Q_p^{2n}, \ \eta \in L_p(\mathbb{R}^m), \ \|f-\eta\|_p \le \delta\bigr\}.$$

Тогда

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{R}_p) = \inf\{U_\delta(T)_p : \ T \in \mathcal{R}_p\} \tag{1.6}$$

есть величина ошибки оптимального восстановления оператора Δ^k с помощью множества методов восстановления $\mathcal{R}_p$ на элементах класса Q_p^{2n}, заданных с погрешностью δ.

Историю исследования задачи Стечкина и родственных экстремальных задач можно найти в обзорных работах [3] и [4]. Задача Стечкина довольно подробно изучена для операторов дифференцирования на классах функций одной переменной; на классах функций многих переменных она исследована лишь в некоторых случаях.

О. Кунчев [5] изучал неравенство Колмогорова (1.5) в случае $p = \infty, \ m \ge 2$ и получил для наилучшей константы $\mathcal{K}_\infty$ оценку

$$\mathcal{K}_\infty \le 2\sqrt{\frac{m}{(m+2)}}.$$

Как частный случай общих результатов С. Б. Стечкина справедливо следующее утверждение (см., например, [3]).

Теорема A. *При $m \ge 2, \ 1 \le p \le \infty$ для величин* (1.2), (1.3), (1.6) *справедливы следующие соотношения*:

$$\omega(\delta) \le \mathcal{E}_\delta(\mathcal{O}_p) \le \mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}_p) \le \inf\{E(N)_p + N\delta : \ N \ge 0\}, \quad \delta > 0;$$

$$E(N)_p \ge \sup\{\omega(\delta) - N\delta : \ \delta \ge 0\}, \quad N > 0.$$

Из теоремы A и равенства (1.4) следуют неравенства

$$\mathcal{K}_p \, \delta^{(n-k)/n} \le \mathcal{E}_\delta(\mathcal{R}) \le \inf\{E(N)_p + N\delta : \ N \ge 0\}, \tag{1.7}$$

$$E(N)_p \ge \frac{k}{n}\Bigl(\frac{n-k}{n}\Bigr)^{(n-k)/k} {\mathcal{K}_p}^{n/k} \, N^{-(n-k)/k}. \tag{1.8}$$

В работе автора [6, теоремы 1, 2] были получены двусторонние оценки для величин (1.2), (1.3) и (1.6) при $m \ge 2, \ k = 1, \ n = 2$.

Теорема B. *При $k = 1, \ n = 2$ для любых $m \ge 2$ и $1 \le p \le \infty$ справедливы неравенства*

$$1 \le \mathcal{K}_p \le 2\sqrt{\frac{m}{m+2}}\,; \tag{1.9}$$

$$\delta^{1/2} \le \omega(\delta)_p \le \mathcal{E}_\delta(\mathcal{R}_p) \le 2\sqrt{\frac{m}{m+2}}\,\delta^{1/2}, \quad \delta > 0;$$

$$\frac{1}{4N} \le E(N)_p \le \frac{m}{(m+2)N}\,, \quad N > 0.$$

В данной работе улучшены оценки величин (1.2), (1.3) и (1.6) сверху в случае $m = 2, 3$. А именно доказаны следующие два утверждения.

Теорема 1. *При* $k = 1,\ n = 2,\ m = 2,\ 1 \le p \le \infty$ *имеют место неравенства*

$$1 \le \mathcal{K}_p \le 2\sqrt{0.4955}\,;$$

$$\delta^{1/2} \le \omega(\delta)_p \le \mathcal{E}_\delta(\mathcal{R}_p) \le 2\sqrt{0.4955}\,\delta^{1/2}, \quad \delta > 0;$$

$$\frac{1}{4N} \le E(N)_p \le \frac{0.4955}{N}, \quad N > 0.$$

Теорема 2. *При* $k = 1,\ n = 2,\ m = 3,\ 1 \le p \le \infty$ *имеют место неравенства*

$$1 \le \mathcal{K}_p \le 2\sqrt{0.5995}\,;$$

$$\delta^{1/2} \le \omega(\delta)_p \le \mathcal{E}_\delta(\mathcal{R}_p) \le 2\sqrt{0.5995}\,\delta^{1/2}, \quad \delta > 0;$$

$$\frac{1}{4N} \le E(N)_p \le \frac{0.5995}{N}, \quad N > 0.$$

Первое неравенство в (1.9) дает оценку снизу для константы $\mathcal{K}_p$. В силу неравенств (1.7) и (1.8) для доказательства теорем 1 и 2 достаточно получить оценку сверху величины $E(N)_p$.

2. Оценка сверху

Для произвольной функции $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$ обозначим через $(J_{h,m}f)(X)$ среднее значение функции f на m-мерной сфере $S_{h,m}(X)$ радиуса h с центром в точке X

$$(J_{h,m}f)(X) = \frac{1}{\Omega_m h^{m-1}} \int\limits_{S_{h,m}(X)} f(Y)\,dL, \tag{2.1}$$

где Ω_m — площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^m$, а dL есть элемент сферы $S_{h,m}(X)$. В результате получаем линейный ограниченный оператор в $L_p(\mathbb{R}^m)$ при $1 \le p \le \infty$. Более того, воспользовавшись обобщенным неравенством Минковского, нетрудно убедиться, что

$$\|J_{h,m}f\|_p \le (J_{h,m}\|f\|_p)(0) = \|f\|_p, \quad f \in L_p(\mathbb{R}^m),$$

и, следовательно, для нормы оператора $J_{h,m}$ справедлива оценка

$$\|J_{h,m}\|_{L_p(\mathbb{R}^m)\to L_p(\mathbb{R}^m)} \le 1, \quad 1 \le p \le \infty. \tag{2.2}$$

Обозначим через $\mathscr{E}_m^{(2)}$ и $\mathscr{E}_m^{(4)}$ фундаментальные функции операторов Δ и Δ^2 соответственно, т. е. функции, обладающие свойствами

$$\varphi(0) = (\mathscr{E}_m^{(2)}, \Delta\varphi), \qquad \varphi(0) = (\mathscr{E}_m^{(4)}, \Delta^2\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}. \tag{2.3}$$

Фундаментальные функции имеют следующие зависящие от размерности пространства m явные представления (см. [1, гл. 1, § 7, п. 8]):

$$\mathscr{E}_m^{(2)}(X) = \mathfrak{E}_m^{(2)}(\|X\|), \qquad \mathscr{E}_m^{(4)}(X) = \mathfrak{E}_m^{(4)}(\|X\|), \tag{2.4}$$

в которых при $m = 2$

$$\mathfrak{E}_2^{(2)}(r) = \frac{1}{\Omega_2}(\ln r + 1), \qquad \mathfrak{E}_2^{(4)}(r) = \frac{1}{4\Omega_2} r^2 \ln r; \tag{2.5}$$

при $m = 4$

$$\mathfrak{E}_4^{(2)}(r) = -\frac{1}{2\Omega_4}\frac{1}{r^2}, \qquad \mathfrak{E}_4^{(4)}(r) = -\frac{1}{4\Omega_4}\ln r; \tag{2.6}$$

в случае $m = 3$ или $m \geq 5$

$$\mathfrak{E}_m^{(2)}(r) = -\frac{1}{(m-2)\Omega_m}\,\frac{1}{r^{m-2}}, \qquad \mathfrak{E}_m^{(4)}(r) = \frac{1}{2(m-2)(m-4)\Omega_m}\,\frac{1}{r^{m-4}}\,. \tag{2.7}$$

Ниже в леммах 1 и 2 будут выписаны функции $\mathscr{E}_{h,m}^{(2)}$ и $\mathscr{E}_{h,m}^{(4)}$ $(h > 0)$, обладающие свойствами

$$(J_{h,m}\varphi)(0) = (\mathscr{E}_{h,m}^{(2)}, \Delta\varphi), \qquad (J_{h,m}\varphi)(0) = (\mathscr{E}_{h,m}^{(4)}, \Delta^2\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}. \tag{2.8}$$

В случае $h = 0$ положим

$$\mathscr{E}_{0,m}^{(2)} = \mathscr{E}_m^{(2)}, \qquad \mathscr{E}_{0,m}^{(4)} = \mathscr{E}_m^{(4)}.$$

Лемма 1. *При $m \geq 2$ функция $\mathscr{E}_{h,m}^{(2)}$, определенная соотношениями*

$$\mathscr{E}_{h,m}^{(2)}(X) = \mathfrak{E}_{h,m}^{(2)}(r) = \begin{cases} 0, & r \leq h, \\ \mathfrak{E}_m^{(2)}(r) - \mathfrak{E}_m^{(2)}(h), & r > h, \quad r = \|X\|, \end{cases}$$

удовлетворяет (первому) условию (2.8).

Введем обозначения

$$C_1 = C_1(h,m) = \frac{\mathfrak{E}_m^{(2)}(h)}{2m}, \qquad C_2 = C_2(h,m) = \frac{m\,(\mathfrak{E}_m^{(4)})'(h) - h\,\mathfrak{E}_m^{(2)}(h)}{m\,(\mathfrak{E}_m^{(2)})'(h)}; \tag{2.9}$$

исходя из явного вида (2.5)–(2.7) функций $\mathfrak{E}_m^{(2)}, \mathfrak{E}_m^{(4)}$, нетрудно убедиться, что на самом деле

$$C_2 = -\frac{h^2}{2m}. \tag{2.10}$$

Лемма 2. *Для $m \geq 2$ функция $\mathscr{E}_{h,m}^{(4)}$, определенная формулами*

$$\mathscr{E}_{h,m}^{(4)}(X) = \mathfrak{E}_{h,m}^{(4)}(r) = \begin{cases} \mathfrak{E}_m^{(4)}(h) - C_1\,h^2 - C_2\,\mathfrak{E}_m^{(2)}(h), & 0 \leq r \leq h, \\ \mathfrak{E}_m^{(4)}(r) - C_1\,r^2 - C_2\,\mathfrak{E}_m^{(2)}(r), & r > h, \quad r = \|X\| \end{cases}$$

с константами (2.9), (2.10), *удовлетворяет (второму) условию* (2.8).

Подробные доказательства лемм 1 и 2 приведены в работе автора [6, леммы 1 и 2].

При $h > 0$, $\gamma > 1$ с помощью оператора (2.1) определим (линейный ограниченный в $L_p(\mathbb{R}^m)$, $1 \leq p \leq \infty$) оператор $T_{h,\gamma,m}$ формулой

$$(T_{h,\gamma,m}f)(X) = Af(X) - B(J_{h,m}f)(X) - C(J_{\gamma h,m}f)(X), \tag{2.11}$$

где $h > 0$, $\gamma > 1$ и параметры A, B, C удовлетворяют условиям

$$A = B + C, \qquad 2m + Bh^2 + C(\gamma h)^2 = 0. \tag{2.12}$$

Соотношения (2.12) получены из условия совпадения оператора $T_{h,\gamma,m}$ с оператором Лапласа Δ на ядре второй степени оператора Лапласа Δ^2. С помощью оператора $T_{h,\gamma,m}$ ниже будет получена оценка сверху величины наилучшего приближения (1.2). Неравенство (2.2) дает следующую оценку нормы оператора:

$$\|T_{h,\gamma,m}\|_{\mathcal{L}_p} \leq |A| + |B| + |C|. \tag{2.13}$$

Наша ближайшая цель — получить представление разности $\Delta f - T_{h,\gamma,m}f$ через $\Delta^2 f$ для функций f из класса W_p^4; вначале это будет сделано на множестве основных функций $\mathcal{D}$.

Лемма 3. *Для оператора, определенного соотношением* (2.11), *при любом* $h>0$ *на множестве основных функций* $\varphi\in\mathcal{D}$ *имеет место равенство*

$$(\Delta\varphi)(X)-(T_{h,\gamma,m}\varphi)(X)=\int\limits_{\|Y\|\le\gamma h}\psi_{h,\gamma,m}(Y)\ \Delta^2\varphi(X+Y)\,dY, \tag{2.14}$$

в котором

$$\psi_{h,\gamma,m}(Y)=u_{h,\gamma,m}\left(\frac{\|Y\|}{h}\right), \tag{2.15}$$

и функция $u_{h,\gamma,m}$ (*одного переменного*) *определена соотношениями*
в случае $m=2$

$$u_{h,\gamma,2}(t)=\frac{1}{\Omega_2 h}\begin{cases}\ln t-\dfrac{b+c}{4}\,t^2\ln t+\dfrac{b+c\,(1+\ln\gamma)}{4}\,t^2+1+\dfrac{c\gamma^2}{4}\ln\gamma, & 0<t\le 1,\\[2mm] \left(1+\dfrac{b}{4}\right)\ln t-\dfrac{c}{4}\,t^2\ln t+\dfrac{c\,(1+\ln\gamma)}{4}\,t^2+\dfrac{c\gamma^2}{4}(\ln\gamma-1), & 1<t\le\gamma\,;\end{cases} \tag{2.16}$$

в случае $m=3$

$$u_{h,\gamma,3}(t)=\frac{-1}{\Omega_3 h}\begin{cases}\dfrac{1}{t}+\dfrac{b+c}{2}\,t-\dfrac{b\gamma+c}{6\gamma}\,t^2-\dfrac{b+c\gamma}{2}, & 0<t\le 1,\\[2mm] \dfrac{c\gamma^2}{6}\,\dfrac{1}{t}+\dfrac{c}{2}\,t-\dfrac{c}{6\gamma}\,t^2-\dfrac{c\gamma}{2}, & 1<t\le\gamma,\end{cases} \tag{2.17}$$

где параметры b *и* c *связаны с коэффициентами* B *и* C *оператора* (2.11) *следующим образом*:

$$b=Bh^2,\qquad c=Ch^2. \tag{2.18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим вначале равенство (2.14) в точке $X=0$. Имеем

$$(\Delta\varphi)(0)-(T_{h,\gamma,m}\varphi)(0)=(\Delta\varphi)(0)-A\varphi(0)+B(J_{h,m}\varphi)(0)+C(J_{\gamma h,m}\varphi)(0).$$

Функции (2.4) являются фундаментальными функциями операторов Δ и Δ^2 соответственно, т. е. обладают свойствами (2.3). Как следствие первой формулы (2.3)

$$\Delta\varphi(0)=(\mathscr{E}^{(2)}_m,\Delta^2\varphi),\quad \varphi\in\mathcal{D}. \tag{2.19}$$

С помощью формул (2.3), (2.19) и леммы 2 получаем для любой функции $\varphi\in\mathcal{D}$ соотношения

$$\begin{aligned}(\Delta\varphi)(0)-(T_{h,\gamma,m}\varphi)(0)&=(\mathscr{E}^{(2)}_m,\Delta^2\varphi)-A(\mathscr{E}^{(4)}_m,\Delta^2\varphi)+B(\mathscr{E}^{(4)}_{h,m},\Delta^2\varphi)+C(\mathscr{E}^{(4)}_{\gamma h,m},\Delta^2\varphi)\\ &=\int\limits_{\mathbb{R}^m}\widetilde{\psi}_{h,\gamma,m}(Y)\,(\Delta^2\varphi)(Y)\,dY,\end{aligned} \tag{2.20}$$

где

$$\widetilde{\psi}_{h,\gamma,m}=\mathscr{E}^{(2)}_m-A\mathscr{E}^{(4)}_m+B\mathscr{E}^{(4)}_{h,m}+C\mathscr{E}^{(4)}_{\gamma h,m}.$$

Рассмотрим функцию $\overline{\psi}_{h,\gamma,m}=(BC_1(h,m)+CC_1(\gamma h,m))r^2$; она, очевидно, удовлетворяет уравнению $\Delta^2\overline{\psi}_{h,\gamma,m}=0$. Поэтому в соотношении (2.20) можно заменить функцию $\widetilde{\psi}_{h,\gamma,m}$ на функцию $\psi_{h,\gamma,m}=\widetilde{\psi}_{h,\gamma,m}+\overline{\psi}_{h,\gamma,m}$. В результате получаем формулу

$$(\Delta\varphi)(0)-(T_{h,\gamma,m}\varphi)(0)=\int\limits_{\mathbb{R}^m}\psi_{h,\gamma,m}(Y)\,(\Delta^2\varphi)(Y)\,dY,\quad \varphi\in\mathcal{D}, \tag{2.21}$$

с функцией $\psi_{h,\gamma,m}$, определенной соотношениями (2.15)–(2.17) в шаре $r=\|Y\|\le\gamma h$ и имеющей нулевые значения вне этого шара: $\psi_{h,\gamma,m}(Y)=0,\ \|Y\|\ge\gamma h$.

Пусть $\overline{X}\in\mathbb{R}^m$, $\varphi\in\mathcal{D}$. Рассмотрим функцию $\overline{\varphi}(X)=\varphi(X+\overline{X})$ точки $X\in\mathbb{R}^m$; ясно, что $\overline{\varphi}\in\mathcal{D}$. Подставив функцию $\overline{\varphi}$ в формулу (2.21), получаем формулу (2.14) для функции φ в точке $\overline{X}$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 4. *Для оператора, определенного соотношением* (2.11), *при любом* $h > 0$, $\gamma > 1$ *на множестве* W_p^4 *имеет место равенство*

$$(\Delta f)(X) - (T_{h,\gamma,m} f)(X) = \int\limits_{\|Y\| \le \gamma h} \psi_{h,\gamma,m}(Y)\ \Delta^2 f(X+Y)\ dY, \quad f \in W_p^4, \tag{2.22}$$

в котором функция $\psi_{h,\gamma,m}$ *определена в* (2.15).

Доказательство. Для основных функций $\varphi \in \mathcal{D}$ равенство (2.22) доказано в лемме 3. Распространим это равенство на функции $f \in W_p^4$ по схеме Соболева. Введем функцию

$$\Psi(X) = (T_{h,\gamma,m} f)(X) + \int\limits_{\|Y\| \le \gamma h} \psi_{h,\gamma,m}(Y)\ \Delta^2 f(X+Y)\, dY.$$

Убедимся, что $\Psi = \Delta f$, т. е. выполняется свойство

$$(f, \Delta\varphi) = (\Psi, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Согласно формуле (2.14) для функций $\varphi \in \mathcal{D}$ справедливо представление

$$\Delta\varphi = T_{h,\gamma,m}\varphi + V\Delta^2\varphi,$$

где V есть оператор свертки

$$(Vg)(X) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \psi(Y)\, g(X+Y)\ dY$$

с функцией $\psi = \psi_{h,\gamma,m}$, которая в шаре $B_{\gamma h} = \{Y \in \mathbb{R}^m :\ \|Y\| \le \gamma h\}$ определена формулами (2.15)–(2.17), а вне шара $B_{\gamma h}$ имеет нулевые значения. Следовательно,

$$(f, \Delta\varphi) = (f, T_{h,\gamma,m}\varphi) + (f, V\Delta^2\varphi).$$

С помощью смены порядка интегрирования и подходящей замены переменных убеждаемся, что справедливы соотношения

$$(f, T_{h,\gamma,m}\varphi) = (T_{h,\gamma,m} f, \varphi), \qquad (f, V\Delta^2\varphi) = (V\Delta^2 f, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Таким образом, доказано, что

$$(f, \Delta\varphi) = (T_{h,\gamma,m} f + V\Delta^2 f, \varphi) = (\Psi, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Но это и означает, что $\Delta f = \Psi$, т. е. имеет место утверждение (2.22). Лемма 4 доказана. □

Оператор $T_{h,\gamma,m}$, определенный равенством (2.11), однозначно задается параметрами A, B, C, γ, h, m. Условия (2.12) выражают параметры A и B через оставшиеся. С учетом соотношений (2.12), (2.18) оценка (2.13) принимает вид

$$\|T_{h,\gamma,m}\|_{\mathcal{L}_p} \le \frac{|c - c\gamma^2 - 2m| + |2m + c\gamma^2| + |c|}{h^2}.$$

Зафиксируем величину N и наложим еще одно условие

$$\frac{|c - c\gamma^2 - 2m| + |2m + c\gamma^2| + |c|}{h^2} = N. \tag{2.23}$$

В результате при конкретном m остается всего два свободных параметра: c и γ. Положим

$$\gamma = 5/3\,, \quad c = -\frac{2340\ln(7/9) + 576}{392\ln(7/9) - 392 + 1233\ln(5/3)} \quad \text{при} \quad m = 2; \tag{2.24}$$

$$\gamma = 9/5, \quad c = 0.02 \quad \text{при} \quad m = 3. \tag{2.25}$$

С этого момента будем считать, что параметры оператора (2.11) выбраны, исходя из перечисленных условий.

Лемма 5. *Для величины уклонения*

$$U(T_{h,\gamma,m})_p = \sup\{\|\Delta f - T_{h,\gamma,m} f\|_p : \ f \in Q_p^4\}$$

оператора $T_{h,\gamma,m}$ *от оператора Лапласа на классе* Q_p^4 *справедливы следующие оценки:*
в случае $m = 2$

$$U(T_{h,5/3,2})_p \le \frac{0.4955}{N}, \quad N > 0; \tag{2.26}$$

в случае $m = 3$

$$U(T_{h,9/5,3})_p \le \frac{0.5995}{N}, \quad N > 0. \tag{2.27}$$

Доказательство. Соотношение (2.22) означает, что разность $\Delta f - T_{h,\gamma,m} f$ является сверткой функции $\Delta^2 f$ с ядром $\psi_{h,\gamma,m}$, а потому для величины уклонения (1.1) в случае оператора (2.11) справедлива оценка

$$U(T_{h,\gamma,m}) \le \|\psi_{h,\gamma,m}\|_{L_1(\mathbb{R}^m)}. \tag{2.28}$$

Соотношение (2.28) показывает, что естественно выбирать параметры γ и c так, чтобы они доставляли минимальное значение величины $\|\psi_{h,\gamma,m}\|_{L_1(\mathbb{R}^m)}$ при условии (2.23). Значения (2.24) и (2.25) параметров γ и c находятся вблизи точек минимума. При таком выборе параметров имеем

$$\|\psi_{h,\gamma,m}\|_{L_1(\mathbb{R}^m)} = \Omega_m \int\limits_{0<r\le d_m h} \left(-u_{h,\gamma,m}\left(\frac{r}{h}\right)\right) r^{m-1} dr + \Omega_m \int\limits_{d_m h<r\le \gamma h} u_{h,\gamma,m}\left(\frac{r}{h}\right) r^{m-1} dr, \tag{2.29}$$

где $d_2 = 7/9$, $d_3 = 0.8884623138164$ — точки перемены знака функции $u_{h,\gamma,m}$; напомним, что Ω_m — площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^m$, значит, $\Omega_2 = 2\pi$, $\Omega_3 = 4\pi$. Используя соотношение (2.23), находим $h^2 = \big(|c - c\gamma^2 - 2m| + |2m + c\gamma^2| + |c|\big) N^{-1}$. Подставляя это значение h^2 в (2.29), получаем оценки сверху (2.26) и (2.27) для величины уклонения оператора $T_{h,\gamma,m}$ от оператора Лапласа. Лемма доказана. □

Из определения (1.2) и леммы 5 следуют сформулированные в теоремах 1 и 2 оценки сверху величины $E(N)_p$. Эти оценки, первое неравенство (1.9) и соотношения (1.7), (1.8) дают нужные двусторонние оценки константы $\mathcal{K}_p$ в неравенстве Колмогорова (1.5) и величины (1.6). Теоремы 1 и 2 доказаны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шилов Г.Е.** Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука, 1965. 328 с.
2. **Стечкин С.Б.** Наилучшее приближение линейных операторов // Мат. заметки. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 137–148.
3. **Арестов В.В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 6 (312). С. 89–124.
4. **Арестов В.В., Габушин В.Н.** Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // Изв. вузов. Математика. 1995. № 11. С. 42–68.
5. **Kounchev O.** Extremizers for the multivariate Landau–Kolmogorov inequality // Multivariate approximation. Recent trends and results. Berlin: Akademie Verlag, 1997. Vol. 101. P. 123–132.
6. **Кошелев А.А.** Наилучшее приближение оператора Лапласа линейными ограниченными операторами в пространстве L_p // Изв. вузов. Математика. 2011. № 6. С. 63–74.

Кошелев Антон Александрович
аспирант
Уральский федеральный университет
e-mail: aakoshelev@gmail.com

Поступила 31.10.2010

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 3 2011

УДК 517.518.86 + 519.147

ВИД ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧЕ ДЕЛЬСАРТА ОЦЕНКИ СВЕРХУ КОНТАКТНОГО ЧИСЛА ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА[1]

Н. А. Куклин

Рассмотрена экстремальная задача для непрерывных неположительных на отрезке функций, представимых рядами по многочленам Лежандра с неотрицательными коэффициентами, возникающая из схемы Дельсарта оценки сверху контактного числа трехмерного евклидова пространства. Доказано, что все экстремальные функции этой задачи являются алгебраическими многочленами, причем степень d каждого из них удовлетворяет неравенствам $27 \leqslant d < 1450$.

Ключевые слова: схема Дельсарта, бесконечномерное линейное программирование, многочлены Гегенбауэра, контактные числа.

N. A. Kuklin. The form of an extremal function in the Delsarte problem of finding an upper bound for the kissing number in the three-dimensional space.

We consider an extremal problem for continuous functions that are nonpositive on a closed interval and can be represented by series in Legendre polynomials with nonnegative coefficients. This problem arises from the Delsarte method of finding an upper bound for the kissing number in the three-dimensional Euclidean space. We prove that all extremal functions in this problem are algebraic polynomials and the degree d of each polynomial satisfies the inequalities $27 \leqslant d < 1450$.

Keywords: Delsarte method, infinite-dimensional linear programming, Gegenbauer polynomials, kissing numbers.

1. Введение

В работе изучается задача бесконечномерного линейного программирования, возникающая из схемы Дельсарта оценки сверху контактного числа трехмерного евклидова пространства. Схема Дельсарта появилась в исследованиях Ф. Дельсарта [17; 3] границ упаковок в некоторых метрических пространствах. В дальнейшем эта схема была развита и успешно применена в работах Г. А. Кабатянского и В. И. Левенштейна [4], Э. Одлыжко и Н. Слоэна [19], В. И. Левенштейна [7; 6], В. М. Сидельникова [12], О. Р. Мусина [8–10], а также других авторов. При применении схемы Дельсарта возникает задача бесконечномерного линейного программирования (которую мы будем называть задачей Дельсарта), ее решение доставляет оценку сверху контактного числа евклидова пространства $\mathbb{R}^m$. Изложение этих результатов и другая родственная богатая информация имеются в монографии Дж. Конвея и Н. Слоэна [5]. Также следует сказать о работе В. А. Юдина [15], в которой был разработан аналог схемы Дельсарта для изучения достаточно общей задачи минимизации функции фиксированного числа точек на единичной сфере евклидова пространства $\mathbb{R}^m$.

Контактным числом пространства $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$, называют максимальное число шаров единичного радиуса с непересекающимися внутренностями, касающихся единичного шара пространства; это число в дальнейшем будет обозначаться через τ_m. В настоящее время точное значение τ_m известно лишь при $m = 2, 3, 4, 8, 24$, а именно $\tau_2 = 6$ (очевидный случай), $\tau_3 = 12$ (Б. Л. ван дер Варден, К. Шютте [20]), $\tau_4 = 24$ (О. Р. Мусин [8;10]), $\tau_8 = 240$, $\tau_{24} = 196560$ (В. И. Левенштейн [7]; Э. Одлыжко, Н. Слоэн [19]); в остальных случаях известны лишь оценки снизу и сверху величины τ_m, например (верхняя оценка — см. [18]), $40 \leqslant \tau_5 \leqslant 44$.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00462).

Конкретные конструкции расположения шаров дают оценки снизу величины τ_m (см. [5]). В данной работе оценки снизу для τ_m не рассматриваются. Оценку сверху для τ_m дает подход Дельсарта, который мы приведем сейчас в несколько измененной, удобной для нас форме.

Обозначим через l_1 банахово пространство суммируемых последовательностей вещественных чисел. Нормой в этом пространстве является

$$\|w\| = \sum_{k=1}^{\infty} |w_k|, \quad w = \{w_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_1.$$

Пусть $P_k^{(m)}$, $k = 1, 2, 3 \ldots$, есть система ультрасферических многочленов (многочленов Гегенбауэра; см., например, [13, гл. 7, § 6]), ортогональных на $[-1, 1]$ с весом $(1-t^2)^{(m-3)/2}$, нормированных условием $P_k^{(m)}(1) = 1$. Определим нелинейный оператор $A\colon l_1 \to C[-1, 1]$ (пространство непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций) по формуле

$$(Aw)(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} w_k P_k^{(m)}(t), \quad t \in [-1, 1].$$

Для произвольного множества натуральных чисел $\mathcal{D} \subset \mathbb{N}$ введем множество $\mathcal{W}_m(\mathcal{D}) \subset l_1$ суммируемых последовательностей w, обладающих следующими тремя свойствами:

(1) $w_k \geqslant 0$ для любых k;
(2) $w_k = 0$ при $k \notin \mathcal{D}$;
(3) $(Aw)(t) \leqslant 0$ для любых $t \in [-1,\, 1/2]$.

Элементы множества $\mathcal{W}_m(\mathcal{D})$ (при некоторых m и $\mathcal{D}$) будем в дальнейшем называть допустимыми, причем не будем различать последовательности $w \in \mathcal{W}_m(\mathcal{D})$ и непрерывные функции Aw. На множестве $\mathcal{W}_m(\mathcal{D})$ рассмотрим задачу о вычислении величины

$$u_m(\mathcal{D}) = 1 + \inf_{w \in \mathcal{W}_m(\mathcal{D})} \|w\|. \tag{1.1}$$

Как легко видеть, задача (1.1) является задачей бесконечномерного линейного программирования (см., например, [16]), так как для элементов $w \in \mathcal{W}_m(\mathcal{D})$ выполняются равенства

$$\|w\| = \sum_{k=1}^{\infty} |w_k| = \sum_{k=1}^{\infty} w_k = (Aw)(1) - 1.$$

В случае, когда множество $\mathcal{W}_m(\mathcal{D})$ пусто, считаем $u_m(\mathcal{D}) = \infty$. Задачу (1.1) мы называем задачей Дельсарта.

Введем множество экстремальных элементов $\mathcal{W}_m^*(\mathcal{D}) \subset \mathcal{W}_m(\mathcal{D})$, состоящее из тех допустимых последовательностей w, для которых $1 + \|w\| = u_m(\mathcal{D})$. Обозначим $u_m = u_m(\mathbb{N})$. Хорошо известен следующий результат (см., например, [1, теорема A]).

Теорема 1. *При любом $m \geqslant 2$ выполнена оценка $\tau_m \leqslant \lfloor u_m \rfloor$.*

О числах u_m известно гораздо больше, чем о контактных числах τ_m. При $m = 2, 8, 24$ величины u_m независимо нашли В. И. Левенштейн [7] и Э. Одлыжко, Н. Слоэн [19]. В этих случаях (и, похоже, только в этих) числа u_m оказались целыми и совпали с известными нижними оценками для контактных чисел, т. е. $\tau_m = u_m$. В случае $m = 4$ величину $u_4 = 25.55\ldots$ нашли В. В. Арестов и А. Г. Бабенко [1]. Как видно, в этом случае классическая схема Дельсарта не дает оценки $\tau_4 \leq 24$, совпадающей с известной оценкой снизу $24 \leq \tau_4$. Позже Д. В. Штром [14] нашел величины u_m для следующих размерностей:

$$5 \leqslant m \leqslant 7, \qquad 9 \leqslant m \leqslant 23, \qquad 25 \leqslant m \leqslant 146, \qquad 148 \leqslant m \leqslant 156, \qquad m = 161.$$

Во всех перечисленных в предыдущем абзаце случаях была найдена экстремальная последовательность, а для $m \neq 2, 8, 24$ доказано, что она единственна. Во всех случаях последовательность состоит из конечного числа отличных от нуля чисел. Другими словами, экстремальной функцией задачи (1.1) при $\mathcal{D} = \mathbb{N}$ и указанных m является алгебраический многочлен, причем его степень растет с ростом размерности.

В данной работе исследуется задача (1.1) при $m = 3$, $\mathcal{D} = \mathbb{N}$. В настоящее время значение величины u_3 остается неизвестным. Здесь получены близкие двусторонние оценки

$$13.158225715299274 \leqslant u_3 \leqslant 13.158225715311796.$$

Кроме того, доказано, что все экстремальные функции являются многочленами, причем степень d любого из них удовлетворяет неравенствам $27 \leqslant d < 1450$. При этом для доказательства используются отличные от [1; 14] методы — без отыскания экстремальной функции.

2. Двойственная задача Дельсарта

В работе [1] В. В. Арестов и А. Г. Бабенко построили двойственную к (1.1) задачу. Для ее формулировки рассмотрим банахово пространство $rca = rca[-1, 1/2]$ (см. [2, гл. 4, § 2, определение 17]) вещественнозначных регулярных счетно-аддитивных функций множества, определенных на σ-алгебре $\mathcal{B}$ борелевских множеств отрезка $[-1, 1/2]$. Элементы этого пространства в дальнейшем будем называть мерами. Нормой в этом пространстве является

$$\|\mu\| = \max_{B \in \mathcal{B}} \mu B - \min_{B \in \mathcal{B}} \mu B, \quad \mu \in rca.$$

Для произвольного множества натуральных чисел $\mathcal{D} \subset \mathbb{N}$ введем множество $\mathcal{M}_m(\mathcal{D}) \subset rca$ мер μ, обладающих следующими свойствами:

(1) мера μ неотрицательна, т. е. $\mu B \geqslant 0$ для любых множеств $B \in \mathcal{B}$;

(2) величина

$$\mu_k = \int_{-1}^{1/2} P_k^{(m)}(t)\, d\mu(t)$$

(здесь и далее интеграл понимается как интеграл Лебега по мере) удовлетворяет неравенству $\mu_k \geqslant -1$ для всех $k \in \mathcal{D}$.

Элементы множества $\mathcal{M}_m(\mathcal{D})$ (при некоторых m и $\mathcal{D}$) будем в дальнейшем называть допустимыми мерами. На множестве $\mathcal{M}_m(\mathcal{D})$ рассмотрим задачу о вычислении величины

$$v_m(\mathcal{D}) = 1 + \sup_{\mu \in \mathcal{M}_m(\mathcal{D})} \|\mu\|. \tag{2.1}$$

Отметим, что множество $\mathcal{M}_m(\mathcal{D})$ всегда содержит нулевую меру. Введем множество экстремальных мер $\mathcal{M}_m^*(\mathcal{D}) \subset \mathcal{M}_m(\mathcal{D})$, состоящее из тех допустимых мер μ, для которых выполняется равенство $1 + \|\mu\| = v_m(\mathcal{D})$.

Для любой допустимой меры $\mu \in \mathcal{M}_m(\mathcal{D})$ имеем

$$\|\mu\| = \max_{B \in \mathcal{B}} \mu B - \min_{B \in \mathcal{B}} \mu B = \mu \big[-1, 1/2 \big],$$

поэтому задача (2.1) также является задачей бесконечномерного линейного программирования. Эта задача является классической двойственной задачей (см., например, [16]) для задачи (1.1). Следующее утверждение (см. [1, теорема 2.1]) устанавливает двойственность при $\mathcal{D} = \mathbb{N}$.

Утверждение 1 (сильная теорема двойственности). *Пусть $m \geqslant 2$. Тогда*

(1) *множества $\mathcal{W}_m^*(\mathbb{N})$ и $\mathcal{M}_m^*(\mathbb{N})$ не пусты;*
(2) $v_m(\mathbb{N}) = u_m(\mathbb{N})$.

Отметим, что в работе [1] задача (2.1) формулируется в терминах функций ограниченной вариации в отличие от мер. Эти два подхода эквивалентны, однако нам удобнее рассматривать задачу в терминах мер.

Нам также потребуется слабый аналог утверждения 1 для произвольных $\mathcal{D} \subset \mathbb{N}$.

Утверждение 2 (слабая теорема двойственности). *Для любых $m \geqslant 2$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{N}$, $w \in \mathcal{W}_m(\mathcal{D})$, $\mu \in \mathcal{M}_m(\mathcal{D})$ имеют место неравенства*

$$1 \leqslant \|\mu\| + 1 \leqslant v_m(\mathcal{D}) \leqslant u_m(\mathcal{D}) \leqslant \|w\| + 1.$$

Доказательство. Первое неравенство следует из того, что нулевая мера принадлежит множеству $\mathcal{M}_m(\mathcal{D})$. Неравенство $v_m(\mathcal{D}) \leqslant u_m(\mathcal{D})$ очевидно, если множество $\mathcal{W}_m(\mathcal{D})$ пусто. Иначе для любых $w \in \mathcal{W}_m(\mathcal{D})$, $\mu \in \mathcal{M}_m(\mathcal{D})$ выполняются неравенства

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} w_k P_k^{(m)}(t) \leqslant 0, \quad t \in [-1,\, 1/2]; \qquad 1 + \int\limits_{-1}^{1/2} P_k^{(m)}(t)\, d\mu(t) \geqslant 0, \quad k \in \mathcal{D}.$$

Из неотрицательности μ и w, а также из того, что $w_k = 0$ при $k \in \mathcal{D}$, получаем

$$\int\limits_{-1}^{1/2} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} w_k P_k^{(m)}(t)\right) d\mu(t) = \|\mu\| + \int\limits_{-1}^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} w_k P_k^{(m)}(t)\right) d\mu(t) \leqslant 0, \tag{2.2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k \left(1 + \int\limits_{-1}^{1/2} P_k^{(m)}(t)\, d\mu(t)\right) = \|w\| + \sum_{k=1}^{\infty} w_k \left(\int\limits_{-1}^{1/2} P_k^{(m)}(t)\, d\mu(t)\right) \geqslant 0. \tag{2.3}$$

Но из теоремы Леви (см., например, [2, гл. 3, § 6, следствие 17]) следует равенство

$$\int\limits_{-1}^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} w_k P_k^{(m)}(t)\right) d\mu(t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k \left(\int\limits_{-1}^{1/2} P_k^{(m)}(t)\, d\mu(t)\right),$$

а значит, $\|\mu\| \leqslant \|w\|$. Для завершения доказательства остается взять супремум и инфимум по соответствующим множествам. □

Носителем неотрицательной меры $\mu \in rca$ назовем множество $\operatorname{supp}(\mu) \subset [-1,\, 1/2]$ такое, что для любой открытой окрестности U любой точки $t \in \operatorname{supp}(\mu)$ выполняется строгое неравенство $\mu U > 0$. Отметим, что носитель меры — замкнутое множество, так как в открытой окрестности U предельной точки содержится точка из $\operatorname{supp}(\mu)$, для которой множество U также является открытой окрестностью.

Следующее утверждение позволяет определить вид экстремальных элементов задач (1.1) и (2.1) при $\mathcal{D} = \mathbb{N}$.

Утверждение 3 (условия дополняющей нежесткости). *Пусть $m \geqslant 2$.*

(1) *Пусть $k \geqslant 1$. Если для некоторой экстремальной меры $\mu \in \mathcal{M}_m^*(\mathbb{N})$ выполняется строгое неравенство $\mu_k > -1$, то для любой экстремальной последовательности $w = \{w_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{W}_m^*(\mathbb{N})$ имеет место равенство $w_k = 0$.*

(2) *Для любых экстремальных $\mu \in \mathcal{M}_m^*(\mathbb{N})$ и $w \in \mathcal{W}_m^*(\mathbb{N})$ в каждой точке $t \in \operatorname{supp}(\mu)$ выполняется равенство $(Aw)(t) = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $w_k > 0$, $k \geqslant 1$, то в (2.3) получаем строгое неравенство (> 0), а значит, $\|\mu\| < \|w\|$. Но из утверждения 1 следует, что $\|\mu\| = \|w\|$. Полученное противоречие доказывает п. (1) утверждения.

Аналогично, если неравенство $(Aw)(t) < 0$ выполняется для некоторой точки $t \in \operatorname{supp}(\mu)$, тогда (в силу непрерывности Aw) найдется окрестность точки t, в которой функция Aw отрицательна, а значит, в (2.2) получаем строгое неравенство (< 0). □

Условия дополняющей нежесткости из утверждения 3 являются необходимыми условиями экстремума. Используя их, авторы работ [1; 14] получают систему алгебраических уравнений, среди решений которой находят допустимое. Однако такой способ оказался трудно реализуемым в задаче (1.1) при $m = 3$, поскольку система получается сложной, и пока не удается решить ее за разумное время. Поэтому мы пойдем другим (отличным от [1; 14]) путем, а именно приведем результаты численного решения задач (1.1) и (2.1), дающие близкие оценки, а затем докажем, что вид экстремальной функции близок к виду функции, полученной численно.

3. Численное решение при $m = 3$

В этом и следующем разделах мы рассматриваем только случай $m = 3$, поэтому будем опускать индекс 3 во всех обозначениях.

Рассмотрим последовательность $h = \{h_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_1$, имеющую лишь конечное число ненулевых членов, номера и значения которых сведены в таблицу

k	h_k	k	h_k
1	2.704840163198543	8	0.138042556971337
2	3.520368272735729	9	0.141559579643381
3	3.128067045970863	10	0.051682533503094
4	1.868435788223698	20	0.000540106659359
5	0.603743051598279	27	0.000946616807513

Используя теорему Штурма (см., например, [11, гл. 1, § 4, п. 2]), можно показать, что у многочлена Ah есть только один ноль на вещественной прямой. Причем

$$(Ah)(1/2) = -\frac{1652501846132909}{112589990684262400000000000000} < 0, \qquad (Ah)(1) = 13.158225715311796 > 0.$$

Таким образом, единственный ноль многочлена Ah лежит вне отрезка $[-1, 1/2]$, и многочлен отрицателен на этом отрезке. Следовательно, $h \in \mathcal{W}(\mathbb{N})$.

Определим дискретную меру $\nu\{t\} = \sum_{i=1}^{6} \nu\{t_i\}\delta(t - t_i)$, сосредоточенную в шести точках $\{t_i\}_{i=1}^{6}$, и дискретную меру λ, сосредоточенную в пяти точках $\{t'_i\}_{i=1}^{5}$:

i	t_i	$\nu\{t_i\}$
1	−0.997856164173776	0.358606855326221
2	−0.896887996891447	0.978348201722381
3	−0.882372276171577	0.287128417783458
4	−0.477111538465444	3.080891266963425
5	−0.191085272584891	2.558346717984069
6	0.5	4.894904255519720

t'_i	$\lambda\{t'_i\}$
−0.999598950690822	0.343000254864754
−0.894908078943777	1.277829532900311
−0.477696943689031	3.077643538334013
−0.191403960476833	2.564834779022896
0.5	4.895006230110172

Утверждение 4. *Для любого замкнутого множества $Q \subset (-1, 1)$ справедлива оценка*

$$\max_{t\in Q} |P_k(t)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi k}}(1 - t_{\max}^2)^{-1/4}; \quad t_{\max} = \max_{t\in Q} |t|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для многочленов Лежандра порядка k при любом $k \geqslant 1$ в каждой точке $t \in (-1, 1)$ справедлива оценка (теорема Стилтьеса — Бернштейна; см., например, [13, гл. 4, § 3, теорема 4.3])

$$|P_k(t)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi k}}(1-t^2)^{-1/4}.$$

Функция $(1-t^2)^{-1/4}$ возрастает с ростом $|t|$. $\square$

Следствие 1. *Меры ν и λ являются допустимыми для $\mathcal{D} = \mathbb{N}$ и $\mathcal{D} = \mathbb{N} \setminus \{27\}$ соответственно, т. е.*

(1) $\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{N})$;
(2) $\lambda \in \mathcal{M}(\mathbb{N} \setminus \{27\})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\nu_k \geqslant -1$. Пользуясь утверждением 4, проведем оценку

$$|\nu_k| = \left| \int_{-1}^{1/2} P_k(t)\, d\nu(t) \right| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant 6} |P_k(t_i)|\; \|\nu\| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi k}}\,(1-t_1^2)^{-1/4}\,\|\nu\|\,,$$

из которой следует, что неравенство $|\nu_k| \leqslant 1$ выполняется при $k \geqslant 1438$. Для остальных k это неравенство проверяется непосредственными вычислениями. Утверждение (1) доказано.

Теперь докажем неравенство $\lambda_k \geqslant -1$ при $k \in \mathbb{N} \setminus \{27\}$. Из оценки

$$|\lambda_k| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant 5} |P_k(t_i')|\; \|\lambda\| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi k}}\,(1-(t_1')^2)^{-1/4}\,\|\lambda\|$$

следует, что неравенство $|\lambda_k| \leqslant 1$ выполняется при $k \geqslant 3324$. Отметим, что $\lambda_{27} = -1.17\ldots$ $\square$

Следствие 2. *Имеют место оценки* $13.158225715299274 \leqslant u_3 \leqslant 13.158225715311796$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как отмечено выше, $h \in \mathcal{W}(\mathbb{N})$, $\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{N})$. При этом

$$\|\nu\| = 12.158225715299274, \quad \|h\| = 12.158225715311796.$$

Осталось применить утверждение 2. $\square$

З а м е ч а н и е. Как видно из следствия 2, допустимые последовательность $h \in \mathcal{W}(\mathbb{N})$ и мера $\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{N})$ являются “почти экстремальными”. Кроме того, точки $\{t_i\}_{i=1}^6$ практически совпадают с нулями многочлена Ah, поскольку нетрудно проверить, что множество

$$Q = \bigcup_{i=1}^{6} \left[t_i - 10^{-11}, t_i + 10^{-11}\right]$$

содержит все локальные максимумы, а также единственный корень многочлена Ah. Это согласуется с п. (2) утверждения 3.

4. Вид экстремальной функции при $m = 3$, $\mathcal{D} = \mathbb{N}$

С помощью допустимой последовательности $h \in \mathcal{W}(\mathbb{N})$ и допустимых мер $\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{N})$, $\lambda \in \mathcal{M}(\mathbb{N} \setminus \{27\})$ из разд. 3 можно сделать вывод о виде экстремальной функции задачи (1.1) при $m = 3$, $\mathcal{D} = \mathbb{N}$.

Теорема 2. *Для любой экстремальной последовательности $w = \{w_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{W}^*(\mathbb{N})$ имеет место неравенство $w_{27} > 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $w_{27} = 0$, то $w \in \mathcal{W}(\mathbb{N}\setminus\{27\})$, но тогда ввиду утверждения 2 должны выполняться неравенства

$$\|w\| \leqslant \|h\|\,, \quad \|\lambda\| \leqslant \|w\|\,,$$

что невозможно, поскольку $\|h\| = 12.158225715311796 < 12.158314335232146 = \|\lambda\|\,.$ □

Теорема 3. *Пусть* $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{N})$. *Тогда функция* Aw *является многочленом степени меньше, чем* 1450.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что для любой экстремальной меры $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{N}) \neq \varnothing$ при любом $k \geqslant 1450$ выполняется неравенство $\mu_k > -1$, тогда результат будет следовать из п. (1) утверждения 3.

Пусть $Q \subset [-1,\, 1/2]$ — произвольное замкнутое множество; $G = [-1,\, 1/2] \setminus Q$;

$$t_{\max} = \max_{t\in Q}|t|; \qquad s = \sup_{t\in G}(Ah)(t).$$

В следующей оценке используются утверждения 4 и 2:

$$|\mu_k| = \left|\int\limits_{-1}^{1/2} P_k(t)\,d\mu(t)\right| = \left|\int\limits_{Q} P_k(t)\,d\mu(t) + \int\limits_{G} P_k(t)\,d\mu(t)\right| \leqslant \big(\max_{t\in Q}|P_k(t)|\big)\,\mu Q + \big(\sup_{t\in G}|P_k(t)|\big)\,\mu G$$

$$\leqslant \big(\max_{t\in Q}|P_k(t)|\big)\|\mu\| + \mu G \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi k}}\,\big(1-t_{\max}^2\big)^{-1/4}\,\|h\| + \mu G.$$

Чтобы оценить величину μG, рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1/2} Ah(t)\,d\mu(t) \leqslant \int\limits_{G} Ah(t)\,d\mu(t) \leqslant s\,\mu G.$$

Здесь первое неравенство следует из того, что $(Ah)(t) < 0$ при $t \in [-1,\, 1/2]$. С другой стороны,

$$\int\limits_{-1}^{1/2} Ah(t)\,d\mu(t) = \int\limits_{-1}^{1/2}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} h_k P_k(t)\right)d\mu(t) = \|\mu\| + \sum_{k=1}^{\infty} h_k\mu_k \geqslant \|\nu\| - \|h\|\,,$$

где последнее неравенство следует из утверждения 2, а также из неравенств $\mu_k \geqslant -1$ для любых натуральных k. Учитывая, что функция Ah отрицательна всюду на $[-1,\, 1/2]$, получаем оценку

$$\mu G \leqslant \frac{\|\nu\| - \|h\|}{s} = \frac{\|h\| - \|\nu\|}{-s}.$$

Таким образом, для любого $k \geqslant 1$ и любого замкнутого множества $Q \subset [-1,\, 1/2]$ справедлива оценка

$$|\mu_k| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi k}}(1-t_{\max}^2)^{-1/4}\,\|h\| + \frac{\|h\| - \|\nu\|}{-s}.$$

Отсюда получаем, что $|\mu_k| < 1$ для

$$k > \frac{2}{\pi}(1-t_{\max}^2)^{-1/2}\,\|h\|^2\left(\frac{s}{s + \|h\| - \|\nu\|}\right)^2.$$

Чтобы извлечь из этой оценки наилучший результат, величины s и $t_{\max}$ должны быть как можно меньше, т. е. множество Q должно быть окрестностью локальных максимумов многочлена Ah. Учитывая замечание из разд. 3, положим

$$Q = [t_1 - 0.25\cdot 10^{-4},\, t_1 + 10^{-3}] \cup [t_2 - 10^{-3},\, t_2 + 10^{-3}] \cup [t_3 - 10^{-3},\, t_3 + 10^{-3}]$$

$$\cup [t_4 - 10^{-3},\, t_4 + 10^{-3}] \cup [t_5 - 10^{-3},\, t_5 + 10^{-3}] \cup [t_6 - 10^{-3},\, t_6].$$

Тогда

$$t_{\max} = |t_1 - 0.25 \cdot 10^{-4}| = 0.997881164173776,$$

$$s = \sup_{t \in G} (Ah)(t) = (Ah)(t_1 - 0.25 \cdot 10^{-4}) = -1.0471002837015381 \ldots \cdot 10^{-8},$$

и неравенство $|\mu_k| < 1$ выполняется для $k > 1449.86\ldots$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арестов В.В., Бабенко А.Г.** О схеме Дельсарта оценки контактных чисел // Тр. МИАН. 1997. Т. 219. С. 44–73.
2. **Данфорд Н., Шварц Дж.** Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 896 с.
3. **Дельсарт Ф.** Алгебраический подход к схемам отношений теории кодирования. М.: Мир, 1976. 136 с.
4. **Кабатянский Г.А., Левенштейн В.И.** О границах для упаковок на сфере и в пространстве // Проблемы передачи информации. 1978. Т. 14, вып. 1. С. 3–25.
5. **Конвей Дж., Слоэн Н.** Упаковки шаров, решетки и группы. Т. 1,2. М.: Мир, 1990. 791 с.
6. **Левенштейн В.И.** Границы для упаковок метрических пространств и некоторые их приложения // Проблемы кибернетики. 1983. Т. 40. С. 44–110.
7. **Левенштейн В.И.** О границах для упаковок в n-мерном евклидовом пространстве // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245, № 6. С. 1299–1303.
8. **Мусин О.Р.** Проблема двадцати пяти сфер // Успехи мат. наук. 2003. Т. 58, вып. 4 (352). С. 153–154.
9. **Musin O.R.** The kissing problem in three dimensions // Discrete Comput. Geom. 2006. Vol. 35, no. 3. P. 375–384.
10. **Musin O.R.** The kissing number in four dimensions // Ann. Math. 2008. Vol. 168, no. 1. P. 1–32.
11. **Прасолов В.В.** Многочлены. М.: Изд-во Моск. Центра непрерывн. мат. образования, 2003. 336 с.
12. **Сидельников В.М.** Об экстремальных многочленах, используемых при оценках мощности кода // Проблемы передачи информации. 1980. Т. 16, вып. 3. С. 17–30.
13. **Суетин П.К.** Классические ортогональные многочлены. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Физматлит, 2005. 480 с.
14. **Штром Д.В.** Метод Дельсарта в задаче о контактных числах евклидовых пространств больших размерностей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2002. Т. 8, № 2. С. 162–189.
15. **Юдин В.А.** Минимум потенциальной энергии точечной системы зарядов // Дискретная математика. 1992. Т. 4, вып. 2. С. 115–121.
16. **Anderson E.J., Nash P.** Linear programming in infinite-dimensional spaces: Theory and applications. Chichester etc.: Wiley, 1987. xii+172 pp. (Wiley Intersci. ser. in discrete mathematics and optimization).
17. **Delsarte Ph.** Bounds for unrestricted codes, by linear programming // Philips Res. Rep. 1972. Vol. 27. P. 272–289.
18. **Mittelmann H.D., Vallentin F.** High-accuracy semidefinite programming bounds for kissing numbers // Experiment. Math. 2010. Vol. 19, iss. 2. P. 174–178.
19. **Odlyzko A.M., Sloane N.J.A.** New bounds on the number of unit spheres that can touch a unit sphere in n dimensions // J. Combinatorial Theory. Ser. A. 1979. Vol. 26, no. 2. P. 210–214.
20. **Schutte K., van der Waerden B.L.** Das Problem der dreizehn Kugeln // Math. Ann. 1953. Bd. 125. S. 325–334.

Куклин Николай Алексеевич
аспирант
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: nickkuklin@gmail.com

Поступила 01.07.2011

Том 17 № 3 2011

УДК 517.518

НЕЗАВИСИМОСТЬ ОЦЕНОК ПОГРЕШНОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ КУБИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ ОТ УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

Н. В. Латыпова

В работе рассматриваются два способа биркгофовой интерполяции функции двух переменных многочленами третьей степени на треугольнике для метода конечных элементов. Оценки погрешности для предложенных кубических элементов зависят только от диаметра разбиения и не зависят от углов триангуляции. Показана неулучшаемость полученных оценок.

Ключевые слова: погрешность интерполяции, кусочно–кубическая функция, триангуляция, метод конечных элементов.

N. V. Latypova. Independence of error estimates of interpolation by cubic polynomials from the angles of a triangle.

We consider two methods of Birkhoff interpolation of a function of two variables by cubic polynomials on a triangle for the finite element method. Error estimates for the proposed cubic elements depend only on the diameter of the partition and do not depend on the angles of triangulation. We show that the obtained estimates cannot be improved.

Keywords: error of interpolation, piecewise cubic polynomial, triangulation, finite element method.

Введение

Первоначально оценки погрешности аппроксимации функции и ее i-й производной имели вид CH^{n+1-i}, где H — диаметр триангуляции, n — степень интерполяционного многочлена (этот параметр также тесно связан с классом аппроксимируемых функций — классы $W^{n+1}M$, которые будут введены ниже). При этом вопрос о том, как константа C зависит от свойств триангуляции не рассматривался. Позже появилось условие наименьшего угла триангуляции (работы Дж. Синжа, М. Зламала, А. Женишека, Дж. Брэмбла и др.). Наиболее общие результаты такого рода принадлежат Ф. Сьярле и П. Равьяру [1], у которых в двумерном случае в максимально общей ситуации оценки погрешности аппроксимации имели вид $CH^{n+1-i}(\sin\alpha)^{-i}$, где α — наименьший угол триангуляции, а константа C уже не зависит от триангуляции.

В некоторых случаях наименьший угол, фигурирующий в оценках Сьярле — Равьяра, можно заменить на средний (или наибольший, что с точностью до констант равносильно). При этом выясняется, что различные типы интерполяционных процессов (Лагранжа, Эрмита, Биркгофа) по-разному реагируют на характер вырождения триангуляции. Подобные оценки автоматически переносятся на оценки погрешности метода конечных элементов, с которым тесно связаны.

Так в случае лагранжевой интерполяции оценка погрешности зависит от диаметра разбиения и синуса наибольшего угла триангуляции. При этом оценки ухудшаются, когда два угла стремятся к нулю. Здесь к настоящему моменту все выяснено благодаря работам М. Зламала, Ю. Н. Субботина, П. Жаме. Кроме того, Ю. Н. Субботин [2] показал неулучшаемость этих оценок на заданном классе. Неулучшаемость понимается в том смысле, что существуют функция из заданного класса и абсолютные положительные константы, не зависящие от триангуляции, такие, что для любого невырожденного треугольника справедливы оценки снизу.

Наиболее трудным является случай эрмитовой и биркгофовой интерполяции. Здесь некоторые результаты получены Д. О. Филимоненковым, Ю. Н. Субботиным [3; 4], Н. В. Байдаковой [5; 6] и автором [7–10]. В работах [5; 7; 8] рассматриваются интерполяционные условия биркгофова типа для построения многочленов нечетных степеней $4k+1$ и $4k+3$, позволяющие заменить наименьший угол на наибольший для старших производных, но избавиться полностью от присутствия наименьшего угла в оценках погрешности производных не удается. В [4; 6] предложены два способа интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике, в оценках погрешности которых наименьший угол полностью заменяется на средний (наибольший).

В работе [10] предлагаются два способа интерполяции типа Биркгофа многочленами второй степени на треугольнике, оценки погрешности в одном из них зависят только от наибольшей стороны треугольника и не зависят от угла. Показана неулучшаемость полученных оценок.

В настоящей работе предлагаются два способа интерполяции типа Биркгофа многочленами третьей степени на треугольнике, оценки погрешности в которых зависят только от наибольшей стороны треугольника и не зависят от углов. Показана неулучшаемость полученных оценок. Отметим,что построенные кусочно–полиномиальные функции глобально не являются непрерывными. Подобные конечные элементы успешно использовались при решении задач о движении несжимаемой жидкости (уравнения Навье — Стокса). Например, использовались линейные по совокупности переменных полиномы, но с определяющими параметрами не в вершинах треугольника, а в серединах его сторон, и это приводило к существенно лучшим результатам, так как при этом автоматически учитывалось трудное условие равенства нулю дивергенции.

1. Постановка задачи

В силу локальности рассматриваемых интерполяционных условий, на которых интерполяционный многочлен третьей степени будет определяться однозначно, ограничимся рассмотрением лишь одного треугольника. Пусть $\triangle$ — невырожденный треугольник в $\mathbb{R}^2$. При $i=1,2,3$ через a_i будем обозначать вершины треугольника $\triangle$, через n_i — единичную нормаль к стороне $[a_i,a_{i+1}]$, через b_i — середину стороны $[a_i,a_{i+1}]$, при этом полагаем $a_4=a_1$.

Далее без ограничения общности будем считать, что вершины $\triangle$ имеют следующие координаты: $a_1=(b,0)$, $a_2=(-a,0)$, $a_3=(0,h)$, причем $0<a\leqslant b$ и длина наибольшей стороны треугольника $\triangle$ равна $a+b=H$. Тогда середины сторон будут иметь координаты: $b_1=((b-a)/2,0)$, $b_2=(-a/2,h/2)$ и $b_3=(b/2,h/2)$. Обозначим через c_1 и c_2 точки, делящие наибольшую сторону на три части.

Обозначим через

$$D_\eta f(x,y)=\eta^{(1)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\eta^{(2)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

производную по направлению $\eta=\left(\eta^{(1)},\eta^{(2)}\right)$, $\left(\eta^{(1)}\right)^2+\left(\eta^{(2)}\right)^2=1$, и пусть

$$W^{s+1}M=\Big\{f(x,y)\colon D^l_{\eta_1,\dots,\eta_l}f(x,y)\in\mathbb{C}(\triangle)\quad(0\leqslant l\leqslant s+1)\qquad\text{и}$$

$$\forall\,(x,y)\in\triangle,\quad\forall\,\eta_1,\dots,\eta_{s+1}\quad\left|D^{s+1}_{\eta_1,\dots,\eta_{s+1}}f(x,y)\right|\leqslant M\Big\},$$

где $\mathbb{C}(\triangle)$ обозначает класс непрерывных функций на треугольнике $\triangle$.

Через $P_3(x,y)=P_3(f;x,y)$ будем обозначать многочлен, степень которого по совокупности переменных не превосходит трех, удовлетворяющий следующим интерполяционным условиям:

$$f(a_i)=P_3(a_i)\quad(i=1,2);\tag{1.1}$$

$$\frac{\partial f(a_i)}{\partial x}=\frac{\partial P_3(a_i)}{\partial x}\quad(i=1,2);\tag{1.2}$$

$$\frac{\partial f(a_i)}{\partial y}=\frac{\partial P_3(a_i)}{\partial y}\quad(i=1,2,3);\tag{1.3}$$

$$D^2_{n_1^2} f(c_i) = D^2_{n_1^2} P_3(c_i) \quad (i = 1, 2); \tag{1.4}$$

$$D^3_{n_1^3} f(b_1) = D^3_{n_1^3} P_3(b_1). \tag{1.5}$$

Второй способ интерполяции получится, если вместо условий (1.3) взять следующие:

$$\frac{\partial f(a_3)}{\partial y} = \frac{\partial P_3(a_3)}{\partial y}, \qquad D_{n_i} f(b_i) = D_{n_i} P_3(b_i) \quad (i = 2, 3). \tag{1.6}$$

Положим $e(x,y) = f(x,y) - P_3(x,y), \quad e_{i,j}(x,y) = \dfrac{\partial^{i+j} e(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}, \quad e_{i,j} = e_{i,j}(0,0).$

2. Оценки погрешности интерполяции

Получим оценки погрешности для предложенных способов интерполяции.

Теорема. *Существуют такие абсолютные положительные константы $C_{i,j}$, что для любой функции $f \in W^4 M$, любого невырожденного треугольника $\triangle$ и для интерполяционного многочлена $P_3(x,y)$, заданного условиями* (1.1)–(1.5) (*или* (1.1), (1.2), (1.4)–(1.6)), *имеют место следующие оценки*:

$$\left\| \frac{\partial^s e(x,y)}{\partial x^{s-j} \partial y^j} \right\|_{\mathbb{C}(\triangle)} \leqslant C_{s-j,j} M H^{4-s} \quad (0 \leqslant j \leqslant 3, \quad j \leqslant s \leqslant 3). \tag{2.1}$$

С точностью до констант, не зависящих от триангуляции, оценки неулучшаемы на рассматриваемом классе функций.

Доказательство. По формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме Коши имеем

$$e(x,y) = e_{0,0} + x e_{1,0} + \frac{x^2}{2!} e_{2,0} + \frac{x^3}{3!} e_{3,0} + y\Big(e_{0,1} + x e_{1,1} + \frac{x^2}{2!} e_{2,1}\Big) + \frac{y^2}{2!}\left(e_{0,2} + x e_{1,2}\right) + \frac{y^3}{3!} e_{0,3} + R(x,y), \tag{2.2}$$

где

$$R(x,y) = \int_0^y \frac{(y-t)^3}{3!} \frac{\partial^4 f(0,t)}{\partial t^4}\, dt + \sum_{i=0}^{3} \frac{y^i}{i!} \int_0^x \frac{(x-u)^{3-i}}{(3-i)!} \frac{\partial^4 f(u,0)}{\partial u^{4-i} \partial y^i}\, du.$$

Далее через K и k_{ij} будем обозначать положительные константы, необязательно равные, не зависящие от функции f и геометрических характеристик треугольника.

Условия (1.1), (1.2) при $i = 1, 2$ определяют одномерный многочлен Эрмита, используя остаточный член которого, получаем следующие оценки [11, гл. 2, § 11]:

$$|e_{0,0}| \leqslant k_{00} M a^2 b^2, \qquad |e_{1,0}| \leqslant k_{10} M a b^2, \qquad |e_{2,0}| \leqslant k_{20} M b^2, \qquad |e_{3,0}| \leqslant k_{30} M b.$$

Из условия (1.5) имеем $e_{0,3}\left((b-a)/2, 0\right) = 0$. Откуда

$$e_{0,3} = -\frac{\partial^3}{\partial y^3} R\Big(\frac{b-a}{2}, 0\Big), \quad \text{а значит,} \quad |e_{0,3}| \leqslant k_{03} M b.$$

Из условия (1.4) при $i = 1, 2$ получим

$$\begin{cases} e_{0,2} + \dfrac{2b-a}{3} e_{1,2} = -\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} R\Big(\dfrac{2b-a}{3}, 0\Big), \\ e_{0,2} + \dfrac{b-2a}{3} e_{1,2} = -\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} R\Big(\dfrac{b-2a}{3}, 0\Big). \end{cases}$$

Откуда следует

$$e_{1,2} = \frac{3}{b+a}\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}R\Big(\frac{b-2a}{3},0\Big) - \frac{\partial^2}{\partial y^2}R\Big(\frac{2b-a}{3},0\Big)\right],$$

$$e_{0,2} = \frac{2b-a}{3}\frac{\partial^2}{\partial y^2}R\Big(\frac{b-2a}{3},0\Big) - \frac{b-2a}{3}\frac{\partial^2}{\partial y^2}R\Big(\frac{2b-a}{3},0\Big);$$

здесь

$$|e_{0,2}| \leqslant k_{02}Mb^2, \quad |e_{1,2}| \leqslant k_{12}Mb.$$

Из условия (1.3) при $i = 3$ получим

$$e_{0,1} = -he_{0,2} - \frac{h^2}{2}e_{0,3} - \frac{\partial}{\partial y}R(0,h);$$

тогда

$$|e_{0,1}| \leqslant k_{01}Mb^2h.$$

Из условия (1.3) при $i = 1,2$ имеем

$$\begin{cases} -ae_{1,1} + \dfrac{a^2}{2}e_{2,1} = D_1, & \text{где } \ D_1 = -e_{0,1} - \dfrac{\partial}{\partial y}R\left(-a,0\right), \\ be_{1,1} + \dfrac{b^2}{2}e_{2,1} = D_2, & \text{где } \ D_2 = -e_{0,1} - \dfrac{\partial}{\partial y}R\left(b,0\right), \end{cases} \tag{2.3}$$

причем $|D_1| \leqslant KMa^3 + KMb^2h$, $|D_2| \leqslant KMb^3$. Откуда, решая систему, получим

$$e_{1,1} = -\frac{2}{ab(b+a)}\Big(\frac{b^2}{2}D_1 - \frac{a^2}{2}D_2\Big), \qquad e_{2,1} = \frac{2}{ab(b+a)}\left(bD_1 + aD_2\right);$$

$$|e_{1,1}| \leqslant k_{11}M\Big(ab + \frac{b^2h}{a}\Big), \qquad |e_{2,1}| \leqslant k_{21}Mb.$$

Подставляя оценки для $e_{i,j}$ в разложение Тейлора (2.2) и вычисляя соответствующие частные производные первого, второго и третьего порядков по переменным x и y, получаем оценки (2.1) в случае интерполяционных условий (1.1)–(1.5).

Если вместо условий интерполяции (1.3) взять (1.6), то оценки (2.1) будут выполняться и в этом случае. Действительно, заметим, что все выкладки до системы (2.3) остаются справедливыми, так как условие (1.3) при $i = 3$ и первое условие (1.6) совпадают, остальные два условия (1.6) эквивалентны системе

$$\begin{cases} he_{1,0}\Big(-\dfrac{a}{2},\dfrac{h}{2}\Big) - ae_{0,1}\Big(-\dfrac{a}{2},\dfrac{h}{2}\Big) = 0, \\ he_{1,0}\Big(\dfrac{b}{2},\dfrac{h}{2}\Big) + be_{0,1}\Big(\dfrac{b}{2},\dfrac{h}{2}\Big) = 0. \end{cases}$$

Пользуясь разложением по формуле Тейлора (2.2), подставляя уже найденные значения $e_{i,j}$ и приводя подобные, получим систему относительно неизвестных $e_{1,1}$ и $e_{2,1}$

$$\begin{cases} \dfrac{a^2+h^2}{2}e_{1,1} - \dfrac{a(a^2+2h^2)}{8}e_{2,1} = E_1, \\ \dfrac{b^2+h^2}{2}e_{1,1} + \dfrac{b(b^2+2h^2)}{8}e_{2,1} = E_2, \end{cases}$$

где

$$E_1 = -h\left[e_{1,0} - \frac{a}{2}e_{2,0} + \frac{a^2}{8}e_{3,0} + \frac{h^2}{8}e_{1,2} + \frac{\partial}{\partial x}R\Big(-\frac{a}{2},\frac{h}{2}\Big)\right]$$

$$+\, a\left[e_{0,1} + \frac{h}{2}e_{0,2} - \frac{ha}{4}e_{1,2} + \frac{h^2}{8}e_{0,3} + \frac{\partial}{\partial y}R\Big(-\frac{a}{2},\frac{h}{2}\Big)\right],$$

$$E_2 = -h\left[e_{1,0} + \frac{b}{2}e_{2,0} + \frac{b^2}{8}e_{3,0} + \frac{h^2}{8}e_{1,2} + \frac{\partial}{\partial x}R\Big(\frac{b}{2}, \frac{h}{2}\Big)\right]$$
$$- b\left[e_{0,1} + \frac{h}{2}e_{0,2} + \frac{hb}{4}e_{1,2} + \frac{h^2}{8}e_{0,3} + \frac{\partial}{\partial y}R\Big(\frac{b}{2}, \frac{h}{2}\Big)\right];$$

$|E_1| \leqslant KMa^4 + KMb^2ha, \quad |E_2| \leqslant KMb^4$.

Решим систему по формулам Крамера. Определитель системы равен

$$\Delta = \frac{b+a}{16}\left[b^2a^2 + h^2(b^2 + ab + a^2) + 2h^4\right] \neq 0.$$

Тогда

$$\Delta_1 = \frac{b(b^2+2h^2)}{8}E_1 + \frac{a(a^2+2h^2)}{8}E_2, \qquad |\Delta_1| \leqslant KMb^4a^3 + b^5ah,$$
$$\Delta_2 = \frac{a^2+h^2}{2}E_2 - \frac{b^2+h^2}{2}E_1, \qquad |\Delta_2| \leqslant KMb^4a^2.$$

Откуда следует

$$e_{1,1} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad e_{2,1} = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \qquad |e_{1,1}| \leqslant k_{11}M\Big(ab + \frac{b^2h}{a}\Big), \qquad |e_{2,1}| \leqslant k_{21}Mb.$$

Подставляя оценки для $e_{i,j}$ в разложение Тейлора (2.2), получим оценки (2.1). Первое утверждение теоремы доказано. Второе утверждение доказывается в следующем разделе.

3. Неулучшаемость оценок

В этом разделе покажем, что для рассматриваемых условий интерполяции существуют константы $C^*_{i,j} > 0$, не зависящие от триангуляции, и функция $f^* \in W^4M$ такие, что для

$$e(x,y) = f^*(x,y) - P_3(f^*; x, y)$$

справедливы следующие неравенства:

$$\left\|\frac{\partial^s e(x,y)}{\partial x^{s-j}\partial y^j}\right\|_{\mathbb{C}(\triangle)} \geqslant C^*_{s-j,j}MH^{4-s} \quad (0 \leqslant j \leqslant 3, \quad j \leqslant s \leqslant 3). \tag{3.1}$$

Рассмотрим равнобедренный треугольник, положив $a = b = H/2$. В качестве функции для интерполяционных условий (1.1)–(1.5) возьмем

$$f^*(x,y) = M(b^2 - x^2)^2 + M(b-x)x^2y + M(b+x)xy^2 + M(b-x)y^3 \tag{3.2}$$

и построим соответствующий интерполяционный многочлен третьей степени по совокупности переменных

$$P_3(f^*; x, y) = p_{0,0} + p_{1,0}x + p_{2,0}x^2 + p_{3,0}x^3 + p_{0,1}y + p_{1,1}xy + p_{2,1}x^2y + p_{0,2}y^2 + p_{1,2}xy^2 + p_{0,3}y^3.$$

Коэффициенты $p_{i,j}$ найдем из условий интерполяции. Из условий (1.1), (1.2) при $i = 1, 2$ имеем

$$\begin{cases} p_{0,0} - bp_{1,0} + b^2p_{2,0} - b^3p_{3,0} = 0, \\ p_{0,0} + bp_{1,0} + b^2p_{2,0} + b^3p_{3,0} = 0, \\ p_{1,0} - 2bp_{2,0} + 3b^2p_{3,0} = 0, \\ p_{1,0} + 2bp_{2,0} + 3b^2p_{3,0} = 0. \end{cases}$$

Определитель данной системы $\Delta = -16b^4$ отличен от нуля, следовательно, система имеет только нулевое решение

$$p_{0,0} = p_{1,0} = p_{2,0} = p_{3,0} = 0. \tag{3.3}$$

Таким образом, интерполяционный многочлен принимает вид

$$P_3(f^*;x,y) = p_{0,1}y + p_{1,1}xy + p_{2,1}x^2y + p_{0,2}y^2 + p_{1,2}xy^2 + p_{0,3}y^3.$$

Из условия (1.5), учитывая, что $b_1 = 0$, имеем

$$p_{0,3} = Mb. \tag{3.4}$$

Из условия (1.4) при $i = 1, 2$ получим

$$\begin{cases} p_{0,2} + \dfrac{b}{3}p_{1,2} = \dfrac{4}{9}Mb^2, \\ p_{0,2} - \dfrac{b}{3}p_{1,2} = -\dfrac{2}{9}Mb^2. \end{cases}$$

Откуда следует

$$p_{0,2} = \frac{1}{9}Mb^2, \quad p_{1,2} = Mb. \tag{3.5}$$

Из условия (1.3) при $i = 3$, учитывая (3.4), (3.5), получим

$$p_{0,1} = 3Mbh^2 - 2hp_{0,2} - 3h^2p_{0,3} = -\frac{2}{9}Mb^2h. \tag{3.6}$$

Тогда, используя условие (1.3) при $i = 1, 2$, учитывая (3.6), имеем систему

$$\begin{cases} -bp_{1,1} + b^2p_{2,1} = 2Mb^3 + \dfrac{2}{9}Mb^2h, \\ bp_{1,1} + b^2p_{2,1} = \dfrac{2}{9}Mb^2h. \end{cases}$$

Откуда следует

$$p_{1,1} = -Mb^2, \quad p_{2,1} = Mb + \frac{2}{9}Mh. \tag{3.7}$$

Подставляя найденные коэффициенты (3.3)–(3.7) в $P_3(f^*;x,y)$, получаем

$$e(x,y) = M\left[(b^2 - x^2)^2 + y(b^2 - x^2)\left(x + \frac{2}{9}h\right) - y^2\left(\frac{b^2}{9} - x^2\right) - y^3x\right].$$

Таким образом,

$$\|e(x,y)\| \geqslant e\,(0,0) = Mb^4 = \frac{1}{16}MH^4,$$

$$\left\|\frac{\partial e(x,y)}{\partial x}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial e}{\partial x}\left(\frac{b}{2},0\right)\right| = \frac{3}{2}Mb^3 = \frac{3}{16}MH^3,$$

$$\left\|\frac{\partial^2 e(x,y)}{\partial x^2}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}\left(\frac{b}{2},0\right)\right| = Mb^2 = \frac{1}{4}MH^2,$$

$$\left\|\frac{\partial^3 e(x,y)}{\partial x^3}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^3 e}{\partial x^3}\left(\frac{b}{2},0\right)\right| = 12Mb = 6MH,$$

$$\left\|\frac{\partial e(x,y)}{\partial y}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial e}{\partial y}\left(\frac{b}{2},0\right)\right| = M\left|\frac{3}{8}b^3 + \frac{1}{6}bh^2\right| \geqslant \frac{3}{8}Mb^3 = \frac{3}{64}MH^3,$$

$$\left\|\frac{\partial^2 e(x,y)}{\partial x\partial y}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^2 e}{\partial x\partial y}\,(0,0)\right| = Mb^2 = \frac{1}{4}MH^2,$$

$$\left\|\frac{\partial^3 e(x,y)}{\partial x^2\partial y}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^3 e}{\partial x^2\partial y}\left(\frac{b}{6},\frac{h}{9}\right)\right| = Mb = \frac{1}{2}MH,$$

$$\Big\|\frac{\partial^2 e(x,y)}{\partial y^2}\Big\| \geqslant \Big|\frac{\partial^2 e}{\partial y^2}\,(0,0)\,\Big| = \frac{2}{9}Mb^2 = \frac{1}{18}MH^2,$$

$$\Big\|\frac{\partial^3 e(x,y)}{\partial x\partial y^2}\Big\| \geqslant \Big|\frac{\partial^3 e}{\partial x\partial y^2}\Big(-\frac{b}{2},0\Big)\Big| = 2Mb = MH,$$

$$\Big\|\frac{\partial^3 e(x,y)}{\partial y^3}\Big\| \geqslant \Big|\frac{\partial^3 e}{\partial y^3}\Big(\frac{b}{3},y\Big)\Big| = 2Mb = MH,$$

что доказывает требуемые оценки (3.1).

В качестве функции для интерполяционных условий (1.1), (1.2), (1.4)–(1.6) по аналогии с (3.2) рассмотрим

$$f_1^*(x,y) = M(b^2-x^2)^2 + M(b-x)xy^2 + M(b-x)y^3 \tag{3.8}$$

и построим интерполяционный многочлен $P_3(f_1^*;x,y)$, используя соответствующие условия интерполяции.

Условия (1.1), (1.2) при $i=1,2$ и первое слагаемое функции $f_1^*(x,y)$ гарантируют нам выполнение (3.3). А значит, интерполяционный многочлен снова примет вид

$$P_3(f_1^*;x,y) = p_{0,1}y + p_{1,1}xy + p_{2,1}x^2y + p_{0,2}y^2 + p_{1,2}xy^2 + p_{0,3}y^3.$$

Условие (1.5) дает равенство (3.4). Из условия (1.4) при $i=1,2$ получим систему

$$\begin{cases} p_{0,2} + \dfrac{b}{3}p_{1,2} = \dfrac{2}{9}Mb^2, \\ p_{0,2} - \dfrac{b}{3}p_{1,2} = -\dfrac{4}{9}Mb^2. \end{cases}$$

Откуда следует

$$p_{0,2} = -\frac{1}{9}Mb^2, \qquad p_{1,2} = Mb. \tag{3.9}$$

Из первого условия (1.6), учитывая (3.4), (3.9), получим

$$p_{0,1} = 3Mbh^2 - 2hp_{0,2} - 3h^2p_{0,3} = \frac{2}{9}Mb^2h. \tag{3.10}$$

Тогда, используя два оставшихся условия (1.6) и учитывая (3.9), (3.10), (3.4), имеем систему

$$\begin{cases} \dfrac{b^2+h^2}{2}p_{1,1} + \dfrac{b(b^2+2h^2)}{4}p_{2,1} = -\dfrac{31}{36}Mb^3h - \dfrac{1}{4}Mbh^3 - \dfrac{1}{8}Mh^4, \\ \dfrac{b^2+h^2}{2}p_{1,1} - \dfrac{b(b^2+2h^2)}{4}p_{2,1} = \dfrac{67}{36}Mb^3h - \dfrac{3}{8}Mb^2h^2 + \dfrac{1}{4}Mbh^3 - \dfrac{1}{8}Mh^4. \end{cases}$$

Откуда следует

$$p_{1,1} = M\Big(bh - \frac{3b^2h^2+8bh^3+2h^4}{8(b^2+h^2)}\Big), \qquad p_{2,1} = M\Big(-\frac{49}{9}h + \frac{27bh^2+356h^3}{36(b^2+2h^2)}\Big). \tag{3.11}$$

Подставляя найденные коэффициенты (3.4), (3.9)–(3.11) в $P_3(f_1^*;x,y)$, получаем

$$e(x,y) = M(b^2-x^2)^2 + My^2\left(\frac{b^2}{9}-x^2\right) - My^3x$$

$$-\,My\left[\frac{2}{9}bh + x\Big(bh - \frac{3b^2h^2+8bh^3+2h^4}{8(b^2+h^2)}\Big) + x^2\Big(-\frac{49}{9}h + \frac{27bh^2+356h^3}{36(b^2+2h^2)}\Big)\right].$$

Таким образом,

$$\|e(x,y)\| \geqslant |e\,(0,0)| = Mb^4 = \frac{1}{16}MH^4,$$

$$\Big\|\frac{\partial e(x,y)}{\partial x}\Big\| \geqslant \Big|\frac{\partial e}{\partial x}\Big(\frac{b}{2},0\Big)\Big| = \frac{3}{2}Mb^3 = \frac{3}{16}MH^3,$$
$$\Big\|\frac{\partial^2 e(x,y)}{\partial x^2}\Big\| \geqslant \Big|\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}\Big(\frac{b}{2},0\Big)\Big| = Mb^2 = \frac{1}{4}MH^2,$$
$$\Big\|\frac{\partial^3 e(x,y)}{\partial x^3}\Big\| \geqslant \Big|\frac{\partial^3 e}{\partial x^3}\Big(\frac{b}{2},0\Big)\Big| = 12Mb = 6MH,$$
$$\Big\|\frac{\partial^2 e(x,y)}{\partial y^2}\Big\| \geqslant \Big|\frac{\partial^2 e}{\partial y^2}\,(0,0)\,\Big| = \frac{2}{9}Mb^2 = \frac{1}{18}MH^2,$$
$$\Big\|\frac{\partial^3 e(x,y)}{\partial x\partial y^2}\Big\| \geqslant \Big|\frac{\partial^3 e}{\partial x\partial y^2}\Big(\frac{b}{2},0\Big)\Big| = 2Mb = MH,$$
$$\Big\|\frac{\partial^3 e(x,y)}{\partial y^3}\Big\| \geqslant \Big|\frac{\partial^3 e}{\partial y^3}\Big(\frac{b}{2},y\Big)\Big| = 3Mb = \frac{3}{2}MH,$$

что дает выполнение оценок (3.1).

Заметим, что здесь отсутствуют оценки для $\Big\|\dfrac{\partial^{k+1} e(x,y)}{\partial x^k\partial y}\Big\|$ при $k=0,1,2$. Чтобы их получить, рассмотрим аналогичную (3.2) и (3.8) функцию

$$f_2^*(x,y) = M(b^2-x^2)^2 + M(b+x)(b-x)^2y$$

и построим интерполяционный многочлен $P_3(f_2^*;x,y)$.

Условия (1.1), (1.2) при $i=1,2$ и первое слагаемое функции $f_2^*(x,y)$ гарантируют нам выполнение (3.3). Условие (1.5) дает равенство

$$p_{0,3} = 0. \tag{3.12}$$

Из условия (1.4) при $i=1,2$ получим систему

$$\begin{cases} p_{0,2} + \dfrac{b}{3}\,p_{1,2} = 0, \\ p_{0,2} - \dfrac{b}{3}\,p_{1,2} = 0. \end{cases}$$

Откуда следует

$$p_{0,2} = p_{1,2} = 0. \tag{3.13}$$

Из первого условия (1.6), учитывая (3.12), (3.13), получим

$$p_{0,1} = Mb^3. \tag{3.14}$$

Тогда, используя два оставшихся условия (1.6) и учитывая (3.12)–(3.14), имеем систему

$$\begin{cases} \dfrac{b^2+h^2}{2}p_{1,1} + \dfrac{b(b^2+2h^2)}{4}p_{2,1} = -\dfrac{5}{8}Mb^4 - \dfrac{3}{2}Mb^3h - \dfrac{5}{8}Mb^2h^2, \\ \dfrac{b^2+h^2}{2}p_{1,1} - \dfrac{b(b^2+2h^2)}{4}p_{2,1} = -\dfrac{1}{8}Mb^4 + \dfrac{3}{2}Mb^3h + \dfrac{3}{8}Mb^2h^2. \end{cases}$$

Откуда следует

$$p_{1,1} = M\Big(-\frac{3}{4}b^2 + \frac{b^2h^2}{2(b^2+h^2)}\Big), \quad p_{2,1} = -M\Big(b + \frac{6b^2h}{b^2+2h^2}\Big). \tag{3.15}$$

Подставляя найденные коэффициенты (3.12)–(3.15) в $P_3(f_2^*;x,y)$, получаем

$$e(x,y) = M\left[(b^2-x^2)^2 + (b+x)(b-x)^2y - b^3y + xy\Big(\frac{3}{4}\,b^2 - \frac{b^2h^2}{2(b^2+h^2)}\Big) + x^2y\Big(b + \frac{6b^2h}{b^2+2h^2}\Big)\right].$$

Тогда

$$\Big\|\frac{\partial e(x,y)}{\partial y}\Big\| \geqslant \Big|\frac{\partial e}{\partial y}\,(b,0)\,\Big| = M\Big|\frac{3}{4}\,b^3+b^3h\Big(\frac{6b}{b^2+2h^2}-\frac{h}{2(b^2+h^2)}\Big)\Big| \geqslant \frac{3}{4}Mb^3=\frac{3}{32}MH^3,$$

$$\Big\|\frac{\partial^2 e(x,y)}{\partial x\partial y}\Big\| \geqslant \Big|\frac{\partial^2 e}{\partial x\partial y}\,(0,y)\,\Big| = M\Big|\frac{1}{4}\,b^2+\frac{b^2h^2}{2(b^2+h^2)}\Big| \geqslant \frac{1}{4}Mb^2=\frac{1}{16}MH^2,$$

$$\Big\|\frac{\partial^3 e(x,y)}{\partial x^2\partial y}\Big\| \geqslant \Big|\frac{\partial^3 e}{\partial x^2\partial y}\Big(\frac{b}{2},y\Big)\Big| = M\Big|3b+\frac{6b^2h}{b^2+2h^2}\Big| \geqslant 3Mb=\frac{3}{2}MH,$$

что полностью доказывает неравенства (3.1) для второго способа интерполяции.

Таким образом, во всех рассмотренных случаях оценки погрешности сверху и снизу с точностью до констант, не зависящих от триангуляции, совпадают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ciarlet P.G., Raviart P.A.** General Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^n$ with applications to finite element methods // Arch. Rat. Mech. and Anal. 1972. Vol. 46, no. 3. P. 177–199.
2. **Субботин Ю.Н.** Многомерная кусочно-полиномиальная интерполяция // Методы аппроксимации и интерполяции / Под ред. А.Ю. Кузнецова. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1981. С. 148–153.
3. **Субботин Ю.Н.** Зависимость оценок аппроксимации интерполяционными полиномами пятой степени от геометрических характеристик треугольника // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 2. С. 110–119.
4. **Субботин Ю.Н.** Новый кубический элемент в МКЭ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 120–130.
5. **Baidakova N.V.** On some interpolation process by polynomials of degree $4m+1$ on the triangle // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1999. Vol. 14, no. 2. P. 87–107.
6. **Байдакова Н.В.** Об одном способе эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 47–52.
7. **Латыпова Н.В.** Погрешность аппроксимации многочленами степени $4k+3$ на треугольнике // Тр. Междунар. шк. С.Б. Стечкина по теории функций. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1999. С. 128–137.
8. **Латыпова Н.В.** Оценки погрешности аппроксимации многочленами степени $4k+3$ на треугольнике // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2002. Т. 8, № 1. С. 203–226.
9. **Латыпова Н.В.** Погрешность кусочно-кубической интерполяции на треугольнике // Вестн. Удм. ун-та. 2003. Вып. 1. С. 3–18. (Математика.)
10. **Латыпова Н.В.** Погрешность кусочно-параболической интерполяции на треугольнике // Вестн. Удм. ун-та. 2009. Вып. 3. С. 91–97. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
11. **Березин И.С., Жидков Н.П.** Методы вычислений. Т. 1. М.: Физматгиз, 1962. 464 с.

Латыпова Наталья Владимировна
канд. физ.-мат. наук
доцент
Удмуртский государственный университет
e-mail: nlatypova@udm.ru

Поступила 04.03.2011

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 3 2011

УДК 512.54 +519.17

О СИММЕТРИЧЕСКИХ 4-РАСШИРЕНИЯХ 2-МЕРНОЙ РЕШЕТКИ[1]

Е. А. Неганова, В. И. Трофимов

В работе на основе полученного ранее авторами критерия конечности для множеств симметрических q-расширений 2-мерной решетки Λ^2 доказана конечность множества всех $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрических 4-расширений решетки Λ^2. Кроме того, в работе получен список всех $Aut_0(\Lambda^1)$-симметрических 4-расширений решетки Λ^1.

Ключевые слова: d-мерные решетки, симметрические q-расширения, автоморфизмы.

E.A.Neganova, V.I.Trofimov. On symmetrical 4-extensions of the grid Λ^2.

The finiteness of the set of all $Aut_0(\Lambda^2)$-symmetrical 4-extensions of the 2-dimensional grid Λ^2 is proved with the help of the finiteness criterion for the set of symmetrical q-extensions of the grid Λ^2, which was obtained by the authors earlier. In addition, the list of all $Aut_0(\Lambda^2)$-symmetrical 4-extensions of the grid Λ^2 is presented.

Keywords: d-dimensional grids, symmetrical q-extensions, automorphisms.

1. Введение

Пусть Γ и Δ — графы (под графом мы понимаем неориентированный граф без петель и без кратных ребер). Напомним (см. [1]), что связный граф $\widetilde{\Gamma}$ называется *симметрическим расширением графа* Γ *посредством графа* Δ, если существуют такая вершинно-транзитивная группа $\widetilde{G}$ автоморфизмов графа $\widetilde{\Gamma}$ и такая система импримитивности σ группы $\widetilde{G}$ на множестве $V(\widetilde{\Gamma})$ вершин графа $\widetilde{\Gamma}$, что фактор-граф $\widetilde{\Gamma}/\sigma$ изоморфен графу Γ и блоки системы σ порождают в $\widetilde{\Gamma}$ подграфы, изоморфные Δ. Понятие симметрического расширения одного графа посредством другого графа аналогично понятию расширения одной группы посредством другой группы. В связи с кристаллографией частиц с внутренней структурой и теорией струн особый интерес представляют симметрические расширения d-мерных решеток посредством конечных графов.

Как обычно, для целого положительного числа d под *d-мерной решеткой* Λ^d далее понимается граф, вершинами которого являются все упорядоченные наборы $(a_1,\ldots,a_d)$ из d целых чисел, и две вершины $(a'_1,\ldots,a'_d)$ и $(a''_1,\ldots,a''_d)$ смежны тогда и только тогда, когда $|a'_1-a''_1|+\ldots+|a'_d-a''_d|=1$. Для $1\le j\le d$ мы полагаем $\mathrm{Pr}_j: V(\Lambda^d)\to\mathbb{Z}$, $\mathrm{Pr}_j((a_1,a_2,\ldots,a_d))=a_j$. *Сдвигом* решетки Λ^d называется ее автоморфизм, который переводит произвольную вершину $(a_1,\ldots,a_d)$ в вершину $(a_1+k_1,\ldots,a_d+k_d)$ для некоторых фиксированных целых чисел $k_1,\ldots,k_d$. Для каждого $1\le i\le d$ определим t_i как сдвиг решетки Λ^d такой, что $k_i=1$ и $k_j=0$ для всех $j\in\{1,\ldots,d\}\backslash\{i\}$. Обозначим через $Aut_0(\Lambda^d)$ изоморфную $\mathbb{Z}^d$ подгруппу группы автоморфизмов решетки Λ^d, состоящую из всех ее сдвигов. Следуя [1], для целого положительного числа q связный граф Γ назовем $Aut_0(\Lambda^d)$-*симметрическим q-расширением решетки* Λ^d, если существуют такая вершинно-транзитивная группа G автоморфизмов графа Γ и такая система импримитивности σ группы G на $V(\Gamma)$ с блоками порядка q, что для некоторого изоморфизма φ графа Γ/σ на решетку Λ^d справедливо $\varphi G^\sigma\varphi^{-1}=Aut_0(\Lambda^d)$. При этом будем говорить, что Γ — $Aut_0(\Lambda^d)$-симметрическое q-расширение решетки Λ^d, *реализуемое G, σ, φ*.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 10-01-00349-а), программы Отделения математических наук РАН (проект 09-Т-1-1004), а также программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 09-С-1-1007) и с НАН Беларуси (проект 09-С-1-1009).

В [2] перечислены все $Aut_0(\Lambda^d)$-симметрические 2-расширения решетки Λ^d для произвольного целого числа d. В [3] перечислены все $Aut_0(\Lambda^d)$-симметрические 3-расширения решетки Λ^d для $d = 1$ (5 графов) и для $d = 2$ (31 граф). В [3] нами был получен критерий конечности множества симметрических q-расширений 2-мерной решетки для произвольного целого числа q (см. [3, теорема 3], этот критерий формулируется ниже в предложении 3). На основе этого критерия в [3] была, в частности, доказана конечность множества $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрических q-расширений решетки Λ^2 для произвольного простого числа q. Основным результатом настоящей работы является доказательство на основе того же критерия [3, теорема 3] конечности множества $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрических 4-расширений решетки Λ^2. Кроме того, в настоящей работе перечисляются все $Aut_0(\Lambda^1)$-симметрические 4-расширения решетки Λ^1.

Конечность числа $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрических 4-расширений решетки Λ^2 получена нами в приводимой ниже теореме, в формулировке которой используется следующее определение из [3]. Пусть Γ — симметрическое q-расширение решетки Λ^2 для некоторого целого положительного числа q, реализуемое G, σ, φ. Для каждого $i \in \{1, 2\}$ следующим образом определим целое неотрицательное число $r_i(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$. Для произвольных целых чисел $l_1 \leq l_2$ положим $X_{l_1,l_2} := \{x \in V(\Gamma) : l_1 \leq \mathrm{Pr}_i(\varphi(x^\sigma)) < (l_2 + 1)$ и $\mathrm{Pr}_{3-i}(\varphi(x^\sigma)) = 0\}$, и пусть $S_{l_1,l_2} := G_{X_{l_1,l_2}}$ — поэлементный стабилизатор множества X_{l_1,l_2} в группе G. Тогда $r_i(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ есть наименьшее из неотрицательных целых чисел r таких, что $S_{-r,r}^{X_{r+1,r+1}} = S_{-t,r}^{X_{r+1,r+1}}$ и $S_{-r,r}^{X_{-r-1,-r-1}} = S_{-r,t}^{X_{-r-1,-r-1}}$ для всех целых чисел $t \geq r$. Напомним, кроме того, что для произвольного связного графа Γ через $Aut_0(\Gamma)$ обозначается группа его ограниченных автоморфизмов, т. е. таких автоморфизмов g, что расстояния в графе Γ между x и $g(x)$, где x пробегает множество всех вершин графа Γ, ограничены в совокупности.

Теорема. *Пусть* Γ — $Aut_0(\Lambda^2)$*-симметрическое* 4*-расширение решетки* Λ^2*, реализуемое некоторыми* G, σ, φ*. Тогда* Γ *является* $Aut_0(\Lambda^2)$*-симметрическим* 4*-расширением решетки* Λ^2*, реализуемым* $Aut_0(\Gamma)$, σ, φ, *и* $r_i(\Gamma, Aut_0(\Gamma), \sigma, \varphi) = 0$ *для некоторого* $i \in \{1, 2\}$. *В частности, с учетом* [3, *теорема* 3] *имеется лишь конечное множество* $Aut_0(\Lambda^2)$*-симметрических* 4*-расширений решетки* Λ^2.

Доказательство теоремы содержится в разд. 4. В разд. 2 приводятся необходимые определения и используемые результаты. В разд. 3 перечисляются $Aut_0(\Lambda^1)$-симметрические 4-расширения решетки Λ^1 и устанавливаются некоторые их свойства, которые используются при доказательстве теоремы.

2. Определения и используемые результаты

В настоящем разделе приводятся необходимые для дальнейшего определения и результаты. Используемые в работе обозначения стандартны. Если Γ — граф и $X \in V(\Gamma)$, то через $\langle X \rangle_\Gamma$ обозначается подгаф графа Γ, порожденный множеством вершин X. Для графа Γ и разбиения σ множества вершин графа Γ через x^σ, где x — вершина графа Γ, обозначается подмножество из σ, содержащее x. Через Γ/σ обозначается фактор-граф графа Γ по разбиению σ. Если g — автоморфизм графа Γ, сохраняющий σ, то g^σ — автоморфизм графа Γ/σ, индуцируемый g. Если g — автоморфизм графа Γ и X — g-инвариантное множество вершин графа Γ, то g^X — подстановка на X, индуцируемая g. Для графа Γ через $\Gamma(x)$ обозначим окрестность вершины x.

Если в определении $Aut_0(\Lambda^d)$-симметрического q-расширения решетки Λ^d опустить требование связности, то получим определение *обобщенного* $Aut_0(\Lambda^d)$*-симметрического* q*-расширения решетки* Λ^d. Другими словами, для целого положительного числа q граф Γ' назовем обобщенным $Aut_0(\Lambda^d)$-симметрическим q-расширением решетки Λ^d, если существуют такая вершинно-транзитивная группа G' автоморфизмов графа Γ' и такая система импримитивности σ' группы G' на $V(\Gamma')$ с блоками порядка q, что для некоторого изоморфизма φ' графа

Γ'/σ' на решетку Λ^d справедливо $\varphi' G^{\sigma} \varphi'^{-1} = Aut_0(\Lambda^d)$. При этом будем говорить, что Γ — обобщенное $Aut_0(\Lambda^d)$-симметрическое q-расширение решетки Λ^d, *реализуемое* G, σ, φ.

Пусть Γ — произвольное $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрическое 4-расширение графа Λ^2, реализуемое G, σ, φ (т.е. G — вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ, σ — система импримитивности группы G на $V(\Gamma)$ с блоками порядка 4, φ — изоморфизм графа Γ/σ на решетку Λ^2 и $\varphi G^{\sigma} \varphi^{-1} = Aut_0(\Lambda^2)$). Для $i \in \{1, 2\}$ скажем, что в графе Γ *относительно* φ *направление* $\{i\}$ *реализует тип* Γ', если подграф графа Γ, порожденный множеством $\{x \in V(\Gamma) : \mathrm{Pr}_{3-i}(\varphi(x^{\sigma})) = 0\}$, изоморфен Γ'. (Заметим, что в этом случае Γ' является обобщенным $Aut_0(\Lambda^1)$-симметрическим 4-расширением графа Λ^1.)

Для доказательства теоремы, сформулированной во введении, нам понадобятся некоторые из полученных в [1] и [3] результатов (см. предложения 1–3 ниже). Для формулировки первого из них напомним, что согласно [4, следствие 2(i)] множество $T(Aut_0(\Gamma))$ ограниченных автоморфизмов конечного порядка связного графа Γ с конечными валентностями вершин является (нормальной) подгруппой группы $Aut(\Gamma)$. Следующий результат получен в [1].

Предложение 1. *Пусть Γ — $Aut_0(\Lambda^d)$-симметрическое q-расширение решетки Λ^d для некоторых $d \geq 1$, $q \geq 1$ и G, σ — соответствующие этому расширению вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ и система импримитивности группы G на $V(\Gamma)$. Тогда блоки σ являются $T(Aut_0(\Gamma))$-орбитами на $V(\Gamma)$.*

Замечание 1. Как следует из предложения 1, если Γ — $Aut_0(\Lambda^d)$-симметрическое q-расширение решетки Λ^d, реализуемое некоторыми G, σ, φ, то σ однозначно определяется по графу Γ (как множество $T(Aut_0(\Gamma))$-орбит на $V(\Gamma)$) и Γ является $Aut_0(\Lambda^d)$-симметрическим q-расширением решетки Λ^d, реализуемым $Aut_0(\Gamma)$, σ, φ. Разбиение σ множества $V(\Gamma)$, состоящее из $T(Aut_0(\Gamma))$-орбит на $V(\Gamma)$, называется *соответствующей* Γ (как $Aut_0(\Lambda^d)$-симметрическому q-расширению решетки Λ^d) *системой блоков*.

Следующий результат доказан в [3, разд. 3].

Предложение 2. *Пусть $r_i(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ — целое неотрицательное число, определенное выше. Тогда $r_i(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ есть наименьшее из неотрицательных целых чисел r таких, что $S_{-r,r}^{X_{r+1,r+1}} = S_{-t,r}^{X_{r+1,r+1}}$ для всех целых чисел $t \geq r$, а также $r_i(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ есть наименьшее из неотрицательных целых чисел r таких, что $S_{-r,r}^{X_{-r-1,-r-1}} = S_{-r,t}^{X_{-r-1,-r-1}}$ для всех целых чисел $t \geq r$.*

Доказательство утверждения теоремы о конечности множества $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрических 4-расширений решетки Λ^2 непосредственно следует из первого утверждения теоремы (из равенства $r_i(\Gamma, Aut_0(\Gamma), \sigma, \varphi) = 0$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$) и следующего критерия конечности множества симметрических q-расширений решетки Λ^2, доказанного в [3, теорема 3].

Предложение 3. *Пусть $\mathcal{G} = \{\Gamma_j : j \in J\}$ — некоторое множество симметрических q-расширений решетки Λ^2, где q — фиксированное целое положительное число. Тогда $\mathcal{G}$ конечно в том и только том случае, когда для некоторого целого неотрицательного числа r и каждого $j \in J$ симметрическое q-расширение Γ_j решетки Λ^2 может быть реализовано такими G_j, σ_j, φ_j, что $r_1(\Gamma_j, G_j, \sigma_j, \varphi_j) \leq r$ или $r_2(\Gamma_j, G_j, \sigma_j, \varphi_j) \leq r$.*

3. $Aut_0(\Lambda^1)$-симметрические 4-расширения решетки Λ^1

В настоящем разделе приводится список всех обобщенных $Aut_0(\Lambda^1)$-симметрических 4-расширений решетки Λ^1. (Несвязные обобщенные $Aut_0(\Lambda^1)$-симметрические 4-расширения решетки Λ^1 потребуются нам при построении $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрических 4-расширений решетки Λ^2 в разд. 4.)

Несложно показать, что обобщенные $Aut_0(\Lambda^1)$-симметрические 4-расширения решетки Λ^1 исчерпываются следующими графами $\Gamma_n^{1,4}$, $1 \le n \le 34$ (верхние индексы 1, 4 означают, что $\Gamma_n^{1,4}$ являются обобщенными $Aut_0(\Lambda^1)$-симметрическими 4-расширениями 1-мерной решетки Λ^1), при этом графы $\Gamma_n^{1,4}$, $1 \le n \le 30$, связны, а графы $\Gamma_n^{1,4}$, $31 \le n \le 34$, несвязны.

Для каждого $1 \le n \le 34$

$$V(\Gamma_n^{1,4}) = \{(i,k) : i \in \mathbb{Z}, k \in \{1,2,3,4\}\}.$$

Для каждого $1 \le n \le 34$

$$E(\Gamma_n^{1,4}) = E_0(\Gamma_n^{1,4}) \cup E_1(\Gamma_n^{1,4}), \text{ где}$$

$$E_0(\Gamma_n^{1,4}) = E(\Gamma_n^{1,4}) \cap D_0, \text{ и } D_0 = \big\{\{(i,k),(i,l)\} : i \in \mathbb{Z}, k,l \in \{1,2,3,4\}, k \ne l\big\},$$

$$E_1(\Gamma_n^{1,4}) = E(\Gamma_n^{1,4}) \cap D_1, \text{ и } D_1 = \big\{\{(i,k),(i+1,l)\} : i \in \mathbb{Z}, k,l \in \{1,2,3,4\}\big\},$$

и множества $E_0(\Gamma_n^{1,4})$ и $E_1(\Gamma_n^{1,4})$ задаются следующим образом.

$n=1:$ $\quad E_0(\Gamma_1^{1,4}) = D_0, \quad E_1(\Gamma_1^{1,4}) = \big\{\{(i,k),(i+1,k)\} : i \in \mathbb{Z}, k \in \{1,2,3,4\}\big\}.$

$n=2:$ $\quad E_0(\Gamma_2^{1,4}) = D_0 \setminus \big\{\{(i,1),(i,3)\},\{(i,2),(i,4)\} : i \in \mathbb{Z}\big\}, \quad E_1(\Gamma_2^{1,4}) = E_1(\Gamma_1^{1,4}).$

$n=3:$ $\quad E_0(\Gamma_3^{1,4}) = D_0 \setminus \big\{\{(i,1),(i,3)\},\{(i,2),(i,4)\} : i \in \mathbb{Z}\big\},$

$$E_1(\Gamma_3^{1,4}) = \big\{\{(i,1),(i+1,1)\},\{(i,2),(i+1,2)\},\{(i,3),(i+1,4)\},\{(i,4),(i+1,3)\}\big\}.$$

$n=4:$ $\quad E_0(\Gamma_4^{1,4}) = \big\{\{(i,1),(i,3)\},\{(i,2),(i,4)\} : i \in \mathbb{Z}\big\}, \quad E_1(\Gamma_4^{1,4}) = E_1(\Gamma_3^{1,4}).$

$n=5:$ $\quad E_0(\Gamma_5^{1,4}) = D_0 \setminus \big\{\{(i,1),(i,3)\},\{(i,2),(i,4)\} : i \in \mathbb{Z}\big\},$

$$E_1(\Gamma_5^{1,4}) = \big\{\{(i,1),(i+1,1)\},\{(i,2),(i+1,3)\},\{(i,3),(i+1,4)\},\{(i,4),(i+1,2)\}\big\}.$$

$n=6:$ $\quad E_0(\Gamma_6^{1,4}) = \big\{\{(i,1),(i,3)\},\{(i,2),(i,4)\} : i \in \mathbb{Z}\big\}, \quad E_1(\Gamma_6^{1,4}) = E_1(\Gamma_5^{1,4}).$

$n=7:$ $\quad E_0(\Gamma_7^{1,4}) = D_0, \quad E_1(\Gamma_7^{1,4}) = \big\{\{(i,k),(i+1,k)\} : i \in \mathbb{Z}, k \in \{1,2,3,4\}\big\}$

$$\cup \big\{\{(i,1),(i+1,2)\},\{(i,2),(i+1,1)\},\{(i,3),(i+1,4)\},\{(i,4),(i+1,3)\} : i \in \mathbb{Z}\big\}.$$

$n=8:$ $\quad E_0(\Gamma_8^{1,4}) = D_0 \setminus \big\{\{(i,1),(i,3)\},\{(i,2),(i,4)\} : i \in \mathbb{Z}\big\}, \quad E_1(\Gamma_8^{1,4}) = E_1(\Gamma_7^{1,4}).$

$n=9:$ $\quad E_0(\Gamma_9^{1,4}) = D_0 \setminus \big\{\{(i,1),(i,2)\},\{(i,3),(i,4)\} : i \in \mathbb{Z}\big\}, \quad E_1(\Gamma_9^{1,4}) = E_1(\Gamma_7^{1,4}).$

$n=10:$ $\quad E_0(\Gamma_{10}^{1,4}) = \big\{\{(i,1),(i,3)\},\{(i,2),(i,4)\} : i \in \mathbb{Z}\big\}, \quad E_1(\Gamma_{10}^{1,4}) = E_1(\Gamma_7^{1,4}).$

$n=11:$ $\quad E_0(\Gamma_{11}^{1,4}) = D_0, \quad E_1(\Gamma_{11}^{1,4}) = \big\{\{(i,1),(i+1,1)\},\{(i,1),(i+1,3)\},$

$$\{(i,2),(i+1,1)\},\{(i,2),(i+1,3)\},\{(i,3),(i+1,2)\},\{(i,3),(i+1,4)\},$$

$$\{(i,4),(i+1,2)\},\{(i,4),(i+1,4)\} : i \in \mathbb{Z}\big\}.$$

$n=12:$ $\quad E_0(\Gamma_{12}^{1,4}) = D_0 \setminus \big\{\{(i,1),(i,3)\},\{(i,2),(i,4)\} : i \in \mathbb{Z}\big\}, \quad E_1(\Gamma_{12}^{1,4}) = E_1(\Gamma_{11}^{1,4}).$

$n=13:$ $\quad E_0(\Gamma_{13}^{1,4}) = \big\{\{(i,1),(i,3)\},\{(i,2),(i,4)\} : i \in \mathbb{Z}\big\}, \quad E_1(\Gamma_{13}^{1,4}) = E_1(\Gamma_{11}^{1,4}).$

$n=14:$ $\quad E_0(\Gamma_{14}^{1,4}) = \varnothing, \quad E_1(\Gamma_{14}^{1,4}) = E_1(\Gamma_{11}^{1,4}).$

$n=15:$ $\quad E_0(\Gamma_{15}^{1,4}) = D_0, \quad E_1(\Gamma_{15}^{1,4}) = \big\{\{(i,1),(i+1,1)\},\{(i,1),(i+1,2)\},$

$$\{(i,2),(i+1,2)\},\{(i,2),(i+1,3)\},\{(i,3),(i+1,3)\},\{(i,3),(i+1,4)\},$$

$$\{(i,4),(i+1,4)\},\{(i,4),(i+1,1)\} : i \in \mathbb{Z}\big\}.$$

$n = 16:$ $\quad E_0(\Gamma_{16}^{1,4}) = D_0 \setminus \big\{\{(i,1),(i,3)\},\{(i,2),(i,4)\} : i \in \mathbb{Z}\big\}, \quad E_1(\Gamma_{16}^{1,4}) = E_1(\Gamma_{15}^{1,4}).$

$n = 17:$ $\quad E_0(\Gamma_{17}^{1,4}) = \big\{\{(i,1),(i,3)\},\{(i,2),(i,4)\} : i \in \mathbb{Z}\big\}, \quad E_1(\Gamma_{17}^{1,4}) = E_1(\Gamma_{15}^{1,4}).$

$n = 18:$ $\quad E_0(\Gamma_{18}^{1,4}) = \varnothing, \quad E_1(\Gamma_{18}^{1,4}) = E_1(\Gamma_{15}^{1,4}).$

$n = 19:$ $\quad E_0(\Gamma_{19}^{1,4}) = D_0, \quad E_1(\Gamma_{19}^{1,4}) = D_1 \setminus E_1(\Gamma_{1}^{1,4}).$

$n = 20:$ $\quad E_0(\Gamma_{20}^{1,4}) = D_0 \setminus \big\{\{(i,1),(i,3)\},\{(i,2),(i,4)\} : i \in \mathbb{Z}\big\}, \quad E_1(\Gamma_{20}^{1,4}) = E_1(\Gamma_{19}^{1,4}).$

$n = 21:$ $\quad E_0(\Gamma_{21}^{1,4}) = \big\{\{(i,1),(i,3)\},\{(i,2),(i,4)\} : i \in \mathbb{Z}\big\}, \quad E_1(\Gamma_{21}^{1,4}) = E_1(\Gamma_{19}^{1,4}).$

$n = 22:$ $\quad E_0(\Gamma_{22}^{1,4}) = \varnothing, \quad E_1(\Gamma_{22}^{1,4}) = E_1(\Gamma_{19}^{1,4}).$

$n = 23:$ $\quad E_0(\Gamma_{23}^{1,4}) = D_0 \setminus \big\{\{(i,1),(i,3)\},\{(i,2),(i,4)\} : i \in \mathbb{Z}\big\}, \quad E_1(\Gamma_{23}^{1,4}) = D_1 \setminus E_1(\Gamma_{3}^{1,4}).$

$n = 24:$ $\quad E_0(\Gamma_{24}^{1,4}) = \big\{\{(i,1),(i,3)\},\{(i,2),(i,4)\} : i \in \mathbb{Z}\big\}, \quad E_1(\Gamma_{24}^{1,4}) = E_1(\Gamma_{23}^{1,4}).$

$n = 25:$ $\quad E_0(\Gamma_{25}^{1,4}) = D_0 \setminus \big\{\{(i,1),(i,3)\},\{(i,2),(i,4)\} : i \in \mathbb{Z}\big\}, \quad E_1(\Gamma_{25}^{1,4}) = D_1 \setminus E_1(\Gamma_{5}^{1,4}).$

$n = 26:$ $\quad E_0(\Gamma_{26}^{1,4}) = \big\{\{(i,1),(i,3)\},\{(i,2),(i,4)\} : i \in \mathbb{Z}\big\}, \quad E_1(\Gamma_{26}^{1,4}) = E_1(\Gamma_{25}^{1,4}).$

$n = 27:$ $\quad E_0(\Gamma_{27}^{1,4}) = D_0, \quad E_1(\Gamma_{27}^{1,4}) = D_1.$

$n = 28:$ $\quad E_0(\Gamma_{28}^{1,4}) = D_0 \setminus \big\{\{(i,1),(i,3)\},\{(i,2),(i,4)\} : i \in \mathbb{Z}\big\}, \quad E_1(\Gamma_{28}^{1,4}) = E_1(\Gamma_{27}^{1,4}).$

$n = 29:$ $\quad E_0(\Gamma_{29}^{1,4}) = \big\{\{(i,1),(i,3)\},\{(i,2),(i,4)\} : i \in \mathbb{Z}\big\}, \quad E_1(\Gamma_{29}^{1,4}) = E_1(\Gamma_{27}^{1,4}).$

$n = 30:$ $\quad E_0(\Gamma_{30}^{1,4}) = \varnothing, \quad E_1(\Gamma_{30}^{1,4}) = E_1(\Gamma_{27}^{1,4}).$

$n = 31:$ $\quad E_0(\Gamma_{31}^{1,4}) = \varnothing, \quad E_1(\Gamma_{31}^{1,4}) = E_1(\Gamma_{1}^{1,4}).$

$n = 32:$ $\quad E_0(\Gamma_{32}^{1,4}) = \big\{\{(i,1),(i,3)\},\{(i,2),(i,4)\} : i \in \mathbb{Z}\big\}, \quad E_1(\Gamma_{32}^{1,4}) = E_1(\Gamma_{1}^{1,4}).$

$n = 33:$ $\quad E_0(\Gamma_{33}^{1,4}) = \varnothing, \quad E_1(\Gamma_{33}^{1,4}) = E_1(\Gamma_{7}^{1,4}).$

$n = 34:$ $\quad E_0(\Gamma_{34}^{1,4}) = \big\{\{(i,1),(i,2)\},\{(i,3),(i,4)\} : i \in \mathbb{Z}\big\}, \quad E_1(\Gamma_{34}^{1,4}) = E_1(\Gamma_{7}^{1,4}).$

З а м е ч а н и е 2. Если Γ — любой из графов $\Gamma_n^{1,4}$, $1 \le n \le 34$, то отображение $a : V(\Gamma) \to V(\Gamma)$, $a((i,k)) = (i+1,k)$ для $i \in \mathbb{Z}$ и $k \in \{1,2,3,4\}$, является его автоморфизмом.

Далее в настоящем разделе устанавливается ряд свойств некоторых из определенных выше графов $\Gamma_n^{1,4}$, которые потребуются нам в следующем разделе при доказательстве теоремы.

Пусть Γ — один из графов $\Gamma_n^{1,4}$, $1 \le n \le 34$. Для каждого $i \in \mathbb{Z}$ положим $B_i = \{(i,1),(i,2),(i,3),(i,4)\}$. Заметим, что если $\Gamma = \Gamma_n^{1,4}$, где $n \in \{1,\ldots,30\}$, то множества B_i, $i \in \mathbb{Z}$, составляют систему блоков σ, соответствующую графу Γ как $Aut_0(\Lambda^1)$-симметрическому 4-расширению решетки Λ^1. Для каждого $i \in \mathbb{Z}$ обозначим через ι_i биекцию $B_i \to \{1,2,3,4\}$, $\iota_i((i,k)) = k$ для $k \in \{1,2,3,4\}$.

Следующим образом определим подстановки h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8 на множестве $\{1,2,3,4\}$: $h_1 = 1$, $h_2 = (1,2)(3,4)$, $h_3 = (1,3)(2,4)$, $h_4 = (1,4)(2,3)$, $h_5 = (1,2)$, $h_6 = (3,4)$, $h_7 = (1,3,2,4)$, $h_8 = (1,4,2,3)$. Тогда, если $\Gamma = \Gamma_n^{1,4}$, где $n \in \{7,8,9,10,11,12,13,14,33,34\}$, и h — автоморфизм графа Γ, стабилизирующий (глобально) блоки B_i, $i \in \mathbb{Z}$, то, как легко видеть, $\iota_i h^{B_i} \iota_i^{-1} \in \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8\}$ при $n \in \{7,9,33,34\}$ и $\iota_i h^{B_i} \iota_i^{-1} \in \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ при $n \in \{8,10,11,12,13,14\}$.

Предложение 4. 1) *Пусть* Γ — *один из графов* $\Gamma_7^{1,4}$, $\Gamma_9^{1,4}$, $\Gamma_{33}^{1,4}$, $\Gamma_{34}^{1,4}$ *и* h — *подстановка на множестве вершин графа* Γ, *стабилизирующая (глобально)* B_i *для каждого* $i \in \mathbb{Z}$. *Тогда* h *является автоморфизмом графа* Γ *в том и только том случае, когда для любого* $i \in \mathbb{Z}$ *пара* $(\iota_i h^{B_i} \iota_i^{-1},\ \iota_{i+1} h^{B_{i+1}} \iota_{i+1}^{-1})$ *принадлежит множеству*

$$\big\{(h_1,h_1),(h_1,h_2),(h_1,h_5),(h_1,h_6),(h_2,h_1),(h_2,h_2),(h_2,h_5),(h_2,h_6),(h_3,h_3),(h_3,h_4),(h_3,h_7),\\ (h_3,h_8),(h_4,h_3),(h_4,h_4),(h_4,h_7),(h_4,h_8),(h_5,h_1),(h_5,h_2),(h_5,h_5),(h_5,h_6),(h_6,h_1),(h_6,h_2),\\ (h_6,h_5),(h_6,h_6),(h_7,h_3),(h_7,h_4),(h_7,h_7),(h_7,h_8),(h_8,h_3),(h_8,h_4),(h_8,h_7),(h_8,h_8)\big\}.$$

2) *Пусть* Γ — *один из графов* $\Gamma_8^{1,4}$, $\Gamma_{10}^{1,4}$ *и* h — *подстановка на множестве вершин графа* Γ, *стабилизирующая (глобально)* B_i *для каждого* $i \in \mathbb{Z}$. *Тогда* h *является автоморфизмом графа* Γ *в том и только том случае, когда для любого* $i \in \mathbb{Z}$ *пара* $(\iota_i h^{B_i} \iota_i^{-1},\ \iota_{i+1} h^{B_{i+1}} \iota_{i+1}^{-1})$ *принадлежит множеству*

$$\big\{(h_1,h_1),(h_1,h_2),(h_2,h_1),(h_2,h_2),(h_3,h_3),(h_3,h_4),(h_4,h_3),(h_4,h_4)\big\}.$$

3) *Пусть* Γ — *один из графов* $\Gamma_{11}^{1,4}$, $\Gamma_{12}^{1,4}$, $\Gamma_{13}^{1,4}$, $\Gamma_{14}^{1,4}$ *и* h — *подстановка на множестве вершин графа* Γ, *стабилизирующая (глобально)* B_i *для каждого* $i \in \mathbb{Z}$. *Тогда* h *является автоморфизмом графа* Γ *в том и только том случае, когда для любого* $i \in \mathbb{Z}$ *пара* $(\iota_i h^{B_i} \iota_i^{-1},\ \iota_{i+1} h^{B_{i+1}} \iota_{i+1}^{-1})$ *принадлежит множеству*

$$\big\{(h_1,h_1),(h_1,h_3),(h_2,h_1),(h_2,h_3),(h_3,h_2),(h_3,h_4),(h_4,h_2),(h_4,h_4)\big\}.$$

Доказательство. 1) Предположим, что $h \in Aut(\Gamma)$ и h стабилизирует (глобально) B_i для каждого $i \in \mathbb{Z}$. Для произвольного $i \in \mathbb{Z}$ рассмотрим ограничение автоморфизма h на граф $\langle B_i \cup B_{i+1}\rangle_\Gamma$. Тогда из рассмотрения всех автоморфизмов этого графа следует справедливость утверждений:

если $\iota_i h^{B_i} \iota_i^{-1} = h_1$, то $\iota_{i+1} h^{B_{i+1}} \iota_{i+1}^{-1} \in \{h_1, h_2, h_5, h_6\}$;
если $\iota_i h^{B_i} \iota_i^{-1} = h_2$, то $\iota_{i+1} h^{B_{i+1}} \iota_{i+1}^{-1} \in \{h_1, h_2, h_5, h_6\}$;
если $\iota_i h^{B_i} \iota_i^{-1} = h_3$, то $\iota_{i+1} h^{B_{i+1}} \iota_{i+1}^{-1} \in \{h_3, h_4, h_7, h_8\}$;
если $\iota_i h^{B_i} \iota_i^{-1} = h_4$, то $\iota_{i+1} h^{B_{i+1}} \iota_{i+1}^{-1} \in \{h_3, h_4, h_7, h_8\}$;
если $\iota_i h^{B_i} \iota_i^{-1} = h_5$, то $\iota_{i+1} h^{B_{i+1}} \iota_{i+1}^{-1} \in \{h_1, h_2, h_5, h_6\}$;
если $\iota_i h^{B_i} \iota_i^{-1} = h_6$, то $\iota_{i+1} h^{B_{i+1}} \iota_{i+1}^{-1} \in \{h_1, h_2, h_5, h_6\}$;
если $\iota_i h^{B_i} \iota_i^{-1} = h_7$, то $\iota_{i+1} h^{B_{i+1}} \iota_{i+1}^{-1} \in \{h_3, h_4, h_7, h_8\}$;
если $\iota_i h^{B_i} \iota_i^{-1} = h_8$, то $\iota_{i+1} h^{B_{i+1}} \iota_{i+1}^{-1} \in \{h_3, h_4, h_7, h_8\}$.

Таким образом, пара $(\iota_i h^{B_i} \iota_i^{-1},\ \iota_{i+1} h^{B_{i+1}} \iota_{i+1}^{-1})$ принадлежит множеству из формулировки утверждения 1) предложения.

Обратно, пусть h — подстановка на множестве вершин графа Γ, стабилизирующая (глобально) B_i для каждого $i \in \mathbb{Z}$, причем для каждого $i \in \mathbb{Z}$ пара $(\iota_i h^{B_i} \iota_i^{-1},\ \iota_{i+1} h^{B_{i+1}} \iota_{i+1}^{-1})$ принадлежит множеству $\big\{(h_1,h_1),\ (h_1,h_2),\ (h_1,h_5),\ (h_1,h_6),\ (h_2,h_1),\ (h_2,h_2),\ (h_2,h_5),\ (h_2,h_6),\ (h_3,h_3),\ (h_3,h_4),\ (h_4,h_3),\ (h_4,h_4),\ (h_5,h_1),\ (h_5,h_2),\ (h_5,h_5),\ (h_5,h_6),\ (h_6,h_1),\ (h_6,h_2),\ (h_6,h_5),\ (h_6,h_6)\big\}$. Тогда для любого $i \in \mathbb{Z}$ ограничение h на множество $B_i \cup B_{i+1}$ является, как легко видеть, автоморфизмом графа $\langle B_i \cup B_{i+1}\rangle_\Gamma$ и, следовательно, автоморфизмом графа Γ.

2) Предположим, что $h \in Aut(\Gamma)$ и h стабилизирует (глобально) B_i для каждого $i \in \mathbb{Z}$. Для произвольного $i \in \mathbb{Z}$ рассмотрим ограничение автоморфизма h на граф $\langle B_i \cup B_{i+1}\rangle_\Gamma$. Тогда из рассмотрения всех автоморфизмов этого графа следует справедливость утверждений:

если $\iota_i h^{B_i} \iota_i^{-1} = h_1$, то $\iota_{i+1} h^{B_{i+1}} \iota_{i+1}^{-1} \in \{h_1, h_2\}$;
если $\iota_i h^{B_i} \iota_i^{-1} = h_2$, то $\iota_{i+1} h^{B_{i+1}} \iota_{i+1}^{-1} \in \{h_1, h_2\}$;
если $\iota_i h^{B_i} \iota_i^{-1} = h_3$, то $\iota_{i+1} h^{B_{i+1}} \iota_{i+1}^{-1} \in \{h_3, h_4\}$;
если $\iota_i h^{B_i} \iota_i^{-1} = h_4$, то $\iota_{i+1} h^{B_{i+1}} \iota_{i+1}^{-1} \in \{h_3, h_4\}$.

Таким образом, пара $(\iota_i h^{B_i} \iota_i^{-1},\ \iota_{i+1} h^{B_{i+1}} \iota_{i+1}^{-1})$ принадлежит множеству из формулировки утверждения 2) предложения.

Обратно, пусть h — подстановка на множестве вершин графа Γ, стабилизирующая (глобально) B_i для каждого $i \in \mathbb{Z}$, причем для каждого $i \in \mathbb{Z}$ пара $(\iota_i h^{B_i} \iota_i^{-1}, \iota_{i+1} h^{B_{i+1}} \iota_{i+1}^{-1})$ принадлежит множеству $\{(h_1, h_1), (h_1, h_2), (h_2, h_1), (h_2, h_2), (h_3, h_3), (h_3, h_4), (h_4, h_3), (h_4, h_4), (h_5, h_1)\}$. Тогда для любого $i \in \mathbb{Z}$ ограничение h на множество $B_i \cup B_{i+1}$ является, как легко видеть, автоморфизмом графа $\langle B_i \cup B_{i+1} \rangle_\Gamma$ и, следовательно, h является автоморфизмом графа Γ.

3) Предположим, что $h \in Aut(\Gamma)$ и h стабилизирует (глобально) B_i для каждого $i \in \mathbb{Z}$. Для произвольного $i \in \mathbb{Z}$ рассмотрим ограничение автоморфизма h на граф $\langle B_i \cup B_{i+1} \cup B_{i+2} \rangle_\Gamma$. Тогда из рассмотрения всех автоморфизмов этого графа следует справедливость утверждений:

если $\iota_i h^{B_i} \iota_i^{-1} = h_1$, то $\iota_{i+1} h^{B_{i+1}} \iota_{i+1}^{-1} \in \{h_1, h_3\}$;

если $\iota_i h^{B_i} \iota_i^{-1} = h_2$, то $\iota_{i+1} h^{B_{i+1}} \iota_{i+1}^{-1} \in \{h_1, h_3\}$;

если $\iota_i h^{B_i} \iota_i^{-1} = h_3$, то $\iota_{i+1} h^{B_{i+1}} \iota_{i+1}^{-1} \in \{h_2, h_4\}$;

если $\iota_i h^{B_i} \iota_i^{-1} = h_4$, то $\iota_{i+1} h^{B_{i+1}} \iota_{i+1}^{-1} \in \{h_2, h_4\}$.

Таким образом, пара $(\iota_i h^{B_i} \iota_i^{-1}, \iota_{i+1} h^{B_{i+1}} \iota_{i+1}^{-1})$ принадлежит множеству из формулировки утверждения 3) предложения.

Обратно, пусть h — подстановка на множестве вершин графа Γ, стабилизирующая (глобально) B_i для каждого $i \in \mathbb{Z}$, причем для каждого $i \in \mathbb{Z}$ пара $(\iota_i h^{B_i} \iota_i^{-1}, \iota_{i+1} h^{B_{i+1}} \iota_{i+1}^{-1})$ принадлежит множеству $\{(h_1, h_1), (h_1, h_3), (h_2, h_1), (h_2, h_3), (h_3, h_2), (h_3, h_4), (h_4, h_2), (h_4, h_4)\}$. Тогда для любого $i \in \mathbb{Z}$ ограничение h на множество $B_i \cup B_{i+1}$ является, как легко видеть, автоморфизмом графа $\langle B_i \cup B_{i+1} \rangle_\Gamma$, и, следовательно, h является автоморфизмом графа Γ.

4. Доказательство теоремы

Пусть Γ — $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрическое 4-расширение решетки Λ^2, реализуемое некоторыми G, σ, φ. Согласно замечанию 1, не теряя общности, можно считать, что $G = Aut_0(\Gamma)$. Покажем, что $r_i(\Gamma, Aut_0(\Gamma), \sigma, \varphi) = 0$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$.

Для произвольных $i, j \in \mathbb{Z}$ обозначим через $B_{i,j}$ полный прообраз при отображении φ вершины (i, j) решетки Λ^2. Ясно, что в направлении $\{1\}$ относительно φ реализуется один из типов $\Gamma_n^{1,4}$, где $n \in \{1, \ldots, 34\}$. Зафиксируем некоторый изоморфизм ψ (в точности одного) графа из приведенного в разд. 3 списка обобщенных $Aut_0(\Lambda^1)$-симметрических 4-расширений решетки Λ^1 на подграф графа Γ, порожденный множеством $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} B_{i,0}$. Не теряя общности, будем при этом считать, что $\psi(B_i) = B_{i,0}$ для каждого $i \in \mathbb{Z}$. (Действительно, если подграф Γ' графа Γ, порожденный множеством $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} B_{i,0}$, изоморфен графу $\Gamma_n^{1,4}$ для некоторого $1 \le n \le 30$, то, поскольку в силу предложения 1 множества B_i, $i \in \mathbb{Z}$, являются $T(Aut_0(\Gamma_n^{1,4}))$-орбитами, множества $\psi(B_i)$, $i \in \mathbb{Z}$, являются $T(Aut_0(\Gamma'))$-орбитами. В то же время, рассматривая ограничение на $V(\Gamma')$ стабилизатора $V(\Gamma')$ в группе G, заключаем на основании предложения 1, что множества $B_{i,0}$, $i \in \mathbb{Z}$, являются $T(Aut_0(\Gamma'))$-орбитами. Заменяя, возможно, φ на суперпозицию φ и автоморфизма $(i, j) \mapsto (-i, j)$, $i, j \in \mathbb{Z}$, решетки Λ^2, получаем отсюда, что $\psi(B_i) = B_{i+m,0}$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}$ и всех $i \in \mathbb{Z}$. С учетом наличия у $\Gamma_n^{1,4}$ автоморфизма, отображающего B_i в B_{i-m} для всех $i \in \mathbb{Z}$, можно считать, что $m = 0$, т. е. $\psi(B_i) = B_{i,0}$ для каждого $i \in \mathbb{Z}$. В оставшемся случае, когда подграф Γ' графа Γ, порожденный множеством $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} B_{i,0}$, изоморфен графу $\Gamma_n^{1,4}$ для некоторого $31 \le n \le 34$, существование изоморфизма ψ с требуемым свойством очевидно.) Зафиксируем, кроме того, некоторый автоморфизм a' графа Γ такой, что $(a')^\sigma = t_2$ (и, следовательно, $a'(B_{i,j}) = B_{i,j+1}$ для любых $i, j \in \mathbb{Z}$). Для произвольных $i, j \in \mathbb{Z}$ определим биекцию $\iota_{i,j} : B_{i,j} \to \{1, 2, 3, 4\}$, полагая $\iota_{i,j}(x) = k$, если $x = (a')^j(\psi((i, k)))$. Тогда для произвольной вершины x графа Γ найдутся $i, j \in \mathbb{Z}$ и $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ такие, что $x \in B_{i,j}$ и $\iota_{i,j}(x) = k$, причем сопоставление $x \mapsto (i, j, k)$ есть, очевидно, биекция множества $V(\Gamma)$ на множество $\{(i, j, k) : i, j \in \mathbb{Z},\ k \in \{1, 2, 3, 4\}\}$. Используя эту биекцию, отождествим $V(\Gamma)$ с множеством $\{(i, j, k) : i, j \in \mathbb{Z},\ k \in \{1, 2, 3, 4\}\}$.

Если $|\Gamma((i, j, k)) \cap B_{i+1,j}| \in \{1, 3\}$, то по [3, следствие 1] имеем $r_1(\Gamma, G, \sigma, \varphi) = 0$. Аналогично, если $|\Gamma((i, j, k)) \cap B_{i,j+1}| \in \{1, 3\}$, то $r_2(\Gamma, G, \sigma, \varphi) = 0$.

В дальнейшем предполагаем, что $|\Gamma((i,j,k)) \cap B_{i+1,j}| \in \{2,4\}$ и $|\Gamma((i,j,k)) \cap B_{i,j+1}| \in \{2,4\}$.

Предположим, что $|\Gamma(i,j,k) \cap B_{i+1,j}| = 4$ или $|\Gamma(i,j,k) \cap B_{i,j+1}| = 4$. Не теряя общности, будем предполагать, что $|\Gamma(i,j,k) \cap B_{i+1,j}| = 4$. Покажем, что в этом случае $r_1(\Gamma, G, \sigma, \varphi) = 0$. Для этого согласно предложению 2 достаточно показать, что $G_{B_{1,0}}^{B_{0,0}} = G_{B_{1,0} \cup B_{2,0} \cup \ldots}^{B_{0,0}}$. Очевидно, $G_{B_{1,0} \cup B_{2,0} \cup \ldots}^{B_{0,0}} \leq G_{B_{1,0}}^{B_{0,0}}$. Пусть $h^{B_{0,0}}$, где $h \in G_{B_{1,0}}$, — произвольный элемент из $G_{B_{1,0}}^{B_{0,0}}$. Определим следующим образом подстановку g на множестве вершин графа Γ, стабилизирующую (глобально) каждый блок $B_{i,j}$, $i,j \in \mathbb{Z}$. Положим $g^{B_{i,j}} = 1$ при $i,j \in \mathbb{Z}$, $i > 0$; $g^{B_{i,j}} = h^{B_{i,j}}$ при $i,j \in \mathbb{Z}$, $i \leq 0$. Тогда, очевидно, g индуцирует автоморфизм подграфа графа Γ, порожденного $\bigcup_{i,j \in \mathbb{Z},\ i>0} B_{i,j}$, и индуцирует автоморфизм подграфа графа Γ, порожденного $\bigcup_{i,j \in \mathbb{Z},\ i \leq 0} B_{i,j}$. Поскольку, кроме того, в графе Γ для любого $j \in \mathbb{Z}$ каждая вершина из блока $B_{0,j}$ связана с каждой вершиной из блока $B_{1,j}$, то g является автоморфизмом графа Γ, стабилизирующим глобально каждый блок $B_{1,j}$ и, следовательно, содержащимся в G. Далее, по выбору g имеем $g \in G_{B_{1,0} \cup B_{2,0} \cup \ldots}$ и $g^{B_{0,0}} = h^{B_{0,0}}$. Таким образом, равенство $G_{B_{1,0}}^{B_{0,0}} = G_{B_{1,0} \cup B_{2,0} \cup \ldots}^{B_{0,0}}$ доказано.

Для завершения доказательства теоремы остается рассмотреть случай, когда $|\Gamma((i,j,k)) \cap B_{i,j+1}| = 2$ и $|\Gamma((i,j,k)) \cap B_{i+1,j}| = 2$ для любых $i,j \in \mathbb{Z}$, $k \in \{1,2,3,4\}$. В этом случае в графе Γ относительно изоморфизма φ направления $\{1\}$, $\{2\}$ реализуют какие-то из типов $\Gamma_n^{1,4}$, где $n \in \{7, \ldots, 18, 33, 34\}$.

Обозначим через α систему импримитивности группы G на $V(\Gamma)$, блоками которой являются орбиты групп $G_{B_{i,j}}^{B_{i-1,j}}$, $i,j \in \mathbb{Z}$; через β — систему импримитивности группы G на $V(\Gamma)$, блоками которой являются орбиты групп $G_{B_{i,j}}^{B_{i+1,j}}$, $i,j \in \mathbb{Z}$; через γ — систему импримитивности группы G на $V(\Gamma)$, блоками которой являются орбиты групп $G_{B_{i,j}}^{B_{i,j-1}}$, $i,j \in \mathbb{Z}$; через δ — систему импримитивности группы G на $V(\Gamma)$, блоками которой являются орбиты групп $G_{B_{i,j}}^{B_{i,j+1}}$, $i,j \in \mathbb{Z}$.

Если в графе Γ система импримитивности α или система импримитивности β имеют одноэлементные блоки, то с учетом предложения 2 имеем $r_1(\Gamma, G, \sigma, \varphi) = 0$. Аналогично, если γ или δ имеют одноэлементные блоки, то с учетом предложения 2 имеем $r_2(\Gamma, G, \sigma, \varphi) = 0$. Таким образом, остается рассмотреть случай, когда блоки каждой из систем импримитивности α, β, γ, δ имеют порядок 2.

Далее предполагается, что каждая из систем импримитивности α, β, γ, δ имеет порядок 2. При этом по выбору функций $\iota_{i,j}$, $i,j \in \mathbb{Z}$, и замечанию 2 из разд. 3 каждая из систем импримитивности α, β имеет вид $\{\{(i,j,k_1),(i,j,k_2)\}, \{(i,j,l_1),(i,j,l_2)\} : i,j \in \mathbb{Z}\}$ для некоторых фиксированных (вообще говоря, своих для α и для β) k_1, k_2, l_1, l_2, где $\{k_1, k_2, l_1, l_2\} = \{1,2,3,4\}$. Кроме того, по выбору функций $\iota_{i,j}$, $i,j \in \mathbb{Z}$, для каждого $i \in \mathbb{Z}$ содержащиеся в $\cup_{j \in \mathbb{Z}} B_{i,j}$ блоки любой из систем импримитивности γ, δ имеют вид $\{\{(i,j,k_1),(i,j,k_2)\}, \{(i,j,l_1),(i,j,l_2)\} : j \in \mathbb{Z}\}$ для некоторых не зависящих от $j \in \mathbb{Z}$ чисел k_1, k_2, l_1, l_2, где $\{k_1, k_2, l_1, l_2\} = \{1,2,3,4\}$.

З а м е ч а н и е 3. Для любых двух систем импримитивности из α, β, γ, δ, если для некоторых $i,j \in \mathbb{Z}$ содержащийся в $B_{i,j}$ блок первой системы совпадает с блоком второй системы, то другой содержащийся в $B_{i,j}$ блок первой системы совпадает с блоком второй системы, и, следовательно, эти системы импримитивности совпадают.

З а м е ч а н и е 4. По выбору систем импримитивности α, β, γ, δ для произвольных $i,j \in \mathbb{Z}$ справедливы следующие утверждения. Если X, $Y = B_{i,j} \setminus X$ — блоки системы α, содержащиеся в $B_{i,j}$, и X', $Y' = B_{i+1,j} \setminus X'$ — блоки системы β, содержащиеся в $B_{i+1,j}$, то в графе Γ либо каждая вершина из X смежна с каждой вершиной из X', но не смежна ни с одной вершиной из Y', либо каждая вершина из X смежна с каждой вершиной из Y', но не смежна ни с одной вершиной из X'. Аналогично, если X, $Y = B_{i,j} \setminus X$ — блоки системы γ, содержащиеся в $B_{i,j}$, и X', $Y' = B_{i,j+1} \setminus X'$ — блоки системы δ, содержащиеся в $B_{i,j+1}$, то в графе Γ либо каждая вершина из X смежна с каждой вершиной из X', но не смежна ни с одной вершиной из Y', либо каждая вершина из X смежна с каждой вершиной из Y', но не смежна ни с одной вершиной из X'.

Реализуется один из следующих двух случаев.

С л у ч а й I. $\alpha = \beta$ или $\gamma = \delta$.

С л у ч а й II. $\alpha \neq \beta$ и $\gamma \neq \delta$.

В случае I будем, не теряя общности, считать, что $\alpha = \beta$. Заметим, что при этом в графе Γ относительно изоморфизма φ направление $\{1\}$ реализует тип $\Gamma_n^{1,4}$, где $n \in \{7, 8, 9, 10, 33, 34\}$, причем с учетом определения $\iota_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{Z}$, и предложения 4 получаем, что каждая из групп $\iota_{i+1,j} G_{B_{i,j}}^{B_{i+1,j}} \iota_{i+1,j}^{-1}$, $\iota_{i-1,j} G_{B_{i,j}}^{B_{i-1,j}} \iota_{i-1,j}^{-1}$, $i, j \in \mathbb{Z}$, есть либо $\{h_1, h_2, h_5, h_6\}$, либо $\{h_1, h_2\}$, и если $\iota_{i+1,j} G_{B_{i,j}}^{B_{i+1,j}} \iota_{i+1,j}^{-1}$ или $\iota_{i-1,j} G_{B_{i,j}}^{B_{i-1,j}} \iota_{i-1,j}^{-1}$ для некоторых $i, j \in \mathbb{Z}$ есть $\{h_1, h_2, h_5, h_6\}$, то $\alpha = \beta = \gamma = \delta$.

Очевидно, рассмотрение случая I (при $\alpha = \beta$) сводится к рассмотрению следующих трех подслучаев.

П о д с л у ч а й I.1. $\alpha = \beta = \gamma = \delta$.

П о д с л у ч а й I.2. $\gamma \neq \alpha = \beta \neq \delta$.

П о д с л у ч а й I.3. $\alpha = \beta = \gamma \neq \delta$ или $\alpha = \beta = \delta \neq \gamma$.

В случае II в графе Γ относительно изоморфизма φ каждое из направлений $\{1\}, \{2\}$ реализует один и тот же тип $\Gamma_n^{1,4}$, $n \in \{11, 12, 13, 14\}$, причем с учетом определения $\iota_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{Z}$, и предложению 4 имеем $\iota_{i+1,j} G_{B_{i,j}}^{B_{i+1,j}} \iota_{i+1,j}^{-1} = \{h_1, h_3\}$ и $\iota_{i-1,j} G_{B_{i,j}}^{B_{i-1,j}} \iota_{i-1,j}^{-1} = \{h_1, h_2\}$ для любых $i, j \in \mathbb{Z}$. В частности,

$$\alpha = \big\{\{(i,j,1),(i,j,2)\},\{(i,j,3),(i,j,4)\} : i,j \in \mathbb{Z}\big\},$$

$$\beta = \big\{\{(i,j,1),(i,j,3)\},\{(i,j,2),(i,j,4)\} : i,j \in \mathbb{Z}\big\}.$$

С учетом того, что имеется лишь три разбиения четырехэлементного множества на двухэлементные подмножества, рассмотрение случая II сводится к рассмотрению следующих двух подслучаев.

П о д с л у ч а й II.1. $\alpha = \gamma \neq \beta = \delta$ или $\alpha = \delta \neq \beta = \gamma$.

П о д с л у ч а й II.2. $\beta \neq \alpha = \gamma \neq \delta$ и $\beta \neq \delta$, или $\gamma \neq \alpha = \delta \neq \beta$ и $\beta \neq \gamma$, или $\alpha \neq \beta = \gamma \neq \delta$ и $\alpha \neq \delta$, или $\alpha \neq \beta = \delta \neq \gamma$ и $\alpha \neq \gamma$.

Далее предполагается, что Γ, α, β, γ, δ удовлетворяет условию одного из подслучаев I.1, I.2, I.3, II.1, II.2.

Предположим, что выполняются условия подслучая I.1. При этом предположении граф Γ однозначно восстанавливается по фактор-графу Γ/α и подграфу $\langle B_{0,0}\rangle_\Gamma$ графа Γ (см. замечание 4). При этом Γ/α является $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрическим 2-расширением решетки Λ^2 и, следовательно, согласно [2] изоморфен одному из графов $\Gamma_1^{2,2}$, $\Gamma_2^{2,2}$, $\Gamma_5^{2,2}$ из приведенного в [2] списка, а $\langle B_{0,0}\rangle_\Gamma$ совпадает, очевидно, с одним из следующих графов Δ_m, $1 \le m \le 6$:

$V(\Delta_m) = B_{0,0}$, $1 \le m \le 6$;

$E(\Delta_1) = \varnothing$;

$E(\Delta_2) = \big\{\{(0,0,1),(0,0,2)\},\{(0,0,3),(0,0,4)\}\big\}$;

$E(\Delta_3) = \big\{\{(0,0,1),(0,0,3)\},\{(0,0,2),(0,0,4)\}\big\}$;

$E(\Delta_4) = \big\{\{(0,0,1),(0,0,3)\},\{(0,0,3),(0,0,2)\},\{(0,0,2),(0,0,4)\},\{(0,0,4),(0,0,1)\}\big\}$;

$E(\Delta_5) = \big\{\{(0,0,1),(0,0,2)\},\{(0,0,2),(0,0,3)\},\{(0,0,3),(0,0,4)\},\{(0,0,4),(0,0,1)\}\big\}$;

$E(\Delta_6) = \big\{\{(0,0,1),(0,0,2)\},\{(0,0,2),(0,0,3)\},\{(0,0,3),(0,0,4)\},\{(0,0,4),(0,0,1)\},$
$\{(0,0,1),(0,0,3)\},\{(0,0,2),(0,0,4)\}\big\}$.

Поскольку некоторая вершина из $\{(0,0,1),(0,0,2)\}$ смежна в графе Γ с некоторой вершиной из $\{(0,0,3), (0,0,4)\}$ тогда и только тогда, когда Γ/α изоморфен $\Gamma_1^{2,2}$ или $\Gamma_2^{2,2}$, то

если $\Gamma/\alpha \cong \Gamma_1^{2,2}$, то $\langle B_{0,0}\rangle_\Gamma \in \{\Delta_3, \Delta_4, \Delta_5, \Delta_6\}$;

если $\Gamma/\alpha \cong \Gamma_2^{2,2}$, то $\langle B_{0,0}\rangle_\Gamma \in \{\Delta_3, \Delta_4, \Delta_5, \Delta_6\}$;

если $\Gamma/\alpha \cong \Gamma_5^{2,2}$, то $\langle B_{0,0}\rangle_\Gamma \in \{\Delta_1, \Delta_2\}$.

Таким образом, получаем следующие $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрические 4-расширения $\Gamma_n^{2,4}$, $1 \le n \le 10$, решетки Λ^2, удовлетворяющие условию подслучая I.1.

Для каждого $1 \le n \le 10$

$$V(\Gamma_n^{2,4}) = \{(i,j,k) : i,j \in \mathbb{Z}, k \in \{1,2,3,4\}\}.$$

Если $\Gamma/\alpha \cong \Gamma_1^{2,2}$ и $\langle B_{0,0}\rangle_\Gamma$ есть Δ_3, то Γ совпадает с графом $\Gamma_1^{2,4}$ с множеством ребер $E(\Gamma_1^{2,4}) = E_0(\Gamma_1^{2,4}) \cup E_1(\Gamma_1^{2,4}) \cup E_2(\Gamma_1^{2,4})$, где

$$\begin{aligned}
E_0(\Gamma_1^{2,4}) = \big\{&\{(i,j,1),(i,j,3)\},\{(i,j,2),(i,j,4)\} : i,j \in \mathbb{Z}\big\},\\
E_1(\Gamma_1^{2,4}) = \big\{&\{(i,j,1),(i+1,j,1)\},\{(i,j,1),(i+1,j,2)\},\{(i,j,2),(i+1,j,1)\},\\
&\{(i,j,2),(i+1,j,2)\},\{(i,j,3),(i+1,j,3)\},\{(i,j,3),(i+1,j,4)\},\\
&\{(i,j,4),(i+1,j,4)\},\{(i,j,4),(i+1,j,3) : i,j \in \mathbb{Z}\big\},\\
E_2(\Gamma_1^{2,4}) = \big\{&\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\\
&\{(i,j,2),(i,j+1,2)\},\{(i,j,3),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\\
&\{(i,j,4),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\} : i,j \in \mathbb{Z}\big\}.
\end{aligned}$$

Если $\Gamma/\alpha \cong \Gamma_1^{2,2}$ и $\langle B_{0,0}\rangle_\Gamma$ есть Δ_4, то Γ совпадает с графом $\Gamma_2^{2,4}$ с множеством ребер $E(\Gamma_2^{2,4}) = E_0(\Gamma_2^{2,4}) \cup E_1(\Gamma_2^{2,4}) \cup E_2(\Gamma_2^{2,4})$, где

$$\begin{aligned}
&E_0(\Gamma_2^{2,4}) = D_0 \setminus \big\{\{(i,j,1),(i,j,2)\},\{(i,j,3),(i,j,4)\} : i,j \in \mathbb{Z}\big\},\\
&E_1(\Gamma_2^{2,4}) = E_1(\Gamma_1^{2,4}), \quad E_2(\Gamma_2^{2,4}) = E_2(\Gamma_1^{2,4}).
\end{aligned}$$

Если $\Gamma/\alpha \cong \Gamma_1^{2,2}$ и $\langle B_{0,0}\rangle_\Gamma$ есть Δ_5, то Γ совпадает с графом $\Gamma_3^{2,4}$ с множеством ребер $E(\Gamma_3^{2,4}) = E_0(\Gamma_3^{2,4}) \cup E_1(\Gamma_3^{2,4}) \cup E_2(\Gamma_3^{2,4})$, где

$$\begin{aligned}
&E_0(\Gamma_3^{2,4}) = D_0 \setminus \big\{\{(i,j,1),(i,j,3)\},\{(i,j,2),(i,j,4)\} : i,j \in \mathbb{Z}\big\},\\
&E_1(\Gamma_3^{2,4}) = E_1(\Gamma_1^{2,4}), \quad E_2(\Gamma_3^{2,4}) = E_2(\Gamma_1^{2,4}).
\end{aligned}$$

Если $\Gamma/\alpha \cong \Gamma_1^{2,2}$ и $\langle B_{0,0}\rangle_\Gamma$ есть Δ_6, то Γ совпадает с графом $\Gamma_4^{2,4}$ с множеством ребер $E(\Gamma_4^{2,4}) = E_0(\Gamma_4^{2,4}) \cup E_1(\Gamma_4^{2,4}) \cup E_2(\Gamma_4^{2,4})$, где

$$E_0(\Gamma_4^{2,4}) = D_0, \quad E_1(\Gamma_4^{2,4}) = E_1(\Gamma_1^{2,4}), \quad E_2(\Gamma_4^{2,4}) = E_2(\Gamma_1^{2,4}).$$

Если $\Gamma/\alpha \cong \Gamma_2^{2,2}$ и $\langle B_{0,0}\rangle_\Gamma$ есть Δ_3, то Γ совпадает с графом $\Gamma_5^{2,4}$ с множеством ребер $E(\Gamma_5^{2,4}) = E_0(\Gamma_5^{2,4}) \cup E_1(\Gamma_5^{2,4}) \cup E_5(\Gamma_2^{2,4})$, где

$$\begin{aligned}
E_0(\Gamma_5^{2,4}) = \big\{&\{(i,j,1),(i,j,3)\},\{(i,j,2),(i,j,4)\} : i,j \in \mathbb{Z}\big\}, \quad E_1(\Gamma_5^{2,4}) = E_1(\Gamma_1^{2,4}),\\
E_2(\Gamma_5^{2,4}) = \big\{&\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\\
&\{(i,j,2),(i,j+1,2)\},\{(i,j,3),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\\
&\{(i,j,4),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\} : i,j \in \mathbb{Z},\ i \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)\ \big\}\\
\cup \big\{&\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,1),(i,j+1,4)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\\
&\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\\
&\{(i,j,4),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\} : i,j \in \mathbb{Z},\ i \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)\big\}.
\end{aligned}$$

Если $\Gamma/\alpha \cong \Gamma_2^{2,2}$ и $\langle B_{0,0}\rangle_\Gamma$ есть Δ_4, то Γ совпадает с графом $\Gamma_6^{2,4}$ с множеством ребер $E(\Gamma_6^{2,4}) = E_0(\Gamma_6^{2,4}) \cup E_1(\Gamma_6^{2,4}) \cup E_2(\Gamma_6^{2,4})$, где

$$\begin{aligned}
&E_0(\Gamma_6^{2,4}) = D_0 \setminus \big\{\{(i,j,1),(i,j,2)\},\{(i,j,3),(i,j,4)\} : i,j \in \mathbb{Z}\big\},\\
&E_1(\Gamma_6^{2,4}) = E_1(\Gamma_1^{2,4}), \quad E_2(\Gamma_6^{2,4}) = E_2(\Gamma_5^{2,4}).
\end{aligned}$$

Если $\Gamma/\alpha \cong \Gamma_2^{2,2}$ и $\langle B_{0,0}\rangle_\Gamma$ есть Δ_5, то Γ совпадает с графом $\Gamma_7^{2,4}$ с множеством ребер $E(\Gamma_7^{2,4}) = E_0(\Gamma_7^{2,4}) \cup E_1(\Gamma_7^{2,4}) \cup E_2(\Gamma_7^{2,4})$, где

$$\begin{aligned}
&E_0(\Gamma_7^{2,4}) = D_0 \setminus \big\{\{(i,j,1),(i,j,3)\},\{(i,j,2),(i,j,4)\} : i,j \in \mathbb{Z}\big\},\\
&E_1(\Gamma_7^{2,4}) = E_1(\Gamma_1^{2,4}), \quad E_2(\Gamma_7^{2,4}) = E_2(\Gamma_5^{2,4}).
\end{aligned}$$

Если $\Gamma/\alpha \cong \Gamma_2^{2,2}$ и $\langle B_{0,0}\rangle_\Gamma$ есть Δ_6, то Γ совпадает с графом $\Gamma_8^{2,4}$ с множеством ребер $E(\Gamma_8^{2,4}) = E_0(\Gamma_8^{2,4}) \cup E_1(\Gamma_8^{2,4}) \cup E_2(\Gamma_8^{2,4})$, где

$$E_0(\Gamma_8^{2,4}) = D_0, \quad E_1(\Gamma_8^{2,4}) = E_1(\Gamma_1^{2,4}), \quad E_2(\Gamma_8^{2,4}) = E_2(\Gamma_5^{2,4}).$$

Если $\Gamma/\alpha \cong \Gamma_5^{2,2}$ и $\langle B_{0,0}\rangle_\Gamma$ есть Δ_1, то Γ совпадает с графом $\Gamma_9^{2,4}$ с множеством ребер $E(\Gamma_9^{2,4}) = E_0(\Gamma_9^{2,4}) \cup E_1(\Gamma_9^{2,4}) \cup E_2(\Gamma_9^{2,4})$, где

$$E_0(\Gamma_9^{2,4}) = \varnothing, \quad E_1(\Gamma_9^{2,4}) = E_1(\Gamma_1^{2,4}), \quad E_2(\Gamma_9^{2,4}) = E_2(\Gamma_5^{2,4}).$$

Если $\Gamma/\alpha \cong \Gamma_5^{2,2}$ и $\langle B_{0,0}\rangle_\Gamma$ есть Δ_2, то Γ совпадает с графом $\Gamma_{10}^{2,4}$ с множеством ребер $E(\Gamma_{10}^{2,4}) = E_0(\Gamma_{10}^{2,4}) \cup E_1(\Gamma_{10}^{2,4}) \cup E_2(\Gamma_{10}^{2,4})$, где

$$E_0(\Gamma_{10}^{2,4}) = \big\{\{(i,j,1),(i,j,2)\},\{(i,j,3),(i,j,4)\} : i,j \in \mathbb{Z}\big\},$$
$$E_1(\Gamma_{10}^{2,4}) = E_1(\Gamma_1^{2,4}), \quad E_2(\Gamma_{10}^{2,4}) = E_2(\Gamma_5^{2,4}).$$

Поскольку, как легко видеть, для каждого из указанных выше графов $\Gamma_n^{2,4}$, $1 \le n \le 10$, имеем $G_{B_{1,0}}^{B_{0,0}} = G_{B_{1,0}\cup B_{2,0}\cup\ldots}^{B_{0,0}}$, то с учетом предложения 2 для любого графа Γ, удовлетворяющего условию подслучая I.1, справедливо равенство $r_1(\Gamma, G, \sigma, \varphi) = 0$.

Предположим, что выполняются условия подслучая I.2. Докажем, что $r_1(\Gamma, G, \sigma, \varphi) = 0$. Для этого по предложению 2 достаточно показать, что $G_{B_{1,0}}^{B_{0,0}} = G_{B_{1,0}\cup B_{2,0}\cup\ldots}^{B_{0,0}}$. Мы покажем, что существует такой $g \in G_{B_{1,0}\cup B_{2,0}\cup\ldots}$, что $\iota_{0,0} g^{B_{0,0}} \iota_{0,0}^{-1} = h_2$ и, следовательно, $\iota_{0,0} G_{B_{1,0}}^{B_{0,0}} \iota_{0,0}^{-1} = \iota_{0,0} G_{B_{1,0}\cup B_{2,0}\cup\ldots}^{B_{0,0}} \iota_{0,0}^{-1} = \{h_1, h_2\}$, откуда $G_{B_{1,0}}^{B_{0,0}} = G_{B_{1,0}\cup B_{2,0}\cup\ldots}^{B_{0,0}}$ и $r_1(\Gamma, G, \sigma, \varphi) = 0$.

Определим следующим образом подстановку g на множестве вершин графа Γ, стабилизирующую (глобально) каждый блок $B_{i,j}$, $i,j \in \mathbb{Z}$. Положим $\iota_{i,j} g^{B_{i,j}} \iota_{i,j}^{-1} = h_1$ при $i,j \in \mathbb{Z}$, $i > 0$; $\iota_{0,j} g^{B_{0,j}} \iota_{0,j}^{-1} = h_2$ при $j \in \mathbb{Z}$; $\iota_{i,j} g^{B_{i,j}} \iota_{i,j}^{-1} = h_1$ при $i,j \in \mathbb{Z}$, $i < 0$. Покажем, что g является автоморфизмом графа Γ.

Для произвольного $j' \in \mathbb{Z}$ по выбору функций $\iota_{i,j}$, $i,j \in \mathbb{Z}$, и предложению 4 ограничение g на множество $\cup_{i\in\mathbb{Z}} B_{i,j'}$ является автоморфизмом графа $\langle \cup_{i\in\mathbb{Z}} B_{i,j'}\rangle_\Gamma$. Поэтому для доказательства того, что g является автоморфизмом графа Γ, достаточно показать, что для любых $i,j \in \mathbb{Z}$ ограничение g на множество $B_{i,j} \cup B_{i,j+1}$ есть автоморфизм графа $\langle B_{i,j} \cup B_{i,j+1}\rangle_\Gamma$. Поскольку для $i,j \in \mathbb{Z}$ при $i \ne 0$ имеем $\iota_{i,j} g^{B_{i,j}} \iota_{i,j}^{-1} = h_1$ и $\iota_{i,j+1} g^{B_{i,j+1}} \iota_{i,j+1}^{-1} = h_1$, то $g^{B_{i,j}\cup B_{i,j+1}}$ является единичным автоморфизмом графа $\langle B_{i,j} \cup B_{i,j+1}\rangle_\Gamma$ для $i,j \in \mathbb{Z}$ при $i \ne 0$. Пусть $j \in \mathbb{Z}$ и X, $Y = B_{0,j} \setminus X$ — блоки системы γ, содержащиеся в $B_{0,j}$. Тогда согласно замечанию 4 найдутся такие содержащиеся в $B_{0,j+1}$ блоки X', $Y' = B_{0,j+1} \setminus X'$ системы δ, что в графе $\langle B_{0,j} \cup B_{0,j+1}\rangle_\Gamma$ каждая вершина из X смежна с каждой вершиной из X' и не смежна ни с одной вершиной из Y' и каждая вершина из Y смежна с каждой вершиной из Y' и не смежна ни с одной вершиной из X'. Так как $\iota_{0,j} g^{B_{0,j}} \iota_{0,j}^{-1} = h_2$ и $\iota_{0,j+1} g^{B_{0,j+1}} \iota_{0,j+1}^{-1} = h_2$, то с учетом $\gamma \ne \alpha = \beta \ne \delta$ и замечания 3 подстановка $g^{B_{0,j}\cup B_{0,j+1}}$ меняет местами X и Y и меняет местами X' и Y'. Поэтому $g^{B_{0,j}\cup B_{0,j+1}}$ является автоморфизмом графа $\langle B_{0,j} \cup B_{0,j+1}\rangle_\Gamma$, что и требовалось.

Предположим, что выполняются условия подслучая I.3. Не теряя общности, считаем, что $\alpha = \beta = \gamma \ne \delta$. Как было замечено выше, в рассматриваемом подслучае I.3 имеет место равенство $\iota_{0,0} G_{B_{1,0}}^{B_{0,0}} \iota_{0,0}^{-1} = \{h_1, h_2\}$. Пусть $g \in G_{B_{1,0}}$ и $\iota_{0,0} g^{B_{0,0}} \iota_{0,0}^{-1} = h_2$. Так как $g \in G_{B_{1,0}}$ и $\gamma = \alpha = \beta$, то g стабилизирует (глобально) каждое из множеств $\{(1,-1,1),(1,-1,2)\}$, $\{(1,-1,3),(1,-1,4)\}$ (являющихся блоками системы импримитивности $\alpha = \beta = \gamma$). Далее, по выбору функций $\iota_{i,j}$ для $i,j \in \mathbb{Z}$ (и с учетом того, что в графе Γ относительно изоморфизма φ направление $\{1\}$ реализует тип $\Gamma_n^{1,4}$, где $n \in \{7,8,9,10,33,34\}$) в Γ каждая из вершин $(1,-1,1),(1,-1,2)$ смежна с каждой из вершин $(0,-1,1),(0,-1,2)$ и не смежна ни с одной из вершин $(0,-1,3),(0,-1,4)$ (а каждая из вершин $(1,-1,3),(1,-1,4)$ смежна с каждой из вершин $(0,-1,3),(0,-1,4)$ и не смежна ни с одной из вершин $(0,-1,1),(0,-1,2)$). Следовательно, g стабилизирует (глобально) каждое из множеств $\{(0,-1,1),(0,-1,2)\}$, $\{(0,-1,3),\ (0,-1,4)\}$ (являющихся блоками системы импримитивности $\alpha = \beta = \gamma$). Но тогда с учетом замечания 4 элемент g стабилизирует (глобально) каждый из блоков системы импримитивности δ, содержащихся в $B_{0,0}$. Так как согласно замечанию 3 ни один из содержащихся в $B_{0,0}$ блоков системы импримитивности δ не является блоком системы импримитивности $\alpha = \beta = \gamma$ и, следовательно, не совпадает ни с одним из множеств $\{(0,0,1),(0,0,2)\}$, $\{(0,0,3),(0,0,4)\}$, это противоречит $\iota_{0,0} g^{B_{0,0}} \iota_{0,0}^{-1} = h_2$. Итак, случай I.3 невозможен.

Предположим, что выполняются условия подслучая II.1. Не теряя общности, будем считать, что $\alpha = \delta \ne \beta = \gamma$.

Лемма 1. *Пусть автоморфизм h графа Γ стабилизирует (глобально) каждый блок $B_{i,j}$, $i,j \in \mathbb{Z}$. Тогда для любых $i,j \in \mathbb{Z}$ тройка*

$$(\iota_{i,j} h^{B_{i,j}} \iota_{i,j}^{-1},\ \iota_{i+1,j} h^{B_{i+1,j}} \iota_{i+1,j}^{-1},\ \iota_{i+1,j+1} h^{B_{i+1,j+1}} \iota_{i+1,j+1}^{-1})$$

принадлежит множеству

$$\big\{(h_1,h_1,h_1),(h_1,h_3,h_1),(h_2,h_1,h_2),(h_2,h_3,h_2),(h_3,h_2,h_3),(h_3,h_4,h_3),(h_4,h_2,h_4),(h_4,h_4,h_4)\big\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть h — произвольный автоморфизм графа Γ, стабилизирующий (глобально) каждый блок $B_{i,j}$, $i,j \in \mathbb{Z}$. Тогда согласно предложению 4 для любых $i,j \in \mathbb{Z}$ пара $(\iota_{i,j} h^{B_{i,j}} \iota_{i,j}^{-1}, \iota_{i+1,j} h^{B_{i+1,j}} \iota_{i+1,j}^{-1})$ принадлежит множеству $\{(h_1,h_1)$, (h_1,h_3), (h_2,h_1), (h_2,h_3), (h_3,h_2), (h_3,h_4), (h_4,h_2), $(h_4,h_4)\}$.

Покажем, используя замечание 4, что для любых $i,j \in \mathbb{Z}$ пара $(\iota_{i,j} h^{B_{i,j}} \iota_{i,j}^{-1}, \iota_{i,j+1} h^{B_{i,j+1}} \iota_{i,j+1}^{-1})$ принадлежит множеству $\{(h_1,h_1)$, (h_1,h_2), (h_2,h_3), (h_2,h_4), (h_3,h_1), (h_3,h_2), (h_4,h_3), $(h_4,h_4)\}$.

Если $\iota_{i,j} h^{B_{i,j}} \iota_{i,j}^{-1} \in \{h_1, h_3$, то $h^{B_{i,j}}$ стабилизирует содержащиеся в $B_{i,j}$ блоки β и, следовательно, $h^{B_{i,j+1}}$ стабилизирует содержащиеся в $B_{i,j+1}$ блоки α, т. е. $\iota_{i,j+1} h^{B_{i,j+1}} \iota_{i,j+1}^{-1} \in \{h_1, h_2\}$.

Если $\iota_{i,j} h^{B_{i,j}} \iota_{i,j}^{-1} \in \{h_2, h_4\}$, то $h^{B_{i,j}}$ меняет местами содержащиеся в $B_{i,j}$ блоки β и, следовательно, $h^{B_{i,j+1}}$ меняет местами содержащиеся в $B_{i,j+1}$ блоки α, т. е. $\iota_{i,j+1} h^{B_{i,j+1}} \iota_{i,j+1}^{-1} \in \{h_3, h_4\}$.

Итак, если автоморфизм h графа Γ удовлетворяет условиям леммы 1, то, поскольку в силу доказанного для произвольных $i,j \in \mathbb{Z}$ справедливо

$$(\iota_{i,j} h^{B_{i,j}} \iota_{i,j}^{-1},\ \iota_{i+1,j} h^{B_{i+1,j}} \iota_{i+1,j}^{-1}),\ (\iota_{i,j+1} h^{B_{i,j+1}} \iota_{i,j+1}^{-1},\ \iota_{i+1,j+1} h^{B_{i+1,j+1}} \iota_{i+1,j+1}^{-1})$$
$$\in \big\{(h_1,h_1),(h_1,h_3),(h_2,h_1),(h_2,h_3),(h_3,h_2),(h_3,h_4),(h_4,h_2),(h_4,h_4)\big\}$$

и

$$(\iota_{i,j} h^{B_{i,j}} \iota_{i,j}^{-1},\ \iota_{i,j+1} h^{B_{i,j+1}} \iota_{i,j+1}^{-1}),(\iota_{i+1,j} h^{B_{i+1,j}} \iota_{i+1,j}^{-1},\ \iota_{i+1,j+1} h^{B_{i+1,j+1}} \iota_{i+1,j+1}^{-1})$$
$$\in \big\{(h_1,h_1),(h_1,h_2),(h_2,h_3),(h_2,h_4),(h_3,h_1),(h_3,h_2),(h_4,h_3),(h_4,h_4)\big\},$$

получаем, что тройка $(\iota_{i,j}\ h^{B_{i,j}} \iota_{i,j}^{-1},\ \iota_{i+1,j}\ h^{B_{i+1,j}} \iota_{i+1,j}^{-1},\ \iota_{i+1,j+1}\ h^{B_{i+1,j+1}} \iota_{i+1,j+1}^{-1})$ принадлежит требуемому множеству

$$\big\{(h_1,h_1,h_1),(h_1,h_3,h_1),(h_2,h_1,h_2),(h_2,h_3,h_2),(h_3,h_2,h_3),(h_3,h_4,h_3),(h_4,h_2,h_4),(h_4,h_4,h_4)\big\}.$$

Лемма 2. *Пусть h — подстановка на множестве вершин графа Γ, стабилизирующая (глобально) каждый блок $B_{i,j}$, $i,j \in \mathbb{Z}$, и такая, что для произвольных $i,j \in \mathbb{Z}$ тройка*

$$(\iota_{i,j} h^{B_{i,j}} \iota_{i,j}^{-1},\ \iota_{i+1,j} h^{B_{i+1,j}} \iota_{i+1,j}^{-1},\ \iota_{i+1,j+1} h^{B_{i+1,j+1}} \iota_{i+1,j+1}^{-1})$$

принадлежит множеству из леммы 1. *Тогда h — автоморфизм графа Γ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть h — подстановка на множестве вершин графа Γ, стабилизирующая (глобально) каждый блок $B_{i,j}$, $i,j \in \mathbb{Z}$, и такая, что для произвольных $i,j \in \mathbb{Z}$ тройка

$$(\iota_{i,j} h^{B_{i,j}} \iota_{i,j}^{-1},\ \iota_{i+1,j} h^{B_{i+1,j}} \iota_{i+1,j}^{-1},\ \iota_{i+1,j+1} h^{B_{i+1,j+1}} \iota_{i+1,j+1}^{-1})$$

принадлежит множеству

$$\big\{(h_1,h_1,h_1),(h_1,h_3,h_1),(h_2,h_1,h_2),(h_2,h_3,h_2),(h_3,h_2,h_3),(h_3,h_4,h_3),(h_4,h_2,h_4),(h_4,h_4,h_4)\big\}.$$

Тогда для любых $i,j \in \mathbb{Z}$ ограничение h на множество $B_{i,j} \cup B_{i+1,j} \cup B_{i+1,j+1} \cup B_{i,j+1}$ является автоморфизмом графа $\langle B_{i,j} \cup B_{i+1,j} \cup B_{i+1,j+1} \cup B_{i,j+1} \rangle_\Gamma$, и, следовательно, h является автоморфизмом графа Γ.

Докажем, что $r_1(\Gamma, G, \sigma, \varphi) = 0$ (где $G = Aut_0(\Gamma)$). Для этого, как замечено в предложении 2, достаточно показать, что $G_{B_{0,0}}^{B_{-1,0}} = G_{B_{0,0}\cup B_{1,0}\cup\ldots}^{B_{-1,0}}$. Из предложения 4 следует, что $\iota_{-1,0} G_{B_{0,0}}^{B_{-1,0}} \iota_{-1,0}^{-1}$ есть $\{h_1\}$ или $\{h_1, h_2\}$. Мы покажем, что существует $g \in G_{B_{0,0}\cup B_{1,0}\cup\ldots}$, для которого

$$\iota_{-1,0} g^{B_{-1,0}} \iota_{-1,0}^{-1} = h_2,$$

и, следовательно, $\iota_{-1,0} G_{B_{0,0}}^{B_{-1,0}} \iota_{-1,0}^{-1} = \iota_{0,0} G_{B_{0,0}\cup B_{1,0}\cup\ldots}^{B_{-1,0}} \iota_{0,0}^{-1} = \{h_1, h_2\}$, откуда $G_{B_{0,0}}^{B_{-1,0}} = G_{B_{0,0}\cup B_{1,0}\cup\ldots}^{B_{-1,0}}$ и $r_1(\Gamma, G, \sigma, \varphi) = 0$.

Определим следующим образом подстановку g на множестве вершин графа Γ, стабилизирующую (глобально) каждый блок $B_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{Z}$. Положим $\iota_{i,j} g^{B_{i,j}} \iota_{i,j}^{-1} = h_1$ при $i, j \in \mathbb{Z}$, $j \le i$; $\iota_{i-1,i} g^{B_{i-1,i}} \iota_{i-1,i}^{-1} = h_2$ для всех $i \in \mathbb{Z}$; $\iota_{i-2,i} g^{B_{i-2,i}} \iota_{i-2,i}^{-1} = h_3$ для всех $i \in \mathbb{Z}$; $\iota_{i-3,j} g^{B_{i-3,j}} \iota_{i-3,j}^{-1} = h_1$ для всех $i, j \in \mathbb{Z}$, $j \ge i$. Заметим, что для любых $i, j \in \mathbb{Z}$ тройка $(\iota_{i,j} g^{B_{i,j}} \iota_{i,j}^{-1},\ \iota_{i+1,j} g^{B_{i+1,j}} \iota_{i+1,j}^{-1},\ \iota_{i+1,j+1} g^{B_{i+1,j+1}} \iota_{i+1,j+1}^{-1})$ принадлежит множеству из леммы 1.

Для дальнейшего важно лишь, что существует подстановка g на множестве вершин графа Γ, стабилизирующая (глобально) каждый блок $B_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{Z}$, и обладающая следующими свойствами:

1) для любых $i, j \in \mathbb{Z}$ тройка $(\iota_{i,j} g^{B_{i,j}} \iota_{i,j}^{-1},\ \iota_{i+1,j} g^{B_{i+1,j}} \iota_{i+1,j}^{-1},\ \iota_{i+1,j+1} g^{B_{i+1,j+1}} \iota_{i+1,j+1}^{-1})$ принадлежит множеству из леммы 1;

2) $\iota_{i,0} g^{B_{i,0}} \iota_{i,0}^{-1} = h_1$ для всех $i \in \mathbb{Z}$, $i \ge 0$;

3) $\iota_{-1,0} g^{B_{-1,0}} \iota_{-1,0}^{-1} = h_2$.

В силу 1) и леммы 2 имеем $g \in Aut(\Gamma)$. Поскольку при этом g стабилизирует (глобально) каждый блок $B_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{Z}$, то $g \in Aut_0(\Gamma) = G$. Далее, в силу 2) имеем $g \in G_{B_{0,0}\cup B_{1,0}\cup\ldots}$. Наконец, из 3) следует, что $\iota_{-1,0} g^{B_{-1,0}} \iota_{-1,0}^{-1} = h_2$. Таким образом, g обладает требуемыми для завершения рассмотрения случая II.1 свойствами.

Предположим, что выполняются условия подслучая II.2. Не теряя общности, будем считать, что $\gamma \ne \alpha = \delta \ne \beta$.

Лемма 3. *Пусть автоморфизм h графа Γ стабилизирует (глобально) каждый блок $B_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{Z}$. Тогда для любых $i, j \in \mathbb{Z}$ тройка*

$$(\iota_{i,j} h^{B_{i,j}} \iota_{i,j}^{-1},\ \iota_{i+1,j} h^{B_{i+1,j}} \iota_{i+1,j}^{-1},\ \iota_{i+1,j+1} h^{B_{i+1,j+1}} \iota_{i+1,j+1}^{-1})$$

принадлежит множеству

$$\{(h_1,h_1,h_1),(h_1,h_3,h_3),(h_2,h_1,h_2),(h_2,h_3,h_4),(h_3,h_2,h_4),(h_3,h_4,h_2),(h_4,h_2,h_3),(h_4,h_4,h_1)\}.$$

Доказательство. Пусть h — произвольный автоморфизм графа Γ, стабилизирующий (глобально) каждый блок $B_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{Z}$. Тогда согласно предложению 4 для любых $i, j \in \mathbb{Z}$ пара $(\iota_{i,j} h^{B_{i,j}} \iota_{i,j}^{-1}, \iota_{i+1,j} h^{B_{i+1,j}} \iota_{i+1,j}^{-1})$ принадлежит множеству $\{(h_1, h_1), (h_1, h_3), (h_2, h_1), (h_2, h_3), (h_3, h_2), (h_3, h_4), (h_4, h_2), (h_4, h_4)\}$.

Покажем, используя замечание 4 покажем, что для любых $i, j \in \mathbb{Z}$ пара $(\iota_{i,j} h^{B_{i,j}} \iota_{i,j}^{-1}, \iota_{i,j+1} h^{B_{i,j+1}} \iota_{i,j+1}^{-1})$ принадлежит множеству $\{(h_1, h_1), (h_1, h_2), (h_2, h_3), (h_2, h_4), (h_3, h_3), (h_3, h_4), (h_4, h_1), (h_4, h_2)\}$.

Если $\iota_{i,j} h^{B_{i,j}} \iota_{i,j}^{-1} \in \{h_1, h_4\}$, то $h^{B_{i,j}}$ стабилизирует содержащиеся в $B_{i,j}$ блоки γ, и, следовательно, $h^{B_{i,j+1}}$ стабилизирует содержащиеся в $B_{i,j+1}$ блоки α, т. е. $\iota_{i,j+1} h^{B_{i,j+1}} \iota_{i,j+1}^{-1} \in \{h_1, h_2\}$.

Если $\iota_{i,j} h^{B_{i,j}} \iota_{i,j}^{-1} \in \{h_2, h_3\}$, то $h^{B_{i,j}}$ меняет местами содержащиеся в $B_{i,j}$ блоки γ, и, следовательно, $h^{B_{i,j+1}}$ меняет местами содержащиеся в $B_{i,j+1}$ блоки α, т. е. $\iota_{i,j+1} h^{B_{i,j+1}} \iota_{i,j+1}^{-1} \in \{h_3, h_4\}$.

Итак, если автоморфизм h графа Γ удовлетворяет условиям леммы 3, то, поскольку в силу доказанного для произвольных $i, j \in \mathbb{Z}$ справедливо

$$(\iota_{i,j}h^{B_{i,j}}\iota_{i,j}^{-1},\ \iota_{i+1,j}h^{B_{i+1,j}}\iota_{i+1,j}^{-1}),\ (\iota_{i,j+1}h^{B_{i,j+1}}\iota_{i,j+1}^{-1},\ \iota_{i+1,j+1}h^{B_{i+1,j+1}}\iota_{i+1,j+1}^{-1})$$
$$\in \big\{(h_1,h_1),(h_1,h_3),(h_2,h_1),(h_2,h_3),(h_3,h_2),(h_3,h_4),(h_4,h_2),(h_4,h_4)\big\}$$

и

$$(\iota_{i,j}h^{B_{i,j}}\iota_{i,j}^{-1},\ \iota_{i,j+1}h^{B_{i,j+1}}\iota_{i,j+1}^{-1}),\ (\iota_{i+1,j}h^{B_{i+1,j}}\iota_{i+1,j}^{-1},\ \iota_{i+1,j+1}h^{B_{i+1,j+1}}\iota_{i+1,j+1}^{-1})$$
$$\in \big\{(h_1,h_1),(h_1,h_2),(h_2,h_3),(h_2,h_4),(h_3,h_3),(h_3,h_4),(h_4,h_1),(h_4,h_2)\big\},$$

получаем, что тройка $(\iota_{i,j}\ h^{B_{i,j}}\iota_{i,j}^{-1},\ \iota_{i+1,j}\ h^{B_{i+1,j}}\iota_{i+1,j}^{-1},\ \iota_{i+1,j+1}\ h^{B_{i+1,j+1}}\ \iota_{i+1,j+1}^{-1})$ принадлежит требуемому множеству

$$\big\{(h_1,h_1,h_1),(h_1,h_3,h_3),(h_2,h_1,h_2),(h_2,h_3,h_4),(h_3,h_2,h_4),(h_3,h_4,h_2),(h_4,h_2,h_3),(h_4,h_4,h_1)\big\}.$$

Лемма 4. *Пусть h — подстановка на множестве вершин графа Γ, стабилизирующая (глобально) каждый блок $B_{i,j}$, $i,j\in\mathbb{Z}$, и такая, что для произвольных $i,j\in\mathbb{Z}$ тройка*

$$(\iota_{i,j}h^{B_{i,j}}\iota_{i,j}^{-1},\ \iota_{i+1,j}h^{B_{i+1,j}}\iota_{i+1,j}^{-1},\ \iota_{i+1,j+1}h^{B_{i+1,j+1}}\iota_{i+1,j+1}^{-1})$$

принадлежит множеству из леммы 3. *Тогда h — автоморфизм графа Γ.*

Доказательство. Пусть h — подстановка на множестве вершин графа Γ, стабилизирующая (глобально) каждый блок $B_{i,j}$, $i,j\in\mathbb{Z}$, и такая, что для произвольных $i,j\in\mathbb{Z}$ тройка

$$(\iota_{i,j}h^{B_{i,j}}\iota_{i,j}^{-1},\iota_{i+1,j}h^{B_{i+1,j}}\iota_{i+1,j}^{-1},\iota_{i+1,j+1}h^{B_{i+1,j+1}}\iota_{i+1,j+1}^{-1})$$

принадлежит множеству

$$\{(h_1,h_1,h_1),(h_1,h_3,h_3),(h_2,h_1,h_2),(h_2,h_3,h_4),(h_3,h_2,h_4),(h_3,h_4,h_2),(h_4,h_2,h_3),(h_4,h_4,h_1)\}.$$

Тогда для любых $i,j\in\mathbb{Z}$ ограничение h на множество $B_{i,j}\cup B_{i+1,j}\cup B_{i+1,j+1}\cup B_{i,j+1}$ является автоморфизмом графа $\langle B_{i,j}\cup B_{i+1,j}\cup B_{i+1,j+1}\cup\ B_{i,j+1}\rangle_\Gamma$, и, следовательно, h является автоморфизмом графа Γ.

Докажем, что $r_1(\Gamma,G,\sigma,\varphi)=0$ (где $G=Aut_0(\Gamma)$). Для этого, как замечено в предложении 2, достаточно показать, что $G_{B_{0,0}}^{B_{-1,0}}=G_{B_{0,0}\cup B_{1,0}\cup\ldots}^{B_{-1,0}}$. Из предложения 4 следует, что $\iota_{-1,0}G_{B_{0,0}}^{B_{-1,0}}\iota_{-1,0}^{-1}$ есть $\{h_1\}$ или $\{h_1,h_2\}$. Мы покажем, что существует $g\in G_{B_{0,0}\cup B_{1,0}\cup\ldots}$, для которого

$$\iota_{-1,0}g^{B_{-1,0}}\iota_{-1,0}^{-1}=h_2,$$

и, следовательно, $\iota_{-1,0}G_{B_{0,0}}^{B_{-1,0}}\iota_{-1,0}^{-1}=\iota_{0,0}G_{B_{0,0}\cup B_{1,0}\cup\ldots}^{B_{-1,0}}\iota_{0,0}^{-1}=\{h_1,h_2\}$, откуда $G_{B_{0,0}}^{B_{-1,0}}=G_{B_{0,0}\cup B_{1,0}\cup\ldots}^{B_{-1,0}}$ и $r_1(\Gamma,G,\sigma,\varphi)=0$.

Определим индуктивно (по s) подстановку g на множестве вершин графа Γ, стабилизирующую (глобально) каждый блок $B_{i,j}$, $i,j\in\mathbb{Z}$. Положим $\iota_{i,j}g^{B_{i,j}}\iota_{i,j}^{-1}=h_1$ при $i,j\in\mathbb{Z}$, $j\le i$; $\iota_{i-1,i}g^{B_{i-1,i}}\iota_{i-1,i}^{-1}=h_2$ для всех $i\in\mathbb{Z}$; $\iota_{0,j}g^{B_{0,j}}\iota_{0,j}^{-1}=h_3$ для $j\in\mathbb{Z}$, $j\ge 2$. Заметим, что для любых $i,j\in\mathbb{Z}$, $j\le i+1$, тройка $(\iota_{i,j}g^{B_{i,j}}\iota_{i,j}^{-1},\ \iota_{i+1,j}g^{B_{i+1,j}}\iota_{i+1,j}^{-1},\ \iota_{i+1,j+1}g^{B_{i+1,j+1}}\ \iota_{i+1,j+1}^{-1})$ принадлежит множеству из леммы 3. Далее, предполагая, что для некоторого целого $s\ge 1$ строящаяся подстановка g уже определена на всех блоках $B_{i,j}$, где $j\le i+s$, причем для произвольных $i,j\in\mathbb{Z}$, $j\le i+s$, тройка $(\iota_{i,j}g^{B_{i,j}}\iota_{i,j}^{-1},\ \iota_{i+1,j}g^{B_{i+1,j}}\iota_{i+1,j}^{-1},\ \iota_{i+1,j+1}g^{B_{i+1,j+1}}\iota_{i+1,j+1}^{-1})$ принадлежит множеству из леммы 3, мы определим ниже строющуюся подстановка g на всех блоках $B_{i,i+s+1}$, $i\in\mathbb{Z}$, так, что для произвольных $i,j\in\mathbb{Z}$, $j\le i+s+1$, тройка $(\iota_{i,j}g^{B_{i,j}}\iota_{i,j}^{-1}$, $\iota_{i+1,j}g^{B_{i+1,j}}\iota_{i+1,j}^{-1},\iota_{i+1,j+1}g^{B_{i+1,j+1}}\ \iota_{i+1,j+1}^{-1})$ принадлежит множеству из леммы 3.

Предварительно заметим, что, как показывает непосредственная проверка, справедливо следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть $i, j \in \mathbb{Z}$ и h — подстановка на $B_{i,j} \cup B_{i+1,j} \cup B_{i+1,j+1} \cup B_{i,j+1}$, стабилизирующая (глобально) каждый из блоков $B_{i,j}$, $B_{i+1,j}$, $B_{i+1,j+1}$, $B_{i,j+1}$. Тогда эквивалентны следующие утверждения* 1) *и* 2).

1) *Существует подстановка h' на $B_{i,j} \cup B_{i+1,j} \cup B_{i+1,j+1} \cup B_{i,j+1} \cup B_{i+1,j+2}$, стабилизирующая (глобально) множество $B_{i,j} \cup B_{i+1,j} \cup B_{i+1,j+1} \cup B_{i,j+1}$ и совпадающая на нем с h, для которой каждая из троек*

$$(\iota_{i,j} h^{B_{i,j}} \iota_{i,j}^{-1},\ \iota_{i+1,j} h^{B_{i+1,j}} \iota_{i+1,j}^{-1},\ \iota_{i+1,j+1} h^{B_{i+1,j+1}} \iota_{i+1,j+1}^{-1}),$$

$$(\iota_{i,j+1} h^{B_{i,j+1}} \iota_{i,j+1}^{-1},\ \iota_{i+1,j+1} h^{B_{i+1,j+1}} \iota_{i+1,j+1}^{-1},\ \iota_{i+1,j+2} h^{B_{i+1,j+2}} \iota_{i+1,j+2}^{-1})$$

принадлежит множеству из леммы 3.

2) *Существует подстановка h'' на $B_{i,j} \cup B_{i+1,j} \cup B_{i+1,j+1} \cup B_{i,j+1} \cup B_{i-1,j}$, стабилизирующая (глобально) множество $B_{i,j} \cup B_{i+1,j} \cup B_{i+1,j+1} \cup B_{i,j+1}$ и совпадающая на нем с h, для которой каждая из троек*

$$(\iota_{i,j} h^{B_{i,j}} \iota_{i,j}^{-1},\ \iota_{i+1,j} h^{B_{i+1,j}} \iota_{i+1,j}^{-1},\ \iota_{i+1,j+1} h^{B_{i+1,j+1}} \iota_{i+1,j+1}^{-1}),$$

$$(\iota_{i-1,j} h^{B_{i-1,j}} \iota_{i-1,j}^{-1},\ \iota_{i,j} h^{B_{i,j}} \iota_{i,j}^{-1},\ \iota_{i,j+1} h^{B_{i,j+1}} \iota_{i,j+1}^{-1})$$

принадлежит множеству из леммы 3.

Поскольку $\iota_{0,s+1} g^{B_{0,s+1}} \iota_{0,s+1}^{-1} = h_3$ и $\iota_{0,s} g^{B_{0,s}} \iota_{0,s}^{-1}$ есть h_3 или (при $s = 1$) есть h_2, то строящаяся подстановка g может быть доопределена на $B_{-1,s}$ так, что тройка $(\iota_{-1,s} g^{B_{-1,s}} \iota_{-1,s}^{-1}, \iota_{0,s} g^{B_{0,s}} \iota_{0,s}^{-1}, \iota_{0,s+1} g^{B_{0,s+1}} \iota_{0,s+1}^{-1})$ принадлежит множеству из леммы 3. Поскольку по предположению тройка $(\iota_{0,s} g^{B_{0,s}} \iota_{0,s}^{-1},\ \iota_{1,s} g^{B_{1,s}} \iota_{1,s}^{-1},\ \iota_{1,s+1} g^{B_{1,s+1}} \iota_{1,s+1}^{-1})$ также принадлежит множеству из леммы 3, то в силу леммы 5 строящаяся подстановка g может быть доопределена на $B_{1,s+2}$ так, что тройка $(\iota_{0,s+1} g^{B_{0,s+1}} \iota_{0,s+1}^{-1},\ \iota_{1,s+1} g^{B_{1,s+1}} \iota_{1,s+1}^{-1}, \iota_{1,s+2} g^{B_{1,s+2}} \iota_{1,s+2}^{-1})$ принадлежит множеству из леммы 3.

Так как теперь тройка

$$(\iota_{0,s+1} g^{B_{0,s+1}} \iota_{0,s+1}^{-1}, \iota_{1,s+1} g^{B_{1,s+1}} \iota_{1,s+1}^{-1}, \iota_{1,s+2} g^{B_{1,s+2}} \iota_{1,s+2}^{-1})$$

принадлежит множеству из леммы 3 и по предположению тройка

$$(\iota_{1,s+1} g^{B_{1,s+1}} \iota_{1,s+1}^{-1}, \iota_{2,s+1} g^{B_{2,s+1}} \iota_{2,s+1}^{-1}, \iota_{2,s+2} g^{B_{2,s+2}} \iota_{2,s+2}^{-1})$$

также принадлежит множеству из леммы 3, то в силу леммы 5 строящаяся подстановка g может быть доопределена на $B_{2,s+3}$ так, что тройка

$$(\iota_{1,s+2} g^{B_{1,s+2}} \iota_{1,s+2}^{-1}, \iota_{2,s+2} g^{B_{2,s+2}} \iota_{2,s+2}^{-1},\ \iota_{2,s+3} g^{B_{2,s+3}} \iota_{2,s+3}^{-1})$$

принадлежит множеству из леммы 3. Продолжая сходным образом, доопределим строящуюся подстановку g на всех $B_{i,i+s+1}$, $i \in \mathbb{Z}$, $i \geq -1$, так, что для каждого $i \in \mathbb{Z}$, $i \geq -1$, тройка

$$(\iota_{i,i+s+1} g^{B_{i,i+s+1}} \iota_{i,i+s+1}^{-1},\ \iota_{i+1,i+s+1} g^{B_{i+1,i+s+1}} \iota_{i+1,i+s+1}^{-1},\ \iota_{i+1,i+s+2} g^{B_{i+1,i+s+2}} \iota_{i+1,i+s+2}^{-1})$$

принадлежит множеству из леммы 3.

Аналогично, поскольку теперь тройка

$$(\iota_{-1,s} g^{B_{-1,s}} \iota_{-1,s}^{-1},\ \iota_{0,s} g^{B_{0,s}} \iota_{0,s}^{-1},\ \iota_{0,s+1} g^{B_{0,s+1}} \iota_{0,s+1}^{-1})$$

принадлежит множеству из леммы 3 и по предположению тройка

$$(\iota_{-1,s-1} g^{B_{-1,s-1}} \iota_{-1,s-1}^{-1}, \iota_{0,s-1} g^{B_{0,s-1}} \iota_{0,s-1}^{-1}, \iota_{0,s} g^{B_{0,s}} \iota_{0,s}^{-1})$$

также принадлежит множеству из леммы 3, то в силу леммы 5 строящаяся подстановка g может быть доопределена на $B_{-2,s-1}$ так, что тройка

$$(\iota_{-2,s-1}g^{B_{-2,s-1}}\iota_{-2,s-1}^{-1}, \iota_{-1,s-1}g^{B_{-1,s-1}}\iota_{-1,s-1}^{-1}, \iota_{-1,s}g^{B_{-1,s}}\iota_{-1,s}^{-1})$$

принадлежит множеству из леммы 3. Продолжая сходным образом, доопределим строящуюся подстановку g на всех $B_{i,i+s+1}$, $i \in \mathbb{Z}$, $i < -1$, так, что для каждого $i \in \mathbb{Z}$, $i < -1$, тройка

$$(\iota_{i,i+s+1}g^{B_{i,i+s+1}}\iota_{i,i+s+1}^{-1}, \iota_{i+1,i+s+1}g^{B_{i+1,i+s+1}}\iota_{i+1,i+s+1}^{-1}, \iota_{i+1,i+s+2}g^{B_{i+1,i+s+2}}\iota_{i+1,i+s+2}^{-1})$$

принадлежит множеству из леммы 3.

Таким образом, строящаяся подстановка g определена на всех блоках $B_{i,i+s+1}$, $i \in \mathbb{Z}$, так, что для произвольных $i, j \in \mathbb{Z}$, $j \leq i + s + 1$, тройка

$$(\iota_{i,j}g^{B_{i,j}}\iota_{i,j}^{-1},\ \iota_{i+1,j}g^{B_{i+1,j}}\iota_{i+1,j}^{-1}, \iota_{i+1,j+1}g^{B_{i+1,j+1}}\iota_{i+1,j+1}^{-1})$$

принадлежит множеству из леммы 3.

В результате индуктивного (по s) построения получаем подстановку g на множестве вершин графа Γ, стабилизирующую (глобально) каждый блок $B_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{Z}$, и обладающую следующими свойствами:

1) для любых $i, j \in \mathbb{Z}$ тройка $(\iota_{i,j}g^{B_{i,j}}\iota_{i,j}^{-1},\ \iota_{i+1,j}g^{B_{i+1,j}}\iota_{i+1,j}^{-1},\ \iota_{i+1,j+1}g^{B_{i+1,j+1}}\iota_{i+1,j+1}^{-1})$ принадлежит множеству из леммы 3;

2) $\iota_{i,0}g^{B_{i,0}}\iota_{i,0}^{-1} = h_1$ для всех $i \in \mathbb{Z}$, $i \geq 0$;

3) $\iota_{-1,0}g^{B_{-1,0}}\iota_{-1,0}^{-1} = h_2$.

В силу 1) и леммы 4 имеем $g \in Aut(\Gamma)$. Поскольку при этом g стабилизирует (глобально) каждый блок $B_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{Z}$, то $g \in Aut_0(\Gamma) = G$. Далее, в силу 2) имеем $g \in G_{B_{0,0} \cup B_{1,0} \cup \ldots}$. Наконец, из 3) следует, что $\iota_{-1,0}g^{B_{-1,0}}\iota_{-1,0}^{-1} = h_2$. Таким образом, g обладает требуемыми для завершения рассмотрения случая II.2 свойствами. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Trofimov V.I.** Some topics in graph theory related with group theory // Сиб. электрон. мат. известия (Siberian Electronic Mathematical Reports). 2011. Vol. 8. P. 62–67.
2. **Неганова Е.А., Трофимов В.И.** $Aut_0(\Lambda^d)$-симметрические 2-расширения решеток Λ^d // Проблемы теоретической и прикладной математики: тез. докл. 41-й Всерос. мол. шк.-конф. Екатеринбург, 2010. С. 64–70.
3. **Неганова Е.А., Трофимов В.И.** О симметрических q-расширениях 2-мерной решетки // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 199–209.
4. **Трофимов В.И.** Ограниченные автоморфизмы графов и одна характеризация решеток // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1983. Т. 47, № 2. С. 407–420.

Неганова Елена Александровна
аспирант
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: nega-le@yandex.ru

Поступила 13.01.2011

Трофимов Владимир Иванович
д-р. физ-мат. наук,
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: trofimov@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 3 2011

УДК 517.51

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В ШАРЕ С МИНИМАЛЬНЫМ ЗНАЧЕНИЕМ L_p-НОРМЫ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА[1]

С. И. Новиков

Рассмотрена задача интерполяции ограниченных в l_p-нормах $(1 \le p < \infty)$ конечных наборов числовых данных гладкими функциями, определенными в n-мерном евклидовом шаре радиуса R и обращающимися в нуль на границе шара. При некоторых ограничениях на расположение узлов интерполяции для L_p-норм оператора Лапласа наилучших интерполянтов получены двусторонние оценки, правильно зависящие от R.

Ключевые слова: интерполяция, оператор Лапласа, кубические B-сплайны.

S. I. Novikov. Interpolation in a ball with a minimum value of the L_p-norm of the Laplace operator.

We consider the problem of interpolating finite sets of numerical data bounded in l_p-norms $(1 \le p < \infty)$ by smooth functions that are defined in an n-dimensional Euclidean ball of radius R and vanish on the boundary of the ball. Under some constraints on the location of interpolation nodes, we obtain two-sided estimates with a correct dependence on R for the L_p-norms of the Laplace operators of the best interpolants.

Keywords: interpolation, Laplace operator, cubic B-splines.

Введение

В 1965 г. Ю. Н. Субботин [1] нашел точное решение одномерной задачи экстремальной функциональной интерполяции на равномерной сетке с минимальным значением L_∞-нормы m-й производной интерполянта для класса интерполируемых последовательностей, конечные разности которых порядка m ограничены. Позже L_∞-нормы были заменены L_p-нормами $(1 \le p < \infty)$ [2], интерполяция в точках — интерполяцией в среднем [3] и, наконец, производные — линейными дифференциальными операторами с постоянными вещественными коэффициентами [4–6]. Более подробную информацию об исследованиях в этом направлении можно найти, например, в работе автора [7] и приведенной там библиографии.

Другим направлением развития этой тематики является изучение соответствующих многомерных задач. Первый точный результат об экстремальной интерполяции в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, был получен Ю. Н. Субботиным [2]. Он нашел минимальные значения L_p-норм $(1 \le p \le \infty)$ смешанных производных интерполянтов для классов интерполируемых последовательностей с ограниченными l_p-нормами их конечноразностных операторов, которые определялись как суперпозиции n одномерных конечных разностей соответствующих порядков. Позже в совместной работе автора и В. Т. Шевалдина [8] был получен аналогичный результат для линейных дифференциальных операторов в частных производных, которые допускают представление в виде суперпозиции одномерных линейных дифференциальных операторов с постоянными вещественными коэффициентами — по каждой из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ берется свой линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L}_{m_j}(\partial/\partial x_j)$ порядка $m_j,\ j = 1, 2, \ldots, n$.

Для линейных дифференциальных операторов с частными производными, которые не представимы в виде суперпозиции одномерных, задача экстремальной функциональной интерполяции является значительно более сложной. Одним из таких операторов является оператор

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00347), УрО РАН (проект 09-П-1-1013) в рамках программы Президиума РАН “Математическая теория управления”, а также интеграционного проекта, выполняемого совместно учеными УрО РАН и СО РАН (проект 09-С-1-1007).

Лапласа
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$
Из [9, гл. 3] следует, что для любого множества узлов интерполяции с единственной предельной точкой в бесконечности задача интерполяции на классе всех гармонических в $\mathbb{R}^2$ функций разрешима для произвольно заданных интерполируемых данных. Этот факт означает, что задача экстремальной интерполяции для оператора Лапласа в ее традиционной постановке имеет тривиальное (нулевое) решение независимо от выбора разностного аналога оператора Лапласа. Такое положение вещей приводит к необходимости изменения постановки задачи экстремальной интерполяции для оператора Лапласа в отличие от всех ранее исследованных дифференциальных операторов (более подробно об этом см. [7], а также [10]).

Настоящая работа посвящена одной из возможных модификаций задачи экстремальной функциональной интерполяции применительно к оператору Лапласа.

Пусть $n \geq 2$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$ — модуль x,
$$B_R^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| < R\}$$
— открытый шар радиуса $0 < R < \infty$ с центром в начале координат и $\overline{B_R^n}$ — его замыкание. Пусть N — фиксированное натуральное число, $\|z\|_{l_p^N} = (\sum_{j=1}^N |z_j|^p)^{1/p}$, $1 \leq p \leq \infty$, и
$$\mathfrak{M}_p = \left\{ z : \ z = \{z_j\}_{j=1}^N, \ \|z\|_{l_p^N} \leq 1 \right\}$$
— класс интерполируемых данных.

Мы будем интерполировать в конечном наборе точек $\{x^{(s)}\}_{s=1}^N \subset B_R^n$, и пусть
$$Y_N(z) \ = \ \left\{ f \in C^2(B_R^n) \bigcap C(\overline{B_R^n}) : \ f|_{|x|=R} = 0, \ f(x^{(s)}) = z_s, \ \ s = 1, 2, \ldots, N \right\}$$
— класс интерполирующих функций.

Каждой вещественнозначной функции f, заданной на ограниченном измеримом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, сопоставляем ее L_p-норму
$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \sup\{|f(x)| : \ x \in \Omega\}, & p = \infty. \end{cases}$$
Если $\Omega = B_R^n$, вместо $\|f\|_{L_p(B_R^n)}$ будем для краткости писать $\|f\|_p$.

Рассмотрим величину
$$A_p^N(B_R^n) = \sup_{z \in \mathfrak{M}_p} \ \inf_{f \in Y_N(z)} \ \|\Delta f\|_p \, , \tag{1}$$
которую можно интерпретировать как L_p-норму оператора Лапласа, примененного к “наилучшей” функции из класса $Y_N(z)$ при интерполировании “наихудших” данных из множества $\mathfrak{M}_p$.

Проблема исследования величины (1) для произвольных узлов интерполяции является достаточно сложной. Здесь мы ограничиваемся ее частным случаем, когда все точки интерполяции лежат на равноотстоящих друг от друга сферических орбитах, причем на каждой орбите расположена в точности одна точка.

Для $p = \infty$ величина (1) изучалась автором в [10], где при некоторых дополнительных ограничениях на расположение точек интерполяции были найдены ее порядки по R и N. Отметим также работу [11], из которой, как отмечено в [10], легко выводится точное значение величины (1) в случае $N = 1$.

Целью настоящей работы является исследование величины (1) для $1 \le p < \infty$ и нахождение ее порядка по R. Основным результатом является следующая

Теорема. *Пусть узлы интерполяции* $\{x^{(s)}\}_{s=1}^N \subset B_R^n$ *лежат на равноотстоящих друг от друга и от границы шара сферических орбитах, т. е.* $|x^{(s)}| = R(s-1)/N$, $s = 1, 2, \ldots, N$.

1. *Если* $n/2 < p < \infty$, $n \ge 2$, *то справедлива двусторонняя оценка*

$$\frac{C_1}{R^{2-n/p}} \ \le\ A_p^N(B_R^n)\ \le \frac{C_2}{R^{2-n/p}}\,,$$

где C_1 *и* C_2 *— положительные константы, не зависящие от* R.

2. *Если* $1 \le p < n/2$, $n \ge 3$, *то*

$$A_p^N(B_R^n) = 0.$$

Заметим, что в пределе при $p \to \infty$ приходим к оценкам работы [10].

Прежде чем доказывать теорему, мы приводим необходимые вспомогательные результаты.

1. Вспомогательные утверждения

Пусть $n \ge 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная связная область с границей $\partial\Omega$, $\overline{\Omega}$ — ее замыкание, $\operatorname{diam}\Omega = \sup\{|x-y|\colon x, y \in \Omega\}$ — диаметр Ω, $\operatorname{mes}\Omega$ — ее объем. Для гладких функций $u = u(x)$ с нулевым значением на $\partial\Omega$ неравенства вида $\|u\| \le c(\Omega)\|\Delta u\|$, где $c(\Omega)$ — некоторая константа, определяемая областью Ω, хорошо известны. Ниже мы приводим два неравенства такого вида и устанавливаем зависимость константы $c(\Omega)$ от геометрических характеристик области.

Лемма 1. *Пусть* $n \ge 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *— выпуклая ограниченная область. Предположим, что* $n/2 < p < \infty$. *Тогда для любой функции* $u \in C^2(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega})$, $u|_{\partial\Omega} = 0$, *в каждой точке* $x \in \Omega$ *выполняется следующее неравенство*:

$$|u(x)| \le C\,(\operatorname{mes}\Omega)^{1/p'}\,(\operatorname{diam}\Omega)^{2-n}\,\|\Delta u\|_{L_p(\Omega)}, \qquad 1/p + 1/p' = 1.$$

Здесь $C > 0$ *— некоторая константа, не зависящая от области* Ω *и функции* $u(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} \Delta u &= -\varphi \\ u|_{\partial\Omega} &= \ 0. \end{cases}$$

Ее решение может быть записано как

$$u(x) \ = \ \int\limits_{\Omega} G(x,y)\varphi(y)\,dy, \tag{2}$$

где $G(x,y)$ — функция Грина. Известно, что для функции Грина при $x, y \in \Omega$, $x \ne y$, справедливы оценки

$$0 < G(x,y) \le \frac{A}{|x-y|^{n-2}},$$

где $A = (1/2)\pi^{-n/2}(n-2)^{-1}\Gamma(n/2)$ ($\Gamma(\cdot)$ — Г-функция Эйлера) не зависит от точек x, y и области Ω. Доказательство этого факта для $n = 3$ можно найти, например, в [12, § 29], для $n > 3$ доказательство аналогично. Применяя эту оценку и неравенство Гельдера к правой части (2), получаем

$$|u(x)| \le A\,(J(x))^{1/p'}\,\|\Delta u\|_{L_p(\Omega)}, \tag{3}$$

где $J(x) = \displaystyle\int_\Omega |x-y|^{-(n-2)p'}\,dy$.

Теперь к функции $J(x)$ применяем оценку сверху [13]:

$$J(x) \le \frac{n}{p'(2-n/p)} (\operatorname{mes}\Omega)\ (\operatorname{diam}\Omega)^{(2-n)p'}.$$

Возвращаясь к (3), приходим к доказываемому неравенству. □

Утверждение, аналогичное лемме 1, имеет место и для плоских областей.

Лемма 2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклая ограниченная область. Тогда при $1 < p < \infty$ для любой функции $u \in C^2(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$, $u|_{\partial\Omega} = 0$, в любой точке $x \in \Omega$ выполняется неравенство*

$$|u(x)| \le C\,(\operatorname{diam}\Omega)^{2-2/p}\, \|\Delta u\|_{L_p(\Omega)}$$

с некоторой положительной константой C, не зависящей от области Ω и функции $u(x)$.

Доказательство. Представление (2) справедливо и для плоских областей, однако при $n = 2$ функция Грина оценивается иначе, чем в случае $n \ge 3$ (см., например, [12, § 31]):

$$0 < G(x,y) \le \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{diam}\Omega}{|x-y|}, \quad x \ne y, \quad x, y \in \Omega.$$

Фиксируем произвольную точку $x \in \Omega$. Применив неравенство Гельдера к интегралу в (2), получаем

$$|u(x)| \le \frac{1}{2\pi} \left(\int\limits_{\Omega} \left(\ln \frac{\operatorname{diam}\Omega}{|x-y|} \right)^{p'} dy \right)^{1/p'} \|\Delta u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Преобразуем интеграл в правой части этого неравенства с помощью полярной замены координат (r, φ) с центром в точке x. При этом полярный угол φ изменяется от 0 до 2π, а полярный радиус — от 0 до $d(x,\varphi)$, где $d(x,\varphi)$ — расстояние от точки x до $\partial\Omega$. В результате имеем

$$\int\limits_{\Omega} \left(\ln \frac{\operatorname{diam}\Omega}{|x-y|} \right)^{p'} dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{d(x,\varphi)} r \left(\ln \frac{\operatorname{diam}\Omega}{r} \right)^{p'} dr.$$

Во внутреннем интеграле делаем замену переменной $u = 2\ln((\operatorname{diam}\Omega)/r)$ и получаем

$$\int\limits_0^{d(x,\varphi)} r \left(\ln \frac{\operatorname{diam}\Omega}{r} \right)^{p'} dr = 2^{-(p'+1)}\, (\operatorname{diam}\Omega)^2 \int\limits_{2\ln \frac{\operatorname{diam}\Omega}{d(x,\varphi)}}^{+\infty} u^{p'} e^{-u}\, du.$$

Поскольку $\operatorname{diam}\Omega \ge d(x,\varphi)$, то $\ln\big(\operatorname{diam}\Omega / d(x,\varphi)\big) \ge 0$ и

$$\int\limits_{2\ln \frac{\operatorname{diam}\Omega}{d(x,\varphi)}}^{+\infty} u^{p'} e^{-u}\, du \le \int\limits_0^{+\infty} u^{p'} e^{-u}\, du = \Gamma(p'+1).$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^{d(x,\varphi)} r \left(\ln \frac{\operatorname{diam}\Omega}{r} \right)^{p'} dr \ \le\ 2^{-(p'+1)}\ \Gamma(p'+1)\ (\operatorname{diam}\,\Omega)^2,$$

и окончательно получаем

$$|u(x)| \le C\,(\operatorname{diam}\Omega)^{2-2/p}\, \|\Delta u\|_{L_p(\Omega)},$$

где $C = (1/4)\pi^{-1/p}(\Gamma((2p+1)/(p-1)))^{(p-1)/p}$. Константа C не зависит от области Ω и функции $u(x)$. Лемма 2 доказана. $\square$

Для доказательства оценки сверху в п. 1 теоремы используются кубические B-сплайны с равномерными узлами. Эти функции хорошо известны и обладают многими замечательными свойствами. Подробную информацию о полиномиальных B-сплайнах и их многочисленных применениях можно найти, например, в [14–16] и приведенной там библиографии. Мы ограничимся тем, что выпишем явное представление кубических B-сплайнов с равномерными узлами и отметим те их свойства, которые нам необходимы.

Пусть $a \in \mathbb{R}$ — произвольное фиксированное число, h — любое положительное число. Кубический B-сплайн $B(t)$ с узлами в точках $a-h/2,\ a-h/4,\ a,\ a+h/4,\ a+h/2$ имеет следующее явное представление:

$$B(t) = \alpha \begin{cases} (a+h/2-t)^3, & t \in (a+h/4,\ a+h/2], \\ (a+h/2-t)^3 - 4(a+h/4-t)^3, & t \in [a,\ a+h/4], \\ (a+h/2-t)^3 - 4(a+h/4-t)^3 + 6(a-t)^3, & t \in [a-h/4,\ a], \\ -(a-h/2-t)^3 & t \in [a-h/2,\ a-h/4], \\ 0, & t \notin [a-h/2,\ a+h/2], \end{cases} \qquad (4)$$

где α — нормирующий коэффициент. Функция $B(t)$ является дважды непрерывно дифференцируемой на $\mathbb{R}$ с носителем $[a-h/2, a+h/2]$, положительна на нем, симметрична относительно точки a и достигает максимума в этой точке. B-сплайн можно нормализовать различным образом, мы выбираем $\alpha = 1$.

2. Доказательство основного результата

Пусть $n/2 < p < \infty$, $n \geq 2$. Сначала доказываем оценку снизу.

В леммах 1 и 2 полагаем $\Omega = B_R^n$. Поскольку $\operatorname{diam} B_R^n = 2R$ и (см., например, [17, п. 676])

$$\operatorname{mes} B_R^n = \frac{\pi^{n/2}R^n}{\Gamma(1+n/2)},$$

для любого интерполянта $f \in Y_N(z)$ при любых $x \in B_R^n$ имеет место неравенство

$$\|\Delta f\|_p \geq \frac{C_1}{R^{2-n/p}}|f(x)|$$

с некоторой положительной константой C_1, не зависящей от R. Переходя в этом неравенстве к точной верхней грани по $x \in B_R^n$, получаем

$$\|\Delta f\|_p \geq \frac{C_1}{R^{2-n/p}}\,\|f\|_\infty.$$

Теперь выбираем такую интерполируемую последовательность $\widetilde{z} \in \mathfrak{M}_p$, что $\widetilde{z}_j = \delta_{j,j_0}$, где δ_{j,j_0} — символ Кронекера, а j_0 — произвольное натуральное число, не превосходящее N. В силу условия интерполяции

$$\|f\|_\infty \geq |f(x^{(j_0)})| = |\widetilde{z}_{j_0}| = 1.$$

Отсюда для величины (1) получаем

$$A_p^N(B_R^n) \geq \inf_{f\in Y_N(\widetilde{z})} \|\Delta f\|_p \geq \frac{C_1}{R^{2-n/p}}.$$

Оценка снизу установлена.

Теперь доказываем оценку сверху. Около каждой точки интерполяции $x^{(s)}$ $(s = 1, 2, \ldots, N)$ строим n-мерный куб $Q_s(\delta)$ с центром в точке $x^{(s)}$ и длиной ребер δ, которые параллельны осям координат, т. е. $Q_s(\delta) = [x_1^{(s)} - \delta/2, x_1^{(s)} + \delta/2] \times \cdots \times [x_n^{(s)} - \delta/2, x_n^{(s)} + \delta/2]$, $s = 1, 2, \ldots, N$. Выбирая подходящее значение δ, мы можем добиться, чтобы окрестности различных точек не пересекались друг с другом и со сферой $|x| = R$.

В окрестности $Q_s(\delta)$ определяем функцию

$$\varphi_s(x) = \varphi_{s,\delta}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ = \ c_s B_s(x_1) B_s(x_2) \cdots B_s(x_n), \tag{5}$$

где $B_s(x_1), B_s(x_2), \ldots, B_s(x_n)$ — кубические B-сплайны, построенные на отрезках

$$[x_1^{(s)} - \delta/2, x_1^{(s)} + \delta/2], \ldots, [x_n^{(s)} - \delta/2, x_n^{(s)} + \delta/2]$$

соответственно (см. (4)), c_s — некоторая константа. Эту константу находим из условия интерполяции $\varphi_s(x^{(s)}) = z_s$. В результате получаем

$$c_s = 2^{4n} \ \delta^{-3n} \ z_s. \tag{6}$$

Для всех $s = 1, 2, \ldots, N$ полагаем

$$F_{s,\delta}(x) = \begin{cases} \varphi_s(x), & x \in Q_s(\delta), \\ 0, & x \notin Q_s(\delta), \end{cases}$$

и пусть

$$F_\delta(x) = \sum_{s=1}^{N} F_{s,\delta}(x).$$

Для оператора Лапласа, примененного к этой функции, имеем

$$\Delta F_\delta(x) = \sum_{s=1}^{N} c_s \sum_{j=1}^{n} B_s(x_1) \cdots B_s(x_{j-1}) B_s''(x_j) B_s(x_{j+1}) \cdots B_s(x_n).$$

Применение интегрального неравенства Минковского к правой части дает:

$$\|\Delta F_\delta\|_p \le \sum_{s=1}^{N} |c_s| \sum_{j=1}^{n} \Bigg(\int\limits_{Q_s(\delta)} \Big| B_s(x_1) \cdots B_s(x_{j-1}) B_s''(x_j) B_s(x_{j+1}) \cdots B_s(x_n) \Big|^p dx_1 \ldots dx_n \Bigg)^{1/p}$$

$$= \sum_{s=1}^{N} |c_s| \sum_{j=1}^{n} \Bigg(\int\limits_{x_1^{(s)} - \delta/2}^{x_1^{(s)} + \delta/2} \big| B_s(x_1) \big|^p \ dx_1 \Bigg)^{1/p} \cdots \Bigg(\int\limits_{x_{j-1}^{(s)} - \delta/2}^{x_{j-1}^{(s)} + \delta/2} \big| B_s(x_{j-1}) \big|^p dx_{j-1} \Bigg)^{1/p}$$

$$\times \Bigg(\int\limits_{x_j^{(s)} - \delta/2}^{x_j^{(s)} + \delta/2} \big| B_s''(x_j) \big|^p \ dx_j \Bigg)^{1/p} \Bigg(\int\limits_{x_{j+1}^{(s)} - \delta/2}^{x_{j+1}^{(s)} + \delta/2} \big| B_s(x_{j+1}) \big|^p dx_{j+1} \Bigg)^{1/p} \cdots \Bigg(\int\limits_{x_n^{(s)} - \delta/2}^{x_n^{(s)} + \delta/2} \big| B_s(x_n) \big|^p \ dx_n \Bigg)^{1/p}.$$

Из (4) имеем

$$\Bigg(\int\limits_{x_k^{(s)} - \delta/2}^{x_k^{(s)} + \delta/2} \Big| B_s(x_k) \Big|^p \ dx_k \Bigg)^{1/p} \ \le \ \Bigg(\int\limits_{x_k^{(s)} - \delta/2}^{x_k^{(s)} - \delta/4} \Big| G_1(x_k) \Big|^p dx_k \Bigg)^{1/p} \ + \ \Bigg(\int\limits_{x_k^{(s)} - \delta/4}^{x_k^{(s)}} \Big| G_2(x_k) \Big|^p dx_k \Bigg)^{1/p}$$

$$+ \ \Bigg(\int\limits_{x_k^{(s)}}^{x_k^{(s)} + \delta/4} \Big| G_3(x_k) \Big|^p dx_k \Bigg)^{1/p} \ + \ \Bigg(\int\limits_{x_k^{(s)} + \delta/4}^{x_k^{(s)} + \delta/2} \Big| G_4(x_k) \Big|^p dx_k \Bigg)^{1/p}, \tag{7}$$

где

$$G_1(x) = \left(x_k^{(s)} + \delta/2 - x\right)^3 - 4\left(x_k^{(s)} + \delta/4 - x\right)^3 + 6\left(x_k^{(s)} - x\right)^3 - 4\left(x_k^{(s)} - \delta/4 - x\right)^3,$$
$$G_2(x) = \left(x_k^{(s)} + \delta/2 - x\right)^3 - 4\left(x_k^{(s)} + \delta/4 - x\right)^3 + 6\left(x_k^{(s)} - x\right)^3,$$
$$G_3(x) = \left(x_k^{(s)} + \delta/2 - x\right)^3 - 4\left(x_k^{(s)} + \delta/4 - x\right)^3, \qquad G_4(x) = \left(x_k^{(s)} + \delta/2 - x\right)^3.$$

В каждом из четырех интегралов правой части (7) делаем линейную замену переменных, которая приводит к интегрированию по отрезку $[0,1]$. В результате приходим к неравенству

$$\left(\int\limits_{x_k^{(s)}-\delta/2}^{x_k^{(s)}+\delta/2} \Big|B_s(x_k)\Big|^p\, dx_k\right)^{1/p} \le \delta^{(3p+1)/p}\ \left(A_{1,k} + A_{2,k} + A_{3,k} + A_{4,k}\right)$$

с некоторыми положительными константами $A_{1,k}, A_{2,k}, A_{3,k}, A_{4,k}$, не зависящими от R. Полагая $b_k = 4\max\{A_{j,k}:\ j = 1,2,3,4\}$, получаем оценку

$$\left(\int\limits_{x_k^{(s)}-\delta/2}^{x_k^{(s)}+\delta/2} \Big|B_s(x_k)\Big|^p\, dx_k\right)^{1/p} \le b_k\, \delta^{(3p+1)/p}, \quad k = 1,2,\ldots,n. \tag{8}$$

Аналогично выводится оценка

$$\left(\int\limits_{x_j^{(s)}-\delta/2}^{x_j^{(s)}+\delta/2} \Big|B_s''(x_j)\Big|^p\, dx_j\right)^{1/p} \le \widetilde{b}_j\, \delta^{(p+1)/p}, \quad j = 1,2,\ldots,n, \tag{9}$$

где константы $\widetilde{b}_j > 0$, $j = 1,2,\ldots,n$, не зависят от R.
Соотношения (5), (6), (8) и (9) приводят к неравенству

$$\|\Delta F_\delta\|_p \le A(p,n)\, \delta^{((3p+1)(n-1)+p+1)/p-3n}\, \|z\|_{l_1^N} \tag{10}$$

с некоторой положительной константой $A(p,n) > 0$, которая зависит только от p и n. Поскольку $\|z\|_{l_1^N} \le N\,\|z\|_{l_p^N}$ и $\|z\|_{l_p^N} \le 1$, $1 < p < \infty$, мы можем переписать (10) в виде

$$\|\Delta F_\delta\|_p \le B\delta^\nu,$$

где константа $B > 0$ не зависит от R, $\nu = ((3p+1)(n-1)+p+1)/p-3n = -(2-n/p)$. Поскольку $|x^{(s)}| = R(s-1)/N$, $s = 1,2,\ldots,N$, можно выбрать $\delta = \xi R/N$, где $0 < \xi \le 1$ не зависит от R. Полагая $C_2 = B(N/\xi)^{2-n/p}$, в результате имеем

$$\|\Delta F_\delta\|_p \le \frac{C_2}{R^{2-n/p}}.$$

Используя эту оценку, получаем

$$A_p^N(B_R^n) \le \|\Delta F_\delta\|_p \le \frac{C_2}{R^{2-n/p}},$$

и доказательство п. 1 теоремы завершено.

Пусть теперь $1 \le p < n/2$, $n \ge 3$. Фиксируя произвольно $z \in \mathfrak{M}_p$ и повторяя фрагмент доказательства оценки сверху, приходим к неравенству

$$\|\Delta F_\delta\|_p \le C\ \delta^{(n-2p)/p}. \tag{11}$$

Замечаем, что $n - 2p > 0$. Поэтому правую часть (11) можно сделать сколь угодно малой за счет выбора δ. Это означает, что $A_p(B_R^n) = 0$.

Теорема полностью доказана. □

З а м е ч а н и е. Согласно классической теореме вложения Соболева (см., например, [18, гл. 4] и имеющиеся там ссылки) неравенство $n/2 < p < \infty$ обеспечивает вложение класса Соболева $W_p^2(B_R^n)$ в пространство непрерывных функций $C(B_R^n)$. Таким образом, доказанная в настоящей работе теорема показывает, что величина $A_p(B_R^n)$ является невырожденной (отличной от 0 и ∞) при наличии этого вложения. В других интерполяционных задачах также обнаруживается связь с теоремами вложения (см., например, [11; 19]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Субботин Ю.Н.** О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Тр. МИАН им. В. А. Стеклова. 1965. Т. 78. С. 24–42.
2. **Субботин Ю.Н.** Функциональная интерполяция в среднем с наименьшей n-й производной // Тр. МИАН им. В. А. Стеклова. 1967. Т. 88. С. 30–60.
3. **Субботин Ю.Н.** Экстремальные задачи функциональной интерполяции и интерполяционные в среднем сплайны // Тр. МИАН им. В. А. Стеклова. 1975. Т. 138. С. 118–173.
4. **Шарма А., Цимбаларио И.** Некоторые линейные дифференциальные операторы и обобщенные разности // Мат. заметки. 1977. Т. 21, вып. 2. С. 161–172.
5. **Шевалдин В.Т.** Об одной задаче экстремальной интерполяции // Мат. заметки. 1981. Т. 29, вып. 4. С. 603–622.
6. **Шевалдин В.Т.** Некоторые задачи экстремальной интерполяции в среднем для линейных дифференциальных операторов // Тр. МИАН им. В. А. Стеклова. 1983. Т. 164. С. 203–240.
7. **Новиков С.И.** Задачи экстремальной функциональной интерполяции // Тр. Междунар. шк. С. Б. Стечкина по теории функций. Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. С. 100–109.
8. **Новиков С.И., Шевалдин В.Т.** Об одной задаче экстремальной интерполяции для функций многих переменных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2001. Т. 7, № 1. С. 144–159.
9. **Гельфонд А.О.** Исчисление конечных разностей. М: Наука, 1967. 376 с.
10. **Новиков С.И.** Интерполяция с минимальным значением нормы оператора Лапласа в шаре // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. 2008. Т. 5, № 1. С. 248–262.
11. **Fisher S., Jerome J.** Minimum norm extremals in function spaces // Lecture Notes Math. 1975. Vol. 479. P. 1–209.
12. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. М: Наука, 1971. 512 с.
13. **Буренков В.И., Гусаков В.А.** О точных постоянных в теоремах вложения Соболева // Докл. АН СССР. 1987. Т. 294, № 6. С. 1293–1297.
14. **Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.** Сплайны в вычислительной математике. М: Наука, 1976. 248 с.
15. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. М: Наука, 1980. 352 с.
16. **Boor C. de.** Splines as linear combinations of B-splines // Approximation Theory. II (Proc. intern. symposium, Austin, Texas, 1976). New York; ect.: Acad. Press, 1976. P. 1–47.
17. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М: Наука, 1969. 656 с.
18. **Burenkov V.I.** Sobolev spaces on domains. Teubner Texts in Math. Vol. 137. Stuttgart: B.G.Teubner Verlag GmbH, 1998. 312 p.
19. **Madych W.R., Potter E.** An estimate for multivariate interpolation // J. Approx. Theory. 1985. Vol. 43, no. 2. P. 132–139.

Новиков Сергей Игоревич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: Sergey.Novikov@imm.uran.ru

Поступила 27.10.2010

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 3 2011

УДК 517.977

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В СИНГУЛЯРНОМ СЛУЧАЕ[1]

Ю. В. Парышева

Рассматривается линейная задача оптимального управления с быстрыми и медленными переменными, гладкими геометрическими ограничениями на управление и терминальным функционалом качества. Найдены условия, при которых асимптотическое разложение функционала качества будет содержать логарифмические члены.

Ключевые слова: оптимальное управление, терминальный критерий качества, ограниченные управления, сингулярные возмущения, асимптотические разложения.

Yu. V. Parysheva. Asymptotics of a solution to a linear optimal control problem in the singular case.

A linear optimal control problem with fast and slow variables, smooth geometric constraints on the control, and a terminal value function is considered. Conditions are found under which the asymptotic expansion of the value function contains logarithmic terms.

Keywords: optimal control, terminal value function, bounded controls, singular perturbations, asymptotic expansions.

В настоящей статье продолжается исследование асимптотики решения задачи оптимального управления [1–3] линейной системой с быстрыми и медленными переменными [4–6], выпуклым терминальным функционалом качества, зависящим от медленных переменных, и гладкими геометрическими ограничениями на управление. В такой постановке задача рассматривалась в [7–10]. В работах [8–10] были получены достаточные условия того, что асимптотика решения задачи носит регулярный характер, т. е. имеет вид ряда по степеням малого параметра, а также построен алгоритм нахождения полной асимптотики решения с точностью до любой степени малого параметра. Сингулярный случай асимптотики был рассмотрен в [7] для системы некоторого частного вида. Показано, что при нарушении достаточных условий регулярности возникают более сложные, отличные от степенной асимптотики решения данной задачи. В настоящей работе продолжается исследование сингулярного случая для линейных систем общего вида. В других постановках асимптотика решений возмущенных задач оптимального управления рассматривалась в [11–14].

1. Постановка задачи

В классе кусочно-непрерывных управлений рассмотрим следующую задачу оптимального управления линейной стационарной системой с терминальным критерием качества:

$$\begin{gathered}
\dot{x}_\varepsilon = A_{11}x_\varepsilon + A_{12}y_\varepsilon + B_1u_\varepsilon, \qquad t\in[0,T], \qquad \|u_\varepsilon\|\le 1,\\
\varepsilon\dot{y}_\varepsilon = A_{21}x_\varepsilon + A_{22}y_\varepsilon + B_2u_\varepsilon, \qquad x_\varepsilon(0)=x^0, \qquad y_\varepsilon(0)=y^0,\\
J_\varepsilon\left(u_\varepsilon(\cdot)\right) = \sigma(x_\varepsilon(T)) \to \min,
\end{gathered} \tag{1.1}$$

[1]Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 11-01-00679), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-2215.2008.1) и Федеральной целевой программы (ФСП, № гос. контракта 02.740.11.0612).

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр; $x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m,\ u \in \mathbb{R}^r$; $A_{ij}, B_i, i, j = 1, 2$ — постоянные матрицы соответствующей размерности;

$$Re\, sp\,(A_{22}) \leqslant -\alpha < 0 \quad (sp\,(A_{22}) \text{ — спектр матрицы } A_{22}); \tag{1.2}$$

$\sigma(\cdot)$ — бесконечно дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$, строго выпуклая и кофинитная (т. е. [15] $\forall x \in \mathbb{R}^n \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda^{-1}\sigma(\lambda x) = +\infty$) функция.

При этих условиях функция $\sigma^*(\cdot)$, сопряженная к $\sigma(\cdot)$ в смысле выпуклого анализа, также будет бесконечно дифференцируемой на $\mathbb{R}^n$, строго выпуклой и кофинитной [15]. В частности,

$$\begin{gathered}\text{матрица } D^2\sigma^*(r) \text{ вторых производных функции } \sigma^*(\cdot)\\ \text{положительно определена при всех } r.\end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь и далее $\|\cdot\|$ — евклидова норма, а $\langle \cdot\,,\ \cdot \rangle$ — скалярное произведение в рассматриваемых конечномерных пространствах.

Рассмотрим задачу (1.1) при $\varepsilon = 0$ (вырожденная задача):

$$\begin{gathered}\dot{x}_0 = A_0 x_0 + B_0 u_0, \qquad x_\varepsilon(0) = x^0, \qquad t \in [0, T], \qquad \|u_0\| \leq 1,\\ A_0 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}, \qquad B_0 = B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2,\\ J_0\,(u_0\,(\cdot)) = \sigma(x_0(T)) \to \min.\end{gathered} \tag{1.4}$$

Будем предполагать, что системы из (1.1) и (1.4) вполне управляемы.

Отметим, что, как показано в [6], достаточным условием вполне управляемости системы (1.1) при всех достаточно малых ε является вполне управляемость двух систем: системы (1.4) и системы $\dot{\eta}_\varepsilon = A_{22}\eta + B_2 u$.

Пусть $u_\varepsilon^{opt}(t)$, $\omega_\varepsilon(T, x^0, y^0)$ и $u_0^{opt}(t)$, $\omega_0(T, x^0, y^0)$ — оптимальное управление и оптимальное значение функционала качества соответственно в возмущенной и вырожденной задачах. Исследуем полную асимптотику $u_\varepsilon^{opt}(t)$ и $\omega_\varepsilon(T, x^0, y^0)$ при $\varepsilon \to +0$ и фиксированных T, x^0, y^0.

Обозначим $A_\varepsilon := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 1/\varepsilon \cdot A_{21} & 1/\varepsilon \cdot A_{22} \end{pmatrix}$, $B_\varepsilon := \begin{pmatrix} B_1 \\ 1/\varepsilon \cdot B_2 \end{pmatrix}$.

В [8; 9] показано, что в рассматриваемых условиях справедливы следующие равенства:

$$u_\varepsilon^{opt}(T - t) = -\frac{U_\varepsilon^*(t) r_\varepsilon}{\|U_\varepsilon^*(t) r_\varepsilon\|}\,, \quad \omega_\varepsilon(T, x^0, y^0) = \sigma^*(r_\varepsilon) - \langle \nabla\sigma^*(r_\varepsilon),\, r_\varepsilon \rangle, \tag{1.5}$$

$$u_0^{opt}(T - t) = -\frac{U_0^*(t) r_0}{\|U_0^*(t) r_0\|}, \quad \omega_0(T, x^0) = \sigma^*(r_0) - \langle \nabla\sigma^*(r_0),\, r_0 \rangle,$$

где векторы r_ε и r_0 являются единственным решением уравнений, соответственно,

$$Z_\varepsilon^{11}(T)x^0 + Z_\varepsilon^{12}(T)y^0 - I(\varepsilon, r_\varepsilon) = \nabla\sigma^*(r_\varepsilon), \quad e^{A_0 T}x^0 - I_0(r_0) = \nabla\sigma^*(r_0). \tag{1.6}$$

Здесь и далее $\nabla\sigma^*(\cdot)$ — градиент функции $\sigma^*(\cdot)$,

$$I(\varepsilon, r_\varepsilon) := \int\limits_0^T V(t; \varepsilon, r_\varepsilon)dt, \quad I_0(r_0) := \int\limits_0^T \frac{U_0(t)U_0^*(t)r_0}{\|U_0^*(t)r_0\|}\,dt, \tag{1.7}$$

$$U_\varepsilon(t) := Z_\varepsilon^{11}(t)B_1 + \frac{1}{\varepsilon}\,Z_\varepsilon^{12}(t)B_2, \quad V(t; \varepsilon, r_\varepsilon) := \frac{U_\varepsilon(t)U_\varepsilon^*(t)r_\varepsilon}{\|U_\varepsilon^*(t)r_\varepsilon\|}, \quad U_0(t) := e^{A_0 t}B_0,$$

а через $Z_\varepsilon^{11}(t), Z_\varepsilon^{12}(t), Z_\varepsilon^{21}(t), Z_\varepsilon^{22}(t)$ обозначаются блоки матричной экспоненты $e^{A_\varepsilon t}$ с размерностями соответственно $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$, $m \times m$ такие, что $e^{A_\varepsilon t} = \begin{pmatrix} Z_\varepsilon^{11}(t) & Z_\varepsilon^{12}(t) \\ Z_\varepsilon^{21}(t) & Z_\varepsilon^{22}(t) \end{pmatrix}$.

Отметим, что вполне управляемость систем (1.1) и (1.4) обеспечивает непрерывность интегралов $I(\varepsilon, r)$, $I_0(r)$ как функций от r во всех точках, отличных от $r = 0$.

В [8; 10] исследована асимптотика решения r_ε уравнения (1.6) в регулярном случае. Показано, что при выполнении условий

$$\left\| B_0^* e^{A_0^* t} r_0 \right\| \neq 0 \quad \text{при всех } t \in [0, T], \tag{1.8}$$

$$\left\| \left(B_0^* + B_2^* e^{A_{22}^* \tau} A_{22}^{*-1} A_{12}^* \right) r_0 \right\| \neq 0 \quad \text{при всех } \tau \in [0, +\infty] \tag{1.9}$$

эта асимптотика носит степенной характер.

Существенность первого условия показана в [7]. В настоящей работе исследуется асимптотика решения r_ε уравнения (1.6) в случае, когда нарушено второе условие.

В данной работе будем предполагать, что выполнены (1.2), (1.3), (1.8), а условие (1.9) справедливо всюду, за исключением точки $\tau = 0$ и при этом порядок нуля функции из (1.9) в точке $\tau = 0$ для определенности первый, т. е.

$$\left\| \left(B_0^* + B_2^* e^{A_{22}^* \tau} A_{22}^{*-1} A_{12}^* \right) r_0 \right\| \neq 0, \quad \tau > 0, \quad \|B_1^* r_0\| = 0, \quad \|B_2^* A_{12}^* r_0\| \neq 0. \tag{1.10}$$

Отметим, что в силу равенств (1.5) для получения асимптотического разложения $u_\varepsilon^{opt}(t)$, $\omega_\varepsilon(T, x^0, y^0)$ достаточно получить разложение вектора r_ε при $\varepsilon \to 0$.

2. Основные соотношения

В исследуемом случае будем искать асимптотику вектора r_ε в виде

$$r_\varepsilon \sim r_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k(\varepsilon), \quad r_k(\varepsilon) = \varepsilon^k \left(r_{k,0} + r_{k,1} \ln \varepsilon + \ldots + r_{k,k-1} \ln^{k-1} \varepsilon \right) = O^*(\varepsilon^k), \quad k \geqslant 1, \tag{2.1}$$

и в частности $r_1(\varepsilon) = \varepsilon r_{1,0} =: \varepsilon r_1 = O(\varepsilon)$.

Будем наряду с (1.10) предполагать, что для матрицы B_1^* выполнено также следующее условие на векторе r_1:

$$B_1^* r_1 \neq 0. \tag{2.2}$$

Для получения системы уравнений, из которой определяются коэффициенты $r_{k,n}$ разложения вектора r_ε, исследуем асимптотику интеграла $I(\varepsilon, r_\varepsilon)$. Как показано в [10], подынтегральная функция у этого интеграла имеет различные асимптотические разложения: внутреннее — в окрестности порядка $\mu := \varepsilon^p$, $p \in (0, 1)$, точки $t = 0$ и внешнее — вне ее. Условие (1.10) порождает наличие особенностей в нуле у коэффициентов внутреннего разложения, в связи с чем в окрестности точки $t = 0$ кроме масштаба $\tau := t/\varepsilon$ появляется новый масштаб $\eta := \tau/\varepsilon = t/\varepsilon^2$. Таким образом, интеграл из (1.7), определяющий $I(\varepsilon, r_\varepsilon)$, разбивается на три с помощью двух вспомогательных параметров

$$I(\varepsilon, r_\varepsilon) = \varepsilon^2 \int_0^\nu V(\varepsilon^2 \eta; \varepsilon, r_\varepsilon)\, d\eta + \varepsilon \int_\nu^{\mu/\varepsilon} V(\varepsilon\tau; \varepsilon, r_\varepsilon)\, d\tau + \int_\mu^T V(t; \varepsilon, r_\varepsilon)\, dt, \ \ \mu = \varepsilon^p, \ \nu = \varepsilon^q, \ p, q \in (0, 1).$$

Для нахождения асимптотики применяются метод вспомогательного параметра [7] и вид асимптотического разложения функции матрицы $U_\varepsilon(t)$ (см. [4; 10]). Используя регуляризацию особенностей подынтегральной функции и лемму 2.1 из [7], получаем следующий вид асимптотики интеграла $I(\varepsilon, r_\varepsilon)$:

$$I(\varepsilon, r_\varepsilon) = I_0(r_0) + \sum_{k=1}^{N-1} \mathcal{B} r_k(\varepsilon) + \sum_{k=1}^{N-1} G_k(\varepsilon, R_{k-1}(\varepsilon)) + O^*\left(\varepsilon^N\right),$$

где $G_k(\varepsilon, R_{k-1}(\varepsilon))$ — известные функции своих аргументов, $R_k(\varepsilon) := (r_0, r_1(\varepsilon), \ldots, r_k(\varepsilon))$, а

$$\mathcal{B}r := \int_0^T \left(\frac{U_0(t)U_0^*(t)r}{\left\langle U_0(t)U_0^*(t)r_0,\ r_0 \right\rangle^{1/2}} - \frac{\left\langle U_0(t)U_0^*(t)r_0,\ r \right\rangle U_0(t)U_0^*(t)r_0}{\left\langle U_0(t)U_0^*(t)r_0,\ r_0 \right\rangle^{3/2}} \right) dt$$

— симметричный неотрицательный оператор.

Подставляя это разложение в уравнение (1.6) и раскладывая остальные величины из (1.6), зависящие от r_ε, в ряды по $r_k(\varepsilon)$, получим при любом натуральном N

$$\sum_{k=1}^{N-1} \left(\left(D^2\sigma^*(r_0) + \mathcal{B} \right) r_k(\varepsilon) \right) + \sum_{k=1}^{N-1} F_k\left(x_0, y_0, \varepsilon, R_{k-1}(\varepsilon)\right) + O^*(\varepsilon^N) = 0, \tag{2.3}$$

где $F_k(x_0, y_0, \varepsilon, R_{k-1}(\varepsilon))$ — известные функции своих аргументов, причем, если в векторе $R_{k-1}(\varepsilon)$ все $r_n(\varepsilon),\ 0 \leqslant n \leqslant k-1$, имеют вид (2.1), то и

$$F_k\left(x_0, y_0, \varepsilon, R_{k-1}(\varepsilon)\right) = \varepsilon^k \sum_{n=0}^{k-1} F_{k,n}\left(R_{k-1}\right) \ln^n \varepsilon, \quad k \geqslant 1,$$

где $R_k := (r_0,\ r_{1,0},\ r_{2,0}, r_{2,1}, \ldots, r_{k,0}, r_{k,1}, \ldots, r_{k,k-1})$.

Приравнивая коэффициенты в (2.3) при слагаемых одинакового порядка малости, получим для коэффициентов $r_{k,n}$ следующие уравнения:

$$(D^2\sigma^*(r_0) + \mathcal{B})r_{k,n} = -F_{k,n}\left(R_{k-1}\right), \quad k \geqslant 1. \tag{2.4}$$

В частности, уравнение для вектора r_1 имеет вид

$$(D^2\sigma^*(r_0) + \mathcal{B})r_1 = v(y_0, r_0),$$

где

$$\begin{aligned} v\left(y_0, r_0\right) = \Bigg(&\int_0^T \left(\frac{\left(U_0(t)U_1^*(t) + U_1(t)U_0^*(t)\right) r_0}{\|U_0^*(t)r_0\|} - \frac{\left\langle U_0(t)U_1^*(t)r_0,\ r_0 \right\rangle U_0(t)U_0^*(t)r_0}{\|U_0^*(t)r_0\|^3} \right) dt \\ &+ \int_0^{+\infty} \left(\frac{S_0U(\tau)S_0U^*(\tau)r_0}{\|S_0U^*(\tau)r_0\|} - \frac{B_0B_0^*r_0}{\|B_0^*r_0\|} \right) d\tau + e^{A_0T}A_{12}A_{22}^{-1}y_0 \Bigg), \end{aligned} \tag{2.5}$$

а $U_1(t)$ и $S_0U(\tau) := B_0^* + B_2^* e^{A_{22}^*\tau} A_{22}^{*-1} A_{12}^*$ — коэффициенты соответственно при ε^1 внешнего разложения функции $U_\varepsilon(t)$ и при ε^0 внутреннего разложения функции $U_\varepsilon(t)$.

3. Основной результат

Поскольку в силу условия (1.3) оператор $D^2\sigma^*(r_0) + \mathcal{B}$ положительно определен, то система (2.4) разрешима при любых правых частях единственным образом.

Более того, для вектора невязки $\rho(\varepsilon) := r_\varepsilon - \sum_{k=1}^N r_k(\varepsilon)$ при условии $\rho(\varepsilon) = O\left(\varepsilon^N\right)$ уравнение для r_ε принимает вид

$$(D^2\sigma^*(r_0) + \mathcal{B})\rho = O^*\left(\varepsilon^{N+1}\right) + O^*\left(\varepsilon||\rho||\right),$$

откуда в силу теоремы Шаудера — Тихонова [16] исходное уравнение разрешимо и

$$\rho(\varepsilon) = O^*\left(\varepsilon^{N+1}\right).$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполнены* (1.2), (1.3), *условия* (1.8), (1.10) *на вектор* $r_0 = r_0(T, x^0)$, *являющийся решением уравнения* (1.6), *а также условие* (2.2) *на вектор* $r_1 = r_1(T, y^0)$, *определяемый как решение уравнения* (2.4) *с правой частью, определяемой* (2.5). *Тогда вектор* r_ε *и величина* $\omega_\varepsilon(T, x^0, y^0)$ — *оптимальное значение функционала качества в задаче* (1.1) — *раскладываются при* $\varepsilon \to +0$ *в асимптотические ряды вида*

$$r_\varepsilon \sim r_0(T, x^0) + \varepsilon r_1(T, y^0) + \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k \left(\sum_{n=0}^{k-1} r_{k,n}(T, x^0, y^0) \ln^n \varepsilon \right),$$

$$\omega_\varepsilon(T, x^0, y^0) \sim \omega_0(T, x^0) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left(\sum_{n=0}^{k-1} \omega_{k,n}(T, x^0, y^0) \ln^n \varepsilon \right),$$

при этом оптимальное управление в задаче (1.1) *выражается через вектор* r_ε *в силу* (1.5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин [и др.]. М.: Наука, 1983. 393 с.
2. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
3. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 574 с.
4. **Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.** Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
5. **Дончев А.** Системы оптимального управления: Возмущения, приближения и анализ чувствительности. М.: Мир, 1987. 156 с.
6. **Kokotovic P.V., Haddad A.H.** Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast modes // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. Vol. 20, iss. 1. P. 111–113.
7. **Данилин А.Р.** Асимптотика оптимального значения функционала качества при быстро стабилизирующемся непрямом управлении в сингулярном случае // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 12. С. 2166–2177.
8. **Данилин А.Р., Парышева Ю.В.** Асимптотика оптимального значения функционала качества в линейной задаче оптимального управления // Докл. РАН. 2009. Т. 427, № 2. С. 151–154.
9. **Парышева Ю.В.** Асимптотика оптимального управления в задаче минимизации терминального функционала на траекториях системы с быстрыми и медленными переменными // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 186–198.
10. **Данилин А.Р., Парышева Ю.В.** Об асимптотике оптимального значения функционала качества в линейной задаче оптимального управления // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 4. С. 563–573.
11. **Васильева А.Б., Дмитриев М.Г.** Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. М.: ВИНИТИ, 1982. Т. 20. С. 3–77.
12. **Данилин А.Р., Ильин А.М.** Асимптотическое поведение решения задачи быстродействия для линейной системы при возмущении начальных данных // Докл. РАН. 1996. Т. 350, № 2. С. 155–157.
13. **Калинин А.И.** Метод возмущений для асимптотического решения квазилинейной задачи оптимального быстродействия // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 4. С. 585–594.
14. **Калинин А.И., Семенов К.В.** Асимптотический метод оптимизации линейных сингулярно возмущенных систем с многомерным управлением // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 3. С. 432–443.
15. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 472 с.
16. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. М.: Физматлит, 1977. 742 с.

Парышева Юлия Владимировна
аспирант
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: pva@sky.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 3 2011

УДК 519.174

ХРОМАТИЧЕСКАЯ ОПРЕДЕЛЯЕМОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ ВЫСОТЫ 2 В РЕШЕТКАХ ПОЛНЫХ МНОГОДОЛЬНЫХ ГРАФОВ

Т. А. Сеньчонок

Целью работы является доказательство следующей теоремы. Пусть n и t — натуральные числа такие, что $0 < t < n$, и h — неотрицательное целое число ≤ 2. Тогда любой полный t-дольный n-граф с неодноэлементными долями, имеющий высоту h в решетке $NPL(n,t)$, является хроматически определяемым.

Ключевые слова: разбиение натурального числа, решетка, граф, полный многодольный граф, хроматический многочлен, хроматическая определяемость.

T. A. Senchonok. Chromatic uniqueness of elements of height 2 in lattices of complete multipartite graphs.

The purpose of the paper is to prove the following theorem. Let integers n, t, and h be such that $0 < t < n$ and $h \leq 2$. Then, any complete t-partite graph with nontrivial parts that has height h in the lattice $NPL(n,t)$ is chromatically unique.

Keywords: integer partition, lattice, graph, complete multipartite graph, chromatic polynomial, chromatic uniqueness.

Введение

Разбиением натурального числа n [1] называется невозрастающая последовательность целых неотрицательных чисел $u = (u_1, u_2, \ldots)$ такая, что $u_1 \geq u_2 \geq \ldots$, причем u содержит лишь конечное число ненулевых компонент и $n = \sum_{i=1}^{\infty} u_i$. Число l такое, что $u_l > 0$ и $u_{l+1} = u_{l+2} = \ldots = 0$, будем называть длиной разбиения u. Для удобства разбиение u будем записывать в виде $u = (u_1, \ldots, u_l)$.

Например, разбиение $20 = 6+4+4+3+1+1+1$ числа 20 на 7 слагаемых записывается в виде $(6,4,4,3,1,1,1)$, здесь 7 — длина разбиения.

Через $NPL(n,t)$ обозначим множество всех разбиений длины t натурального числа n, где $1 \leq t \leq n$. Определим понятие *элементарного преобразования* разбиения $u = (u_1, u_2, \ldots, u_t)$ числа n [2]. Пусть натуральные числа i и j таковы, что 1) $1 \leq i < j \leq t$; 2) $u_i - 1 \geq u_{i+1}$ и $u_{j-1} \geq u_j + 1$; 3) $u_i = u_j + \delta$, где $\delta \geq 2$. Будем говорить, что разбиение $v = (u_1, \ldots, u_i - 1, \ldots, u_j + 1, \ldots, u_t)$ получено элементарным преобразованием (или перекидыванием блока) разбиения $u = (u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_t)$. Отметим, что v отличается от u лишь на двух компонентах с номерами i и j.

Рассмотрим отношение $\geq$ на множестве $NPL(n,t)$ [2], полагая $u \geq v$, если v можно получить из u с помощью последовательного выполнения конечного числа (возможно нулевого) элементарных преобразований. В [2] показано, что $NPL(n,t)$ является решеткой относительно отношения $\geq$.

Элементарное преобразование разбиения будем называть *падением блока*, если $j = i+1$ и $\delta > 2$, и *сдвигом блока*, если $i+1 < j$, $u_i = u_{i+1} + 1$, $u_{i+1} = u_{i+2} = \ldots = u_{j-1}$ и $u_{j-1} = u_j + 1$, или если $j = i+1$ и $\delta = 2$.

Рассмотрим отношение $\Rightarrow$ на $NPL(n,t)$, полагая $u \Rightarrow v$, если разбиение v получается из разбиения u падением или сдвигом блока. В [2] доказано, что отношение $\Rightarrow$ совпадает с отношением покрытия в решетке $NPL(n,t)$.

Пусть $n = t \cdot q + r$, где q — натуральное число и r — неотрицательное целое число такие, что $0 \leq r < t$. Нетрудно заметить, что разбиение $(q+1, \ldots, q+1, q, \ldots, q)$, где число $q+1$

повторяется r раз, а число q повторяется $t-r$ раз, является наименьшим элементом решетки $NPL(n,t)$.

Пусть $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_t$ — разбиение числа n, где $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_t \geq 1$. Через $K(n_1, n_2, \ldots, n_t)$ будем обозначать полный t-дольный граф на n вершинах с долями размеров $n_1, n_2, \ldots, n_t$. Очевидно, с точностью до изоморфизма существует взаимно однозначное соответствие между полными t-дольными графами на n вершинах и элементами решетки $NPL(n,t)$. Поэтому мы можем отождествлять полный многодольный граф на n вершинах с соответствующим ему разбиением числа n. Конечно, порядок $\geq$ на $NPL(n,t)$ можно рассматривать как порядок на множестве полных t-дольных графов на n вершинах.

Граф, содержащий n вершин, будем для удобства называть n-графом. Пусть G — произвольный обыкновенный (т. е. без петель и кратных ребер) n-граф. Для натурального числа x через $P(G,x)$ обозначим число всевозможных раскрасок графа G в x заданных цветов, причем не предполагается, что в раскраске должны быть использованы все x цветов. Хорошо известно (см., например, [3]), что функция $P(G,x)$ есть многочлен степени n от x, который называют *хроматическим многочленом* графа G.

Два графа называются *хроматически эквивалентными* или *χ-эквивалентными* [4], если они имеют одинаковые хроматические многочлены. Граф называется *хроматически определяемым*, если он изоморфен любому хроматически эквивалентному ему графу. Это понятие было введено в работе [5]. Поиску хроматически определяемых графов посвящено значительное число исследований (см. обзор [6]). В частности, в работе [7] доказано, что хроматически определяемы полные t-дольные графы вида $K(q+1, \ldots, q+1, q, \ldots, q)$. Иными словами, хроматически определяемы полные многодольные графы, являющиеся наименьшими элементами в решетках $NPL(n,t)$. В работе [8] установлена хроматическая определяемость атомов в решетках $NPL(n,t)$.

В ходе многочисленных исследований сформировалась следующая гипотеза: хроматически определяем любой полный многодольный граф $K(n_1, n_2, \ldots, n_t)$ при $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_t \geq 2$.

К настоящему времени эта гипотеза подтверждена при больших значениях n_t в зависимости от числа вершин графа [6] и, как мы видим, для элементов высоты 0 и 1 в решетках $NPL(n,t)$.

Целью данной работы является доказательство следующего утверждения.

Теорема. *Пусть n и t — натуральные числа такие, что $0 < t < n$, и h — неотрицательное целое число ≤ 2. Тогда любой полный t-дольный n-граф с неодноэлементными долями, имеющий высоту h в решетке $NPL(n,t)$, является хроматически определяемым.*

Заметим, что при $t = 3$ утверждение данной теоремы было доказано в работах [9–11]. В работе же [12] установлено, что полный двудольный граф $K(n_1, n_2)$ хроматически определяем при $n_1 \geq n_2 \geq 2$. В силу отмеченного нуждается в доказательстве утверждение теоремы при $t \geq 4$ и $h = 2$.

Прежде чем переходить к доказательству теоремы, приведем необходимые сведения и определения.

1. Некоторые хроматические инварианты и их свойства

Предположим, что каждому графу приписано некоторым образом число. Это число называют *хроматическим инвариантом*, если оно одинаково для любых двух хроматически эквивалентных графов. Хроматическими инвариантами являются число вершин, число ребер и число компонент связности графа [4]. Число ребер графа G будем обозначать через $I_2(G)$. Отметим, что число вершин графа G можно было бы обозначить через $I_1(G)$. Еще одним хроматическим инвариантом является $I_3(G)$ — число треугольников в графе G (см. [13] или [14]).

Далее через $\mathrm{pt}(G,i)$ мы будем обозначать число разбиений множества вершин графа G на i непустых коклик, т. е. подмножеств, состоящих из попарно несмежных вершин. В силу теоремы Зыкова (см., например, [3]) числа $\mathrm{pt}(G,i)$ при $\chi \le i \le n$ являются хроматическими инвариантами, где $\chi = \chi(G)$ — хроматическое число графа G.

Для полного t-дольного n-графа $K(n_1,n_2,\ldots,n_t)$, где $n_1 \ge n_2 \ge \ldots \ge n_t \ge 1$, выполняется $\chi = t$, и раскраска графа в t красок дает единственное разбиение его вершин на t коклик — долей этого графа. Разбиение на $t+1$ непустых коклик получается из предыдущего разбиения разбиением одной из долей на два непустых подмножества. Следовательно, $\mathrm{pt}(K(n_1,n_2,\ldots,n_t),t) = 1$ и $\mathrm{pt}(K(n_1,n_2,\ldots,n_t),t+1) = 2^{n_1-1}-1+\ldots+2^{n_t-1}-1 = 2^{n_1-1}+\ldots+2^{n_t-1}-t$. В дальнейшем s-разбиением графа будем называть разбиение множества его вершин на s коклик.

Далее при доказательстве хроматической определяемости графа $G = K(n_1,n_2,\ldots,n_t)$, где $n_1 \ge n_2 \ge \ldots \ge n_t \ge 2$, мы всегда будем рассматривать некоторый хроматически эквивалентный ему граф H и от противного предполагать, что H не изоморфен G. Такой граф H обязан иметь хроматическое число, равное t, и для него $\mathrm{pt}(H,t) = 1$. Рассмотрим его t-разбиение с долями размера $v_1,v_2,\ldots,v_t$, где $v_1 \ge v_2 \ge \ldots \ge v_t \ge 1$ и $n = v_1+v_2+\ldots+v_t$. Через $V_1,V_2,\ldots,V_t$ обозначим множества вершин соответствующих долей графа H. Предположим, что H не является полным t-дольным графом. Тогда $H = K(v_1,v_2,\ldots,v_t) - E$ для некоторого непустого множества ребер E графа $K(v_1,v_2,\ldots,v_t)$. Ясно, что $I_2(K(v_1,v_2,\ldots,v_t)) = I_2(G)+|E|$, так как $I_2(H) = I_2(G)$. Следовательно, в графе $K(v_1,v_2,\ldots,v_t)$ ребер больше, чем в G точно на $|E|$. Далее для простоты граф $K(v_1,v_2,\ldots,v_t)$ мы будем записывать в виде $K(v)$, где $v = (v_1,v_2,\ldots,v_t)$.

Для малых значений $|E|$ подсчитаем число $\Delta = \Delta\mathrm{pt}(H,K(v))$, которое по определению равно $\mathrm{pt}(H,t+1) - \mathrm{pt}(K(v),t+1)$. Ясно, что любое s-разбиение для $K(v)$ при $t \le s \le n$ будет s-разбиением и для H. Для подсчета Δ нам надо лишь подсчитать число новых $(t+1)$-разбиений графа H, которые возникают из единственного t-разбиения графа $K(v)$ за счет удаления ребер множества E из $K(v)$.

Будем называть долю V_i графа $K(v)$ *особой*, если каждая ее вершина инцидентна некоторому ребру из E. *Особой звездой* графа $K(v)$ будем называть семейство ребер $e_1,\ldots,e_k$ из E такое, что существуют вершины $x_1,\ldots,x_k,y$ графа $K(v)$, для которых $e_1 = x_1y,\ldots,e_k = x_ky$ и $\{x_1,\ldots,x_k\} = V_i$ для некоторого i. Ясно, что здесь V_i будет особой долей.

Лемма 1. *В графе $K(v)$ не может существовать особой звезды.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в $K(v)$ существует особая звезда $e_1 = x_1y,\ldots,e_k = x_ky$, где $\{x_1,\ldots,x_k\} = V_i$ и $y \in V_j$ для некоторых долей V_i и V_j графа $K(v)$ таких, что $i \ne j$.

Единственное t-разбиение графа $K(v)$ преобразуем, переместив вершину y из компоненты V_j в компоненту V_i. Если $|V_j| = 1$, то получим $(t-1)$-разбиение графа H, что невозможно в силу $\chi(H) = t$. Если же $|V_j| > 1$, то получим новое t-разбиение графа H, что также невозможно в силу $\mathrm{pt}(H,t) = 1$. Лемма доказана.

Отметим, что в графе H на основании леммы 1 не может существовать одноэлементной особой доли.

Лемма 2. 1. *Если $|E| = 1$, то* $\Delta\mathrm{pt}(H,K(v)) = 1$.
2. *Если $|E| = 2$, то* $2 \le \Delta\mathrm{pt}(H,K(v)) \le 3$.
3. *Если $|E| = 3$, то* $3 \le \Delta\mathrm{pt}(H,K(v)) \le 7$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. В силу замечания, сделанного перед леммой, концы удаляемого ребра $e = x_1x_2$ принадлежат двум неособым долям. При этом с использованием ребра e из единственного t-разбиения возникает точно одно новое $(t+1)$-разбиение графа H. Для этого вершины x_1 и x_2 нужно уединить в новую отдельную компоненту $\{x_1,x_2\}$.

2. Поскольку нет одноэлементных особых долей, каждому удаляемому ребру из E соответствует новое $(t+1)$-разбиение графа H и, следовательно, $2 \le \Delta\mathrm{pt}(H,K(v))$.

Если в графе $K(v)$ нет особых долей, то любое новое $(t+1)$-разбиение графа H может возникнуть из единственного t-разбиения лишь уединением в новую компоненту некоторой коклики, состоящей из вершин, инцидентных ребрам из некоторого непустого подмножества множества E, т. е. таких новых $(t+1)$-разбиений возникает не более, чем число непустых подмножеств из E и, следовательно, $\Delta \le 3$.

Рассмотрим теперь случай, когда в $K(v)$ имеется особая доля, которая, как отмечено, обязательно неодноэлементна.

Пусть $E = \{e_1, e_2\}$, $e_1 = x_1y_1$, $e_2 = x_2y_2$ и $\{x_1, x_2\} = V_i$ — особая доля. В силу леммы 1 имеем $y_1 \ne y_2$. Если $\{y_1, y_2\}$ является особой долей, то можно преобразовать t-разбиение графа H в новое t-разбиение, взяв две новые компоненты $\{x_1, x_2\}$ и $\{y_1, y_2\}$. Тогда $\mathrm{pt}(H,t) > 1$, что невозможно.

Пусть y_1, y_2 лежат либо в одной неособой доле, либо в разных (неодноэлементных) долях. Тогда легко видеть, что $\Delta = 3$.

3. Очевидно, $3 \le \Delta$ и, если в графе $K(v)$ нет особых долей, то число новых $(t+1)$-разбиений не превосходит числа непустых подмножеств из E, т. е. $\Delta \le 7$. Остается рассмотреть ситуацию, когда в $K(v)$ имеется особая доля.

Предположим сначала, что существует трехэлементная особая доля. Поскольку в $K(v)$ нет особых звезд и одноэлементных особых долей, с точностью до обозначения вершин и долей возможны лишь случаи, представленные на рис. 1.

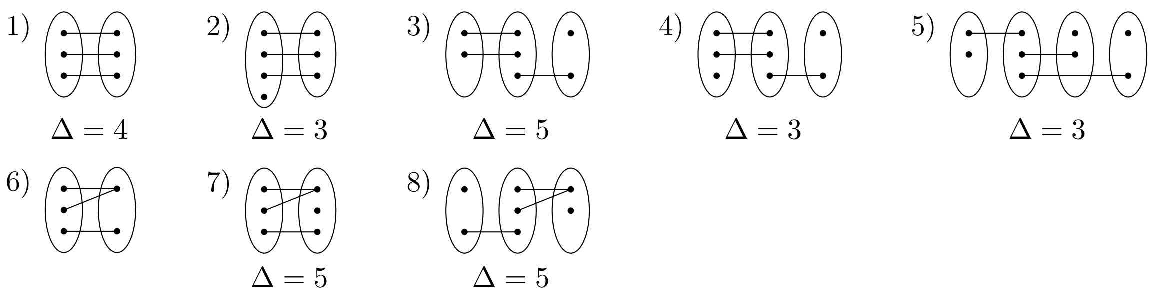
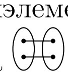


Рис. 1.

Здесь и далее на рисунках изображаются ребра из E и только те доли, которые содержат вершины, инцидентные ребрам из E. Кроме того, в доле ставится точка в том и только в том случае, когда доля не является особой. Отметим, что случай 6) на рис. 1 невозможен, так как в нем t-разбиение можно преобразовать в новое t-разбиение, что противоречит условию $\mathrm{pt}(H,t) = 1$.

Предположим теперь, что в $K(v)$ не существует трехэлементной особой доли и существует двухэлементная особая доля. Отметим, что ситуация двухэлементных особых долей в $K(v)$ вида  невозможна, так как по таким долям можно построить новое t-разбиение графа H. Поскольку в $K(v)$ нет особых звезд, трехэлементных и одноэлементных особых долей, с точностью до обозначения вершин и долей возможны лишь 17 случаев. Для удобства перечисления разобьем их на две группы.

I. Существуют два ребра $e_1 = x_1y_1$ и $e_2 = x_2y_2$ такие, что $\{x_1, x_2\}$ — особая доля и y_1, y_2 лежат в одной доле (см. рис. 2).

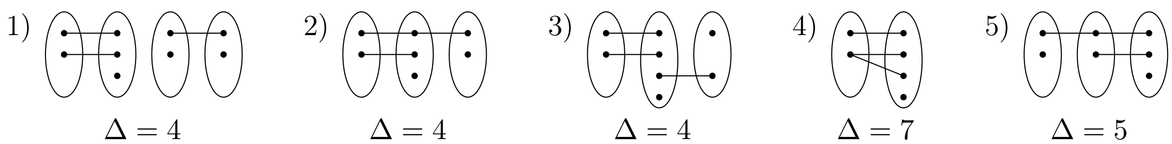


Рис. 2.

II. Не существует особой двухэлементной доли вида, указанного в I, и существуют два ребра $e_1 = x_1y_1$ и $e_2 = x_2y_2$ такие, что $\{x_1, x_2\}$ — особая доля и y_1, y_2 лежат в разных долях (см. рис. 3).

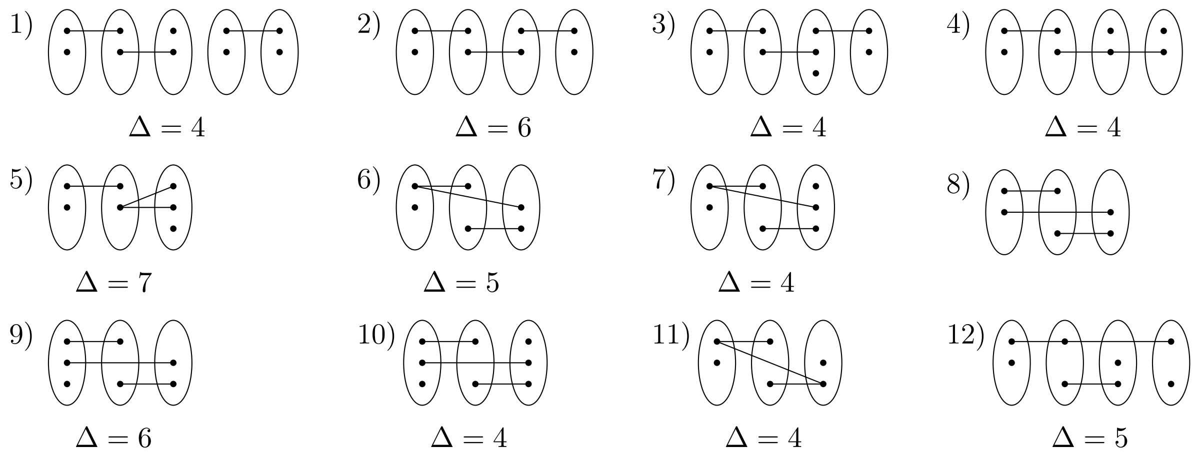


Рис. 3.

Отметим, что случай 8) на рис. 3 невозможен, так как в нем t-разбиение можно преобразовать в новое t-разбиение, что противоречит условию $\mathrm{pt}(H,t) = 1$. Лемма доказана.

Зафиксируем элементарное преобразование разбиений из $NPL(n,t)$:
$u = (u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_t) \Rightarrow v = (u_1, \ldots, u_i - 1, \ldots, u_j + 1, \ldots, u_t)$, где $i < j$, $u_i = u_j + \delta$ и $\delta \geq 2$. Рассмотрим изменение хроматических инвариантов I_2, I_3 и $\mathrm{pt}(G, t+1)$ при выполнении этого элементарного преобразования.

Лемма 3. $I_2(u) - I_2(v) = -(\delta - 1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, $I_2(u) = \binom{n}{2} - \binom{u_1}{2} - \ldots - \binom{u_t}{2}$. В силу этого получаем $I_2(u) - I_2(v) = -\binom{u_i}{2} - \binom{u_j}{2} + \binom{u_i - 1}{2} + \binom{u_j + 1}{2} = -(u_i - 1) + u_j = -\delta + 1 = -(\delta - 1)$. Лемма доказана.

Лемма 4. $I_3(u) - I_3(v) = -(\delta - 1)(n - u_i - u_j)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть без ограничения общности $i = 1, j = 2$. В графах $K(u)$ и $K(v)$ треугольники, не имеющие вершин в первой и второй долях, общие. Следовательно, разность инвариантов I_3 — это разность между количеством треугольников, исчезнувших после уменьшения первой доли, и треугольников, появившихся после увеличения второй доли. $I_3(u) - I_3(v) = (u_2u_3 + \ldots + u_2u_t) - ((u_1 - 1)u_3 + \ldots + (u_1 - 1)u_t) = (u_2 - (u_1 - 1))(u_3 + \ldots + u_t) = (-\delta + 1)(u_3 + \ldots + u_t) = -(\delta - 1)(n - u_1 - u_2)$. Лемма доказана.

Лемма 5. $\Delta\mathrm{pt}(u, v) = 2^{u_j - 1}(2^{\delta - 1} - 1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для полного t-дольного графа $K(u)$ выполняется $\mathrm{pt}(u, t+1) = 2^{u_1 - 1} + \ldots + 2^{u_t - 1} - t$. В силу этого получаем $\Delta\mathrm{pt}(u, v) = \mathrm{pt}(u, t+1) - \mathrm{pt}(\mathrm{v}, \mathrm{t} + 1) = 2^{\mathrm{u}_1 - 1} + \ldots + 2^{\mathrm{u}_\mathrm{i} - 1} + \ldots + 2^{\mathrm{u}_\mathrm{j} - 1} + \ldots + 2^{\mathrm{u}_\mathrm{t} - 1} - \mathrm{t} - 2^{\mathrm{u}_1 - 1} - \ldots - 2^{\mathrm{u}_\mathrm{i} - 1 - 1} - \ldots - 2^{\mathrm{u}_\mathrm{j} + 1 - 1} - \ldots - 2^{\mathrm{u}_\mathrm{t} - 1} + \mathrm{t} = 2^{\mathrm{u}_\mathrm{i} - 1} + 2^{\mathrm{u}_\mathrm{j} - 1} - 2^{\mathrm{u}_\mathrm{i} - 2} - 2^{\mathrm{u}_\mathrm{j}} = 2^{\mathrm{u}_\mathrm{i} - 2} - 2^{\mathrm{u}_\mathrm{j} - 1} = 2^{\mathrm{u}_\mathrm{j} + \delta - 2} - 2^{\mathrm{u}_\mathrm{j} - 1} = 2^{\mathrm{u}_\mathrm{j} - 1 + \delta - 1} - 2^{\mathrm{u}_\mathrm{j} - 1} = 2^{\mathrm{u}_\mathrm{j} - 1}(2^{\delta - 1} - 1)$. Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы

Как видно из леммы 3, при выполнении элементарного преобразования инвариант I_2 (число ребер в соответствующем графе) увеличивается. Введем понятие *уровня* для элементов решетки. Будем говорить, что элемент u имеет *уровень* k, если $I_2(a) - I_2(u) = k$, где a — наименьший элемент решетки. Нам будет удобно располагать элементы решетки $NPL(n,t)$ не по возрастанию высот, а по возрастанию уровней. Для доказательства хроматической определяемости графа $G = K(n_1, n_2, \ldots, n_t)$ рассмотрим соответствующее ему разбиение u в решетке $NPL(n,t)$. Пусть граф H χ-эквивалентен графу $K(u)$. Если $H = K(v)$, то элементы u и v находятся на одном уровне решетки $NPL(n,t)$, так как $I_2(G) = I_2(H)$, и, следовательно, $I_2(u) - I_2(a) = I_2(v) - I_2(a)$. Если же $H = K(v) - E$, то элемент v будет находиться k уровнями ниже u в решетке $NPL(n,t)$, где $k = |E|$. Таким образом, для доказательства хроматической определяемости некоторого полного многодольного графа достаточно показать, что он хроматически не эквивалентен ни одному графу, находящемуся с ним на одном уровне в решетке $NPL(n,t)$, и что, удаляя ребра из нижележащих элементов в решетке, нельзя получить граф, χ-эквивалентный данному.

Начнем рассмотрение нижних этажей решетки $NPL(n,t)$ с элементов высоты 2, имеющих второй уровень. Это элементы b_4, b_5 и b_6 (см. [15]):

$$b_4 = (q+2, q+2, \underbrace{q+1, \ldots, q+1}_{r-4}, \underbrace{q, \ldots, q}_{t-r+2}), \quad 4 \le r \le t-1, \quad q \ge 1;$$
$$b_5 = (q+2, \underbrace{q+1, \ldots, q+1}_{r-1}, \underbrace{q, \ldots, q}_{t-r-1}, q-1), \quad 1 \le r \le t-1, \quad q \ge 2;$$
$$b_6 = (\underbrace{q+1, \ldots, q+1}_{r+2}, \underbrace{q, \ldots, q}_{t-r-4}, q-1, q-1), \quad 0 \le r \le t-4, \quad q \ge 2.$$

На рис. 4 приведены нижние этажи решетки $NPL(n,t)$ в случае $4 \le r \le t-4$ (в других случаях имеется лишь часть этого частично упорядоченного множества, см. [15]).

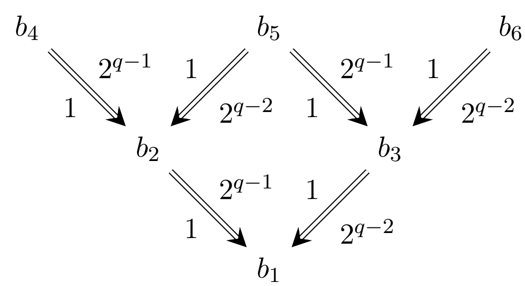


Рис. 4.

На рис. 4 рядом с символами покрытий представлены числа, на которые изменяются инварианты $I_2(u)$ и $\mathrm{pt}(u, t+1)$, подсчитанные с помощью утверждений лемм 3 и 5.

Лемма 6. *Графы $K(b_4)$, $K(b_5)$ и $K(b_6)$ попарно не являются χ-эквивалентными.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $K(b_4)$ и $K(b_5)$ являются χ-эквивалентными. Тогда $\mathrm{pt}(b_4, t+1) = \mathrm{pt}(b_5, t+1)$, откуда получаем $\Delta\mathrm{pt}(b_4, b_2) = \Delta\mathrm{pt}(b_5, b_2)$, т. е. $2^{q-1} = 2^{q-2}$, что невозможно.

Пусть $K(b_5)$ и $K(b_6)$ являются χ-эквивалентными. Тогда аналогично предыдущему $\Delta\mathrm{pt}(b_5, b_3) = \Delta\mathrm{pt}(b_6, b_3)$, т. е. $2^{q-1} = 2^{q-2}$, что невозможно.

Пусть $K(b_4)$ и $K(b_6)$ являются χ-эквивалентными. Тогда $\Delta\mathrm{pt}(b_4, b_1) = \Delta\mathrm{pt}(b_6, b_1)$ влечет $\Delta\mathrm{pt}(b_4, b_2) + \Delta\mathrm{pt}(b_2, b_1) = \Delta\mathrm{pt}(b_6, b_3) + \Delta\mathrm{pt}(b_3, b_1)$, откуда получаем $2^{q-1} + 2^{q-1} = 2^{q-2} + 2^{q-2}$, что невозможно. Лемма доказана.

Таким образом, мы рассмотрели все возможные полные многодольные графы, которые могли бы быть χ-эквивалентны графам $K(b_4)$, $K(b_5)$ и $K(b_6)$. Теперь мы можем попробовать получить графы, χ-эквивалентные данным, удаляя некоторые ребра из графов, лежащих на более низком уровне в решетке $NPL(n,t)$. Начнем с элементов 1-го уровня, в которых ровно на одно ребро меньше. Это элементы b_2 и b_3:

$$b_2 = (q+2, \underbrace{q+1, \ldots, q+1}_{r-2}, \underbrace{q, \ldots, q}_{t-r+1}), \quad 2 \le r \le t-1, \quad q \ge 1;$$

$$b_3 = (\underbrace{q+1,\ldots,q+1}_{r+1},\underbrace{q,\ldots,q}_{t-r-2},q-1),\quad 0\le r\le t-2,\quad q\ge 2.$$

Элементы b_2 и b_3 получаются из элементов второго уровня путем одного элементарного преобразования (сдвига). Для этого случая можно сформулировать некоторое общее утверждение.

Лемма 7. *Пусть $u=(u_1,\ldots,u_i,\ldots,u_j,\ldots,u_t)\Rightarrow v=(u_1,\ldots,u_i-1,\ldots,u_j+1,\ldots,u_t)$, $u_t\ge 2$ и $\delta=u_i-u_j=2$. Тогда из графа $K(v)$ путем удаления одного ребра нельзя получить граф, χ-эквивалентный графу $K(u)$.*

Доказательство. Пусть $H=K(v)-E$, где $|E|=1$, и H χ-эквивалентен $K(u)$. Тогда $\mathrm{pt}(H,t{+}1)=\mathrm{pt}(u,t{+}1)$, поэтому $\Delta\mathrm{pt}(H,v)=\Delta\mathrm{pt}(u,v)$. По лемме 2 имеем $\Delta\mathrm{pt}(H,v)=1$. Для элементарного преобразования $u\Rightarrow v$ по лемме 5 выполняется $1=\Delta\mathrm{pt}(u,v)=2^{u_j-1}(2^{\delta-1}-1)=2^{u_j-1}$, что невозможно, поскольку $u_j\ge u_t\ge 2$. Лемма доказана.

Для элементов b_4, b_5 и b_6 может выполняться $b_4\Rightarrow b_2$, $b_5\Rightarrow b_2$, $b_5\Rightarrow b_3$ и $b_6\Rightarrow b_3$, причем в каждом из покрытий $\delta=2$. Если для b_i $(i=4,5,6)$ последняя компонента ≥ 2, то для $K(b_i)$ нельзя в силу леммы 7 получить χ-эквивалентный граф, отбрасывая одно ребро из покрываемого им графа. Таким образом, осталось рассмотреть две пары b_4, b_3 и b_6, b_2.

Лемма 8. 1. *При $q\ge 2$ из графа $K(b_3)$ путем удаления одного ребра нельзя получить граф, χ-эквивалентный графу $K(b_4)$.*
2. *При $q\ge 3$ из графа $K(b_2)$ путем удаления одного ребра нельзя получить граф, χ-эквивалентный графу $K(b_6)$.*

Доказательство. 1. Пусть $H=K(b_3)-E$, где $|E|=1$, и H χ-эквивалентен $K(b_4)$. Тогда $\mathrm{pt}(H,t+1)=\mathrm{pt}(b_4,t+1)$ и, следовательно, $\Delta\mathrm{pt}(H,b_3)=\Delta\mathrm{pt}(b_4,b_3)$. Кроме того, имеем $\Delta\mathrm{pt}(b_4,b_3)=\mathrm{pt}(b_4,t+1)-\mathrm{pt}(b_2,t+1)+\mathrm{pt}(b_2,t+1)-\mathrm{pt}(b_1,t+1)+\mathrm{pt}(b_1,t+1)-\mathrm{pt}(b_3,t+1)=\Delta\mathrm{pt}(b_4,b_2)+\Delta\mathrm{pt}(b_2,b_1)-\Delta\mathrm{pt}(b_3,b_1)=2^{q-1}+2^{q-1}-2^{q-2}=3\cdot 2^{q-2}\ge 3$. Однако по лемме 2 имеем $\Delta\mathrm{pt}(H,b_3)=1$, пришли к противоречию.

2. Пусть $H=K(b_2)-E$, где $|E|=1$, и H χ-эквивалентен $K(b_6)$. Тогда $\mathrm{pt}(H,t+1)=\mathrm{pt}(b_6,t+1)$ и, следовательно, $\Delta\mathrm{pt}(H,b_2)=\Delta\mathrm{pt}(b_6,b_2)$. Отсюда в силу леммы 2 получаем $1=\Delta\mathrm{pt}(H,b_2)=\Delta\mathrm{pt}(b_6,b_3)+\Delta\mathrm{pt}(b_3,b_1)-\Delta\mathrm{pt}(b_2,b_1)=2^{q-2}+2^{q-2}-2^{q-1}=0$, пришли к противоречию. Лемма доказана.

Второй уровень элементов b_4, b_5 и b_6 говорит о том, что разница в числе ребер соответствующих графов и графа наименьшего элемента b_1 равна двум. Элемент b_1 имеет вид

$$b_1 = (\underbrace{q+1,\ldots,q+1}_{r},\underbrace{q,\ldots,q}_{t-r}),\quad 0\le r\le t-1,\quad q\ge 1.$$

Лемма 9. *Из графа $K(b_1)$ путем удаления двух ребер нельзя получить графы, χ-эквивалентные графу $K(b_4)$ при $q\ge 2$ и графам $K(b_5)$ или $K(b_6)$ при $q\ge 3$.*

Доказательство. Пусть $H=K(b_1)-E$, где $|E|=2$, тогда $\Delta\mathrm{pt}(H,b_1)\le 3$ в силу леммы 2. Рассмотрим отдельно 3 случая.

1) Пусть H χ-эквивалентен $K(b_4)$. Тогда $\mathrm{pt}(H,t+1)=\mathrm{pt}(b_4,t+1)$ и, следовательно, $3\ge\Delta\mathrm{pt}(H,b_1)=\Delta\mathrm{pt}(b_4,b_1)=\Delta\mathrm{pt}(b_4,b_2)+\Delta\mathrm{pt}(b_2,b_1)=2^{q-1}+2^{q-1}\ge 4$. Пришли к противоречию.

2) Пусть H χ-эквивалентен $K(b_5)$. Тогда $\mathrm{pt}(H,t+1)=\mathrm{pt}(b_5,t+1)$ и, следовательно, $3\ge\Delta\mathrm{pt}(H,b_1)=\Delta\mathrm{pt}(b_5,b_1)=2^{q-2}+2^{q-1}\ge 6$. Пришли к противоречию.

3) Пусть H χ-эквивалентен $K(b_6)$. Тогда $\mathrm{pt}(H,t+1)=\mathrm{pt}(b_6,t+1)$ и, следовательно, $3\ge\Delta\mathrm{pt}(H,b_1)=\Delta\mathrm{pt}(b_6,b_1)=2^{q-2}+2^{q-2}\ge 4$. Пришли к противоречию. Лемма доказана.

На этом рассмотрение элементов второго уровня закончено. Однако этим не заканчивается рассмотрение элементов высоты 2. В некоторых частных случаях они попадают на третий уровень, а именно, для $b_7 = c_1$ при $r = 3$ и для $b_{12} = c_2$ при $r = t - 3$ (см. [15]). Сначала рассмотрим элемент $c_1 = b_7 = (q+3, \underbrace{q, \dots, q}_{t-1})$, $\quad 3 = r \le t-1, \quad q \ge 1$.

Нижние этажи решетки $NPL(n,t)$ в случае $3 = r \le t-1$ изображены на рис. 5.

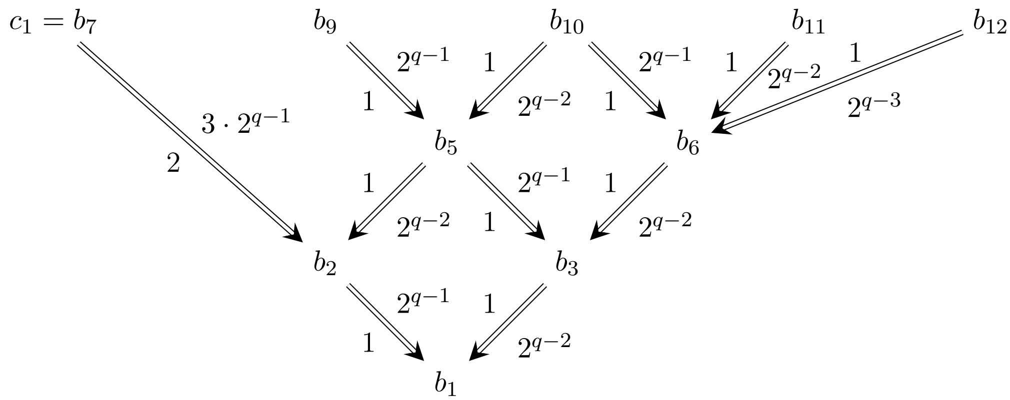


Рис. 5.

Полные многодольные графы, χ-эквивалентные $K(c_1)$, могут находиться только на том же уровне решетки $NPL(n,t)$, что и $K(c_1)$, иными словами, $K(c_1)$ может быть χ-эквивалентен $K(b_9)$, $K(b_{10})$, $K(b_{11})$ или $K(b_{12})$ (см. рис. 5).

Лемма 10. *При $q \ge 2$ граф $K(c_1)$ не является χ-эквивалентным графам $K(b_9)$, $K(b_{10})$, $K(b_{11})$ и $K(b_{12})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы имеем $\Delta\mathrm{pt}(c_1, b_2) = 3 \cdot 2^{q-1}$ и $\Delta\mathrm{pt}(c_1, b_1) = 3 \cdot 2^{q-1} + 2^{q-1} = 2^{q+1}$. Рассмотрим отдельно 4 случая.

1) $\Delta\mathrm{pt}(b_9, b_2) = \Delta\mathrm{pt}(b_9, b_5) + \Delta\mathrm{pt}(b_5, b_2) = 2^{q-1} + 2^{q-2} = 3 \cdot 2^{q-2} \ne 3 \cdot 2^{q-1}$, т. е. $\mathrm{pt}(c_1, t+1) \ne \mathrm{pt}(b_9, t+1)$ и, следовательно, графы $K(c_1)$ и $K(b_9)$ не являются χ-эквивалентными.

2) $\Delta\mathrm{pt}(b_{10}, b_2) = 2^{q-2} + 2^{q-2} = 2^{q-1} \ne 3 \cdot 2^{q-1}$, т. е. $\mathrm{pt}(c_1, t+1) \ne \mathrm{pt}(b_{10}, t+1)$ и, следовательно, графы $K(c_1)$ и $K(b_{10})$ не являются χ-эквивалентными.

3) $\Delta\mathrm{pt}(b_{11}, b_1) = 2^{q-2} + 2^{q-2} + 2^{q-2} = 3 \cdot 2^{q-2} \ne 2^{q+1}$, т. е. $\mathrm{pt}(c_1, t+1) \ne \mathrm{pt}(b_{11}, t+1)$ и, следовательно, графы $K(c_1)$ и $K(b_{11})$ не являются χ-эквивалентными.

4) $\Delta\mathrm{pt}(b_{12}, b_1) = 2^{q-3} + 2^{q-2} + 2^{q-2} = 5 \cdot 2^{q-3} \ne 2^{q+1}$, т. е. $\mathrm{pt}(c_1, t+1) \ne \mathrm{pt}(b_{12}, t+1)$ и, следовательно, графы $K(c_1)$ и $K(b_{12})$ не являются χ-эквивалентными. Лемма доказана.

Выясним: можно ли получить граф, χ-эквивалентный $K(c_1)$, удалением одного ребра из некоторого графа. Для этого могут подходить элементы второго уровня решетки $NPL(n,t)$.

Лемма 11. *При $q \ge 2$ из графов $K(b_5)$ и $K(b_6)$ путем удаления одного ребра нельзя получить граф, χ-эквивалентный графу $K(c_1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $H = K(b_5) - E$, где $|E| = 1$, и H χ-эквивалентен $K(c_1)$. Тогда $\mathrm{pt}(H, t+1) = \mathrm{pt}(c_1, t+1)$ и, следовательно, $\Delta\mathrm{pt}(H, b_5) = \Delta\mathrm{pt}(c_1, b_5) = \Delta\mathrm{pt}(c_1, b_2) - \Delta\mathrm{pt}(b_5, b_2) = 3 \cdot 2^{q-1} - 2^{q-2} = 5 \cdot 2^{q-2} \ge 5$. Пришли к противоречию, поскольку $\Delta\mathrm{pt}(H, b_5) = 1$ в силу леммы 2.

Пусть $H = K(b_6) - E$, где $|E| = 1$, и H χ-эквивалентен $K(c_1)$. Тогда $\mathrm{pt}(H, t+1) = \mathrm{pt}(c_1, t+1)$ и, следовательно, $1 = \Delta\mathrm{pt}(H, b_6) = \Delta\mathrm{pt}(c_1, b_6) = \Delta\mathrm{pt}(c_1, b_2) + \Delta\mathrm{pt}(b_2, b_1) - \Delta\mathrm{pt}(b_3, b_1) - \Delta\mathrm{pt}(b_6, b_3) = 3 \cdot 2^{q-1} + 2^{q-1} - 2^{q-2} - 2^{q-2} = 3 \cdot 2^{q-1} \ge 6$, пришли к противоречию. Лемма доказана.

Итак, мы рассмотрели все возможные варианты получения хроматически эквивалентных графов для $K(c_1)$ удалением ребра из графов второго уровня. Теперь нужно проверить: можно ли получить χ-эквивалентный $K(c_1)$ граф удалением двух ребер из графов первого уровня.

Лемма 12. *При $q \geq 2$ из графов $K(b_2)$ и $K(b_3)$ путем удаления двух ребер нельзя получить граф, χ-эквивалентный графу $K(c_1)$.*

Доказательство. Пусть $H = K(b_2) - E$, где $|E| = 2$, и H χ-эквивалентен $K(c_1)$. Тогда $\mathrm{pt}(H, t+1) = \mathrm{pt}(c_1, t+1)$ и, следовательно, $\Delta\mathrm{pt}(H, b_2) = \Delta\mathrm{pt}(c_1, b_2) = 3 \cdot 2^{q-1} \geq 6$. Пришли к противоречию, поскольку $\Delta\mathrm{pt}(H, b_2) \leq 3$ в силу леммы 2.

Пусть $H = K(b_3) - E$, где $|E| = 2$, и H χ-эквивалентен $K(c_1)$. Тогда $\mathrm{pt}(H, t+1) = \mathrm{pt}(c_1, t+1)$ и, следовательно, $\Delta\mathrm{pt}(H, b_3) = \Delta\mathrm{pt}(c_1, b_3) = 3 \cdot 2^{q-1} + 2^{q-1} - 2^{q-2} = 7 \cdot 2^{q-2} \geq 7$. Пришли к противоречию, поскольку $\Delta\mathrm{pt}(H, b_3) \leq 3$ в силу леммы 2. Лемма доказана.

Элемент c_1 находится на третьем уровне решетки, поэтому у соответствующего графа на 3 ребра больше, чем у графа наименьшего элемента b_1.

Лемма 13. *При $q \geq 2$ из графа $K(b_1)$ путем удаления трех ребер нельзя получить граф, χ-эквивалентный графу $K(c_1)$.*

Доказательство. Пусть $H = K(b_1) - E$, где $|E| = 3$, и H χ-эквивалентен $K(c_1)$. Тогда $\mathrm{pt}(H, t+1) = \mathrm{pt}(c_1, t+1)$ и, следовательно, $\Delta\mathrm{pt}(H, b_1) = \Delta\mathrm{pt}(c_1, b_1) = 3 \cdot 2^{q-1} + 2^{q-1} = 4 \cdot 2^{q-1} \geq 8$. Пришли к противоречию, поскольку $\Delta\mathrm{pt}(H, b_1) \leq 7$ в силу леммы 2. Лемма доказана.

Хроматическая определяемость элемента c_1 доказана. Рассмотрим еще один элемент высоты 2 и уровня 3 в решетке $NPL(n,t)$ $c_2 = b_{12} = (\underbrace{q+1, \ldots, q+1}_{r+2}, q-2)$, $\;0 \leq r = t-3$, $\;q \geq 3$.

Нижние этажи решетки $NPL(n,t)$ в случае $0 \leq r = t-3$ изображены на рис. 6.

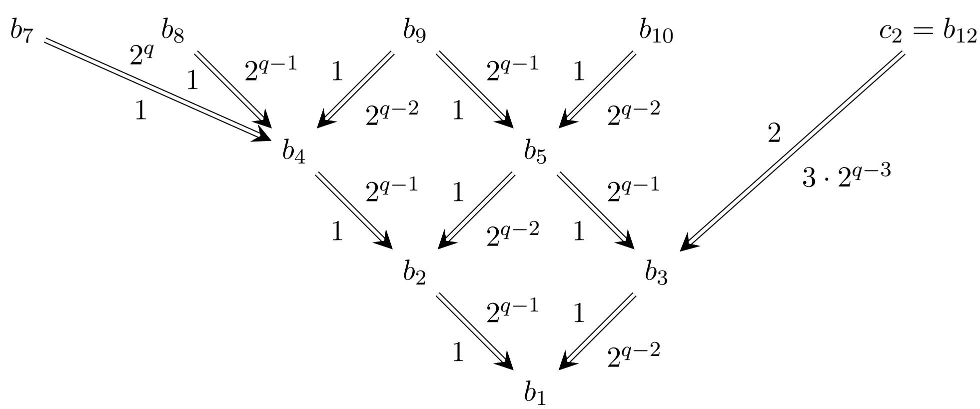


Рис. 6.

Полные многодольные графы, χ-эквивалентные $K(c_2)$, могут находиться только на том же уровне решетки $NPL(n,t)$, что и $K(c_2)$, иными словами, $K(c_2)$ может быть χ-эквивалентен $K(b_7)$, $K(b_8)$, $K(b_9)$ или $K(b_{10})$ (см. рис. 6).

Лемма 14. *При $q \geq 4$ граф $K(c_2)$ не является χ-эквивалентным графам $K(b_7)$, $K(b_8)$, $K(b_9)$ и $K(b_{10})$.*

Доказательство. Мы имеем $\Delta\mathrm{pt}(c_2, b_3) = 3 \cdot 2^{q-3}$ и $\Delta\mathrm{pt}(c_2, b_1) = 3 \cdot 2^{q-3} + 2^{q-2} = 5 \cdot 2^{q-3}$. Рассмотрим отдельно 4 случая.

1) $\Delta\mathrm{pt}(b_7, b_1) = 2^q + 2^{q-1} + 2^{q-1} = 2^{q+1} \neq 5 \cdot 2^{q-3}$ и, следовательно, графы $K(c_2)$ и $K(b_7)$ не являются χ-эквивалентными.

2) $\Delta\mathrm{pt}(b_8, b_1) = 2^{q-1} + 2^{q-1} + 2^{q-1} = 3 \cdot 2^{q-1} \neq 5 \cdot 2^{q-3}$ и, следовательно, графы $K(c_2)$ и $K(b_8)$ не являются χ-эквивалентными.

3) $\Delta\mathrm{pt}(b_9, b_3) = 2^{q-1} + 2^{q-1} = 2^q \neq 3 \cdot 2^{q-3}$ и, следовательно, графы $K(c_2)$ и $K(b_9)$ не являются χ-эквивалентными.

4) $\Delta\mathrm{pt}(b_{10}, b_3) = 2^{q-2} + 2^{q-1} = 3 \cdot 2^{q-2} \neq 3 \cdot 2^{q-3}$ и, следовательно, графы $K(c_2)$ и $K(b_{10})$ не являются χ-эквивалентными. Лемма доказана.

Выясним: можно ли получить граф, χ-эквивалентный $K(c_2)$, удалением одного ребра из графа, лежащего на втором уровне решетки $NPL(n,t)$.

Лемма 15. *При $q \geq 4$ из графов $K(b_4)$ и $K(b_5)$ путем удаления одного ребра нельзя получить граф, χ-эквивалентный графу $K(c_2)$.*

Доказательство. Пусть $H = K(b_4) - E$, где $|E| = 1$, и H χ-эквивалентен $K(c_2)$. Тогда $\mathrm{pt}(H, t+1) = \mathrm{pt}(c_2, t+1)$ и, следовательно, $1 = \Delta\mathrm{pt}(H, b_4) = \Delta\mathrm{pt}(c_2, b_4) = 3 \cdot 2^{q-3} + 2^{q-2} - 2^{q-1} - 2^{q-1} = -3 \cdot 2^{q-3} < 0$, пришли к противоречию.

Пусть $H = K(b_5) - E$, где $|E| = 1$, и H χ-эквивалентен $K(c_2)$. Тогда $1 = \Delta\mathrm{pt}(H, b_5) = \Delta\mathrm{pt}(c_2, b_5) = 3 \cdot 2^{q-3} - 2^{q-1} = -2^{q-3} < 0$, пришли к противоречию. Лемма доказана.

Теперь необходимо проверить: можно ли получить хроматически эквивалентный $K(c_2)$ граф удалением двух ребер из графов первого уровня.

Сначала отдельно рассмотрим случай удаления ребер из $K(b_2)$ при $q = 4$. При рассмотрении этого случая привлечем инвариант I_3. Легко видеть, что если $H = K(w) - E$, то $I_3(w) - I_3(H) = \xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3$, где $\xi_1 = \sum_{e \in E} \xi(e)$ (здесь $\xi(e)$ — число треугольников в $K(w)$, содержащих e), $\xi_2(\xi_3)$ — количество треугольников ровно с двумя (тремя) ребрами из E. Через e_{ij} будем обозначать количество ребер из E, соединяющих доли V_i и V_j, где $i \neq j$.

Лемма 16. *Из графа $K(w) = K(6, \underbrace{5, \ldots, 5}_{r-2}, \underbrace{4, \ldots, 4}_{4})$ путем удаления двух ребер нельзя получить граф, χ-эквивалентный графу $G = K(\underbrace{5, \ldots, 5}_{r+2}, 2)$, где $r = t - 3$.*

Доказательство. Пусть $w = (6, \underbrace{5, \ldots, 5}_{r-2}, \underbrace{4, \ldots, 4}_{4})$, а $H = K(w) - E$, где $|E| = 2$, и граф H χ-эквивалентен графу G. Тогда $\xi_2 \leq 1$, $\xi_3 = 0$.

Если $u = (\underbrace{5, \ldots, 5}_{r+2}, 2)$, а $v = (\underbrace{5, \ldots, 5}_{r+1}, 4, 3)$ ($u \Rightarrow v$ при $i = t-1, j = t, \delta - 1 = 2$), то по лемме 4 выполняется $I_3(u) - I_3(v) = -2(n - 5 - 2) = -2n + 14$.

Если $u = (\underbrace{5, \ldots, 5}_{r+1}, 4, 3)$, а $v = (\underbrace{5, \ldots, 5}_{r}, 4, 4, 4)$ ($u \Rightarrow v$ при $i = r+1, j = t, \delta - 1 = 1$), то по лемме 4 получаем $I_3(u) - I_3(v) = -(n - 5 - 3) = -n + 8$.

Если $u = (6, \underbrace{5, \ldots, 5}_{r-2}, \underbrace{4, \ldots, 4}_{4})$, а $v = (\underbrace{5, \ldots, 5}_{r}, 4, 4, 4)$ ($u \Rightarrow v$ при $i = 1, j = r, \delta - 1 = 1$), то по лемме 4 имеем $I_3(u) - I_3(v) = -(n - 6 - 4) = -n + 10$.

Тогда $I_3(G) - I_3(w) = -2n + 14 - n + 8 + n - 10 = -2n + 12$. Так как $I_3(G) = I_3(H)$, то $I_3(H) - I_3(w) = -2n + 12$. Однако $I_3(w) - I_3(H) = \xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 = \xi_1 - \xi_2$. Отсюда $\xi_1 = 2n - 12 + \xi_2 \geq 2n - 12$.

С другой стороны, $\xi_1 = e_{12}(w_3 + \ldots + w_t) + \ldots + e_{t-1t}(w_1 + \ldots + w_{t-2}) = e_{12}(n - w_1 - w_2) + \ldots + e_{t-1t}(n - w_{t-1} - w_t) = e_{12}(n - 6 - 5) + \ldots + e_{1r-1}(n - 11) + e_{1r}(n - 6 - 4) + \ldots + e_{1t}(n - 10) + e_{23}(n - 5 - 5) + \ldots + e_{2r-1}(n - 10) + e_{2r}(n - 5 - 4) + \ldots + e_{r-1t}(n - 9) + e_{rr+1}(n - 4 - 4) + \ldots + e_{t-1t}(n - 8)$. Так как $|E| = 2$, то $\xi_1 \leq 2(n - 8) = 2n - 16$. Получили противоречие с условием $\xi_1 \geq 2n - 12$. Лемма доказана.

Лемма 17. *При $q \geq 4$ из графов $K(b_2)$ и $K(b_3)$ путем удаления двух ребер нельзя получить граф, χ-эквивалентный графу $K(c_2)$.*

Доказательство. Пусть $H = K(b_2) - E$, где $|E| = 2$, и H χ-эквивалентен $K(c_2)$. Тогда $\Delta\mathrm{pt}(H, b_2) = \Delta\mathrm{pt}(c_2, b_2) = 3 \cdot 2^{q-3} + 2^{q-2} - 2^{q-1} = 2^{q-3}$. По лемме 2 имеем $\Delta\mathrm{pt}(H, b_2) \leq 3$. Если $q \geq 5$, то $\Delta\mathrm{pt}(H, b_2) = 2^{q-3} \geq 4$, что невозможно. Случай $q = 4$ рассмотрен в лемме 16.

Пусть $H = K(b_3) - E$, где $|E| = 2$, и H χ-эквивалентен $K(c_2)$. Тогда $\Delta\mathrm{pt}(H, b_3) = \Delta\mathrm{pt}(c_2, b_3) = 3 \cdot 2^{q-3} \geq 6$. Пришли к противоречию, поскольку $\Delta\mathrm{pt}(H, b_3) \leq 3$ в силу леммы 2. Лемма доказана.

Элемент c_2 находится на третьем уровне решетки, поэтому у соответствующего графа на 3 ребра меньше, чем у графа наименьшего элемента b_1.

Лемма 18. *При $q \geq 4$ из графа $K(b_1)$ путем удаления трех ребер нельзя получить граф, χ-эквивалентный графу $K(c_2)$.*

Доказательство. Пусть $H = K(b_1) - E$, где $|E| = 3$, и H χ-эквивалентен $K(c_2)$. Тогда $\Delta\mathrm{pt}(H, b_1) = \Delta\mathrm{pt}(c_2, b_1) = 3 \cdot 2^{q-3} + 2^{q-2} = 5 \cdot 2^{q-3} \geq 10$. Пришли к противоречию, поскольку $\Delta\mathrm{pt}(H, b_1) \leq 7$ в силу леммы 2. Лемма доказана.

Хроматическая определяемость элемента c_2 доказана, а с ним и хроматическая определяемость всех элементов высоты 2 третьего уровня. Результаты лемм 6–18 доказывают нашу основную теорему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Эндрюс Г.** Теория разбиений. М.: Наука, 1982. 256 с.
2. **Баранский В.А., Королева Т.А.** Решетка разбиений натурального числа // Докл. РАН. 2008. Т. 418, № 4. С. 439–442.
3. **Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В.** Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. СПб.: “Лань”, 2010. 368 с.
4. **Read R.C.** An introduction to chromatic polynomials // J. Comb. Theory. 1968. Vol. 4. P. 52–71.
5. **Chao C.Y., Whitehead E.G. Jr.** On chromatic equivalence of graphs // Lecture Notes in Math. Berlin: Springer, 1978. Vol. 642. P. 121–131. (Theory and Appl. of Graphs.)
6. **Zhao H.** Chromaticity and adjoint polynomials of graphs. Zutphen: Wöhrmann Print Service, 2005. 169 p.
7. **Chao C.Y., Novacky G.A. Jr.** On maximally saturated graphs // Discr. Math. 1982. Vol. 41, no. 2. P. 139–143.
8. **Баранский В.А., Королева Т.А.** Хроматическая определяемость атомов в решетках полных многодольных графов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 3. С. 22–29.
9. **Королева Т.А.** Хроматическая определяемость некоторых полных трехдольных графов. I // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, №3. С. 65–83.
10. **Королева Т.А.** Хроматическая определяемость некоторых полных трехдольных графов. II // Изв. Урал. гос. ун-та. 2010. № 74. С. 39–56. (Математика, механика и информатика; вып. 12.)
11. **Баранский В.А., Королева Т.А.** Хроматическая определяемость некоторых полных трехдольных графов // Изв. Урал. гос. ун-та. 2010. № 74. С. 5–26. (Математика, механика и информатика; вып. 12.)
12. **Koh K.M., Teo K.L.** The search for chromatically unique graphs // Graphs Combin. 1990. Vol. 6. P. 259–285.
13. **Farrell E.J.** On chromatic coefficients // Discr. Math. 1980. Vol. 29, no. 3. P. 257–264.
14. **Баранский В.А., Вихарев С.В.** О хроматических инвариантах двудольных графов // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. № 36. С. 25–34. (Математика и механика; вып. 7.)
15. **Сеньчонок Т.А., Баранский В.А.** Классификация элементов малой высоты в решетках полных многодольных графов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 159–173.

Сеньчонок Татьяна Александровна
аспирант
Уральский гос. университет
e-mail: Tatiana.Senchonok@usu.ru

Поступила 08.04.2011

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 3 2011

УДК 517.518.862

ТОЧНОЕ НЕРАВЕНСТВО ТИПА БРАТЬЕВ МАРКОВЫХ В ПРОСТРАНСТВАХ L_p, L_1 НА ОТРЕЗКЕ[1]

И. Е. Симонов

Изучается неравенство между L_p-средним $(n-1)$-й производной алгебраического многочлена степени $n \geqslant 2$ и L_1-средним самого многочлена на отрезке. При всех $p \in [0, \infty]$ выписаны точная константа и экстремальный многочлен.

Ключевые слова: алгебраический многочлен, неравенства типа Маркова, неравенства типа Никольского.

I. E. Simonov. Sharp Markov brothers type inequality in the spaces L_p, L_1 on a closed interval.

We study an inequality between the L_p-mean of the $(n-1)$th derivative of an algebraic polynomial of degree $n \geqslant 2$ and the L_1-mean of this polynomial on a closed interval. Sharp constants and extremal polynomials are written for all $p \in [0, \infty]$.

Keywords: algebraic polynomial, Markov type inequalities, Nikolskii type inequalities.

1. Постановка задачи и результаты

Пусть $\mathcal{P}_n$ есть множество алгебраических многочленов степени точно $n \geqslant 2$ с вещественными коэффициентами. В работе изучается неравенство

$$\|P^{(n-1)}\|_p \leqslant C_p(n)\|P\|_1, \quad P \in \mathcal{P}_n, \tag{1.1}$$

с точной константой $C_p(n)$ для значений параметра $p \in [0, \infty]$. Здесь и далее

$$\|P\|_p = \left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |P(t)|^p \, dt\right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty;$$

$$\|P\|_\infty = \max_{t \in [-1,1]} |P(t)|; \qquad \|P\|_0 = \exp\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \ln|P(t)| \, dt\right).$$

Неравенство (1.1) является частным случаем общей задачи об оценке L_p-среднего k-й производной алгебраического многочлена через L_q-среднее самого многочлена

$$\|P^{(k)}\|_p \leqslant C_{p,q}(n,k)\|P\|_q, \quad P \in \mathcal{P}_n, \quad p, q \in [0, \infty], \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1. \tag{1.2}$$

Неравенству (1.2) посвящено большое количество работ; хороший обзор результатов содержится в [17; 18; 9]. Однако точные значения величины $C_{p,q}(n,k)$ известны лишь для некоторых значений p, q и k. Братья Марковы [3; 4] получили точное неравенство (1.2) для $p = q = \infty$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, экстремальным в этом случае является многочлен Чебышёва первого рода $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$, $t \in [-1, 1]$. Б. Боянов [7] (см. также [8]) доказал, что многочлен T_n является экстремальным и для всех $p \in [1, \infty)$, $q = \infty$, $k = 1$. Случай $p = q = 2$ исследовали Е. Шмидт, Е. Хилле, Г. Сегё, Ю. Д. Тамаркин, Г. Милованович, П. Дорфлер, А. Кроо [12; 17; 14].

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00462).

Г. Лабель [15] нашел точную константу при $p=\infty$, $q=2$, $1\leqslant k\leqslant n-1$. П. Ю. Глазырина [1; 2] — при $p\in[0,\infty]$, $q=0$, $1\leqslant k\leqslant n-1$. Если $k=n$, то задача сводится к нахождению многочлена, наименее уклоняющегося от нуля в метрике $\|\cdot\|_q$, с фиксированным старшим коэффициентом. Для $q=\infty$ это многочлен Чебышёва первого рода [6], для $q=2$ — многочлен Лежандра, для $q=1$ — многочлен Чебышёва второго рода $U_n(t)=\sin((n+1)\arccos t)/\sqrt{1-t^2}$, $t\in[-1,1]$; в последнем случае решение было найдено А. Н. Коркиным и Е. И. Золотаревым [13].

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $p\in[0,\infty]$, $n\geqslant 2$. Тогда*

$$C_p(n)=\begin{cases}\dfrac{2^n n!}{e}, & p=0,\\ \dfrac{2^n n!}{(1+p)^{1/p}}, & p\in(0,2n^2-1],\\ \dfrac{2^n n!}{1+c_*^2}\left\|t+\dfrac{c_*}{n}\right\|_p, & p\in(2n^2-1,\infty),\\ \dfrac{2^{n-1}(n-1)!}{\sqrt{n^2+1}-n}, & p=\infty.\end{cases} \tag{1.3}$$

С точностью до мультипликативной константы единственным экстремальным в неравенстве (1.1) *при $p\in[0,2n^2-1]$ является многочлен Чебышёва 2-го рода*

$$\widetilde{U}_n(t)=\frac{\sin\left((n+1)\arccos t\right)}{2^n\sqrt{1-t^2}};$$

при $p\in(2n^2-1,\infty]$ таковым является многочлен Золотарева в метрике $L_1[-1,1]$

$$Z_{n,1,c_*}(t)=\widetilde{U}_n(t)\pm c_*\widetilde{U}_{n-1}(t)+\frac{c_*^2}{4}\widetilde{U}_{n-2}(t),$$

где параметр c_* есть единственный корень уравнения

$$(p+1)\big((n+c)^p-(n-c)^p\big)\left(1+c^2\right)-2pc\left((n+c)^{p+1}+(n-c)^{p+1}\right)=0,\quad c\in(0,1),$$

если $p\in(2n^2-1,\infty)$, и $c_*=\sqrt{n^2+1}-n$, если $p=\infty$.

2. Вспомогательные утверждения

Доказательству теоремы предпошлем несколько вспомогательных утверждений.

Хорошо известны следующие свойства функционала $\|\cdot\|_p$, $p\in[0,\infty]$ (см., например, [5, пп. 6.10, 6.11]). Для всех $P\in\mathcal{P}_n$ и любых $0\leqslant p_1<p_2\leqslant\infty$ справедливо неравенство

$$\|P\|_{p_1}<\|P\|_{p_2}; \tag{2.1}$$

для всех $P\in\mathcal{P}_n$ выполняются соотношения $\|P\|_0=\lim_{p\to+0}\|P\|_p$, $\|P\|_\infty=\lim_{p\to+\infty}\|P\|_p$.

Лемма 1. *Пусть $p\in[0,\infty]$, $n\in\mathbb{R}$, $n>0$. Функция*

$$\varphi(c)=\left\|t+\frac{c}{n}\right\|_p,\qquad c\in[0,\infty), \tag{2.2}$$

обладает следующими свойствами:

1) *при $p\in(0,\infty)$, $c\in[0,n]$*

$$\varphi(c)=\left\|t+\frac{c}{n}\right\|_p=\frac{1}{(2(p+1))^{1/p}}\left(\left(1+\frac{c}{n}\right)^{p+1}+\left(1-\frac{c}{n}\right)^{p+1}\right)^{1/p}; \tag{2.3}$$

2) *в точке* $c = 0$ *в зависимости от значения параметра* p *функция* φ *принимает значения*

$$\varphi(0) = \|t\|_p = \frac{\varphi(n)}{2} = \frac{\|t+1\|_p}{2} = \begin{cases} \dfrac{1}{e}, & p = 0, \\ \dfrac{1}{(1+p)^{1/p}}, & p \in (0,\infty), \\ 1, & p = \infty; \end{cases}$$

3) $\varphi(c)$ *(строго) возрастает на* $[0,\infty)$;
4) $\varphi(c)$ *выпукла вниз на промежутке* $[0,n]$;
5) *отношение* $\varphi(c)/c$ *не убывает на промежутке* $[n,\infty)$;
6) $\lim\limits_{c\to+\infty} \varphi(c)/c = 1/n$.

Доказательство. Сначала докажем утверждения леммы для $p \in (0,\infty)$.

1. Рассмотрим $c \in [0,n]$. Утверждение 1 проверяется непосредственным интегрированием. Подставляя в равенство (2.3) значения $c = 0$ и $c = n$, получаем утверждение 2.

Возрастание функции $\varphi(c)$ легко проверяется на основании представления (2.3).

При $p \in [1,\infty)$ выпуклость функции $\varphi(c)$ легко проверяется с помощью неравенства Минковского. При $p \in (0,1)$ представим $\varphi(c)$ в виде

$$\varphi(c) = \frac{1}{(2(p+1))^{1/p}} \bigl(\vartheta(c)\bigr)^{1/p}, \tag{2.4}$$

где

$$\vartheta(c) = \Bigl(1 + \frac{c}{n}\Bigr)^{p+1} + \Bigl(1 - \frac{c}{n}\Bigr)^{p+1}, \quad c \in [0,n].$$

Нетрудно убедиться, что функция $\vartheta(c)$ возрастает и выпукла на промежутке $[0,n]$. Из представления (2.4) видно, что $\varphi(c)$ есть суперпозиция двух возрастающих выпуклых функций, а значит, тоже (возрастает и) выпукла.

2. Рассмотрим теперь $c \in [n,\infty)$. В этом случае выражение для $\varphi(c)$ имеет вид

$$\varphi(c) = \Bigl\|t + \frac{c}{n}\Bigr\|_p = \frac{1}{(2(p+1))^{1/p}} \left(\Bigl(\frac{c}{n} + 1\Bigr)^{p+1} + \Bigl(\frac{c}{n} - 1\Bigr)^{p+1}\right)^{1/p},$$

и возрастание функции $\varphi(c)$ очевидно.

Чтобы доказать возрастание $\varphi(c)/c$, достаточно проверить, что возрастают функции

$$\psi_1(c) = \Bigl(\frac{c}{n} + 1\Bigr)^{p+1} \frac{1}{c^p} \quad \text{и} \quad \psi_2(c) = \Bigl(\frac{c}{n} - 1\Bigr)^{p+1} \frac{1}{c^p}.$$

Имеем

$$\psi_1'(c) = \Bigl(\frac{c}{n} + 1\Bigr)^p \frac{1}{c^{p+1}} \left((p+1)c - p\Bigl(\frac{c}{n} + 1\Bigr)\right),$$

$$(p+1)c - p\Bigl(\frac{c}{n} + 1\Bigr) \geqslant (p+1)c - p\Bigl(\frac{c}{2} + 1\Bigr) = \frac{pc}{2} - p + c \geqslant c > 0.$$

Следовательно, $\psi_1'(c) > 0$, и $\psi_1(c)$ возрастает. Возрастание $\psi_2(c)$ проверяется аналогично:

$$\psi_2'(c) = \Bigl(\frac{c}{n} - 1\Bigr)^p \frac{1}{c^{p+1}} \left((p+1)c - p\Bigl(\frac{c}{n} - 1\Bigr)\right),$$

$$(p+1)c - p\Bigl(\frac{c}{n} - 1\Bigr) \geqslant (p+1)c - p\Bigl(\frac{c}{2} - 1\Bigr) = \frac{pc}{2} + p + c \geqslant c > 0.$$

Последнее утверждение леммы следует из равенств

$$\lim_{c\to+\infty} \frac{\bigl\|t + \frac{c}{n}\bigr\|_p}{c} = \lim_{c\to+\infty} \Bigl\|\frac{t}{c} + \frac{1}{n}\Bigr\|_p = \Bigl\|\frac{1}{n}\Bigr\|_p = \frac{1}{n}.$$

При $p=0$ и $p=\infty$ утверждения 4, 5, 6 выводятся из соответствующих утверждений для $p\in(0,\infty)$ предельным переходом по p. Утверждения 2 и 3 проверяются непосредственным вычислением значений $\left\|t+\dfrac{c}{n}\right\|_0$, $\left\|t+\dfrac{c}{n}\right\|_\infty$. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Пусть* $p\in[0,\infty]$, $n\in\mathbb{R}$, $n\geqslant 2$. *Тогда*

$$\sup_{c\geqslant 1}\frac{\left\|t+\dfrac{c}{n}\right\|_p}{c}<2\|t\|_p.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Рассмотрим сначала $c\in[1,n]$. Докажем, что в этом случае справедливо неравенство

$$\left\|t+\frac{c}{n}\right\|_p<2c\|t\|_p. \tag{2.5}$$

На промежутке $[1,n]$ левая часть неравенства (2.5) выпукла вниз по c в силу леммы 1, а правая часть зависит от c линейно. Значит, неравенство достаточно проверить лишь в крайних точках $c=1$ и $c=n$. В точке $c=1$ неравенство обосновывается с помощью утверждений 2 и 3 леммы 1, а именно

$$\left\|t+\frac{1}{n}\right\|_p<\|t+1\|_p=2\|t\|_p.$$

В точке $c=n$, применяя утверждение 2 леммы 1, имеем

$$\left\|t+\frac{n}{n}\right\|_p=\|t+1\|_p=2\,\|t\|_p<2n\,\|t\|_p\,.$$

В силу непрерывности обеих частей (2.5) по c заключаем, что

$$\max_{c\in[1,n]}\frac{\left\|t+\dfrac{c}{n}\right\|_p}{c}<2\|t\|_p.$$

2. Пусть теперь $c\in[n,\infty]$. В силу леммы 1 функция $\left\|t+\dfrac{c}{n}\right\|_p\Big/c$ не убывает на рассматриваемом промежутке и стремится к $1/n$ при $c\to\infty$. Используя этот факт, утверждение 2 леммы 1 для $p=0$ и неравенство из (2.1), получаем необходимое соотношение

$$\sup_{c\geqslant n}\frac{\left\|t+\dfrac{c}{n}\right\|_p}{c}=\lim_{c\to\infty}\frac{\left\|t+\dfrac{c}{n}\right\|_p}{c}=\frac{1}{n}<\frac{2}{e}=2\|t\|_0\leqslant 2\|t\|_p.$$

Лемма доказана. □

Лемма 3. *Пусть* $p\in[0,\infty]$, $n\in\mathbb{R}$, $n\geqslant 2$. *Тогда существует единственная точка* $c_*\in[0,1)$ *такая, что*

$$\max_{c\in[0,1]}\frac{\left\|t+\dfrac{c}{n}\right\|_p}{1+c^2}=\frac{\left\|t+\dfrac{c_*}{n}\right\|_p}{1+c_*^2}. \tag{2.6}$$

При этом

а) *если* $p\in[0,2n^2-1]$, *то* $c_*=0$;

б) *если* $p\in(2n^2-1,\infty)$, *то* c_* *есть единственный корень уравнения*

$$(p+1)\big[(n+c)^p-(n-c)^p\big]\left(1+c^2\right)-2pc\left[(n+c)^{p+1}+(n-c)^{p+1}\right]=0,\quad c\in(0,1);$$

в) *если* $p=\infty$, *то* $c_*=\sqrt{n^2+1}-n$.

Доказательство леммы проведем в 4 этапа в зависимости от значения p.

1. Пусть $p \in (0, 2n^2-1]$. Необходимо доказать, что при $c \in (0,1]$

$$\frac{\left\|t+\dfrac{c}{n}\right\|_p}{1+c^2} < \|t\|_p. \tag{2.7}$$

Покажем, что неравенство (2.7) справедливо для всех $n \geqslant \sqrt{3}$.

Рассмотрим два случая.

1.1. Полагаем $c=1$. Тогда неравенство (2.7) принимает вид

$$\left\|t+\frac{1}{n}\right\|_p < 2\|t\|_p.$$

Последнее неравенство легко следует из утверждений 3 и 2 леммы 1:

$$\left\|t+\frac{1}{n}\right\|_p < \|t+1\|_p = 2\|t\|_p.$$

1.2. Пусть $c \in (0,1)$. Подставим явные выражения для норм $\left\|t+\dfrac{c}{n}\right\|_p$, $\|t\|_p$ из п. 1 леммы 1 в неравенство (2.7). Имеем

$$\frac{1}{2}\Big[\Big(1+\frac{c}{n}\Big)^{p+1}+\Big(1-\frac{c}{n}\Big)^{p+1}\Big] < \big(1+c^2\big)^p, \quad c \in (0,1)\,. \tag{2.8}$$

Разложим правую и левую части неравенства (2.8) в ряд Тейлора

$$(1+c^2)^p = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\bigg(\prod_{j=0}^{k-1}(p-j)\bigg)\frac{c^{2k}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k c^{2k}, \quad a_0=1, \quad a_k=\prod_{j=0}^{k-1}\frac{p-j}{j+1}, \quad k \geqslant 1. \tag{2.9}$$

$$\frac{1}{2}\bigg(\Big(1+\frac{c}{n}\Big)^{p+1}+\Big(1-\frac{c}{n}\Big)^{p+1}\bigg) = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\bigg(\prod_{j=0}^{2k-1}(p+1-j)\bigg)\frac{c^{2k}}{(2k)!\,n^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k c^{2k},$$

$$b_0=1, \quad b_k=\bigg(\prod_{j=0}^{k-1}\frac{p-j}{j+1}\bigg)\bigg(\prod_{j=k}^{2k-2}\frac{p-j}{n^2(j+1)}\bigg)\left(\frac{p+1}{2k\,n^2}\right)c^{2k}, \quad k \geqslant 1. \tag{2.10}$$

Сравним $|b_k|$ и $|a_k|$ для $k \in \mathbb{N}$. Для этого оценим множители $\prod_{j=k}^{2k-2}(p-j)/(n^2(j+1))$ и $(p+1)/(2kn^2)$ в (2.10). По условию $p \in (0, 2n^2-1]$ или, что то же самое, $p+1 \leqslant 2n^2$. Следовательно,

$$\frac{p+1}{2k\,n^2} \leqslant \frac{1}{k}.$$

Далее, если $p-j>0$, то

$$\frac{|p-j|}{n^2(j+1)} < \frac{p+1}{n^2(j+1)} \leqslant \frac{p+1}{2n^2} \leqslant 1.$$

Если $p-j \leqslant 0$, то

$$\frac{|p-j|}{n^2(j+1)} = \frac{j-p}{n^2(j+1)} \leqslant \frac{1}{n^2} < 1.$$

А значит,

$$|b_k| < \frac{|a_k|}{k}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.11}$$

Пусть номер k_0 таков, что $p \in (k_0, k_0+1]$. Тогда $a_k > 0$ при $k = 0, \ldots, k_0$, а остаток $\sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k c^{2k}$ является рядом Лейбница, причем первый член остатка $a_{k_0+1}c^{2k} > 0$, поэтому справедливы оценки

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k c^{2k} \geqslant 0 \qquad \text{и} \qquad \sum_{k=0}^{k_0} |a_k| c^{2k} = \sum_{k=0}^{k_0} a_k c^{2k} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} a_k c^{2k}. \tag{2.12}$$

Оценим остаток ряда (2.10). Для этого сначала сравним $|b_k|$ и $|b_{k+1}|$ при $k \geqslant k_0$. Имеем

$$|b_{k+1}| = |b_k| \frac{|p+1-2k||p+1-2k-1|}{(2k+1)(2k+2)n^2},$$

в силу условий на k_0 выполняются неравенства

$$-1 \leqslant k-1 \leqslant 2k-p = k+k-p \leqslant 2k, \quad -2 \leqslant 2k-p-1 \leqslant 2k-1,$$

поэтому

$$|b_{k+1}| \leqslant |b_k| \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{3}\,|b_k|.$$

Таким образом, для любого $\overline{k} \geqslant \max\{k_0, 1\}$ получаем оценку

$$\sum_{k=\overline{k}}^{\infty} |b_k|\, c^{2k} \leqslant \sum_{k=\overline{k}}^{\infty} |b_{\overline{k}}|\, c^{2\overline{k}} \frac{1}{3^{k-\overline{k}}} \leqslant \frac{3}{2}\,|b_{\overline{k}}|\, c^{2\overline{k}}. \tag{2.13}$$

Если $k_0 \geqslant 2$, то, применяя (2.13), (2.11) и (2.12), приходим к нужному неравенству

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k c^{2k} \leqslant \sum_{k=0}^{k_0-1} |b_k|\, c^{2k} + \frac{3}{2}|b_{k_0}|\, c^{2k_0} < \sum_{k=0}^{k_0} |a_k|\, c^{2k} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} a_k c^{2k}.$$

Если $k_0 = 1$ или, что то же самое, $p \in (1, 2]$, то сумму ряда (2.9) вновь оценим с помощью (2.12). А для оценки ряда (2.10) заметим, что в этом случае все члены ряда начиная со второго неположительны, поэтому его сумма не превосходит суммы двух первых слагаемых, т. е. $\sum_{k=0}^{\infty} b_k c^{2k} \leqslant 1 + b_1 c^2$. В итоге получаем, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k c^{2k} \leqslant 1 + b_1 c^2 < 1 + a_1 c^2 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} a_k c^{2k}.$$

Если $k_0 = 0$ или, что то же самое, $p \in (0, 1]$, то для оценки ряда (2.9) возьмем три первых слагаемых, а ряд (2.10) оценим с помощью (2.13) с $\overline{k} = 1$. В результате имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k c^{2k} \geqslant 1 + a_1 c^2 + a_2 c^4, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} b_k c^{2k} \leqslant 1 + \frac{3}{2} b_1 c^2. \tag{2.14}$$

Сравним правые части неравенств (2.14), воспользовавшись соотношением $(p+1)/n^2 \leqslant 2/3$:

$$1 + a_1 c^2 + a_2 c^4 - \Big(1 + \frac{3}{2} b_1 c^2\Big) = pc^2 - \frac{3p(p+1)c^2}{4n^2} + \frac{p(p-1)c^4}{2} \geqslant \frac{pc^2}{2} + \frac{p(p-1)c^4}{2} > 0.$$

Итак, для всех $p \in (0, 2n^2 - 1]$ лемма доказана.

2. Пусть $p = 0$. В силу первого этапа доказательства для всех $n \geqslant \sqrt{3}$ справедливо неравенство (2.7). Зафиксируем некоторое значение c и возьмем $n = \sqrt{3}$. Тогда для $p \in (0, 5]$ неравенство (2.7) примет вид

$$\frac{\Big\|t + \dfrac{c}{\sqrt{3}}\Big\|_p}{1 + c^2} < \|t\|_p.$$

Переходя в нем к пределу при $p\to+0$, получаем, что
$$\frac{\left\|t+\frac{c}{\sqrt3}\right\|_0}{1+c^2}\leqslant\|t\|_0.$$
По лемме 1 функция (2.2) строго возрастает по $c\in(0,\infty)$ или, что то же самое, убывает по n; следовательно, если $n\geqslant2$, то $\left\|t+\frac{c}{n}\right\|_0<\left\|t+\frac{c}{\sqrt3}\right\|_0$. Отсюда и получается нужный результат.

3. Пусть $p\in(2n^2-1,\infty)$. Рассмотрим функцию
$$\psi(c)=\frac{\left\|t+\frac{c}{n}\right\|_p}{1+c^2},\quad c\in[0,1].$$
Функция дифференцируема, проведем стандартное исследование на максимум с помощью производной. Производная
$$\psi'(c)=\frac{(p+1)\big[(n+c)^p-(n-c)^p\big](1+c^2)-2pc\big[(n+c)^{p+1}+(n-c)^{p+1}\big]}{n^{1+1/p}p(p+1)^{1/p}(1+c^2)^2\big[(n+c)^{p+1}+(n-c)^{p+1}\big]^{1-1/p}}.$$
Знаменатель положителен, проанализируем поведение числителя
$$\omega(c)=(p+1)\big[(n+c)^p-(n-c)^p\big](1+c^2)-2pc\big[(n+c)^{p+1}+(n-c)^{p+1}\big],\quad c\in[0,1].$$
Сделаем замену переменной
$$z=\frac{n+c}{n-c},\qquad c\in[0,1],\quad z\in\left[1,\frac{n+1}{n-1}\right],\tag{2.15}$$
и умножим на $(2n)^2/(n-c)^{p+2}=(z+1)^{p+2}/(2n)^p$. В результате получим функцию
$$\vartheta(z)=-\alpha z^{p+2}+\beta z^{p+1}+\gamma z^p-\gamma z^2-\beta z+\alpha,\quad\text{где}\quad\alpha=4pn^2-(n^2+1)(p+1)>0,$$
$$\beta=4pn^2-2(n^2-1)(p+1)>0,\quad\gamma=(p+1)(n^2+1)>0.$$
По правилу Декарта [9, теорема 3.2.4] функция $\vartheta(z)$ имеет на полуоси $(0,\infty)$ не более трех нулей с учетом кратности. Покажем, что на интервале $(1,(n+1)/(n-1))$ функция $\vartheta(z)$ имеет ровно один нуль, и притом простой. Поскольку $\omega(0)=0$, то $\vartheta(1)=0$. Поэтому на полуинтервале $(1,(n+1)/(n-1)]$ может быть не более двух нулей с учетом кратности. Значение $\vartheta'(1)=-\alpha(p+2)+\beta p+\gamma(p-2)=4p(p+1-2n^2)>0$. Значит, при z, близких к левому концу промежутка, справедливо неравенство $\vartheta(z)>0$. При этом на правом конце
$$\vartheta\Big(\frac{n+1}{n-1}\Big)=\frac{(2n)^2}{(n-c)^{p+2}}\omega(1)=2(p+1)\left((n+1)^p-(n-1)^p\right)-2p\left((n+1)^{p+1}+(n-1)^{p+1}\right)$$
$$\leqslant2(p+1)(n+1)^p-2p(n+1)^p(n+1)<0.$$
Это означает, что на интервале $\big(1,\ (n+1)/(n-1)\big)$ у $\vartheta(z)$ может лежать лишь нечетное число нулей, но не менее одного. Поскольку всего нулей не более двух, то отсюда следует, что на интервале $\big(1,\ (n+1)/(n-1)\big)$ функция $\vartheta(z)$ имеет единственный нуль z_*, при переходе через который $\vartheta(z)$ меняет знак с “+” на “−”. Функция (2.15) на рассматриваемом промежутке (строго) возрастает, поэтому $\omega(c)$ имеет на $(0,1)$ единственный нуль $c_*=n(z_*-1)/(z_*+1)$ и при переходе через него меняет знак с “+” на “−”. Следовательно, c_* является единственной точкой максимума функции $\psi(c)$.

4. Пусть $p=\infty$. Рассмотрим функцию
$$\psi(c)=\frac{1+\frac{c}{n}}{1+c^2}=\frac{n+c}{n(1+c^2)},\qquad\psi'(c)=\frac{1-2nc-c^2}{n(1+c^2)}.$$
Ее производная $\psi'(c)$ обращается в нуль в точках $\pm\sqrt{n^2+1}-n$. Промежутку $[0,1]$ принадлежит только точка $c_*=\sqrt{n^2+1}-n$, которая является точкой максимума $\psi(c)$. Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1

Существенную роль в доказательстве теоремы 1 играет результат Я. Л. Геронимуса [11, теорема 2] о многочленах

$$P_n(t) = t^n + ct^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} a_k t^k$$

с двумя фиксированными старшими коэффициентами, наименее уклоняющимися от нуля в пространстве $L(-1,1)$. Приведем этот результат в обозначениях данной работы.

Теорема 2 (Я. Л. Геронимус). *Пусть* $n \geqslant 2$, $c \in \mathbb{R}$, $a_k \in \mathbb{R}$. *Тогда*

$$\min_{\{a_k\}_{k=0}^{n-2}} \Big\| t^n + c\ t^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} a_k\ t^k \Big\|_1 = \begin{cases} \dfrac{1+c^2}{2^n}, & \text{если } |c| \leqslant 1, \\ \dfrac{|c|}{2^{n-1}}, & \text{если } |c| \geqslant 1. \end{cases}$$

Равенство реализуется лишь на полиномах

$$P^*(t) = \widetilde{U}_n(t) + c\widetilde{U}_{n-1}(t) + \frac{c^2}{4}\widetilde{U}_{n-2}(t), \quad \text{если } |c| \leqslant 1, \tag{3.1}$$
$$P^*(t) = \widetilde{U}_n(t) + c\widetilde{U}_{n-1}(t) + \frac{1}{4}\widetilde{U}_{n-2}(t), \quad \text{если } |c| \geqslant 1.$$

Доказательство теоремы 1. Многочлен $P \in \mathcal{P}_n$ запишем в виде

$$P_n(t) = a\Big(t^n + ct^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} a_k t^k\Big), \quad c, a, a_k \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

Тогда $P_n^{(n-1)}(t) = an!\left(t + \dfrac{c}{n}\right)$, и

$$C_p(n) = \sup_{c,\{a_k\}_{k=0}^{n-2}} \frac{\|P_n^{(n-1)}\|_p}{\|P_n\|_1} = \sup_{c,\{a_k\}_{k=0}^{n-2}} \frac{n!\,\Big\|t + \dfrac{c}{n}\Big\|_p}{\big\|t^n + ct^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} a_k t^k\big\|_1}$$

$$= \sup_c \frac{n!\,\Big\|t + \dfrac{c}{n}\Big\|_p}{\inf_{\{a_k\}_{k=0}^{n-2}} \big\|t^n + ct^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} a_k t^k\big\|_1}.$$

Инфимум по $\{a_k\}_{k=0}^{n-2}$ вычислен в теореме Геронимуса. Применяя эту теорему, находим, что

$$C_p(n) = 2^{n-1} n! \max\left\{ \max_{|c|\leqslant 1} \frac{2\Big\|t + \dfrac{c}{n}\Big\|_p}{1+c^2},\ \sup_{|c|\geqslant 1} \frac{\Big\|t + \dfrac{c}{n}\Big\|_p}{|c|} \right\}.$$

Оба выражения, стоящие под знаком внешнего максимума, четны относительно c, поэтому достаточно сравнить их при $c \geqslant 0$. При $c = 0$ первое выражение принимает значение $2\|t\|_p$, а в силу леммы 2

$$\sup_{c\geqslant 1} \frac{\Big\|t + \dfrac{c}{n}\Big\|_p}{c} < 2\|t\|_p, \tag{3.2}$$

следовательно,

$$C_p(n) = 2^n n! \max_{c\in[0,1]} \frac{\Big\|t + \dfrac{c}{n}\Big\|_p}{1+c^2}.$$

Последний максимум вычислен в лемме 3. При этом в силу теоремы Геронимуса и строгого неравенства (3.2) экстремальными с точностью до мультипликативной константы являются многочлены вида (3.1), а точнее, многочлены

$$P^*(t) = \widetilde{U}_n(t) \pm c_* \widetilde{U}_{n-1}(t) + \frac{c_*^2}{4} \widetilde{U}_{n-2}(t)$$

с параметром c_*, определенным в лемме 3.

Выражения (1.3) для величины $C_p(n)$ получаются путем подстановки в равенство (2.6) соответствующих значений c_*. Доказательство теоремы завершено. □

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю П. Ю. Глазыриной за постановку задачи, обсуждение и постоянную поддержку в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Глазырина П.Ю.** Неравенство братьев Марковых в пространстве L_0 на отрезке // Мат. заметки. 2005. Т. 78, вып. 1. С. 59–65.
2. **Глазырина П.Ю.** Точное неравенство Маркова — Никольского для алгебраических многочленов в пространствах L_q, L_0 на отрезке // Мат. заметки. 2008. Т. 84, вып. 1. С. 3–22.
3. **Марков А.А.** Об одном вопросе Д. И. Менделеева // Зап. Имп. акад. наук. СПб., 1889. Т. 62. С. 1–24.
4. **Марков В.А.** О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке. СПб., 1892. 110 с.
5. **Харди Г.Г., Литтлвуд Д.Е., Полиа Г.** Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 456 с.
6. **Чебышев П. Л.** Теория механизмов, известных под названием параллелограммов // Полн. собр. соч.: в 5 т. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947. Т. 2: Математический анализ. С. 23–51.
7. **Bojanov B.D.** An extension of the Markov inequality // J. Approx. Theory. 1982. Vol. 35, no. 2. P. 181–190.
8. **Bojanov B.** Markov-type inequalities for polynomials and splines // Proc. Tenth Approx. Theory Conf. Innov. Appl. Math. Nashville TN: Vanderbilt Univ. Press, 2002. P. 31–90.
9. **Borwein P., Erdélyi T.** Polynomials and polynomial inequalities. New York: Springer-Verlag, 1995. 496 p.
10. **Dörfler P.** New inequalities of Markov type // SIAM J. Math. Anal. 1987. Vol. 18. P. 490–494.
11. **Geronimus J.** Sur quelques propriétés extrémales de polynomes dont les coefficients premiers sont donnés // Сообщ. Харьк. мат. о-ва. Сер. 4. 1935. Т. 12. С. 49–58.
12. **Hille E., Szegö G., Tamarkin J. D.** On some generalizations of a theorem of A. Markoff // Duke Math. J. 1937. Vol. 3. P. 729–739.
13. **Korkine A., Zolotareff G.** Sur un certain minimum // Коркин А. Н. Сочинения. Т. 1. СПб.: С.-Петерб. ун-т, 1911. С. 329–349.
14. **Kroó A.** On the exact constant in the L_2 Markov inequality // J. Approx. Theory. 2008. Vol. 151, no. 2. P. 208–211.
15. **Labelle G.** Concerning polynomials on the unit interval // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 20. P. 321–326.
16. **Milovanović G.V.** Various extremal problems of Markov's type for algebraic polynomials // Facta Univ. Ser. Math. Inform. 1987. Vol. 2. P. 7–28.
17. **Milovanović G.V., Mitrinovic D.S., Rassias Th.M.** Topics in polynomials: extremal problems, inequalities, zeros. Singapore: World Scientific, 1994. 821 p.
18. **Rahman Q.I., Schmeisser G.** Analytic theory of polynomials. Oxford: Oxford Univ. Press, 2002. 742 p.

Симонов Иван Евгеньевич
магистрант
Уральский федеральный университет
e-mail: isimonov@k66.ru

Поступила 15.02.2011

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 3 2011

УДК 519.65

ФОРМОСОХРАНЕНИЕ ПРИ АППРОКСИМАЦИИ ЛОКАЛЬНЫМИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ СПЛАЙНАМИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА[1]

Е. В. Стрелкова, В. Т. Шевалдин

В работе продолжено изучение свойств локальных $\mathcal{L}$-сплайнов с равномерными узлами (построенных авторами в предыдущих работах), соответствующих линейному дифференциальному оператору $\mathcal{L}$ порядка r с постоянными коэффициентами, все корни характеристического многочлена которого действительны и попарно различны. Указаны достаточные условия (которые являются и необходимыми) для локального наследования $\mathcal{L}$-сплайном свойства обобщенной k-монотонности ($k \le r-1$) исходных данных — значений аппроксимируемой функции в узлах равномерной сетки, смещенной относительно сетки узлов $\mathcal{L}$-сплайна. Явно выписаны параметры $\mathcal{L}$-сплайна, точного на ядре оператора $\mathcal{L}$.

Ключевые слова: формосохранение, k-монотонность, локальный $\mathcal{L}$-сплайн.

E. V. Strelkova, V. T Shevaldin. Form preservation under approximation by local exponential splines of an arbitrary order.

We continue the study of the properties of local $\mathcal{L}$-splines with uniform knots (such splines were constructed in the authors' earlier papers) corresponding to a linear differential operator $\mathcal{L}$ of order r with constant coefficients and real pairwise distinct roots of the characteristic polynomial. Sufficient conditions (which are also necessary) are established under which the $\mathcal{L}$-spline locally inherits the property of the generalized k-monotonicity of ($k \le r-1$) input data, which are the values of the approximated function at the nodes of a uniform grid shifted with respect to the grid of knots of the $\mathcal{L}$-spline. The parameters of an $\mathcal{L}$-spline that is exact on the kernel of the operator $\mathcal{L}$ are written explicitly.

Keywords: form preservation, k-monotonicity, local $\mathcal{L}$-spline.

Введение

Обозначим через B_r нормализованный полиномиальный B-сплайн порядка $r \in \mathbb{N}$ (степени $r-1$) с носителем $\operatorname{supp} B_r = [0, rh]$ $(h > 0)$ и равномерными узлами $0, h, 2h, \dots, rh$ (см., например, [1, гл. 1]). В 1975 году Т. Лич и Л. Шумейкер [2] (см. также [1, гл. 9]) для любой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ построили локальные полиномиальные сплайны r-го порядка вида

$$S_r(x) = S_r(f,x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{s=-k}^{k} \gamma_s f((j+s)h) B_r\Big(x - jh - \frac{rh}{2}\Big) \qquad (x \in \mathbb{R}), \tag{0.1}$$

где $k = [(r-1)/2]$ и действительные коэффициенты γ_s выбирались из условия точности формулы $S_r(f,x) = f(x)$ для многочленов степени $r-1$. Оказалось, что такой выбор может быть осуществлен единственным образом. Методы локальной аппроксимации сплайнами стали эффективным инструментом решения задач теории приближений и численного анализа, в основном как полезная альтернатива метода интерполяции. Их основные достоинства состоят в том, что в отличие от интерполяционных задач не нужно решать системы линейных алгебраических уравнений с большим числом неизвестных, и они в большей степени соответствуют нуждам геометрического моделирования, поскольку на основе локальных сплайнов можно строить конструкции, обладающие свойством сохранения локальной монотонности исходных данных (иногда в обобщенном смысле). Для стандартных соболевских классов функций использование

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-01-00347, 11-01-00445) и интеграционного проекта, выполняемого совместно учеными УрО РАН и СО РАН (проект 09-С-1-1007).

локальной аппроксимации сплайнами вида (0.1) не ведет к потере порядка точности аппроксимации по сравнению с интерполяционными сплайнами (см. [1; 3]). Результаты Т. Лича и Л. Шумейкера [2] по локальной полиномиальной аппроксимации обобщались и развивались в различных направлениях. Выделим лишь некоторые из них. Е. В. Стрелкова (Шевалдина) в двух своих работах [4; 5] построила локальные $\mathcal{L}$-сплайны соответственно четного и нечетного порядков r (а затем исследовала их аппроксимативные свойства) с равномерными узлами, сохраняющие все функции из ядра линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}$ с постоянными коэффициентами, корни характеристического многочлена которого предполагались действительными и попарно различными (такие $\mathcal{L}$-сплайны называются экспоненциальными). Причем построение этих $\mathcal{L}$-сплайнов было проведено по иной схеме, чем в полиномиальном случае (без использования тождеств Марсдена и рекуррентных соотношений для базисных сплайнов). В [6] авторами статьи был предложен единый подход (независимо от четности r) к построению еще более общих конструкций локальных экспоненциальных сплайнов, при котором сохранялось не все ядро оператора $\mathcal{L}$, а его произвольное подпространство. Основным предметом исследования [6] были аппроксимативные свойства построенных локальных аппроксимаций.

Настоящая работа посвящена изучению других свойств локальных $\mathcal{L}$-сплайнов. Далее указаны необходимые и достаточные условия на параметры локальных $\mathcal{L}$-сплайнов [6], сохраняющих свойство обобщенной k-монотонности ($k \le r-1$) исходных данных $y_{j+\alpha} = f((j+\alpha)h)$ ($j \in \mathbb{Z},\ 0 \le \alpha < 1$) — значений аппроксимируемой функции f в узлах равномерной сетки, сдвинутой на величину αh относительно сетки узлов $\mathcal{L}$-сплайна (строгое определение обобщенной k-монотонности приведено в разд. 1).

В [6] была также выписана невырожденная система линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов линейной комбинации узловых значений $y_{j+\alpha}$ в предложенной схеме локальной аппроксимации, точной на подпространствах ядра оператора $\mathcal{L}$. В разд. 2 эта система сведена к треугольной, что в свою очередь позволило вычислить явно указанные коэффициенты.

1. Сохранение обобщенной k-монотонности

Дадим основные определения. Пусть $r \in \mathbb{N}$, D — оператор дифференцирования и

$$\mathcal{L}_r(D) = \prod_{j=1}^{r}(D-\beta_j) \qquad (\beta_j \in \mathbb{R}) \tag{1.1}$$

— линейный дифференциальный оператор порядка r с постоянными действительными коэффициентами, все корни β_j характеристического многочлена которого попарно различны. Пусть φ_r — решение линейного однородного уравнения $\mathcal{L}_r(D)f = 0$, удовлетворяющее условиям: $\varphi_r^{(j)}(0) = \delta_{j,r-1}$ ($j = \overline{0, r-1}$), где $\delta_{j,r-1}$ — символ Кронекера. Этими условиями однозначно определяются числа A_j в представлении $\varphi_r(x) = \sum_{j=1}^{r} A_j e^{\beta_j x}$. В [6] было показано, что $A_j \ne 0$ ($j = \overline{1, r}$). Нам в дальнейшем понадобится явный вид функции φ_r и коэффициентов A_j. Для их вычисления воспользуемся результатами работы [7], в которой, в частности, выписано следующее рекуррентное соотношение:

$$\varphi_r(x) = \int_0^x e^{\beta_r(x-t)}\varphi_{r-1}(t)\,dt \qquad (r-1 \in \mathbb{N}). \tag{1.2}$$

Поскольку $\varphi_2(x) = (1/(\beta_1-\beta_2))(e^{\beta_1 x} - e^{\beta_2 x})$, то отсюда индукцией по r получаем равенство

$$\varphi_r(x) = \sum_{j=1}^{r} e^{\beta_j x} \prod_{\substack{k=1 \\ k\ne j}}^{r} (\beta_j - \beta_k)^{-1}.$$

Поэтому

$$A_j = \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{r} (\beta_j - \beta_k)^{-1}. \tag{1.3}$$

Для функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определим (см., например, [8])

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_r} f(x) = \prod_{j=1}^{r} (T - e^{\beta_j h} E) f(x) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \mu_s^{(r)} f(x+sh) \tag{1.4}$$

— конечную разность с шагом $h > 0$, соответствующую оператору $\mathcal{L}_r$. Здесь $Tf(x) = f(x+h)$ — оператор сдвига, E — тождественный оператор, и коэффициенты $\mu_s^{(r)}$ могут быть легко вычислены по формулам Виета

$$\mu_r^{(r)} = 1,\ \mu_{r-1}^{(r)} = \sum_{s=1}^{r} e^{\beta_s h}, \ldots,\ \mu_0^{(r)} = \prod_{s=1}^{r} e^{\beta_s h}. \tag{1.5}$$

Разностный оператор $\Delta_h^{\mathcal{L}_r}$, определенный на пространстве функций, выбран таким образом, что для любого решения линейного однородного дифференциального уравнения $\mathcal{L}_r(D)f = 0$ имеет место тождество $\Delta_h^{\mathcal{L}_r} f(x) \equiv 0$. Характеристический многочлен разностного оператора $\Delta_h^{\mathcal{L}_r}$ определяется формулой

$$p(x) = p_{\mathcal{L}_r}(x) = \prod_{j=1}^{r} (x - e^{\beta_j h}). \tag{1.6}$$

B-$\mathcal{L}$-сплайн с носителем $\operatorname{supp} B = [0, rh]$ определим формулой (см., например, [9])

$$B(x) = B_{\mathcal{L}_r}(x) = \Delta_h^{\mathcal{L}_r} \varphi_r((x - rh)_+), \tag{1.7}$$

где t_+ означает $\max\{0, t\}$. Для функции $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и произвольного числа $\alpha\colon\ 0 \le \alpha < 1$ положим

$$y_{j+\alpha} = f((j+\alpha)h) \qquad (j \in \mathbb{Z}).$$

Рассматривается система функционалов

$$I_j = I_j(\alpha) = \sum_{s=1}^{r} c_s y_{j+\alpha+s-1} \qquad (j \in \mathbb{Z},\quad c_s \in \mathbb{R}) \tag{1.8}$$

и локальный экспоненциальный $\mathcal{L}$-сплайн, задающий линейный метод приближения функции f, вида

$$S_{\mathcal{L}_r}(x) = S_{\mathcal{L}_r}(f, x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} I_j B_{\mathcal{L}_r}(x - jh) \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{1.9}$$

Дифференциальный оператор $\mathcal{L}_r$ представим в виде $\mathcal{L}_r(D) = \mathcal{L}_m(D)\mathcal{L}_{r-m}(D)$, $\mathcal{L}_m(D) = \prod_{j=1}^{m}(D - \beta_j)$, $\ m \le r$ ($\mathcal{L}_0(D) = E$ — тождественный оператор). Коэффициенты c_s ($s = \overline{1, r}$) в представлении (1.8) задают способ локальной экспоненциальной аппроксимации. В [6] они определялись таким образом, чтобы имели место равенства

$$S(e^{\beta_j \cdot}, x) = e^{\beta_j x} \qquad (x \in \mathbb{R},\ j = \overline{1, m}). \tag{1.10}$$

Там же было доказано следующее утверждение.

Теорема А. *Пусть действительные числа β_j ($j = \overline{1, r}$) попарно различны. Тогда система линейных алгебраических уравнений*

$$\sum_{s=1}^{r} c_s e^{\beta_j (s-1) h} = Y_j = \frac{e^{\beta_j (r-\alpha-1)h}}{A_j p'(e^{\beta_j h})} \qquad (j = \overline{1, m}) \tag{1.11}$$

относительно вектора $\mathbf{c} = \{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ *разрешима, и ее решение обращает в тождества равенства* (1.10).

При $m < r$ решение системы (1.11), конечно, не единственно, а представляет собой линейное подпространство размерности $r - m$.

Заметим, из (1.6) следует, что

$$p'(e^{\beta_j h}) = \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{r} (e^{\beta_j h} - e^{\beta_k h}).$$

Поэтому с учетом (1.3) правые части Y_j системы (1.11) могут быть записаны в следующем виде:

$$Y_j = e^{\beta_j(r-\alpha-1)h} \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{r} \frac{\beta_j - \beta_k}{e^{\beta_j h} - e^{\beta_k h}} \qquad (j = \overline{1,m}). \tag{1.12}$$

Поясним, что понимается под локальным сохранением $\mathcal{L}$-сплайном свойства обобщенной k-монотонности исходных данных $\{y_{j+\alpha}\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Вначале сформулируем соответствующее определение для локальных полиномиальных сплайнов (они соответствуют оператору $\mathcal{L}_r(D) = D^r$). Пусть

$$\Delta_h^k y_{j+\alpha} = \sum_{s=0}^{k} (-1)^{k-s} C_k^s y_{j+\alpha+s}$$

— конечная разность порядка $k \in \mathbb{N}$ заданных значений $y_{j+\alpha} = f((j+\alpha)h)$ $(j \in \mathbb{Z})$ функции f с шагом h (здесь C_k^s — биномиальные коэффициенты). Если для некоторого значения k $(k \le r-1)$ все конечные разности $\Delta_h^k y_{j+\alpha}$ порядка k (при $k = 0$ это сами значения $y_{j+\alpha}$) неотрицательны, то неотрицательной должна быть и соответствующая производная сплайна $S_r(x)$ (см. (0.1)), т. е. $S_r^{(k)}(x)$. Под локальным сохранением k-монотонности исходных данных понимается неотрицательность функции $S_r^{(k)}(x)$ на некотором промежутке сетки вследствие неотрицательности некоторого числа конечных разностей $\Delta_h^k y_{j+\alpha}$ (идущих подряд), близких к рассматриваемому промежутку. При небольших значениях k для k-монотонности есть специальные названия: $k = 0$ — неотрицательность, $k = 1$ — монотонность, $k = 2$ — выпуклость. Этой тематике (в особенности для интерполяционных сплайнов) посвящено значительное число работ. Вопросы локального сохранения свойства k-монотонности для локальных полиномиальных сплайнов r (необязательно вида (0.1)) рассматривались в совместном докладе Ю. С. Волкова, Е. В. Стрелковой и В. Т. Шевалдина [10, теорема 1], сделанном на российской конференции "Методы сплайн-функций", посвященной 80-летию со дня рождения Ю. С. Завьялова. Там же обсуждался вопрос об оптимальном выборе параметра α в задачах аппроксимации классов дифференцируемых функций.

Для локальных $\mathcal{L}$-сплайнов условия сохранения обобщенной k-монотонности можно определить аналогичным образом. Пусть

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_k} y_{j+\alpha} = \sum_{s=0}^{k} (-1)^{k-s} \mu_s^{(k)} y_{j+\alpha+s} \tag{1.13}$$

— обобщенная конечная разность [8] порядка $k \in \mathbb{N}$ с шагом h (определение коэффициентов $\mu_s^{(k)}$ см. в (1.5)), соответствующая дифференциальному оператору $\mathcal{L}_k(D) = \prod_{j=1}^{k}(D - \beta_j)$, определенная на пространстве числовых последовательностей $\{y_{j+\alpha}\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $y_{j+\alpha} = f((j+\alpha)h)$. Пусть l — фиксированное целое число. Если для какого-то фиксированного числа $k \le r-1$ все разности $\Delta_h^{\mathcal{L}_k} y_{j+\alpha}$ порядка k неотрицательны при целых значениях j (идущих подряд), близких к l, то функция $\mathcal{L}_k(D) S_{\mathcal{L}_r}(x)$ (т. е. аналог k-й производной локального полиномиального сплайна S_r) должна быть неотрицательна на промежутке $(lh, (l+1)h)$. Это геометрическое свойство локальных $\mathcal{L}$-сплайнов мы будем называть локальной k-монотонностью в обобщенном смысле. При $r=3$ для простейшей схемы локальной аппроксимации $I_j = y_{j+\alpha}$ указанное свойство при подходящем выборе параметра α (в том числе и для $\mathcal{L}$-сплайнов с неравномерными узлами) изучалось в ряде работ (см. [11–14] и ссылки в них).

В настоящей работе нас интересует следующий вопрос: какие условия на коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_r$ функционала (1.8) гарантируют локальное наследование $\mathcal{L}$-сплайном $S_{\mathcal{L}_r}$ вида (1.9) свойства обобщенной k-монотонности (при произвольном фиксированном значении $k=\overline{0,r-1}$) исходных данных $\{y_{j+\alpha}\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Для ответа на этот вопрос вначале отметим некоторые свойства B-$\mathcal{L}$-сплайнов с равномерными узлами.

Пусть $B_{\mathcal{L}_k}(x)$ $(k=\overline{1,r})$ — B-$\mathcal{L}$-сплайн вида (1.7), соответствующий оператору $\mathcal{L}_k(D) = \prod_{j=1}^{k}(D-\beta_j)$.

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$(D-\beta_r)B_{\mathcal{L}_r}(x) = B_{\mathcal{L}_{r-1}}(x) - e^{\beta_r h}B_{\mathcal{L}_{r-1}}(x-h).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Несмотря на то что выписанное равенство известно (как для полиномиальных B-сплайнов (см., например, [1]), так и для экспоненциальных B-$\mathcal{L}$-сплайнов [9]), для полноты изложения мы приведем еще одно его доказательство, основываясь на свойствах коэффициентов разностного оператора $\Delta_h^{\mathcal{L}_r}$.

В [7] отмечалось, что коэффициенты $\mu_s^{(r)}$ и $\mu_s^{(r-1)}$ разностных операторов $\Delta_h^{\mathcal{L}_r}$ и $\Delta_h^{\mathcal{L}_{r-1}}$ (см. (1.4), (1.5) и (1.13)) связаны соотношениями

$$\mu_s^{(r)} = e^{\beta_r h}\mu_s^{(r-1)} + \mu_{s-1}^{(r-1)} \qquad (s=\overline{0,r}) \tag{1.14}$$

(числа $\mu_r^{(r-1)}$ и $\mu_{-1}^{(r-1)}$ полагаются равными нулю). Из определения функции φ_r и равенства (1.2) следует, что

$$(D-\beta_r)\varphi_r(x) = \varphi_{r-1}(x). \tag{1.15}$$

Поэтому из (1.7) с учетом (1.4) и (1.5) получаем равенства

$$(D-\beta_r)B_{\mathcal{L}_r}(x) = (D-\beta_r)\Big(\mu_r^{(r)}\varphi_r(x_+) - \mu_{r-1}^{(r)}\varphi_r((x-h)_+)\Big) + \ldots + (-1)^r\mu_0^{(r)}\varphi_r((x-rh)_+)$$

$$= \mu_{r-1}^{(r-1)}\varphi_{r-1}(x_+) - \Big(\mu_{r-1}^{(r-1)}e^{\beta_r h} + \mu_{r-2}^{(r-1)}\Big)\varphi_{r-1}((x-h)_+) + \ldots + (-1)^r e^{\beta_r h}\mu_0^{(r-1)}\varphi_{r-1}((x-rh)_+)$$

$$= \Delta_h^{\mathcal{L}_r}\Big(\varphi_{r-1}(x_+) - e^{\beta_r h}\varphi_{r-1}((x-h)_+)\Big) = B_{\mathcal{L}_{r-1}}(x) - e^{\beta_r h}B_{\mathcal{L}_{r-1}}(x-h). \qquad \square$$

Напомним, что через E обозначается тождественный оператор и через T — оператор сдвига: $Tf(x+h) = f(x)$.

Из леммы 1 индукцией по параметру k выводится следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть* $\widetilde{\mathcal{L}}_k(D) = \prod_{\nu=r-k+1}^{r}(D-\beta_\nu)$, $\mathcal{L}_{r-k}(D) = \prod_{j=1}^{r-k}(D-\beta_j)$. *Имеет место равенство*

$$\widetilde{\mathcal{L}}_k(D)B_{\mathcal{L}_r}(x) = \prod_{\nu=r-k+1}^{r}(T - e^{\beta_\nu h}E)B_{\mathcal{L}_{r-k}}(x-kh) = \Delta_h^{\widetilde{\mathcal{L}}_k}B_{\mathcal{L}_{r-k}}(x-kh).$$

З а м е ч а н и е 1. Как показывают исследования Л. Шумейкера [15], Ю. Ли [16], Д. М. Алдаса, О. Кунчева, Х. Рендера [17] и др. (подробную библиографию см. в [17]), рекуррентные соотношения для B-$\mathcal{L}$-сплайнов, аналогичные хорошо известным равенствам для полиномиальных B-сплайнов, имеют место не для всех операторов $\mathcal{L}_r$ вида (1.1). Например, из основного результата работы [17] следует, что равенство

$$B_{\mathcal{L}_r}(x) = a_r(x)B_{\mathcal{L}_{r-1}}(x) + b_r(x)B_{\mathcal{L}_{r-1}}(x-h) \qquad (a_r, b_r \in C^{r-2}(\mathbb{R}))$$

имеет место тогда и только тогда, когда корни β_k характеристического многочлена оператора $\mathcal{L}_r$, взятые в некотором порядке, представляют собой арифметическую прогрессию.

Лемма 3. *При $x \in (0, rh)$ имеет место неравенство*

$$B_{\mathcal{L}_r}(x) > 0.$$

Доказательство. Утверждение леммы 3 также хорошо известно [9]. Приведем схему ее доказательства, связав его с обозначениями [9].

В силу определения B-$\mathcal{L}$-сплайна имеем

$$\operatorname{supp} B_{\mathcal{L}_r} = [0, rh], \qquad B_{\mathcal{L}_r}(0) = B_{\mathcal{L}_r}(rh) = 0.$$

Следуя [9], построим неотрицательные функции

$$f_\beta(t) = \begin{cases} \dfrac{\beta e^{\beta t}}{e^{\beta h} - 1}, & t \in (0,h), \\ 0, & t \notin (0,h) \end{cases} \quad (\beta \neq 0), \qquad f_0(t) = \begin{cases} h^{-1}, & t \in (0,h), \\ 0, & t \notin (0,h). \end{cases}$$

Нормализованный B-$\mathcal{L}$-сплайн $\widetilde{B}_{\mathcal{L}_r}(x)$ определяется как r-кратная свертка функций

$$\widetilde{B}_{\mathcal{L}_r}(x) = f_{\beta_1} * f_{\beta_2} * \ldots * f_{\beta_r}(x).$$

Ясно, что при таком определении

$$\operatorname{supp} \widetilde{B}_{\mathcal{L}_r}(x) = [0, rh], \qquad \int\limits_{\mathbb{R}} \widetilde{B}_{\mathcal{L}_r}(x)\, dx = 1.$$

По индукции выводится равенство

$$\widetilde{B}_{\mathcal{L}_r}(x) = \prod_{j=1}^{r} \frac{\beta_j}{e^{\beta_j h} - 1} B_{\mathcal{L}_r}(x), \tag{1.16}$$

где функция $B_{\mathcal{L}_r}(x)$ имеет вид (1.7). Из неотрицательности функций $f_\beta(t)$ и равенства (1.16) выводится утверждение леммы 3. $\square$

Теорема 1. *Пусть $0 \le \alpha < 1$, $\widetilde{\mathcal{L}}_k(D) = \prod_{\nu=r-k+1}^{r}(D - \beta_\nu)$, $\mathcal{L}_{r-k}(D) = \prod_{j=1}^{r-k}(D - \beta_j)$ $(k = \overline{1, r-1})$ и действительные числа β_j $(j = \overline{1, r})$ попарно различны. Пусть все числа $c_s \ge 0$ $(s = \overline{1, r})$. Метод локальной аппроксимации (1.8), (1.9) обладает локально свойством сохранения обобщенной k-монотонности исходных данных $\{y_{j+\alpha}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ при каждом фиксированном $k = \overline{0, r-1}$ в том смысле, что*

(a) если $y_{\nu+\alpha} \ge 0$ $(\nu = \overline{l-r+1, l+r-1})$, то $S_{\mathcal{L}_r}(x) \ge 0$ при $lh \le x \le (l+1)h$ $(l \in \mathbb{Z})$,

(b) если $\Delta_h^{\widetilde{\mathcal{L}}_r} y_{\nu+\alpha} \ge 0$ $(\nu = \overline{l-r+1-k, l+r-1})$, то $\widetilde{\mathcal{L}}_k(D) S_{\mathcal{L}_r}(x) \ge 0$ при $lh < x < (l+1)h$ $(l \in \mathbb{Z},\ k = \overline{1, r-1})$.

Доказательство. При $k = 0$ утверждение (a) теоремы 1 следует непосредственно из формул (1.8), (1.9) и леммы 3. При $k = \overline{1, r-1}$ докажем следующее равенство:

$$\widetilde{\mathcal{L}}_k(D) S_{\mathcal{L}_r}(x) = \sum_{j=l-r+1}^{l+k} \biggl(\sum_{s=1}^{r} c_s \Delta_h^{\widetilde{\mathcal{L}}_k} y_{j+\alpha+s-k-1} \biggr) B_{\mathcal{L}_{r-k}}(x - jh), \qquad x \in (lh, (l+1)h) \qquad (l \in \mathbb{Z}). \tag{1.17}$$

Из (1.8), (1.9) при $x \in [lh, (l+1)h]$ имеем

$$S_{\mathcal{L}_r}(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} I_j B_{\mathcal{L}_r}(x - jh) = \sum_{j=l-r+1}^{l} I_j B_{\mathcal{L}_r}(x - jh) = \sum_{s=1}^{r} c_s \sum_{j=l-r+1}^{l} y_{j+\alpha+s-1} B_{\mathcal{L}_r}(x - jh).$$

Применим к обеим частям последнего равенства оператор $\widetilde{\mathcal{L}}_k(D) = \prod_{\nu=r-k+1}^{r}(D-\beta_\nu)$ $(k=\overline{1,r-1})$. Пусть $\widetilde{\mu}_s^{(k)}$ $(s=\overline{0,k})$ — коэффициенты разностного оператора

$$\Delta_h^{\widetilde{\mathcal{L}}_k} y_{j+\alpha} = \sum_{s=0}^{k}(-1)^{k-s}\widetilde{\mu}_s^{(k)} y_{j+\alpha+s}.$$

Тогда, используя лемму 2, равенство (1.4) и свойство носителя $\operatorname{supp}\mathcal{L}_{r-k} = [0,(r-k)h]$, при $x\in(lh,(l+1)h)$ получим

$$\widetilde{\mathcal{L}}_k(D)S_{\mathcal{L}_r}(x) = \sum_{s=1}^{r}c_s\sum_{j=l-r+1}^{l}\Delta_h^{\widetilde{\mathcal{L}}_k}B_{\mathcal{L}_{r-k}}(x-(k+j)h)y_{j+\alpha+s-1}$$

$$=\sum_{s=1}^{r}c_s\sum_{j=l-r+1}^{l}y_{j+\alpha+s-1}\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{k-\nu}\widetilde{\mu}_\nu^{(k)}B_{\mathcal{L}_{r-k}}(x-(k+j-\nu)h)$$

$$=\sum_{s=1}^{r}c_s\Big[\widetilde{\mu}_k^{(k)}\sum_{j=l-r+1}^{l}y_{j+\alpha+s-1}B_{\mathcal{L}_{r-k}}(x-jh)-\widetilde{\mu}_{k-1}^{(k)}\sum_{j=l-r+1}^{l}y_{j+\alpha+s-1}B_{\mathcal{L}_{r-k}}(x-(j+1)h)$$

$$+\ldots+(-1)^k\widetilde{\mu}_0^{(k)}\sum_{j=l-r+1}^{l}y_{j+\alpha+s-1}B_{\mathcal{L}_{r-k}}(x-(j+k)h)\Big]$$

$$=\sum_{s=1}^{r}c_s\Big[\widetilde{\mu}_k^{(k)}\sum_{j=l-r+1}^{l}y_{j+\alpha+s-1}B_{\mathcal{L}_{r-k}}(x-jh)-\widetilde{\mu}_{k-1}^{(k)}\sum_{j=l-r+2}^{l+1}y_{j+\alpha+s-2}B_{\mathcal{L}_{r-k}}(x-jh)$$

$$+\ldots+(-1)^r\widetilde{\mu}_0^{(k)}\sum_{j=l-r+1+k}^{l+k}y_{j+\alpha+s-k-1}B_{\mathcal{L}_{r-k}}(x-jh)\Big]$$

$$=\sum_{s=1}^{r}c_s\sum_{j=l-r+1}^{l+k}\Delta_h^{\widetilde{\mathcal{L}}_k}y_{j+\alpha+s-k-1}B_{\mathcal{L}_{r-k}}(x-jh)=\sum_{j=l-r+1}^{l+k}\bigg(\sum_{s=1}^{r}c_s\Delta_h^{\widetilde{\mathcal{L}}_k}y_{j+\alpha+s-k-1}\bigg)B_{\mathcal{L}_{r-k}}(x-jh).$$

Таким образом, равенство (1.7) доказано. Из него и леммы 3 следует утверждение (b) теоремы 1. □

З а м е ч а н и е 2. Из равенства (1.8) вытекает, что условия $c_s\ge 0$ $(s=\overline{1,r})$ являются не только достаточными для локального наследования $\mathcal{L}$-сплайном свойства обобщенной k-монотонности, но и необходимыми. Замечаем также, что при $c_s\ge 0$ $(s=\overline{1,r})$ линейный метод аппроксимации локальными $\mathcal{L}$-сплайнами вида (1.8), (1.9) является положительным. А это в силу результатов П. П. Коровкина [18] означает, что порядок аппроксимации построенными локальными $\mathcal{L}$-сплайнами классов дважды и более раз дифференцируемых функций не может быть выше, чем h^2.

2. Явные формулы для локальных $\mathcal{L}$-сплайнов, точных на ядре оператора $\mathcal{L}$

Сформулированная в разд. 1 теорема А при $m=r$ (т. е. в случае, когда локальный $\mathcal{L}$-сплайн сохраняет все ядро оператора $\mathcal{L}_r$) утверждает, что коэффициенты c_s $(s=\overline{1,r})$ функционала I_j (см. (1.8)) должны удовлетворять системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{s=1}^{r}c_s e^{\beta_j(s-1)h}=Y_j \qquad (j=\overline{1,r}), \tag{2.1}$$

где числа Y_j имеют вид (1.12). Поскольку определитель этой системы является определителем Вандермонда от элементов $x_j = e^{\beta_j h}$, которые в силу условия теоремы A попарно различны, решение системы единственно. В практических приложениях теоремы A важно знать явный вид чисел c_s $(s = \overline{1,r})$. Покажем, что указанные числа могут быть найдены при помощи сведения системы (2.1) к системе уравнений треугольного вида, решение которой может быть записано в терминах разделенных разностей некоторой функции $g(x)$.

Функционал $I_j = \sum_{s=1}^{r} c_s y_{j+\alpha+s-1}$ перепишем в виде

$$I_j = \sum_{s=1}^{r} b_s \Delta_h^{\mathcal{L}_{s-1}} y_{j+\alpha}, \tag{2.2}$$

где $\mathcal{L}_{s-1}(D) = \prod_{j=1}^{s-1}(D-\beta_j)$ $(s = \overline{2,r})$ и $\mathcal{L}_0 = E$ — тождественный оператор. Поскольку

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_{s-1}} y_{j+\alpha} = \sum_{\nu=0}^{s-1} (-1)^{s-1-\nu} \mu_\nu^{(s-1)} y_{j+\alpha+\nu},$$

то

$$c_s = \sum_{m=s}^{r} (-1)^{m-s} \mu_{s-1}^{(m-1)} b_m \qquad (s = \overline{1,r}). \tag{2.3}$$

Таким образом, коэффициенты c_s $(s = \overline{1,r})$ явным образом выражаются через числа b_s $(s = \overline{1,r})$. Для нахождения чисел b_s $(s = \overline{1,r})$, при которых локальный $\mathcal{L}$-сплайн вида (1.9) является точным на ядре оператора $\mathcal{L}_r$, требуется решить систему уравнений (1.10) с функционалом I_j, имеющим вид (2.2). Действуя по схеме работы [6, разд. 1], выводим следующие равенства:

$$\begin{aligned}
&b_1 = Y_1,\\
&b_1 + b_2(e^{\beta_2 h} - e^{\beta_1 h}) = Y_2,\\
&b_1 + b_2(e^{\beta_3 h} - e^{\beta_1 h}) + b_3(e^{\beta_3 h} - e^{\beta_1 h})(e^{\beta_3 h} - e^{\beta_2 h}) = Y_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&b_1 + b_2(e^{\beta_r h} - e^{\beta_1 h}) + b_3(e^{\beta_r h} - e^{\beta_1 h})(e^{\beta_r h} - e^{\beta_2 h})\\
&+ \ldots + b_r(e^{\beta_r h} - e^{\beta_1 h}) \ldots (e^{\beta_r h} - e^{\beta_{r-1} h}) = Y_r,
\end{aligned}$$

где числа Y_j $(j = \overline{1,r})$ имеют вид (1.12). Решение этой треугольной системы уравнений относительно чисел b_s $(s = \overline{1,r})$ может быть получено по индукции. А именно, последовательно вычисляем

$$\begin{aligned}
&b_1 = Y_1,\\
&b_2 = \frac{Y_1}{e^{\beta_1 h} - e^{\beta_2 h}} + \frac{Y_2}{e^{\beta_2 h} - e^{\beta_1 h}},\\
&b_3 = \frac{Y_1}{(e^{\beta_1 h} - e^{\beta_2 h})(e^{\beta_1 h} - e^{\beta_3 h})} + \frac{Y_2}{(e^{\beta_2 h} - e^{\beta_1 h})(e^{\beta_2 h} - e^{\beta_3 h})} + \frac{Y_3}{(e^{\beta_3 h} - e^{\beta_1 h})(e^{\beta_3 h} - e^{\beta_2 h})},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&b_r = \frac{Y_1}{\prod\limits_{k=2}^{r}(e^{\beta_1 h} - e^{\beta_k h})} + \frac{Y_2}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq 2}}^{r}(e^{\beta_2 h} - e^{\beta_k h})} + \ldots + \frac{Y_r}{\prod\limits_{k=1}^{r-1}(e^{\beta_r h} - e^{\beta_k h})}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Значит, $b_1 = Y_1,\ b_2 = [Y_1, Y_2],\ b_3 = [Y_1, Y_2, Y_3], \ldots, b_r = [Y_1, Y_2, \ldots, Y_r]$ — разделенные разности для последовательности значений $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ некоторой функции $g(x)$, построенные по точкам $x_1 = e^{\beta_1 h},\ x_2 = e^{\beta_2 h}, \ldots, x_r = e^{\beta_r h}$. Поскольку числа Y_j $(j = \overline{1,r})$ имеют вид (1.12), то сама функция $g(x)$ может быть записана в следующем виде:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{r-\alpha}}{h^{r-1}} \prod\limits_{k=1}^{r} \dfrac{\ln x - \beta_k h}{x - e^{\beta_k h}}, & x \neq e^{\beta_j h} \quad (j = \overline{1,r}),\\[2ex] \lim\limits_{x \to e^{\beta_j h}} \dfrac{x^{r-\alpha}}{h^{r-1}} \prod\limits_{k=1}^{r} \dfrac{\ln x - \beta_k h}{x - e^{\beta_k h}} = Y_j, & x = e^{\beta_j h} \quad (j = \overline{1,r}). \end{cases}$$

Таким образом, для вычисления коэффициентов c_s ($s = \overline{1,r}$) локального $\mathcal{L}$-сплайна $S_{\mathcal{L}_r}(x)$, точного на ядре оператора $\mathcal{L}_r$, может быть предложен следующий алгоритм: вначале по формулам (2.4) определяются b_s ($s = \overline{1,r}$), а затем с помощью (2.3) находятся числа c_s ($s = \overline{1,r}$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
2. **Lyche T., Schumaker L.L.** Local spline approximation methods // J. Approx. Theory. 1975. Vol. 15, no. 4. P. 294–325.
3. **Корнейчук Н.П.** Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1984. 352 с.
4. **Шевалдина Е.В.** Аппроксимация локальными $\mathcal{L}$-сплайнами четного порядка, сохраняющими ядро дифференциального оператора // Изв. ТулГУ. 2009. Т. 2. С. 62–73. (Естественные науки.)
5. **Шевалдина Е.В.** Локальные $\mathcal{L}$-сплайны, сохраняющие ядро дифференциального оператора // Сиб. журн. вычисл. математики. 2010. Т. 13, № 1. С. 111–121.
6. **Стрелкова Е.В., Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными $\mathcal{L}$-сплайнами, точными на подпространствах ядра дифференциального оператора // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 272–280.
7. **Шевалдин В.Т.** Некоторые задачи экстремальной интерполяции в среднем для линейных дифференциальных операторов // Тр. МИАН СССР. 1983. Т. 164. С. 203–240.
8. **Шарма А., Цимбаларио И.** Некоторые линейные дифференциальные операторы и обобщенные разности // Мат. заметки. 1977. Т. 21, вып. 2. С. 161–173.
9. **Morsche H.G. ter** Interpolation and extremal properties of $\mathcal{L}$-spline functions: Dissertation. Eindhoven: Techinische Hogeschool Eindhoven, 1982. 124 p.
10. **Волков Ю.С., Стрелкова Е.В., Шевалдин В.Т.** О локальной аппроксимации кубическими сплайнами // Методы сплайн-функций: тез. докл. Рос. конф., посвящ. 80-летию со дня рождения Ю. С. Завьялова. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2011. С. 35–36.
11. **Шевалдина Е.В.** Аппроксимация локальными экспоненциальными сплайнами с произвольными узлами // Сиб. журн. вычисл. математики. 2006. Т. 9, № 4. С. 391–402.
12. **Субботин Ю.Н.** Аппроксимация полиномиальными и тригонометрическими сплайнами третьего порядка, сохраняющая некоторые свойства аппроксимируемых функций // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 2. С. 156–166.
13. **Субботин Ю.Н.** Формосохраняющая экспоненциальная аппроксимация // Изв. вузов. 2009. Т. 11. С. 53–60. (Математика.)
14. **Жданов П.Г., Шевалдин В.Т.** Формосохраняющие локальные $\mathcal{L}$-сплайны, соответствующие произвольному линейному дифференциальному оператору третьего порядка // Збірник праць Інту математики НАН України. 2008. Т. 5, № 1. С. 124–141.
15. **Schumaker L.L.** On recursion for generalized splines // J. Approx. Theory. 1982. Vol. 36, № 1. P. 16–31.
16. **Li Y.** On the recurrence relations for B-splines defined by certain $\mathcal{L}$-splines // J. Approx. Theory. 1985. Vol. 43, № 4. P. 359–369.
17. **Aldaz J.M., Kounchev O., Render H.** On real analytic recurrence relations for cardinal exponential B-splines // J. Approx. Theory. 2007. Vol. 145, № 2. P. 253–265.
18. **Коровкин П.П.** Линейные операторы и теория приближений. М.: ГИФМЛ. 1959. 211 с.

Стрелкова Елена Валерьевна
канд. физ.-мат. наук
гл. программист
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет

Поступила 30.05.2011

Шевалдин Валерий Трифонович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 3 2011

УДК 517.5

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ПОПЕРЕЧНИКАХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ. III[1]

Ю. Н. Субботин, С. А. Теляковский

Устанавлена оценка снизу для наименьшего значения множителя M, при котором равны колмогоровские поперечники $d_n(W^r_C, C)$ и относительные поперечники $K_n(W^r_C, MW^j_C, C)$ класса функций W^r_C относительно класса MW^j_C при $j > r$. Порядок этой оценки по n такой же, как и в полученной ранее оценке сверху.

Ключевые слова: функции сравнения, колмогоровские и относительные поперечники.

Yu. N. Subbotin, S. A. Telyakovskii. On relative widths of classes of differentiable functions. III.

A lower estimate is established for the minimum value of the factor M for which the Kolmogorov width $d_n(W^r_C, C)$ and the relative width $K_n(W^r_C, MW^j_C, C)$ of the class of functions W^r_C with respect to the class MW^j_C coincide for $j > r$. The order of this estimate with respect to n is the same as in the upper estimate obtained earlier.

Keywords: comparison functions, Kolmogorov and relative widths.

Понятие относительных поперечников множеств было введено В. Н. Коноваловым в [1].

Для центрально симметричных множеств W и V банахова пространства X относительным поперечником порядка n множества W относительно множества V называется величина

$$K_n(W, V, X) := \inf_{L_n} \sup_{f \in W} \inf_{g \in L_n \cap V} \| f - g \|_X,$$

где L_n — подпространства размерности не выше n пространства X.

Здесь в отличие от колмогоровского поперечника $d_n(W, X)$ множества W берутся приближения не произвольными элементами g из L_n, а только теми, которые принадлежат множеству V. Таким образом, всегда

$$K_n(W, V, X) \geqslant d_n(W, X) \quad \text{и} \quad d_n(W, X) = K_n(W, X, X).$$

В настоящей работе рассматриваются классы MW^r_C, $M > 0$, $r = 1, 2, \dots$, 2π-периодических дифференцируемых функций f, производные $f^{(r-1)}$ которых удовлетворяют условию Липшица первого порядка

$$\left| f^{(r-1)}(x') - f^{(r-1)}(x'') \right| \leqslant M|x' - x''|$$

для всех x' и x''.

В [1] доказано, что относительные поперечники $K_n(W^r_C, W^r_C, C)$ при $r = 1$ и $r = 2$ имеют тот же порядок n^{-r}, что и поперечники $d_n(W^r_C, C)$, а при $r \geqslant 3$ поперечники $K_n(W^r_C, W^r_C, C)$ имеют порядок n^{-2}.

Из работы В. Ф. Бабенко [2] следует, что для фиксированных $M > 1$ поперечники $K_n(W^r_C, MW^r_C, C)$ имеют порядок n^{-r}, как и поперечники $d_n(W^r_C, C)$. Это подтверждает гипотезу, высказанную С. Б. Стечкиным.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (проекты 11-01-00347 и 11-01-00417).

Не будем более подробно говорить сейчас о результатах, относящихся к этим вопросам, отсылая читателя к работе [3], посвященной оценкам множителей M, при которых справедливо уже не порядковое, а точное равенство

$$K_n(W_C^r, MW_C^r, C) = d_n(W_C^r, C).$$

В работах [4; 5] были получены оценки сверху и снизу величин $M_n(r,j)$ — наименьших значений множителя M, при котором для натуральных j, меньших r, справедливо равенство

$$K_n(W_C^r, MW_C^j, C) = d_n(W_C^r, C). \tag{1}$$

В [6] показано, что при $j > r$ для аналогичных величин $M_n(r,j)$ имеет место оценка

$$M_n(r,j) \leqslant cj^2 m^{j-r}, \quad \text{где} \quad m = [(n+1)/2], \tag{2}$$

с некоторой абсолютной положительной постоянной c.

В настоящей заметке показано, что при фиксированных r и j, $j > r$, в оценке (2) дан правильный по n порядок величин $M_n(r,j)$.

Как и в [4], оценка $M_n(r,j)$ снизу будет получена с помощью функций сравнения

$$\varphi_r(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^{r+1}}\sin\Bigl((2k+1)x + \frac{r\pi}{2}\Bigr).$$

При этом будем использовать следующее представление функций сравнения на отрезке $[0, 2\pi]$:

$$\varphi_r(x) = \frac{1}{r!}\Bigl[x^r - 2(x-\pi)_+^r\Bigr] + P_{r-1}(x), \tag{3}$$

где $(x-\pi)_+ = \max(x-\pi, 0)$ и $P_{r-1}(x)$ — некоторый многочлен степени не выше $r-1$.

Равенство (3) легко установить по индукции. Функцию $\varphi_0(x)$ на отрезке $[0, 2\pi]$ можно записать в виде

$$\varphi_0(x) = 1 - 2(x-\pi)_+^0,$$

если считать, что

$$(x-\pi)_+^0 = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 < x \leqslant \pi, \\ 1 & \text{при} \quad \pi < x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Функция $\varphi_0(x)$ продолжается 2π-периодически на всю числовую ось. Далее пользуемся тем, что

$$\varphi_r(x) = \int\limits_0^x \varphi_{r-1}(t)\,dt + a_r, \qquad r = 1, 2, \ldots,$$

где числа a_r таковы, что выполняется равенство

$$\int\limits_0^{2\pi}\varphi_r(x)\,dx = 0.$$

Теорема. *При $j > r$ для $M_n(r,j)$ справедлива оценка снизу*

$$M_n(r,j) \geqslant c(r,j)n^{j-r}, \tag{4}$$

где положительный множитель $c(r,j)$ зависит только от r и j.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если при некотором M имеет место равенство (1), то, поскольку $\varphi_r(x) \in W_C^r$, существует такая функция $g(x) \in MW_C^j$, что

$$K_r n^{-r} \geqslant \| \varphi_r(x) - g(x) \|_C,$$

где K_r — r-я константа Фавара. Отсюда при положительных h получаем

$$K_r n^{-r} \geqslant 2^{-j}\Big\| \sum_{k=0}^{j}(-1)^k \binom{j}{k}\big[\varphi_r(x+kh)-g(x+kh)\big]\Big\|_C \geqslant 2^{-j}\Big\| \sum_{k=0}^{j}(-1)^k \binom{j}{k}\varphi_r(x+kh)\Big\|_C - 2^{-j}Mh^j. \tag{5}$$

Заменим в правой части оценки (5) норму разности функции φ_r на значение этой разности в точке $x = \pi - h$. При $x = \pi - h$ все аргументы функции φ_r в рассматриваемой разности принадлежат отрезку $[0, 2\pi]$, если

$$h \leqslant \frac{\pi}{j-1}. \tag{6}$$

Значит, для таких h можно использовать представление (3).

Для $j > r$ разность порядка j многочлена степени r равна нулю. Поэтому из (5), пользуясь представлением (3), для h, удовлетворяющих условию (6), получаем оценку

$$K_r n^{-r} \geqslant 2^{-j}\Big| \sum_{k=0}^{j}(-1)^k \binom{j}{k}\Big(-\frac{2}{r!}\Big)(kh-h)_+^r\Big| - 2^{-j}Mh^j =$$

$$= 2^{-j}\frac{2}{r!}\Big| \sum_{k=0}^{j}(-1)^k \binom{j}{k}(kh-h)^r - (-h)^r\Big| - 2^{-j}Mh^j = 2^{-j}\frac{2}{r!}h^r - 2^{-j}Mh^j.$$

Отсюда

$$M \geqslant \frac{2}{r!}h^{r-j} - K_r\frac{2^j}{n^r}h^{-j}. \tag{7}$$

Выражение в правой части неравенства (7) максимальное значение имеет при

$$h = \frac{1}{n}\Big(K_r 2^{j-1} r! \frac{j}{j-r}\Big)^{1/r}.$$

Это значение h удовлетворяет условию (6), если n достаточно велико. Поэтому при таких n из (7) вытекает оценка (4). Справедливость оценки (4) при малых n очевидна, поскольку мы не следим за зависимостью множителя $c(r, j)$ в (4) от r и j. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Коновалов В.Н.** Оценки поперечников типа Колмогорова для классов дифференцируемых периодических функций // Мат. заметки. 1984. Т. 35, вып. 3. С. 369–380.
2. **Бабенко В.Ф.** О наилучших равномерных приближениях сплайнами при наличии ограничений на их производные // Мат. заметки. 1991. Т. 50, вып. 6. С. 24–30.
3. **Субботин Ю.Н., Теляковский С.А.** Точные значения относительных поперечников классов дифференцируемых функций // Мат. заметки. 1999. Т. 65, вып. 6. С. 871–879.
4. **Субботин Ю.Н., Теляковский С.А.** Об относительных поперечниках классов дифференцируемых функций // Тр. МИАН. 2005. Т. 248. С. 250–261.
5. **Субботин Ю.Н., Теляковский С.А.** Уточнение оценок относительных поперечников классов дифференцируемых функций // Тр. МИАН. 2010. Т. 269. С. 242–253.
6. **Субботин Ю.Н., Теляковский С.А.** Об относительных поперечниках классов дифференцируемых функций. II // Укр. мат. журн. 2010. Т. 62, № 3. С. 423–431.

Поступила 25.01.2011

Субботин Юрий Николаевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
зав. отделом
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: yunsub@imm.uran.ru

Теляковский Сергей Александрович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: sergeyAltel@yandex.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 3 2011

УДК 517.983.54; 517.988

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

П. А. Чистяков

В работе рассматриваются итерационные методы решения линейного операторного уравнения $Ax = y$ с B-симметричным и B-положительным оператором, действующим из X в Y, где X, Y — банаховы пространства. Пространство X предполагается равномерно выпуклым и гладким, тогда как Y — произвольное банахово пространство. Рассматриваются случаи точных и возмущенных данных, доказывается сильная сходимость(по норме) итерационных процессов.

Ключевые слова: итерационный метод, дуальное отображение, B-симметричный оператор, B-положительный оператор, нормальное решение, дистанция Брегмана, равномерно выпуклое пространство, гладкое пространство, характеристическое неравенство Ксю — Роуч, модуль гладкости пространства.

P. A. Chistyakov. Iterative methods for solving linear operator equations in Banach spaces.

Iterative methods for solving the linear operator equation $Ax = y$ with B-symmetric B-positive operator acting from a Banach space X to a Banach space Y are considered. The space X is assumed to be uniformly convex and smooth, whereas Y is an arbitrary Banach space. The cases of exact and disturbed data are considered and the strong (norm) convergence of the iterative processes is proved.

Keywords: iterative method, duality mapping, B-symmetric operator, B-positive operator, minimum-norm solution, Bregman distance, uniformly convex space, smooth space, Xu–Roach characteristic inequality, modulus of smoothness of a space.

1. Введение

Рассматривается линейное операторное уравнение первого рода

$$Ax = y, \tag{1.1}$$

где $A\colon X \longrightarrow Y$ — действующий на паре банаховых пространств непрерывный B-симметричный и B-положительный оператор, $B\colon X \longrightarrow Y^*$ — линейный непрерывный оператор. Задача (1.1) может быть некорректно поставленной, т. е. решение может быть неединственным (если вообще существует) либо оно может не зависеть непрерывным образом от возмущений в правой части уравнения (1.1) или в операторе A; например, это имеет место, когда A — компактный оператор, заданный в бесконечномерном пространстве. Хронологически одним из первых и широко известных итерационных алгоритмов в гильбертовом пространстве является метод Ландвебера [1]

$$x_{n+1} = x_n - \mu_n A^*(Ax_n - y)$$

с соответствующим выбором начального приближения x_0 и параметра шага μ_n.

В современных работах немецких математиков Шопфера и Шустера [2 и др.] предлагается обобщение этого метода для банаховых пространств в виде

$$J_X(x_{n+1}) = J_X(x_n) - \mu_n A^* J_Y(Ax_n - y), \quad x_{n+1} = J_{X^*}(J_X(x_{n+1})), \tag{1.2}$$

где $J_X : X \longrightarrow 2^{X^*}$ — так называемое дуальное отображение банахова пространства, строгое определение которого мы приведем в следующем разделе. Авторы предполагают наличие у

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 09-01-00053).

пространства X свойств равномерной выпуклости и гладкости, в то время как Y предполагается произвольным банаховым пространством.

В данной работе исследуется итерационный метод

$$J_X(x_{n+1}) = J_X(x_n) - \mu_n B^*(Ax_n - y), \quad x_{n+1} = J_{X^*}(J_X(x_{n+1})), \tag{1.3}$$

который является некоторой модификацией процесса (1.2); здесь операторы A и B связаны между собой соотношениями B-симметричности и B-положительности. Формулировке всех необходимых определений и понятий применяемого математического аппарата посвящен следующий раздел.

2. Предварительные математические определения, обозначения и факты

Пусть X и Y — вещественные банаховы пространства. Через X^*, Y^* обозначаем их сопряженные. Во всех этих четырех пространствах обозначаем норму символом $\|\cdot\|$, не указывая при этом индексом принадлежность нормы к пространству, поскольку соответствующая информация всегда без труда определяется из контекста. Для величины функционала $x^* \in X^*$ на элементе $x \in X$ придерживаемся следующих симметричных обозначений по типу скалярного произведения в гильбертовом пространстве $\langle x, x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle := x^*(x)$. Через $\mathcal{L}(X, Y)$ обозначается пространство всех линейных непрерывных операторов $A\colon X \longrightarrow Y$. Если оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, то сопряженный к нему оператор A^* принадлежит пространству $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$, и $\|A\| = \|A^*\|$ (здесь для обозначения норм операторов из разных нормированных пространств также используется один и тот же символ). Отметим, что в нашей постановке для оператора $B \in \mathcal{L}(X, Y^*)$ формально $B^* \in \mathcal{L}(Y^{**}, X^*)$. Однако, используя существование естественного вложения $\pi\colon Y \longrightarrow Y^{**}$ (см. [3, с. 191]), будем считать оператор B^* определенным на всем пространстве Y. Для произвольных вещественных чисел a и b, следуя первоисточникам [2; 4], будем использовать обозначения

$$a \vee b := \max\{a, b\}, \quad a \wedge b := \min\{a, b\}.$$

Через $p, q \in (1, +\infty)$ обозначаем сопряженные показатели, т. е. $1/p + 1/q = 1$.

2.1. Геометрические свойства банаховых пространств, дуальное отображение

Существует тесная взаимосвязь между такими свойствами банахова пространства, как выпуклость, гладкость и определенными свойствами дуального отображения. Приведем кратко те из них, которые потребуются нам в дальнейшем. Более подробная информация со всеми доказательствами может быть найдена в специализированной литературе, например в [5–7].

Определение 1. Функция $\delta_X : [0, 2] \to [0, 1]$, определяемая правилом

$$\delta_X(\varepsilon) := \inf\Big\{1 - \Big\|\frac{1}{2}(x + y)\Big\|\colon \ \|x\| = \|y\| = 1, \ \|x - y\| \geqslant \varepsilon\Big\},$$

называется *модулем выпуклости* пространства X.

Определение 2. Функция $\rho_X : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, определяемая правилом

$$\rho_X(\tau) = \frac{1}{2}\sup\big\{\|x + y\| + \|x - y\| - 2\colon \ \|x\| = 1, \ \|y\| \leqslant \tau\big\},$$

называется *модулем гладкости* пространства X.

О п р е д е л е н и е 3. Линейное нормированное пространство X

(a) называется *строго выпуклым*, если единичная сфера в этом пространстве не содержит отрезков прямой, т. е. для любых $x_1, x_2 \in X$ таких, что $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$, $x_1 \neq x_2$, и для всех $\lambda \in (0,1)$ выполнено $\|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\| < 1$;

(b) называется *гладким*, если для любого $x \in X$, $x \neq 0$, существует единственный $x^* \in X^*$ такой, что $\|x^*\| = 1$ и $\langle x, x^*\rangle = \|x\|$;

(c) называется *равномерно выпуклым*, если $\delta_X(\varepsilon) > 0$ для всех $\varepsilon \in (0,2]$;

(d) называется *равномерно гладким*, если $\lim_{\tau\to+0}[\rho_X(\tau)/\tau] = 0$.

Перечислим основные свойства функции $\rho_X(\tau)$ [6; 7]:

- $\rho_X(0) = 0$, $\rho_X(\tau) \leqslant \tau$;
- $\rho_X(\tau)$ — выпуклая, непрерывная и строго монотонно возрастающая функция;
- $\rho_X(\tau)/\tau$ — неубывающая функция.

О п р е д е л е н и е 4. Пусть $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\varphi(0) = 0$, — непрерывная строго возрастающая функция (такая функция называется *функцией роста*). Отображение $J_\varphi \colon X \longrightarrow 2^{X^*}$, определяемое по формуле

$$J_\varphi(x) = \bigl\{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x\rangle = \|x^*\|\|x\|,\ \|x^*\| = \varphi(\|x\|)\bigr\}, \tag{2.1}$$

называется *дуальным отображением* пространства X *с функцией роста* φ.

Всюду в дальнейшем мы будем использовать дуальные отображения банаховых пространств со степенными функциями вида $\varphi(t) = t^{p-1}$ $(p > 1)$ в качестве функций роста, которые будем обозначать $J_p(x)$ и называть для краткости *дуальными отображениями p-й степени*. В этом случае соотношение (2.1) примет вид

$$J_p(x) = \bigl\{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x\rangle = \|x^*\|\|x\|,\ \|x^*\| = \|x\|^{p-1}\bigr\}. \tag{2.2}$$

При $p = 2$ дуальное отображение называется *каноническим* или *нормализованным* дуальным отображением и обозначается $J(x)$. Через $J_{*q} \colon X^* \longrightarrow X^{**}$ обозначаем определяемое аналогично дуальное отображение сопряженного пространства X^*. В случае рефлексивности пространства X можно считать, что J_{*q} действует из X^* в X.

Следующая теорема (см. [2, с. 314], а также [5; 6]) собирает воедино основные известные факты о свойствах выпуклости и гладкости пространств и показывает, что эти понятия являются взаимно двойственными.

Теорема 1. *Пусть X — банахово пространство. Тогда*

(a) *X равномерно выпукло (соответственно равномерно гладко) $\Leftrightarrow$ X^* равномерно гладко (соответственно равномерно выпукло).*

(b) *Если X равномерно выпукло, то X рефлексивно и строго выпукло.*

(c) *Если X равномерно гладко, то X рефлексивно и гладко.*

(d) *Пусть X рефлексивно. Тогда X строго выпукло (соответственно гладко) $\Leftrightarrow$ X^* гладко (соответственно строго выпукло).*

(e) *X строго выпукло $\Leftrightarrow$ дуальное отображение пространства X произвольно выбранной p-й степени строго монотонно, т. е. $\langle x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2\rangle > 0$ для всех $x_1, x_2 \in X$ $(x_1 \neq x_2)$ и $x_1^* \in J_p(x_1)$, $x_2^* \in J_p(x_2)$.*

(f) *X гладко $\Leftrightarrow$ дуальное отображение J_p для некоторого p (а значит, и для всех $p > 1$) однозначно, т. е. для любого $x \in X$ множество $J_p(x) \subseteq X^*$ состоит из одного элемента, который будем обозначать также через $J_p(x)$.*

(g) *Если X рефлексивно, строго выпукло и гладко, тогда дуальное отображение J_p однозначно, биективно и сильно-слабо непрерывно в том смысле, что $J_p(x_n) \xrightarrow{сл.} J_p(x)$ для* *всех* $x_n \to x$. *Обратное к* J_p *отображение* $J_p^{-1} : X^* \longrightarrow X$ *вычисляется по формуле* $J_p^{-1} = J_{*q}$, *где* J_{*q} — *дуальное отображение* q*-й степени пространства* X^*.

(h) *Пусть* $M \neq \varnothing$ — *выпуклое замкнутое подмножество рефлексивного строго выпуклого пространства* X. *Тогда существует единственный* $x \in M$ *такой, что*

$$\|x\| = \inf_{z \in M} \|z\|.$$

Если дополнительно X *является гладким пространством, тогда для всех* $z \in M$ *выполнено неравенство* $\langle J_p(x), x\rangle \leqslant \langle J_p(x), z\rangle$.

З а м е ч а н и е. Гладкость пространства также тесно связана с дифференцируемостью его нормы:

- X гладко $\Leftrightarrow$ его норма дифференцируема по Гато на $X \backslash \{0\}$;
- X равномерно гладко $\Leftrightarrow$ его норма равномерно дифференцируема по Фреше на $X \backslash \{0\}$.

Нам потребуется неравенство для равномерно гладкого пространства [4]. В доказательстве сходимости нашего метода оно будет играть ключевую роль.

Теорема 2. *Пусть* X — *равномерно гладкое пространство. Тогда для любых* $x_1, x_2 \in X$ *выполнено характеристическое неравенство Ксю — Роуч*

$$\|x_1 - x_2\|^p \leqslant \|x_1\|^p - p\langle J_p(x_1), x_2\rangle + \sigma_p(x_1, x_2).$$

Здесь

$$\sigma_p(x_1, x_2) = p\, G_p \int\limits_0^1 \frac{(\|x_1 - tx_2\| \vee \|x_1\|)^p}{t} \rho_X \left(\frac{t\|x_2\|}{\|x_1 - tx_2\| \vee \|x_1\|} \right) dt, \tag{2.3}$$

где $G_p = 64c/K_p$,

$$K_p = 4(2+\sqrt{3}) \min\left\{\frac{1}{2}p(p-1) \wedge 1, \left(\frac{1}{2}p \wedge 1\right)(p-1), (p-1)(1-(\sqrt{3}-1)^q), 1-(1+(2-\sqrt{3})q)^{1-p}\right\},$$

$$c = 4\frac{\tau_0}{\sqrt{1+\tau_0^2}-1} \prod_{j=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{15}{2^{j+2}}\tau_0\right), \quad \tau_0 = \frac{\sqrt{339}-18}{30}.$$

2.2. B-симметричные и B-положительные операторы, решение наименьшей нормы

О п р е д е л е н и е 5. Оператор A называется

(a) B-симметричным, если при любых $x_1, x_2 \in X$ выполнено равенство $\langle Ax_1, Bx_2\rangle = \langle Ax_2, Bx_1\rangle$;

(b) B-неотрицательным, если для каждого $x \in X$ выполнено $\langle Ax, Bx\rangle \geqslant 0$;

(c) B-положительным (не строго), если для каждого $x \in X$ выполнено $\langle Ax, Bx\rangle \geqslant 0$, причем $\langle Ax, Bx\rangle = 0$ в том и только в том случае, когда $Ax = 0$;

(d) строго B-положительным, если для каждого $x \in X$ выполнено $\langle Ax, Bx\rangle \geqslant 0$, причем $\langle Ax, Bx\rangle = 0$ в том и только в том случае, когда $x = 0$.

Отметим, что строгая B-положительность оператора A влечет за собой обратимость обоих операторов.

Нам потребуется лемма об оценке снизу квадратичной формы $\langle Ax, Bx\rangle$.

Лемма 1. *Пусть A — B-симметричный и B-неотрицательный оператор. Тогда для квадратичной формы $\langle Ax, Bx\rangle$ справедлива следующая оценка снизу*:

$$\langle Ax, Bx\rangle \geqslant \frac{\|B^*Ax\|^2}{\|B^*A\|}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Рассмотрим значение квадратичной формы на элементе $(x + \alpha J_*(B^*Ax)) \in X$, где J_* — каноническое дуальное отображение пространства X^*. В силу B-неотрицательности при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $\langle A(x+\alpha J_*(B^*Ax)), B(x + \alpha J_*(B^*Ax))\rangle \geqslant 0$. Проведем преобразования

$$\langle A(x+\alpha J_*(B^*Ax)), B(x+\alpha J_*(B^*Ax))\rangle = \langle B^*A(x+\alpha J_*(B^*Ax)), x+\alpha J_*(B^*Ax)\rangle$$
$$= \langle B^*Ax, x\rangle + 2\alpha\langle B^*Ax, J_*(B^*Ax)\rangle + \alpha^2\langle B^*A(J_*(B^*Ax)), J_*(B^*Ax)\rangle$$
$$= \langle Ax, Bx\rangle + 2\alpha\|B^*Ax\|^2 + \alpha^2\langle B^*A(J_*(B^*Ax)), J_*(B^*Ax)\rangle \geqslant 0.$$

Получен квадратный трехчлен относительно α, принимающий только неотрицательные значения. Следовательно, его дискриминант не может быть положительным числом:

$$\|B^*Ax\|^4 - \langle Ax, Bx\rangle\langle B^*A(J_*(B^*Ax)), J_*(B^*Ax)\rangle \leqslant 0.$$

Проведя преобразования

$$\|B^*Ax\|^4 \leqslant \langle Ax, Bx\rangle\langle B^*A(J_*(B^*Ax)), J_*(B^*Ax)\rangle$$
$$\leqslant \langle Ax, Bx\rangle\|B^*A(J_*(B^*Ax))\|\|J_*(B^*Ax)\| \leqslant \langle Ax, Bx\rangle\|B^*A\|\|J_*(B^*Ax)\|^2$$
$$= \langle Ax, Bx\rangle\|B^*A\|\|B^*Ax\|^2$$

и сократив обе части неравенства на $\|B^*Ax\|^2$, получим требуемое неравенство. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть A — B-симметричный и B-положительный оператор, $y \in \mathcal{R}(A)$. Тогда*

$$Ax = y \Leftrightarrow B^*Ax = B^*y.$$

Доказательство. Пусть выполнено равенство $B^*Ax = B^*y$ или эквивалентное ему $B^*(Ax - y) = 0$. Поскольку $y \in \mathcal{R}(A)$, то для некоторого $\tilde{x} \in X$ выполнено $Ax - y = A(x - \tilde{x})$. Из цепочки равенств $0 = \langle B^*(Ax-y), x-\tilde{x}\rangle = \langle A(x-\tilde{x}), B(x-\tilde{x})\rangle$ в силу B-положительности получим $Ax = y$. Лемма доказана.

Для билинейной формы $\langle Ax_1, Bx_2\rangle$ справедливо также обобщенное неравенство Коши — Буняковского.

Лемма 3. *Пусть A — B-симметричный и B-неотрицательный оператор. Тогда имеет место неравенство*

$$|\langle Ax_1, Bx_2\rangle| \leqslant \sqrt{\langle Ax_1, Bx_1\rangle}\sqrt{\langle Ax_2, Bx_2\rangle}.$$

Доказательство обобщенного неравенства Коши — Буняковского проводится аналогично доказательству (2.4). Надо рассмотреть значение $\langle Ax, Bx\rangle$ при $x = x_1 + \alpha x_2$.

Мы будем искать решение наименьшей нормы (нормальное решение) уравнения (1.1), т. е. такой элемент $\hat{x} \in X$, что $A\hat{x} = y$ и $\|\hat{x}\| = \inf\{\|z\| \mid z \in X,\ Az = y\}$. Нам потребуется следующее вспомогательное утверждение о свойствах нормального решения.

Лемма 4. *Пусть X рефлексивно, строго выпукло и гладко, $y \in \mathcal{R}(A)$. Тогда*

(a) *Существует единственное нормальное решение $\hat{x}$ уравнения* (1.1), *и* $J_p(\hat{x}) \in \overline{\mathcal{R}(B^*A)}$;

(b) *Если $\tilde{x}$ — какое-то решение уравнения* (1.1), *удовлетворяющее условию* $J_p(\tilde{x}) \in \overline{\mathcal{R}(B^*A)}$, *тогда* $\tilde{x} = \hat{x}$.

Доказательство. Поскольку $y \in \mathcal{R}(A)$, а оператор A линеен и непрерывен, то множество $M := \{z \in X |\, Az = y\}$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество в пространстве X. В силу теоремы 1 (п. (h)) нормальное решение $\hat{x}$ задачи (1.1) существует и единственно. Теперь пусть z обозначает произвольный элемент из $\ker(A) = \ker(A^*B)$. Тогда $(x \pm z) \in M$ и снова в силу п. (h) теоремы 1 получим $\langle J_p(\hat{x}), \hat{x}\rangle \leqslant \langle J_p(\hat{x}), \hat{x} \pm z\rangle = \langle J_p(\hat{x}), \hat{x}\rangle \pm \langle J_p(\hat{x}), z\rangle$. Отсюда следует, что $\langle J_p(\hat{x}), z\rangle = 0$, т.е. $J_p(\hat{x}) \in (\ker(A^*B))^\perp$. Учитывая легко проверяемое равенство $(\ker(A^*B))^\perp = \overline{\mathcal{R}(B^*A)}$, приходим к обоснованию утверждения (a). Если теперь $\tilde{x} \in X$ удовлетворяет условиям п. (b), то в силу доказанного в предыдущем пункте найдется последовательность $\{x_n\} \subseteq X$ такая, что $J_p(\hat{x}) - J_p(\tilde{x}) = \lim_{n\to+\infty} B^*Ax_n$. Тогда

$$\langle J_p(\hat{x}) - J_p(\tilde{x}), \hat{x} - \tilde{x}\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle B^*Ax_n, \hat{x} - \tilde{x}\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle Ax_n, B(\hat{x} - \tilde{x})\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle Bx_n, A(\hat{x} - \tilde{x})\rangle = 0,$$

поскольку $A\hat{x} = A\tilde{x} = y$. Из п. (e) теоремы 1 теперь следует, что $\tilde{x} = \hat{x}$. Лемма доказана.

2.3. Дистанция Брегмана

В силу определенных особенных геометрических свойств банаховых пространств часто бывает более удобно использовать для доказательства сходимости регуляризующих алгоритмов вместо обычной нормы пространства функционал специального вида.

Определение 6. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ — произвольный непрерывный строго выпуклый функционал. *Дистанцией Брегмана* от $x_1 \in X$ до $x_2 \in X$ по функционалу f называется величина

$$\Delta_f(x_1, x_2) := f(x_2) - f(x_1) - \inf_{\xi \in \nabla f(x_1)} \langle \xi, x_2 - x_1\rangle.$$

Ниже используется дистанция Брегмана только по функционалу $f(x) = (1/p)\|x\|^p$, для которой введем обозначение $\Delta_p(\cdot,\cdot)$. Тогда имеем

$$\Delta_p(x_1, x_2) = \frac{1}{p}\|x_2\|^p - \frac{1}{p}\|x_1\|^p - \inf_{\xi \in J_p(x_1)} \langle \xi, x_2 - x_1\rangle.$$

В силу теоремы 1 (f) и равенства (2.1) в гладком банаховом пространстве справедливы также формулы

$$\Delta_p(x_1, x_2) = \frac{1}{q}\|x_1\|^p + \frac{1}{p}\|x_2\|^p - \langle J_p(x_1), x_2\rangle$$
$$= \frac{1}{q}(\|x_1\|^p - \|x_2\|^p) + \langle J_p(x_2) - J_p(x_1), x_2\rangle, \quad x_1, x_2 \in X. \tag{2.5}$$

Замечание. Функционал Δ_p не является метрикой. В общем случае для него выполняется только первое свойство из определения метрики. В гильбертовом пространстве $\Delta_2(x_1, x_2) = (1/2)\|x_1 - x_2\|^2$.

Следующее утверждение может быть найдено в [2, с. 316].

Теорема 3. *Пусть X — гладкое и равномерно выпуклое банахово пространство. Тогда для любых $x, z_1, z_2 \in X$ и последовательностей $\{x_n\} \subseteq X$ справедливы следующие свойства:*

(a) $\Delta_p(z_1, z_2) \geqslant 0$, *причем* $\Delta_p(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$;

(b) *ограниченность последовательности $\{x_n\}$ эквивалентна ограниченности числовой последовательности $\{\Delta_p(x_n, x)\}$*;

(c) *функционал Δ_p непрерывен по совокупности своих аргументов*;

(d) *следующие свойства эквивалентны*:

(*i*) $\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$,
(*ii*) $\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x\|$ *и* $\lim_{n\to+\infty} \langle J_p(x_n), x\rangle = \langle J_p(x), x\rangle$,
(*iii*) $\lim_{n\to+\infty} \Delta_p(x_n, x) = 0$;

(e) $\{x_n\}$ — *последовательность Коши* $\Leftrightarrow$ *для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $n_0 \in \mathbb{N}$ *такое, что для всех* $k, l \geqslant n_0$ *будет выполнено* $\Delta_p(x_k, x_l) < \varepsilon$.

3. Итерационные методы решения операторного уравнения

Перейдем теперь к основной цели нашей работы — описанию и обоснованию итерационных методов решения уравнения (1.1) для заданного B-симметричного и B-положительного оператора A, где $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $B \in \mathcal{L}(X, Y^*)$. Банахово пространство X предполагается равномерно выпуклым и гладким, Y — произвольное вещественное банахово пространство. В силу пп. (a), (b) и (d) теоремы 1 пространство X рефлексивно, а сопряженное к нему пространство X^* строго выпукло и равномерно гладко.

3.1. Решение уравнения с точными данными

Сначала рассмотрим случай, когда операторы A и B и правая часть уравнения $y \in \mathcal{R}(A)$ заданы точно. Согласно лемме 4 существует и единственно нормальное решение $\hat{x}$ уравнения (1.1). Приведем пошаговое описание метода восстановления $\hat{x}$.

А л г о р и т м 1.

Ш а г 1. Если $y = 0$, тогда $\hat{x} = 0$, работа алгоритма закончена;

Ш а г 2. Зафиксируем произвольные вещественные $p \in (1, +\infty)$ и $C \in (0, 1)$. Выберем начальное приближение $x_0 \in X$ таким образом, чтобы выполнялись условия

$$J_p(x_0) \in \overline{\mathcal{R}(B^*A)}, \quad \Delta_p(x_0, \hat{x}) \leqslant \frac{1}{p}\|\hat{x}\|^p. \tag{3.1}$$

Для $n = 0, 1, 2, \ldots$, повторяем следующий шаг 3 до тех пор, пока не наступит условие остановки алгоритма.

Ш а г 3. Положим $R_n := \|B^*(Ax_n - y)\|$. Если $R_n = 0$, то на этом шаге n мы останавливаем алгоритм. В противном случае продолжаем работу, выбирая параметры по следующим правилам:

(1) Если $x_0 = 0$, положим

$$\overline{\mu}_0 := q^{p-1}\frac{\|B^*y\|^{p-2}}{\|A\|^{p-1}\|B\|^{p-1}} > 0, \quad \text{где} \quad q = \frac{p}{p-1}. \tag{3.2}$$

В качестве параметра шага выберем теперь произвольное $\mu_0 \in (0, \overline{\mu}_0)$.

(2) Для всех $n \geqslant 0$ (соответственно $n \geqslant 1$ в том случае, когда $x_0 = 0$) положим

$$\lambda_n := (\rho_{X^*}(1)) \wedge \left(\frac{C\,R_n}{2^q G_q\|x_n\|\|A\|\|B\|}\right) > 0, \tag{3.3}$$

где $G_q > 0$ — константа из соотношения (2.3). Поскольку X^* равномерно гладко, то по свойствам модуля гладкости функция $\rho_{X^*}(\tau)/\tau$ на полуинтервале $(0, 1]$ принимает все значения из полуинтервала $(0, \rho_{X^*}(1)]$. Следовательно, найдется такое $\tau_n \in (0, 1]$, что

$$\frac{\rho_{X^*}(\tau_n)}{\tau_n} = \lambda_n. \tag{3.4}$$

Параметр шага итерационного метода положим тогда

$$\mu_n := \frac{\tau_n\|x_n\|^{p-1}}{R_n}. \tag{3.5}$$

Следующее приближение определяем по формулам

$$J_p(x_{n+1}) := J_p(x_n) - \mu_n B^*(Ax_n - y) = J_p(x_n) - \mu_n B^*A(x_n - \hat{x}), \tag{3.6}$$

$$x_{n+1} = J_{*q}(J_p(x_{n+1})).$$

□

Заметим, что выбор начального приближения x_0 из соотношений (3.1) и определение итераций (3.6) гарантируют, что $J_p(x_n) \in \overline{\mathcal{R}(B^*A)}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Кроме того, всегда допустимым будет выбор $x_0 = 0$, поскольку $\Delta_p(0, \hat{x}) = (1/p)\|\hat{x}\|^p$ (в силу соотношения (2.5)).

Если на некотором шаге n выполнится правило остановки алгоритма $R_n = 0$, тогда имеем $B^*Ax_n = B^*y$, откуда получим $Ax_n = y$ в силу эквивалентности этих равенств. Из п. (b) леммы 4 вытекает, что $x_n = \hat{x}$.

Отметим также, что непосредственно при обосновании сходимости описанного алгоритма будет установлено, что $x_n \neq 0$ при всех $n \geqslant 1$. Это означает, что параметры λ_n и τ_n всегда корректно определены.

Теперь сформулируем и докажем теорему о сходимости алгоритма 1.

Теорема 4. *Пусть пространство X равномерно выпукло и гладко, а Y — произвольное банахово пространство. Пусть $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ — B-симметричный и B-положительный оператор, где $B \in \mathcal{L}(X, Y^*)$. Пусть $y \in \mathcal{R}(A)$. Тогда существует такое $\overline{\mu}_0 > 0$ (см. формулу (3.2)), что при выборе x_0 согласно правилу (3.1) и любом $\mu_0 \in (0, \overline{\mu}_0)$ итерационный алгоритм (3.6) с правилом выбора параметра μ_n (3.5) либо останавливается на конечном шаге на нормальном решении $\hat{x}$, либо задает последовательность итераций $\{x_n\}$, сходящуюся сильно к $\hat{x}$ по норме пространства X.*

Доказательство. Если на некотором шаге n мы получим $R_n = 0$, то, как было отмечено выше, в этом случае $x_n = \hat{x}$, что и требуется. Поэтому будем теперь считать, что $R_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим числовую последовательность $\{\Delta_n\}$, определяемую по правилу

$$\Delta_n := \Delta_p(x_n, \hat{x}) = \frac{1}{q}\|x_n\|^p + \frac{1}{p}\|\hat{x}\|^p - \langle J_p(x_n), \hat{x}\rangle. \tag{3.7}$$

Схема дальнейшего доказательства будет следующей. Сперва мы выведем некоторое рекурсивное неравенство, которому удовлетворяет последовательность Δ_n и которое означает сходимость этой последовательности. Затем мы выберем некоторую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ и установим, что она удовлетворяет свойству Коши и сходится к нормальному решению уравнения (1.1). На последнем этапе мы докажем, что и вся последовательность $\{x_n\}$ сходится сильно к $\hat{x}$.

Принимая во внимание равенства (2.2), (3.6) и (3.7), проведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned}\Delta_{n+1} &= \frac{1}{q}\|x_{n+1}\|^p + \frac{1}{p}\|\hat{x}\|^p - \langle J_p(x_{n+1}), \hat{x}\rangle \\ &= \frac{1}{q}\|J_{*q}(J_p(x_{n+1}))\|^p + \frac{1}{p}\|\hat{x}\|^p - \langle J_p(x_n) - \mu_n B^*(Ax_n - y), \hat{x}\rangle \\ &= \frac{1}{q}\|J_p(x_n) - \mu_n B^*(Ax_n - y)\|^q + \frac{1}{p}\|\hat{x}\|^p - \langle J_p(x_n), \hat{x}\rangle + \mu_n\langle B^*(Ax_n - y), \hat{x}\rangle. \end{aligned}\tag{3.8}$$

Разберем теперь отдельно случай, когда $x_0 = 0$. Тогда $\Delta_0 = 1/p\|\hat{x}\|^p$, и приведенная выше цепочка преобразований упростится:

$$\Delta_1 = \frac{1}{q}\mu_0^q\|B^*y\|^q + \Delta_0 - \mu_0\langle y, B\hat{x}\rangle. \tag{3.9}$$

Поскольку $\mu_0 < \overline{\mu}_0$, получим

$$\mu_0 < q^{p-1}\frac{\|B^*y\|^{p-2}}{\|A\|^{p-1}\|B\|^{p-1}} \leqslant q^{p-1}\frac{\|B^*y\|^{p-2}}{\|B^*A\|^{p-1}} = q^{p-1}\frac{\|B^*y\|^{2p-2}}{\|B^*y\|^p\|B^*A\|^{p-1}} = \frac{q^{p-1}}{\|B^*y\|^p}\left(\frac{\|B^*A\hat{x}\|^2}{\|B^*A\|}\right)^{p-1}.$$

В силу неравенства (2.4) имеем

$$\mu_0 < q^{p-1}\frac{\langle A\hat{x}, B\hat{x}\rangle^{p-1}}{\|B^*y\|^p} = q^{p-1}\frac{\langle y, B\hat{x}\rangle^{p-1}}{\|B^*y\|^p}.$$

Возведя обе части полученного неравенства в степень $q-1=1/(p-1)$ и домножив на $(1/q)\mu_0\|B^*y\|^q$, приходим к неравенству

$$\frac{1}{q}\mu_0^q\|B^*y\|^q<\mu_0\langle y,B\hat{x}\rangle,$$

которое применительно к (3.9) даст нам $\Delta_1<\Delta_0$, и в частности $x_1\neq 0$.

Воспользовавшись теоремами 1(g) и 2 (применительно к пространству X^* и дуальному отображению J_{*q}) и преобразовав равенство (3.8) в случае $n\geqslant 0$ (соответственно $n\geqslant 1$, если $x_0=0$), получаем

$$\Delta_{n+1}\leqslant\frac{1}{q}\Big(\|J_p(x_n)\|^q-q\langle x_n,\mu_nB^*(Ax_n-y)\rangle+\sigma_q\big(J_p(x_n),\mu_nB^*(Ax_n-y)\big)\Big)$$
$$+\frac{1}{p}\|\hat{x}\|^p-\langle J_p(x_n),\hat{x}\rangle+\mu_n\langle Ax_n-y,B\hat{x}\rangle.$$

В силу равенств (3.7) и $\|J_p(x_n)\|^q=\|x_n\|^p$ имеем неравенство

$$\Delta_{n+1}\leqslant\Delta_n-\mu_n\langle A(x_n-\hat{x}),B(x_n-\hat{x})\rangle+\frac{1}{q}\sigma_q\big(J_p(x_n),\mu_nB^*(Ax_n-y)\big).$$

Введем обозначение $\widetilde{R}_n:=\langle A(x_n-\hat{x}),B(x_n-\hat{x})\rangle\geqslant 0$. С учетом неравенства (2.4) установим следующие оценки, которые будут означать эквивалентность в сходимости к нулю последовательностей $\{R_n\}$ и $\{\widetilde{R}_n\}$:

$$\frac{R_n^2}{\|B^*A\|}\leqslant\widetilde{R}_n\leqslant R_n\|x_n-\hat{x}\|.\tag{3.10}$$

Приняв новые обозначения, имеем соотношение

$$\Delta_{n+1}\leqslant\Delta_n-\mu_n\widetilde{R}_n+\frac{1}{q}\sigma_q\big(J_p(x_n),\mu_nB^*(Ax_n-y)\big).\tag{3.11}$$

Оценим теперь подынтегральное выражение в явной формуле (2.3) для вычисления σ_q. За счет выбора μ_n и τ_n согласно правилам (3.5) и (3.4) получаем для всех $t\in[0,1]$

$$\Big(\|J_p(x_n)-t\mu_nB^*(Ax_n-y)\|\vee\|J_p(x_n)\|\Big)\leqslant\|J_p(x_n)\|+\mu_nR_n=\|x_n\|^{p-1}(1+\tau_n)\leqslant 2\|x_n\|^{p-1}$$

и

$$\Big(\|J_p(x_n)-t\mu_nB^*(Ax_n-y)\|\vee\|J_p(x_n)\|\Big)\geqslant\|J_p(x_n)\|=\|x_n\|^{p-1}.$$

Учитывая монотонность функции ρ_{X^*} и формулу (3.5), имеем оценку

$$\sigma_q(J_p(x_n),\mu_nB^*(Ax_n-y))\leqslant qG_q\int\limits_0^1\frac{(2\|x_n\|^{p-1})^q}{t}\rho_{X^*}\left(t\frac{\mu_nR_n}{\|x_n\|^{p-1}}\right)dt$$
$$=2^qqG_q\|x_n\|^p\int\limits_0^1\frac{\rho_{X^*}(t\tau_n)}{t}dt=2^qqG_q\|x_n\|^p\int\limits_0^{\tau_n}\frac{\rho_{X^*}(t)}{t}dt\leqslant 2^qqG_q\|x_n\|^p\rho_{X^*}(\tau_n).$$

Подставляя полученную оценку в (3.11), имеем

$$\Delta_{n+1}\leqslant\Delta_n-\mu_n\widetilde{R}_n+2^qG_q\|x_n\|^p\rho_{X^*}(\tau_n)=\Delta_n-\frac{\tau_n\|x_n\|^{p-1}\widetilde{R}_n}{R_n}\left(1-2^qG_q\frac{\rho_{X^*}(\tau_n)}{\tau_n}\frac{\|x_n\|R_n}{\widetilde{R}_n}\right).$$

В силу соотношений (3.4), (3.3), (3.10) и неравенства

$$\frac{R_n}{\|A\|\|B\|}\leqslant\frac{R_n^2}{R_n\|B^*A\|}\leqslant\frac{\widetilde{R}_n}{R_n}$$

получаем далее необходимое нам рекуррентное соотношение

$$\Delta_{n+1} \leqslant \Delta_n - (1-C)\frac{\tau_n\|x_n\|^{p-1}\widetilde{R}_n}{R_n}. \tag{3.12}$$

Отсюда вытекает, что также и в случае, когда $x_0 \neq 0$, неравенство $\Delta_1 < \Delta_0 \leqslant (1/p)\|\hat{x}\|^p$ (принимая во внимание условия (3.1)) сохраняется. По индукции получаем, что при любом допустимом выборе начального приближения выполняется цепочка неравенств

$$0 \leqslant \ldots \leqslant \Delta_{n+1} \leqslant \Delta_n \leqslant \ldots \leqslant \Delta_1 < \Delta_p(0,\hat{x}) = \frac{1}{p}\|\hat{x}\|^p. \tag{3.13}$$

Из этой цепочки мы получаем, что $x_n \neq 0$ при всех $n \geqslant 1$, и последовательность $\{\Delta_n\}$ монотонно (нестрого) убывает и, значит, сходится и является ограниченной. По теореме 3(b) в таком случае будет ограниченной и последовательность $\{x_n\}$, что в свою очередь означает ограниченность последовательностей $\{J_p(x_n)\}$, $\widetilde{R}_n$ и R_n.

Из соотношения (3.12) получаем неравенства

$$0 \leqslant (1-C)\frac{\tau_n\|x_n\|^{p-1}\widetilde{R}_n}{R_n} \leqslant \Delta_n - \Delta_{n+1}.$$

Просуммировав последние неравенства при $1 \leqslant n \leqslant N$ для произвольного $N \in \mathbb{N}$, имеем

$$0 \leqslant (1-C)\sum_{n=1}^{N}\frac{\tau_n\|x_n\|^{p-1}\widetilde{R}_n}{R_n} \leqslant \sum_{n=1}^{N}(\Delta_n - \Delta_{n+1}) = \Delta_1 - \Delta_{N+1} \leqslant \Delta_1 < \Delta_0,$$

что означает сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\tau_n\|x_n\|^{p-1}\widetilde{R}_n}{R_n} < +\infty.$$

С учетом установленной теперь ограниченности последовательности $\{x_n\}$ неравенства (3.10) означают эквивалентность

$$R_n \longrightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{R}_n \longrightarrow 0.$$

Докажем, что в $\{R_n\}$ можно выбрать сходящуюся к нулю подпоследовательность. Предположим противное. Пусть для некоторых $\varepsilon > 0$ и $n_0 \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства $R_n \geqslant \varepsilon$ и $\widetilde{R}_n \geqslant \varepsilon$ при всех $n \geqslant n_0$. Пусть U — константа такая, что $R_n \leqslant U$. Тогда имеем следующую оценку

$$\frac{\varepsilon}{U}\sum_{n=1}^{+\infty}\tau_n\|x_n\|^{p-1} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\tau_n\|x_n\|^{p-1}\widetilde{R}_n}{R_n} < +\infty,$$

откуда получаем сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tau_n\|x_n\|^{p-1} < +\infty.$$

В силу ограниченности $\{x_n\}$ и неравенства $R_n \geqslant \varepsilon$ последовательности $\{\lambda_n\}$ из (3.3) и $\{\tau_n\}$ из (3.4) ограничены снизу положительной константой. Следовательно, $\{x_n\}$ должна быть сходящейся к нулевому элементу последовательности. Из непрерывности функции $\Delta_p(\cdot,\hat{x})$ (теорема 3(c)) и (3.13) получаем

$$\frac{1}{p}\|\hat{x}\|^p = \Delta_p(0,\hat{x}) = \lim_{n\to+\infty}\Delta_p(x_n,\hat{x}) = \lim_{n\to+\infty}\Delta_n < \frac{1}{p}\|\hat{x}\|^p,$$

противоречие. Таким образом, можно выбрать подпоследовательность $\{\widetilde{R}_{n_k}\}$ таким образом, чтобы

$$\widetilde{R}_{n_k} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty \quad \text{и} \quad \widetilde{R}_{n_k} < \widetilde{R}_n \quad \text{для всех} \quad n < n_k. \tag{3.14}$$

Этим свойством будет обладать и любая ее подпоследовательность. Учитывая ограниченность $\{x_n\}$ и $\{J_p(x_n)\}$, выберем в последовательности $\{x_{n_k}\}$ подпоследовательность, которую для упрощения записи снова обозначим через $\{x_{n_k}\}$ так, чтобы выполнялись следующие свойства:

(C1) последовательность норм $\{\|x_{n_k}\|\}$ сходится;
(C2) последовательность $\{J_p(x_{n_k})\}$ слабо сходится;
(C3) последовательность $\{\widetilde{R}_{n_k}\}$ удовлетворяет свойствам (3.14).

Покажем, что $\{x_{n_k}\}$ является последовательностью Коши. Из равенств (2.5) получаем, что для всех $l, k \in \mathbb{N}$ таких, что $k > l$, выполняется равенство

$$\Delta_p(x_{n_l}, x_{n_k}) = \frac{1}{q}\left(\|x_{n_l}\|^p - \|x_{n_k}\|^p\right) + \langle J_p(x_{n_k}) - J_p(x_{n_l}), x_{n_k}\rangle.$$

За счет свойства (C1) первое слагаемое стремится к нулю при $l \to +\infty$. Во втором слагаемом, которое можно переписать в виде

$$\langle J_p(x_{n_k}) - J_p(x_{n_l}), x_{n_k}\rangle = \langle J_p(x_{n_k}) - J_p(x_{n_l}), \hat{x}\rangle + \langle J_p(x_{n_k}) - J_p(x_{n_l}), x_{n_k} - \hat{x}\rangle,$$

первое слагаемое стремится к нулю при $l \to +\infty$ за счет свойства (C2). Оценим второе слагаемое

$$|\langle J_p(x_{n_k}) - J_p(x_{n_l}), x_{n_k} - \hat{x}\rangle| = \left|\sum_{n=n_l}^{n_k-1} \langle J_p(x_{n+1}) - J_p(x_n), x_{n_k} - \hat{x}\rangle\right|.$$

Рекурсивное определение нашего метода дает соотношение

$$|\langle J_p(x_{n_k}) - J_p(x_{n_l}), x_{n_k} - \hat{x}\rangle| = \left|\sum_{n=n_l}^{n_k-1} \langle \mu_n B^*(Ax_n - y), x_{n_k} - \hat{x}\rangle\right| \leqslant \sum_{n=n_l}^{n_k-1} \mu_n \left|\langle A(x_n - \hat{x}), B(x_{n_k} - \hat{x})\rangle\right|.$$

Подставляя значение для μ_n из (3.5) и применяя обобщенное неравенство Коши — Буняковского для билинейной формы $\langle A(\cdot), B(\cdot)\rangle$, получим

$$|\langle J_p(x_{n_k}) - J_p(x_{n_l}), x_{n_k} - \hat{x}\rangle| \leqslant \sum_{n=n_l}^{n_k-1} \frac{\tau_n \|x_n\|^{p-1}}{R_n} \sqrt{\widetilde{R}_n}\sqrt{\widetilde{R}_{n_k}}.$$

Поскольку при этом суммировании $n < n_k$, то по свойству (3.14) $\widetilde{R}_{n_k} < \widetilde{R}_n$. Окончательно приходим к оценке

$$|\langle J_p(x_{n_k}) - J_p(x_{n_l}), x_{n_k} - \hat{x}\rangle| \leqslant \sum_{n=n_l}^{n_k-1} \frac{\tau_n \|x_n\|^{p-1} \widetilde{R}_n}{R_n}.$$

В правой части получен остаток ряда, сходимость которого была установлена ранее. Таким образом, правая часть неравенства сходится к нулю при $l \to +\infty$, следовательно, к нулю стремится и $\Delta_p(x_{n_l}, x_{n_k})$. По теореме 3(e) получаем, что $\{x_{n_k}\}$ — последовательность Коши и, значит, сходится к некоторому $\tilde{x} \in X$. Докажем, что $\tilde{x} = \hat{x}$, и $\lim_{n\to+\infty} \|x_n - \hat{x}\| = 0$. Мы имеем $R_{n_k} = \|B^*(Ax_{n_k} - y)\|$, где левая часть стремится к нулю при $k \to +\infty$. Поскольку операторы A и B непрерывны, то правая часть стремится к $\|B^*(A\tilde{x} - y)\|$ при $k \to +\infty$. Получаем $B^*A\tilde{x} = B^*y$. В силу эквивалентности этого уравнения уравнению (1.1) приходим к заключению, что $A\tilde{x} = y$. Учитывая $J_p(x_n) \in \overline{\mathcal{R}(B^*A)}$, слабую сходимость $J_p(x_{n_k})$ к $J_p(\tilde{x})$ (теорема 1(g)), слабую замкнутость выпуклого замкнутого множества $\overline{\mathcal{R}(B^*A)}$ в пространстве X^*, заключаем, что $J_p(\tilde{x}) \in \overline{\mathcal{R}(B^*A)}$. Из леммы 4(b) теперь вытекает, что $\tilde{x} = \hat{x}$. За счет непрерывности $\Delta_p(\cdot, \hat{x})$ получим

$$\lim_{k\to+\infty} \Delta_{n_k} = \lim_{k\to+\infty} \Delta_p(x_{n_k}, \hat{x}) = \Delta_p(\hat{x}, \hat{x}) = 0.$$

Поскольку $\{\Delta_n\}$ монотонна, то вся последовательность сходится к нулю. По теореме 3(d) окончательно получаем, что $\{x_n\}$ сильно сходится к $\hat{x}$. Теорема доказана.

3.2. Решение уравнения с приближенными данными

Предположим, что вместо точной правой части $y \in \mathcal{R}(A)$ и операторов $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ и $B \in \mathcal{L}(X,Y^*)$ нам известны последовательности аппроксимаций $\{y_k\} \subseteq Y$, $\{A_l\} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$, $\{B_l\} \subseteq \mathcal{L}(X,Y^*)$ такие, что каждый оператор A_l $(l = 0,1,2,\dots,)$ является B_l-симметричным и B_l-положительным. Будем предполагать, что нам известны монотонно убывающие оценки аппроксимаций

$$\begin{aligned}
&\|y_k - y\| \leqslant \delta_k, \quad \delta_k > \delta_{k+1} > 0, \quad \lim_{k\to+\infty} \delta_k = 0;\\
&\|A_l - A\| \leqslant \eta_l, \quad \eta_l > \eta_{l+1} > 0, \quad \lim_{l\to+\infty} \eta_l = 0;\\
&\|B_l - B\| \leqslant \eta_l.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Предположим также, что при всех $k = 0,1,2,\dots,$

$$y_k \in \bigcap_{l=0}^{+\infty} \mathcal{R}(A_l), \tag{3.16}$$

и при всех $l = 0,1,2,\dots,$

$$\mathcal{R}(B_l^* A_l) \subseteq \mathcal{R}(B^* A). \tag{3.17}$$

Более того, чтобы работать в случае, когда операторы A и B заданы неточно, нам потребуется еще дополнительно знать априорную оценку нормы точного решения $\hat{x}$, т. е. считаем известным такое $R > 0$, что

$$\|\hat{x}\| \leqslant R. \tag{3.18}$$

Положим

$$S := \sup_l \|A_l\|, \quad T := \sup_l \|B_l\|. \tag{3.19}$$

Теперь нам придется несколько видоизменить алгоритм 1, чтобы привести его в соответствие новым исходным данным задачи.

А л г о р и т м 2.

Ш а г 1. Зафиксируем произвольные вещественные $p \in (1,+\infty)$ и $C, D \in (0,1)$. Выберем начальное приближение $x_0 \in X$ таким образом, чтобы выполнялись условия

$$J_p(x_0) \in \overline{\mathcal{R}(B^*A)}, \qquad \Delta_p(x_0,\hat{x}) \leqslant \frac{1}{p}\|\hat{x}\|^p. \tag{3.20}$$

Положим $k_{-1} := 0$, $l_{-1} := 0$ и для $n = 0,1,2,\dots,$ повторяем следующий шаг 2 до тех пор, пока не наступит условие остановки алгоритма.

Ш а г 2. Если для всех $k > k_{n-1}$ и $l > l_{n-1}$ выполняется неравенство

$$D\langle A_l(x_n - \hat{x}), B_l(x_n - \hat{x})\rangle < T(\|x_n\| + R)(\eta_l R + \delta_k), \quad x_0 \neq 0, \tag{3.21}$$

то на этом шаге n мы останавливаем алгоритм. В противном случае найдутся такие $k_n > k_{n-1}$ и $l_n > l_{n-1}$, что

$$D\widetilde{R}_n \geqslant T(\|x_n\| + R)(\eta_{l_n} R + \delta_{k_n}) \text{ в случае, когда } x_0 \neq 0, \tag{3.22}$$

$$D\frac{\|B^*y\|^2}{TS} \geqslant R(\eta_{l_0}\|y_{k_0}\| + T\delta_{k_0}) \text{ в случае, когда } x_0 = 0, \tag{3.23}$$

где $\widetilde{R}_n := \langle A_{l_n}(x_n - \hat{x}), B_{l_n}(x_n - \hat{x})\rangle$. Выбираем параметры согласно следующим правилам:

(1) Если $x_0 = 0$, положим

$$\overline{\mu}_0 := q^{p-1}(1-D)^{p-1}\frac{\|B^*y\|^{2p-2}}{T^{p-1}S^{p-1}\|B_{l_0}^* y_{k_0}\|^p}. \tag{3.24}$$

В качестве параметра шага выберем теперь произвольное $\mu_0 \in (0, \overline{\mu}_0)$.

(2) Для всех $n \geqslant 0$ (соответственно $n \geqslant 1$ в том случае, когда $x_0 = 0$) положим

$$\lambda_n := (\rho_{X^*}(1)) \wedge \left(\frac{C(1-D)\widetilde{R}_n}{2^q G_q \|x_n\| R_n} \right) > 0, \tag{3.25}$$

где $G_q > 0$ — константа из соотношения (2.3), а $R_n := \|B^*_{l_n}(A_{l_n} x_n - y_{k_n})\|$. Выберем такое $\tau_n \in (0, 1]$, что

$$\frac{\rho_{X^*}(\tau_n)}{\tau_n} = \lambda_n. \tag{3.26}$$

Параметр шага итерационного метода положим тогда

$$\mu_n := \frac{\tau_n \|x_n\|^{p-1}}{R_n}. \tag{3.27}$$

Следующее приближение определяем по формулам

$$J_p(x_{n+1}) = J_p(x_n) - \mu_n B^*_{l_n}(A_{l_n} x_n - y_{k_n}), \tag{3.28}$$

$$x_{n+1} = J_{*q}(J_p(x_{n+1})). \qquad \square$$

Отметим, что если правило (3.21) остановки алгоритма выполнено для некоторого n, то при всех $k > k_{n-1}$ и $l > l_{n-1}$

$$\langle A_l(x_n - \hat{x}), B_l(x_n - \hat{x}) \rangle < \frac{T}{D}(\|x_n\| + R)(\eta_l R + \delta_k),$$

где левая часть сходится к $\langle A(x_n - \hat{x}), B(x_n - \hat{x}) \rangle$, а правая часть сходится к нулю при $k, l \to +\infty$. По свойству B-положительности $\langle A(x_n - \hat{x}), B(x_n - \hat{x}) \rangle = 0$ в том и только в том случае, когда $A(x_n - \hat{x}) = 0$, т. е. $Ax_n = y$. Свойства (3.16), (3.17) и (3.20) гарантируют нам, что при всех $n = 0, 1, 2, \ldots$, будет выполнено $J_p(x_n) \in \overline{\mathcal{R}(B^* A)}$. По лемме 4(b) в таком случае $x_n = \hat{x}$. Сформулируем теперь теорему о сходимости алгоритма 2.

Теорема 5. *Пусть пространство X равномерно выпукло и гладко, а Y — произвольное банахово пространство, $y \in \mathcal{R}(A)$. Пусть $A_l \in \mathcal{L}(X, Y)$ — B_l-симметричный и B_l-положительный оператор, где $B_l \in \mathcal{L}(X, Y^*)$, $l = 0, 1, 2, \ldots$. Предполагаем, что выполнены условия аппроксимации* (3.15)–(3.17). *Тогда существует такое $\overline{\mu}_0 > 0$ (см. формулу (3.24)), что при выборе x_0 согласно правилу* (3.20) *и любом $\mu_0 \in (0, \overline{\mu}_0)$ итерационный алгоритм* (3.28) *с правилом выбора параметра μ_n* (3.27) *либо останавливается на конечном шаге на нормальном решении $\hat{x}$, либо задает последовательность итераций $\{x_n\}$, сходящуюся сильно к $\hat{x}$ по норме пространства X.*

Доказательство. Структура доказательства очень похожа на случай с невозмущенными данными. Если правило остановки алгоритма (3.21) никогда не выполняется, то в силу (3.22) и (3.15) при всех n будет выполнено $\widetilde{R}_n > 0$. Снова введем в рассмотрение величину $\Delta_n := \Delta_p(x_n, \hat{x})$. В случае $x_0 = 0$ будем иметь

$$\Delta_1 = \frac{1}{q}\mu_0^q \|B^*_{l_0} y_{k_0}\|^q + \Delta_0 - \mu_0 \langle y_{k_0}, B_{l_0}\hat{x} \rangle.$$

Чтобы обеспечить выполнение условия $\Delta_1 < \Delta_0$, дающее нам убывание последовательности $\{\Delta_n\}$ на первом шаге и обеспечивающее отличие x_1 от нуля, необходимо выбирать μ_0 таким образом, чтобы

$$\frac{1}{q}\mu_0^q \|B^*_{l_0} y_{k_0}\|^q - \mu_0 \langle y_{k_0}, B_{l_0}\hat{x} \rangle < 0.$$

Проведя эквивалентные преобразования, увидим, что это неравенство выполняется при

$$0 < \mu_0 < q^{p-1} \frac{\langle y_{k_0}, B_{l_0}\hat{x}\rangle^{p-1}}{\|B_{l_0}^* y_{k_0}\|^p}. \tag{3.29}$$

Осталось убедиться, что

$$\overline{\mu}_0 \leqslant q^{p-1} \frac{\langle y_{k_0}, B_{l_0}\hat{x}\rangle^{p-1}}{\|B_{l_0}^* y_{k_0}\|^p},$$

тогда (3.29) будет заведомо выполнено. Проведем следующие оценки с учетом соотношений (2.4), (3.15), (3.18), (3.19) и (3.23):

$$\langle y_{k_0}, B_{l_0}\hat{x}\rangle = \langle B_{l_0}^* y_{k_0}, \hat{x}\rangle = \big\langle B_{l_0}^* y_{k_0} - B^* y_{k_0} + B^* y_{k_0} - B^* y + B^* A\hat{x}, \hat{x}\big\rangle$$

$$\geqslant \frac{\|B^* y\|^2}{\|B^* A\|} - \eta_{l_0}\|y_{k_0}\| R - T\delta_{k_0} R \geqslant (1-D)\frac{\|B^* y\|^2}{TS}.$$

Подставляя эту оценку в (3.24), получим требуемое. При всех $n \geqslant 0$ (соответственно $n \geqslant 1$ при $x_0 = 0$) имеем

$$\Delta_{n+1} \leqslant \Delta_n - \mu_n \langle A_{l_n} x_n - y_{k_n}, B_{l_n}(x_n - \hat{x})\rangle + \frac{1}{q}\sigma_q\big(J_p(x_n), \mu_n B_{l_n}^*(A_{l_n} x_n - y_{k_n})\big). \tag{3.30}$$

Используя неравенства (3.15), (3.18), (3.19) и (3.22), имеем оценку

$$\langle A_{l_n} x_n - y_{k_n}, B_{l_n}(x_n - \hat{x})\rangle = \langle A_{l_n} x_n - A_{l_n}\hat{x} + A_{l_n}\hat{x} - A\hat{x} + y - y_{k_n}, B_{l_n}(x_n - \hat{x})\rangle$$

$$\geqslant \widetilde{R}_n - \eta_{l_n} RT(\|x_n\| + R) - \delta_{k_n} T(\|x_n\| + R) = \widetilde{R}_n - T(\|x_n\| + R)(\eta_{l_n} R + \delta_{k_n}) \geqslant (1-D)\widetilde{R}_n.$$

Кроме того, вместе со всеми выкладками, как и в случае точных данных, остается справедливым неравенство

$$\sigma_q(J_p(x_n), \mu_n B_{l_n}^*(A_{l_n} x_n - y_{k_n})) \leqslant 2^q q G_q \|x_n\|^p \rho_{X^*}(\tau_n).$$

Подставляя все эти соотношения и формулу (3.27) в (3.30), приходим к неравенству

$$\Delta_{n+1} \leqslant \Delta_n - \frac{(1-D)\tau_n \|x_n\|^{p-1}\widetilde{R}_n}{R_n}\left(1 - \frac{\rho_{X^*}(\tau_n)}{\tau_n}\frac{2^q G_q \|x_n\| R_n}{(1-D)\widetilde{R}_n}\right).$$

С учетом (3.26) и (3.25) получаем окончательное рекуррентное соотношение

$$\Delta_{n+1} \leqslant \Delta_n - \frac{(1-C)(1-D)\tau_n \|x_n\|^{p-1}\widetilde{R}_n}{R_n}.$$

Далее аналогичными рассуждениями, как и в теореме 4, доказывается, что можно выбрать такую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, что $\{\|x_{n_k}\|\}$ сходится, $\{J_p(x_{n_k})\}$ слабо сходится, $\widetilde{R}_{n_k} \to 0$ при $k \to +\infty$ и $\widetilde{R}_{n_k} < \widetilde{R}_n$ при всех $n < n_k$. Для доказательства фундаментальности так же, как и в точном случае, необходимо доказать, что $\langle J_p(x_{n_j}) - J_p(x_{n_i}), x_{n_j} - \hat{x}\rangle \to 0$ при $i < j$ и $i \to +\infty$. Из оценки

$$|\langle J_p(x_{n_j}) - J_p(x_{n_i}), x_{n_j} - \hat{x}\rangle| = \left|\sum_{n=n_i}^{n_j-1} \mu_n \langle A_{l_n} x_n - y_{k_n}, B_{l_n}(x_{n_j} - \hat{x})\rangle\right|$$

$$\leqslant \sum_{n=n_i}^{n_j-1} \mu_n |\langle A_{l_n} x_n - A_{l_n}\hat{x} + A_{l_n}\hat{x} - A\hat{x} + y - y_{k_n}, B_{l_n}(x_{n_j} - \hat{x})\rangle|$$

$$\leqslant \sum_{n=n_i}^{n_j-1} \mu_n \big(|\langle A_{l_n}(x_n-\hat{x}), B_{l_n}(x_{n_j}-\hat{x})\rangle| + \eta_{l_n} RT(\|x_{n_j}\|+R) + \delta_{k_n} T(\|x_{n_j}\|+R)\big)$$

$$\leqslant \sum_{n=n_i}^{n_j-1} \mu_n \bigg(\sqrt{\widetilde{R}_n}\sqrt{\langle A_{l_n}(x_{n_j}-\hat{x}), B_{l_n}(x_{n_j}-\hat{x})\rangle} + T(\|x_{n_j}\|+R)(\eta_{l_n}R+\delta_{k_n})\bigg)$$

в силу (3.27), свойства (С3) последовательности $\widetilde{R}_{n_k}$ и неравенства (3.22) получаем

$$|\langle J_p(x_{n_j}) - J_p(x_{n_i}), x_{n_j}-\hat{x}\rangle|$$

$$\leqslant \sum_{n=n_i}^{n_j-1} \frac{\tau_n\|x_n\|^{p-1}}{R_n}\bigg(\sqrt{\widetilde{R}_n}\sqrt{\langle A_{l_n}(x_{n_j}-\hat{x}), B_{l_n}(x_{n_j}-\hat{x})\rangle} + \frac{D\widetilde{R}_n(\|x_{n_j}\|+R)}{\|x_n\|+R}\bigg).$$

Оценим отдельно величину $\langle A_{l_n}(x_{n_j}-\hat{x}), B_{l_n}(x_{n_j}-\hat{x})\rangle$. Имеем

$$\big\langle A_{l_n}(x_{n_j}-\hat{x}), B_{l_n}(x_{n_j}-\hat{x})\big\rangle = \big\langle B_{l_n}^* A_{l_n}(x_{n_j}-\hat{x}), x_{n_j}-\hat{x}\big\rangle = \big\langle (B_{l_n}^* A_{l_n} - B_{l_{n_j}}^* A_{l_{n_j}})(x_{n_j}-\hat{x}), x_{n_j}-\hat{x}\big\rangle$$

$$+ \big\langle A_{l_{n_j}}(x_{n_j}-\hat{x}), B_{l_{n_j}}(x_{n_j}-\hat{x})\big\rangle \leqslant \widetilde{R}_{n_j} + \|B_{l_n}^* A_{l_n} - B_{l_{n_j}}^* A_{l_{n_j}}\|(\|x_{n_j}\|+R).$$

Принимая во внимание оценку

$$\|B_{l_n}^* A_{l_n} - B_{l_{n_j}}^* A_{l_{n_j}}\| \leqslant \|B_{l_n}^* A_{l_n} - B_{l_n}^* A_{l_{n_j}}\| + \|B_{l_n}^* A_{l_{n_j}} - B_{l_{n_j}}^* A_{l_{n_j}}\| \leqslant 2T\eta_{l_n} + 2S\eta_{l_n} = \widetilde{U}\eta_{l_n},$$

где $\widetilde{U} = 2T + 2S$, а также свойство (3.14) подпоследовательности $\{\widetilde{R}_{n_j}\}$, получаем

$$\langle A_{l_n}(x_{n_j}-\hat{x}), B_{l_n}(x_{n_j}-\hat{x})\rangle \leqslant \widetilde{R}_n + \widetilde{U}\eta_{l_n}(\|x_{n_j}\|+R).$$

Из неравенства (3.22) извлекаем оценку сверху для η_{l_n}

$$\eta_{l_n} \leqslant \frac{D\widetilde{R}_n}{T(\|x_n\|+R)R} - \frac{\delta_{k_n}}{R} \leqslant \frac{D\widetilde{R}_n}{T(\|x_n\|+R)R} \leqslant \frac{D\widetilde{R}_n}{TR^2}.$$

Пусть $\widetilde{R} > 0$ — константа такая, что $\|x_n\| \leqslant \widetilde{R}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда имеем следующие неравенства:

$$\langle A_{l_n}(x_{n_j}-\hat{x}), B_{l_n}(x_{n_j}-\hat{x})\rangle \leqslant \widetilde{R}_n\Big(1 + \frac{\widetilde{U}D(\widetilde{R}+R)}{TR^2}\Big),$$

$$|\langle J_p(x_{n_j}) - J_p(x_{n_i}), x_{n_j}-\hat{x}\rangle| \leqslant \sum_{n=n_i}^{n_j-1} \frac{\tau_n\|x_n\|^{p-1}}{R_n}\Bigg\{\sqrt{\widetilde{R}_n}\sqrt{\widetilde{R}_n}\sqrt{1 + \frac{\widetilde{U}D(\widetilde{R}+R)}{TR^2}} + \frac{D\widetilde{R}_n(\widetilde{R}+R)}{R}\Bigg\}$$

$$\leqslant \Bigg(\sqrt{1 + \frac{\widetilde{U}D(\widetilde{R}+R)}{TR^2}} + \frac{D(\widetilde{R}+R)}{R}\Bigg) \sum_{n=n_i}^{n_j-1} \frac{\tau_n\|x_n\|^{p-1}\widetilde{R}_n}{R_n}.$$

В правой части получен остаток сходящегося ряда, который стремится к нулю при $i \to +\infty$. Следовательно, $\{x_{n_k}\}$ фундаментальна, поэтому найдется такой $\tilde{x} \in X$, что $x_{n_k} \to \tilde{x}$ при $k \to +\infty$. Далее имеем

$$\widetilde{R}_{n_k} = \langle A_{l_{n_k}}(x_{n_k}-\hat{x}), B_{l_{n_k}}(x_{n_k}-\hat{x})\rangle,$$

откуда в силу свойств (3.14) и (3.15) справедливо равенство

$$\langle A(\tilde{x}-\hat{x}), B(\tilde{x}-\hat{x})\rangle = 0$$

или эквивалентно $A\tilde{x} = y$. Свойства (3.16) и (3.17) обеспечивают нам на каждой итерации включение $J_p(x_n) \in \overline{\mathcal{R}(B^*A)}$, поэтому в пределе получаем по теореме 1(g) и слабой замкнутости выпуклого замкнутого множества, что $J_p(\tilde{x}) \in \overline{\mathcal{R}(B^*A)}$. Далее, как и в теореме 4, приходим к заключению, что $\tilde{x} = \hat{x}$ и $x_n \to \hat{x}$ при $n \to +\infty$. Теорема доказана.

4. Заключение

В представленной работе рассмотрены итерационные методы, аналогичные тем, что предложены в работе [2]. При этом используются схожая методология обоснования и соответствующий математический аппарат. Преимущество итерационного алгоритма (1.3) перед (1.2) состоит в отсутствии необходимости вычисления на каждой итерации оператора J_Y, что, во-первых, уменьшает накладные вычислительные расходы, а во-вторых, избавляет от проблемы выбора однозначной ветви в общем случае многозначного отображения J_Y. При этом, конечно, следует заметить, что класс применимости метода сужается от произвольного линейного непрерывного оператора A до оператора, обладающего свойством B-симметричности и B-положительности, причем вопрос о возможности построения и построении оператора B по заданному оператору A остается открытым. Однако в частном случае, когда $Y = H$ — гильбертово пространство, класс применимости метода (1.3) становится шире, поскольку в этом случае в качестве оператора B можно взять сам оператор A, что будет соответствовать методу (1.2), или даже оператор γA при любом $\gamma > 0$.

Данная работа не претендует на полноту и законченность исследования рассмотренной проблемы, поскольку за ее пределами остались вопросы о методе остановки итераций по невязке при фиксированном уровне погрешности, содержательные численные эксперименты, иллюстрирующие сходимость метода, а также исследования скорости сходимости метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Landweber L.** An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind // Am. J. Math. 1951. Vol. 73. P. 615–624.
2. **Schöpfer F., Louis A. K., Schuster T.** Nonlinear iterative methods for linear ill-posed problems in Banach spaces // Inverse Problems. 2006. Vol. 22. P. 311–329.
3. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
4. **Xu Z.B., Roach G.F.** Characteristic inequalities of uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces // J. Math. Anal. Appl. 1991. Vol. 157. P. 189–210.
5. **Cioranescu I.** Geometry of Banach spaces, duality mappings, and nonlinear problems. Dordrecht: Kluwer, 1990. 260 p.
6. **Дистель Дж.** Геометрия банаховых пространств: избранные главы. Киев: Вища школа, 1980. 216 с.
7. **Lindenstrauss J., Tzafriry L.** Classical Banach spaces, II. New York; Berlin: Springer-Verlag, 1979. 243 p.

Чистяков Павел Александрович
мл. науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: p_a_v_e_l@isnet.ru

Поступила 07.02.2011

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 3 2011

УДК 517.5

ДВУХМАСШТАБНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ АНАЛОГОВ БАЗИСНЫХ СПЛАЙНОВ МАЛЫХ СТЕПЕНЕЙ[1]

В. Т. Шевалдин

Для обобщенных линейных и параболических B-сплайнов с равномерными узлами, построенных с помощью только одной функции $\varphi(x)$, найдены условия, гарантирующие для этих сплайнов выполнение двухмасштабных соотношений.

Ключевые слова: B-сплайн, равномерные узлы, двухмасштабное соотношение.

V. T. Shevaldin. Two-scale relations for analogs of basis splines of small degrees.

For generalized linear and parabolic B-splines with uniform knots constructed with the help of only one function $\varphi(x)$, conditions are found that guarantee the validity of two-scale relations for these splines.

Keywords: B-spline, uniform knots, two-scale relation.

Введение

Различные обобщения полиномиальных сплайн-функций регулярно появляются в современной вычислительной математике. Помимо хорошо известных L-сплайнов (см., например, [1]) отметим истокообразно представимые сплайны [2], функции Рвачева [3], сплайны Леонтьева [4], изогеометрические сплайны Квасова [5], B_φ-сплайны Демьяновича [6] и т. д. Недавно автор [7] предложил еще одно обобщение известной конструкции параболического базисного сплайна (B-сплайна) с равномерными узлами, построенного на основе только одной функции $\varphi \in C^1[-h,h]$ $(h>0)$. В [7] изучались аппроксимативные и формосохраняющие свойства локальных неинтерполяционных сплайнов, являющихся линейными комбинациями сдвигов предложенных B-сплайнов, и в качестве частных случаев были рассмотрены примеры экспоненциальных, эллиптических и гиперболических локальных сплайнов с произвольным расположением узлов.

Хорошо известно, что полиномиальные сплайны сыграли важную роль при возникновении теории всплесков (см., например, [8–10]). А именно, при построении всплесковых (вейвлетных) разложений пространства $L^2(\mathbb{R})$ используется вложенность пространств $\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ на измельчающихся сетках, которая следует из наличия масштабирующих (кратномасштабных) соотношений (см., например, [8, § 4.3]) для базисных функций. Отметим, что далеко не каждая базисная функция $B(x)$ удовлетворяет общему масштабирующему уравнению вида

$$B(x)=\sum_{j\in\mathbb{Z}} h_j B(2x-jh) \qquad (x\in\mathbb{R}),$$

и нахождение таких функций $B(x)$ представляет собой сложную задачу.

В настоящей работе выписаны условия на функцию φ, гарантирующие выполнение аналогов двухмасштабных соотношений для обобщенных параболических B-сплайнов из работы [7] (все определения см. ниже). Кроме того, аналогичная задача рассмотрена для обобщенных

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00347), УрО РАН (проект 09-П-1-1013) в рамках программы Президиума РАН “Математическая теория управления”, а также интеграционного проекта, выполняемого совместно учеными УрО РАН и СО РАН (проект 09-С-1-1007).

линейных B-сплайнов. Приведены примеры конкретных функций φ, для которых выполняются предложенные масштабирующие соотношения. Следует отметить, что результаты этой работы нами получены без применения аппарата гармонического анализа.

1. Обобщенные параболические B-сплайны

Пусть $h > 0$ и $C = C[a,b]$ — пространство непрерывных функций, заданных на отрезке $[a,b]$, с обычным определением нормы

$$\|f\|_C = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Зафиксируем функцию φ, заданную на отрезке $[-2h,2h]$ и удовлетворяющую следующим условиям:

$$\varphi' \in C[-2h,2h], \qquad \varphi(-x) = \varphi(x) \quad (x \in [0,2h]), \qquad \varphi(0) = \varphi'(0) = 0. \tag{1.1}$$

B-сплайн, соответствующий функции φ (см. [7]), определим формулой

$$B_{h,2}(x) = m(h)\begin{cases} \varphi(x), & x \in [0,h],\\ 2\varphi(h) - \varphi(x-h) - \varphi(x-2h), & x \in [h,2h],\\ \varphi(3h-x), & x \in [2h,3h],\\ 0, & x \notin [0,3h]. \end{cases} \tag{1.2}$$

Здесь $m = m(h) > 0$ — нормирующий множитель. В классическом случае нормализованный параболический B-сплайн с равномерными узлами $0,\ h,\ 2h$ и $3h$ (см., например, [11]) получается из этого определения, если положить $\varphi(x) = x^2$ и $m(h) = 1/(2h^2)$. Отметим очевидные свойства функции $B_{h,2}(x)$, вытекающие из условий (1.1):

$$\operatorname{supp} B_{h,2}(x) = [0,3h], \qquad B'_{h,2} \in C(\mathbb{R}), \qquad B_{h,2}(3h-x) = B_{h,2}(x)$$

(т. е. функция $B_{h,2}(x)$ четна относительно точки $x = 3h/2$ — середины носителя). Если потребовать, чтобы было выполнено еще одно условие: функция $\varphi(x)$ не убывает на $[0,h]$, то график $B_{h,2}(x)$ будет представлять собой симметричную относительно $x = 3h/2$ “шапочку” типа параболического B-сплайна с равномерными узлами.

Для таких функций φ в [7] изучались локальные сплайны вида

$$S(x) = S(f,x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} y_j B_{h,2}\Big(x + \frac{3h}{2} - jh\Big),$$

где $y_j = f(jh)$, $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, и было доказано, что они удовлетворяют локально свойству сохранения исходных данных y_j (типа 1-монотонности) в том смысле, что если $y_{l-1} \le y_l \le y_{l+1}$ $(l \in \mathbb{Z})$, то сплайн $S(x)$ не убывает на отрезке $[(l-1/2)h,\ (l+1/2)h]$ $(l \in \mathbb{Z})$.

Наряду с функцией $B_{h,2}(x)$ рассмотрим функцию

$$B_{2h,2}(x) = m(2h)\begin{cases} \varphi(x), & x \in [0,2h],\\ 2\varphi(2h) - \varphi(x-2h) - \varphi(x-4h), & x \in [2h,4h],\\ \varphi(6h-x), & x \in [4h,6h],\\ 0, & x \notin [0,6h], \end{cases}$$

которая получена из функции $B_{h,2}$ формальной заменой параметра h на $2h$. Ясно, что график этой функции, вообще говоря, не может быть получен из графика функции $B_{h,2}$ растяжением в два раза по горизонтальной оси, как это имеет место в классическом полиномиальном случае (см. [8, § 4.3]), поскольку нигде не оговаривается требование однородности функции φ (это одно из ключевых соображений в данном построении). Поэтому при дальнейшем изучении всплесков на основе этих базисных функций вложенность соответствующих подпространств $\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ на измельчающихся сетках следует понимать в несколько ином смысле.

В настоящей работе нас интересует ответ на следующий вопрос: для каких функций φ, удовлетворяющих условиям (1.1), существуют действительные числа A_1, A_2, A_3 и A_4 такие, что при любом $x \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$B_{2h,2}(x) = A_1 B_{h,2}(x) + A_2 B_{h,2}(x-h) + A_3 B_{h,2}(x-2h) + A_4 B_{h,2}(x-3h)? \tag{1.3}$$

Это равенство будем называть масштабирующим (двухмасштабным) соотношением для обобщенного B-сплайна, определяемого формулой (1.2). В последующих формулах выражение $0/0$ будем полагать равным 1.

Теорема 1. *Пусть функция φ удовлетворяет условиям* (1.1). *Равенство* (1.3) *имеет место тогда и только тогда, когда существует такое число $\lambda \in \mathbb{R}$, для которого выполнены следующие равенства*:

$$\lambda = \frac{\varphi(t+h) - 2\varphi(h) + \varphi(t-h) + \varphi(t)}{\varphi(t)} = \frac{\varphi(t-2h) - 2\varphi(h) + \varphi(t-h) + \varphi(t)}{\varphi(t-h)}$$

$$= \frac{2\varphi(2h) - \varphi(t-2h) - \varphi(t) - \varphi(t-h)}{2\varphi(h) - \varphi(t-h)} = \frac{2\varphi(2h) - \varphi(t-h) - \varphi(t+h) - \varphi(t)}{2\varphi(h) - \varphi(t)} \qquad (0 \le t \le h). \tag{1.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу симметрии обобщенного B-сплайна относительно середины носителя сразу можно считать, что $A_1 = A_4$ и $A_2 = A_3$. Рассматривая равенство (1.3) как уравнение относительно коэффициентов A_1, A_2, A_3 и A_4 на каждом из отрезков $[0, h]$, $[h, 2h], \ldots, [5h, 6h]$, получаем, что

$$A_1 = A_4 = \frac{m(2h)}{m(h)},$$

$$A_2 = A_3 = \frac{m(2h)}{m(h)} \frac{[\varphi(t+h) - 2\varphi(h) + \varphi(t-h) + \varphi(t)]}{\varphi(t)}$$

$$= \frac{m(2h)}{m(h)} \frac{[\varphi(2h-t) - 2\varphi(h) + \varphi(t-h) + \varphi(t)]}{\varphi(t-h)}$$

$$= \frac{m(2h)}{m(h)} \frac{[2\varphi(2h) - \varphi(t-2h) - \varphi(t) - \varphi(t-h)]}{2\varphi(h) - \varphi(t-h)} = \frac{m(2h)}{m(h)} \frac{[2\varphi(2h) - \varphi(t-h) - \varphi(t+h) - \varphi(t)]}{2\varphi(h) - \varphi(t)}.$$

Теорема 1 доказана. □

П р и м е р ы. Приведем три конкретные функции φ, удовлетворяющие равенствам (1.4). Для простоты далее считаем, что $m(2h) = m(h)$.

1. Пусть $\varphi(x) = x^2$ (параболические сплайны). Тогда $A_1 = A_4 = 1,\ A_2 = A_3 = 3$ — биномиальные коэффициенты из [8, формула 4.3.4].

2. Пусть $\varphi(x) = \operatorname{ch}\beta x - 1$ $(\beta > 0)$ (экспоненциальные сплайны, соответствующие линейному дифференциальному оператору третьего порядка вида $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_3(D) = D(D^2 - \beta^2)$, D — символ дифференцирования). Тогда $A_1 = A_4 = 1,\ A_2 = A_3 = 1 + 2\operatorname{ch}\beta h$.

3. Пусть $\varphi(x) = 1 - \cos\alpha x$ $(\alpha > 0)$ (тригонометрические сплайны, соответствующие линейному дифференциальному оператору третьего порядка вида $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_3(D) = D(D^2 + \alpha^2)$). Тогда $A_1 = A_4 = 1,\ A_2 = A_3 = 1 + 2\cos\alpha h$.

В связи с примерами 2 и 3 отметим работу автора [12], в которой масштабирующие соотношения более общего вида, чем (1.3), выписаны для B-L-сплайнов, определяемых линейным дифференциальным оператором произвольного порядка с постоянными коэффициентами.

2. Обобщенные линейные B-сплайны

Предложенную схему получения двухмасштабных соотношений можно распространить на обобщенные линейные B-сплайны.

Пусть функция φ задана на отрезке $[0,2h]$ и удовлетворяет условиям

$$\varphi \in C[0,2h], \qquad \varphi(0)=0. \tag{2.1}$$

Обобщенный линейный B-сплайн определяется формулой

$$B_{h,1}(x) = m(h)\begin{cases} \varphi(x), & x\in[0,h],\\ \varphi(2h-x), & x\in[h,2h],\\ 0, & x\notin[0,2h]. \end{cases} \tag{2.2}$$

Здесь $m(h)>0$ — нормирующий множитель. Если положить $\varphi(x)=x$ и $m(h)=1/h$, то формула (2.2) задает нормализованный линейный B-сплайн (см., например, [11]). Ясно, что $\operatorname{supp} B_{h,1}=[0,2h],\ B_{h,1}\in C(\mathbb{R}),\ B_{h,1}(2h-x)=B_{h,1}(x)\ (x\in[0,h])$. Рассмотрим также функцию

$$B_{2h,1}(x) = m(2h)\begin{cases} \varphi(x), & x\in[0,2h],\\ \varphi(4h-x), & x\in[2h,4h],\\ 0, & x\notin[0,4h], \end{cases}$$

которая получена формальной заменой в функции $B_{h,1}$ параметра h на $2h$. Нас интересует вопрос: при каких φ имеет место равенство

$$B_{2h,1}(x) = C_1B_{h,1}(x) + C_2B_{h,1}(x-h) + C_3B_{h,1}(x-2h) \qquad (x\in\mathbb{R}), \tag{2.3}$$

где $C_1,\ C_2$ и C_3 — некоторые действительные числа?

Теорема 2. *Пусть функция φ удовлетворяет условиям* (2.1). *Равенство* (2.3) *имеет место тогда и только тогда, когда существует такое число $\lambda\in\mathbb{R}$, для которого выполнены следующие равенства*:

$$\lambda = \frac{\varphi(t+h)-\varphi(h-t)}{\varphi(t)} = \frac{\varphi(2h-t)-\varphi(t)}{\varphi(h-t)} \qquad (0\le t\le h). \tag{2.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству теоремы 1. При этом

$$C_1 = C_3 = \frac{m(2h)}{m(h)},$$

$$C_2 = \frac{m(2h)}{m(h)}\,\frac{[\varphi(t+h)-\varphi(h-t)]}{\varphi(t)} = \frac{m(2h)}{m(h)}\,\frac{[\varphi(2h-t)-\varphi(t)]}{\varphi(h-t)}\,. \qquad \square$$

П р и м е р ы. Как и в предыдущем разделе, можно привести примеры трех функций φ, удовлетворяющих равенствам (2.4). Снова для простоты считаем, что $m(2h)=m(h)$.

1. Пусть $\varphi(x)=x$ (линейные сплайны). Тогда $C_1=C_3=1,\ C_2=2$ — биномиальные коэффициенты из [8, формула 4.3.4].

2. Пусть $\varphi(x)=\operatorname{sh}\beta x\ (\beta>0)$ (экспоненциальные сплайны второго порядка, соответствующие линейному дифференциальному оператору вида $\mathcal{L}_2=\mathcal{L}_2(D)=D^2-\beta^2$). Тогда $C_1=C_3=1,\ C_2=2\operatorname{ch}\beta h$.

3. Пусть $\varphi(x)=\sin\alpha x\ (\alpha>0)$ (тригонометрические сплайны второго порядка, соответствующие линейному дифференциальному оператору вида $\mathcal{L}_2=\mathcal{L}_2(D)=D^2+\alpha^2$). Тогда $C_1=C_3=1,\ C_2=2\cos\alpha h$.

З а м е ч а н и е. Было бы интересно построить примеры других функций φ, удовлетворяющих соотношениям (1.4) или (2.4). Неясно также, как с помощью только одной функции φ могут быть построены аналоги полиномиальных B-сплайнов более высоких степеней (т. е. формулы типа (1.2)).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.** Теория сплайнов и приложения. М.: Мир, 1972. 318 с.
2. **Шевалдин В.Т.** Оценки снизу поперечников классов истокообразно представимых функций // Тр. МИАН СССР. 1989. Т. 189. С. 185–201.
3. **Рвачев В.А.** Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений и их приложения // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45, № 1. С. 77–103.
4. **Леонтьев В.Л.** Ортогональные финитные функции и численные методы. Ульяновск: УлГУ, 2003. 178 с.
5. **Квасов Б.И.** Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами. М.: Физматлит, 2006. 360 с.
6. **Демьянович Ю.К.** Вейвлет базис B_φ-сплайнов для неравномерной сетки // Мат. моделирование. 2006. Т. 18, № 10. С. 123–126.
7. **Шевалдин В.Т.** Трехточечная схема аппроксимации локальными сплайнами // Тр. Междунар. лет. мат. шк. С. Б. Стечкина по теории функций. Тула: Из-во ТулГУ, 2007. С. 151–156.
8. **Чуи Ч.** Введение в вейвлеты. М.: Мир, 2001. 412 с.
9. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Конструкции всплесков в $W_2^m(\mathbb{R})$ и их аппроксимативные свойства в разных метриках // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 131–167.
10. **Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А.** Теория всплесков. М.: Физматлит, 2005. 616 с.
11. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
12. **Шевалдин В.Т.** Калибровочные соотношения для B-L-сплайнов // Современные проблемы математики: тез. науч. докл. 42-й Всерос. молодеж. шк.-конф./ Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2011. С. 151–153.

Шевалдин Валерий Трифонович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

Поступила 14.03.2011

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 3 2011

Учредитель
Учреждение Российской академии наук
Институт математики и механики Уральского отделения РАН

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134–4889

Редактор Е. Е. Понизовкина
TEX-редактор Н. Н. Моргунова

Фото на с. 8 и с. 13 И. Зиганшина

Отв. за выпуск Л. В. Петрак

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 29.08.11. Формат $60 \times 84^1/_8$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. $37,9$. Уч.-изд. л. 26,8. Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 17, офис 226