

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ**

**ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

Том 14

№ 4

2008

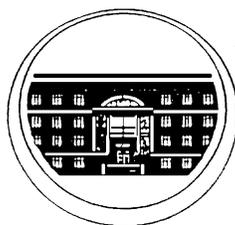
ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДИТ 4 РАЗА В ГОД

ТОМ 14

№ 4

2008



ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Т. 14, № 4. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2008. 192 с.

ISSN 0134-4889

Главный редактор чл.-кор. РАН В. И. Бердышев

Зам. гл. редактора В. В. Кабанов

Редакционная коллегия

Н. В. Величко, Л. П. Власов, М. И. Гусев, А. Р. Данилин,
А. Ф. Клейменов, А. С. Кондратьев, А. И. Короткий, В. И. Максимов,
О. Н. Ульянов (*отв. секретарь*)

Редакционный совет

чл.-кор. РАН В. В. Васин, акад. РАН И. И. Еремин,
акад. РАН А. М. Ильин, акад. РАН Н. Н. Красовский,
чл.-кор. РАН А. А. Махнев, акад. РАН Ю. С. Осипов,
чл.-кор. РАН Ю. Н. Субботин, чл.-кор. РАН В. Н. Ушаков,
чл.-кор. РАН А. Г. Ченцов

Отв. редактор выпуска А. Р. Данилин

© Учреждение Российской академии наук
Институт математики и механики
Уральского отделения РАН, 2008

СОДЕРЖАНИЕ

О. А. Алексеева, А. С. Кондратьев. Распознаваемость по спектру групп ${}^2D_p(3)$ для нечетного простого числа p	3
В. А. Белоногов. О неприводимых характерах группы S_n , полупропорциональных на A_n или на $S_n \setminus A_n$. III.....	12
Ю. И. Бердышев. Об одной нелинейной задаче последовательного сближения с элементами противодействия.....	31
Г. М. Ермакова, В. В. Кабанов, Е. Ш. Сабирзянова, Вэньбинь Го. Свойства графов без порожденных подграфов $K_{1,3}$	43
В. В. Кабанов, А. А. Махнев, Д. В. Падучих. Графы без 3-корон с некоторыми условиями регулярности.....	53
В. В. Кораблева. Примитивные параболические подстановочные представления простых групп $A_l(q)$	70
П. Д. Лебедев, А. А. Успенский. Условия трансверсальности ветвей решения нелинейного уравнения в задаче быстрого действия с круговой индикатрисой.....	82
Н. В. Маслова. Классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных простых классических группах.....	100
А. А. Махнев, Н. В. Чуксина. О хороших парах вершин в реберно регулярных графах с $k = 3b_1 - 1$	119
О. В. Митина. Уравнения Пелля и центральные единицы целочисленных групповых колец групп $PSL_2(q)$, где q нечетно.....	135
С. И. Солодушкин. Стабилизация линейных систем с запаздыванием по времени в координатах и управлении.....	143
Д. В. Хлопин. Ломаные Эйлера и временные шкалы в условиях Каратеодори.....	159
Е. О. Шумакова. Центральные единицы целочисленных групповых колец диэдральных и близких к ним групп.....	172
Е. Е. Ivanko. Exact approximation of average subword complexity of finite random words over finite alphabet.....	185
СВЕТЛАНА ИВАНОВНА ТАРАСОВА	190

УДК 512.542

РАСПОЗНАВАЕМОСТЬ ПО СПЕКТРУ ГРУПП ${}^2D_p(3)$ ДЛЯ НЕЧЕТНОГО ПРОСТОГО ЧИСЛА p ¹

О. А. Алексеева, А. С. Кондратьев

Доказано, что конечная группа с таким же множеством порядков элементов, как у простой группы ${}^2D_p(3)$, где p — нечетное простое число, изоморфна ${}^2D_p(3)$.

Ключевые слова: конечная простая группа, граф Грюнберга — Кегеля, спектр, распознаваемость.

Введение

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\omega(G)$ *спектр* группы G , т. е. множество всех порядков ее элементов. Множество $\omega(G)$ определяет *граф простых чисел* (*граф Грюнберга — Кегеля*) $GK(G)$ группы G , в котором вершинами служат простые делители порядка группы G и две различные вершины p и q соединены ребром тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$. Обозначим число компонент связности графа $GK(G)$ через $s(G)$, а множество его связных компонент — через $\{\pi_i(G) \mid 1 \leq i \leq s(G)\}$; при этом для группы G четного порядка считаем, что $2 \in \pi_1(G)$. Множество $\omega(G)$ частично упорядочено относительно делимости и однозначно определяется подмножеством $\mu(G)$ своих максимальных элементов.

Общее строение конечных групп с несвязным графом простых чисел дается теоремой Грюнберга — Кегеля (см. [1, теорема А]). Конечные простые неабелевы группы с несвязным графом простых чисел описаны в [1, 2].

Результаты о конечных группах с несвязным графом Грюнберга — Кегеля нашли большое применение в исследованиях распознаваемости конечных групп по спектру (см., например, последний обзор В. Д. Мазурова [3]). Конечная группа G называется *распознаваемой* (по спектру), если для любой конечной группы H с условием $\omega(H) = \omega(G)$ имеем $H \cong G$.

Первый этап решения вопроса распознаваемости конечных простых групп с несвязным графом Грюнберга — Кегеля заключается в доказательстве условия квазираспознаваемости, более слабого, чем распознаваемость. Конечная простая неабелева группа P называется *квазираспознаваемой*, если любая конечная группа G с условием $\omega(G) = \omega(P)$ имеет единственный неабелев композиционный фактор и этот фактор изоморфен P . Заметим, что для квазираспознаваемой конечной простой группы положительно решается вопрос 12.39 Ши из “Коуровской тетради” [4] о распознаваемости конечных простых групп по спектру и порядку.

В [5–10] доказана квазираспознаваемость конечной простой группы L в следующих случаях: 1) $s(L) \geq 3$ и L не изоморфна группе A_6 ; 2) $s(L) = 2$ и L изоморфна одной из групп ${}^2D_{2m}(2^k)$, ${}^2D_{2m+1}(2)$ ($m > 1$), $C_{2m}(2^k)$ ($m > 2$), ${}^3D_4(q)$, $F_4(q)$, $E_6(q)$ и ${}^2E_6(q)$ ($q > 2$).

В данной работе продолжается изучение распознаваемости простых групп лиева типа с несвязным графом Грюнберга — Кегеля. Доказана следующая

Теорема. *Если G — конечная группа с условием $\omega(G) = \omega({}^2D_p(3))$, где p — нечетное простое число, то $G \cong {}^2D_p(3)$.*

В случае $p = 3$ теорема была доказана ранее в [11].

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00148), РФФИ-БРФФИ (проект 08-01-90006) и РФФИ-ГФЕН Китая (проект 08-01-92200).

1. Обозначения и вспомогательные результаты

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [12–15]. Если n — натуральное число и p — простое число, то через n_p и $\pi(n)$ обозначаются соответственно p -часть и множество всех простых делителей числа n . Для конечной группы G положим $\pi(G) = \pi(|G|)$ и $\mu_i(G) = \{n \in \mu(G) \mid \pi(n) \subseteq \pi_i(G)\}$. Через ϵ обозначается переменная, принимающая значения $+$ или $-$. Группы $A_n^\epsilon(q)$ обозначают соответственно $A_n(q)$ при $\epsilon = +$ и ${}^2A_n(q)$ при $\epsilon = -$. Обозначим через $t(G)$ наибольшее число вершин в независимых множествах графа $GK(G)$ (множество вершин графа называется *независимым*, если его элементы попарно не смежны), а через $t(r, G)$ — наибольшее число вершин в независимых множествах графа $GK(G)$, содержащих простое число r . Через $\rho(r, G)$ обозначается некоторое независимое множество с наибольшим числом вершин в $GK(G)$, содержащее простое число r .

В доказательстве теоремы используются следующие результаты.

Лемма 1.1 [16, лемма 4]. Пусть P — конечная простая группа с несвязным графом Грюнберга — Кегеля. Тогда

(а) $|\mu_i(P)| = 1$ для $i > 1$, пусть $n_i = n_i(P)$ обозначает единственный элемент из $\mu_i(P)$ для $i > 1$;

(б) для каждого $i > 1$ группа P содержит изолированную абелеву холлову $\pi(n_i)$ -подгруппу X_i , причем эта подгруппа циклическая порядка n_i , за исключением следующих случаев:

(1) $P \cong L_3(4)$, $n_i(P) = 3$ и подгруппа X_i элементарная абелева порядка 9;

(2) $P \cong L_2(q)$, где q — непустая степень нечетного простого числа p , $n_i(P) = p$ и подгруппа X_i элементарная абелева порядка q ;

(в) P , $\pi_1(P)$, n_i для $2 \leq i \leq s(P)$ такие, как в приведенных ниже табл. 1–3, где p обозначает нечетное простое число.

Лемма 1.2. Пусть G — конечная группа с несвязным графом Грюнберга — Кегеля, не изоморфная группе Фробениуса или двойной группе Фробениуса, и P — неабелев композиционный фактор в G . Тогда для каждого $i \in \{2, \dots, s(G)\}$ существует $j \in \{2, \dots, s(P)\}$ такое, что $\mu_i(G) = \{n_j(P)\}$.

Доказательство. Очевидно.

Лемма 1.3 [17, теорема Жигмонди]. Пусть q и n — натуральные числа, $q \geq 2$. Если $(q, n) \neq (2, 6)$, то существует простое число, делящее $q^n - 1$ и не делящее $q^i - 1$ при любом натуральном $i < n$.

В обозначениях леммы 1.3 простое число, делящее $q^n - 1$ и не делящее $q^i - 1$ при любом натуральном $i < n$, называется *примитивным простым делителем* числа $q^n - 1$ и обозначается через $r_n(q)$ или просто через r_n , если q фиксировано. В нашем случае $q = 3$.

Лемма 1.4 [18, лемма 1]. Пусть G — конечная группа, N — нормальная подгруппа в G , G/N — группа Фробениуса с ядром F и циклическим дополнением C . Если $(|F|, |N|) = 1$ и F не содержится в $NC_G(N)/N$, то $s|C| \in \omega(G)$ для некоторого $s \in \pi(N)$.

Лемма 1.5 [19, предложение 10]. Каждый максимальный тор T группы ${}^2D_p(3)$, где p — нечетное простое число, имеет порядок

$$\frac{1}{4}(3^{n_1} - 1)(3^{n_2} - 1) \dots (3^{n_k} - 1)(3^{l_1} + 1)(3^{l_2} + 1)(3^{l_m} + 1)$$

для подходящего разбиения $n_1 + n_2 + \dots + n_k + l_1 + l_2 + \dots + l_m = p$ числа p , где m нечетно.

Лемма 1.6 [20, табл. 4, 6, 8]. Пусть $L = {}^2D_p(3)$, где p — простое число и $p \geq 7$. Тогда

(а) $t(L) = \left\lfloor \frac{3p+4}{4} \right\rfloor$;

(б) $t(2, L) = t(3, L) = 3$, $\rho(2, L) = \{2, r_{2p-2}, r_{2p}\}$ и $\rho(3, L) = \{3, r_{2p-2}, r_{2p}\}$.

Т а б л и ц а 1

Конечные простые группы P с $s(P) = 2$

P	Ограничения на P	$\pi_1(P)$	n_2
A_n	$6 < n = p, p + 1, p + 2$; одно из $n, n - 2$ не просто	$\pi((n - 3)!)$	p
$A_{p-1}(q)$	$(p, q) \neq (3, 2), (3, 4)$	$\pi(q \prod_{i=1}^{p-1} (q^i - 1))$	$\frac{q^p - 1}{(q - 1)(p, q - 1)}$
$A_p(q)$	$(q - 1) (p + 1)$	$\pi(q(q^{p+1} - 1) \prod_{i=1}^{p-1} (q^i - 1))$	$\frac{q^p - 1}{q - 1}$
${}^2A_{p-1}(q)$		$\pi(q \prod_{i=1}^{p-1} (q^i - (-1)^i))$	$\frac{q^p + 1}{(q + 1)(p, q + 1)}$
${}^2A_p(q)$	$(q + 1) (p + 1)$, $(p, q) \neq (3, 3), (5, 2)$	$\pi(q(q^{p+1} - 1) \prod_{i=1}^{p-1} (q^i - (-1)^i))$	$\frac{q^p + 1}{q + 1}$
${}^2A_3(2)$		$\{2, 3\}$	5
$B_n(q)$	$n = 2^m \geq 4$, q нечетно	$\pi(q \prod_{i=1}^{n-1} (q^{2^i} - 1))$	$(q^n + 1)/2$
$B_p(3)$		$\pi(3(3^p + 1) \prod_{i=1}^{p-1} (3^{2^i} - 1))$	$(3^p - 1)/2$
$C_n(q)$	$n = 2^m \geq 2$	$\pi(q \prod_{i=1}^{n-1} (q^{2^i} - 1))$	$\frac{q^n + 1}{(2, q - 1)}$
$C_p(q)$	$q = 2, 3$	$\pi(q(q^p + 1) \prod_{i=1}^{p-1} (q^{2^i} - 1))$	$\frac{q^p - 1}{(2, q - 1)}$
$D_p(q)$	$p \geq 5, q = 2, 3, 5$	$\pi(q \prod_{i=1}^{p-1} (q^{2^i} - 1))$	$\frac{q^p - 1}{q - 1}$
$D_{p+1}(q)$	$q = 2, 3$	$\pi(q(q^p + 1) \prod_{i=1}^{p-1} (q^{2^i} - 1))$	$\frac{q^p - 1}{(2, q - 1)}$
${}^2D_n(q)$	$n = 2^m \geq 4$	$\pi(q \prod_{i=1}^{n-1} (q^{2^i} - 1))$	$\frac{q^n + 1}{(2, q + 1)}$
${}^2D_n(2)$	$n = 2^m + 1, m \geq 2$	$\pi(2(2^n + 1) \prod_{i=1}^{n-2} (2^{2^i} - 1))$	$2^{n-1} + 1$
${}^2D_p(3)$	$5 \leq p \neq 2^m + 1$	$\pi(3 \prod_{i=1}^{p-1} (3^{2^i} - 1))$	$\frac{3^p + 1}{4}$
${}^2D_n(3)$	$n = 2^m + 1 \neq p, m \geq 2$	$\pi(3(3^n + 1) \prod_{i=1}^{n-2} (3^{2^i} - 1))$	$\frac{3^{n-1} + 1}{2}$

Окончание табл. 1

P	Ограничения на P	$\pi_1(P)$	n_2
$G_2(q)$	$2 < q \equiv \epsilon(3), \epsilon = \pm 1$	$\pi(q(q^2 - 1)(q^3 - \epsilon))$	$q^2 - \epsilon q + 1$
${}^3D_4(q)$	q нечетно	$\pi(q(q^6 - 1))$	$q^4 - q^2 + 1$
$F_4(q)$		$\pi(q(q^6 - 1)(q^8 - 1))$	$q^4 - q^2 + 1$
${}^2F_4(2)'$		$\{2, 3, 5\}$	13
$E_6(q)$	$q > 2$	$\pi(q(q^5 - 1)(q^8 - 1)(q^{12} - 1))$	$\frac{q^6 + q^3 + 1}{(3, q - 1)}$
${}^2E_6(q)$		$\pi(q(q^5 + 1)(q^8 - 1)(q^{12} - 1))$	$\frac{q^6 - q^3 + 1}{(3, q + 1)}$
M_{12}		$\{2, 3, 5\}$	11
J_2		$\{2, 3, 5\}$	7
Ru		$\{2, 3, 5, 7, 13\}$	29
He		$\{2, 3, 5, 7\}$	17
McL		$\{2, 3, 5, 7\}$	11
Co_1		$\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$	23
Co_3		$\{2, 3, 5, 7, 11\}$	23
Fi_{22}		$\{2, 3, 5, 7, 11\}$	13
F_5		$\{2, 3, 5, 7, 11\}$	19

Т а б л и ц а 2

Конечные простые группы P с $s(P) = 3$

P	Ограничения на P	$\pi_1(P)$	n_2	n_3
A_n	$n > 6, n = p, p - 2$ просты	$\pi((n - 3)!)$	p	$p - 2$
$A_1(q)$	$3 < q \equiv \epsilon(4), \epsilon = \pm 1$	$\pi(q - \epsilon)$	$\pi(q)$	$(q + \epsilon)/2$
$A_1(q)$	$q > 2, q$ четно	$\{2\}$	$q - 1$	$q + 1$
${}^2A_5(2)$		$\{2, 3, 5\}$	7	11
${}^2D_p(3)$	$p = 2^m + 1 \geq 3$	$\pi(3(3^{p-1} - 1) \prod_{i=1}^{p-2} (3^{2^i} - 1))$	$(3^{p-1} + 1)/2$	$(3^p + 1)/4$
$G_2(q)$	$q \equiv 0(3)$	$\pi(q(q^2 - 1))$	$q^2 - q + 1$	$q^2 + q + 1$

Окончание табл. 2

P	Ограничения на P	$\pi_1(P)$	n_2	n_3
${}^2G_2(q)$	$q = 3^{2m+1} > 3$	$\pi(q(q^2 - 1))$	$q - \sqrt{3q} + 1$	$q + \sqrt{3q} + 1$
$F_4(q)$	q четно	$\pi(q(q^4 - 1)(q^6 - 1))$	$q^4 - q^2 + 1$	$q^4 + 1$
${}^2F_4(q)$	$q = 2^{2m+1} > 2$	$\pi(q(q^3 + 1)(q^4 - 1))$	$q^2 - \sqrt{2q^3} + q - \sqrt{2q} + 1$	$q^2 + \sqrt{2q^3} + q + \sqrt{2q} + 1$
$E_7(2)$		{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 31, 43}	73	127
$E_7(3)$		{2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 37, 41, 61, 73, 547}	757	1093
M_{11}		{2, 3}	5	11
M_{23}		{2, 3, 5, 7}	11	23
M_{24}		{2, 3, 5, 7}	11	23
J_3		{2, 3, 5}	17	19
HiS		{2, 3, 5}	7	11
Suz		{2, 3, 5, 7}	11	13
Co_2		{2, 3, 5, 7}	11	23
Fi_{23}		{2, 3, 5, 7, 11, 13}	17	23
F_3		{2, 3, 5, 7, 13}	19	31
F_2		{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23}	31	47

Т а б л и ц а 3

Конечные простые группы P с $s(P) > 3$

$t(P)$	P	Ограничения на P	$\pi_1(P)$	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6
4	$A_2(4)$		{2}	3	5	7		
	${}^2B_2(q)$	$q=2^{2m+1}>2$	{2}	$q-1$	$q-$ $\sqrt{2q}+1$	$q+$ $\sqrt{2q}+1$		
	${}^2E_6(2)$		{2, 3, 5, 7, 11}	13	17	19		
	$E_8(q)$	$q \equiv 2, 3(5)$	$\pi(q(q^8 - 1)(q^{12} - 1)(q^{14} - 1)(q^{18} - 1)(q^{20} - 1))$	$\frac{q^{10} + q^5 + 1}{q^2 + q + 1}$	$q^8 - q^4 + 1$	$\frac{q^{10} - q^5 + 1}{q^2 - q + 1}$		
	M_{22}		{2, 3}	5	7	11		
	J_1		{2, 3, 5}	7	11	19		
	$O'N$		{2, 3, 5, 7}	11	19	31		
	LyS		{2, 3, 5, 7, 11}	31	37	67		
	Fi'_{24}		{2, 3, 5, 7, 11, 13}	17	23	29		
	F_1		{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 47}	41	59	71		
5	$E_8(q)$	$q \equiv 0, 1, 4(5)$	$\pi(q(q^8 - 1)(q^{10} - 1)(q^{12} - 1)(q^{14} - 1)(q^{18} - 1))$	$\frac{q^{10} + q^5 + 1}{q^2 + q + 1}$	$\frac{q^{10} - q^5 + 1}{q^2 - q + 1}$	$q^8 - q^4 + 1$	$\frac{q^{10} + 1}{q^2 + 1}$	
6	J_4		{2, 3, 5, 7, 11}	23	29	31	37	43

2. Доказательство теоремы

Пусть $L = {}^2D_p(3)$, где p — нечетное простое число. Докажем сначала квазираспознаваемость группы L . Ввиду [6] и леммы 1.1 можно считать, что $s(L) = 2$ и, следовательно, $p \neq 2^m + 1$, в частности, $p \geq 7$. Пусть G — конечная группа с условием $\omega(G) = \omega({}^2D_p(3))$ и $N = F(G)$. Положим $\bar{G} = G/N$. Ввиду теоремы Грюнберга — Кегеля, результата М. Р. Зиновьевой (Алеевой) [21] и лемм 1.1 и 1.2 имеем $\text{Inn}(P) \trianglelefteq \bar{G} \leq \text{Aut}(P)$, где P — конечная простая группа с $s(P) \geq 2$, $\pi(N) \cup \pi(\bar{G}/\text{Inn}(P)) \subseteq \pi_1(G)$ и $n_2(L) = (3^p + 1)/4 \in \{n_i(P) \mid 2 \leq i \leq s(P)\}$. По теореме А. В. Васильева [22] и лемме 1.6 имеем $t(P) \geq t(L) - 1 = [3p/4]$ и $t(2, P) \geq 3$. Так как $p \geq 7$, то $[3p/4] \geq 5$ и, следовательно, $t(P) \geq 5$.

Далее рассматриваются все возможности для P , описываемые в лемме 1.1.

Случай $P \cong A_1(q)$ не возникает, так как ввиду [20, табл. 8] $t(A_1(q)) = 3$.

Если $P \cong {}^2D_r(3)$, где r — нечетное простое число и $r \neq 2^m + 1$, то $(3^p + 1)/4 = (3^r + 1)/4$, откуда $r = p$, что не противоречит утверждению о квазираспознаваемости группы L .

Если P изоморфна одной из спорадических групп или одной из групп ${}^2A_3(2)$, ${}^2F_4(2)'$, ${}^2A_5(2)$, $E_7(2)$, $E_7(3)$, $A_2(4)$, ${}^2E_6(2)$, $E_6(2)$, то непосредственными вычислениями показываем, что соотношения $547 = (3^7 + 1)/4 \leq (3^p + 1)/4 \in \{n_i(P) \mid 2 \leq i \leq s(P)\}$ приводят к противоречию.

(1) Пусть P — конечная простая исключительная группа лиева типа. Ввиду леммы 1.1 и [20, табл. 9] либо $t(P) \in \{5, 6\}$ и группа P изоморфна одной из групп ${}^2G_2(3^{2n+1})$ ($n \geq 1$), ${}^2F_4(2^{2n+1})$ ($n \geq 2$), $F_4(q)$ ($q > 2$), ${}^2E_6(q)$ ($q > 2$), $E_6(q)$ ($q > 2$), либо $t(P) = 11$ и $P \cong E_8(q)$. В первом случае $p = 7$ и непосредственными вычислениями показываем, что соотношения $547 = (3^7 + 1)/4 \leq (3^p + 1)/4 \in \{n_i(P) \mid 2 \leq i \leq s(P)\}$ приводят к противоречию. Во втором случае $p \in \{7, 11\}$ и, следовательно, $n_2(L) \in \{547, 44287\}$.

Легко проверить, что

$$\frac{q^{10} + q^5 + 1}{q^2 + q + 1} < \frac{q^{10} + 1}{q^2 + 1} < q^8 - q^4 + 1 < \frac{q^{10} - q^5 + 1}{q^2 - q + 1}.$$

Поэтому множество $\{n_i(P) \mid 2 \leq i \leq s(P)\}$ принадлежит отрезку $[151, 331]$ при $q = 2$, отрезку $[4561, 8401]$ при $q = 3$ и интервалу $(49981, \infty)$ при $q \geq 4$. Это противоречит включению $n_2(L) \in \{n_i(P) \mid 2 \leq i \leq s(P)\}$.

(2) Пусть $P \cong A_n$, $n > 6$. По лемме 1.1 либо $n \in \{r, r+1, r+2\}$, r — нечетное простое число, одно из $n, n-2$ не простое и $n_2(L) = r$, либо числа $n = r$, $r-2$ простые и $n_2(L) \in \{r, r-2\}$. Ясно, что $n_2(L) \leq n$. По лемме 1.6 числа $r_{2(p-1)}$ и 3 не связаны в $GK(L)$. Но $r_{2(p-1)}$ делит $(3^{p-1} + 1)/2$, поэтому $r_{2(p-1)} \leq (3^{p-1} + 1)/2 = (3^p + 3)/6$, откуда $3 + r_{2(p-1)} \leq (3^p + 21)/6 < (3^p + 1)/4$. Поэтому $3 + r_{2(p-1)} < n$ и, следовательно, числа $r_{2(p-1)}$ и 3 связаны в $GK(P)$; противоречие.

(3) Пусть P изоморфна $B_n(q)$ (q нечетно), $C_n(q)$, ${}^2D_n(q)$ ($n \geq 4$) или ${}^2D_{n+1}(q)$ ($q \in \{2, 3\}$), где везде $n = 2^m \geq 2$. По лемме 1.1 либо $P \cong {}^2D_{n+1}(3)$, $n+1$ — простое число и $(3^p + 1)/4 = (3^{n+1} + 1)/4$, либо

$$\frac{3^p + 1}{4} = \frac{q^n + 1}{(2, q - 1)}.$$

В первом случае $p = n + 1$, что противоречит предположению $p \neq 2^m + 1$. Поэтому выполняется второй случай.

Если q четно, то $(3^p + 1)/4 = q^n + 1$, откуда $q^n = 3(3^{p-1} - 1)/4$; противоречие.

Поэтому q нечетно и $(3^p + 1)/4 = (q^n + 1)/2$. Вычитая 1 из обеих частей последнего равенства, получим $q^n - 1 = 3(3^{p-1} - 1)/2$. Ясно, что 3 не делит q . Поэтому $q \geq 5$. Из [20, табл. 8] получаем $t(P) = 3n/4 + 1 \geq [3p/4]$, откуда $n \geq p - 1$. Имеем $3^{p-1} = 2q^n/3 + 1/3$, поэтому $3^{p-1} \geq 2 \cdot 5^{p-1}/3 + 1/3$. Но тогда $2/3 < (3/5)^{p-1} \leq (3/5)^6 < 1/20$; противоречие.

(4) Пусть $P \cong D_{r+1}(q)$, где r — нечетное простое число и $q \in \{2, 3\}$. Тогда $(3^p + 1)/4 = (q^r - 1)/(2, q - 1)$. Если $q = 3$, то $(3^p + 1)/4 = (3^r - 1)/2$ и, следовательно, $3^r = 3(3^{p-1} + 1)/2$, т. е.

$r = 1$; противоречие. Поэтому $q = 2$ и из [20, табл. 4] получаем $t(2, P) = 2$, что противоречит неравенству $t(2, P) \geq 3$.

(5) Пусть P изоморфна $B_r(q)$ ($q = 3$), $C_r(q)$ ($q \in \{2, 3\}$) или $D_r(q)$ ($r \geq 5$, $q \in \{2, 3, 5\}$), где r — нечетное простое число. Если $q = 3$, то $(3^p + 1)/4 = (3^r - 1)/2$, откуда $3(3^{p-1} + 1) = 2 \cdot 3^r$, т. е. $r = 1$; противоречие. Пусть $q = 5$. Тогда $(3^p + 1)/4 = (5^r - 1)/4$ и, следовательно, $3^p = 5^r - 2$. Из [20, табл. 8] получаем $t(P) = [(3r + 1)/4] \geq [3p/4]$, откуда $r \geq p$. Имеем $3^p = 5^r - 2 \geq 5^p - 2$, откуда $2 < (5/3)^7 < (5/3)^p \geq 1 + 2/3^p < 2$; противоречие.

Итак, $q = 2$ и, следовательно, $(3^p + 1)/4 = 2^r - 1$. Прибавляя 2 к обеим частям последнего равенства, получим $9(3^{p-2} + 1)/4 = 2^r + 1$. Но $2^r + 1 = (3 - 1)^r + 1 = 3^r - r \cdot 3^{r-1} + \dots - C_r^2 \cdot 3^2 + r \cdot 3$, поэтому ввиду $r \geq p \geq 7$ число $2^r + 1$ не делится на 9; противоречие.

(6) Пусть $P \cong A_r^\epsilon(q)$, где r — нечетное простое число, $(q - \epsilon) \mid (r + 1)$ и $(r, q) \neq (3, 3), (5, 2)$ при $\epsilon = -$. Так как $t(P) \geq 5$, то ввиду [20, табл. 8] имеем $r \geq 5$ и $t(P) = [(r + 2)/2] = (r + 1)/2 \geq [3p/4]$, откуда легко видеть, что $r \geq (3p - 5)/2$. Если $r \leq p$, то $p \geq (3p - 5)/2$ и, следовательно, $p \leq 5$; противоречие. Поэтому $r > p$.

По лемме 1.1 имеем

$$\frac{q^r - \epsilon 1}{q - \epsilon 1} = \frac{3^p + 1}{4}.$$

Вычитая 1 из обеих частей последнего равенства, получим

$$\frac{q(q^{r-1} - 1)}{q - \epsilon 1} = \frac{3(3^{p-1} - 1)}{4}.$$

Пусть $q = 2$. Тогда

$$\frac{2^r - \epsilon 1}{2 - \epsilon 1} = \frac{3^p + 1}{4}.$$

Пусть $\epsilon = +$. Тогда $2^r - 1 = (3^p + 1)/4$. Прибавляя 2 к обеим частям последнего равенства, получим $2^r + 1 = 9(3^{p-2} + 1)/4$. Так как $r > 3$, то $(2^r + 1)_3 = 3$; противоречие. Если $\epsilon = -$, то $(2^r + 1)/3 = (3^p + 1)/4$ и, следовательно, $2^{r+2} + 1 = 3^{p+1}$, что противоречит равенству $(2^{r+2} + 1)_3 = 3$.

Если $q = 3$, то

$$\frac{3^{r-1} - 1}{3 - \epsilon 1} = \frac{3^{p-1} - 1}{4},$$

откуда $r \leq p$; противоречие.

Итак, $q \geq 4$. Имеем

$$q^{r-1} - 1 = \frac{3(q - \epsilon 1)}{4q}(3^{p-1} - 1).$$

Так как $3(q - \epsilon 1)/(4q) < 1$, то $q^{r-1} - 1 < 3^{p-1} - 1$, откуда $4^{r-1} \leq q^{r-1} < 3^{p-1}$, т. е. $r < p$; противоречие.

(7) Пусть $P \cong A_{r-1}^\epsilon(q)$, где r — нечетное простое число и $(r, q) \neq (3, 2), (3, 4)$ при $\epsilon = +$. Так как $t(P) \geq 5$, то ввиду [20, табл. 8] либо $t(P) = 5$ и $(r, q, \epsilon) = (11, 2, +)$, либо $r \geq 11$ и $t(P) = (r + 1)/2$. В первом случае $5 \geq [3p/2]$, откуда $p = 7$. Во втором случае так же, как в п. (6), показываем, что $r > p$. В любом случае получаем, что $r \geq p + 2$.

По лемме 1.1 имеем

$$\frac{q^r - \epsilon 1}{(q - \epsilon 1)(r, q - \epsilon 1)} = \frac{3^p + 1}{4}, \quad (2.1)$$

откуда

$$\frac{q^r - \epsilon 1}{q - \epsilon 1} = \frac{(r, q - \epsilon 1)(3^p + 1)}{4}.$$

Вычитая единицу из обеих частей последнего равенства, получим

$$q \frac{q^{r-1} - 1}{q - \epsilon 1} = \frac{(r, q - \epsilon 1)(3^p + 1) - 4}{4},$$

откуда

$$q^{r-1} - 1 = \frac{q - \epsilon 1}{4q} \left[3(r, q - \epsilon 1)(3^{p-1} - 1) + 4((r, q - \epsilon 1) - 1) \right]. \quad (2.2)$$

Если $q = 2$, то так же, как в п. (6), приходим к противоречию.

Пусть $q = 3$. Если $\epsilon = +$, то по (2.1) имеем $(3^r - 1)/2 = (3^p + 1)/4$, откуда $3^r = 3(3^{p-1} + 1)/2$; противоречие. Если $\epsilon = -$, то по (2.1) имеем $(3^r + 1)/4 = (3^p + 1)/4$, откуда $r = p$; противоречие.

Итак, $q \geq 4$. Если $(r, q - \epsilon 1) = 1$, то по (2.2) имеем

$$4^{r-1} - 1 \leq q^{r-1} - 1 < \frac{3(q - \epsilon 1)}{4q} (3^{p-1} - 1) < 3^{p-1} - 1,$$

откуда $r < p$; противоречие. Поэтому $(r, q - \epsilon 1) = r$ и по (2.2) имеем

$$\frac{q^{r-1} - 1}{q - \epsilon 1} = \frac{3r}{4q} (3^{p-1} - 1) + \frac{r - 1}{q}.$$

Если $\epsilon = +$, то $r/q < 1$ и $(q^{r-1} - 1)/(q - \epsilon 1) = q^{r-2} + \dots + q + 1 > q^{r-2}$, откуда $4^{r-2} - 1 \leq q^{r-2} - 1 < 3^{p-1} - 1$, т. е. $r - 2 < p - 1$, $r \leq p$; противоречие. Поэтому $\epsilon = -$. Тогда $(r - 1)/q \leq 1$ и $(q^{r-1} - 1)/(q + 1) = q^{r-2} - (q^{r-2} - 1)/(q + 1) > 4/5 q^{r-2}$. Отсюда $4/5 \cdot q^{r-2} < 3(q + 1)/(4q) \times (3^{p-1} - 1) + 1 < 3^{p-1}$. Так как $r \geq p + 2$, то $r - 2 > p - 1$ и $4/5 \cdot q^{p-1} < 4/5 \cdot q^{r-2}$, откуда $4/5 \cdot 4^{p-1} < 3^{p-1}$ и, следовательно, $5 < (4/3)^6 \leq (4/3)^{p-1} < 5/4$; противоречие.

Итак, $P \cong L$, т. е. квазираспознаваемость группы L доказана.

Покажем, что $N = 1$. Предположим, что $N \neq 1$. Можно считать, что N — элементарная абелева s -группа для некоторого простого числа s из $\pi_1(G)$ и P действует точно и неприводимо на N .

Предположим, что $s \neq 3$. Рассмотрим стабилизатор R одномерного вполне изотропного подпространства в $\Omega_{2p}^-(3)$. Положим $\bar{R} = R/Z(\Omega_{2p}^-(3))$. Можно считать, что $\bar{R} < P$. Тогда по [23, 4.1.20] имеем $\bar{R} \cong U : \Omega_{2(p-1)}^-(3)$, где U — естественный $GF(3)\Omega_{2(p-1)}^-(3)$ -модуль. Ввиду [24, теорема 3] в \bar{R} найдется элемент x порядка $(3^{p-1} + 1)/2$ такой, что $U : \langle x \rangle$ есть группа Фробениуса. Применяя к группе $N : U : \langle x \rangle$ лемму 1.4, получим, что $s(3^{p-1} + 1)/2 \in \omega(L)$. Элемент порядка $s(3^{p-1} + 1)/2$ из L принадлежит некоторому максимальному тору T группы L . По лемме 1.5 $|T| = (3^{p-1} + 1)/2$; противоречие.

Таким образом, $s = 3$. По [25, теорема 1.3] каждый элемент из P фиксирует некоторый неединичный элемент из N , что противоречит лемме 1.1.

Итак, $N = 1$ и, следовательно, $\text{Inn}(P) \trianglelefteq G \leq \text{Aut}(P)$. Предположим, что группа G не изоморфна P . Тогда по [26, теорема 5] $p \neq 2^m + 1$ и G изоморфна группе $P : \langle t \rangle$, где t — инволютивный полевой автоморфизм группы P . Централизатор $C_P(t)$ содержит подгруппу, изоморфную группе $\Omega_{2(p-1)+1}(3)$ (см. [27]). Поэтому $r_{2(p-1)} \in \omega(C_P(t))$. Но по лемме 1.6(б) числа 2 и $r_{2(p-1)}$ не связаны в графе $GK(G)$; противоречие. Таким образом, $G \cong P$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Williams J. S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513.
2. **Кондратьев А.С.** О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
3. **Мазуров В.Д.** Группы с заданным спектром // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. № 36. Сер. Математика и механика. Вып. 7. С. 119–138.
4. Коуровская тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп. 15-е изд. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2002. 172 с.
5. **Алексеева О.А., Кондратьев А.С.** О распознаваемости группы $E_8(q)$ по множеству порядков элементов // Укр. мат. журн. 2002. Т. 54, № 7. С. 1003–1008.

6. **Алексеева О.А., Кондратьев А.С.** Квазираспознаваемость одного класса конечных простых групп по множеству порядков элементов // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 2. С. 241–255.
7. **Васильев А.В., Гречкосеева М.А.** О распознаваемости конечных простых ортогональных групп размерности 2^m , $2^m + 1$ и $2^m + 2$ // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 510–526.
8. **Алексеева О.А., Кондратьев А.С.** Квазираспознаваемость по множеству порядков элементов групп ${}^3D_4(q)$ и $F_4(q)$ для нечетного q // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 5. С. 517–539.
9. **Алексеева О.А.** Квазираспознаваемость по множеству порядков элементов групп ${}^3D_4(q)$, q четно // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 1. С. 3–19.
10. **Кондратьев А.С.** Квазираспознаваемость по множеству порядков элементов групп $E_6(q)$ и ${}^2E_6(q)$ // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 6. С. 1250–1271.
11. **Shi W.J.** A characterization of the finite simple group $U_4(3)$ // Analele Univ. din Timișoara Ser. Științe Mat. 1992. Vol. 30, no. 2-3. P. 318–323.
12. **Aschbacher M.** Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. 274 p.
13. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et al.] Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
14. Семинар по алгебраическим группам. М.: Мир, 1973. 315 с.
15. **Стейнберг Р.** Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975. 262 с.
16. **Кондратьев А.С., Мазуров В.Д.** Распознавание знакопеременных групп простой степени по порядкам их элементов // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 359–369.
17. **Zsigmondy K.** Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. Vol. 3, no. 1. P. 265–284.
18. **Мазуров В.Д.** Характеризация конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 37–53.
19. **Carter R.W.** Centralizers of semisimple elements in the finite classical groups // Proc. London Math. Soc., III. Ser. 1981. Vol. 42, no. 1. P. 1–41.
20. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Критерий смежности в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.
21. **Алеева М.Р.** О конечных простых группах с множеством порядков элементов как у группы Фробениуса или двойной группы Фробениуса // Мат. заметки. 2003. Т. 73, № 3. С. 323–339.
22. **Васильев А.В.** О связи между строением конечной группы и свойствами ее графа простых чисел // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 511–522.
23. **Kleidman P., Liebeck M.** The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. 303 p.
24. **Huppert B.** Singer-Zyklen in klassischen Gruppen // Math. Z. 1970. Vol. 117, no. 1-4. S. 141–150.
25. **Guralnick R.M., Tiep P. H.** Finite simple unisingular groups of Lie type // J. Group Theory. 2003. Vol. 6, no. 3. P. 271–310.
26. **Lucido M.S.** Prime graph components in finite almost simple groups // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1999. Vol. 102. P. 1–22; addendum // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 2002. Vol. 107. P. 189–190.
27. **Stensholt E.** Certain embeddings among finite groups of Lie type // J. Algebra. 1978. Vol. 53, no. 1. P. 136–187.

Кондратьев Анатолий Семенович
д-р физ.-мат. наук, проф.
зав. сектором
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru

Поступила 25.03.2008

Алексеева Оксана Алексеевна
канд. физ.-мат. наук, доц.
Челяб. гуманит. ин-т
e-mail: oksana88888@yandex.ru

УДК 512.54

О НЕПРИВОДИМЫХ ХАРАКТЕРАХ ГРУППЫ S_n , ПОЛУПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ НА A_n ИЛИ НА $S_n \setminus A_n$. III ¹

В. А. Белоногов

Продолжаются исследования, связанные с гипотезой об отсутствии пар полупропорциональных неприводимых характеров у знакопеременных групп A_n . В предыдущих статьях автора эта гипотеза сведена к некоторой гипотезе, связанной с задачей описания пар неприводимых характеров симметрической группы S_n , полупропорциональных на одном из множеств A_n и $S_n \setminus A_n$, и доказаны теоремы, позволяющие исключить из рассмотрения некоторые этапы проверки этой гипотезы. В статье получен новый результат в этом направлении.

Ключевые слова: симметрические группы, знакопеременные группы, неприводимые характеры, полупропорциональность.

Введение

Настоящая статья продолжает исследования работ [1, 2], связанные со следующей гипотезой.

Гипотеза 1. *Знакопеременная группа A_n при любом $n \in \mathbb{N}$ не имеет полупропорциональных неприводимых характеров.*

Напомним, что функции φ и ψ из некоторого множества G в поле \mathbb{C} называются *полупропорциональными*, если они не пропорциональны и для некоторого подмножества M из G пропорциональны ограничения φ и ψ на M и их ограничения на $G \setminus M$; и называются *полупропорциональными на S* , где $S \subseteq G$, если полупропорциональны их ограничения на S .

По теореме 2 из [3] гипотеза 1 равносильна следующей гипотезе, сформулированной в терминах неприводимых характеров группы S_n .

Гипотеза 2. *Если χ^α и χ^β — неприводимые характеры группы S_n ($\alpha, \beta \in P(n)$), полупропорциональные на A_n , то одно из разбиений α и β самоассоциировано.*

Здесь $P(n)$ обозначает множество всех разбиений числа n и χ^α — неприводимый характер группы S_n , соответствующий разбиению $\alpha \in P(n)$; встречающиеся далее обозначения и понятия, связанные с разбиениями, напоминаются в § 1.

В статье [1] предложен план доказательства гипотезы 2 индукцией по числу n . Для такого доказательства оказалось необходимым сформировать не только гипотезу о строении разбиений α и β числа n , удовлетворяющих условию гипотезы 2, но и гипотезу о строении разбиений α и β таких, что неприводимые характеры χ^α и χ^β группы S_n полупропорциональны на разности $S_n \setminus A_n$. На основании работ [4] и [5] в [1] обе эти гипотезы были установлены и объединены в виде следующей гипотезы А. Определение участвующих в ней разбиений $2^k \cdot ()$, $2^k \cdot (1)$, $3^k \cdot \Delta_l$, $3^k \cdot \Sigma_l$ и $3^k \cdot 2 \cdot \Sigma_l$ напоминаются в § 2; там же приводятся изображения диаграмм Юнга разбиений α и β для каждого из случаев гипотезы А. ($(0^k, a, b)$ есть последовательность $(0, \dots, 0, a, b)$ длины $k + 2$; последовательности складываются по координатам.) Для $\varepsilon \in \{1, -1\}$ положим

$$S_n^\varepsilon := \begin{cases} S_n^+ := A_n, & \text{если } \varepsilon = 1, \\ S_n^- := S_n \setminus A_n, & \text{если } \varepsilon = -1. \end{cases}$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00148).

Гипотеза А. Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$ и χ^α полупропорционально χ^β на S_n^ε . Тогда с точностью до перемены мест α и β верно одно из следующих утверждений:

- (1) $\varepsilon = 1$ и выполнено одно из условий:
 (1а) $\alpha = 2^k \cdot () + (3)$ и $\beta = 2^k \cdot () + (0^k, 2, 1)$, где $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;
 (1б) $\alpha = 2^k \cdot (1) + (3)$ и $\beta = 2^k \cdot (1) + (0^k, 1, 2)$, где $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;
 (2) $\varepsilon = -1$ и выполнено одно из условий (везде k, l целые):
 (2а) $\alpha = 3^k \cdot \Delta_l + (4)$ и $\beta = 3^k \cdot \Delta_l + (0^k, 2, 2)$, где $k \geq 0$ и $l \geq 1$;
 (2б) $\alpha = 3^k \cdot \Sigma_l + (4)$ и $\beta = 3^k \cdot \Sigma_l + (0^k, 3, 1)$, где $k \geq 0$ и $l \geq 0$;
 (2в) $\alpha = 3^k \cdot 2 \cdot \Sigma_l + (4)$ и $\beta = 3^k \cdot 2 \cdot \Sigma_l + (0^k, 1, 3)$, где $k \geq 0$ и $l \geq 0$.

После доказательства этой гипотезы доказанными становятся и гипотезы 2 и 1.

Отметим некоторые подтверждения гипотезы А.

Предложение 0.1. Гипотеза А справедлива, если длина главной диагонали хотя бы одного из разбиений α и β меньше трёх.

Это следует из [6, теорема Б] и [7, теорема 1].

Предложение 0.2 [4, теорема]. Гипотеза А справедлива, если хотя бы одно из разбиений α и β самоассоциировано.

Очевидно, доказательство гипотезы А индукцией по числу n достаточно провести в предположении, что выполнено следующее

Условие А. Пусть n — натуральное число такое, что при любом $\tilde{n} < n$ из того, что четвёрка $(\tilde{n}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ удовлетворяет условию гипотезы А на месте $(n, \varepsilon, \alpha, \beta)$, следует, что она удовлетворяет и заключению этой гипотезы на месте $(n, \varepsilon, \alpha, \beta)$.

Согласно теореме А из [8] доказательство гипотезы А можно разделить на две части, в которых выполнены соответственно условия $h_{11}^\alpha = h_{11}^\beta$ и $h_{12}^\alpha = h_{12}^\beta$.

Основным результатом статей [1, 2] является следующая теорема из [2].

Теорема А2. Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$, χ^α полупропорционально χ^β на S_n^ε и выполнено условие А. Предположим, что $h_{11}^\alpha = h_{11}^\beta$. Тогда тройка $(\alpha^{11}, \beta^{11}, \delta)$, где $\delta = (-1)^{h_{11}^\alpha + 1} \varepsilon$, удовлетворяет условию (2) заключения гипотезы А на месте $(\alpha, \beta, \varepsilon)$.

В настоящей статье доказывается с опорой на теорему А2 следующая

Теорема А3. Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$, χ^α полупропорционально χ^β на S_n^ε и выполнено условие А. Предположим, что $h_{11}^\alpha = h_{11}^\beta$. Тогда $\varepsilon = (-1)^{h_{11}^\alpha}$ и пара $(\alpha^{11}, \beta^{11})$ удовлетворяет одному из условий (2б) и (2в) заключения гипотезы А на месте (α, β) .

Используемые в статье обозначения, в основном, стандартны (см., например, [9, 10]). В частности, \mathbb{C} и \mathbb{N} — множества всех комплексных и натуральных чисел соответственно; запись $A := B$ (читается: A по определению равно B) означает, что A есть обозначение для B . Если $\alpha = (a_1, \dots, a_k)$ и $\beta = (b_1, \dots, b_l)$ — конечные последовательности, то $\alpha * \beta$ обозначает последовательность $(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l)$; если $k \geq l$, то $\alpha + \beta = (a_1 + b_1, \dots, a_l + b_l, a_{l+1}, \dots, a_k)$.

Пусть φ и ψ — обобщённые характеры группы G и $S \subseteq G$. Если ограничения φ и ψ на S имеют одно и то же множество корней, то мы говорим, что φ и ψ имеют одно и то же множество корней на S (или являются равнокорневыми на S), и пишем “ $\varphi \sim \psi$ на S ” (знак “ \sim ” можно читать как “эквивалентно”). Если же $|\varphi(s)| = |\psi(s)|$ для всех $s \in S$, то скажем, что φ и ψ модульно равны на S .

Обозначения, связанные с разбиениями и характерами групп S_n , приводятся в § 1.

1. Разбиения и характеры групп S_n и A_n

Множество всех неприводимых характеров и множество всех классов сопряжённых элементов симметрической группы S_n находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством $P(n)$ всех разбиений числа n (см. [10, 11]). Если α — такое разбиение, то χ^α и C_α обозначают соответствующие ему неприводимый характер и класс сопряжённых элементов группы S_n соответственно.

Разбиение натурального числа n есть последовательность $\alpha = (a_1, \dots, a_l)$ натуральных чисел такая, что $a_1 \geq \dots \geq a_l$ и $n = a_1 + \dots + a_l$. i -й член a_i ($1 \leq i \leq l$) разбиения α обозначается через α_i . Считают также, что $\alpha_i = 0$ при $i > l$. *Знаком* разбиения $\alpha \in P(n)$ называется число $\text{sign}(\alpha) := (-1)^{n-l(\alpha)}$, а также знак этого числа. Разбиение α имеет знак $+$ если и только если $C_\alpha \subseteq A_n$. Каждому разбиению $\alpha = (a_1, \dots, a_l) \in P(n)$ сопоставляется его *диаграмма Юнга* (или просто *диаграмма*) $[\alpha] := \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq a_i\}$. Клетки (элементы) вида (i, i) диаграммы образуют её *главную диагональ*. Длина (мощность) главной диагонали диаграммы $[\alpha]$ обозначается через $d(\alpha)$. Говорят, что разбиения α и β *ассоциированы*, если диаграмма одного из них получается из диаграммы другого отражением относительно главной диагонали. Разбиение, ассоциированное с α , обозначается через α' . Разбиение называется *самоассоциированным*, если $\alpha = \alpha'$. Множество всех клеток (i, j) диаграммы $[\alpha]$ таких, что $[\alpha]$ не содержит клетки $(i+1, j+1)$, называется её *границей*.

Крюком диаграммы $[\alpha]$ (или разбиения α) с вершиной (i, j) называется множество $H_{ij}^\alpha := \{(i, j)\} \cup A \cup L$, где $A := \{(i, j+k) \in [\alpha] \mid k \geq 1\}$ (*рука крюка*) и $L := \{(i+k, j) \in [\alpha] \mid k \geq 1\}$ (*нога крюка*). *Косым крюком* с вершиной (i, j) диаграммы $[\alpha]$ называется часть границы диаграммы $[\alpha]$, “вырезанная” крюком H_{ij}^α . Его обозначают через R_{ij}^α или через $R(H_{ij}^\alpha)$. Косые крюки диаграммы $[\alpha]$ — это в точности те связные части её границы, после удаления которых из $[\alpha]$ остаётся диаграмма некоторого разбиения (какого-либо меньшего числа). *Длиной* крюка (косого крюка, диагонали, ноги крюка) называется его (или её) мощность. Положим $h_{ij}^\alpha := |H_{ij}^\alpha|$ ($= |R_{ij}^\alpha|$).

Разбиением числа 0 называют пустую (длины 0) последовательность натуральных чисел, обозначаемую через $()$, и считают, что $[()] = \emptyset$ и $()' = ()$. Далее под *разбиением* понимается разбиение некоторого целого неотрицательного числа.

Пусть $\alpha, \beta, \gamma \in P(n)$ и H есть крюк разбиения α . Введём обозначения:

$\alpha - H$ есть разбиение с диаграммой $[\alpha] \setminus R(H)$;

$\alpha^{ij} := \alpha - H_{ij}^\alpha$;

l_H — длина ноги крюка H ;

$H^\alpha(m)$ — множество всех крюков длины m в $[\alpha]$;

$H^{\alpha, \beta}(m) := H^\alpha(m) \cup H^\beta(m)$; $H^{\alpha, \beta, \gamma}(m) := H^\alpha(m) \cup H^\beta(m) \cup H^\gamma(m)$;

запись $\alpha =' \beta$ означает, что $\alpha \in \{\beta, \beta'\}$ (знак $='$ можно прочесть как “квазиравно”).

Предложение 1.1 ([10, теоремы 2.1.7, 2.1.8, 2.1.11, 2.3.15] или [11, утверждения 2.3, 4.12, 6.7]).

(1) $\text{Cl}(S_n) = \{C_\alpha \mid \alpha \in P(n)\}$, $|\text{Cl}(S_n)| = |P(n)|$.

(2) $\text{Irr}(S_n) = \{\chi^\alpha \mid \alpha \in P(n)\}$, $|\text{Irr}(S_n)| = |P(n)|$.

(3) $\chi^{(n)} = 1_{S_n}$ (*главный характер группы S_n*), $\chi^{(1^n)} = \xi$ — *знакопеременный характер S_n* (*линейный характер с ядром A_n*).

(4) $\chi^{\alpha'} = \chi^\alpha \xi$ для всех $\alpha \in P(n)$ (*характеры χ^α и $\chi^{\alpha'}$ называются ассоциированными*).

(5) χ^α исчезает на $S_n \setminus A_n$ если и только если $\alpha = \alpha'$ ($\alpha \in P(n)$).

(6) *Неприводимые характеры группы S_n принимают лишь целые значения.*

Если множество $\{1, \dots, n\}$ является объединением двух непересекающихся подмножеств Γ и Δ , $g \in S_\Gamma$ и $d \in S_\Delta$, то через $g \times d$ обозначается элемент из S_n , ограничение которого на Γ равно g , а ограничение на Δ равно d .

Предложение 1.2 ([10, теорема 2.4.7] или [11, утверждение 21.1]) Пусть $\alpha \in P(n)$, $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, x — произвольная перестановка элементов $1, \dots, n-k$, и z — циклическая перестановка остальных k элементов $n-k+1, \dots, n$. Тогда

$$\chi^\alpha(z \times x) = \sum_{(i,j) \in [\alpha], h_{ij}^\alpha = k} (-1)^{l_{ij}} \chi^{\alpha^{ij}}(x),$$

где l_{ij} — длина ноги крюка H_{ij}^α (считается, что $\chi^0(x) = 1$, а пустая сумма равна нулю).

2. Свойства разбиений α и β из заключения гипотезы А

О п р е д е л е н и е 2.1. Пусть $m \in \{2, 3\}$. m -накрытием разбиения Θ длины $s \geq 0$ называется разбиение

$$m.\Theta := (\Theta_1 + m + 1, \Theta_1 + 1, \Theta_2 + 1, \dots, \Theta_s + 1, 1^m) \quad (m.() = (m + 1, 1^m)).$$

Положим $m^0.\Theta := \Theta$ и $m^k.\Theta := m.(m^{k-1}.\Theta)$ для натуральных k .

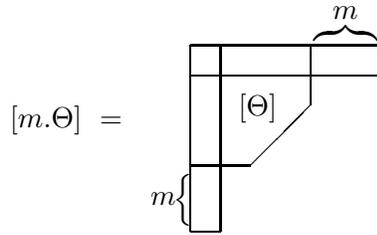


Рис. 2.1.

Легко представить себе вид диаграмм $2^k.()$, $2^k.(1)$ и соответствующих им диаграмм $[\alpha]$ и $[\beta]$ из заключения гипотезы А. При $\gamma \in \{2^k.(), 2^k.(1)\}$ положим:

$$\gamma + (\tilde{3}) := \begin{cases} 2^k.() + (0^k, 2, 1), & \text{если } \gamma = 2^k.(), \\ 2^k.(1) + (0^k, 1, 2), & \text{если } \gamma = 2^k.(1). \end{cases}$$

На рис. 2.2 изображены диаграммы разбиений $\beta = \gamma + (\tilde{3})$ при $\gamma = 2^2.()$ и $\gamma = 2^2.(1)$ соответственно. Точками помечены их единственные косые крюки длины 3.

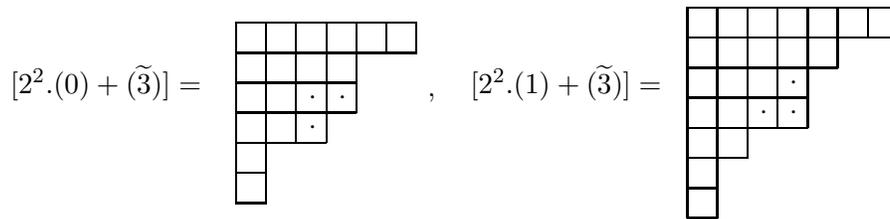


Рис. 2.2.

О п р е д е л е н и е 2.2. Определим разбиения

$$\Delta_l := (l, l-1, \dots, 2, 1) \text{ при любом } l \in \mathbb{N}, \text{ и}$$

$$\Sigma_l := ((2l)^2, (2l-2)^2, \dots, 2^2) \text{ при любом } l \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (\Sigma_0 = ()).$$

При γ , совпадающем с одним из разбиений $3^k.\Delta_l$, $3^k.\Sigma_l$ и $3^k.2.\Sigma_l$, положим:

$$\gamma + (\tilde{4}) := \begin{cases} 3^k.\Delta_l + (0^k, 2, 2), & \text{если } \gamma = 3^k.\Delta_l; \\ 3^k.\Sigma_l + (0^k, 3, 1), & \text{если } \gamma = 3^k.\Sigma_l; \\ 3^k.2.\Sigma_l + (0^k, 1, 3), & \text{если } \gamma = 3^k.2.\Sigma_l. \end{cases}$$

При $k = 0$ вид диаграмм $\gamma + (\tilde{4})$ (т. е. диаграмм $[\beta]$ из условий (2а)–(2в) гипотезы А) изображён на рис. 2.3; их единственные косые крюки длины 4 помечены точками. (После их удаления остаются диаграммы разбиений Δ_l , Σ_l и $2.\Sigma_l$.)

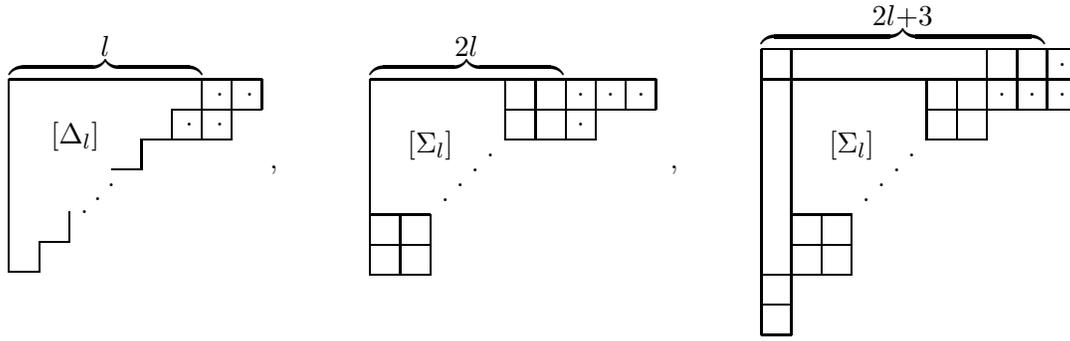


Рис. 2.3.

Легко представить себе вид диаграмм разбиений $\alpha = \gamma + (4)$ и $\beta = \gamma + (\tilde{4})$ и при $k > 0$. Очевидно, в этом случае

$$\beta^{11} = (3^k \cdot \gamma + (\tilde{4}))^{11} = 3^{k-1} \cdot \gamma + (\tilde{4}) \quad \text{и} \quad (3 \cdot \gamma + (\tilde{4}))^{11} = \gamma + (\tilde{4}).$$

Предложение 2.1. Пусть γ — самоассоциированное разбиение некоторого целого неотрицательного числа. Равносильны условия:

- (1) γ не имеет крюков длины 3;
- (2) γ не имеет крюков, длина которых делится на 3;
- (3) γ есть одно из разбиений $2^k \cdot ()$ и $2^k \cdot (1)$ при некотором $k \geq 0$.

Доказательство. Равносильность условий (1) и (3) — это лемма 2.2 из [4]. Равносильность условий (2) и (3) непосредственно следует из леммы 2.1 в [4].

Предложение 2.2 [1, предложение 2.2]. Разбиения α и β из условий (1а) и (1б) гипотезы А:

- (1) имеют точно по одному крюку длины 3;
- (2) не имеют крюков длины $3t$ при натуральных $t \geq 2$.

Предложение 2.3 [5, теорема 2.1, следствие 3.1]. Пусть γ — самоассоциированное разбиение некоторого числа. Равносильны условия:

- (1) γ не имеет крюков длины 4;
- (2) γ не имеет крюков, длина которых делится на 4;
- (3) γ есть одно из разбиений $3^k \cdot \Delta_l$, $3^k \cdot \Sigma_l$ и $3^k \cdot 2 \cdot \Sigma_l$ при некоторых k, l .

Предложение 2.4 [1, предложение 2.6]. Пусть α и β — разбиения какого-либо из условий (2а)–(2в) гипотезы А. Тогда:

- (1) α и β имеют точно по одному крюку длины 4;
- (2) α и β не имеют крюков длины $4t$ при натуральных $t \geq 2$.

Существенным для доказательства теоремы В является следующее предложение, проясняющее расположение крюков чётной и нечётной длины в диаграммах разбиений γ , $\gamma + (4)$ и $\gamma + (\tilde{4})$ при $\gamma = 3^k \cdot \Delta_l$. В частности, из него видно, что число крюков чётной длины в таких диаграммах относительно мало. Поскольку при $k = 0$ ситуация очевидна, будем предполагать, что $k \geq 1$.

Предложение 2.5. Пусть $\gamma := 3^k \cdot \Delta_l$, где $k \geq 1$. Тогда:

- (1) h_{ij}^γ чётно \iff либо $i = k + l - 1 + 3z$ при $1 \leq z \leq k$, либо $j = k + l - 1 + 3z$ при $1 \leq z \leq k$;
- (2) максимальная чётная длина крюка в γ равна $4k - 2$ и γ имеет точно два крюка $H_{k+l+2,1}^\gamma$ и $H_{1,k+l+2}^\gamma$ такой длины;

(3) $h_{ij}^{\gamma+(4)}$ чётно \iff либо $i = k + l - 1 + 3z$ при $1 \leq z \leq k$, либо $j = k + l - 1 + 3z$ при $1 \leq z \leq k + 2$;

(4) максимальная и предмаксимальная чётные длины крюков в $\gamma + (4)$ равны $4k + 2$ и $4k - 2$, $H^{\gamma+(4)}(4k + 2) = \{H_{1,k+l+2}^{\gamma+(4)}\}$ и $H^{\gamma+(4)}(4k - 2) = \{H_{k+l+2,1}^{\gamma+(4)}\}$;

(5) $h_{ij}^{\gamma+(\tilde{4})}$ чётно \iff либо $i = k + l - 1 + 3z$ при $1 \leq z \leq k$, либо $j = k + l - 1$ или $j = k + l - 1 + 3z$ при $2 \leq z \leq k$;

(6) максимальная и предмаксимальная чётные длины крюков в $\gamma + (\tilde{4})$ равны $4k + 2$ и $4k - 2$, $H^{\gamma+(\tilde{4})}(4k + 2) = \{H_{1,k+l-1}^{\gamma+(\tilde{4})}\}$ и $H^{\gamma+(\tilde{4})}(4k - 2) = \{H_{k+l+2,1}^{\gamma+(\tilde{4})}\}$.

Доказательство следует из внимательного рассмотрения обсуждаемых диаграмм. Для иллюстрации см. рис. 2.4, где взято $k = 3$ и $l = 3$. В каждой клетке диаграммы указана длина крюка с вершиной в этой клетке. Числа, записанные в строках и столбцах, помеченных стрелками, чётны; все остальные числа нечётны. Диаграмма $[\gamma + (4)]$, очевидно, получается из $[\gamma]$ увеличением чисел первой строки на 4 и добавлением к первой строке ещё четырёх клеток с числами 4, 3, 2, 1.

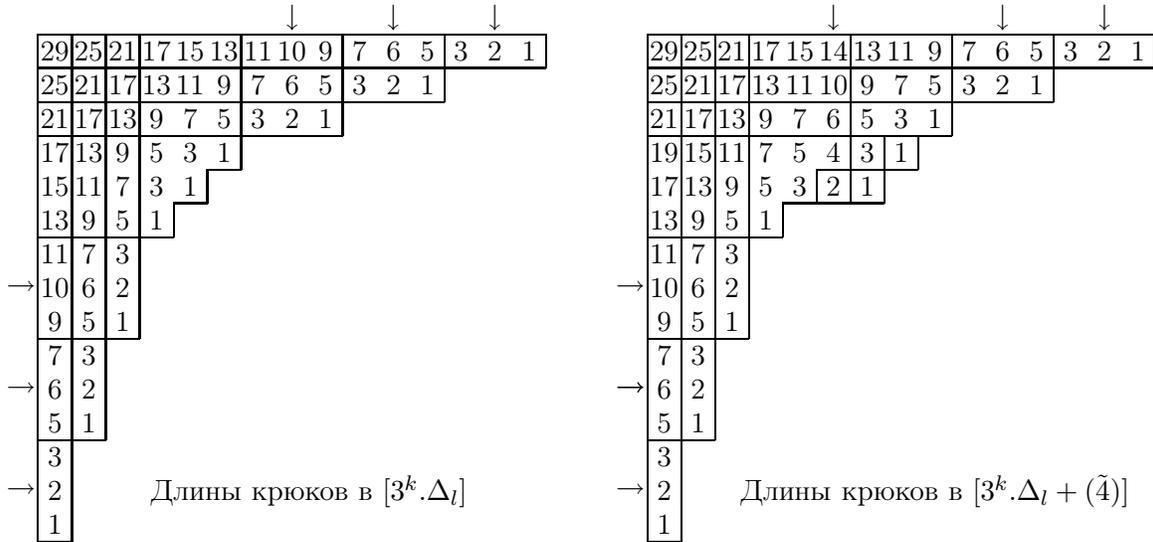


Рис. 2.4.

3. Вспомогательные результаты

Предложение 3.1 [1, предложение 3.3]. Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$ и $\varepsilon \in \{1, -1\}$. Равносильны утверждения:

- (1) характеры χ^α и χ^β пропорциональны на S_n^ε ;
- (2) выполнено по крайней мере одно из условий:
 - (2а) $\alpha = \beta$;
 - (2б) $\varepsilon = -1$, $\alpha = \alpha'$ и $\beta = \beta'$.

Предложение 3.2 [1, предложение 3.4]. Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$ и m — длина некоторого крюка из $[\alpha]$ или $[\beta]$. Положим $\delta := (-1)^{m+1}\varepsilon$.

- (1) Если $\chi^\alpha \sim \chi^\beta$ на S_n^ε , то

$$\sum_{H \in H^\alpha(m)} (-1)^{l_H} \chi^{\alpha-H} \sim \sum_{K \in H^\beta(m)} (-1)^{l_K} \chi^{\beta-K} \quad \text{на } S_{n-m}^\delta.$$

(2) Если χ^α и χ^β полупропорциональны на S_n^ε , то

$$\sum_{H \in \mathbb{H}^\alpha(m)} (-1)^{l_H} \chi^{\alpha-H} \text{ и } \sum_{K \in \mathbb{H}^\beta(m)} (-1)^{l_K} \chi^{\beta-K} \text{ модульно равны на } S_{n-m}^\delta.$$

(Напомним, что пустая сумма считается равной нулю.)

Предложение 3.3 [1, предложение 3.5]. Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$ и $\chi^\alpha \sim \chi^\beta$ на S_n^ε , где $\varepsilon \in \{1, -1\}$. Предположим, что $[\alpha]$ имеет единственный крюк H некоторой длины m , а $[\beta]$ не имеет крюков длины m . Тогда

$$\alpha - H = (\alpha - H)' \quad \text{и} \quad \varepsilon = (-1)^m.$$

Предложение 3.4 [1, предложение 3.6]. Пусть χ^α и χ^β — неприводимые характеры группы S_n , полупропорциональные на S_n^ε ($\alpha, \beta \in P(n)$). Предположим, что диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ имеют точно по одному крюку H и K соответственно некоторой длины m . Тогда

$$\chi^{\alpha-H} \text{ и } \chi^{\beta-K} \text{ модульно равны на } S_{n-m}^\delta, \text{ где } \delta = (-1)^{m+1}\varepsilon$$

(в частности, они пропорциональны или полупропорциональны на S_{n-m}^δ).

Предложение 3.5 ([1, предложение 3.7] и [12, теорема]). Пусть $\chi^\alpha \sim \chi^\beta$ на S_n^ε , где $\alpha, \beta \in P(n)$ и $\varepsilon \in \{1, -1\}$. Предположим, что $[\alpha]$ имеет хотя бы один крюк некоторой длины m , а $[\beta]$ не имеет крюков длины m . Тогда верно одно из утверждений:

(1) $\varepsilon = (-1)^m$, α имеет единственный крюк H длины m и разбиение $\alpha - H$ самоассоциировано;

(2) $\varepsilon = -1$, $\alpha = \alpha'$ и $\beta = \beta'$ (в частности, χ^α и χ^β тождественно равны нулю на S_n^ε и, следовательно, не полупропорциональны на S_n^ε).

Предложение 3.6 [1, предложение 3.8]. Пусть A и B — подмножества из $P(n)$, m — длина крюка некоторого разбиения из $A \cup B$ и $\delta \in \{1, -1\}$.

(1) Если $\sum_{\alpha \in A} n_\alpha \chi^\alpha \sim \sum_{\beta \in B} n_\beta \chi^\beta$ на S_n^δ , где n_α, n_β — целые числа, то

$$\sum_{\alpha \in A} n_\alpha \sum_{H \in \mathbb{H}^\alpha(m)} (-1)^{l_H} \chi^{\alpha-H} \sim \sum_{\beta \in B} n_\beta \sum_{K \in \mathbb{H}^\beta(m)} (-1)^{l_K} \chi^{\beta-K} \text{ на } S_{n-m}^\sigma, \text{ где } \sigma = (-1)^{m+1}\delta.$$

(2) Утверждение (1) останется верным, если в нём знак \sim заменить (оба раза) на “модульно равно”.

Предложение 3.7. Пусть χ^α и χ^β — неприводимые характеры группы S_n , полупропорциональные на S_n^ε ($\alpha, \beta \in P(n)$, $\varepsilon = \pm 1$) и выполнено условие А. Предположим, что диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ имеют точно по одному крюку H^α и H^β соответственно некоторой длины m . Положим $\tilde{\alpha} := \alpha - H^\alpha$ и $\tilde{\beta} := \beta - H^\beta$. Тогда верно одно из следующих утверждений:

(а) $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$;

(б) $\varepsilon = (-1)^m$, $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}'$ и $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}'$;

(в) $\varepsilon = (-1)^{m+1}$ и с точностью до перемены мест $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ имеем $\tilde{\alpha} = \Gamma + (3)$ и $\tilde{\beta} = \Gamma + (\tilde{3})$, где Γ есть $2^k \cdot ()$ или $2^k \cdot (1)$ при $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

(г) $\varepsilon = (-1)^m$ и с точностью до перемены мест $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ имеем $\tilde{\alpha} = \Theta + (4)$ и $\tilde{\beta} = \Theta + (\tilde{4})$, где Θ есть $3^k \cdot \Delta_l$, $3^k \cdot \Sigma_l$ или $3^k \cdot 2 \cdot \Sigma_l$ при некоторых k, l .

Доказательство. Для χ^α и χ^β выполнены условия предложения 3.4 и, следовательно, характеры $\chi^{\tilde{\alpha}}$ и $\chi^{\tilde{\beta}}$ пропорциональны или полупропорциональны на S_{n-m}^δ , где $\delta = (-1)^{m+1}\varepsilon$. Если они пропорциональны на S_{n-m}^δ , то по предложению 3.1 выполнено одно из условий (а) и (б). Предположим, что они полупропорциональны на S_{n-m}^δ . Тогда согласно условию А для $(\delta, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ выполнено заключение гипотезы А на месте $(\varepsilon, \alpha, \beta)$, т. е. верно одно из утверждений (в) и (г).

Предложение 3.7 доказано.

4. Доказательство теоремы А3. Случай $k = 0$

По условию теоремы А3 χ^α полупропорционально χ^β на S_n^ε , где $\varepsilon = \pm 1$, выполнено условие А и

$$h_{11}^\alpha = h_{11}^\beta. \quad (4.1)$$

Согласно теореме А2 для тройки $(\alpha^{11}, \beta^{11}, \delta)$, где $\delta = (-1)^{h_{11}^\alpha + 1} \varepsilon$, справедливо утверждение (2) гипотезы А на месте $(\alpha, \beta, \varepsilon)$. Поэтому $\delta = -1$ и, следовательно,

$$\varepsilon = (-1)^{h_{11}^\alpha}. \quad (4.2)$$

В противоречие с утверждением теоремы А3 предположим, что выполнено утверждение (2а) гипотезы А, т. е. (с точностью до перемены мест α и β и замены разбиения ассоциированным)

$$\alpha^{11} = \gamma + (4) \text{ и } \beta^{11} = \gamma + (\tilde{4}), \text{ где } \gamma = 3^k \cdot \Delta_l \text{ при некоторых } k, l.$$

В этом параграфе мы рассмотрим случай, когда

$$k = 0, \text{ т. е. } \gamma = \Delta_l, \text{ где } l \geq 1. \quad (4.3)$$

Тогда диаграммы разбиений α и β имеют вид, изображённый на рис. 4.1, где $\{a, b, c, d\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ (здесь взято $l = 6$).

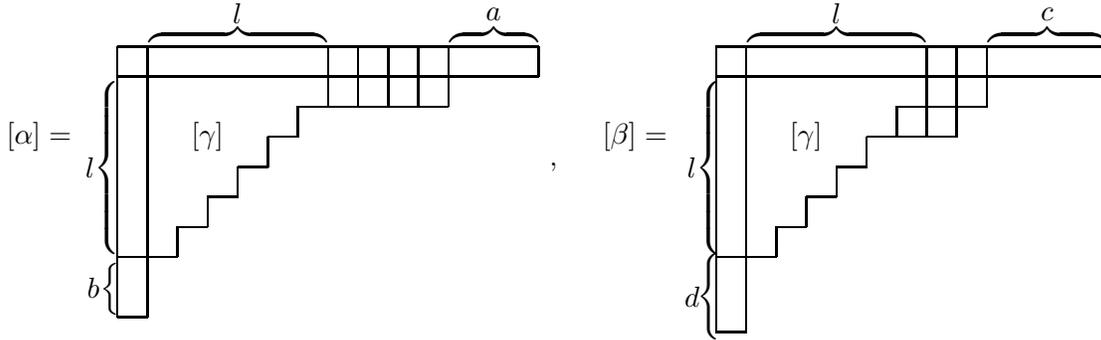


Рис. 4.1.

По (4.1) $5 + 2l + a + b = 3 + 2l + c + d$, откуда

$$2 + a + b = c + d, \quad (4.4)$$

и по (4.2)

$$\varepsilon = (-1)^{1+a+b} = (-1)^{1+c+d}. \quad (4.5)$$

Так как по предложению 0.1 $d(\alpha) \geq 3$, то

$$l \geq 3. \quad (4.6)$$

Подсчитаем (учитывая (4.6)) длины некоторых крюков в $[\alpha]$ и $[\beta]$:

$$\begin{aligned} h_{12}^\alpha &= 2l + a + 4, & h_{12}^\beta &= 2l + c + 2, \\ h_{13}^\alpha &= 2l + a + 2, & h_{13}^\beta &= 2l + c, \\ h_{14}^\alpha &= 2l + a, & h_{14}^\beta &= \begin{cases} 2l + c - 2 & \text{при } l \geq 4, \\ 2l + c - 1 & \text{при } l = 3, \end{cases} \\ h_{21}^\alpha &= 2l + b + 4, & h_{21}^\beta &= 2l + d + 2, \\ h_{31}^\alpha &= 2l + b - 2, & h_{31}^\beta &= 2l + d, \\ h_{22}^\alpha &= 2l + 3, & h_{22}^\beta &= 2l + 1, \\ h_{32}^\alpha &= 2l - 3, & h_{32}^\beta &= 2l - 1. \end{aligned}$$

Далее нам потребуются некоторые диаграммы вида $[\alpha^{ij}]$ и $[\beta^{ij}]$ (рис. 4.2–4.4).

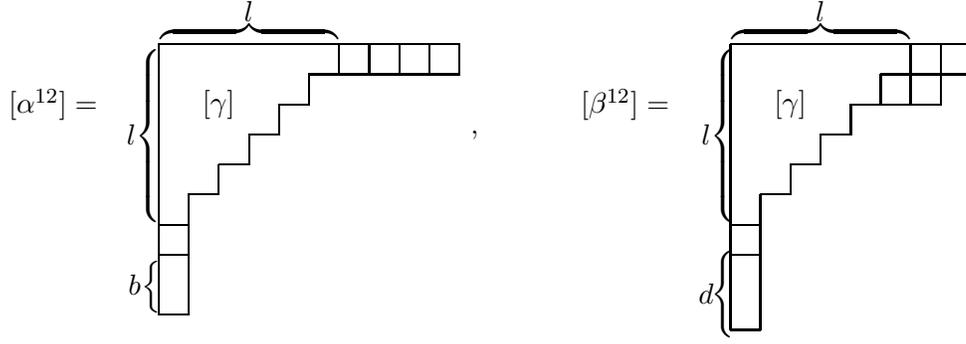


Рис. 4.2.

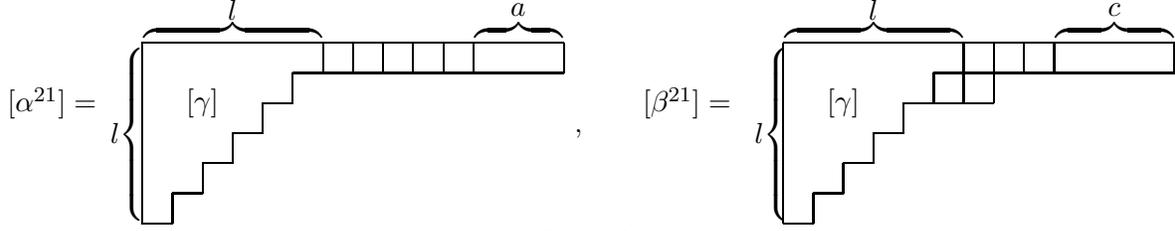


Рис. 4.3.

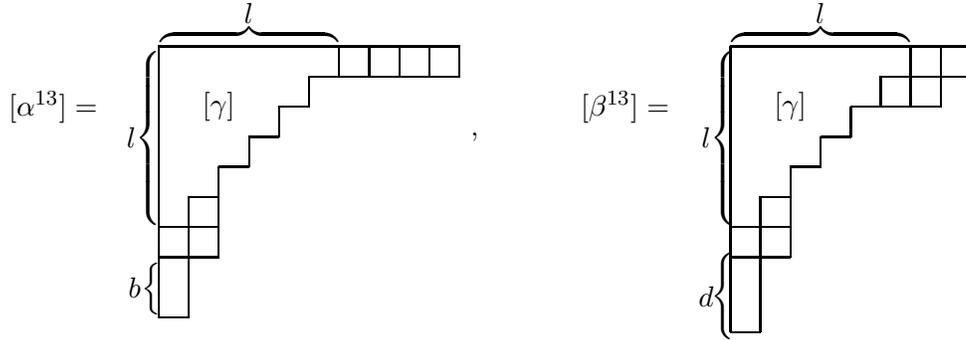


Рис. 4.4.

Поскольку, как видно из рис. 4.2–4.4, разбиения α^{21} , α^{13} , β^{12} , β^{21} не самоассоциированы, то согласно предложению 3.5

$$[\alpha] \text{ имеет крюки длины } 2l + c + 2 \text{ и } 2l + d + 2, \quad (4.7)$$

$$[\beta] \text{ имеет крюк длины } 2l + b + 4 \text{ и } 2l + a + 2. \quad (4.8)$$

Покажем сначала, что случай $b > a$ невозможен. Действительно, в этом случае $H^\alpha(2l + b + 4) = \{H_{21}^\alpha\}$, а из (4.7) и (4.8) следует, что $b + 2 = \max\{c, d\}$. При этом должно быть $c \neq d$, так как при $b + 2 = c = d$ из (4.4) следует, что $b + 2 = c = d = a$, в противоречие с тем, что $b > a$. Следовательно,

$$H^{\alpha, \beta}(2l + b + 4) = \{H_{21}^\alpha, H_{ij}^\beta\}, \text{ где } (i, j) = \begin{cases} (12) & \text{при } c > d, \\ (21) & \text{при } d > c. \end{cases}$$

Тогда по предложению 3.7 для $\{\alpha^{21}, \beta^{ij}\}$ должно быть выполнено одно из условий (а)–(г) этого предложения на месте $\{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\}$. Однако, как видно из рис. 4.2, 4.3, это противоречиво: $\alpha^{21} \neq \beta^{ij}$, α^{21} , β^{12} и β^{21} не самоассоциированы и ни одно из разбиений α^{21} , β^{12} и β^{21} не представляется в виде $\Gamma + (r)$, где $r \in \{3, 4\}$ и $\Gamma = \Gamma'$. Поэтому

$$a \geq b. \quad (4.9)$$

Пусть M — подпоследовательность максимальных по величине элементов последовательности $(a + 2, b + 2, c, d)$. По (4.9) M не может начинаться с $b + 2$. Ввиду (4.4) и (4.9) $M \neq (a + 2, c, d)$. Кроме того, ввиду предложения 3.5 M отлична от $(a + 2, b + 2)$, (c) , (d) и (c, d) . Поэтому

$$M \in \{(a + 2), (a + 2, c), (a + 2, d), (a + 2, b + 2, c), (a + 2, b + 2, d)\}. \quad (4.10)$$

Эти возможности для M рассматриваются в следующих пяти случаях.

С л у ч а й 1. Пусть $M = (a + 2)$. Тогда $H^{\alpha, \beta}(2l + a + 4) = \{H_{12}^\alpha\}$, откуда по предложению 3.3 $\alpha^{12} = (\alpha^{12})'$, т. е.

$$b = 3. \quad (4.11)$$

Так как $[\beta]$ имеет крюк длины $2l + a + 2$ по (4.8), то $a \leq \max\{c, d\} \leq a + 1$. Предположим, что этот максимум равен $a + 1$ и, следовательно, $\max\{h_{12}^\beta, h_{21}^\beta\} = 2l + a + 3$. Тогда существующий по (4.7) крюк длины $2l + a + 3$ в $[\alpha]$ должен совпадать с H_{21}^α (см. список длин крюков). Поэтому $2l + a + 3 = 2l + b + 4 = 2l + 7$, $a = 4$ и по (4.4) $c \neq d$. Но тогда $H^{\alpha, \beta}(2l + a + 3) = \{H_{21}^\alpha, H\}$, где $H \in \{H_{12}^\beta, H_{21}^\beta\}$, и для $\{\alpha^{21}, \beta - H\}$ должно быть верно одно из утверждений (а)–(г) предложения 3.7 на месте $\{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\}$. Но, как видно из рис. 4.2, 4.3, каждое из них противоречиво (в частности, α^{21} отлично от разбиений вида $\Gamma + (r)$ и $\Gamma + (\tilde{r})$, где $r \in \{3, 4\}$ и $\Gamma = \Gamma'$). Поэтому

$$\max\{c, d\} = a. \quad (4.12)$$

Предположим, что $c = d$. Тогда по (4.12) $c = d = a$ и по (4.4), (4.11) $5 + a = 2c$, откуда

$$a = c = d = 5.$$

В этом случае, как легко заметить (см. рис. 4.1), $h_{1, l+2}^\alpha = 10$, $h_{1, l+1}^\beta = 10$, а при $i > 1$ все числа $h_{i, j}^\alpha$ и $h_{i, j}^\beta$, большие четырёх, нечётны. Поэтому $H^{\alpha, \beta}(10) = \{H_{1, l+2}^\alpha, H_{1, l+1}^\beta\}$ и по предложению 3.7 для $\{\alpha^{1, l+2}, \beta^{1, l+1}\}$ должно быть верно одно из его утверждений (а)–(г) на месте $\{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\}$. Но, как легко увидеть из рис. 4.1, $\alpha^{1, l+2} = 3 \cdot \Delta_l$, $\beta^{1, l+1} = (\Delta_{l+1} + (4))'$ и каждое из утверждений (а)–(г) противоречиво. Следовательно, $c \neq d$.

Пусть $c > d$. По (4.12) $a = c$ и по (4.4) $d = 5$. Поэтому $a > 5$ и $H^{\alpha, \beta}(2l + a + 2) = \{H_{13}^\alpha, H_{12}^\beta\}$. Следовательно, по предложению 3.7 для $\{\alpha^{13}, \beta^{12}\}$ должно выполняться одно из утверждений (а)–(г) этого предложения на месте $\{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\}$. Но, как легко увидеть из рис. 4.2, 4.3, каждое из них противоречиво.

Пусть $d > c$. Подобно предыдущему случаю получаем $H^{\alpha, \beta}(2l + a + 2) = \{H_{13}^\alpha, H_{21}^\beta\}$, что также противоречиво.

Случай 1 противоречив.

С л у ч а й 2. Пусть $M = (a + 2, c)$. Тогда по (4.4) $d = b$ и, следовательно, $c - 2 = a > b = d$. Из списка длин крюков видно, что $H^{\alpha, \beta}(2l + a + 4) = \{H_{12}^\alpha, H_{12}^\beta\}$, и, следовательно, для $\tilde{\alpha} = \alpha^{12}$ и $\tilde{\beta} = \beta^{12}$ выполнено одно из условий (а)–(г) предложения 3.7. Рассмотрим диаграммы этих разбиений (см. рис. 4.2). Очевидно, условия (а) и (б) не верны.

Если верно (в), то должно быть $\alpha^{12} = \Gamma + (3)$, где Γ есть $2^k \cdot ()$ или $2^k \cdot (1)$, и, следовательно, $b = 0$ и $l = 3$, т. е. $\Gamma = 2 \cdot (1)$; но тогда должно быть $\beta^{12} = \Gamma + \tilde{3}$, т. е. $\beta^{12} = (4, 3, 3, 1)$, хотя на самом деле $\beta^{12} = (5, 4, 1, 1)$.

Если верно (г), то должно быть $\alpha^{12} = \Theta + (4)$, где $\Theta = \Theta'$, но это не так.

Случай 2 противоречив.

С л у ч а й 3. Пусть $M = (a + 2, d)$. Тогда по (4.4) $c = b$ и, следовательно, $d > a > b = c$. Из списка длин крюков видно, что $H^{\alpha, \beta}(2l + a + 4) = \{H_{12}^\alpha, H_{21}^\beta\}$, и, следовательно, для $\tilde{\alpha} = \alpha^{12}$ и $\tilde{\beta} = \beta^{12}$ выполнено одно из условий (а)–(г) предложения 3.7. Противоречивость этих условий доказывается так же, как и в предыдущем случае.

Случай 3 противоречив.

С л у ч а й 4. Пусть $M = (a + 2, b + 2, c)$. Тогда

$$H^{\alpha, \beta}(2l + a + 4) = \{H_{12}^{\alpha}, H_{21}^{\alpha}, H_{12}^{\beta}\}, \quad (4.13)$$

причём $a = b = c - 2$, по (4.4) $d = a$ и по (4.5)

$$\varepsilon = -1. \quad (4.14)$$

Согласно предложению 3.2 из (4.13) следует, что

$$\chi^{\alpha^{12}} \pm \chi^{\alpha^{21}} \text{ пропорционально или полупропорционально } \chi^{\beta^{12}} \text{ на } S_q^{\delta}, \quad (4.15)$$

где $\delta = (-1)^{a+1}\varepsilon = (-1)^a$ (по (4.14)) и $q = n - (2l + a + 4)$.

Предположим, что $a > 3$ или $a = 2$. Положим $s := 2l + a - 2$. Из рис. 4.2 и 4.3 видно, что при указанных a

$$H^{\alpha^{12}}(s) = \{H_{21}^{\alpha^{12}}\}, \quad H^{\alpha^{21}}(s) = \begin{cases} \{H_{14}^{\alpha^{21}}\} & \text{при } l > 3, \\ \emptyset & \text{при } l = 3 \end{cases} \quad \text{и } H^{\beta^{12}}(s) = \emptyset.$$

Если $l > 3$, то из (4.15) и из равенств предыдущего предложения согласно предложению 3.6 получаем (используя (4.14))

$$\chi^{(\alpha^{12})^{21}} \pm \chi^{(\alpha^{21})^{14}} \sim 0 \text{ на } S_{q-s}^{\sigma}, \quad \text{где } \sigma = (-1)^{s+1}\delta = \varepsilon = -1,$$

т. е. $\chi^{(\alpha^{12})^{21}}$ равно $\pm \chi^{(\alpha^{21})^{14}}$ на S_{q-s}^- . Поэтому согласно предложению 3.1 должно быть либо $(\alpha^{12})^{21} = (\alpha^{21})^{14}$, либо $(\alpha^{12})^{21}$ и $(\alpha^{21})^{14}$ оба самоассоциированы. Но это противоречиво, что видно из рис. 4.2, 4.3. Если же $l = 3$, то из (4.12) подобно предыдущему получаем утверждение: $\chi^{(\alpha^{12})^{21}} \sim 0$ на S_{q-l}^- . Отсюда по предложению 1.1(5) следует самоассоциированность разбиения $(\alpha^{12})^{21}$, что противоречиво ($(\alpha^{12})^{21} = \Delta_{l-2} + (6)$).

Следовательно, $a \in \{0, 1, 3\}$. Если $a = 3$, то $\alpha^{12} = (\alpha^{12})'$ и по предложению 1.1(5) $\chi^{\alpha^{12}}$ исчезает на S_n^- , а тогда утверждение (4.15) имеет вид

$$\chi^{\alpha^{21}} \text{ пропорционально или полупропорционально } \chi^{\beta^{12}} \text{ на } S_q^-,$$

и применение предложений 3.1 и 3.4 приводит к противоречию (см. рис. 4.2, 4.3).

Пусть $a = 1$. Тогда $b = d = 1$ и $c = 3$. Легко увидеть, что в этом случае $H^{\alpha, \beta}(8) = \{H_{1, l+1}^{\beta}\}$. Действительно, при $l = 3$ (по (4.6) $l \geq 3$) это видно из рис. 4.5, на котором в каждой клетке диаграмм $[\alpha]$ и $[\beta]$ записана длина крюка с вершиной в этой клетке.

$$[\alpha] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 13 & 11 & 9 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ \hline 11 & 9 & 7 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & \\ \hline 5 & 3 & 1 & & & & & & \\ \hline 3 & 1 & & & & & & & \\ \hline 1 & & & & & & & & \\ \hline \end{array}, \quad [\beta] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 13 & 11 & 9 & 8 & 7 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 9 & 7 & 5 & 4 & 3 & 1 & & & \\ \hline 7 & 5 & 3 & 2 & 1 & & & & \\ \hline 3 & 1 & & & & & & & \\ \hline 1 & & & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

Рис. 4.5.

Увеличение l на единицу приведёт к приписыванию слева к каждой диаграмме одного нового столбца (на единицу большей длины предыдущего), причём длины крюков с вершинами в его клетках будут нечётными, и т. д. Итак, при любом l $H^{\alpha, \beta}(8) = \{H_{1, l+1}^{\beta}\}$, откуда по предложению 3.3 $\varepsilon = (-1)^8 = 1$ в противоречие с (4.14).

Пусть $a = 0$. Тогда $b = d = 0$ и $c = 2$. Здесь, как легко заметить, $H^{\alpha, \beta}(2l + 3) = \{H_{22}^{\alpha}\}$, и по предложению 3.3 должно быть $\alpha^{22} = (\alpha^{22})'$, что противоречиво.

Итак, случай 4 противоречив.

С л у ч а й 5. Пусть $M = (a + 2, b + 2, d)$. Тогда

$$H^{\alpha, \beta}(2l + a + 4) = \{H_{12}^{\alpha}, H_{21}^{\alpha}, H_{21}^{\beta}\}, \quad (4.16)$$

причём $a = b = d - 2$, по (4.4) $c = a$ и по (4.5)

$$\varepsilon = -1. \quad (4.17)$$

Согласно предложению 3.4 из (4.16) и (4.17) следует, что

$$\chi^{\alpha^{12}} + (-1)^{a-1} \chi^{\alpha^{21}} \text{ пропорционально или полупропорционально } \chi^{\beta^{21}} \text{ на } S_q^{\delta}, \quad (4.18)$$

$$\text{где } \delta = (-1)^a \text{ и } q = n - (2l + a + 4)$$

(здесь учтены равенства $l_{H_{12}^{\alpha}} = l$ и $l_{H_{21}^{\alpha}} = l + b - 1 = l + a - 1$).

Покажем сначала, что $a \geq 3$. Если $a \in \{0, 2\}$, то, как видно из приведённого выше (после (4.6)) списка длин крюков в $[\alpha]$ и $[\beta]$, $H^{\alpha, \beta}(2l + 3) = \{H_{22}^{\alpha}\}$ и по предложению 3.3 $\alpha^{22} = (\alpha^{22})'$, что противоречиво. Пусть $a = 1$. Тогда по (4.18)

$$\chi^{\alpha^{12}} + \chi^{\alpha^{21}} \sim \chi^{\beta^{21}} \text{ на } S_q^{-}. \quad (4.19)$$

Из рис. 4.2, 4.3 видно, что α^{12} и α^{21} имеют точно по одному крюку длины 4 (это $H_{1, l+1}^{\alpha^{12}}$ и $H_{1, l+3}^{\alpha^{21}}$ с нулевыми длинами ног), а β^{21} не имеет крюков длины 4. Отсюда по предложению 1.2 при $g = (4) \times 1$, где 1 — единица группы S_{q-4} , имеем $\chi^{\alpha^{12}}(g) = \chi^{(\alpha^{12})^{1, l+1}}(1)$, $\chi^{\alpha^{21}}(g) = \chi^{(\alpha^{21})^{1, l+3}}(1)$ и $\chi^{\beta^{21}} = 0$. Так как $g \in S_q^{-}$, то из этих равенств и из (4.19) вытекает противоречивое равенство $\chi^{(\alpha^{12})^{1, l+1}}(1) + \chi^{(\alpha^{21})^{1, l+3}}(1) = 0$.

Итак, $a \geq 3$. Чтобы представить себе расположение крюков чётной и нечётной длины в $[\alpha]$ и $[\beta]$, рассмотрим рис. 4.6, на котором указаны длины крюков, как и на рис. 4.5, причём положено $x' := x + a$. По нему можно представить себе общую ситуацию при любом $l \geq 3$.

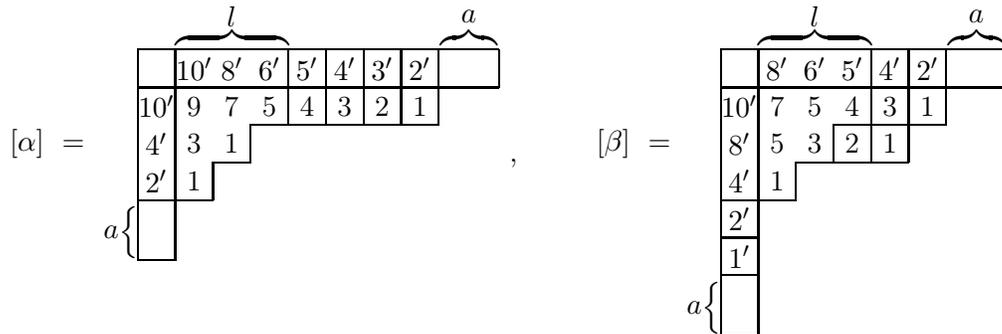


Рис. 4.6.

Если a нечётно, то (см. предложение 2.5) лишь следующие крюки из $[\alpha]$ и $[\beta]$ имеют чётные длины, большие a :

$H_{1, l+2}^{\alpha}$ длины $a + 5$, $H_{1, l+4}^{\alpha}$ длины $a + 3$ (≥ 6) и при $a = 3$ $H_{2, l+2}^{\alpha}$ длины 4,

$H_{1, l+1}^{\beta}$ длины $a + 5$, $H_{l+3, 1}^{\beta}$ длины $a + 1$ и при $a = 3$ $H_{2, l+1}^{\beta}$ длины 4.

Следовательно, при нечётном a $H^{\alpha, \beta}(a + 3) = \{H_{1, l+4}^{\alpha}\}$, откуда по предложению 3.3 $\alpha^{1, l+4}$ самоассоциировано, что противоречиво.

Теперь пусть a чётно. Тогда (см. список длин крюков) $H^{\alpha, \beta}(2l + a) = \{H_{14}^{\alpha}, H_{13}^{\beta}\}$ и по по предложению 3.7 для $\{\alpha^{14}, \beta^{13}\}$ должно выполняться одно из его утверждений (а)–(г) на месте $\{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\}$. Однако противоречивость этих утверждений видна из рис. 4.4, если учесть, что α^{14} получается из α^{13} удлинением на две клетки третьего столбца.

Случай 5 противоречив.

Таким образом (см. (4.10)), предположение $k = 0$ противоречиво.

5. Доказательство теоремы А3. Случай $k > 0$

По-прежнему считаем, что выполнено условие теоремы А3, но не выполнено её заключение. В частности,

$$h_{11}^\alpha = h_{11}^\beta \quad (5.1)$$

и выполнено утверждение (2а) гипотезы А. Поскольку в § 4 доказана противоречивость случая $k = 0$, то здесь мы предполагаем, что $k > 0$. Итак, мы считаем, что

$$\alpha^{11} = \gamma + (4) \text{ и } \beta^{11} = \gamma + (\tilde{4}), \text{ где } \gamma = 3^k \cdot \Delta_l \text{ при } k \geq 1 \text{ и } l \geq 1. \quad (5.2)$$

Мы докажем, что этот случай также противоречив.

Диаграммы разбиений α и β изображены на рис. 5.1 ($\{a, b, c, d\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$, $t := \gamma_1 = \tilde{\gamma}_1$); вид разбиений γ и $\tilde{\gamma}$ пояснён на рис. 5.2 (где взято $k = 2$ и $l = 4$).

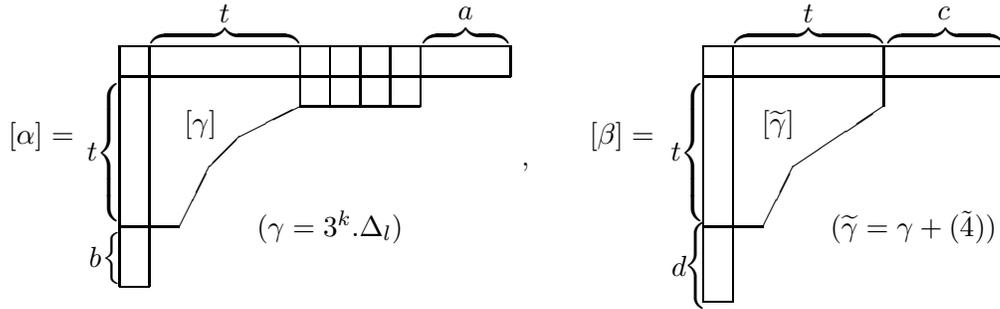


Рис. 5.1.

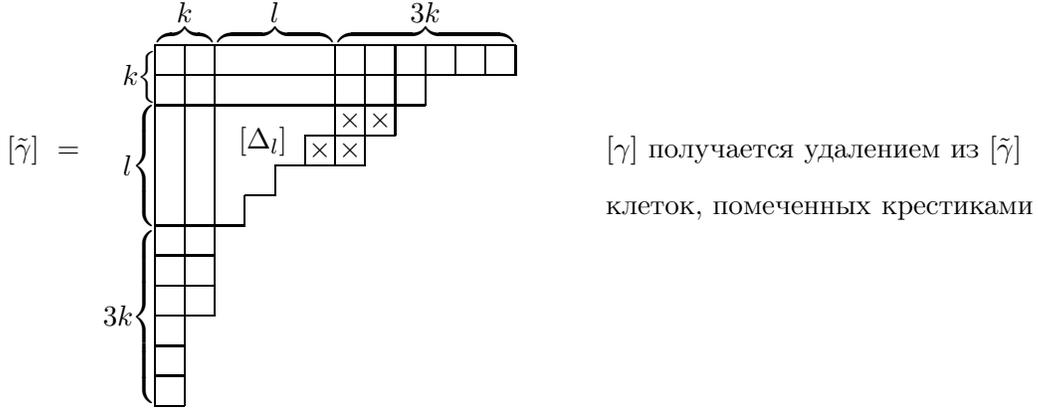


Рис. 5.2.

Как видно из рисунков,

$$t = 4k + l. \quad (5.3)$$

Далее условия (5.2) и (5.3) используются без ссылок. По (5.1)

$$4 + a + b = c + d, \quad (5.4)$$

и по теореме А2 (см. также (4.2)) $\varepsilon = (-1)^{h_{11}^\alpha}$, т. е.

$$\varepsilon = (-1)^{1+a+b} = (-1)^{1+c+d}. \quad (5.5)$$

Подсчитаем длины некоторых крюков в $[\alpha]$ и $[\beta]$:

$$h_{12}^\alpha = 2t + a + 4,$$

$$h_{12}^\beta = 2t + c,$$

$$h_{13}^\alpha = 2t + a,$$

$$h_{13}^\beta = \begin{cases} 2t + c - 4 & \text{при } kl > 1, \\ 2t + c - 3 & \text{при } kl = 1, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 h_{14}^\alpha &= \begin{cases} 2t + a - 4 & \text{при } k > 1, \\ 2t + a - 2 & \text{при } k = 1, \end{cases} \\
 h_{21}^\alpha &= 2t + b + 4, & h_{21}^\beta &= 2t + d, \\
 h_{31}^\alpha &= 2t + b - 4, & h_{31}^\beta &= \begin{cases} 2t + d - 4 & \text{при } k > 1, \\ 2t + d - 2 & \text{при } k = 1, \end{cases} \\
 h_{22}^\alpha &= 2t + 3, & h_{22}^\beta &= 2t - 1.
 \end{aligned}$$

Далее нам потребуются следующие диаграммы (рис. 5.3, 5.4).

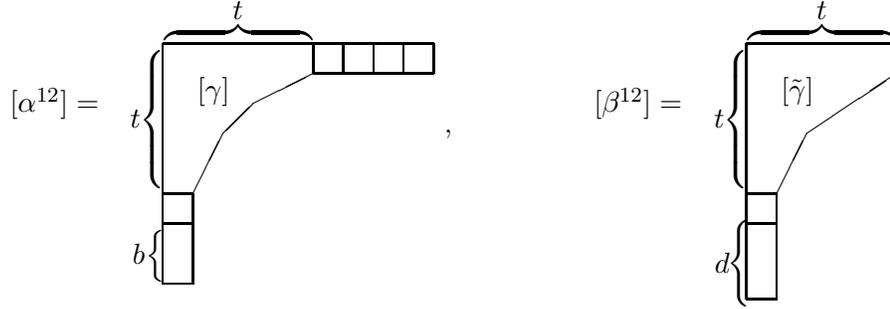


Рис. 5.3.

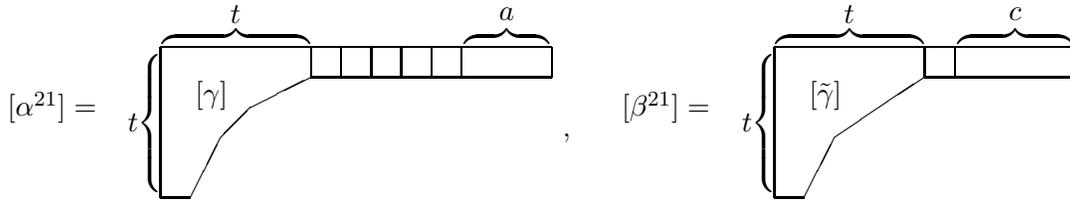


Рис. 5.4.

Как видно из рисунков 5.3 и 5.4, разбиения α^{21} , β^{12} , β^{21} не самоассоциированы. Поэтому согласно предложению 3.5

$$[\alpha] \text{ имеет крюки длины } 2t + c \text{ и } 2t + d, \quad (5.6)$$

$$[\beta] \text{ имеет крюк длины } 2t + b + 4, \quad (5.7)$$

Легко представить себе вид диаграммы α^{13} : она получается из диаграммы α^{12} удлинением второго столбца до величины $t + 1$. Поскольку она не самоассоциирована, то по предложению 3.5

$$[\beta] \text{ имеет крюк длины } 2t + a. \quad (5.8)$$

Предположим, что $b > a$. Тогда $H^\alpha(2t + b + 4) = \{H_{21}^\alpha\}$. Из (5.6) и (5.7) следует, что $b + 4 = \max\{c, d\}$. Заметим, что должно быть $c \neq d$, так как при $b + 4 = c = d$ из (5.4) следует, что $b + 4 = c = d = a$, в противоречие с тем, что $b > a$. Следовательно,

$$H^{\alpha, \beta}(2t + b + 4) = \{H_{21}^\alpha, H_{ij}^\beta\}, \text{ где } (i, j) = \begin{cases} (1, 2) & \text{при } c > d, \\ (2, 1) & \text{при } d > c. \end{cases}$$

Тогда по предложению 3.7 для $\{\alpha^{21}, \beta^{ij}\}$ должно быть выполнено одно из условий (а)–(г) этого предложения на месте $\{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\}$. Однако, как видно из рис. 5.3, 5.4, это противоречиво (в частности, ни одно из разбиений α^{21} , β^{12} и β^{21} не представляется в виде $\Gamma + (r)$, где $r \in \{3, 4\}$ и $\Gamma = \Gamma'$). Поэтому

$$a \geq b. \quad (5.9)$$

Пусть M — подпоследовательность максимальных по величине элементов последовательности $(a + 4, b + 4, c, d)$. По (5.9) M не может начинаться с $b + 4$. Ввиду (5.4) и (5.9)

$M \neq (a + 4, c, d)$. Кроме того, ввиду предложения 3.7 M отлична от $(a + 4, b + 4)$, (c) , (d) и (c, d) . Поэтому

$$M \in \{(a + 4), (a + 4, c), (a + 4, d), (a + 4, b + 4, c), (a + 4, b + 4, d)\}. \quad (5.10)$$

Эти возможности для M рассматриваются в следующих пяти случаях.

С л у ч а й 1. Пусть $M = (a + 4)$. Тогда $H^{\alpha, \beta}(2t + a + 4) = \{H_{12}^{\alpha}\}$, откуда по предложению 3.3 $\varepsilon = (-1)^a$ и $\alpha^{12} = (\alpha^{12})'$, т. е.

$$b = 3. \quad (5.11)$$

Так как $[\beta]$ имеет крюк длины $2t + a$ по (5.8), то $a \leq \max\{c, d\} \leq a + 3$. Предположим, что этот максимум равен $a + i$, где $1 \leq i \leq 3$, и, следовательно, $\max\{h_{12}^{\beta}, h_{21}^{\beta}\} = 2t + a + i$. Тогда существующий по (5.6) крюк длины $2t + a + i$ в $[\alpha]$ должен совпадать с H_{21}^{α} (см. список длин крюков). Поэтому $2t + a + i = 2t + b + 4 = 2t + 7$, $a = 7 - i \in \{4, 5, 6\}$. Если $i \neq 2$, то ввиду (5.4) $c \neq d$. Но тогда $H^{\alpha, \beta}(2t + a + i) = \{H_{21}^{\alpha}, H^{\beta}\}$, где $H^{\beta} \in \{H_{12}^{\beta}, H_{21}^{\beta}\}$, и для $\{\alpha^{21}, \beta - H^{\beta}\}$ должно быть верно одно из утверждений (а)–(г) предложения 3.7 на месте $\{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\}$. Но, как видно из рис. 5.3, 5.4, каждое из них противоречиво. Поэтому

$$\max\{c, d\} \in \{a, a + 2\}. \quad (5.12)$$

С л у ч а й 1.1. Предположим, что $c \neq d$. Положим $\tilde{c} := \max\{c, d\}$, $\tilde{d} := \min\{c, d\}$ и H^{β} — крюк длины $2t + \tilde{c}$ в $[\beta]$ ($H^{\beta} \in \{H_{12}^{\beta}, H_{21}^{\beta}\}$). По (5.6) $[\alpha]$ имеет крюк длины $2t + \tilde{c}$. Из (5.12), (5.4) и из списка длин крюков видно, что

$$\begin{aligned} &\text{либо } \tilde{c} = a > \tilde{d} = b + 4 \text{ и } H^{\alpha, \beta}(2t + \tilde{c}) = \{H_{13}^{\alpha}, H^{\beta}\}, \\ &\text{либо } \tilde{c} = a + 2 > \tilde{d} = b + 2 \text{ и } H^{\alpha, \beta}(2t + \tilde{c}) = \{H_{21}^{\alpha}, H^{\beta}\}. \end{aligned}$$

Тогда по предложению 3.7 существуют такие $\tilde{\alpha} \in \{\alpha^{13}, \alpha^{21}\}$ и $\tilde{\beta} \in \{\beta^{12}, \beta^{21}\}$, что для $\{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\}$ выполняется одно из утверждений (а)–(г) этого предложения. Но, как легко увидеть из рис. 5.3, 5.4, каждое из них противоречиво ($[\alpha^{13}]$ получается из $[\alpha^{12}]$ удлинением второго столбца).

С л у ч а й 1.2. Предположим, что $c = d$. Тогда по (5.4) и (5.11) $7 + a = 2c$, откуда $c \neq a + 2$, и с учётом (5.12) имеем

$$a = c = d = 7.$$

Из строения диаграмм $[\alpha]$, $[\beta]$ и предложения 2.5 легко увидеть (см. для примера рис. 5.5, где взято $k = 2$ и $l = 3$), что $H_{1, k+l+3}^{\alpha}$ и $H_{1, k+l+1}^{\beta}$ — единственные крюки максимальной чётной длины (равной $4k + 10$) в $[\alpha]$ и $[\beta]$ соответственно (максимальными чётными длинами крюков с вершинами в первых столбцах $[\alpha]$ и $[\beta]$ являются $h_{k+l+3, 1}^{\alpha} = 4k + 2$ и $h_{k+l+3, 1}^{\beta} = 4k + 6$; а числа $h_{i, j}^{\alpha}$ при $i < k + l + 3$ и $j < k + l + 3$ и числа $h_{i, j}^{\beta}$ при $i < k + l + 1$ и $j < k + l + 3$ нечётны).

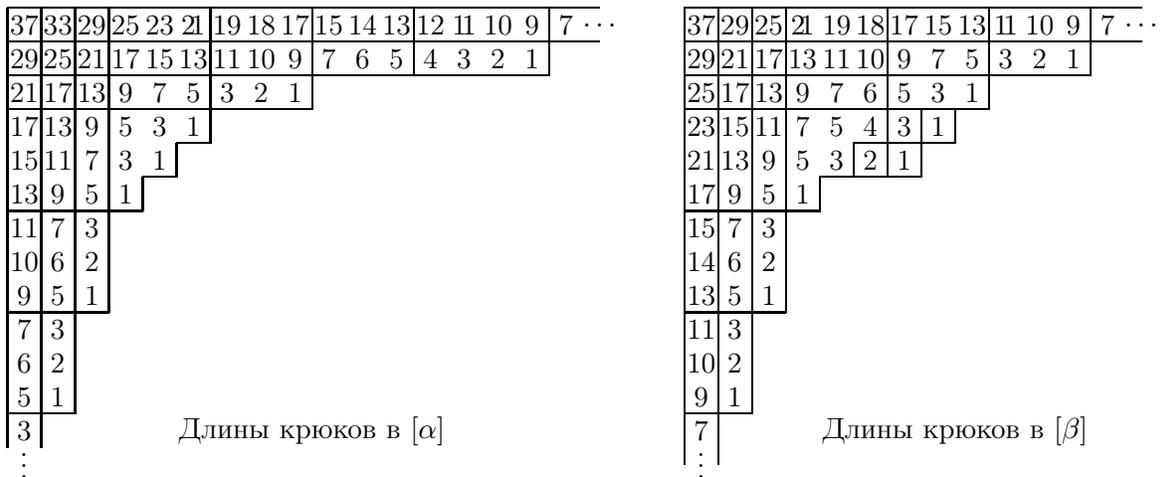


Рис. 5.5.

Поэтому

$$H^{\alpha, \beta}(4k + 10) = \{H_{1, k+l+3}^{\alpha}, H_{1, k+l+1}^{\beta}\}.$$

Следовательно, по предложению 3.7 для $\{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\}$, где $\tilde{\alpha} = \alpha^{1, k+l+3}$ и $\tilde{\beta} = \beta^{1, k+l+1}$, должно выполняться одно из утверждений (а)–(г) этого предложения. Однако их противоречивость вытекает из следующих легко проверяемых равенств (см. рис. 5.5):

$$\begin{array}{llll} \tilde{\alpha}_1 = t + 4, & \tilde{\alpha}'_1 = t + 4, & \tilde{\beta}_1 = t, & \tilde{\beta}'_1 = t + 8, \\ \tilde{\alpha}_2 = t - 3, & \tilde{\alpha}'_2 = t + 1, & \tilde{\beta}_2 = t - 3, & \tilde{\beta}'_2 = t + 1. \end{array}$$

В частности, противоречивость условий (в) и (г) следует из того, что $\min\{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}'_1\} \neq \min\{\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}'_1\}$.

Случай 1 противоречив.

С л у ч а й 2. Пусть $M = (a + 4, c)$. Тогда по (5.4) $d = b$ и, как видно из списка длин крюков, $H^{\alpha, \beta}(2t + a + 4) = \{H_{12}^{\alpha}, H_{12}^{\beta}\}$. Следовательно, при $\tilde{\alpha} = \alpha^{12}$ и $\tilde{\beta} = \beta^{12}$ для $\{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\}$ выполнено одно из условий (а)–(г) предложения 3.7. Противоречивость этих условий видна из рис. 5.3 (противоречивость условий (а), (в) и (г) следует из неравенства $\min\{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}'_1\} \neq \min\{\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}'_1\}$).

Случай 2 противоречив.

С л у ч а й 3. Пусть $M = (a + 4, d)$. Тогда по (5.4) $c = b$ и верно равенство $H^{\alpha, \beta}(2t + a + 4) = \{H_{12}^{\alpha}, H_{21}^{\beta}\}$, противоречивость которого доказывается так же, как и в предыдущем случае.

Случай 3 противоречив.

С л у ч а й 4. Пусть $M = (a + 4, b + 4, c)$. Тогда

$$H^{\alpha, \beta}(2t + a + 4) = \{H_{12}^{\alpha}, H_{21}^{\alpha}, H_{12}^{\beta}\}, \tag{5.13}$$

причём $a = b = c - 4$, по (5.4) $d = a$ и по (5.5)

$$\varepsilon = -1. \tag{5.14}$$

Согласно предложению 3.2(2) из (5.13) следует, что

$$\chi^{\alpha^{12}} \pm \chi^{\alpha^{21}} \text{ пропорционально или полупропорционально } \chi^{\beta^{12}} \text{ на } S_q^{\delta}, \tag{5.15}$$

где $\delta = (-1)^{a+1}\varepsilon = (-1)^a$ (по (5.14)) и $q = n - (2t + a + 4)$. К этому соотношению мы хотим применить предложение 3.6. В следующих рассуждениях существенную роль играет предложение 2.5, согласно которому мы знаем крюки чётной длины в диаграммах $3^k \Delta_l$, а следовательно, и в связанных с ними диаграммах, которые мы будем рассматривать; для наглядности можно использовать следующие рис. 5.6, 5.7, где положено $x' := x + a$.

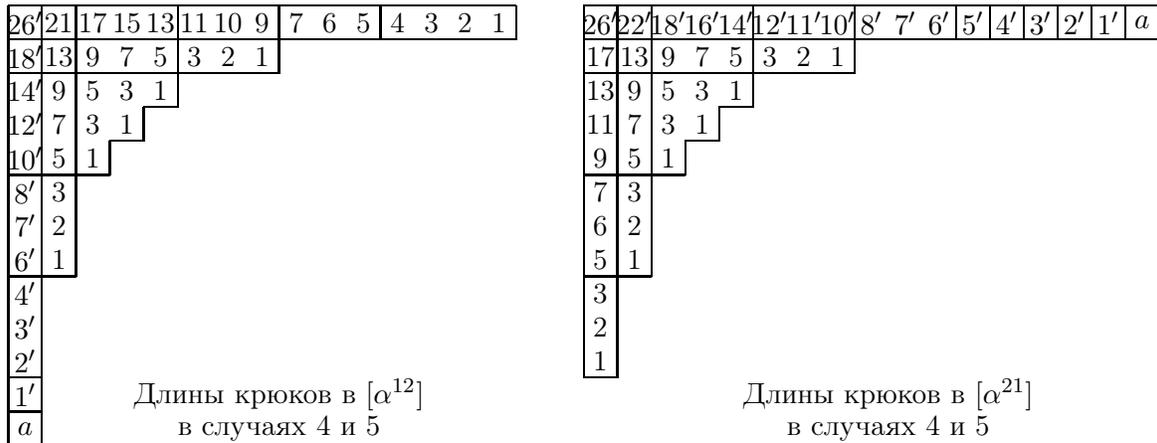


Рис. 5.6.

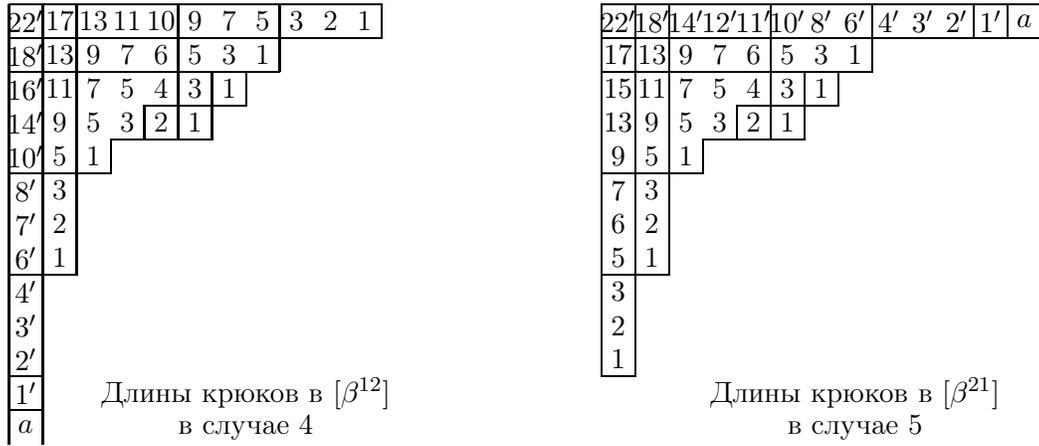


Рис. 5.7.

Предположим, что a нечётно. Тогда, как легко увидеть, $H_{1,k+l+2}^{\alpha^{21}}$ есть единственный крюк максимальной чётной длины, а именно длины $4k + a + 3$ (длины $11'$ на рис. 5.6), в $[\alpha^{21}]$, а диаграммы $[\alpha^{12}]$ и $[\beta^{12}]$ не имеют крюков такой длины. Теперь по предложению 3.6 из (5.15) следует, что

$$\chi^{(\alpha^{21})^{1,k+l+2}} \sim 0 \text{ на } S_r^\sigma,$$

где $\sigma = (-1)^a \delta = 1$ и $r = q - (4k + a + 3)$. Но отсюда следует противоречивое равенство $\chi^{(\alpha^{21})^{1,k+l+2}}(1) = 0$.

Поэтому a чётно. В этом случае $[\alpha^{12}]$ и $[\alpha^{21}]$ имеют точно по одному крюку длины $4k + 2l + a - 2$ (длины $12'$ на рис. 5.6, 5.7): $H_{k+2,1}^{\alpha^{12}}$ и $H_{1,k+l+1}^{\alpha^{21}}$. Однако $[\beta^{12}]$ не имеет крюков такой длины. Поэтому согласно предложению 3.6 из (5.15) получаем

$$\chi^{(\alpha^{12})^{k+2,1}} \pm \chi^{(\alpha^{21})^{1,k+l+1}} \sim 0 \text{ на } S_r^\sigma,$$

где $\sigma = -\delta = (-1)^{a+1}$ и $r = q - (4k + 2l + a - 2)$. Отсюда согласно предложению 3.1 должно быть либо $(\alpha^{12})^{k+2,1} = (\alpha^{21})^{1,k+l+1}$, либо разбиения $(\alpha^{12})^{k+2,1}$ и $(\alpha^{21})^{1,k+l+1}$ самоассоциированы. Противоречивость этих условий видна из рис. 5.6, 5.7 (более точно: из рис. 5.2–5.4).

Случай 4 противоречив.

С л у ч а й 5. Пусть $M = (a + 4, b + 4, d)$. Тогда

$$H^{\alpha,\beta}(2t + a + 4) = \{H_{12}^\alpha, H_{21}^\alpha, H_{21}^\beta\},$$

откуда при помощи (5.4) и (5.5) получаем

$$a = b = c = d - 4 \text{ и } \varepsilon = -1,$$

и согласно предложению 3.2

$$\chi^{\alpha^{12}} \pm \chi^{\alpha^{21}} \text{ пропорционально или полупропорционально } \chi^{\beta^{21}} \text{ на } S_q^\delta, \quad (5.16)$$

где $\delta = (-1)^{a+1} \varepsilon = (-1)^a$ и $q = n - (2t + a + 4)$.

Следующие рассуждения подобны проведённым в случае 4 и снова используют предложение 2.5 и рис. 5.6, 5.7. При этом вместо диаграммы $[\beta^{12}]$ рассматривается диаграмма $[\beta^{21}]$.

Предположим, что a чётно. Тогда, как легко увидеть, $[\alpha^{21}]$ имеет единственный крюк $H_{1,k+2}^{\alpha^{21}}$ (чётной) длины $4k + 2l + a + 2$ (длины $16'$ на рис. 5.6), а диаграммы $[\alpha^{12}]$ и $[\beta^{21}]$ не имеют крюков такой длины. Теперь по предложению 3.6 из (5.16) следует, что

$$\chi^{(\alpha^{21})^{1,k+2}} \sim 0 \text{ на } S_r^\sigma,$$

где $\sigma = (-1)^a \delta = 1$ и $r = q - (4k + a + 3)$. Но отсюда следует равенство $\chi^{(\alpha^{21})^{1,k+2}}(1) = 0$, что противоречиво.

Поэтому a нечётно. В этом случае $[\beta^{21}]$ не имеет крюков (чётной) длины $4k + a - 1$ (длины $7'$ на рис. 5.6, 5.7), в то время как $[\alpha^{12}]$ и $[\alpha^{21}]$ имеют крюки $H_{3k-4,1}^{\alpha^{12}}$ и $H_{1,3k-1}^{\alpha^{21}}$ такой длины. При этом $H_{1,3k-1}^{\alpha^{21}}$ — единственный крюк такой длины в $[\alpha^{21}]$, а $H_{3k-4,1}^{\alpha^{12}}$ является единственным крюком такой длины в $[\alpha^{12}]$ лишь при условии, что $a \neq 3$ (иначе $h_{1,k+l+2}^{\alpha^{12}} = 4k + 2 = 4k + a - 1$). Отсюда при $a \neq 3$ $H^{\alpha^{12}, \alpha^{21}, \beta^{21}}(4k + a - 1) = \{H_{3k-4,1}^{\alpha^{12}}, H_{1,3k-1}^{\alpha^{21}}\}$ и согласно предложению 3.6 из (5.16) следует, что

$$\chi^{\alpha^{12}} \pm \chi^{\alpha^{21}} \sim 0 \text{ на } S_r^\sigma,$$

где $\sigma = -\delta = (-1)^{a+1}$ и $r = q - (2t + a + 4)$. Отсюда согласно предложению 3.1 должно быть либо $(\alpha^{12})^{3k-4,1} = (\alpha^{21})^{1,3k-1}$, либо $(\alpha^{12})^{3k-4,1}$ и $(\alpha^{21})^{1,3k-1}$ самоассоциирована. Противоречивость этих условий видна из рис. 5.6, 5.7.

Остаётся рассмотреть случай $a = 3$. Тогда в (5.16) $\delta = (-1)^a = -1$, α^{12} самоассоциировано (см. рис. 5.4) и по предложению 1.1(5) $\chi^{\alpha^{12}}$ исчезает на S_r^σ . Поэтому (5.16) равносильно утверждению

$$\chi^{\alpha^{21}} \text{ пропорционально или полупропорционально } \chi^{\beta^{21}} \text{ на } S_q^-, \quad (5.17)$$

Положим $\tilde{\alpha} = \alpha^{21}$ и $\tilde{\beta} = \beta^{21}$. Если $\chi^{\tilde{\alpha}}$ пропорционально $\chi^{\tilde{\beta}}$ на S_q^- , то согласно предложению 3.1 должно быть либо $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$, либо $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ самоассоциированы. Если же $\chi^{\tilde{\alpha}}$ полупропорционально $\chi^{\tilde{\beta}}$ на S_q^- , то согласно гипотезе А для $\{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\}$ должно быть выполнено условие (2) этой гипотезы на месте $\{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\}$. Противоречивость заключений последних двух предложений видна из рис. 5.6, 5.7 (или из рис. 5.2–5.4).

Случай 5 противоречив.

Таким образом, во всех возможных случаях (см. (5.10)) мы получили противоречие. Этим завершено доказательство теоремы А3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоногов В.А. О неприводимых характерах группы S_n , полупропорциональных на A_n или на $S_n \setminus A_n$. I // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2008. Т. 14, № 2. С. 143–163.
2. Белоногов В.А. О неприводимых характерах группы S_n , полупропорциональных на A_n или на $S_n \setminus A_n$. II // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2008. Т. 14, № 3. С. 58–68.
3. Белоногов В.А. О неприводимых характерах групп S_n и A_n // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 5. С. 977–994.
4. Белоногов В.А. О неприводимых характерах группы S_n , полупропорциональных на A_n // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 2. С. 135–156.
5. Белоногов В.А. Диаграммы Юнга без крюков длины 4 и характеры группы S_n // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2007. Т. 13, № 3. С. 30–40.
6. Белоногов В.А. О некоторых парах неприводимых характеров групп S_n и A_n // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2007. Т. 13, № 1. С. 11–43.
7. Белоногов В.А. О некоторых парах неприводимых характеров групп S_n // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2007. Т. 13, №2. С. 13–32.
8. Белоногов В.А. О равнокорневых неприводимых характеров групп S_n и A_n // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 1. С. 3–25.

9. **Белоногов В.А.** Представления и характеры в теории конечных групп. Свердловск: УрО АН СССР, 1990. 380 с.
10. **James G., Kerber A.** The representation theory of the symmetric group. London: Addison–Wesley, 1981. 510 с.
11. **Джеймс Г.** Теория представлений симметрических групп. М.: Мир, 1982. 214 с.
12. **Белоногов В.А.** О диаграммах Юнга пары неприводимых характеров S_n , равнокорневых на S_n^ε // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 5. С. 992–1006.

Белоногов Вячеслав Александрович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: belonogov@imm.uran.ru

Поступила 27.10.2008

УДК 517.972.8

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО СБЛИЖЕНИЯ С ЭЛЕМЕНТАМИ ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ¹

Ю. И. Бердышев

Рассматриваются максиминные задачи преследования нелинейной системой третьего порядка, описывающей простейшую модель движения автомобиля в горизонтальной плоскости, двух точек, движущихся по выбираемым ими прямым. Платой является время поимки системой обеих точек.

Ключевые слова: управление, преследователь, убегающие, последовательное сближение.

1. Введение

Управляемый объект (преследователь), описываемый нелинейной системой третьего порядка, имеет своей целью за кратчайшее время поочередно сблизиться с двумя точками (убегающими), каждая из которых движется в плоскости по своей прямой. Сближение преследователя с убегающими должно происходить в порядке нумерации последних. Начальные состояния преследователя и убегающих заданы. Временем поимки считается время сближения со вторым убегающим. Целью убегающих является максимизация времени поимки. Для достижения этой цели они могут в начальный момент времени выбрать направления движения, однозначно определяемые углами β_1 и β_2 .

Основной задачей в настоящей работе является определение углов β_1 и β_2 , которые бы максимизировали время поимки убегающих при оптимальном поведении преследователя.

Идейной основой работы являются принцип максимума Л.С. Понтрягина [1] и общий принцип двойственности, установленный Н.Н. Красовским, сформулированный им в виде проблемы моментов [2, гл.2] и применяемый в теории дифференциальных игр [3,4]. Рассматриваемая нелинейная система третьего порядка использовалась Р. Айзексом [5] при постановке задачи “шофер-убийца”, а также в работах [6–12].

Следует отметить, что задачи не с одним, а с несколькими убегающими рассматривались ранее [13–15], но при этом предполагалось, что преследователь является безынерционным, т. е. описывается системой простых движений.

В работах [16–19] решена задача определения оптимального управления преследователя при фиксированных углах β_1 и β_2 , определена структура оптимальных траекторий преследователя и предложен алгоритм их построения.

2. Постановка задачи

Рассматривается следующая нелинейная система третьего порядка [5]

$$\dot{x} = \cos \alpha, \quad \dot{y} = \sin \alpha, \quad \dot{\alpha} = u; \quad |u| \leq 1. \quad (2.1)$$

Эта система описывает простейшую модель движения самолета, автомобиля (преследователя) в горизонтальной плоскости. Здесь x, y — координаты преследователя, отождествляемого с точкой на плоскости, α — угол между вектором скорости преследователя и осью x ,

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 06-01-00414, 07-01-96088).

u — управляющий параметр, удовлетворяющий указанному ограничению и характеризующий скорость изменения угла α . Неравенство в (2.1) ограничивает радиус кривизны траектории преследователя, а именно радиус кривизны не может быть меньше единицы. Состояние $(x(t_0), y(t_0), \alpha(t_0))$ объекта в начальный момент времени t_0 предполагается заданным. Без ограничения общности полагаем

$$x(t_0) = y(t_0) = \alpha(t_0) = t_0 = 0. \quad (2.2)$$

Система (2.1) функционирует на конечном достаточно большом промежутке времени $T_* = [0, t^0]$. В качестве множества допустимых управлений выберем \mathbf{U} — множество всех измеримых по Борелю функций $U : T_* \rightarrow [-1, 1]$. Каждое управление $U \in \mathbf{U}$ порождает движение, исходящее из начальной позиции (2.2), которое будем обозначать через $(x_u, y_u, \alpha_u) = ((x_u(t), y_u(t), \alpha_u(t)), t \in T)$.

Убегающие $W_1(t)$ и $W_2(t)$ (их иногда мы будем называть целями) могут совершать на плоскости xy только прямолинейные, равномерные движения, исходящие из заданных начальных точек W_{10} и W_{20} . Координаты этих точек обозначим соответственно через x_{10}, y_{10} и x_{20}, y_{20} . Величины скоростей v_1 и v_2 ($v_1 < 1, v_2 < 1$) убегающих предполагаются также заданными, но направления их движения, определяемые углами β_1 и β_2 , могут выбираться самими убегающими. Этот выбор осуществляется в начальный момент времени и о нем мгновенно становится известно преследователю. Убегающий $W_i(t)$ ($i = 1, 2$) считается пойманным, если местоположения преследователя $(x_u(t), y_u(t))$ и убегающего в некоторый момент времени t_i совпадут. Точки встречи преследователя с первым и вторым убегающими обозначим через W_1 и W_2 . Координаты этих точек обозначим соответственно через x_1, y_1 и x_2, y_2 .

Преследователю необходимо вначале поймать первого убегающего, а затем второго, при этом минимизировать время $T = t_2$ встречи со вторым убегающим, которое будем считать временем поимки обоих убегающих. Очевидно, что время T зависит от выбора управляющих параметров $U, \beta_1, \beta_2 : T = T(U, \beta_1, \beta_2)$. Преследователь стремится это время уменьшить, а убегающие — увеличить.

Основная задача состоит в выборе углов β_1 и β_2 , при которых

$$\min_{U \in \mathbf{U}} T(U, \beta_1, \beta_2) \rightarrow \sup_{\beta_1, \beta_2}. \quad (2.3)$$

Вспомогательная задача. Пусть цель только одна — $W_1(t)$. Требуется определить направление ее движения (угол β_1), при котором

$$\min_{U \in \mathbf{U}} T(U, \beta_1) \rightarrow \sup_{\beta_1}. \quad (2.4)$$

Пусть в дальнейшем C_1 и C_2 — окружности единичного радиуса, касающиеся оси x в начале координат $W_0 = (0, 0)$ и лежащие соответственно выше и ниже этой оси; C_1^0 и C_2^0 — круги, ограниченные C_1 и C_2 (без границ). Заметим, что C_1 и C_2 являются траекториями системы (2.1) соответственно при $U(t) = 1, t \geq 0$, и $U(t) = -1, t \geq 0$.

3. Необходимые условия оптимальности траектории преследователя и направлений движения убегающих

Формулировки необходимых условий оптимальности управления преследователя, движение которого описывается векторным нелинейным дифференциальным уравнением общего вида, а также условий выравнивания, накладывающих ограничение на моменты встречи преследователя с убегающими, приведены в работах [16, 19]. Там же описаны результаты их применения для конкретной системы (2.1). Указанные условия и условия выравнивания сформулированы в форме принципа максимума Л.С. Понтрягина. Сами условия, ввиду их громоздкости,

здесь не приводим, но опишем результат их использования для системы (2.1), а также поясним смысл векторов $\Lambda_i = (\Lambda_{i1}, \Lambda_{i2})$, $i = 1, 2$, фигурирующих в формулировке этих условий. Далее используем сокращение: ОТП — траектория преследователя, удовлетворяющая необходимым условиям оптимальности [16, 19]. В [16] доказано, что ОТП состоит из дуг окружностей единичного радиуса и отрезков прямых

$$l_1 : (\Lambda_{11} + \Lambda_{21})y - (\Lambda_{12} + \Lambda_{22})x - (\Lambda_{11}y_1 + \Lambda_{21}y_2 - \Lambda_{12}x_1 - \Lambda_{22}x_2) = 0,$$

$$l_2 : \Lambda_{21}(y - y_2) - \Lambda_{22}(x - x_2) = 0,$$

где x_i, y_i — координаты точки встречи W_i ($i = 1, 2$) преследователя с i -м убегающим. Только на прямых переключения l_1, l_2 ОТП может иметь прямолинейные участки или менять знак кривизны. При этом из условия выравнивания вытекает, что в точке встречи W_1 вектор разности скоростей преследователя с первым убегающим должен быть ортогональным прямой

$$l : \Lambda_{11}(y - y_1) - \Lambda_{12}(x - x_1) = 0.$$

Этот факт позволяет однозначно определить окружность, дуга которой содержит точку W_1 и является составной частью ОТП. Заметим, что прямые l, l_1, l_2 имеют одну общую точку, обозначаемую далее через K . Последний факт будет также использоваться при построении ОТП. Следствием необходимых условий оптимальности направлений движения убегающих (углов β_1, β_2) [20] являются равенства

$$\Lambda_{i1} \sin \beta_i - \Lambda_{i2} \cos \beta_i = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (3.1)$$

Эти равенства имеют следующий смысл. Первый убегающий должен двигаться по прямой l , а второй — по прямой l_2 , т. е. направления движения первого и второго убегающих должны быть такими, чтобы отрезки $W_{10}W_1$ и $W_{20}W_2$ их движения лежали соответственно на прямых l и l_2 .

4. Решение вспомогательной задачи

В работе [18] описан алгоритм построения ОТП при одном убегающем, движущемся в заданном (углом β_1) направлении. Показано, что ОТП может быть только двух видов, изображенных соответственно на рис. 1 и 2. В первом случае ОТП состоит из дуги W_0B окружности C_1 или C_2 (в зависимости от того, в верхней или нижней полуплоскости находится точка W_1) и отрезка BW_1 прямой переключения l_0 , касающейся этой окружности в некоторой точке B и проходящей через точку W_1 (см. рис. 1).

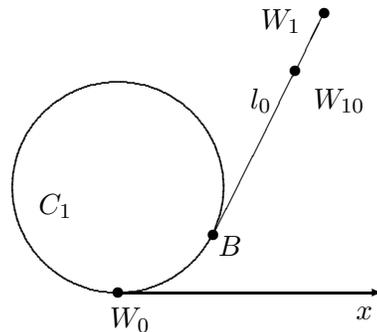


Рис. 1.

Во втором случае ОТП состоит из дуги W_0M окружности C_2 и дуги MNW_1 окружности C_3 , проходящей через точку W_1 и касающейся C_2 в точке M (рис. 2). Здесь прямая переключения l проходит через точки M и W_1 .

Будем говорить, что в первом случае ОТП имеет простой вид, а во втором — сложный вид. Далее: α_0 — угол между осью абсцисс и касательной l_0 . Заметим, что он равен центральному углу дуги W_0B .

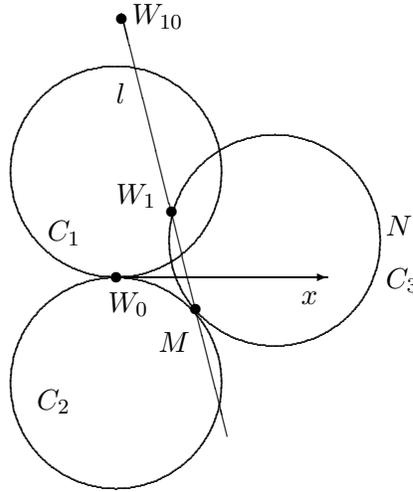


Рис. 2.

При определении угла β_1 применим необходимое условие его оптимальности (3.1), из которого следует, что если ОТП имеет простой вид (см. рис. 1), то движение убегающего должно быть направлено по прямой l_0 в сторону удаления от точки B . Если же ОТП имеет сложный вид (см. рис. 2), то движение убегающего должно быть направлено по прямой l .

Возникает вопрос: как определить по начальным данным вид ОТП? Предварительно укажем условия, при которых ОТП всегда имеет простой вид. Пусть $W_{10} \notin (C_1^0 \cup C_2^0)$. Очевидно, если начальное положение первого убегающего — точка W_{10} — “достаточно удалено” от начального положения преследователя — точки $W_0 = (0, 0)$, то убегающий не может попасть на окружность C_1 или C_2 быстрее, чем преследователь. Здесь встреча убегающего с преследователем может произойти только вне кругов C_1^0 и C_2^0 , а ОТП будет иметь простой вид. Используя соображения симметрии, далее будем рассматривать лишь случай, когда $y_1 \geq 0$. Тогда дуга $W_0B \in C_1$.

Можно показать, что для того, чтобы ОТП имела простой вид, достаточно потребовать выполнения неравенства

$$(a - 1)/2v_1 > \gamma_0, \quad (4.1)$$

где

$$\gamma_0 = \begin{cases} \arctan \frac{y_{10} - 1}{x_{10}} + \pi/2, & x_{10} \neq 0, \\ \pi, & x_{10} = 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

$$a = \sqrt{x_{10}^2 + (y_{10} - 1)^2}.$$

Заметим, что левая часть в неравенстве (4.1) равна времени, необходимому убегающему для преодоления половины расстояния между точками W_{10} и P , где P — точка окружности C_1 , ближайшая к W_{10} , а правая часть (4.1) равна времени перемещения преследователя из точки W_0 в точку P . Условие (4.1) является весьма грубым. Укажем более точное, но сложно проверяемое, достаточное условие того, что ОТП будет иметь простой вид.

Для того чтобы при $W_{10} \notin C_1^0$ и $y_{10} \geq 0$ ОТП имела сложный вид, необходимо выполнение двух следующих условий. Во-первых, луч, исходящий из точки W_{10} в направлении вектора $(\cos \beta_1, \sin \beta_1)$, должен пересекать окружность C_1 , т. е. угол $\beta_1 \in (2\gamma_0 - \alpha_0, \alpha_0 + \pi)$; во-вторых, убегающий до встречи с преследователем должен успевать по этому лучу попасть из точки W_{10} в круг C_1^0 . Укажем способ проверки последнего условия. Координаты x_φ , y_φ любой точки P_φ , находящейся на окружности C_1 , и расстояние d_φ между точками W_{10} и P_φ определяются формулами:

$$\begin{aligned} x_\varphi &= \sin \varphi, & y_\varphi &= 1 - \cos \varphi, \\ d_\varphi &= \sqrt{(x_\varphi - x_{10})^2 + (y_\varphi - y_{10})^2}, \end{aligned}$$

где φ — центральный угол дуги W_0P_φ . Время движения убегающего между точками W_{10} и P_φ равно d_φ/v_1 ; время движения преследователя по дуге W_0P_φ равно φ . Таким образом, значение функции

$$f(\varphi) = d_\varphi/v_1 - \varphi \quad (4.3)$$

равно разности указанных времен. Вычислим производную

$$f'(\varphi) = -[x_{10} \cos \varphi + (y_{10} - 1) \sin \varphi]/v_1 d_\varphi - 1. \quad (4.4)$$

Выражение в квадратной скобке в (4.4) равно скалярному произведению векторов $(\cos \varphi, \sin \varphi)$, $(x_{10}, y_{10} - 1)$. Оно положительно на интервале (α_0, γ_0) и отрицательно на интервале $(\gamma_0, 2\gamma_0 - \alpha_0)$. Поскольку значение производной в точке γ_0 отрицательно, а $f'(2\gamma_0 - \alpha_0) = 1/v_1 - 1 > 0$, то найдется точка $\varphi_0 \in (\gamma_0, 2\gamma_0 - \alpha_0)$, в которой производная (4.4) равна нулю, а функция (4.3) принимает наименьшее значение. Если в этой точке значение

$$f(\varphi_0) \geq 0, \quad (4.5)$$

то убегающий при любом направлении своего движения не успеет попасть вовнутрь круга C_1^0 , не встретив преследователя. Таким образом, неравенство (4.5) является достаточным условием того, что ОТП будет иметь простой вид. Оно является более точным, чем (4.1), но более трудно проверяемым.

В случае, когда имеют место соотношения $W_{10} \notin C_1^0$, $y_{10} \geq 0$, (4.5), а точка W_{10} не лежит в окрестности отрицательной полуоси абсцисс, для чего достаточно выполнения соотношения $0 \leq \alpha_0 \leq \pi$, предлагается следующее решение вспомогательной задачи. Вначале, считая убегающего неподвижным, строим ОТП, состоящую из дуги W_0B окружности C_1 и отрезка BW_{10} прямой l_0 , касающейся этой окружности в некоторой точке B и проходящей через точку W_{10} . Затем движение убегающего направляем по прямой l_0 , содержащей прямолинейный участок только что построенной ОТП (см. рис. 1).

Во-первых, направление движения убегающего по прямой l_0 удовлетворяет необходимому условию его оптимальности, т. к. l_0 является прямой переключения для ОТП, во-вторых, необходимость движения убегающего по прямой l_0 , проходящей именно через точку W_{10} , следует из того, что выбор другого направления, отличного от указанного, только увеличит время поимки. Действительно, пусть: W_1 — точка встречи преследователя с целью $W_1(t)$, которая движется по прямой l_0 ; r — расстояние между точками W_{10} и W_1 ; E — эвольвента, построенная для окружности C_1 и проходящая через точку W_1 ; C_0 — окружность радиуса r с центром в точке W_{10} . Тогда в достаточно большой окрестности точки W_1 окружность C_0 и эвольвента E имеют лишь одну общую точку — W_1 , а точки окружности C_0 находятся по одну сторону от дуги эвольвенты E , лежащей в этой окрестности. Поскольку C_0 является границей области достижимости цели $W_1(t)$ к моменту $T_* = r/v_1$, а E — границей области достижимости преследователя к этому же моменту, то из вышесказанного следует, что при любом другом направлении движения, отличном от указанного, время поимки будет меньше, чем T_* .

Можно показать, что момент T_* встречи преследователя с убегающим вычисляется по формуле

$$T_* = (|BW_{10}| + \alpha_0)/(1 - v_1), \quad (4.6)$$

где α_0 — центральный угол дуги W_0B ; $|BW_{10}|$ — длина отрезка BW_{10} .

Пусть точка W_{10} лежит в окрестности отрицательной полуоси абсцисс. Тогда строим две траектории преследователя (рис. 3) L_1 и L_2 , первая из которых состоит из дуги окружности C_1 и отрезка касательной к C_1 , а вторая — из дуги окружности C_2 и отрезка касательной к C_2 . Заметим, что эти траектории будут равными по длине, если точка W_{10} лежит на отрицательной полуоси абсцисс, т. е. $x_{10} < 0$, $y_{10} = 0$. Пусть для определенности $x_{10} < 0$, $y_{10} > 0$. Тогда траектория L_1 будет короче траектории L_2 . Направим движение убегающего по касательной прямой l_0 , содержащей прямолинейный участок траектории L_1 . Возможны два случая: (1) убегающий не успевает до встречи с преследователем покинуть верхнюю полуплоскость; (2) убегающий успевает до встречи с преследователем покинуть верхнюю полуплоскость. В случае (1) выбранное направление движения убегающего будет для него оптимальным, а траектория L_1 , дополненная отрезком $W_{10}W_1$, будет оптимальной для преследователя.

В случае (2) выбранное направление не будет оптимальным для убегающего, так как в точку W_1 , находящуюся в нижней полуплоскости, преследователь может попасть раньше, чем по траектории L_1 , дополненной отрезком $W_{10}W_1$, если криволинейный участок своей траектории он выберет на окружности C_2 . Поэтому при указанном поведении убегающего преследователь может обеспечить более раннюю встречу с ним. Следовательно, направление движения убегающего надо выбрать так, чтобы точка встречи W_1 оказалась на оси абсцисс. Здесь у преследователя будут две одинаковые оптимальные траектории L_1^* и L_2^* (рис. 3).

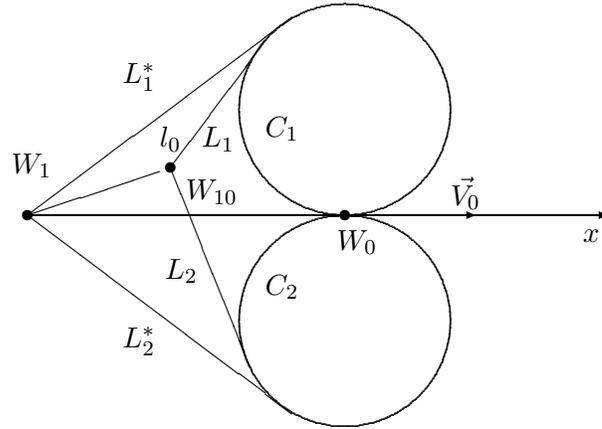


Рис. 3.

Определим на отрезке $[0, 2\pi]$ функцию $\beta_1 \rightarrow T^0$ (T^0 — момент встречи преследователя и убегающего, если последний движется в направлении, определяемом углом β_1 , а преследователь движется оптимальным образом). При условии (4.5) эта функция непрерывна и принимает наибольшее значение T^* (4.6) при $\beta_1 = \alpha_0$ (α_0 — угол наклона касательной l_0). Заметим также, что эта функция принимает наименьшее значение при $\beta_1 = \alpha_0 + \pi$, убывает на интервале $(\alpha_0, \alpha_0 + \pi)$ и возрастает на интервале $(\alpha_0 + \pi, \alpha_0 + 2\pi)$.

Для того чтобы ОТП имела сложный вид, необходимо выполнение условия

$$f(\varphi_0) < 0. \quad (4.7)$$

Пусть неравенство (4.7) выполнено. Тогда непустым будет множество G всех углов φ , при которых имеет место неравенство $f(\varphi) < 0$. Очевидно, в любую точку P_φ , $\varphi \in G$, убегающий попадает быстрее, чем преследователь. Обозначим через φ_* , $\varphi_* \leq \varphi_0$, угол, при котором

$f(\varphi_*) = 0$, а через β_* направляющий угол β_1 вектора, началом и концом которого являются точки W_{10} и P_{φ_*} . В точке β_* функция $\beta \rightarrow T^0(\beta)$ разрывна. Это связано с тем, что при $\beta_1 = \beta_* + \delta$ и при $\beta_1 = \beta_* - \delta$ (δ — достаточно малое положительное число) структуры ОТП будут различны: в первом случае ОТП будет иметь простой вид, а во втором случае — сложный. Поэтому время $T^0(\beta_1 + \delta)$, значительно меньше времени $T^0(\beta_1 - \delta)$.

В некоторых случаях функция $T^0(\beta_1)$ на интервале $(T^0(\beta_1 - \delta), \beta_1^*)$ возрастает. Поэтому здесь речь может идти только о наибольшей верхней грани для $T^0(\beta_1)$.

Каждому углу $\varphi \in G$ соответствует вектор, началом и концом которого являются точки W_{10} и P_φ . Пусть β_φ — угол, определяющий направление этого вектора. Совокупность $\{\beta_\varphi, \varphi \in G\}$ обозначим через G_1 . Пусть множество G непусто. Тогда непусто и множество G_1 , и у убегающего две возможности: обеспечить преследователю простой вид траектории, положив $\beta_1 = \alpha_0$, или постараться обеспечить сложный вид его траектории, определив среди углов $\beta_1 \in G_1$ тот угол, который удовлетворяет необходимым условиям оптимальности (3.1). Если указанный угол в G_1 найдется, то решением вспомогательной задачи будет этот угол или угол $\beta_1 = \alpha_0$.

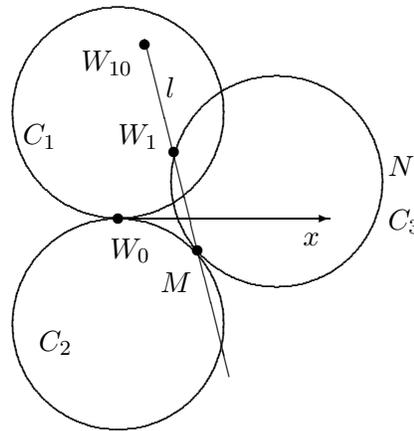


Рис. 4.

Из этих двух углов надо выбрать тот, которому соответствует траектория преследователя большей длины. Если $W_{10} \in C_1^0$ и $y_{10} \geq 0$, то ОТП может иметь только сложный вид. Действительно, предположим, противное: ОТП имеет простой вид. Следовательно, точка встречи преследователя с убегающим находится вне круга и имеет место равенство $\beta_1 = \alpha_0$, которое невозможно ввиду того, что касательная и секущая к одной и той же окружности не могут совпадать. Вид ОТП в рассматриваемом случае приведен на рис. 4.

5. Решение основной задачи

В [16] рассмотрен наиболее простой для исследования случай, когда точка $W_{10} = (x_{10}, y_{10})$ достаточно удалена от точек $W_0 = (0, 0)$, $W_{20} = (x_{20}, y_{20})$. Степень удалености такова, что криволинейные и прямолинейные участки оптимальной траектории преследователя (ОТП) чередуются при любом выборе убегающими направлений своих движений. Позднее будут определены достаточные условия, при которых этот случай наступает. В этом случае условие выравнивания [16] позволяет однозначно определить положения окружностей, содержащих криволинейные участки ОТП и, следовательно, определить саму ОТП.

Вид ОТП (при $y_1 \geq 0$) приведен на рис. 5, 6.

Здесь ОТП состоит из дуги W_0M окружности C_1 , отрезка MN прямой l_1 , касающейся C_1 и некоторой окружности C_5 , проходящей через точку W_1 встречи преследователя с первой

целью, дуги NW_1Q окружности C_5 , и отрезка QW_2 прямой l_2 , проходящей через точку W_2 и касающейся C_5 в точке Q .

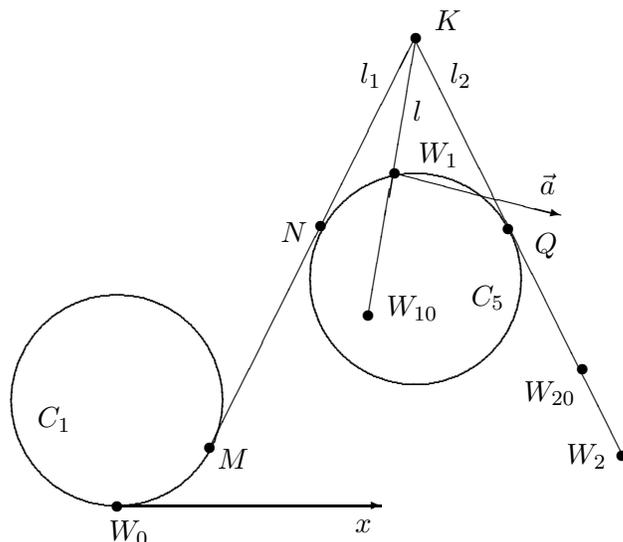


Рис. 5.

Вид ОТП зависит от того, по какую сторону от прямой l_0 (см. рис. 1) находится точка W_{20} , а именно от знака величины

$$z_0 = (y_{20} - y_{10}) \cos \alpha_0 - (x_{20} - y_{10}) \sin \alpha_0.$$

На рис. 5, 6 изображены ОТП соответственно при $z_0 < 0$ и $z_0 > 0$.

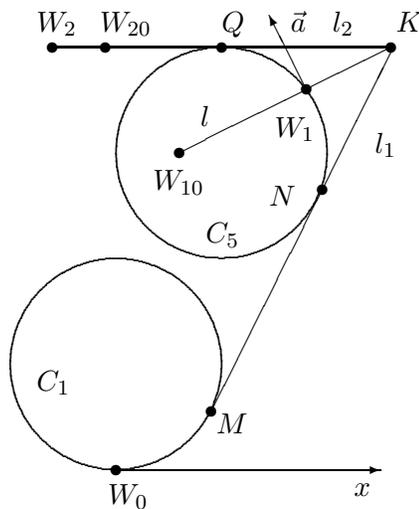


Рис. 6.

Пусть K — точка пересечения прямых l_1 и l_2 , l — прямая, проходящая через точки W_1 и K . Из условия выравнивания [16] вытекает, что окружность C_5 должна быть расположена так,

чтобы вектор \vec{a} , равный разности векторов преследователя и первой цели в точке W_1 , был бы ортогонален прямой l (см. рис. 5, 6). Последнее условие в рассматриваемом случае при заданном угле β_1 и неподвижной второй цели однозначно определяет ОТП.

Из необходимых условий оптимальности направлений движения убегающих (углов β_1 и β_2) вытекает, что прямые l и l_2 должны быть параллельными векторам Λ_1 и Λ_2 , а прямая l_1 должна быть параллельной вектору $\Lambda_1 + \Lambda_2$. Следовательно, направление первого убегающего должно быть таким, чтобы отрезок $W_{10}W_1$ лежал на прямой l , а второй убегающий двигался от точки W_{20} к точке W_2 по прямой l_2 , удаляясь от точки K .

В указанном случае предлагается следующий итерационный

Метод определения оптимальных направлений движения убегающих. Вначале предполагается, что второй убегающий неподвижен. Начальное приближение β_{10} угла β_1 выбирается при условии, что преследователь совершает простые движения [13–15]. Пусть теперь l — луч, проходящий через точку W_{10} в направлении вектора $(\cos \beta_{10}, \sin \beta_{10})$. Определим на луче l точку W_1 и окружность C_5 , проходящую через эту точку таким образом, чтобы выполнялись следующие условия: (1) центр окружности лежал бы на прямой, составляющей с прямой l угол $\arcsin v_1$; (2) траектория W_0MNW_1 , состоящая из дуги W_0M окружности C_1 , отрезка MN и дуги NW_1 окружности C_5 , имела бы длину, равную отношению длины отрезка $W_{10}W_1$ к величине v_1 .

Тогда W_1 есть точка встречи преследователя с первым убегающим и выполняется условие выравнивания. Пусть l_1 — прямая, содержащая отрезок MN ; K — точка пересечения прямых l_1 и l ; l_2^* — касательная (в точке $Q = (x_q, y_q)$ ($Q \neq N$)) к окружности C_5 и проходящая через точку K ; ν — угол между осью абсцисс и вектором, направленным из K в Q . Вычислим

$$z = (y_{20} - y_q) \cos \nu - (x_{20} - x_q) \sin \nu.$$

Знак величины z определяет местоположение точки W_{20} относительно прямой l_2^* . Если $z > 0$, то полагаем $\beta_1 = \beta_{10} + h$ ($h > 0$ — шаг варьирования — достаточно малое число); если $z < 0$, то полагаем $\beta_1 = \beta_{10} - h$. Варьирование угла β_1 проводим до тех пор, пока не получим равенство $z = 0$, при котором прямая $l_2 = l_2^*$ будет проходить через точку W_{20} . Указанный угол β_1 будет искомым. После определения угла β_1 строим траекторию ОТП $W_0MNW_1QW_{20}$, а движение второго убегающего направляем по прямой l_2 от точки W_{20} (см. рис. 5, 6) до точки W_2 встречи с преследователем.

Можно показать, что криволинейные и прямолинейные участки ОТП чередуются при выполнении соотношений (4.1)

$$(a_2 - 1)/2v_2 > T_1, \quad (5.1)$$

где T_1 — длина участка W_0MNW_1Q (см. рис. 5,6) ОТП, построенной при неподвижном втором убегающем ($W_2 = W_{20}$), a_2 — расстояние от точки W_{20} до центра окружности, содержащей дугу NW_1Q , v_2 — величина скорости второго убегающего.

Теперь рассмотрим случай, когда точка W_{10} либо лежит в круге C_1^0 , либо находится вблизи круга C_1^0 и для увеличения времени поимки первый убегающий может попасть в круг C_1^0 до встречи с преследователем. При этом, как и ранее, предполагаем, что точки W_{10} и W_{20} настолько удалены друг от друга, что заключительный участок ОТП является отрезком прямой. Это предположение существенно ограничивает выбор направлений движения второго убегающего: он может двигаться только по прямой, содержащей заключительный прямолинейный участок ОТП, построенной в предположении, что второй убегающий неподвижен. Здесь у первого убегающего две возможности: реализовать встречу вне круга C_1^0 так, чтобы ОТП имела один из видов, изображенных на рис. 5,6, либо выбрать угол β_1 ($\beta_1 \in G_1$) таким, чтобы первым участком ОТП была дуга окружности C_2 . При реализации первой возможности для выбора оптимальных направлений движения убегающих (углов β_1, β_2) может быть использован предложенный выше метод.

Во втором случае (при $\beta_1 \in G_1$) ОТП будет иметь более сложный вид.

При неподвижном втором убегающем она будет состоять (рис. 7) из дуги W_0M окружности C_2 , дуги MNR окружности C_3 , которая касается C_2 в точке M , дуги RW_1Q окружности C_4 , которая касается C_3 в точке R и проходит через точку встречи W_1 , и отрезка QW_{20} прямой l_2 , касающейся окружности C_4 в точке Q и проходящей через точку W_{20} . В силу принципа максимума прямая l_1 должна проходить через точки M и R . Пусть K — точка пересечения прямых l_1 и l_2 ; l — прямая, проходящая через точки K и W_1 .

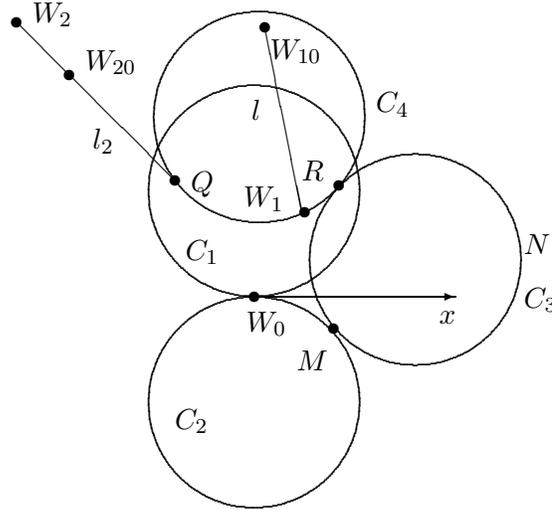


Рис. 7.

Для выполнения условия выравнивания необходимо, чтобы прямая l была ортогональна вектору \vec{a} , равному разности векторов преследователя и первой цели в точке W_1 . Кроме того, время движения первого убегающего от точки W_{10} в точку W_1 должно быть равно длине траектории W_0MNRW_1 преследователя. Эти два условия позволяют однозначно определить положение точки M на C_2 и положение точки R на C_3 , т. е. определить всю траекторию $W_0MNRW_1QW_{20}$ преследователя (при неподвижном втором убегающем). В соответствии с необходимыми условиями оптимальности углов β_1 и β_2 , угол β_1 выбираем так, чтобы отрезок $W_{10}W_1$ лежал на прямой l , а движение второго убегающего (определяемое углом β_2) направляем по прямой l_2 от точки W_{20} (см. рис. 7) до точки W_2 встречи с преследователем. В случаях, когда точки W_{10} и W_{20} находятся близко друг от друга или совпадают, воспользоваться необходимыми условиями оптимальности направлений движения убегающих не представляется возможным. Это связано с тем, что, во-первых, здесь заключительный прямолинейный участок у ОТП может отсутствовать и используемые условия становятся неинформативными, во-вторых, даже при малых изменениях направлений движения убегающих оптимальная траектория преследователя может существенно менять свою структуру. В этих случаях требуются дополнительные исследования.

6. Заключение

Для определенного множества начальных условий решена максиминная задача последовательного обхода нелинейной управляемой системой третьего порядка, описывающей простейшую модель движения автомобиля, самолета (преследователя) в горизонтальной плоскости [5] с двумя точками (убегающими), движущимися по прямым в этой же плоскости. Целью пресле-

дователя является обход (поимка) указанных точек за наименьшее время, а целью убегающих, действующих коллективно, является максимизация времени поимки. Для этого убегающие могут в начальный момент времени выбирать направления своих движений. При решении задачи используются необходимые условия оптимальности управления преследователя, описываемого общим векторным нелинейным дифференциальным уравнением [16], а также необходимые условия оптимальности направлений движения убегающих [20]. В работе определено ограничение на близость начальных точек W_{10} и W_{20} убегающих, при котором у траектории преследователя, удовлетворяющей необходимым условиям оптимальности, заключительный участок является отрезком прямой. При этом ограничении разработан метод построения указанной траектории преследователя и выбор направления движения убегающих. При нарушении этого ограничения требуются дополнительные исследования. Поскольку при построениях используются только необходимые условия оптимальности, то предлагаемые решения задач являются лишь претендующими на оптимальность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин [и др.] М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
2. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
3. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
5. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 497 с.
6. **Dubins L.E.** On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents // Amer. J. Math. 1957. Vol. 79. P. 497–516.
7. **Черноусько Ф.Л., Меликян А.А.** Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 270 с.
8. **Соскауне Е.** Plane pursuit with curvature constraints // SIAM J. Appl. Math. 1967. Vol. 15, no. 6. P. 197–220.
9. **Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А.** Трехмерное множество достижимости нелинейной системы // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. Вып. 3. С. 8–11.
10. **Хамза М.Х., Колас И., Рунгальдер В.** Оптимальные по быстродействию траектории полета в задаче преследования // Управление космическими аппаратами и кораблями. М.: Наука, 1971. С. 410–418.
11. **Pesvaradi T.** Optimal horizontal guidance law for Aircraft in the terminal area // IEEE Trans. Automat. Control. 1972. Vol. 17, no. 6. P. 763–772.
12. **Бердышев Ю.И.** Синтез оптимального по быстродействию управления для одной нелинейной системы четвертого порядка // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39, вып. 6. С. 985–994.
13. **Чикрий А.А., Калашникова С.Ф.** Преследование управляемым объектом группы убегающих // Кибернетика. 1987. № 4. С. 1–8.
14. **Петросян Л.А., Томский Г.В.** Геометрия простого преследования. Новосибирск: Наука, 1983. 143 с.
15. **Иванов М.Н., Маслов Е.П.** О сравнении двух методов преследования в задаче о поочередной встрече // Автоматика и телемеханика. 1983. № 7. С. 38–43.
16. **Бердышев Ю.И.** Об одной задаче последовательного сближения нелинейной управляемой системы третьего порядка с группой движущихся точек // Прикл. математика и механика. 2002. Т. 66, вып. 5. С. 742–752.
17. **Бердышев Ю.И.** О задаче обхода нелинейной управляемой системой третьего порядка двух точек // Изв. Урал. гос. ун-та. 2003. № 26. Сер. Математика и механика. Вып. 5. С. 24–33.

18. **Бердышев Ю.И.** О задаче последовательного обхода одним нелинейным объектом двух движущихся точек // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 1. С. 43–52.
19. **Бердышев Ю.И.** О построении области достижимости в одной нелинейной задаче // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006. Вып. 4. С. 22–26.
20. **Бердышев Ю.И.** Об одной нелинейной задаче последовательного управления с параметром // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. Вып. 3. С. 38–43.

Бердышев Юрий Иванович,
д-р. физ.-мат. наук, проф.
ведущий науч. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: berd@imm.uran.ru

Поступила 07.05.2008

УДК 519.17

СВОЙСТВА ГРАФОВ БЕЗ ПОРОЖДЕННЫХ ПОДГРАФОВ $K_{1,3}$ Г. М. Ермакова, В. В. Кабанов¹, Е. Ш. Сабирзянова, Вэньбинь Го¹

В статье исследуются свойства связных графов без порожденных подграфов $K_{1,3}$, содержащих 3-кликлу.

Ключевые слова: графы с условиями регулярности, графы без 3-лап.

Введение

Мы рассматриваем только конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Далее всюду подграф из Γ будет означать индуцированный подграф графа Γ . Для вершины a графа Γ через $\Gamma(a)$ обозначим подграф на множестве всех вершин, смежных с a . Этот подграф называется окрестностью вершины a в графе Γ . Если граф Γ зафиксирован, то вместо $\Gamma(a)$ будем писать $[a]$. Пусть a^\perp — подграф на множестве $[a] \cup \{a\}$. Для подграфа Δ графа Γ через Δ^\perp обозначим подграф на множестве $\bigcap_{a \in \Delta} a^\perp$. Через k_a обозначим валентность

вершины a в Γ , т. е. число вершин в $[a]$. Граф Γ называется регулярным валентности k , если $k_a = k$ для любой вершины a из Γ . Для ребра ac графа Γ через λ_{ac} обозначим число вершин в подграфе $[a] \cap [c]$. Граф Γ называется реберно регулярным с параметрами (v, k, λ) , если Γ — регулярный граф валентности k на v вершинах, в котором каждое ребро лежит в λ треугольниках, т. е. $\lambda_{ac} = \lambda$ для любого ребра ac графа Γ . Подграф $[a] \cap [b]$ назовем μ -подграфом, если вершины a, b находятся на расстоянии 2 друг от друга в графе Γ .

Граф Γ на v вершинах валентности k называется μ -регулярным с параметрами (v, k, μ) , если все его μ -подграфы имеют μ вершин. Если такой граф имеет диаметр 2, то он называется кореберно регулярным.

Пусть α — натуральное число. Под α -расширением графа Γ будем понимать граф Γ' , полученный заменой каждой вершины a из Γ на α -кликлу (a) , причем вершины из (a) и (b) смежны в Γ' тогда и только тогда, когда a и b смежны в Γ .

Граф (m, n) — это полный двудольный граф с долями порядка m и n . Граф $(1, m)$, называется m -лапой, если $m \geq 3$. Через $\{a; b_1, \dots, b_m\}$ будем обозначать m -лапу, в которой вершина a смежна с вершинами b_1, \dots, b_m .

Пусть X и Y — множества и $|X| = m$; $|Y| = n$. Напомним, что граф на множестве пар $X \times Y$ называется прямоугольной $m \times n$ -решеткой, если пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2, y_1 \neq y_2$ или $x_1 \neq x_2, y_1 = y_2$. Треугольным графом $T(m)$ называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, причем вершины $\{a, b\}, \{c, d\}$ смежны в $T(m)$ тогда и только тогда, когда они имеют единственный общий элемент. Если реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) является μ -регулярным графом, то он называется вполне регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) . Вполне регулярный граф с диаметром 2 называется сильно регулярным.

Мы называем n -угольником $a_1 a_2 \dots a_n$ связный регулярный граф валентности 2 на n вершинах, в котором $a_1 a_n, a_i a_{i+1}$ — ребра, $i = 1, \dots, n - 1$. Графом Тэйлора называется вполне регулярный граф диаметра 3, в котором каждая вершина лежит в $a^\perp \cup b^\perp$ для любых двух

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 06-01-00332).

вершин с $d(a, b) = 3$. Граф икосаэдра — это граф Тэйлора, в котором окрестность любой вершины является пятиугольником. Граф Тервиллигера — это неполный граф, в котором для некоторого фиксированного $\mu > 0$ все μ -подграфы являются кликами из μ вершин. Графом Шлефли называется сильно регулярный граф с параметрами $(27, 16, 10, 8)$, который является дополнительным к точечному графу обобщенного четырехугольника $GQ(2, 4)$.

Ядром подграфа Δ , содержащего более одной вершины, мы будем называть подграф $K(\Delta) = \Delta^\perp \cap \Delta$. Ядром вершины a называется подграф $K(a) = \{x \in \Gamma | x^\perp = a^\perp\}$. Число вершин в $K(a)$ будем обозначать через \hat{a} . Вершину a назовем редуцированной, если $K(a)$ состоит из единственной вершины, т. е. $\hat{a} = 1$. Граф Γ называется редуцированным, если все его вершины редуцированы. Пусть $x \equiv y$ тогда и только тогда, когда $x^\perp = y^\perp$. Редукцией графа Γ называется фактор-граф $\bar{\Gamma}$ графа Γ по отношению \equiv .

Если граф Γ удовлетворяет условиям теоремы 1 и для любой пары вершин из Γ на расстоянии 2 друг от друга подграф $M(u, v)$ является кликой, то такие графы были изучены.

В статье [1] В.В. Кабановым и А.А. Махневым изучались свойства графов, не содержащих подграфы, изоморфные полному двудольному графу $K_{1,3}$. Ими доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть Γ — неполный связный граф без 3-лап, в котором для некоторого фиксированного $\mu > 0$ μ -подграфы являются кликами из μ вершин. Тогда либо граф Γ является α -расширением графа икосаэдра, либо в Γ — Γ^\perp подграф на множестве всех вершин с некликовыми окрестностями является пустым, кликой или α -расширением связного графа с $\mu = 1$.

Если граф Γ не содержит подграфов, изоморфных полному двудольному графу $K_{1,3}$, и для любой пары вершин из Γ на расстоянии 2 друг от друга подграф $M(u, v)$ содержит одно и то же число вершин, то такие графы были изучены В.В. Кабановым и А.А. Махневым в той же статье [1] в предположении, что граф содержит тройку попарно несмежных вершин. Оказалось, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть Γ — связный граф без 3-лап, содержащий 3-кликку, в котором все μ -подграфы имеют одинаковое число вершин. Тогда либо Γ имеет диаметр больше двух и является графом из заключения теоремы 1, либо граф Γ является α -расширением одного из следующих графов:

- (1) прямоугольной $t \times n$ -решетки, $t \geq 3$, $n \geq 3$;
- (2) треугольного графа $T(t)$, $t \geq 6$;
- (3) графа Шлефли.

Таким образом, оказалось, что в графе без 3-лап, содержащем 3-кликку, μ -подграфы могут быть только одного типа, т. е. все кликовые или все некликовые. И.А. Вакулой и В.В. Кабановым в статьях [2, 3] графы без 3-лап, содержащие 3-кликку с некликовыми μ -подграфами, были изучены без предположения о числе вершин в подграфах $M(u, v)$.

В настоящей статье мы доказываем следующую теорему.

Теорема 3. Пусть Γ — связный граф без порожденных подграфов $K_{1,3}$, содержащий 3-кликку. Пусть также в Γ для любой пары вершин u, v на расстоянии 2 друг от друга подграф $M(u, v) = [u] \cap [v]$ содержит μ вершин, если он не является кликой и содержит ν вершин в противном случае. Если $\nu \geq \mu$, то все подграфы $M(u, v)$ в Γ одного типа, т. е. все кликовые или все некликовые.

Таким образом, доказываемая теорема ограничивает возможности для графов, содержащих подграфы $M(u, v)$ обоих типов.

1. Общие свойства графов без 3-лап

В первых леммах мы приводим некоторые очевидные свойства графов без 3-лап.

Лемма 1. Пусть $a \in \Gamma$. Тогда:

- (1) если b, c — несмежные вершины из $[a]$, то $[a] \subseteq b^\perp \cup c^\perp$;
- (2) для любого ребра ac из Γ подграф $[a] - c^\perp$ является кликой;
- (3) если b, c — несмежные вершины из $\Gamma - a^\perp$, то μ -подграф $[b] \cap [c]$ содержится в $\Gamma - a^\perp$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Пусть b, c — несмежные вершины из $[a]$, $x \in [a]$ и $x \notin b^\perp \cup c^\perp$. Тогда подграф на $\{a; x, b, c\}$ является 3-лапой.

(2) Пусть $[a] - c^\perp$ не является кликой. Тогда x, y — несмежные вершины из $[a] - c^\perp$. Получаем 3-лапу $\{a; x, y, c\}$, что противоречит условию.

(3) Пусть $[b] \cap [c] \cap [a] \neq \emptyset$. Тогда x — общая смежная для b и c , т. е. получили 3-лапу $\{x; a, b, c\}$. Лемма доказана.

Лемма 2. Если $acbd$ — четырехугольник графа Γ , то:

- (1) $a^\perp \cup b^\perp = c^\perp \cup d^\perp$;
- (2) если ce — ребро из $([a] \cap [b]) - d^\perp$, то c^\perp и e^\perp совпадают вне $[d]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Докажем, что $a^\perp \cup b^\perp \subseteq c^\perp \cup d^\perp$. По лемме 1(1) $a^\perp \subseteq c^\perp \cup d^\perp$ и $b^\perp \subseteq c^\perp \cup d^\perp$. Следовательно, $a^\perp \cup b^\perp \subseteq c^\perp \cup d^\perp$. Обратно (для c и d) аналогично.

(2) По пункту (1) $a^\perp \cup b^\perp = c^\perp \cup d^\perp$ и $a^\perp \cup b^\perp = e^\perp \cup d^\perp$, так как $e \not\sim d$. Значит, $e^\perp \cup d^\perp = c^\perp \cup d^\perp$ и $e^\perp - d^\perp = c^\perp - d^\perp$. Лемма доказана.

Пару вершин a, b назовем сильной парой графа Γ , если μ -подграф $[a] \cap [b]$ не является кликой. Заметим, что если $acbd$ — четырехугольник графа Γ , то пары a, b и c, d являются сильными. И обратно, если пара вершин является сильной, то она содержится в некотором четырехугольнике.

Лемма 3. Пусть a, b — сильная пара.

(1) Если окрестность некоторой вершины x содержит μ -подграф $[a] \cap [b]$, то x^\perp содержит a^\perp или b^\perp .

(2) Если $x \in [a] - [b]$, то либо $[x] \cap [b]$ содержит несмежную с a вершину, либо a^\perp содержит x^\perp , либо $[x] \cap [b]$ является кликой из $[a] \cap [b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Рассмотрим три возможных случая для x .

Если $x \not\sim a$ и $x \sim a$, то по лемме 2(1) $a^\perp \cup x^\perp = c^\perp \cup d^\perp$ и $a^\perp \cup b^\perp = c^\perp \cup d^\perp$. Следовательно, $a^\perp \cup b^\perp = a^\perp \cup x^\perp$ и $x^\perp - a^\perp = b^\perp - a^\perp$. По условию x^\perp содержит $[a] \cap [b]$. Значит, x^\perp содержит b^\perp .

Если $x \sim a$ и $x \not\sim b$, то, аналогично рассуждая, получим: x^\perp содержит a^\perp .

Случай, когда вершина $x \sim a$ и $x \sim b$, невозможен, так как $[x]$ содержит μ -подграф $[a] \cap [b]$.

(2) Пусть $x \sim a$ и $x \not\sim b$. Если $[x] \cap [b] \not\subseteq [a]$, то выполняется п. (1).

Пусть теперь $[x] \cap [b] \subseteq [a]$, и предположим, что есть 2 несмежные вершины в $[x] \cap [b]$. Следовательно, x, b — сильная пара и a^\perp содержит x^\perp или b^\perp . Так как $a \not\sim b$, то a^\perp содержит x^\perp . Лемма доказана.

Зафиксируем четырехугольник $acbd$ из Γ .

Лемма 4. Если $e \notin a^\perp \cup b^\perp$ и подграф $[b] \cap [e]$ не является кликой, то $x^\perp = b^\perp$ для любой несмежной с a вершины $x \in [c] \cap [d]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Берем x из $([c] \cap [d]) - a^\perp$. Тогда по п. (1) леммы 2 получаем $a^\perp \cup x^\perp = c^\perp \cup d^\perp$ и $a^\perp \cup b^\perp = c^\perp \cup d^\perp$. Отсюда $a^\perp \cup b^\perp = a^\perp \cup x^\perp$ и $b^\perp - a^\perp = x^\perp - a^\perp$. Так как подграф $[b] \cap [e]$ не является кликой, то существуют несмежные вершины y и z , для которых можно записать равенства $x^\perp \cup e^\perp = y^\perp \cup z^\perp$ и $b^\perp \cup e^\perp = y^\perp \cup z^\perp$. Отсюда $b^\perp - e^\perp = x^\perp - e^\perp$. Значит, $x^\perp = b^\perp$. Лемма доказана.

Пусть $\Delta = a^\perp \cup b^\perp$ и $X(\Delta) = \{x \in \Delta | x^\perp \subseteq \Delta\}$.

Лемма 5. Пусть $f \in \Gamma - \Delta$ и $[f]$ пересекает Δ . Тогда:

- (1) $[w] \cap X(\Delta)$ является кликой для $w \in [f] \cap \Delta$;
- (2) если $w \in [a] \cap [c] \cap [f]$, то $[w] \cap ([a] - c^\perp)$ лежит в $[f]$.

Доказательство. Пусть существуют несмежные вершины x, y из $X(\Delta)$. Следовательно, $[w] \subseteq x^\perp \cup y^\perp$. Противоречие, так как $\{w; f, x, y\}$ — 3-лапа.

Докажем второе утверждение. Пусть существует x из $[w] \cap ([a] - c^\perp)$ и $x \notin [f]$. Тогда $\{w; f, x, c\}$ — 3-лапа. Противоречие. Лемма доказана.

В леммах 6 и 7 предполагается, что подграф $([a] \cap [b]) - d^\perp$ содержит ребро cx .

Лемма 6. Если $\Gamma_2(c) - \Delta$ содержит вершину f , то (1) графы $[f] \cap [c]$ и $[f] \cap [x]$ совпадают.

Более того, (2) если $[x] - c^\perp$ содержит вершину из $[a] - [b]$, то $[f] \cap [x] \subseteq [b]$; (3) если $[f] \cap [c]$ пересекает $[a]$ и $[b]$, то c^\perp и x^\perp совпадают вне $[f] \cap [b] \cap [d]$.

Доказательство. Граф $[f] \cap [d]$ не пересекает c^\perp и x^\perp . $\Delta = c^\perp \cup d^\perp$ и $\Delta = x^\perp \cup d^\perp$. Значит, $c^\perp \cup d^\perp = x^\perp \cup d^\perp$.

Докажем (2). Пусть вершина g из $[a] - [b]$ лежит в $[x] - c^\perp$ и существует вершина y из $[f] \cap [x]$, несмежная с b . Тогда $x^\perp \cup d^\perp = g^\perp \cup b^\perp$, т. е. $\Delta = g^\perp \cup b^\perp$. $([x] \cap [f]) \cap [g] = \emptyset$ и $g^\perp \cup b^\perp = a^\perp \cup b^\perp$, т. е. g^\perp и a^\perp совпадают вне b^\perp . Получаем 3-лапу $\{y; f, g, c\}$.

Утверждение (3) получаем из (2). Лемма доказана.

Лемма 7. Если $e \in \Gamma_3(a)$ и $acbe$ — 3-путь, то μ -подграфы $[a] \cap [b]$, $[c] \cap [e]$ являются кликами.

Доказательство. Предположим, что $[a] \cap [b]$ содержит несмежные вершины s и d . Тогда по лемме 2(1) получаем $e \in c^\perp \cup d^\perp$. Противоречие с тем, что e на расстоянии 3 от a . Лемма доказана.

Лемма 8. Если Λ — связный граф, в котором все μ -подграфы регулярны одинаковой валентности, не являются кликами и имеют одинаковое число вершин, то Λ является регулярным графом.

Доказательство. Пусть a, b — смежные вершины из Λ , c — произвольная вершина из $[a] - b^\perp$. Если $\mu = |[b] \cap [c]|$ и α — валентность μ -подграфа $[b] \cap [c]$, то вершина c смежна с $\mu - \alpha - 1$ вершиной из $[b] - a^\perp$. Теперь число ребер из $[b] - a^\perp$ в $[a] - b^\perp$ равно $|[b] - a^\perp|(\mu - \alpha - 1)$, а число ребер из $[a] - b^\perp$ в $[b] - a^\perp$ равно $|[a] - b^\perp|(\mu - \alpha - 1)$. Отсюда $|[b] - a^\perp| = |[a] - b^\perp|$ и, следовательно, $|[a]| = |[b]|$. Теперь утверждение следует из связности графа Λ . Лемма доказана.

2. Сильные пары в графах без 3-лап

Лемма 9. Пусть $a \in \Gamma$, $b, e \in \Gamma_2(a)$ и вершина c из $[a] \cap ([b] - e^\perp)$ смежна с f из $[a] \cap ([e] - b^\perp)$. Тогда $[c]$ и $[f]$ совпадают на $a^\perp - ([b] \cup [e])$.

Доказательство. Пусть выполнены условия леммы. Тогда по лемме 1 $c^\perp \subseteq b^\perp \cup f^\perp$, $f^\perp \subseteq c^\perp \cup e^\perp$. Отсюда следует $c^\perp - b^\perp \subseteq f^\perp$ и $f^\perp - e^\perp \subseteq c^\perp$. Значит, $[c] \cap (a^\perp - ([b] \cup [e])) = [f] \cap (a^\perp - ([b] \cup [e]))$. Лемма доказана.

В леммах 10, 11 предполагается, что $\{a, b, e\}$ — 3-кликка из Γ и $[a] \cap [b]$ содержит несмежные вершины s, d .

Лемма 10. Пусть $[c] \cap [e]$ содержит вершины u и v из $[a]$ и w из $[b]$. Если $([a] \cap [b]) - d^\perp$ содержит вершину z , не лежащую в $K(c)$, то для любой вершины x из $([a] \cap [b] \cap [c]) - z^\perp$ ее окрестность $[x]$ содержит $[b] - ([a] \cup [e])$ и $[a] - ([b] \cup [e])$.

Доказательство. Поскольку $z \notin K(c)$, т. е. $z^\perp \neq c^\perp$, то $z \notin d^\perp, z \in [a] \cap [b]$. По лемме 6 $e \in \Gamma_2(c)$ и $([c] \cap [e]) \cap [a]$ содержит вершину u , $([c] \cap [e]) \cap [b]$ содержит вершину w . Следовательно, $[c]$ и $[z]$ совпадают вне $[a] \cap [b] \cap [d]$. По прямоугольному соотношению $a^\perp \cup b^\perp = z^\perp \cup x^\perp = c^\perp \cup d^\perp = z^\perp \cup d^\perp$. Значит, $z^\perp - d^\perp = c^\perp - d^\perp$ и $x^\perp - z^\perp = d^\perp - z^\perp$. Берем элемент $y \in [b] - ([a] \cup [e])$, и пусть он несмежный с x . Тогда, так как z, x — несмежные из $[b]$ и y, x — несмежные, то y, z — смежные вершины. Так как $[z]$ и $[c]$ совпадают вне $[a] \cap [b] \cap [d]$, то y, c — смежные. Аналогично z, u — смежные. u, y — несмежные, так как иначе $\{u; a, y, e\}$ — это 3-лапа. Тогда x, u — смежные, так как иначе $\{c; x, y, u\}$ — 3-лапа. Теперь получаем противоречие с тем, что $\{u; z, x, e\}$ — 3-лапа. Значит y, x — смежные, т. е. $y \in [x]$. Лемма доказана.

Лемма 11. Пусть $[a] \cap [e]$ содержит несмежные вершины f, g . Тогда:

- (1) каждая вершина из $[a] - ([b] \cup K(a))$ смежна точно с одной вершиной из множеств $\{c, d\}, \{f, g\}$ (в частности, можно считать, что cf, dg — ребра);
- (2) если μ -подграфы $[c] \cap [g], [f] \cap [d]$ имеют непустое пересечение с $[b] \cap [e]$, то любая вершина из $[c] \cap [g] \cap [b] \cap [e]$ не смежна с вершинами из $[f] \cap [d] \cap [b] \cap [e]$.

Доказательство. (1) Возьмем x вершину из $[a] - [b]$. Тогда x обязательно смежная с c или d (иначе $\{a; x, c, d\}$ 3-лапа). Вершина x не может быть смежна с c и d одновременно, иначе по лемме 5 $x^\perp = a^\perp$. Это противоречит условию $x \notin K(a)$.

(2) Если u — вершина из $[c] \cap [g] \cap [b] \cap [e]$, смежная с $w \in [f] \cap [d] \cap [b] \cap [e]$, то $\{w, d, f\}$ является 3-кликкой из $[u]$. Противоречие. Лемма доказана.

В леммах 12–14 предполагается, что $[a] \cap [e]$ содержит несмежные вершины f, g , причем cf, dg — ребра в Γ .

Лемма 12. Пусть $[c] \cap [d]$ содержит вершину x из $[a] \cap [b]$. Без ограничения общности $x \in [g] - [f]$. Тогда:

- (1) графы $[c], [x]([d], [g], [x])$ совпадают на $[b] - ([a] \cup [e])$ (соответственно на $[a] - ([b] \cup [e])$);
- (2) если x не смежна с некоторой вершиной g' из $[d] \cap [a] \cap [e]$, то $[b] - ([a] \cup [e])$ лежит в $[c] \cap [x]$ и $[a] - ([b] \cup [e])$ содержится в $[d] \cap [x] \cap [g']$;
- (3) если x смежна с некоторой вершиной f' из $[c] \cap [a] \cap [e]$, то $[b] - ([a] \cup [e])$ лежит в $[d]$ и $[a] - K(a)$ содержится в $[b] \cup [e]$.

Доказательство. (1) Докажем равенство $[c] \cap ([b] - ([a] \cup [e])) = [x] \cap ([b] - ([a] \cup [e]))$ двумя включениями:

(\subseteq): Пусть $w \in [c] \cap ([b] - ([a] \cup [e]))$ и вершина w не смежна с x . Тогда $\{c; w, x, f\}$ — 3-лапа при $x \in [g] - [f]$. При $x \in [f] - [g]$ в предположении, что wx — не ребро, получаем 3-лапу $\{a; c, d, f\}$.

(\supseteq): Пусть $w' \in [x] \cap ([b] - ([a] \cup [e]))$ и $w' \notin [c]$. Тогда $w' \in [g]$, так как иначе $\{x; c, w', g\}$ — 3-лапа. Получаем 3-лапу $\{g; a, e, w'\}$. Противоречие.

Теперь докажем, что $[d], [g], [x]$ совпадают на $[a] - ([b] \cup [e])$. По лемме 9 $a \in \Gamma, b, e \in \Gamma_2(a)$, и рассмотрим $\{d, g\}$ — для них выполняется лемма и $\{x, g\}$ — и для них выполняется лемма, т. е. $[d] \cap ([a] - ([b] \cup [e])) = [g] \cap ([a] - ([b] \cup [e])) = [x] \cap ([a] - ([b] \cup [e]))$.

(2) Покажем, что $[d] - [g'] \subseteq [x]$. Берем произвольную вершину $y \in [d] - [g']$. Если $y \notin [x]$, то получаем $\{d; x, y, g'\}$ — 3-лапа. Следовательно $y \in [x]$. Теперь докажем включение $[d] \cap ([b] - ([a] \cup [e])) \subseteq [x]$. Пусть вершина w'' из $[d] \cap ([b] - ([a] \cup [e]))$ и $w'' \notin [x]$. Тогда $\{d; x, g', w''\}$ — 3-лапа. Поэтому $[d] \cap ([b] - ([a] \cup [e])) \subseteq [x]$. По лемме 1 $w'' \notin [g']$. Значит $[b] - ([a] \cup [e])$ лежит в $[c] \cap [x]$ по п. (1) леммы 12. Далее, $[d] \cap ([a] - ([b] \cup [e])) = [g'] \cap ([a] - ([b] \cup [e])) = [g] \cap ([a] - ([b] \cup [e])) = [x] \cap ([a] - ([b] \cup [e]))$. Так как $[x]$ и $[g']$ совпадают на разности $[a] - ([b] \cup [e])$ и x, g' — несмежные, то $([a] - ([b] \cup [e])) \subseteq [d] \cap [x] \cap [g']$. Лемма доказана.

Лемма 13. Пусть $[a] \cap [b]$ содержит 3-путь $sxyd$. Тогда:

- (1) граф $[x] \cap [y]$ содержит $[b] - ([a] \cup [e])$, $[b] \cap [e] \neq \emptyset$;
- (2) если $[x]$ пересекает $[b] \cap [e]$, то $[a] - ([b] \cup [e])$ лежит в $[y]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Пусть $z \in [b] - ([a] \cup [e])$. По лемме 12(1) $[x]$ и $[y]$ совпадают на $[b] - ([a] \cup [e])$. Предположим, что z не лежит в $[x] \cap [y]$, т. е. $z \not\sim x$ и $z \not\sim y$. Выпишем прямоугольное соотношение: $c^\perp \cup d^\perp = a^\perp \cup b^\perp = c^\perp \cup y^\perp = x^\perp \cup d^\perp$. Значит,

$$y^\perp - c^\perp = d^\perp - c^\perp, \quad (*)$$

$$x^\perp - d^\perp = c^\perp - d^\perp. \quad (**)$$

С л у ч а й 1: пусть $z \sim c$ и $z \not\sim d$. Тогда $z \notin [d]$ и по равенству (**) получаем $z \sim x$. Противоречие.

С л у ч а й 2: пусть $z \sim d$ и $z \not\sim c$. Тогда по равенству (*) $z \sim y$. Противоречие.

С л у ч а й 3: пусть $z \sim c$ и $z \sim d$. Так как $z \not\sim x$, то $x \sim f$ и $x \not\sim g$. Поскольку $z \not\sim y$, то $y \sim g$ и $y \not\sim f$. Заметим, что в подграфе $[b] \cap [e]$ нет вершин, которые были бы смежны и с c , и с d , т. е. $[b] \cap [e] \cap [c] \cap [d]$ пусто. Тогда подграф $[b] \cap [e]$ разбивается на две части: вершины из $[c] \cap [x]$ и вершины из $[d] \cap [y]$. Поскольку $a^\perp \cup b^\perp = c^\perp \cup d^\perp = a^\perp \cup z^\perp$, то z смежна со всеми вершинами из $[b] \cap [e]$. Если взять вершину u из $[c] \cap [x]$ в подграфе $[b] \cap [e]$, то, поскольку $z \sim u$, получаем 3-лапу $\{u; z, e, x\}$. Таким образом, $[c] \cap [x] \cap [b] \cap [e]$ пусто. Аналогично, если возьмем вершину $w \in [d] \cap [y] \cap [b] \cap [e]$, то получим 3-лапу $\{w; z, e, y\}$. Противоречие.

(2) Пусть $u \in ([b] \cap [e]) \cap [x]$. Тогда $u \not\sim d$ и, значит, $u \not\sim c$. Окрестность вершины x содержит несмежные вершины y и u . Берем вершину z из $[a] - ([b] \cup [e])$. Если $z \sim x$, то $z \sim y$, так как $z \not\sim u$ по лемме 2. Теперь пусть $z \not\sim x$. Тогда $z \sim d$ и $z \sim c$. Далее выпишем прямоугольное соотношение: $a^\perp \cup b^\perp = c^\perp \cup d^\perp = z^\perp \cup b^\perp$. Значит, окрестности вершин a и z совпадают вне b^\perp и поэтому $z \sim f, z \sim g$. И теперь мы можем выписать еще одно прямоугольное соотношение: $a^\perp \cup e^\perp = f^\perp \cup g^\perp = z^\perp \cup e^\perp$, из которого следует, что $a^\perp - e^\perp = z^\perp - e^\perp$. Следовательно, $z \sim x$ и $z \sim y$. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 14. Пусть $[b] \cap [e]$ содержит несмежные вершины u, w и cu, dw — ребра в Γ . Если $[a] \cap [b]$ содержит смежную с c, d вершину x , то либо $x \in [u] - [w]$ и или x, e — сильная пара, или подграф c, d, f, g, u, w является шестиугольником, либо $x \in [w] - [u]$ и $[b] - K(b)$ содержится в $[a] \cup [e]$, $[a] - K(a)$ содержится в $[b] \cup [e]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности $x \in [g] - [f]$. Допустим сначала, что $x \in [u] - [w]$. В этом случае либо вершины u, g из $[x] \cap [e]$ несмежны, либо ug — ребро и подграф $\{c, d, f, g, u, w\}$ является шестиугольником.

Допустим теперь, что $x \in [w] - [u]$. В этом случае по лемме 9 графы $[x]$, $[w]$ и $[d]$ совпадают на $[b] - ([a] \cup [e])$. Докажем, что $[b] - K(b) \subseteq [a] \cup [e]$. Пусть $z \in [b] - K(b)$, т. е. $z \sim b$ и $z^\perp \neq b^\perp$. Так как $[x]$, $[w]$ и $[d]$ совпадают на $[b] - ([a] \cup [e])$, то $z \sim c$, или $z \sim d$, или $z \sim c, d$, иначе из вершины b получаем 3-лапу. Рассмотрим эти случаи:

С л у ч а й 1: пусть $z \sim c$ и $z \not\sim d$. Тогда по лемме 12 $z \sim x$, и так как окрестности вершин x и d совпадают, то $z \sim d$. Противоречие.

С л у ч а й 2: если $z \sim d$ и $z \not\sim c$. Но тогда $z \sim x$ и, значит, $z \sim c$. Противоречие.

С л у ч а й 3: пусть теперь $z \sim c$ и $z \sim d$. Выпишем прямоугольное соотношение: $b^\perp \cup a^\perp = c^\perp \cup d^\perp = z^\perp \cup a^\perp$, т. е. $b^\perp - a^\perp = z^\perp - a^\perp$. Таким образом, $z \sim \{u, w\}$. Из прямоугольного соотношения $b^\perp \cup e^\perp = u^\perp \cup w^\perp = z^\perp \cup e^\perp$ следует $b^\perp - e^\perp = z^\perp - e^\perp$. Поскольку b^\perp и z^\perp совпадают вне a^\perp и b^\perp и z^\perp совпадают вне e^\perp , то $b^\perp = z^\perp$. Противоречие. Лемма доказана.

3. Графы без 3-лап с ограничениями на их μ -подграфы

Лемма 15. Пусть a, b — вершины из Γ , находящиеся на расстоянии 2, $e \in \Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$, $x \in K([a] \cap [e])$, y — несмежная с x вершина из $K([b] \cap [e])$.

(1) Если $d(x, b) = d(y, a) = 2$, то либо подграф $[x] \cap [y]$ содержит вершину z из $[a] \cap [b]$, либо $M(a, y)$, $M(x, b)$ не являются кликами, а $M(x, y)$ — клика.

(2) Если a, b — сильная пара, то выполняется заключение утверждения (1).

Доказательство. (1) Пусть $|[x] \cap M(a, b)| = \alpha$ и $|[y] \cap M(a, b)| = \beta$. Тогда $|[x] \cap M(b, e)| = \begin{cases} \mu - \alpha \\ \nu - \alpha \end{cases}$ и $|[y] \cap M(b, e)| = \begin{cases} \mu - \beta \\ \nu - \beta \end{cases}$. Кроме того, μ -подграф $M(x, y)$ может быть кликовым или некликовым. В этот μ -подграф попадают вершины $[x] \cap M(b, e)$, $[y] \cap M(a, e)$ и вершины из $K(e)$. Составим теперь соотношения для числа вершин подграфа.

Случай 1: если $|[x] \cap M(b, e)| = \mu - \alpha$, $|[y] \cap M(a, e)| = \mu - \beta$ и $|M(x, y)| = \mu$, то получаем $(\mu - \alpha) + (\mu - \beta) + \hat{e} \leq \mu$. Значит, $\mu + \hat{e} \leq \alpha + \beta$. Или $\mu < \alpha + \beta$. Отсюда следует, что $M(x, y) \cap M(a, b) \neq \emptyset$.

Случай 2: если $|[x] \cap M(b, e)| = \nu - \alpha$, $|[y] \cap M(a, e)| = \mu - \beta$ и $|M(x, y)| = \mu$, то получаем $(\nu - \alpha) + (\mu - \beta) + \hat{e} \leq \mu$. Значит, $\nu \leq \alpha + \beta - \hat{e}$. Или $\mu \leq \nu < \alpha + \beta$. Отсюда следует, что $M(x, y) \cap M(a, b) \neq \emptyset$.

Случай 3: если $|[x] \cap M(b, e)| = \nu - \alpha$, $|[y] \cap M(a, e)| = \nu - \beta$ и $|M(x, y)| = \mu$, то получаем $(\nu - \alpha) + (\nu - \beta) + \hat{e} \leq \mu$. Значит, $2\nu - \nu \leq 2\nu - \mu \leq \alpha + \beta - \hat{e}$. Или $\mu \leq \nu \leq \alpha + \beta - \hat{e}$. Отсюда следует, что $M(x, y) \cap M(a, b) \neq \emptyset$.

Случай 4: если $|[x] \cap M(b, e)| = \nu - \alpha$, $|[y] \cap M(a, e)| = \nu - \beta$ и $|M(x, y)| = \nu$, то получаем $(\nu - \alpha) + (\nu - \beta) + \hat{e} \leq \nu$. Значит, $\mu \leq \nu \leq \alpha + \beta - \hat{e}$. Отсюда следует, что $M(x, y) \cap M(a, b) \neq \emptyset$.

Случай 5: если $|[x] \cap M(b, e)| = \mu - \alpha$, $|[y] \cap M(a, e)| = \mu - \beta$ и $|M(x, y)| = \nu$, то получаем $(\mu - \alpha) + (\mu - \beta) + \hat{e} \leq \nu$ или $2\mu - \nu \leq \alpha + \beta - \hat{e}$. Получаем особый случай: $M(x, b)$ и $M(y, a)$ — некликовые подграфы и $M(x, y)$ — кликовый.

(2) Если a, b — сильная пара, то в подграфе $[a] \cap [b]$ содержится пара несмежных вершин c, d . Тогда вершина x смежна с c или d . Таким образом, $x \in \Gamma_2(b)$. Аналогично, вершина y смежна с c или d и, следовательно, $y \in \Gamma_2(a)$. Лемма доказана.

Лемма 16. Если Γ является графом Тервиллигера без 3-лап и содержит 3-кликку, то Γ имеет диаметр больше 2.

Доказательство. Пусть $\{x, y, z\}$ является 3-кликкой из Γ и диаметр Γ равен 2. Если для некоторой вершины u из $[x] \cap [z]$ найдется несмежная с ней вершина w из $[y] \cap [z]$, то по лемме 15(1) z является сильной вершиной. Противоречие с определением графа Тервиллигера. Значит, любая вершина из $[x] \cap [z]$ смежна с любой вершиной из $[y] \cap [z]$. Но тогда ни одна вершина из $[x] \cap [y]$ не смежна ни с одной вершиной из $([x] \cap [z]) \cup ([y] \cap [z])$. Противоречие с условием на диаметр графа. Лемма доказана.

Пусть далее граф содержит четырехугольник $abcd$.

Лемма 17. Пусть $e \in \Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$ и μ -подграф $[b] \cap [e]$ является кликой. Тогда существует пара несмежных вершин $x \in K([a] \cap [e])$ и $y \in [b] \cap [e]$ такая, что подграф $[x] \cap [y]$ содержит вершину z из $[a] \cap [b]$. В частности, пары x, y и e, z являются сильными.

Доказательство. Пусть $e \in \Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$ и вершина x принадлежит $K([a] \cap [e])$. Пусть для определенности $x \in [c] - [d]$. Далее, $[x]$ содержит вершину c из $[a] \cap [b]$, поэтому x не смежна с некоторой вершиной y из $[b] \cap [e]$. Согласно лемме 15 либо для пары вершин x, y существует вершина z из $[a] \cap [b]$, и, значит, лемма доказана, либо $M(a, y)$, $M(x, b)$ не являются кликами, а $M(x, y)$ — клика.

Докажем, что последнее невозможно. Пусть $M(a, y)$, $M(x, b)$ — не являются кликами, а $M(x, y)$ — кликовый подграф, и предположим, что для любой пары несмежных вершин x из $K([a] \cap [e])$ и $y \in [b] \cap [e]$ выполняется $M(x, y) \cap M(a, b) = \emptyset$.

Теперь среди всех пар x, y , обладающих указанным свойством выберем такую, что вершина x захватывает наибольшее количество вершин в подграфе $[b] \cap [e]$, т. е. $|[x] \cap M(b, e)| = \max |[x'] \cap M(b, e)|$ для всех x' из $K(a, e)$. Пусть y — вершина из $[b] \cap [e]$ такая, что $y \not\sim x$ и подграф $[x] \cap [y]$ не пересекает $[a] \cap [b]$, т. е. $[x] \cap [y]$ — клика. Теперь выберем произвольную вершину x' из $K(a, e)$, отличную от x . Если $x' \sim y$, то данная вершина x' смежна со всеми

вершинами подграфа $[x] \cap M(b, e)$, так как $[x] \cap [y]$ — клика, и еще x' смежна с вершиной y . Противоречие. Тогда получаем, что вершина y не смежна ни с одной вершиной из ядра подграфа $M(a, e)$.

Заметим, что подграф $M(a, e)$ не может быть кликой, иначе $M(a, y)$ попадает в $M(a, b)$.

Так как вершины c и d находятся на расстоянии 2 от e , то можно рассмотреть подграфы $M(c, e)$ и $M(d, e)$. Поскольку в $M(a, e) \cup M(b, e)$ нет вершин, несмежных с c и d одновременно, а также нет общих смежных для c и d , то $M(a, e) \cup M(b, e) = M(c, e) \cup M(d, e)$. Следовательно, $|M(c, e)| + |M(d, e)| = \mu + \nu$. Таким образом, получили две возможности: либо $M(c, e)$ не является кликой, а $M(d, e)$ — клика, либо $M(c, e)$ — клика, а $M(d, e)$ не клика.

С л у ч а й 1: $M(c, e)$ не является кликой, а $M(d, e)$ — клика. Подграф $M(c, e)$ не является кликой, и потому в нем существует пара несмежных вершин f и g :

(а) если f из $(M(a, e) \cap [y]) \setminus K(a, e)$ и g из $M(b, e) \setminus [x]$, то для такой пары несмежных вершин получаем 3-лапу $\{y; f, g, d\}$. Противоречие.

(б) если f из $M(a, e) \setminus ([y] \cup K(a, e))$ и g из $M(b, e) \setminus [x]$, то для такой пары несмежных вершин получаем $g \sim f'$, где f' — это вершина из $M(a, e)$, несмежная с вершиной f , причем $f' \sim d$. Но тогда получаем 3-лапу $\{f'; x, g, d\}$. Противоречие.

(в) если f из $M(a, e) \setminus ([y] \cup K(a, e))$ и g из $M(b, e) \cap [x]$. Поскольку $M(d, e)$ — клика, то окрестности вершин d и y в подграфе $M(a, e)$ совпадают. Рассмотрим подграф $M(g, d)$: там лежат $M(d, e)$ и $K(b)$. Но $M(d, e)$ — клика, и получаем $|M(g, d)| \geq \nu + \hat{b}$; противоречие. Таким образом, случай 1 невозможен.

С л у ч а й 2: $M(c, e)$ — клика, а $M(d, e)$ не клика. Заметим, что $M(c, e) \cap (M(b, e) \setminus [x])$ пусто. Подграф $M(d, e)$ некликовый и, значит, существует пара несмежных вершин f и y' :

(а) если f из $M(a, e) \cap [y]$ и y' из $M(b, e) \setminus [x]$. Если $M(b, e) \cap [c]$ не пусто, т. е. существует вершина g , то $g \sim f$, так как $M(x, y)$ — клика, и получаем 3-лапу $\{g; f, y', c\}$; противоречие. Следовательно, $M(b, e) \cap [c]$ пусто и поэтому $M(c, e) \subset M(a, e)$. Значит, число вершин в кликовом подграфе меньше, чем в некликовом. Противоречие.

(б) если f из $M(a, e) \setminus ([y] \cup K(a, e))$ и y' из $M(b, e) \setminus [x]$. Если существует вершина g из $M(d, e) \cap M(b, e) \cap [x]$, то получаем 3-лапу $\{x; c, f, g\}$. Причем $g \not\sim f$, так как $g \sim f'$ и $M(x, y)$ — клика, где f' — вершина из подграфа $M(a, e)$, несмежная с f . Значит, $M(d, e) \cap M(b, e) \cap [x]$ пусто. Но тогда в подграфе $M(b, x)$ содержится только $[x] \cap M(a, b)$ и $[c] \cap M(b, e)$, но по условию подграф $M(b, x)$ не является кликой. Противоречие. Следовательно, случай 2 невозможен. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Если вершина e из $\Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$, то либо она имеет некликовый подграф с вершинами a и b , либо оба подграфа $[a] \cap [e]$ и $[b] \cap [e]$ являются кликами. В первом случае e — сильная вершина по определению, во втором — по лемме 17. Следовательно, все вершины из $\Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$ являются сильными.

Лемма 18. Если a является сильной вершиной из Γ , то $\Gamma_3(a)$ — пустой граф.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Gamma_3(a)$ не пусто, т. е. существует вершина $e \in \Gamma_3(a)$ и $afge$ — 3-путь. Пусть $g \sim b$. Вершина b смежна с f или с e , так как иначе получим 3-лапу $\{g; b, e, f\}$. Заметим, что по лемме 8 $b \not\sim e$ (если $b \sim e$, то $acbe$ — 3-путь и $[a] \cap [b]$ клика; противоречие). Тогда b смежна с f . Далее, $[a] \cap [g] \subseteq [b]$, иначе $[g]$ содержит b, e и вершину из $([a] \cap [g]) - [b]$ (образуется 3-лапа). Отсюда $[a] \cap [g] \subseteq [a] \cap [b]$, причем $[a] \cap [g]$ — клика, а подграф $[a] \cap [b]$ не является кликой. Получили противоречие с тем, что $\nu \geq \mu$.

Пусть $c \in \Gamma_2(e)$, т. е. существует вершина x именно из $\Gamma_2(a)$. Данная вершина x смежна с b , так как иначе образуется 3-лапа $\{c; a, b, x\}$. Противоречие, как и в предыдущем абзаце (в роли g теперь вершина x). Таким образом, c и d не лежат в $\Gamma_2(e)$. Вершина f смежна с c или с d , и без ограничения общности будем считать, что $f \sim c$. Следовательно, $c \in \Gamma_3(e)$. Пусть $x \in [b] \cap [e]$. Тогда $x \in \Gamma_2(a)$, и без ограничения общности $x \sim c$. Мы получили 3-путь $acxe$, в котором $x \sim b$. Значит, $b \notin \Gamma_2(e)$.

Если $g \in \Gamma_2(b)$, то существует вершина y из $[g] \cap [b]$ такая, что $y \in \Gamma_2(a)$. Так как вершина b находится на расстоянии, большем 2 от e , то подграф $[b] \cap [g]$ — клика. Берем $z \in [a] \cap [g]$. По лемме 17 можно считать, что z, y — сильная пара из подграфа $[x] \cap [g]$, где $x \in [a] \cap [b]$. Вершина y не может быть сильной парой для a . Тогда $e \sim y$ (иначе $\{g; e, y, z\}$ — 3-лапа и $e \not\sim z$, поскольку $e \in \Gamma_3(a)$). Получили $y \in \Gamma_2(a) \cap [b]$. Возникает 3-путь axy , в котором $y \sim b$. Противоречие, как и в первом абзаце. Теперь рассмотрим $bcfg$ — 3-путь, причем $g \notin \Gamma_2(b) \cup b^\perp$, т. е. вершина g на расстоянии 3 от b . Противоречие с тем, что окрестность вершины f содержит a , которая образует сильную пару с вершиной b . Таким образом, $\Gamma_3(a)$ пусто. Лемма доказана.

Лемма 19. *Граф Γ имеет диаметр 2.*

Доказательство. Пусть Γ имеет диаметр больше 2 и вершины f, g находятся на расстоянии 3 друг от друга. По лемме 18 f, g не являются сильными вершинами. Из замечания после леммы 17 $f, g \in x^\perp \cup y^\perp$ для любой сильной пары x, y . Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $f \in ([a] \cap [c]) - ([b] \cup [d])$, $g \in ([b] \cap [d]) - ([a] \cup [c])$.

По лемме 18 $\Gamma - (a^\perp \cup b^\perp) = \Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$. Пусть $\Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$ не пусто и $e \in \Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$. По лемме 17 e — сильная вершина и, значит, e смежна точно с одной из вершин в $\{f, g\}$. Пусть e смежна с g . Если μ -подграф $[b] \cap [e]$ не является кликой, то он содержит сильную пару x, y и, значит, $[f] \cap [b] \cap [e]$ не пусто. Тогда f содержится в $x^\perp \cup y^\perp$. Противоречие с выбором f , так как $x^\perp \cup y^\perp = b^\perp \cup e^\perp$. Далее, μ -подграф $[a] \cap [e]$ не может быть кликой, поскольку в противном случае по лемме 17 вершина g будет сильной; противоречие. Так f как не является сильной вершиной, то μ -подграфы $[f] \cap [b]$ и $[f] \cap [e]$ являются кликами, причем вершина $c \in [f] \cap [b]$ не смежна с некоторой вершиной h из $[f] \cap [e]$. Заметим, что $d(f, g) = 2$. Действительно, если $h \in [a]$, то это следует из леммы 2(1). Если $h \in [e] - [a]$, то вершина h сильная и $d(h, b) = 2$ по лемме 18. Теперь по лемме 17(1) f — сильная вершина. Опять, по лемме 18 $d(f, g) = 2$. Противоречие с выбором вершин f, g .

Мы доказали, что $\Gamma_2(x) \cap \Gamma_2(y)$ пусто и, следовательно, $\Gamma = x^\perp \cup y^\perp$ для любой сильной пары x, y . Так как $[f] \cap [b]$ не содержит d , то f смежна с некоторой вершиной w из $[b] - [a]$. Так как $d(f, g) = 3$, то w не смежна с g . Заметим, что $[f] \cap [b]$ — клика; значит, ws — ребро. В то же время w не смежна с d , поскольку в противном случае wb — ребро из $([c] \cap [d]) - a^\perp$. По лемме 2(2) w^\perp и b^\perp совпадают вне $[a]$. Однако w^\perp не содержит g из $b^\perp - [a]$. Противоречие.

Рассмотрим теперь 3-кликку $\{a, w, g\}$. Подграфы $[a] \cap [g]$ и $[w] \cap [g]$ являются кликами, так как вершина g не может быть сильной по лемме 18. Более того, μ -подграф $[w] \cap [g]$ содержится в $b^\perp - [a]$, так как иначе g — сильная, $\{x; a, w, g\}$ — 3-лапа. Если $[w] \cap [g]$ не содержится в $[d]$, то по лемме 15(1) вершина d из $[a] \cap [g]$ образует сильную пару с некоторой вершиной u из $([w] \cap [g]) - [d]$, u смежна с c или d , так как иначе $\{b; u, c, d\}$ — 3-лапа. Особый случай, когда $[d] \cap [w]$ и $[u] \cap [a]$ — некликовые подграфы, а $[d] \cap [u]$ — кликовый. При рассмотрении первой ситуации получаем следующее: вершина g является сильной. Противоречие с леммой 18. Значит, μ -подграф $[w] \cap [g]$ содержится в $(b^\perp - [a]) \cap [d]$.

Симметрично, μ -подграф $[a] \cap [g]$ не содержит вершину c , значит, g смежна с некоторой вершиной z из $[a] - [b]$. Так как $d(f, g) = 3$, то z не смежна с f . Подграф $[a] \cap [g]$ — клика, zd — ребро, и z не смежна с вершинами c, w .

Если $d(w, z) = 2$, то по лемме 17(1) вершина w из $[f] \cap [b]$ образует сильную пару с вершиной a из $([f] \cap [z]) - [w]$. Но тогда вершина f является сильной. Противоречие с леммой 18.

Следовательно, $d(w, z) = 3$. Как и выше, в этом случае μ -подграф $[w] \cap [g]$ содержится в $[c]$. Но тогда μ -подграф $[w] \cap [g]$ содержится в μ -подграфе $[c] \cap [d]$, и, значит, $[w] \cap [g] = [c] \cap [d]$. Противоречие с тем, что $[w] \cap [g]$ не содержит a из $[c] \cap [d]$.

Теперь рассмотрим особый случай. Поскольку $[d] \cap [w]$ не клика, то существует вершина $t \in [d]$ такая, что $t \not\sim b$. При этом $t \sim f$, так как иначе $\{w; f, b, t\}$ — 3-лапа, $c \sim u$, $t \not\sim u$, поскольку в противном случае получаем 3-лапу $\{t; u, f, d\}$. Заметим, что подграф $[a] \cap [w]$ кликовый, иначе a, w — сильная пара и, следовательно, $\Gamma = a^\perp \cup w^\perp$, но $g \in \Gamma$ и $g \notin a^\perp \cup w^\perp$. Таким образом, $c \sim t$. Получаем четырехугольник $ctdb$: $c^\perp \cup d^\perp = t^\perp \cup b^\perp = a^\perp \cup b^\perp$, т. е.

окрестности вершин t и a совпадают вне b^\perp . Число вершин в подграфе $[a] \cap [b]$ равно μ . Пусть $|[a] \cap [b] \cap [g]| = \alpha$, тогда $|[a] \cap [b] \cap [w]| = \mu - \alpha$. Поскольку $t \not\sim b$, то $|[t] \cap [b]| = \mu$. С другой стороны, $|[t] \cap [b]| = |[a] \cap [b] \cap [g]| + |[a] \cap [b] \cap [w]| + |\{w\}| = \alpha + (\mu - \alpha) + 1$. Противоречие. Лемма доказана.

До конца статьи будем предполагать, что граф Γ является контрпримером к теореме 3, содержит наименьшее число вершин и четырехугольник $abcd$.

Лемма 20. *Граф Γ не содержит 4-клик.*

Доказательство. Пусть $\{w, x, y, z\}$ является 4-кликкой из Γ и $u \in \{w, x, y, z\}$. По леммам 1(3) и 19 $\Gamma - u^\perp$ является связным подграфом из Γ , содержащим 3-кликку. Следовательно, он удовлетворяет условию теоремы 2. Так как Γ — контрпример с наименьшим числом вершин, то $\Gamma - u^\perp$ удовлетворяет заключению теоремы 2. Если $\Gamma - u^\perp$ — граф Тервиллигера, то по лемме 16 он имеет диаметр больше двух. Наш граф Γ имеет диаметр два. Все μ -подграфы из Γ для вершин из $\Gamma - u^\perp$ лежат в $\Gamma - u^\perp$. Поэтому $\Gamma - u^\perp$ имеет диаметр два. Значит, подграф $\Gamma - u^\perp$ содержит четырехугольник. Все такие графы из заключения теоремы 2 являются регулярными графами.

Далее, Γ не содержит 3-лап, поэтому любая вершина из Γ не может быть смежна более чем с двумя вершинами из 4-кликки. Таким образом, эта вершина принадлежит пересечению антиокрестностей по крайней мере двух вершин из $\{w, x, y, z\}$. Из того, что Γ является связным графом, следует, что валентности всех вершин совпадают. По теореме 1 из работы [4] граф Γ не является контрпримером к теореме 2. Лемма доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кабанов В.В., Махнев А.А.** Графы без 3-лап с равномошными μ -подграфами // Изв. Урал. гос. ун-та. 1998. Т. 10. Сер. Математика и механика. Вып. 1. С. 44–68.
2. **Вакула И.А., Кабанов В.В.** О графах без 3-лап с некликковыми μ -подграфами // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2005. Т. 12, № 4. С. 3–22.
3. **Вакула И.А., Кабанов В.В.** О графах без 3-лап с некликковыми μ -подграфами, натягиваемых на 3-кликку // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. Т. 36. Сер. Математика и механика. Вып. 7. С. 81–92.
4. **Кабанов В.В., Махнев А.А.** Об отделимых графах с некоторыми условиями регулярности // Мат. сб. 1996. Т. 187, № 10. С. 73–86.

Ермакова Галина Михайловна
ст. преподаватель
кафедра выч. методов и уравнений мат. физики
УГТУ–УПИ

Поступила 15.07.2008

Кабанов Владислав Владимирович
д-р физ.-мат. наук, проф.
зам. директора
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: vvk@imm.uran.ru

Сабирзянова Екатерина Шамилевна
ассистент
кафедра алгебры
Южно-Уральский гос. ун-т

Вэньбинь Го
д-р физ.-мат. наук, проф.
директор
Сюйчжоуский нормальный ун-т (КНР)

УДК 519.17

ГРАФЫ БЕЗ 3-КОРОН С НЕКОТОРЫМИ УСЛОВИЯМИ РЕГУЛЯРНОСТИ¹

В. В. Кабанов, А. А. Махнев, Д. В. Падучих

Полный многодольный граф $K_{1,\dots,1,3}$ с n долями порядка 1 называется n -*короной* (короной, если $n = 2$). В работе изучаются графы без 3-корон, в которых каждый μ -подграф является связным реберно регулярным графом с заданными параметрами. В теореме 1 получено описание графов без 3-корон, в которых окрестность некоторой вершины является графом Тервиллигера. В теореме 2 найдено локальное строение графов, в которых окрестности вершин в μ -подграфах имеют диаметр 2. В теореме 3 доказано, что связный локально $(q+1) \times (q+1)$ -подграф графа Грассмана $J_q(n, 2)$ является графом Джонсона $J(6, 3)$ или дополнительным графом к 4×4 -решетке. Следствием теоремы 3 является существенное уточнение теоремы Д. Хьюза о треугольных расширениях частичной геометрии, двойственной 2-схеме точек и прямых проективного пространства $PG(n, q)$. В следствии 2 получена характеристика графов знакопеременных и квадратичных форм как графов без 3-корон с некоторыми условиями регулярности.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, граф без корон.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a . Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины a* , и мы будем обозначать этот подграф через $[a]$, если граф Γ фиксирован. Пусть a^\perp — шар радиуса 1 с центром a . Для подграфа Σ графа Γ через Σ^\perp обозначим $\bigcap_{a \in \Sigma} a^\perp$.

Через k_a обозначим *степень вершины a* , т. е. число вершин в $[a]$. Граф Γ называется *регулярным степени k* , если $k_a = k$ для любой вершины a из Γ . Для ребра $\{a, c\}$ графа Γ через λ_{ac} обозначим число вершин в графе $[a] \cap [c]$. Граф Γ называется *реберно регулярным с параметрами (v, k, λ)* , если Γ — регулярный граф степени k на v вершинах, в котором $\lambda_{ac} = \lambda$ для любого ребра $\{a, c\}$. Подграф, индуцированный на $[a] \cap [b]$, назовем *μ -подграфом*, если вершины a, b находятся на расстоянии 2, а через μ_{ab} обозначим число вершин в этом подграфе. Скажем, что $\mu(\Gamma) = \mu$, если для любых вершин a, b с $d(a, b) = 2$ верно равенство $\mu_{ab} = \mu$. Реберно регулярный граф Γ с параметрами (v, k, λ) , в котором $\mu(\Gamma) = \mu$, называется *вполне регулярным с параметрами (v, k, λ, μ)* . Регулярный граф Γ диаметра 2 степени k на v вершинах называется *короберно регулярным с параметрами (v, k, μ)* , если $|[u] \cap [w]| = \mu$ для любых двух несмежных вершин u, w . Реберно регулярный граф Γ с параметрами (v, k, λ) называется *сильно регулярным с параметрами (v, k, λ, μ)* , если он является короберно регулярным с соответствующими параметрами. Далее, подграф из Γ будет означать индуцированный подграф.

Пусть \mathcal{F} — класс графов. Граф Γ называется локально \mathcal{F} -графом, если $[a] \in \mathcal{F}$ для любой вершины a графа Γ .

Граф Γ назовем (*слабо*) *редуцированным*, если из включения $a^\perp \subseteq b^\perp$ (из равенства $a^\perp = b^\perp$) следует $a = b$. Полный n -дольный граф с долями порядков m_1, \dots, m_n обозначим через K_{m_1, \dots, m_n} . Если $m_1 = \dots = m_n = m$, то соответствующий граф обозначается через $K_{n \times m}$. Граф $K_{1, m}$ называется *m -лапой*. Граф $K_{1, \dots, 1, 3}$ с n долями порядка 1 называется n -*короной* (короной, если $n = 2$). Кликовым расширением графа Γ называется граф, полученный заменой каждой вершины a на клику (a) , причем различные клики попарно не пересекаются и вершина из (a)

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 05-01-00046), РФФИ-БРФФИ (проект 08-01-90006) и РФФИ-ГФЕН Китая (проект 08-01-92200).

смежна с вершиной из (b) тогда и только тогда, когда a, b смежны в Γ . Если число вершин в каждой клике равно α , то расширение называется α -кликковым.

Граф на множестве пар $X \times Y$ называется $m \times n$ -*решеткой*, если $|X| = m$, $|Y| = n$, а пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. *Треугольным графом* $T(m)$ называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, $|X| = m$, и пары $\{a, b\}, \{c, d\}$ смежны, только если они имеют единственный общий элемент. Граф на множестве $X_1 \times \dots \times X_n$ называется $m_1 \times \dots \times m_n$ -*графом*, если $|X_i| = m_i$, а строки (x_1, \dots, x_n) и (y_1, \dots, y_n) смежны тогда и только тогда, когда существует единственное i такое, что $x_i \neq y_i$. При $m_i = m$ для всех i этот граф называется графом *Хемминга* $H(n, m)$. Граф $H(n, 2)$ называется n -*кубом*. Граф, полученный отождествлением антиподальных вершин в n -кубе, называется *свернутым (folded) n -кубом*. Для двудольного связного графа Σ связная компонента графа Σ_2 (вершины из Σ смежны в Σ_2 , если они находятся на расстоянии 2 в Σ) называется *половинным графом* Σ .

Графом Джонсона $J(n, m)$ называется граф, вершинами которого являются m -подмножества данного n -множества X , и вершины a, b смежны тогда и только тогда, когда они пересекаются по $(m-1)$ -множеству (очевидно $T(n)$ совпадает с $J(n, 2)$). *Частным* графа Джонсона $J(2m, m)$ называется граф $J^\sigma(2m, m)$, полученный отождествлением каждого m -множества с образом его дополнения под действием подстановки σ на X , где $\sigma^2 = 1$ и σ имеет по крайней мере 8 фиксированных точек. Если $\sigma = 1$, то частное обозначается через $\bar{J}(2m, m)$. *Графом Шлефли* называется единственный сильно регулярный граф с параметрами $(27, 16, 10, 8)$, который является дополнительным к точечному графу обобщенного четырехугольника $GQ(2, 4)$. Вполне регулярный граф с $\lambda = 0$ и $\mu = 2$ называется *ректаграфом*.

Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется α -частичной геометрией порядка (s, t) , если каждая прямая содержит $s + 1$ точку, каждая точка лежит на $t + 1$ прямой (прямые пересекаются не более, чем по одной точке) и для любой точки a , не лежащей на прямой L , найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (обозначение $pG_\alpha(s, t)$). Если $\alpha = 1$, то геометрия называется обобщенным четырехугольником и обозначается $GQ(s, t)$. Точечным графом частичной геометрии называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на общей прямой. Легко понять, что точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s, t)$ сильно регулярен с параметрами: $v = (s + 1)(1 + st/\alpha)$, $k = s(t + 1)$, $\lambda = (s - 1) + (\alpha - 1)t$, $\mu = \alpha(t + 1)$.

Множество точек K проективного пространства $PG(n, q)$ называется k -*дугой*, если $|K| = k$ и никакие $n + 1$ точек из K не принадлежат гиперплоскости из $PG(n, q)$. Гипервалом называется $(q + 2)$ -дуга из $PG(2, q)$.

Граф Грассмана $J_q(n, m)$ в качестве вершин имеет множество всех m -мерных подпространств заданного n -мерного пространства V над конечным полем порядка q , причем вершины A и B смежны, только если размерность $A \cap B$ равна $m - 1$. Такой граф будем обозначать $\begin{bmatrix} V \\ m \end{bmatrix}$.

Пусть V является n -мерным линейным пространством над конечным полем F порядка q . Ранг знакопеременной формы γ на V определяется как $\dim V/\text{Rad } \gamma$. Граф знакопеременных форм $Alt(n, q)$ имеет в качестве вершин знакопеременные формы на V , и две знакопеременные формы γ и δ смежны, если $\text{rank}(\gamma - \delta) = 2$. Отображение $\gamma : V \rightarrow F$ называется квадратичной формой на V , если $\gamma(au) = a^2\gamma(u)$ и $\gamma(u + w) = \gamma(u) + \gamma(w) + B_\gamma(u, w)$ для некоторой симметричной билинейной формы B_γ . Если $\text{char } F = 2$, то форма B_γ является знакопеременной. Ранг γ определяется как $\dim V/\text{Rad } \gamma$, где $\text{Rad } \gamma = \{u \in \text{Rad } B_\gamma \mid \gamma(u) = 0\}$. Граф квадратичных форм $Quad(n, q)$ имеет в качестве вершин квадратичные формы на V , и две квадратичные формы γ и δ смежны, если $\text{rank}(\gamma - \delta) = 1$ или 2.

Граф диаметра d называется антиподальным, если отношение “совпадать или находиться на расстоянии d ” является отношением эквивалентности на множестве вершин графа. Антиподальный граф диаметра 3 на 12 вершинах, в котором окрестность любой вершины —

пятиугольник, называется графом икосаэдра. Антиподальный граф диаметра 3 на 56 вершинах, в котором окрестность любой вершины — граф Шлефли, называется графом Госсета. Граф Тервиллигера — это связный неполный граф, в котором μ -подграфы являются кликами одного порядка.

Основные результаты нашей статьи анонсированы в [1]. В работах [2,3] получена классификация графов без корон, в которых μ -подграфы являются регулярными графами диаметра 2 заданной положительной степени α . С помощью этих результатов доказаны следующие две теоремы.

Теорема 1. Пусть Γ — связный граф без 3-корон, в котором любой μ -подграф Δ состоит из v' вершин, $v' > 1$ и $|\Delta(x) \cap \Delta(y)| = \lambda' > 0$ для любых смежных вершин $x, y \in \Delta$. Если окрестность некоторой вершины из Γ — граф Тервиллигера, то Γ является либо кликовым $(\lambda' + 2)$ -расширением $m \times n$ -решетки, либо графом Тервиллигера одного из следующих типов:

- (1) кликовое расширение 2-пути, 3-пути, пятиугольника или пятиугольной пирамиды;
- (2) кликовое расширение графа Δ , где Δ является объединением δ -клики и δ или $\delta - 1$ вершин степени 1, смежных с различными вершинами этой клики;
- (3) кликовое расширение графа икосаэдра или графа без 3-лап с $\mu = 1$.

Теорема 2. Пусть Γ — связный граф без 3-корон, в котором каждый μ -подграф является связным реберно регулярным графом с параметрами (v', k', λ') и окрестностями вершин диаметра 2. Если $0 < \lambda' < k' - 1$, то либо окрестности вершин в Γ являются сильно регулярными графами без 3-клик, либо Γ — локально Δ -граф, где Δ — один из следующих графов:

- (1) треугольный граф $T(n)$, $n \geq 6$ или граф Шлефли;
- (2) частное графа Джонсона $\bar{J}(10, 5)$ или половинный граф свернутого 10-куба;
- (3) граф Грассмана $J_{2^s}(n, 2)$, где $n \geq 4$.

Для восстановления окрестностей вершин необходимо следующее утверждение, доказанное в [2] для графов без 3-лап.

Предложение 1. Если Γ — связный слабо редуцированный граф без корон, в котором μ -подграфы регулярны степени $\alpha > 0$, то Γ является редуцированным графом или пятиугольной пирамидой.

Если Γ — связный граф, в котором окрестность любой вершины является графом Грассмана $J_q(n, 2)$, то каждый μ -подграф из Γ будет локальной $(q + 1) \times (q + 1)$ -решеткой.

Теорема 3. Пусть Σ — связный локально $(q + 1) \times (q + 1)$ -подграф графа Грассмана $\Gamma = J_q(n, 2)$, отвечающего линейному пространству V над полем F из q элементов. Тогда $q = 2$ и выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) граф Σ является дополнительным для 4×4 -решетки и содержится в подграфе из Γ , отвечающем четырехмерному подпространству из V ;
- (2) граф Σ является графом Джонсона $J(6, 3)$ и содержится в подграфе из Γ , отвечающем либо четырехмерному, либо пятимерному подпространству W из V , пересекающей Σ , причем в последнем случае подграф $\Sigma \cap \begin{bmatrix} U \\ 2 \end{bmatrix}$ является треугольным графом $T(5)$ для любой гиперплоскости U из W .

Доказательство теоремы 3 опирается на следующее

Предложение 2. Пусть Γ — граф Грассмана $J_q(4, 2)$, содержащий связный локально $(q + 1) \times t$ -подграф Σ , где $2 \leq t \leq q$. Тогда $t = q = 2$ и Σ — треугольный граф $T(5)$.

В [4] Д. Хьюз доказал, что если существует треугольное расширение частичной геометрии, двойственной 2-схеме точек и прямых проективного пространства $PG(n, q)$, то $q = 2$ или 4. Так как точечный граф треугольного расширения частичной геометрии, двойственной 2-схеме точек и прямых проективного пространства $PG(n, q)$ является локально $J_q(n + 1, 2)$ -графом, то мы получаем

Следствие 1. Пусть геометрия \mathcal{S} — связанное треугольное расширение частичной геометрии, являющейся двойственной к 2-схеме точек и прямых проективного пространства $PG(n, q)$. Тогда $q = 2$.

Следствие 2. Пусть Γ — связный граф без 3-корон, в котором каждый μ -подграф Δ является связным реберно регулярным графом с параметрами (v', k', λ') и окрестностями вершин диаметра 2. Если $\lambda' > 0$, то выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) либо Γ является графом Шлефли с параметрами $(27, 16, 10, 8)$, либо граф $\bar{\Gamma}$ имеет параметры $((r^2 + 3r)^2, r^3 + 3r^2 + r, 0, r^2 + r)$ для некоторого $r \geq 1$;
- (2) каждый μ -подграф является октаэдром, и Γ — половинный граф прямоугольника с $s_3 = 3$, являющийся локально треугольным графом;
- (3) Γ является графом Госсета на 56 вершинах;
- (4) Γ является локально $J_q(n, 2)$ -графом и либо
 - (i) $\mu = 16$, $n = 4$ и Γ — антиподальный граф диаметра 3 на 72 вершинах, либо
 - (ii) $\mu = 20$, и если для любой вершины a графа Γ граф $\Gamma_2(a)$ является регулярным степени $15 \cdot 2^{n-1} - 105$, то Γ имеет покрытие, являющееся графом $Alt(n, 2)$ знакопеременных форм или графом $Quad(n - 1, 2)$ квадратичных форм.

Доказательство следствия 2. Пусть Γ — связный граф из заключения теоремы 2. Если окрестность каждой вершины в графе Γ является сильно регулярным графом без 3-клик, то ввиду теоремы 2 из [5] либо Γ является полным многодольным графом $K_{3 \times k'}$ (в этом случае $\lambda' = 0$) или графом Шлефли с параметрами $(27, 16, 10, 8)$, либо граф $\bar{\Gamma}$ имеет параметры $((r^2 + 3r)^2, r^3 + 3r^2 + r, 0, r^2 + r)$ для некоторого $r \geq 1$. Если Γ — локально Шлефли-граф, то Γ является графом Госсета на 56 вершинах. Если Γ является локально треугольным графом, то каждый μ -подграф состоит из изолированных октаэдров и Γ — половинный граф прямоугольника с $s_3 = 3$ (см. [6, предложение 4.3.9]). По теоремам из [7, 8] не существуют локально $\bar{J}(10, 5)$ -графы и графы, в которых окрестность любой вершины изоморфна половинному графу свернутого 10-куба.

Пусть Γ — связный граф, в котором окрестность любой вершины является графом Грассмана на $J_q(n, 2)$. По теореме 3 имеем $q = 2$ и либо каждый μ -подграф из Γ является дополнительным для 4×4 -решетки, либо каждый μ -подграф из Γ является графом Джонсона $J(6, 3)$. В первом случае $n = 4$, и по следствию из [9] Γ — антиподальный граф диаметра 3 на 72 вершинах. Во втором случае при дополнительном предположении, что для любой вершины a графа Γ граф $\Gamma_2(a)$ является регулярным степени $15 \cdot 2^{n-1} - 105$, в [10] доказано, что Γ является покрытием графа $Alt(n, 2)$ знакопеременных форм или графа $Quad(n, 2)$ квадратичных форм. Следствие 2 доказано.

1. Вспомогательные результаты

В этом параграфе приведены некоторые вспомогательные результаты, используемые в дальнейшем.

Лемма 1.1. Пусть Γ — связный граф без 3-лап, a — вершина графа Γ . Тогда верны следующие утверждения:

- (1) если b, c — несмежные вершины из $[a]$, то $[a] \subseteq b^\perp \cup c^\perp$;
- (2) если $\{a, b; c, d\}$ — четырехугольник из Γ , то $a^\perp \cup b^\perp = c^\perp \cup d^\perp$;

(3) если $\{a, b; c, d\}$ — четырехугольник из Γ и μ -подграфы $[a] \cap [b]$, $[c] \cap [d]$ являются регулярными графами одинаковой степени, то $k_a + k_b = k_c + k_d$, $\mu_{ab} = \mu_{cd}$.

Доказательство. Если вершина $x \in [a]$ не лежит в $b^\perp \cup c^\perp$, то граф $\{a; b, c, x\}$ является 3-лапой и утверждение (1) доказано.

Пусть $\{a, b; c, d\}$ — четырехугольник из Γ . По утверждению (1) c^\perp и d^\perp содержатся в $a^\perp \cup b^\perp$. Симметрично, a^\perp и b^\perp содержатся в $c^\perp \cup d^\perp$. Утверждение (2) доказано.

Пусть α — степень указанных μ -графов. По утверждению (1) $k_a = 2 + \lambda_{ac} + \lambda_{ad} - \alpha$, $k_b = 2 + \lambda_{bc} + \lambda_{bd} - \alpha$. Выписав аналогичные выражения для k_c , k_d , получим первое равенство в (3).

Число вершин в графе $a^\perp \cup b^\perp$ равно $2 + k_a + k_b - \mu_{ab}$. Это же число по утверждению (2) равно $2 + k_c + k_d - \mu_{cd}$. Отсюда следует второе равенство в (3).

Лемма 1.2. Если Γ является регулярным графом степени k без 3-клик на v вершинах, то Γ является кореберно регулярным графом с $\mu = 2k + 2 - v$, причем либо диаметр Γ равен 2, либо Γ состоит из двух изолированных $(k + 1)$ -клик.

Доказательство. Пусть $a \in \Gamma$. По условию $\Gamma - a^\perp$ является $(v - k - 1)$ -кликой. Если $b \in \Gamma - a^\perp$, то $[b]$ содержит $v - k - 2$ вершин из $\Gamma_2(a)$ и $k - (v - k - 2)$ вершин из $[a]$. Поэтому Γ является кореберно регулярным графом с $\mu = 2k + 2 - v$.

Если диаметр Γ больше 2, то $\mu = 0$ и Γ состоит из двух изолированных $(k + 1)$ -клик.

Лемма 1.3. Пусть Γ — связный граф, в котором μ -подграфы реберно регулярны с заданными параметрами (v', k', λ') . Если $k' > \lambda' + 1$, то Γ является вполне регулярным графом.

Доказательство. По лемме 1.2 [11] граф Γ является регулярным. По той же лемме, примененной к окрестности вершины a , подграф $[a]$ является регулярным степени λ_a . Теперь $\lambda_a = \lambda_c$ для любых смежных вершин a, c и по связности графа Γ является реберно регулярным графом. Наконец, $\mu(\Gamma) = v'$.

Лемма 1.4. Пусть Γ — связный граф без корон, в котором μ -подграфы регулярны заданной положительной степени α . Если для некоторой вершины a подграф $\Gamma(a)$ содержит 3-клику, то $\Gamma(x)$ содержит 3-клику для любой вершины $x \in \Gamma$.

Доказательство. Пусть $a \in \Gamma$ и $\Gamma(a)$ содержит 3-клику. По теореме 2 из [2] подграф $\Gamma(a)$ является кликовым β -расширением $m \times n$ -решетки, треугольного графа $T(n)$ или графа Шлефли.

Повторив рассуждения из леммы 3.2 [2], убедимся в том, что $\Gamma(x)$ содержит 3-клику для любой вершины $x \in \Gamma$.

Лемма 1.5. Пусть Γ — сильно регулярный граф без 3-клик с параметрами (v, k, λ, μ) , $k > \lambda + 1$. Тогда для каждой вершины $c \in \Gamma$ подграф $\Sigma = \Gamma(c)$ редуцирован.

Доказательство. По лемме 1.3 подграф Σ является кореберно регулярным с $\mu(\Sigma) = 2\lambda + 2 - k$. Поэтому μ -подграфы из Γ регулярны степени $\alpha = 2\lambda + 2 - k$.

Допустим, что граф Σ не редуцирован. Так как Σ — регулярный граф, то в Σ найдутся такие две вершины d, e , что $d^\perp \cap \Sigma = e^\perp \cap \Sigma$. По сильной регулярности Γ подграф $\Gamma(c) \cap \Gamma(d) = \Gamma(d) \cap \Gamma(e)$ содержит ровно λ вершин. Отсюда следует, что подграфы $\Gamma(d) - \Gamma(c)$ и $\Gamma(e) - \Gamma(c)$ не пересекаются и $\Gamma_2(c)$ содержит не меньше $2b_1$ вершин, где $b_1 = k - \lambda - 1$.

Возьмем теперь две несмежные вершины $f, g \in \Sigma$. Поскольку Γ не содержит 3-клик, то имеет место равенство $\Gamma = f^\perp \cup g^\perp$. Но тогда подграфы $\Gamma(f) - \Gamma(c)$ и $\Gamma(g) - \Gamma(c)$ покрывают $\Gamma_2(c)$, и в $\Gamma_2(c)$ содержится не больше $2b_1$ вершин. Из доказанного в предыдущем абзаце теперь следует, что $|\Gamma_2(c)| = 2b_1$ и подграфы $\Gamma(f) - \Gamma(c)$, $\Gamma(g) - \Gamma(c)$ не пересекаются. Это означает, что μ -подграф $\Gamma(f) \cap \Gamma(g)$ содержится в c^\perp , и $\alpha = \mu - 1$. Из последнего равенства следует, что Γ — граф Тервиллигера. Но по лемме 1.5 [3] сильно регулярный граф Тервиллигера без 3-клик — это пятиугольник. Противоречие с тем, что граф Σ не редуцирован.

Лемма 1.6. Пусть Γ — граф Грассмана $J_q(n, 2)$. Тогда выполняются следующие утверждения:

(1) окрестность вершины a в графе Γ является кликовым q -расширением $(q^{n-3} + \dots + q + 1) \times (q + 1)$ -решетки, причем строка решетки отвечает вершинам Γ , содержащим прямую из a , а столбец решетки отвечает вершинам Γ , лежащим в данном трехмерном подпространстве из V , содержащем a ; любой μ -подграф из Γ является $(q + 1) \times (q + 1)$ -решеткой;

(2) если $n = 4$, то граф Γ является сильно регулярным с параметрами $v = (q^2 + 1)(q^2 + q + 1)$, $k = q(q + 1)^2$, $\lambda = (q - 1) + 2q^2$, $\mu = (q + 1)^2$ и имеет неглавные собственные значения $r = q^2 - 1$ и $s = -(q + 1)$ кратностей $f = q(q^2 + q + 1)$ и $g = q^4 + q^2$ соответственно;

(3) если $n = 4$, то для любой вершины u из Γ граф $\Gamma_2(u)$ является сильно регулярным с параметрами $v = q^4$, $k = (q - 1)(q + 1)^2$, $\lambda = (q - 2) + 2q(q - 1)$, $\mu = q(q + 1)$ и имеет неглавные собственные значения $r = q^2 - q - 1$ и $s = -(q + 1)$ кратностей $f = (q^2 - 1)(q + 1)$ и $g = q^4 - q^3 - q^2 + q$ соответственно.

Доказательство. Утверждения (1,2) хорошо известны (см. гл. 4 из [6]).

Окрестность вершины b в графе $\Delta = \Gamma_2(a)$ является кликовым $(q - 1)$ -расширением $(q + 1) \times (q + 1)$ -решетки. По лемме 1.2 для любых несмежных вершин $b, c \in \Delta$ подграф $\Delta(b) \cap \Delta(c)$ получается удалением $(q + 1)$ -клик из $(q + 1) \times (q + 1)$ -решетки. Отсюда следует утверждение (3).

Лемма 1.7. Пусть Γ — граф Грассмана $J_q(n, 2)$, вершины a, b, c из Γ попарно несмежны, $\Delta = [a] \cap [b] \cap [c]$ и $l = \dim(a + b + c)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

(1) $l = 4$ и Δ является $(q + 1)$ -кликкой;

(2) $l = 5$ и $|\Delta| = 1$;

(3) $l = 6$ и Δ — пустой граф.

Доказательство. Из непосредственных вычислений.

Лемма 1.8. Пусть проективное пространство $PG(n, q)$ содержит такое множество \mathcal{K} из K точек, что каждая гиперплоскость пересекает \mathcal{K} по h или h' точкам. Вложим $PG(n, q)$ в проективное пространство $PG(n + 1, q)$ в качестве гиперплоскости. Тогда граф, вершинами которого являются точки из $PG(n + 1, q) - PG(n, q)$, и две вершины смежны, если проходящая через них прямая пересекает $PG(n, q)$ по точке из \mathcal{K} , является сильно регулярным с параметрами $v = q^{n+1}$, $k = K(q - 1)$, $\lambda = k^2 + 3k - q(k + 1)(2K - h - h') + q^2(K - h)(K - h')$, $\mu = (K - h)(K - h')/q^{n-1}$.

Доказательство. Это следствие 3.7 из [12].

Лемма 1.9. Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ) , Δ — индуцированный подграф с N вершинами, M ребрами и степенями вершин d_1, \dots, d_N . Тогда

$$(v - N) - (kN - 2M) + \lambda M + \mu \left(\binom{N}{2} - M \right) - \sum \binom{d_i}{2} = x_0 + \sum \binom{i-1}{2} x_i$$

и $(\sum i x_i)^2 \leq \sum x_i \sum i^2 x_i$, где x_i — число вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ .

Доказательство. Подсчитав число вершин в $\Gamma - \Delta$, число ребер между Δ и $\Gamma - \Delta$ и число 2-путей с концами в Δ и средней вершиной в $\Gamma - \Delta$, получим равенства $v - N = \sum x_i$, $kN - 2M = \sum i x_i$ и

$$\lambda M + \mu \left(\binom{N}{2} - M \right) - \sum_{i=1}^N \binom{d_i}{2} = \sum \binom{i}{2} x_i.$$

Вычитая второе равенство из суммы первого и третьего, получим равенство из заключения леммы.

Положим $x = \sum ix_i / \sum x_i$. Тогда квадратный трехчлен $\sum (i-x)^2 x_i = \sum i^2 x_i - 2x \sum ix_i + x^2 \sum x_i$ неотрицателен. Поэтому дискриминант квадратного трехчлена $(\sum ix_i)^2 - \sum x_i \sum i^2 x_i$ неположителен. Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы 1 и предложения 1

В этом параграфе мы изучим случай, когда окрестность некоторой вершины в графе без 3-корон является графом Тервиллигера, и докажем предложение 1.

В леммах 2.1, 2.2 предполагается, что Γ — связный граф без 3-корон, в котором для любых двух вершин a, b с $d(a, b) = 2$ подграф $\Delta = [a] \cap [b]$ содержит v' вершин, для любых смежных вершин $c, d \in \Delta$ подграф $\Delta(c) \cap \Delta(d)$ состоит из λ' вершин, $\lambda' > 0$, и для некоторой вершины a подграф $\Sigma = \Gamma(a)$ является графом Тервиллигера. Тогда Σ является графом без корон с $\mu(\Sigma) = \lambda' + 1$. По теореме 1 из [3] либо Σ не содержит 3-клик и является кликовым расширением 2-пути, 3-пути, пятиугольника или пятиугольной пирамиды, либо Σ содержит 3-клик, но не содержит 3-лап и диаметр Σ больше 2, либо Σ содержит 3-лапу и является графом с $\mu = 1$. Так как $\lambda' > 0$, то последний случай не возникает. Если Σ содержит 3-клик, то для вершин u, w , находящихся на расстоянии 3 в Σ , вершина a изолирована в $[u] \cap [w]$. Пусть Γ' — подграф на множестве вершин из Γ с некликовыми окрестностями.

Лемма 2.1. Пусть Σ является кликовым расширением 2-пути. Тогда Γ является одним из следующих графов:

- (1) кликовое расширение 2-пути, 3-пути, пятиугольника или пятиугольной пирамиды;
- (2) кликовое расширение графа Ω , где Ω содержит δ -клик и δ или $\delta - 1$ вершин степени 1, смежных с различными вершинами клики;
- (3) кликовое расширение графа без 3-лап с $\mu = 1$;
- (4) $(\lambda' + 2)$ -расширение $m \times n$ -решетки.

Доказательство. Пусть Σ является кликовым расширением 2-пути. Для двух несмежных вершин u, w из Σ содержащая a связная компонента из $\Gamma(u) \cap \Gamma(w)$ является $(\lambda' + 2)$ -кликой. Поэтому $v' = \lambda' + 2$ или $v' \geq 2\lambda' + 4$.

Пусть $b \in \Gamma_2(a)$. Если подграф $[a] \cap [b]$ содержит вершину c из Σ^\perp , то либо $v' = \lambda' + 2$, либо c — единственная вершина из $\Sigma^\perp \cap [a] \cap [b]$ и $[a] \cap [b] - \{c\}$ является объединением двух изолированных $(\lambda' + 1)$ -клик. В последнем случае получим противоречие с тем, что $v' \geq 2\lambda' + 4$. Если же $[a] \cap [b]$ не пересекает Σ^\perp , то либо снова $v' = \lambda' + 2$, либо $[a] \cap [b]$ является объединением двух изолированных $(\lambda' + 2)$ -клик.

Если $v' = \lambda' + 2$, то Γ является графом Тервиллигера и, как показано выше, окрестность любой вершины из Γ есть либо клика, либо кликовое расширение 2-пути, пятиугольника или пятиугольной пирамиды. Снова по теореме 1 из [3] либо выполняется одно из утверждений (1), (2) в заключении леммы, либо граф Γ' является кликовым расширением графа без 3-лап с $\mu = 1$. Покажем, что в этом случае и граф Γ является кликовым расширением графа без 3-лап с $\mu = 1$. Пусть для вершин u, w из Γ' шары радиуса 1 в графе Γ' с центрами в этих вершинах совпадают и некоторая вершина $x \in \Gamma$ принадлежит $[w] - u^\perp$. Тогда $[u] \cap [x] = \Gamma' \cap [x]$ является v' -кликой. Заметим, что для $y \in ([u] \cap [x]) - \Gamma'(u)^\perp$ получим $\Gamma'(y) \subset u^\perp$, иначе $[y]$ содержит 3-клик. Если $([u] \cap [x]) - \Gamma'(u)^\perp$ содержит вершину y , то шары радиуса 1 в графе Γ' с центрами в u и в y не совпадают, поэтому некоторая вершина $z \in \Gamma'(u)$ не принадлежит y^\perp . Противоречие с тем, что тогда $[x] \cap [z]$ содержит w и $|[x] \cap [z]| < v'$. Значит, $[u] \cap [x] \subset \Gamma'(u)^\perp$ и подграф $\{u\} \cup \Gamma'(u)$ является кликой, совпадающей с $\{e\} \cup \Gamma'(e)$ для $e \in \Gamma'(u) - [x]$. Противоречие со связностью графа Γ' .

Пусть $v' = 2\lambda' + 4$. Тогда для любой вершины b из $\Gamma_2(a)$ подграф $[a] \cap [b]$ является объединением двух изолированных $(\lambda' + 2)$ -клик. В частности, для $c \in [a] \cap [b]$ подграф $\Gamma(c)$ является

графом Тервиллигера. Теперь по связности Γ получим, что окрестность каждой вершины — граф Тервиллигера без 3-клик и каждый μ -подграф является объединением двух изолированных $(\lambda' + 2)$ -клик. Значит, Γ не содержит 3-лап и по теореме из [6] редукция графа Γ является кликовым расширением $m \times n$ -решетки или графа $N(m)$. В первом случае Γ является $(\lambda'/2 + 1)$ -расширением. Так как в графе $N(m)$ каждый μ -подграф является изолированной вершиной или m -кликой, то второй случай не возникает.

Лемма 2.2. *Пусть Σ — кликовое расширение пятиугольника или пятиугольной пирамиды. Тогда Γ является кликовым расширением графа икосаэдра.*

Доказательство. Пусть Σ — кликовое расширение пятиугольника или пятиугольной пирамиды. Тогда для любых двух несмежных вершин $c, d \in \Sigma$ окрестность a в подграфе $[c] \cap [d]$ является изолированной $(\lambda' + 2)$ -кликой. Поэтому для любой вершины $b \in \Gamma_2(a)$ подграф $[a] \cap [b]$ не содержит несмежных вершин. В этом случае $v' = \lambda' + 2$ и Γ является графом Тервиллигера.

Ввиду леммы 2.1 окрестность каждой вершины есть кликовое расширение пятиугольника или пятиугольной пирамиды. Таким образом, Γ является графом Тервиллигера без 3-лап. По теореме 1 из [3] Γ является кликовым расширением графа икосаэдра. Лемма и теорема 1 доказаны.

До конца параграфа будем предполагать, что Γ является слабо редуцированным, но не редуцированным графом без корон, в котором μ -подграфы регулярны степени α , $\alpha > 0$. Тогда $b^\perp \subset a^\perp$ для некоторых вершин $a, b \in \Gamma$. Ясно, что $[b]$ не содержит 3-клик (иначе Γ содержит корону). Среди вершин x со свойством $x^\perp \subset a^\perp$ выберем вершину b наибольшей степени. Ввиду предложения [3] можно считать, что Γ содержит 3-лапу.

Лемма 2.3. *Выполняются следующие утверждения:*

- (1) *если вершина x из $[b] - \{a\}$ смежна с вершиной вне a^\perp , то $[x]$ не пересекает $[a] - b^\perp$;*
- (2) *подграф $[b]$ не является кликой.*

Доказательство. Пусть вершина x смежна с вершиной c вне a^\perp и вершиной d из $[a] - b^\perp$. Если вершины c, d смежны, то в графе $[b] \cap [c]$ степень вершины x равна α . Противоречие с тем, что в графе $[a] \cap [c]$ вершина x смежна еще с d . Значит, любая вершина из $[x] - a^\perp$ не смежна ни с одной из вершин в $([x] \cap [a]) - b^\perp$. Тогда $[x] \cap [c] \cap [d]$ не пересекает $\Gamma - a^\perp$ и $[a] - b^\perp$. Так как $\alpha > 0$, то $[x] \cap [c] \cap [d]$ содержит вершину y из $[b]$. Противоречие с тем, что тогда Γ содержит корону $\{x; y; b, c, d\}$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $[b]$ — клика. Тогда для любой вершины d из $[a] - b^\perp$ подграф $[b] \cap [d]$ является $(\alpha + 1)$ -кликой. Пусть $x \in ([b] \cap [d]) - \{a\}$. В силу выбора вершины b подграф $[x]$ не содержится в a^\perp ; противоречие с утверждением (1).

Лемма 2.4. *Для любых двух несмежных вершин c, d из $[b]$ подграфы $[c]$ и $[d]$ пересекают $[a] - b^\perp$.*

Доказательство. Допустим, что c, d — несмежные вершины из $[b]$ и $[d]$ не пересекает $[a] - b^\perp$. Если $e \in ([a] \cap [c]) - b^\perp$, то подграф $[d] \cap [e]$ содержит $\alpha + 1$ вершин из a^\perp , попадающих в $[b]$. Противоречие с тем, что в графе $[b] \cap [e]$ вершина a смежна еще с вершиной c . Значит, и $[c]$ не пересекает $[a] - b^\perp$.

Для $e \in [a] - b^\perp$ по утверждению (1) леммы 2.3 подграф $[c] \cap [e]$ является $(\alpha + 1)$ -кликой из $[b]$. Симметрично, подграф $[d] \cap [e]$ является $(\alpha + 1)$ -кликой из $[b]$, причем $[c] \cap [d] \cap [e]$ содержит единственную вершину a . Противоречие с тем, что тогда степень a в графе $[b] \cap [e]$ равна 2α .

Лемма 2.5. *Выполняются следующие утверждения:*

- (1) $[x] \subseteq [a]$ для любой вершины $x \in b^\perp$ и a — единственная среди вершин x из Γ со свойством $b^\perp \subset x^\perp$;
- (2) $[b] - \{a\}$ является $(\alpha - 1)$ -расширением пятиугольника;
- (3) $\alpha = 2$ и каждая вершина из $[a] - b^\perp$ смежна с ребром пятиугольника $[b] - \{a\}$.

Доказательство. Заметим, что ввиду лемм 2.3, 2.4 окрестности любых двух несмежных вершин c, d из $[b]$ попадают в a^\perp . Если же $b^\perp \subseteq e^\perp$ для некоторой отличной от a вершины e , то по выбору вершины b подграф $[e]$ содержит вершину f вне a^\perp . В этом случае $[b] \cap [f]$ является $(\alpha + 1)$ -кликой, состоящей из вершин e таких, что $b^\perp \subseteq e^\perp$. Противоречие с тем, что тогда Γ содержит $(\alpha + 1)$ -корону $\{[b] \cap [f]; c, d, f\}$. Утверждение (1) доказано.

По утверждению (1) для любых двух несмежных вершин c, d из $[b]$ подграф $[c] \cap [d]$ является $(\alpha + 1)$ -кликой из a^\perp . Тогда $[c] \cap [d] \subset b^\perp$. Таким образом, $[b]$ является графом Тервиллигера. По теореме 1 из [3] граф $[b]$ является кликовым расширением 2-пути или пятиугольной пирамиды. В первом случае, по утверждению (1), $[b] - \{a\}$ состоит из двух изолированных клик и $\alpha = 1$. Отсюда $[a]$ является графом Тервиллигера диаметра 2 без 3-лап с $\mu = 1$. Снова по теореме 1 из [3] граф $[a]$ является пятиугольником $\{b, c, e, f, d\}$. Если $[e] - a^\perp$ содержит вершину g , то вершина e изолирована в $[c] \cap [g]$; противоречие. Итак, $\Gamma = a^\perp$. Противоречие с тем, что Γ содержит 3-лапу. Значит, граф $[b] - \{a\}$ является кликовым расширением пятиугольника. Если c, d — две несмежные вершины из $[b]$, то степень b в графе $[c] \cap [d]$ равна α , поэтому граф $[b] - \{a\}$ является $(\alpha - 1)$ -расширением пятиугольника. Утверждение (2) доказано.

Пусть $f \in [a] - b^\perp$. Тогда $[f] \cap [b]$ является $(\alpha + 1)$ -кликой из a^\perp . Поэтому $[f]$ содержит вершины c, d из двух разных $(\alpha - 1)$ -клик графа $[b] - \{a\}$. Если f не смежна с вершиной e из $(\alpha - 1)$ -клики, содержащей d , то $[c]$ содержит 3-коклику f, e, g , где $g \in ([b] \cap [c]) - [d]$; противоречие. Таким образом, $[f]$ содержит две разные $(\alpha - 1)$ -клики графа $[b] - \{a\}$. Поэтому $|[b] \cap [f]| = 2\alpha - 1 = \alpha + 1$ и $\alpha = 2$. Лемма доказана.

Завершим доказательство предложения 1. По лемме 2.5 подграф $[b]$ является пятиугольной пирамидой с вершиной a . Пусть $cdefg$ — 5-цикл из $[b]$, $u \in [a] - b^\perp$. Ввиду леммы 2.5, без ограничения общности, вершина u смежна с g, c . Тогда $[u] \cap [d]$ содержит a, c и вершину, смежную с c, d . Симметрично, $[u] \cap [f]$ содержит a, g и вершину, смежную с f, g . Наконец, $[u] \cap [e]$ содержит a и две вершины из $[a] - b^\perp$. Значит, степень каждой вершины x из $[b] - \{a\}$ не меньше степени b , и ввиду леммы 3 граф $[x] - \{a\}$ является пятиугольником. Таким образом, $\Gamma - \{a\} = [a]$ является связным локально пятиугольным графом, поэтому граф $[a]$ изоморфен графу икосаэдра. Противоречие с тем, что для антипода b^* вершины b получим $[b] \cap [b^*] = \{a\}$. Предложение 1 доказано.

3. Локальное строение графов без 3-корон

В этом параграфе предполагается, что Γ — связный граф без 3-корон, в котором каждый μ -подграф является реберно регулярным графом с параметрами (v', k', λ') и окрестностями вершин диаметра 2, причем $0 < \lambda' < k' - 1$. По лемме 1.3 граф Γ является реберно регулярным с параметрами (v, k, λ) . Зафиксируем вершину a и положим $\Sigma = \Gamma(a)$. Тогда Σ является графом диаметра 2, в котором каждый μ -подграф является регулярным графом диаметра 2 степени λ' на k' вершинах.

Лемма 3.1. Пусть $\Sigma(b)$ содержит 3-коклику для некоторой вершины b из Σ . Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) Σ является половинным графом свернутого 10-куба, частным графа Джонсона $\bar{J}(10, 5)$ или графом Грассмана $J_q(n, 2)$ для некоторых q, n , $n \geq 4$;
- (2) для любых смежных вершин x, y из Γ подграф $[x] \cap [y]$ содержит 3-коклику.

Доказательство. По условию Σ — граф без корон, причем $\Sigma(b)$ содержит 3-коклику для некоторой вершины b из Σ . По лемме 1.4 окрестность каждой вершины в Σ содержит 3-коклику, поэтому Σ — редуцированный граф. По теореме 3 из [2] Σ является локально треугольным графом, графом Джонсона или его частным, графом Грассмана или графом Госсета.

Пусть Σ является локально треугольным графом. Так как диаметр Σ равен 2, то граф Σ сильно регулярен. По предложению из [9] для сильно регулярного локально $T(n)$ -графа Δ , $n \geq 4$ выполняется одна из возможностей:

(a) $n = 4$, $\Delta = K_{4 \times 2}$;

(b) $n = 5$, Δ — граф Клебша (половинный 5-куб);

(c) $n = 8$, Δ — половинный граф свернутого 8-куба, имеющий параметры $(64, 28, 12, 12)$;

(d) $n = 10$, Δ — половинный граф свернутого 10-куба с параметрами $(256, 45, 16, 6)$;

(e) $n = 24$, Δ — половинный граф прямоугольника, соответствующего графу смежных классов расширенного бинарного кода Голея с параметрами $(2^{11}, 276, 44, 36)$.

Так как μ -подграфы в окрестностях вершин имеют диаметр 2, то выполняются случаи (a, b) или (d). Но в первых двух случаях Σ не содержит 3-лап.

Так как диаметр Σ равен 2, то граф Джонсона является треугольным графом и не содержит 3-лап. Частное графа Джонсона $\bar{J}(2m, m)$ имеет диаметр 2 только в случаях $m = 4$ или 5. Но в $\bar{J}(8, 4)$ каждый μ -подграф состоит из двух изолированных четырехугольников. Граф Грассмана $J_q(n, m)$ имеет диаметр 2 лишь в случае $m = 2$. Наконец, граф Госсета имеет диаметр 3. Утверждение (1) доказано.

Пусть $c \in \Sigma$, $\Sigma' = \Gamma(c)$. Тогда $\Sigma'(a)$ содержит 3-клик. Снова по лемме 1.4 окрестность каждой вершины в Σ' содержит 3-клик. Утверждение (2) следует из связности графа.

Лемма 3.2. *Если Σ содержит 3-клик, но не содержит 3-лап, то Σ является β -расширением треугольного графа или графа Шлефли, β равно $k'/4$ в случае треугольного графа, равно $k'/8$ в случае графа Шлефли.*

Доказательство. По условию Σ — граф диаметра 2 без 3-лап, содержащий 3-клик. По теореме 2 из [2] граф Σ является кликовым β -расширением $m \times n$ -решетки, треугольного графа или графа Шлефли. Но μ -подграф в решетке является 2-клик; противоречие с тем, что тогда диаметр μ -подграфа в Σ больше 2.

Равенства для β следуют из того, что μ -подграф является четырехугольником в случае треугольного графа и полным многодольным графом $K_{4 \times 2}$ в случае графа Шлефли.

Лемма 3.3. *Если Γ не содержит 3-клик, то Σ является сильно регулярным графом без 3-клик.*

Доказательство. Если Γ не содержит 3-клик, то граф Γ сильно регулярен. По лемме 1.5 подграф Σ является редуцированным графом. Так как μ -подграфы из Σ регулярны степени λ' , то по теореме 2 из [3] Σ является сильно регулярным графом.

Лемма 3.4. *Если Γ содержит 3-лапу, но не содержит корон, то Γ является локально Δ -графом, где Δ — треугольный граф $T(n)$, $n \geq 6$ или граф Шлефли.*

Доказательство. Пусть Γ содержит 3-лапу, но не содержит корон. Покажем сначала, что окрестность каждой вершины из Γ содержит 3-клик. В противном случае можно считать, что Σ содержит 3-клик, но для некоторой вершины $b \in \Sigma$ подграф $\Sigma' = \Gamma(b)$ не содержит 3-клик. По лемме 1.2, примененной к графу Σ' , получим $k' = 2 + 2\lambda - k$.

Если Σ является $k'/4$ -расширением треугольного графа $T(n)$, то $k = k'n(n-1)/8$, $\lambda = k'(n-2)/2$ и $k' = 8(\lambda' + 1)/7$. В этом случае $k'(n^2 - 9n + 24) = 16$; противоречие с тем, что $k' \geq 3$ и $n \geq 6$.

Если Σ является $k'/8$ -расширением графа Шлефли, то $k = 27k'/4$, $\lambda = 4k'$ и $k' = 8(\lambda' + 1)/7$. В этом случае $k' = 2 + 8k' - 27k'/4$; противоречие.

Итак, Γ является локально Δ -графом, где Δ — β -расширение треугольного графа $T(n)$, $n \geq 6$ или графа Шлефли. Допустим, что $\beta > 1$. Зафиксируем вершины a, b , находящиеся на расстоянии 2, и положим $\Phi = [a] \cap [b]$. Тогда $\Phi(c)$ является β -расширением четырехугольника для $c \in \Phi$. Если Φ не содержит 3-клик, то по теореме 2 из [3] Φ есть сильно регулярный

граф. Противоречие с тем, что тогда по лемме 1.8 [3] подграф $\Phi(c)$ редуцирован. Если же Φ содержит 3-кликку, то для любых несмежных вершин d, e из $\Phi(c)$ степень вершины c в графе $\Phi(d) \cap \Phi(e)$ равна $3\beta - 1$. По теореме из [13] Φ является треугольным графом или графом Шлефли. Противоречие с строением $\Phi(c)$. Лемма доказана.

Пусть Γ содержит корону, но не содержит 3-корон. По теореме из [3] Γ является локально Δ -графом, где Δ — частное графа Джонсона $\bar{J}(10, 5)$, половинный граф свернутого 10-куба или граф Грассмана $J_q(n, 2)$. Для завершения доказательства теоремы 2 осталось установить, что $q = 2^s$ для некоторого натурального числа s .

Пусть Σ — граф Грассмана $J_q(n, 2)$, $n \geq 4$. Пусть V — линейное пространство размерности n над полем F_q с базисом e_1, \dots, e_n . Вершинами графа Γ являются двумерные подпространства из V , причем два таких подпространства смежны в Γ , только если они пересекаются по одномерному подпространству (по прямой). По лемме 1.6 окрестность вершины a в графе Σ является кликовым q -расширением $(q^{n-3} + \dots + q + 1) \times (q + 1)$ -решетки, причем строка решетки отвечает вершинам Σ , содержащим прямую из a , а столбец решетки отвечает вершинам Σ , лежащим в данном трехмерном подпространстве из V , содержащем a .

Лемма 3.5. Пусть Σ содержит связный подграф Δ , в котором окрестности вершин являются $(q + 1) \times (q + 1)$ -решетками. Если u, w — две несмежные вершины из Σ , то:

(1) $[u] \cap [w]$ является $(q + 1) \times (q + 1)$ -решеткой, вершины которой содержатся в 4-мерном подпространстве $u + w$ из V ;

(2) если $n = 4$ и $[u] \cap [w]$ пересекает Δ , то $[u] \cap [w] \cap \Delta$ является объединением изолированных циклов четной длины.

Доказательство. Пусть u, w — две несмежные вершины из Γ . Без ограничения общности, $u = \langle e_1, e_2 \rangle$, $w = \langle e_3, e_4 \rangle$. Положим $W = \langle e_1, \dots, e_4 \rangle$, $\Omega = \begin{bmatrix} W \\ 2 \end{bmatrix}$.

Для любых двух несмежных вершин x, y из Ω подграф $[x] \cap [y]$ содержится в Ω . Действительно, подпространство z из $[x] \cap [y]$ пересекает подпространства x и y по прямой и поэтому содержится в W . Утверждение (1) доказано.

Пусть $a \in \Delta \cap [u] \cap [w]$. Тогда $[a]$ является кликовым расширением $(q + 1) \times (q + 1)$ -решетки, причем u, w лежат в разных строчках и разных столбцах. Поэтому степень вершины a в графе $\Delta \cap [u] \cap [w]$ равна 2. Лемма доказана.

Лемма 3.6. Пусть Δ содержит $(q + 2)$ -кликку C , лежащую в трехмерном подпространстве U из V . Зафиксируем в U некоторый базис (e_1, e_2, e_3) и определим на U скалярное произведение, считая этот базис ортонормированным. Тогда выполняются следующие утверждения:

(1) C^\perp является гипервалом проективной плоскости U ;

(2) для любой вершины $u \in \Gamma - \Sigma$, лежащей в U , подграф $\Gamma(u)$ имеет точно $q/2 + 1$ строк, содержащих по две вершины из C ;

(3) $q = 2^s$.

Доказательство. Пусть C — $(q + 2)$ -клика из Δ , лежащая в трехмерном подпространстве U из V .

Докажем, что для любых вершин $a, b, c \in C$ верно равенство $a \cap b \cap c = \{0\}$. Действительно, все вершины из $C - \{a\}$ лежат в различных длинных кликах из Γ , содержащих a . Это означает, что прямые $a \cap b$ и $a \cap c$ различны, и равенство выполняется.

Зафиксируем в U некоторый базис (e_1, e_2, e_3) и определим на U скалярное произведение, считая этот базис ортонормированным. На множестве подпространств из U определим отображение $x \mapsto x^\perp$, которое ставит в соответствие подпространству x его ортогональное дополнение в U . Мы получим взаимно однозначное отображение, инвертирующее отношение включения. Если теперь применить отображение \perp к множеству C , то мы получим множество прямых C^\perp из K . Ввиду доказанного в предыдущем абзаце следует, что никакие три

прямые из C^\perp не лежат в общей плоскости. Отсюда, в частности, следует, что для фиксированной прямой $l \in C^\perp$ все плоскости $\langle l, m \rangle$ (для $m \in C^\perp - \{a\}$) различны. Так как любая прямая из U лежит ровно в $q + 1$ плоскостях и $|C^\perp - \{l\}| = q + 1$, то любая плоскость $a \subset U$ либо не содержит ни одной прямой из C^\perp , либо содержит ровно две прямые из C^\perp . Таким образом, C^\perp является гипервалом в проективной плоскости U . Утверждение (1) доказано.

Для любой вершины $w \in \Gamma - \Sigma$, лежащей в U , плоскость W , содержащая w^\perp и являющаяся секущей для C^\perp , содержит точно две прямые a^\perp, b^\perp из C^\perp . Поэтому в длинной клике из $\Gamma(u)$, отвечающей прямой W^\perp , содержится точно две вершины из C . Утверждение (2) доказано.

Хорошо известно, что если проективная плоскость порядка q содержит гипервал, то q четно (это, в частности, следует из доказательства утверждения (2)). Отсюда $q = 2^s$ для подходящего натурального числа s . Лемма и теорема 2 доказаны.

4. Локально $(q + 1) \times m$ -подграфы в графах Грассмана

В этом параграфе мы докажем предложение 2. В леммах 4.1–4.5 предполагается, что Γ — граф Грассмана $J_q(4, 2)$, отвечающий линейному пространству V и содержащий связный локально $(q + 1) \times m$ -подграф Σ , $2 \leq m \leq q$. Выберем в V некоторый базис и определим на V скалярное произведение, считая этот базис ортонормированным. Тогда отображение \perp , ставящее в соответствие подпространству из V его ортогональное дополнение, является изоморфизмом графа Σ на граф Σ^\perp , переставляющим короткие и длинные клики графа Γ . Мы можем считать (заменив при необходимости Σ на Σ^\perp), что $(q + 2)$ -клики из Σ лежат в трехмерных подпространствах из V .

Трехмерное подпространство из V назовем *секущим*, *касательным* или *внешним*, если оно содержит $q + 2$, 1 или 0 вершин из Σ соответственно.

Лемма 4.1. *Если граф Грассмана $J_q(4, 2)$ содержит треугольный подграф $T(q + 2)$, то $q = 2$.*

Доказательство. Пусть Σ — треугольный подграф $T(q + 2)$ из графа Грассмана $\Gamma = J_q(4, 2)$ и $q > 2$. Тогда Σ является связным локально $2 \times q$ -графом, причем $(q + 1)$ -клики из Σ отвечают строкам решетки графа $\Gamma(u)$ для $u \in \Sigma$.

Через \mathcal{L} обозначим множество одномерных подпространств из V , лежащих в вершинах графа Σ . Тогда любая вершина из Σ отвечает паре прямых из \mathcal{L} , $|\mathcal{L}| = q + 2$ и треугольный граф Σ строится по множеству пар прямых из \mathcal{L} . Заметим, что любые три прямые a, b, c из \mathcal{L} порождают гиперплоскость из V , содержащую точно 3 вершины из Σ . Таким образом, \mathcal{L} является дугой в $PG(3, q)$ и по теореме из [13] имеем $|\mathcal{L}| \leq q + 1$; противоречие.

Лемма 4.2. *Выполняются следующие утверждения:*

- (1) *верно неравенство $|\Sigma| \geq (q + 2)(qt + m - q + 1)/2$;*
- (2) *число секущих подпространств из V равно $m|\Sigma|/(q + 2)$, а число касательных — $|\Sigma|(q + 1 - m)$;*
- (3) *для многочлена $f(m) = (m - 3)q^4 + (7m - m^2 - 10)q^3 + (15m - 4m^2 - 9)q^2 + (11m - 5m^2 - 2)q + (2m - 2m^2)$ верно неравенство $f(m) \leq 0$;*
- (4) *если $2 < m \leq q$, то $m = q = 8$, граф Σ является точечным для частичной геометрии $pG_2(9, 7)$ и каждое трехмерное подпространство из V является секущим или касательным.*

Доказательство. Минимум $|\Sigma|$ достигается в случае, когда Σ — вполне регулярный граф с $\mu = 2m$. В этом случае Σ — точечный граф частичной геометрии $pG_2(q + 1, m - 1)$ и $|\Sigma| = (q + 2)(qt + m - q + 1)/2$. Утверждение (1) доказано.

Каждая вершина из Σ лежит точно в m секущих подпространствах. Поэтому число секущих подпространств из V равно $m|\Sigma|/(q + 2)$. Далее, каждая вершина из Σ лежит точно в

$q + 1 - m$ касательных подпространствах, поэтому число касательных подпространств из V равно $|\Sigma|(q + 1 - m)$. Утверждение (2) доказано.

Так как число гиперплоскостей в V равно $q^3 + q^2 + q + 1$, то $|\Sigma|(q^2 + 3q - mq - m + 2) \leq q^4 + 3q^3 + 3q^2 + 3q + 2$. Подставляя вместо $|\Sigma|$ выражение из (1), получим $(q^2m + 3qm + 2m - q^2 - q + 2)(q^2 + 3q - mq - m + 2) \leq 2q^4 + 6q^3 + 6q^2 + 6q + 4$. Таким образом, $f(m) = (m - 3)q^4 + (7m - m^2 - 10)q^3 + (15m - 4m^2 - 9)q^2 + (11m - 5m^2 - 2)q + (2m - 2m^2) \leq 0$. Утверждение (3) доказано.

Если $q = 2$, то очевидно $m = 2$ или $m = q + 1$. Пусть $q > 2$. Тогда производная $f'(m) = q^4 - (2m - 7)q^3 - (8m - 15)q^2 - (10m - 11)q - (4m - 2)$ положительна при $2 \leq m \leq q/2 + 1$ и отрицательна при $q/2 + 2 \leq m \leq q + 1$. Заметим, что $f(3) = 2q^3 - 14q - 12 > 0$ при $q \geq 4$. Далее, $f(q) = q^5 - 3q^4 + (7q^4 - q^5 - 10q^3) + (15q^3 - 4q^4 - 9q^2) + (11q^2 - 5q^3 - 2q) + (2q - 2q^2) = 0$. Отсюда при $m = q$ получим $|\Sigma| = (q + 2)(qm + m - q + 1)/2$, и каждое трехмерное подпространство из V является секущим или касательным. В этом случае Σ является точечным графом частичной геометрии $pG_2(q + 1, q - 1)$, $2(2q - 1)$ делит $(q - 1)q(q + 1)(q + 2)$ и $q = 8$. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Конфигурация из утверждения (4) леммы 2.3 не существует. Действительно, секущая гиперплоскость U содержит 45 прямых из \mathcal{L} , лежащих в вершинах из Σ , попадающих в U . Каждая из этих прямых лежит в 7 вершинах из Σ , не попадающих в U и $45 \cdot 7 + 10 = |\Sigma|$, поэтому секущая гиперплоскость содержит точно 45 прямых из \mathcal{L} . Касательная гиперплоскость W содержит 9 прямых из \mathcal{L} , лежащих в вершине из Σ , попадающей в U . Каждая из этих прямых лежит в 7 вершинах из Σ , не попадающих в U и $1 + 9 \cdot 7 + 29 \cdot 9 = |\Sigma|$, поэтому касательная гиперплоскость содержит точно 38 прямых из \mathcal{L} . По лемме 1.8 найдется сильно регулярный граф с $\mu = (325 - 45)(325 - 38)/8^2$; противоречие. Вопрос о существовании частичной геометрии $pG_2(9, 7)$, окрестности вершин которой в точечном графе являются 9×8 -решетками, остается открытым.

Из лемм 4.1, 4.2 и замечания следует предложение 2.

5. Локально $(q + 1) \times (q + 1)$ -подграфы в графах Грассмана

В этом параграфе предполагается, что V — линейное пространство размерности n над полем F_q с базисом e_1, \dots, e_n и $\Gamma = \begin{bmatrix} V \\ 2 \end{bmatrix}$ — граф Грассмана $J_q(n, 2)$, $n \geq 4$, содержащий связный локально $(q + 1) \times (q + 1)$ -подграф Σ . По лемме 3.6 имеем $q = 2^l$.

Лемма 5.1. *Если u, w — вершины из Σ , находящиеся на расстоянии 2 в Σ , то $\Sigma(u) \cap \Sigma(w)$ содержится в 4-мерном подпространстве $u + w$ из V и является объединением изолированных циклов четной длины.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть u, w — вершины из Σ , находящиеся на расстоянии 2 в Σ . Без ограничения общности $u = \langle e_1, e_2 \rangle$, $w = \langle e_3, e_4 \rangle$. Положим $W = \langle e_1, \dots, e_4 \rangle$, $\Delta = \begin{bmatrix} W \\ 2 \end{bmatrix}$.

Для любых двух несмежных вершин x, y из Δ подграф $[x] \cap [y]$ содержится в Δ . Действительно, подпространство z из $[x] \cap [y]$ пересекает подпространства x и y по прямой и поэтому содержится в W .

Так как степень каждой вершины в $\Sigma(u) \cap \Sigma(w)$ равна 2, то $\Sigma(u) \cap \Sigma(w)$ состоит из изолированных циклов. Поскольку последовательные ребра цикла лежат в разных классах прямых решетки $\Sigma(u)$, то каждый цикл имеет четную длину.

Лемма 5.2. *Пусть u, w — вершины из Σ , находящиеся на расстоянии 2 в Σ , $W = u + w$ и Σ' — содержащая u связная компонента подграфа на множестве вершин из Σ , лежащих в W . Тогда выполняются следующие утверждения:*

- (1) Σ' является локально $(q + 1) \times t$ -подграфом из $\Delta = \begin{bmatrix} W \\ 2 \end{bmatrix}$, $2 \leq t \leq q + 1$;

(2) либо $\Sigma \subset \Delta$, либо $m = q = 2$ и $\Sigma = J(6, 3)$ содержится в $\begin{bmatrix} U \\ 2 \end{bmatrix}$ для некоторого 5-мерного подпространства U из V .

Доказательство. Заметим, что для $x \in \Sigma'$ подграф $\Sigma'(x)$ является $(q+1) \times m(x)$ -решеткой. Если $y \in \Sigma'(x)$, то подграф $\Sigma'(x) \cap \Sigma'(y)$ является объединением двух изолированных клик порядков q и $m(x) - 1$. Поэтому $m(x) = m(y)$. Из связности Σ' следует утверждение (1).

Ввиду предложения либо $m = 2$ и $q = 2$, либо $m = q + 1$ и $\Sigma \subset \Delta$. Но в случае $m = q = 2$ граф Σ является локально 3×3 -решетчатым и Σ — дополнительный граф к 4×4 -решетке или $\Sigma = J(6, 3)$. Далее, в случае дополнения к решетке имеем $\mu(\Sigma) = 6$ и $\Sigma \subset \Delta$. Наконец, в случае, когда $\Sigma = J(6, 3)$ не содержится в Δ по лемме 4.2 [10] граф Σ содержится в $\begin{bmatrix} U \\ 2 \end{bmatrix}$ для некоторого 5-мерного подпространства U из V . Лемма доказана.

До конца параграфа будем предполагать, что $q > 2$. Ввиду леммы 5.2 можно считать, что пространство V четырехмерно. Гиперплоскость из V назовем *секущей* или *внешней*, если оно содержит $q+2$ или 0 вершин из Σ соответственно. Через \mathcal{L} обозначим множество прямых из V , лежащих в вершинах из Σ . Так как $|\mathcal{L}| = |\Sigma|(q+1)/(q+2)$, то $|\Sigma| = t(q+2)$ для некоторого натурального числа t . Определим граф на \mathcal{L} , считая две прямые $a, b \in \mathcal{L}$ смежными, если $a + b \in \Sigma$.

Лемма 5.3. *Выполняются следующие утверждения:*

- (1) верны неравенства $2 + q(q+1)/2 \leq t \leq q^2 + 1$;
- (2) секущая гиперплоскость содержит $t + q$ прямых из \mathcal{L} , причем подграф, индуцированный \mathcal{L} на этих прямых, разбивается треугольным графом $T(q+2)$ и $t + q - (q+2)(q+1)/2$ изолированными вершинами;
- (3) внешняя гиперплоскость содержит t прямых из \mathcal{L} , образующих клику в \mathcal{L} ;
- (4) если вложить проективное пространство $PG(3, q)$, отвечающее V , в $PG(4, q)$, то граф Ω , вершинами которого являются точки из $PG(4, q) - PG(3, q)$, и две вершины смежны, если проходящая через них прямая пересекает $PG(3, q)$ по точке из \mathcal{L} , является полным графом (в случае $t = q^2 + 1$) или сильно регулярным графом с параметрами $v = q^4$, $k = tq^2 - t$, $\lambda = t^2 - 3t + q^2$, $\mu = t^2 - t$ (в случае $t < q^2 + 1$).

Доказательство. По лемме 4.2 получим $1 + q(q+1)/2 \leq t$. Если $t = 1 + q(q+1)/2$, то Σ является точечным графом частичной геометрии $PG_2(q+1, q)$. По условию целочисленности $4q$ делит $q(q+1)^2(q+2)$. Но в случае $q > 2$ число $q+2$ не делится на 4.

Число секущих гиперплоскостей равно $t(q+1)$ и не больше $q^3 + q^2 + q + 1$. Отсюда $t \leq q^2 + 1$. Утверждение (1) доказано.

Пусть U — секущая гиперплоскость. Число флагов вида (A, a) , где A — прямая из \mathcal{L} , лежащая в U , a — вершина из Σ , не лежащая в U и содержащая A , равно $(q+2)(t-1) - (q+2)(q+1)q/2$, поэтому U содержит $(q+2)(q+1)/2 + t - 1 - q(q+1)/2 = t + q$ прямых из \mathcal{L} . Пусть \mathcal{L}_U — подграф индуцированный \mathcal{L} на прямых, лежащих в вершинах из Σ , попадающих в U . Тогда \mathcal{L}_U является связным локально $2 \times (q+1)$ -графом и совпадает с $T(q+2)$. Утверждение (2) доказано.

Пусть U — внешняя гиперплоскость. Тогда каждая вершина из Σ пересекает U по прямой из \mathcal{L} , а каждая прямая из \mathcal{L} , лежащая в Σ , попадает в $q+2$ вершин из Σ . Поэтому U содержит $|\Sigma|/(q+2) = t$ прямых, образующих клику из \mathcal{L} . Утверждение (3) доказано.

Если $t = q^2 + 1$, то каждая прямая из V принадлежит \mathcal{L} и Ω является полным графом. Если же $t < q^2 + 1$, то утверждение (4) следует из леммы 1.8.

Лемма 5.4. *Выполняются следующие утверждения:*

- (1) каждой вершине u графа Σ отвечает максимальная клика U графа \mathcal{L} , состоящая из прямых, лежащих в u , и если вершина $a \in \mathcal{L}$ не принадлежит U , то a смежна с 0 или 2 вершинами из U ;

(2) если K — максимальная клика графа \mathcal{L} , отличная от множества прямых, лежащих в вершине графа Σ , то K является дугой в $PG(3, q)$ и суммы пар прямых из K образуют треугольный подграф $T(|K|)$ в Σ ;

(3) граф \mathcal{L} является реберно регулярным графом диаметра 2 с параметрами $(t(q+1), (q+2), 2q)$, в котором любой μ -подграф разбивается четырехугольниками и $1 \leq \mu(a, b)/4 \leq (q+2)/2$ для любых двух несмежных вершин $a, b \in \mathcal{L}$.

Доказательство. Каждой вершине u графа Σ отвечает максимальная $(q+1)$ -клика U графа \mathcal{L} , состоящая из прямых, лежащих в u . Если $a \in \mathcal{L} - U$ и a смежна с вершиной $b \in U$, то $w = a + b \in \Sigma$ и трехмерное пространство $u + w$ содержит единственную вершину y из $\Sigma(w)$, содержащую прямую a . В этом случае $\mathcal{L}(a) \cap U = \{b, c\}$, где прямая c является пересечением плоскостей u, y . Утверждение (1) доказано.

Пусть K — максимальная клика графа \mathcal{L} , отличная от множества прямых, лежащих в вершине графа Σ . Каждой паре a, b вершин из K отвечает вершина $a + b$ из Σ . Ввиду утверждения (1) разным парам отвечают разные вершины из Σ . Далее, любым трем вершинам a, b, c из K отвечает 3-клика $\{a + b, b + c, a + c\}$ графа Σ , лежащая в секующем подпространстве $a + b + c$. Если d — четвертая вершина из K , то $\Sigma(a + b)$ содержит вершины $a + d, b + d$, лежащие в другом секующем подпространстве $a + b + d$. Поэтому система ненулевых векторов, взятых по одному на каждой прямой из K , линейна независима. Значит, K является дугой в $PG(3, q)$. Наконец, суммы пар прямых из K образуют треугольный подграф $T(|K|)$ в Σ . Утверждение (2) доказано.

Так как каждая вершина a из \mathcal{L} лежит в $q+2$ вершинах из Σ , то $|\mathcal{L}(a)| = q(q+2)$. Далее, для $b \in \mathcal{L}(a)$ подграф $\mathcal{L}(a) \cap \mathcal{L}(b)$ содержит $q-1$ вершин, лежащих в $a + b$, и по вершине в каждой из $q+1$ клик, отвечающих отличным от $a + b$ вершинам из Σ , содержащим a . Поэтому $|\mathcal{L}(a) \cap \mathcal{L}(b)| = 2q$.

Пусть теперь a, b — две несмежные вершины из \mathcal{L} , $z = a + b$. Тогда $[z]$ содержит $q+2$ вершин из Σ , пересекающихся по прямой a . По лемме 4.1 решетка $[z]$ содержит $q/2+1$ столбцов, содержащих по 2 вершины из вышеуказанных $q+2$ вершин из $\Sigma \cap [z]$. Аналогично, решетка $[z]$ содержит $q/2+1$ столбцов, содержащих по 2 вершины из $q+2$ вершин из $\Sigma \cap [z]$, пересекающихся по прямой b .

Таким образом, некоторый столбец решетки $[z]$ содержит вершины u_1, u_2 из Σ , пересекающиеся по прямой a , и вершины w_1, w_2 из Σ , пересекающиеся по прямой b . Положим $c_{ij} = u_i \cap w_j$. Тогда $\mathcal{L}(a) \cap \mathcal{L}(b)$ содержит четырехугольник $\{c_{12}, c_{21}; c_{11}, c_{22}\}$. Так как решетка $[z]$ имеет $q/2+1$ столбцов, содержащих по 2 вершины из $q+2$ вершин графа $\Sigma \cap [z]$, пересекающихся по прямой a , то $\mu(a, b) \leq 2(q+2)$ для любых двух несмежных вершин $a, b \in \mathcal{L}$.

Лемма 5.5. *Выполняются следующие утверждения:*

- (1) граф Σ не является сильно регулярным;
- (2) любая вершина из $\Gamma - \Sigma$ содержит прямую из \mathcal{L} ;
- (3) каждая вершина из $\Gamma - \Sigma$ содержит $q/2+1$ или $q+1$ прямых из \mathcal{L} .

Доказательство. Так как $|\Sigma| \leq (q+2)(q^2+1)$, то для $u \in \Sigma$ имеем $|\Sigma_2(u)| \leq q^3 + q^2 - q$ и вершина из $\Sigma_2(u)$ смежна в среднем по крайней мере с $q(q+1)^2/(q^2+q-1) = q+1 + (q+1)/(q^2+q-1)$ вершинами из $\Sigma(u)$.

Допустим, что Σ является сильно регулярным графом с параметрами $(t(q+2), (q+1)^2, 2q, \mu)$. Тогда $\mu = 2q - x \geq q+2$, $x \geq 0$. Далее, $x^2 + 4(q^2 + x + 1) = n^2$ для некоторого натурального числа n , поэтому $n = a^2 + b^2$, $x + 2 = a^2 - b^2$ и $q = ab$. Так как $x + 2 \leq q$, то $a^2 - ab - b^2 \leq 0$. Далее, $a = 2^y, b = 2^z$ и $2^{2y} - 2^{y+z} - 2^{2z} \leq 0$; противоречие. Утверждение (1) доказано.

Пусть $z \in \Gamma - \Sigma$ и z не содержит прямых из \mathcal{L} . Тогда $\Sigma \subset \Gamma_2(z)$. Пусть X_i — множество вершин из $\Gamma_2(z)$, смежных точно с i вершинами из Σ и $x_i = |X_i|$. Из доказательства леммы 1.9 следует, что $\sum x_i = q^4 - t(q+2)$, $\sum ix_i = t(q+2)(q-2)(q+1)^2$ и $\sum \binom{i}{2} x_i = t(q+2)(q+1)(tq^2 + 2tq - 4q^2 - 7q - 2)/2$. Отсюда $\sum i^2 x_i = t(q+2)(q+1)(tq^2 + 2tq - 3q^2 - 8q - 4)$. По лемме 1.9

имеем $(\sum ix_i)^2 \leq \sum x_i \sum i^2 x_i$, поэтому $t^2(q+2)^2 - tq(7q^2 + 12q + 4) + q^3(q+2)(3q+2) \leq 0$; противоречие. Утверждение (2) доказано.

Допустим, что вершина $p \in \Gamma - \Sigma$ содержит i прямых из \mathcal{L} , $i < q+1$. Тогда число ребер в графе \mathcal{L} между прямыми из секущего подпространства, содержащего p , и прямыми из внешнего подпространства, содержащего p , равно $(t-i)(q+2) = ((q+2)(q+1)/2 - i)q + (t+q - (q+2)(q+1)/2)(q+2)$. Отсюда $2i = (q+2)(q+1) - q(q+2)$.

Лемма 5.6. *Каждая вершина p из Γ содержит точно $q+1$ прямых из \mathcal{L} и $t = q^2 + 1$.*

Доказательство. Допустим, что некоторая вершина p из $\Gamma - \Sigma$ содержит точно $q/2 + 1$ прямых из \mathcal{L} . Рассмотрим систему инцидентности (P, \mathcal{B}) , где P — множество одномерных подпространств из V , не принадлежащих \mathcal{L} , \mathcal{B} — множество вершин из $\Gamma - \Sigma$, содержащих $q/2 + 1$ прямых из \mathcal{L} . Так как число ребер между Σ и $\Gamma - \Sigma$ равно $|\mathcal{B}|(q+2)^2/2 + ((q^2+1)(q^2+q+1) - t(q+2) - |\mathcal{B}|)(q+1)(q+2) = t(q+2)(q-1)(q+1)^2$, то $|\mathcal{B}| = 2\beta(q+1)(q^2+q+1)$ и $t-1 = q(q-\beta)$. Число прямых, не попадающих в \mathcal{L} , равно $|P| = q^3 + q^2 + q + 1 - (q+1)(q^2 - q\beta + 1) = \beta q(q+1)$. Каждая точка из P инцидентна $q^2 + q + 1$ блокам из \mathcal{B} , каждый блок из \mathcal{B} инцидентен $q/2$ точкам из P . Наконец, любые две точки инцидентны единственному блоку.

Таким образом, (P, \mathcal{B}) является 2-схемой Штейнера с параметрами $(\beta q(q+1), 2\beta(q+1)(q^2+q+1), q^2+q+1, q/2, 1)$. Но тогда $v-1 = r(k-1)$, $\beta q^2 + \beta q - 1 = (q^2+q+1)(q/2-1)$ и $\beta = (q^2 - q - 1)/(2q+2)$; противоречие.

Теперь ввиду леммы 5.5 каждая вершина из $\Gamma - \Sigma$ содержит $q+1$ прямых из \mathcal{L} и $t = q^2 + 1$. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы 3. Ввиду леммы 5.6 подграф, индуцированный \mathcal{L} на множестве прямых любой гиперплоскости U , является объединением треугольного графа T_U на $(q+2)$ -множестве и изолированной $(q^2 - q)/2$ -кликки C_U . Зафиксируем прямую a из \mathcal{L} . Эта прямая не принадлежит q^3 гиперплоскостям из V . Для каждой гиперплоскости U , не содержащей a , граф $\mathcal{L}(a)$ содержит $(q+2)$ -вершинный подграф A из U . Так как U содержит не более двух вершин из Σ , пересекающихся по данной прямой, то степень каждой вершины в графе A не больше 2 и подграф A содержит не более $q+2$ ребер из \mathcal{L} . Положим $\alpha_U = |A \cap T_U|$.

Ребро $\{b, c\}$ из A лежит в q гиперплоскостях, не содержащих a , и число ребер в графе $\mathcal{L}(a)$ равно $q^2(q+2)$. Поэтому число флагов вида $(\{b, c\}, U)$, где U — не содержащая a гиперплоскость, содержащая ребро $\{b, c\}$ из $\mathcal{L}(a)$, равно $q^3(q+2)$. Отсюда $\alpha_U = q+2$ для любой не содержащей a гиперплоскости U ; противоречие. Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кабанов В.В., Махнев А.А., Падучих Д.В. Характеризации некоторых дистанционно регулярных графов запрещенными подграфами // Докл. РАН. 2007. Т. 414, № 5. С. 583–586.
2. Кабанов В.В. О графах без корон с регулярными μ -подграфами // Мат. заметки. 2000. Т. 67. С. 874–881.
3. Кабанов В.В., Махнев А.А., Падучих Д.В. О графах без корон с регулярными μ -подграфами. II // Мат. заметки. 2003. Т. 74. С. 396–406.
4. Hughes D.R. Extended partial geometries: dual 2-designs // Europ. J. Comb. 1990. Vol. 11. P. 459–471.
5. Зарипов С.Р., Махнев А.А., Яблонко И.П. О сильно регулярных графах без треугольников // Алгебра и линейная оптимизация: тр. Междунар. семинара, посвящ. 90-летию со дня рождения С.Н.Черникова / Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2002. С. 117–121.
6. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. Distance-Regular Graphs. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 485 p.
7. Падучих Д.В. Несуществование локально $\bar{J}(10, 5)$ -графов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 1. С. 158–165.
8. Махнев А.А., Падучих Д.В. О локально грасмановых графах // Докл. РАН. 2007. Т. 415, № 4. С. 450–454.

9. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** О графах, в которых окрестности вершин изоморфны половинному графу свернутого 10-куба // Тр. XXXIX регион. молод. конф. / Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2008. С. 31–34.
10. **Munemasa A., Pasechnik D.V., Shpectorov S.V.** A local characterization of the graphs of alternating forms and the graphs of quadratic forms over $GF(2)$ // Finite Geometry and Comb. London Math. Soc. Lecture Note. Ser. 191. Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1993. P. 303–317.
11. **Makhnev A.A.** On the graphs with μ -subgraphs isomorphic to $K_{u \times 2}$ // Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. 2. 2001. Vol. 2. P. S169–S178.
12. **Caldebrank R., Kantor W.M.** The geometry of two weight codes // Bull. London Math. Soc. 1986. Vol. 18. P. 97–122.
13. **Махнев А.А.** Об одном классе графов без 3-лап // Мат. заметки 1998. Т. 63, № 3. С. 407–413.
14. **Casse L., Glynn D.** The solution to Beniamino Segre's problem $I_{r,q}$, $r = 3, q = 2^h$ // Geom. Dedic. 1982. Vol. 13. P. 157–164.

Махнев Александр Алексеевич,
д-р физ.-мат. наук, чл.-кор. РАН
зав. отд.
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Поступила 5.05.2008

Кабанов Владислав Владимирович
д-р физ.-мат. наук, проф.
зам. директора
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: vvk@imm.uran.ru

Падучих Дмитрий Викторович
канд. физ.-мат. наук
ведущий научн. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: paduch@imm.uran.ru

УДК 512.542.5

**ПРИМИТИВНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ПОДСТАНОВОЧНЫЕ
ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПРОСТЫХ ГРУПП $A_l(q)$ ¹****В. В. Кораблева**

Определены степени, подстепени и двойные стабилизаторы подстановочных представлений простых групп $A_l(q)$ на смежных классах по параболическим максимальным подгруппам.

Ключевые слова: подстановочные представления, параболические подгруппы, максимальные подгруппы, конечные классические группы.

Введение

Простые группы занимают особое место среди конечных групп. Изучение свойств конечных простых групп остается актуальным и после завершения их классификации. Имеется много вопросов о простых группах, на которые классификация не дает ответа. Основной массив конечных простых групп составляют группы лиева типа. Краткий обзор результатов о подстановочных представлениях конечных групп лиева типа приведен в [1]. Важный класс подстановочных представлений конечных групп лиева типа составляют их параболические представления, т. е. представления на смежных классах по параболическим подгруппам.

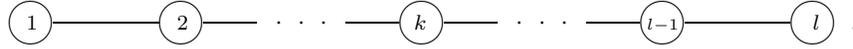
Пусть G — конечная группа лиева типа и P — параболическая максимальная подгруппа в G . Рассмотрим представление группы G подстановками множества Ω левых смежных классов группы G по подгруппе P , в котором элементу g из G соответствует подстановка, переводящая каждый смежный класс xP в gxP . Обозначим через n степень этого представления. Подгруппа P является стабилизатором точки P из Ω в данном представлении, и стабилизатор каждой точки сопряжен в G с P . Число m орбит стабилизатора P на Ω называется (*подстановочным*) *рангом* подстановочного представления (G, Ω) . Орбиты Ω_i подгруппы P называются *подорбитами* группы G , а мощности n_i этих подорбит, называемые *подстепенями* подстановочного представления (G, Ω) , могут быть вычислены как индексы *двойных стабилизаторов* $N_i \equiv P \cap {}^zP$ в группе P , где $zP \in \Omega_i$ и $0 \leq i \leq m - 1$. Через Ω_0 обозначается тривиальная подорбита $\{P\}$. В соответствии с этим обозначением $n_0 = 1$, $N_0 = P$.

Достаточно полную информацию о подстановочном представлении конечной группы дают следующие его параметры: степень, ранг, подстепень, строение стабилизатора точки и двойных стабилизаторов. В работах [2–6] эти параметры примитивных параболических подстановочных представлений вычислены для всех конечных простых исключительных групп лиева типа. В работах [1, 7] вычислены ранги примитивных параболических подстановочных представлений классических групп $A_l(q)$, $B_l(q)$, $C_l(q)$ и $D_l(q)$.

В этой работе рассматриваются конечные простые классические группы типа A_l и определяются степени, подстепени и двойные стабилизаторы подстановочных представлений этих групп на левых смежных классах по параболическим максимальным подгруппам. Полученные результаты для представителей этих подгрупп указываются в теореме ниже. В этой теореме для представителя z_i левого смежного класса из каждой подорбиты Ω_i указываются подстепень n_i и строение двойного стабилизатора N_i , соответствующие этой подорбите. Представители z_i подорбит явно указываются в тексте работы.

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 07–01–00148).

Мы будем использовать определения и обозначения, связанные с группами лиева типа, из [8]. Если q — натуральная степень простого числа, то под группой G будем понимать как присоединенную группу $A_l(q)$, так и универсальную группу $\bar{A}_l(q)$ лиева типа A_l над полем K порядка q . При этом через P_k ($1 \leq k \leq l$) обозначается параболическая максимальная подгруппа группы G , полученная отбрасыванием k -й вершины диаграммы Дынкина в стандартном упорядочении ее вершин:



Представления группы G на левых смежных классах по подгруппам P_k и P_{l+1-k} , где $l \geq 2$ и $1 \leq k \leq [(l+1)/2]$, подобны, так как согласно [8, предложение 12.2.3] существует графовый автоморфизм группы G , отображающий P_k на P_{l+1-k} . Поэтому считаем далее, что $k \leq [(l+1)/2]$, здесь через $\left[\frac{a}{b} \right]$ обозначена целая часть рационального числа $\frac{a}{b}$.

Обозначим через $X.Y$ (соответственно $X:Y$) расширение (соответственно расщепляемое расширение) группы X посредством группы Y , через X^k — прямое произведение k изоморфных копий группы X , через a — циклическую группу порядка a , $a \in \mathbb{N}$. Для любых $x, y \in G$ полагаем ${}^y x = yxy^{-1}$, $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ и ${}^y X = yXy^{-1}$.

Следующая теорема является основным результатом настоящей статьи.

Теорема 1. *Для группы $\bar{A}_l(q)$, где $q = p^s$ для простого числа p , степень n , ранг t , подстепени n_i и двойные стабилизаторы N_i подстановочного представления на левых смежных классах по параболической максимальной подгруппе P_k , $1 \leq k \leq [(l+1)/2]$, содержатся в следующем списке:*

1. Степень $n = \frac{(q^{l-k+2} - 1)(q^{l-k+3} - 1) \dots (q^{l+1} - 1)}{(q - 1)(q^2 - 1) \dots (q^k - 1)}$.
2. Ранг $t = k + 1$.
3. Если $n_0 = 1$, то $N_0 \cong p^{s(l-k+1)k} : ((\bar{A}_{k-1}(q) \times \bar{A}_{l-k}(q)) : (q - 1))$.
4. Если $1 \leq i \leq k - 1$, то $n_i = q^{i^2} \frac{\prod_{j=k-i+1}^k (q^j - 1) \prod_{j=l-k-i+2}^{l-k+1} (q^j - 1)}{\prod_{j=1}^i (q^j - 1)^2} u$
 $N_i \cong (p^{s(l-k-i+1)(k-i)} \cdot p^{2si(l-2i+1)}) : ((\bar{A}_{k-i-1}(q) \times \bar{A}_{i-1}(q) \times \bar{A}_{i-1}(q) \times \bar{A}_{l-k-i}(q)) : (q - 1)^3)$.
5. Если $2k \leq l$, то $n_k = q^{k^2} \frac{(q^{l-2k+2} - 1)(q^{l-2k+3} - 1) \dots (q^{l-k+1} - 1)}{(q - 1)(q^2 - 1)(q^3 - 1) \dots (q^k - 1)} u$
 $N_k \cong p^{s(l-2k+1)2k} : ((\bar{A}_{k-1}(q) \times \bar{A}_{k-1}(q) \times \bar{A}_{l-2k}(q)) : (q - 1)^2)$.
6. Если $2k = l + 1$, то $n_k = q^{k^2}$ и $N_k \cong (\bar{A}_{k-1}(q) \times \bar{A}_{k-1}(q)) : (q - 1)$.

Доказательство теоремы сводится к изучению действия группы Вейля на соответствующей системе корней, и затем путем использования этой информации и строения параболической подгруппы определяется ее пересечение с сопряженной с ней подгруппой посредством элемента группы Вейля. Для выяснения нормального строения двойных стабилизаторов используется разложение Леви параболической подгруппы P_k .

1. Предварительные сведения

Пусть Φ — система корней типа A_l с простыми корнями p_1, p_2, \dots, p_l . Для $1 \leq i < j \leq l$ обозначим положительный корень $p_i + p_{i+1} + \dots + p_j$ через $p_{i,j}$, а отрицательный корень $-p_i - p_{i+1} - \dots - p_j$ обозначим через $-p_{i,j}$. Множество Φ^+ всех положительных корней системы Φ состоит из элементов

$$p_1, p_{1,2}, p_{1,3}, \dots, p_{1,l-1}, p_{1,l}; p_2, p_{2,3}, \dots, p_{2,l-1}, p_{2,l}; \dots; p_{l-1}, p_{l-1,l}; p_l.$$

Положим $A_{ij} = \frac{2(p_i, p_j)}{(p_i, p_i)}$. Матрица Картана типа A_l имеет вид

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Группа Вейля W присоединенной группы $A_l(q)$ является группой Вейля и для универсальной группы $\bar{A}_l(q)$. Пусть d — наибольший общий делитель чисел $l+1$ и $q-1$. Если $d=1$, то группа $A_l(q)$ совпадает с группой $\bar{A}_l(q)$. В противном случае она изоморфна фактор-группе группы $\bar{A}_l(q)$ по ее центру, который является циклической группой порядка d .

Из [8] известно, что $G = \langle x_r(u) \mid u \in K, r \in \Phi \rangle$ и $|\bar{A}_l(q)| = q^{\frac{l(l+1)}{2}} (q^2-1)(q^3-1)\dots(q^{l+1}-1)$. Для любого корня $r \in \Phi$ корневая подгруппа $X_r = \{x_r(u) \mid u \in K\}$ изоморфна K . Элементы $n_r(u)$, $h_r(u)$ и n_r группы G задаются соотношениями $n_r(u) = x_r(u) x_{-r}(-u^{-1}) x_r(u)$, $h_r(u) = n_r(u) n_r(-1)$ и $n_r = n_r(1)$ для любого корня r из Φ . Подгруппа Картана H из $\bar{A}_l(q)$ равна $\langle h_{p_1}(u) \mid u \in K^* \rangle \times \langle h_{p_2}(u) \mid u \in K^* \rangle \times \dots \times \langle h_{p_l}(u) \mid u \in K^* \rangle$. Каждая подгруппа $\langle h_{p_j}(u) \mid u \in K^* \rangle$ из H , $1 \leq j \leq l$, является циклической группой порядка $q-1$ и $h_a(\mu) x_r(v) h_a^{-1}(\mu) = x_r(\mu^{(a,r)} v)$, где $\mu, v \in K^*$ и $a, r \in \Phi$ (см. [9, гл.3, лемма 20]).

Пусть $N = \langle H, n_r \mid r \in \Phi \rangle$. Согласно [8, теорема 7.2.2] существует гомоморфизм φ из N на W такой, что для всех $r \in \Phi$ выполняется равенство $\varphi(n_r) = w_r$, а отражение w_r из группы Вейля W определяется как $w_r(x) = x - \frac{2(x, r)}{(r, r)} r$ для $x \in \Phi$. Ядром этого гомоморфизма является подгруппа H . Таким образом, $N/H \cong W$. Действие сопряжением элемента n_r на множестве $\{X_s \mid s \in \Phi\}$ корневых подгрупп можно отождествить с действием элемента $w_r = \varphi(n_r)$ из W на Φ и писать ${}^{w_r} X_s$ вместо ${}^{n_r} X_s$, так как $n_r X_s n_r^{-1} = X_{w_r(s)}$ (см. [8, лемма 7.2.1]).

Любой положительный корень из Φ^+ является суммой простых корней. Обозначим через Φ_k^+ подмножество тех корней из Φ^+ , среди слагаемых которых нет простого корня p_k . Тогда

$$\Phi_k^+ = \{p_1, p_{1,2}, \dots, p_{1,k-1}; p_2, p_{2,3}, \dots, p_{2,k-1}; \dots; p_{k-1};$$

$$p_{k+1}, p_{k+1,k+2}, \dots, p_{k+1,l}; p_{k+2}, p_{k+2,k+3}, \dots, p_{k+2,l}; \dots; p_{l-1}, p_{l-1,l}; p_l\}.$$

В группе G имеется с точностью до сопряжения l параболических максимальных подгрупп $P_k = \langle H, X_r \mid r \in \Phi^+ \cup \Phi_k \rangle$, $1 \leq k \leq l$. Группа Вейля W порождается простыми отражениями w_{p_j} , $1 \leq j \leq l$. В группе W будем рассматривать параболические максимальные подгруппы $W_k = \langle w_{p_1}, w_{p_2}, \dots, w_{p_{k-1}}, w_{p_{k+1}}, w_{p_{k+2}}, \dots, w_{p_l} \rangle$, $1 \leq k \leq l$. Группа W изоморфна симметрической группе S_{l+1} степени $l+1$ (см. [10, гл. VI, разд. 4.7]). При этом изоморфизме для $1 \leq j \leq l$ образом простого отражения $w_{p_j} \in W$ является транспозиция $(j, j+1) \in S_{l+1}$, поэтому, с точностью до изоморфизма, параболическая максимальная подгруппа W_k группы W порождается транспозициями $(1, 2), (2, 3), \dots, (k-1, k), (k+1, k+2), (k+2, k+3), \dots, (l, l+1)$.

Согласно [10, гл. IV, разд. 2.5, предложение 2] для каждого $k \in \{1, 2, \dots, l\}$ существует биекция $P_k \backslash G / P_k \rightarrow W_k \backslash W / W_k$ множества двойных смежных классов группы G по параболической подгруппе P_k на множество двойных смежных классов ее группы Вейля W по параболической подгруппе W_k . При этом отображении классу $P_k n_r P_k$ из $P_k \backslash G / P_k$ соответствует класс $W_k w_r W_k$ из $W_k \backslash W / W_k$. Будем использовать результаты работы [7]. В ней указано разложение группы Вейля W на двойные смежные классы по параболической максимальной подгруппе W_k . Для этого найдены такие элементы

$$\begin{aligned} y_0 &= (), y_1 = (k, k+1), y_2 = (k-1, k+1)(k, k+2), \\ y_3 &= (k-2, k+1)(k-1, k+2)(k, k+3), \dots, \\ y_i &= (k-i+1, k+1)(k-i+2, k+2) \dots (k-1, k-1+i)(k, k+i), \dots, \\ y_k &= (1, k+1)(2, k+2)(3, k+3) \dots (k-1, 2k-1)(k, 2k) \end{aligned}$$

из S_{l+1} , что получилось разложение $W = \bigcup_{i=0}^k W_k y_i W_k$. Число $k+1$ двойных смежных классов равно рангу подстановочного представления группы G на смежных классах по подгруппе P_k . Заметим, что найденные элементы y_0, y_1, \dots, y_k записаны в виде произведения транспозиций и все имеют, кроме единичного элемента y_0 , порядок два. Воспользуемся изоморфизмом W и S_{l+1} и запишем элементы y_0, y_1, \dots, y_k в виде произведения простых отражений. Обозначим через z_i образы y_i при этом изоморфизме, $0 \leq i \leq k$. Тогда

$$\begin{aligned} z_0 &= 1, z_1 = w_{p_k}, z_2 = w_{p_k} w_{p_{k-1}} w_{p_{k+1}} w_{p_k}, z_3 = w_{p_k} w_{p_{k-1}} w_{p_{k-2}} w_{p_{k+1}} w_{p_k} w_{p_{k-1}} w_{p_{k+2}} w_{p_{k+1}} w_{p_k}, \dots, \\ z_i &= w_{p_k} w_{p_{k-1}} \dots w_{p_{k-i+1}} w_{p_{k+1}} w_{p_k} \dots w_{p_{k-i+2}} \dots w_{p_{k+i-1}} w_{p_{k+i-2}} \dots w_{p_{k+1}} w_{p_k}, \dots, \\ z_k &= w_{p_k} w_{p_{k-1}} \dots w_{p_1} w_{p_{k+1}} w_{p_k} \dots w_{p_2} \dots w_{p_{2k-1}} w_{p_{2k-2}} \dots w_{p_{k+1}} w_{p_k}. \end{aligned}$$

В [1] было показано, что если элемент z из двойного смежного класса $W_k z W_k$ имеет порядок два, то z является единственным элементом минимальной длины в $W_k z W_k$. Именно поэтому указанные элементы $z_0, z_1, z_2, \dots, z_k$ являются различными представителями двойных смежных классов по параболической подгруппе W_k и имеют минимальную длину в классе $W_k z_i W_k$, их содержащем. Эти элементы z_0, z_1, \dots, z_k и будем использовать для нахождения двойных стабилизаторов подстановочного представления группы G на смежных классах по подгруппе P_k , т. е. подгруппы вида $P_k \cap {}^z P_k$.

Будем использовать разложение Леви подгруппы P_k (см. [8, теорема 8.5.2]): $P_k = U_k : L_k$, где $U_k = \langle X_r \mid r \in \Phi^+ \setminus \Phi_k^+ \rangle$, $L_k = \langle H, X_r \mid r \in \Phi_k \rangle$. Из [11, теорема 2.8.7] следует, что

$$P_k \cap {}^z P_k = ((U_k \cap {}^z U_k)(U_k \cap {}^z L_k)(L_k \cap {}^z U_k)) : L_J,$$

где $L_J = \langle H, X_r \mid r \in \Phi_J \rangle$ (через Φ_J обозначается пересечение Φ и линейной оболочки множества $\{p_j \mid j \in J\}$), $z \in \{z_0, z_1, z_2, \dots, z_k\}$, $J \subseteq \{1, 2, \dots, l\}$, причем $j \in J$ тогда и только тогда, когда $w_{p_j} \in W_k \cap {}^z W_k$. Произведение первых трех множителей $(U_k \cap {}^z U_k)(U_k \cap {}^z L_k)(L_k \cap {}^z U_k)$ является наибольшей нормальной унипотентной подгруппой в $P_k \cap {}^z P_k$.

2. Доказательство теоремы

Рассмотрим сначала параболические подгруппы P_k универсальной группы $\bar{A}_l(q)$, $k \leq [(l+1)/2]$. Определим степени, подстепени и двойные стабилизаторы подстановочных представлений этой группы на левых смежных классах по P_k . Опишем строение подгруппы L_k . Заметим, что

$$\langle h_{p_i}(u) \mid u \in K^*, i \in \{1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, l\} \rangle \leq \langle X_r \mid r \in \Phi_k \rangle \cong \bar{A}_{k-1}(q) \times \bar{A}_{l-k}(q),$$

и поэтому $L_k = O^{p'}(L_k) : \langle h_{p_k}(u) \mid u \in K^* \rangle \cong (\bar{A}_{k-1}(q) \times \bar{A}_{l-k}(q)) : (q-1)$.

Укажем корни для корневых подгрупп, порождающих U_k :

$$\Phi^+ \setminus \Phi_k^+ = \{p_{1,k}, p_{1,k+1}, \dots, p_{1,l}; p_{2,k}, p_{2,k+1}, \dots, p_{2,l}; \dots; \\ p_{k-1,k}, p_{k-1,k+1}, \dots, p_{k-1,l}; p_k, p_{k,k+1}, \dots, p_{k,l}\}.$$

Все коммутаторные соотношения для корневых порождающих подгруппы U_k , вытекающие из коммутаторной формулы Шевалле [8, теорема 5.2.2], являются тривиальными, поэтому U_k изоморфна $p^{s(l-k+1)k}$.

Таким образом, получаем

$$|P_k| = |U_k| |L_k| = q^{k(l-k+1)} q^{\frac{k(k-1)}{2}} q^{\frac{(l-k)(l-k+1)}{2}} (q^2 - 1)(q^3 - 1) \dots (q^k - 1) (q^2 - 1) \\ \times (q^3 - 1) \dots (q^{l-k+1} - 1)(q - 1) = q^{\frac{l(l+1)}{2}} (q^2 - 1) \dots (q^k - 1) (q^2 - 1) \dots (q^{l-k+1} - 1) (q - 1).$$

Отсюда вычисляется степень n подстановочного представления группы $\bar{A}_l(q)$ на левых смежных классах по подгруппе P_k .

$$n = |\bar{A}_l(q) : P_k| = \frac{(q^{l-k+2} - 1)(q^{l-k+3} - 1) \dots (q^{l+1} - 1)}{(q - 1)(q^2 - 1) \dots (q^k - 1)}.$$

Определим двойные стабилизаторы $P_k \cap {}^z P_k$ этого подстановочного представления, $z \in \{z_0, z_1, \dots, z_k\}$.

Воспользуемся определением отражения w_{p_j} , матрицей Картана и найдем образы простых корней при действии элементом $z_1 = w_{p_k} \in W$. Получим, что

$$z_1 : p_{k-1} \mapsto p_{k-1} + p_k, \quad p_k \mapsto -p_k, \quad p_{k+1} \mapsto p_k + p_{k+1},$$

а остальные простые корни z_1 оставляет на месте. Положим $N_1 \equiv P_k \cap {}^{z_1} P_k$ и обозначим через T_1 наибольшую нормальную унипотентную подгруппу в N_1 . Найдем подгруппы ${}^{z_1} U_k$, ${}^{z_1} L_k$ и $U_k \cap {}^{z_1} U_k$, $U_k \cap {}^{z_1} L_k$, $L_k \cap {}^{z_1} U_k$, входящие в T_1 в качестве сомножителей.

$${}^{z_1} U_k = \langle X_r \mid r \in \{p_{1,k-1}, p_{1,k+1}, p_{1,k+2}, \dots, p_{1,l}; p_{2,k-1}, p_{2,k+1}, p_{2,k+2}, \dots, p_{2,l}; \dots; p_{k-1}, p_{k-1,k+1}, \\ p_{k-1,k+2}, \dots, p_{k-1,l}; -p_k, p_{k+1}, p_{k+1,k+2}, \dots, p_{k+1,l}\} \rangle.$$

$$U_k \cap {}^{z_1} U_k = \langle X_r \mid r \in \{p_{1,k+1}, p_{1,k+2}, \dots, p_{1,l}; p_{2,k+1}, p_{2,k+2}, \dots, p_{2,l}; \dots; p_{k-1,k+1}, p_{k-1,k+2}, \dots, \\ p_{k-1,l}\} \rangle.$$

$${}^{z_1} L_k = \langle H, X_r \mid r \in \pm \{p_1, p_{1,2}, \dots, p_{1,k-2}, p_{1,k}; p_2, p_{2,3}, \dots, p_{2,k-2}, p_{2,k}; \dots; p_{k-2}, p_{k-2,k}; p_{k-1,k}; \\ p_{k,k+1}, p_{k,k+2}, \dots, p_{k,l}; p_{k+2}, p_{k+2,k+3}, \dots, p_{k+2,l}; p_{k+3}, p_{k+3,k+4}, \dots, p_{k+3,l}; \dots; p_{l-1}, p_{l-1,l}; p_l\} \rangle.$$

$$U_k \cap {}^{z_1} L_k = \langle X_r \mid r \in \{p_{1,k}, p_{2,k}, \dots, p_{k-1,k}; p_{k,k+1}, p_{k,k+2}, \dots, p_{k,l}\} \rangle.$$

$$L_k \cap {}^{z_1} U_k = \langle X_r \mid r \in \{p_{1,k-1}, p_{2,k-1}, \dots, p_{k-1}; p_{k+1}, p_{k+1,k+2}, \dots, p_{k+1,l}\} \rangle.$$

Таким образом,

$$T_1 = \langle X_r \mid r \in \{p_{1,k-1}, p_{1,k}, \dots, p_{1,l}; p_{2,k-1}, p_{2,k}, \dots, p_{2,l}; \dots; p_{k-2,k-1}, \\ p_{k-2,k}, \dots, p_{k-2,l}; p_{k-1}, p_{k-1,k}, \dots, p_{k-1,l}; p_k, p_{k,k+1}, p_{k,k+2}, \dots, p_{k,l}; p_{k+1}, p_{k+1,k+2}, \dots, p_{k+1,l}\} \rangle.$$

Нетривиальные коммутаторные соотношения для корневых порождающих подгруппы T_1 , вытекающие из коммутаторной формулы Шевалле, имеют вид:

$$[x_{p_{k,b}}(t), x_{p_{a,k-1}}(u)] = x_{p_{a,b}}(\pm tu), \quad [x_{p_{k,b}}(t), x_{p_{k-1}}(u)] = x_{p_{k-1,b}}(\pm tu), \\ [x_{p_{k+1}}(t), x_{p_{c,k}}(u)] = x_{p_{c,k+1}}(\pm tu), \quad [x_{p_{k+1,d}}(t), x_{p_{c,k}}(u)] = x_{p_{c,d}}(\pm tu),$$

где $1 \leq a \leq k-2$; $k+1 \leq b \leq l$; $1 \leq c \leq k-1$; $k+2 \leq d \leq l$. Из этих соотношений следует, что T_1 изоморфна $p^{s(l-k)(k-1)} \cdot p^{2s(l-1)}$.

Опишем строение подгруппы L_{J_1} . Имеем $W_k \cap {}^{z_1}W_k = \langle w_{p_1}, w_{p_2}, \dots, w_{p_{k-2}}, w_{p_{k+2}}, w_{p_{k+3}}, \dots, w_{p_l} \rangle = W_{J_1}$; значит, $J_1 = \{1, 2, \dots, k-2, k+2, k+3, \dots, l\}$. Заметим, что $\langle h_{p_i}(u) \mid u \in K^*, i \in J_1 \rangle \leq \langle X_r \mid r \in \Phi_{J_1} \rangle \cong \bar{A}_{k-2}(q) \times \bar{A}_{l-k-1}(q)$ и поэтому $L_{J_1} = \langle H, X_r \mid r \in \Phi_{J_1} \rangle \cong (\bar{A}_{k-2}(q) \times \bar{A}_{l-k-1}(q)) : (q-1)^3$. Получаем

$$|N_1| = |T_1| |L_{J_1}| = q^{\frac{l(l+1)}{2}-1} (q-1)^3 (q^2-1)(q^3-1) \dots (q^{k-1}-1)(q^2-1)(q^3-1) \dots (q^{l-k}-1).$$

Подстепень $n_1 \equiv |P_k : N_1|$ равна $q^{\frac{(q^k-1)(q^{l-k+1}-1)}{(q-1)^2}}$.

Рассмотрим элемент $z_2 = w_{p_k} w_{p_{k-1}} w_{p_{k+1}} w_{p_k}$ из W и найдем образы простых корней при отображении z_2 . Согласно [8, теорема 2.4.3] для любого простого корня r и любого элемента w из W выполняется равенство $w w_r w^{-1} = w_{w(r)}$. Рассмотрим в качестве r любой простой корень, а в качестве w — элемент z_2 . Выполним необходимые вычисления в симметрической группе S_{l+1} , а потом вернемся в группу W . При сопряжении элементом y_2 транспозиции $(1, 2), (2, 3), \dots, (k-3, k-2)$ и $(k+3, k+4), (k+4, k+5), \dots, (l, l+1)$ остаются на месте, поэтому простые корни p_1, p_2, \dots, p_{k-3} и $p_{k+3}, p_{k+4}, \dots, p_l$ остаются на месте при действии элементом z_2 . Из равенства $y_2(k-1, k) = (k+1, k+2)$ следует, что $z_2(p_{k-1}) = p_{k+1}$, а из $y_2(k+1, k+2) = (k-1, k)$ получаем $z_2(p_{k+1}) = p_{k-1}$. Имеем $y_2(k-2, k-1) = (k-2, k+1) = {}^{(k, k+1)}(k-2, k) = {}^{(k, k+1)(k-1, k)}(k-2, k-1)$, поэтому

$$\begin{aligned} z_2(p_{k-2}) &= w_{p_k} w_{p_{k-1}}(p_{k-2}) = w_{p_k} \left(p_{k-2} - 2 \frac{(p_{k-2}, p_{k-1})}{(p_{k-1}, p_{k-1})} p_{k-1} \right) = w_{p_k} (p_{k-2} - A_{k-2, k-1} p_{k-1}) \\ &= w_{p_k} (p_{k-2} + p_{k-1}) = p_{k-2} + p_{k-1} - 2 \frac{(p_{k-2} + p_{k-1}, p_k)}{(p_k, p_k)} p_k = p_{k-2} + p_{k-1} - 2 \frac{(p_{k-2}, p_k)}{(p_k, p_k)} p_k \\ &\quad - 2 \frac{(p_{k-1}, p_k)}{(p_k, p_k)} p_k = p_{k-2} - A_{k-2, k} p_k + p_{k-1} - A_{k-1, k} p_k = p_{k-2} - 0 \cdot p_k + p_{k-1} + 1 \cdot p_k. \end{aligned}$$

Аналогично $y_2(k+2, k+3) = (k, k+3) = {}^{(k+2, k+3)}(k, k+2) = {}^{(k+2, k+3)(k+1, k+2)}(k, k+1)$, получаем $z_2(p_{k+2}) = w_{p_{k+2}} w_{p_{k+1}}(p_k) = p_k + p_{k+1} + p_{k+2}$. Наконец, вычисляем $z_2(p_k) = w_{p_k} w_{p_{k-1}} w_{p_{k+1}} w_{p_k}(p_k)$. Таким образом, z_2 действует на простых корнях так:

$$\begin{aligned} p_{k-2} &\mapsto p_{k-2} + p_{k-1} + p_k, & p_{k-1} &\mapsto p_{k+1}, & p_k &\mapsto -p_{k-1} - p_k - p_{k+1}, \\ p_{k+1} &\mapsto p_{k-1}, & p_{k+2} &\mapsto p_k + p_{k+1} + p_{k+2}, \end{aligned}$$

а остальные простые корни оставляет на месте.

Рассмотрим

$$N_2 \equiv P_k \cap {}^{z_2}P_k = (U_k \cap {}^{z_2}U_k)(U_k \cap {}^{z_2}L_k)(L_k \cap {}^{z_2}U_k) : L_{J_2}.$$

Выясним строение наибольшей нормальной унипотентной подгруппы $T_2 = (U_k \cap {}^{z_2}U_k)(U_k \cap {}^{z_2}L_k)(L_k \cap {}^{z_2}U_k)$ в группе $P_k \cap {}^{z_2}P_k$. Для этого найдем корневые подгруппы, порождающие T_2 .

$$\begin{aligned} {}^{z_2}U_k &= \langle X_r \mid r \in \{p_{1, k-2}, p_{1, k-1}, p_{1, k+2}, p_{1, k+3}, \dots, p_{1, l}; p_{2, k-2}, p_{2, k-1}, p_{2, k+2}, p_{2, k+3}, \dots, p_{2, l}; \dots; \\ & p_{k-3, k-2}, p_{k-3, k-1}, p_{k-3, k+2}, p_{k-3, k+3}, \dots, p_{k-3, l}; p_{k-2}, p_{k-2, k-1}, p_{k-2, k+2}, \dots, p_{k-2, l}; -p_{k-1, k}, -p_k, \\ & p_{k+1, k+2}, p_{k+1, k+3}, \dots, p_{k+1, l}; -p_{k-1, k+1}, -p_{k, k+1}, p_{k+2}, p_{k+2, k+3}, \dots, p_{k+2, l}\} \rangle. \end{aligned}$$

$$U_k \cap {}^{z_2}U_k = \langle X_r \mid r \in \{p_{1, k+2}, p_{1, k+3}, \dots, p_{1, l}; p_{2, k+2}, p_{2, k+3}, \dots, p_{2, l}; \dots; p_{k-3, k+2}, p_{k-3, k+3}, \dots, p_{k-3, l}; p_{k-2, k+2}, p_{k-2, k+3}, \dots, p_{k-2, l}\} \rangle.$$

$$\begin{aligned} {}^{z_2}L_k &= \langle H, X_r \mid r \in \pm \{p_1, p_{1, 2}, \dots, p_{1, k-3}, p_{1, k}, p_{1, k+1}; p_2, p_{2, 3}, \dots, p_{2, k-3}, p_{2, k}, p_{2, k+1}; \dots; p_{k-3}, \\ & p_{k-3, k}, p_{k-3, k+1}; p_{k-2, k}, p_{k-2, k+1}; p_{k+1}; p_{k-1}, p_{k-1, k+2}, p_{k-1, k+3}, \dots, p_{k-1, l}; p_{k, k+2}, p_{k, k+3}, \dots, p_{k, l}; \\ & p_{k+3}, p_{k+3, k+4}, \dots, p_{k+3, l}; \dots; p_{l-1}, p_{l-1, l}; p_l\} \rangle. \end{aligned}$$

$$U_k \cap {}^{z_2}L_k = \langle X_r \mid r \in \{p_{1, k}, p_{1, k+1}; p_{2, k}, p_{2, k+1}; \dots, p_{k-3, k}, p_{k-3, k+1}; p_{k-2, k}, p_{k-2, k+1}; p_{k-1, k+2}, p_{k-1, k+3}, \dots, p_{k-1, l}; p_{k, k+2}, p_{k, k+3}, \dots, p_{k, l}\} \rangle.$$

$$L_k \cap {}^{z_2}U_k = \langle X_r \mid r \in \{p_{1,k-2}, p_{1,k-1}; p_{2,k-2}, p_{2,k-1}; \dots; p_{k-3,k-2}, p_{k-3,k-1}; p_{k-2}, p_{k-2,k-1}; p_{k+1,k+2}, p_{k+1,k+3}, \dots, p_{k+1,l}; p_{k+2}, p_{k+2,k+3}, \dots, p_{k+2,l}\} \rangle.$$

$$T_2 = \langle X_r \mid r \in \{p_{1,k-2}, p_{1,k-1}, \dots, p_{1,l}; p_{2,k-2}, p_{2,k-1}, \dots, p_{2,l}; \dots; p_{k-3,k-2}, p_{k-3,k-1}, \dots, p_{k-3,l}; p_{k-2}, p_{k-2,k-1}, \dots, p_{k-2,l}; p_{k-1,k+2}, p_{k-1,k+3}, \dots, p_{k-1,l}; p_{k,k+2}, p_{k,k+3}, \dots, p_{k,l}; p_{k+1,k+2}, p_{k+1,k+3}, \dots, p_{k+1,l}; p_{k+2}, p_{k+2,k+3}, \dots, p_{k+2,l}\} \rangle.$$

Нетривиальные коммутаторные соотношения для корневых порождающих подгруппы T_2 , вытекающие из коммутаторной формулы Шевалле, имеют вид:

$$\begin{aligned} [x_{p_{k-1,b}}(t), x_{p_{a,k-2}}(u)] &= x_{p_{a,b}}(\pm tu), & [x_{p_{k-1,b}}(t), x_{p_{k-2}}(u)] &= x_{p_{k-2,b}}(\pm tu), \\ [x_{p_{k,b}}(t), x_{p_{c,k-1}}(u)] &= x_{p_{c,b}}(\pm tu), & [x_{p_{k+1,b}}(t), x_{p_{c,k}}(u)] &= x_{p_{c,b}}(\pm tu), \\ [x_{p_{k+2}}(t), x_{p_{c,k+1}}(u)] &= x_{p_{c,k+2}}(\pm tu), & [x_{p_{k+2,d}}(t), x_{p_{c,k+1}}(u)] &= x_{p_{c,d}}(\pm tu), \end{aligned}$$

где $1 \leq a \leq k-3$; $k+2 \leq b \leq l$; $1 \leq c \leq k-2$ и $k+3 \leq d \leq l$. Из этих соотношений следует, что T_2 изоморфна $p^{s(l-k-1)(k-2)} \cdot p^{4s(l-3)}$.

Имеем $W_k \cap {}^{z_2}W_k = \langle w_{p_1}, \dots, w_{p_{k-3}}, w_{p_{k-1}}, w_{p_{k+1}}, w_{p_{k+3}}, w_{p_{k+4}}, \dots, w_{p_l} \rangle = W_{J_2}$, значит $J_2 = \{1, 2, \dots, k-3, k-1, k+1, k+3, k+4, \dots, l\}$. Заметим, что $\langle h_{p_i}(u) \mid u \in K^*, i \in J_2 \rangle \leq \langle X_r \mid r \in \Phi_{J_2} \rangle \cong \bar{A}_{k-3}(q) \times \bar{A}_1(q) \times \bar{A}_1(q) \times \bar{A}_{l-k-2}(q)$ и поэтому $L_{J_2} = \langle H, X_r \mid r \in \Phi_{J_2} \rangle \cong (\bar{A}_{k-3}(q) \times \bar{A}_1(q) \times \bar{A}_1(q) \times \bar{A}_{l-k-2}(q)) : (q-1)^3$. Получаем $N_2 \equiv P_k \cap {}^{z_2}P_k \cong (p^{s(l-k-1)(k-2)} \cdot p^{4s(l-3)}) : L_{J_2}$ и $|N_2| = q^{\frac{l(l+1)}{2}-4} (q-1)^3 (q^2-1)(q^3-1) \dots (q^{k-2}-1)(q^2-1) \dots (q^{l-k-1}-1)(q^2-1)^2$. Подстепень $n_2 \equiv |P_k : N_2| = q^4 \frac{(q^{k-1}-1)(q^k-1)(q^{l-k}-1)(q^{l-k+1}-1)}{(q^2-1)^2(q-1)^2}$.

Рассмотрим элемент $z_3 = w_{p_k} w_{p_{k-1}} w_{p_{k-2}} w_{p_{k+1}} w_{p_k} w_{p_{k-1}} w_{p_{k+2}} w_{p_{k+1}} w_{p_k}$ из W и найдем образы простых корней при отображении z_3 . При сопряжении элементом y_3 транспозиции $(1, 2)$, $(2, 3), \dots, (k-4, k-3)$ и $(k+4, k+5)$, $(k+5, k+6)$, \dots , $(l, l+1)$ остаются на месте, поэтому простые корни p_1, p_2, \dots, p_{k-4} и $p_{k+4}, p_{k+5}, \dots, p_l$ остаются на месте при действии элементом z_3 . Подобным образом, как при действии элементом z_2 , воспользуемся матрицей Картана и равенствами

$$\begin{aligned} y_3(k-3, k-2) &= (k+1, k-3), & y_3(k-2, k-1) &= (k+1, k+2), & y_3(k-1, k) &= (k+2, k+3), \\ y_3(k+1, k+2) &= (k-2, k-1), & y_3(k+2, k+3) &= (k-1, k), & y_3(k+3, k+4) &= (k, k+4). \end{aligned}$$

Получаем, что z_3 действует на простых корнях так:

$$\begin{aligned} p_1 &\mapsto p_1, & p_2 &\mapsto p_2, & \dots, & p_{k-4} &\mapsto p_{k-4}, & p_{k-3} &\mapsto p_{k-3} + p_{k-2} + p_{k-1} + p_k, & p_{k-2} &\mapsto p_{k+1}, \\ p_{k-1} &\mapsto p_{k+2}, & p_k &\mapsto -p_{k-2} - p_{k-1} - p_k - p_{k+1} - p_{k+2}, & p_{k+1} &\mapsto p_{k-2}, & p_{k+2} &\mapsto p_{k-1}, \\ p_{k+3} &\mapsto p_k + p_{k+1} + p_{k+2} + p_{k+3}, & p_{k+4} &\mapsto p_{k+4}, & p_{k+5} &\mapsto p_{k+5}, & \dots, & p_l &\mapsto p_l. \end{aligned}$$

Опишем строение двойного стабилизатора $N_3 \equiv P_k \cap {}^{z_3}P_k = (U_k \cap {}^{z_3}U_k)(U_k \cap {}^{z_3}L_k)(L_k \cap {}^{z_3}U_k) : L_{J_3} = T_3 : L_{J_3}$.

$$\begin{aligned} {}^{z_3}U_k &= \langle X_r \mid r \in \{p_{1,k-3}, p_{1,k-2}, p_{1,k-1}, p_{1,k+3}, p_{1,k+4}, \dots, p_{1,l}; p_{2,k-3}, p_{2,k-2}, p_{2,k-1}, p_{2,k+3}, \\ p_{2,k+4}, \dots, p_{2,l}; \dots; p_{k-4,k-3}, p_{k-4,k-2}, p_{k-4,k-1}, p_{k-4,k+3}, p_{k-4,k+4}, \dots, p_{k-4,l}; p_{k-3}, p_{k-3,k-2}, \\ p_{k-3,k-1}, p_{k-3,k+3}, p_{k-3,k+4}, \dots, p_{k-3,l}; -p_{k-2,k}, -p_{k-1,k}, -p_k, p_{k+1,k+3}, p_{k+1,k+4}, \dots, p_{k+1,l}; \\ -p_{k-2,k+1}, -p_{k-1,k+1}, -p_{k,k+1}, p_{k+2,k+3}, p_{k+2,k+4}, \dots, p_{k+2,l}; -p_{k-2,k+2}, -p_{k-1,k+2}, -p_{k,k+2}, p_{k+3}, \\ p_{k+3,k+4}, \dots, p_{k+3,l}\} \rangle. \end{aligned}$$

$$U_k \cap {}^{z_3}U_k = \langle X_r \mid r \in \{p_{1,k+3}, p_{1,k+4}, \dots, p_{1,l}; p_{2,k+3}, p_{2,k+4}, \dots, p_{2,l}; \dots; p_{k-4,k+3}, p_{k-4,k+4}, \dots, p_{k-4,l}; p_{k-3,k+3}, p_{k-3,k+4}, \dots, p_{k-3,l}\} \rangle.$$

$${}^{z_3}L_k = \langle H, X_r \mid r \in \pm \{p_1, p_{1,2}, \dots, p_{1,k-4}, p_{1,k}, p_{1,k+1}, p_{1,k+2}; p_2, p_{2,3}, \dots, p_{2,k-4}, p_{2,k}, p_{2,k+1}, p_{2,k+2}; \dots; p_{k-4}, p_{k-4,k}, p_{k-4,k+1}, p_{k-4,k+2}; p_{k-3,k}, p_{k-3,k+1}, p_{k-3,k+2}; p_{k+1}, p_{k+1,k+2}; p_{k+2}; p_{k-2}, p_{k-2,k-1}, p_{k-2,k+3}, p_{k-2,k+4}, \dots, p_{k-2,l}; p_{k-1}, p_{k-1,k+3}, p_{k-1,k+4}, \dots, p_{k-1,l}; p_{k,k+3}, p_{k,k+4}, \dots, p_{k,l}; p_{k+4}, p_{k+4,k+5}, \dots, p_{k+4,l}; \dots; p_{l-1}, p_{l-1,l}; p_l \} \rangle.$$

$$U_k \cap {}^{z_3}L_k = \langle X_r \mid r \in \{p_{1,k}, p_{1,k+1}, p_{1,k+2}; p_{2,k}, p_{2,k+1}, p_{2,k+2}; \dots; p_{k-4,k}, p_{k-4,k+1}, p_{k-4,k+2}; p_{k-3,k}, p_{k-3,k+1}, p_{k-3,k+2}; p_{k-2,k+3}, p_{k-2,k+4}, \dots, p_{k-2,l}; p_{k-1,k+3}, p_{k-1,k+4}, \dots, p_{k-1,l}; p_{k,k+3}, p_{k,k+4}, \dots, p_{k,l} \} \rangle.$$

$$L_k \cap {}^{z_3}U_k = \langle X_r \mid r \in \{p_{1,k-3}, p_{1,k-2}, p_{1,k-1}; p_{2,k-3}, p_{2,k-2}, p_{2,k-1}; \dots; p_{k-4,k-3}, p_{k-4,k-2}, p_{k-4,k-1}; p_{k-3}, p_{k-3,k-2}, p_{k-3,k-1}; p_{k+1,k+3}, p_{k+1,k+4}, \dots, p_{k+1,l}; p_{k+2,k+3}, p_{k+2,k+4}, \dots, p_{k+2,l}; p_{k+3}, p_{k+3,k+4}, \dots, p_{k+3,l} \} \rangle.$$

$$T_3 = \langle X_r \mid r \in \{p_{1,k-3}, p_{1,k-2}, \dots, p_{1,l}; p_{2,k-3}, p_{2,k-2}, \dots, p_{2,l}; \dots; p_{k-4,k-3}, p_{k-4,k-2}, \dots, p_{k-4,l}; p_{k-3}, p_{k-3,k-2}, \dots, p_{k-3,l}; p_{k-2,k+3}, p_{k-2,k+4}, \dots, p_{k-2,l}; p_{k-1,k+3}, p_{k-1,k+4}, \dots, p_{k-1,l}; \dots, p_{k+3}; p_{k+3,k+4}, \dots, p_{k+3,l} \} \rangle.$$

Нетривиальные коммутаторные соотношения для корневых порождающих подгруппы T_3 , вытекающие из коммутаторной формулы Шевалле, имеют вид:

$$\begin{aligned} [x_{p_{k-2,b}}(t), x_{p_{a,k-3}}(u)] &= x_{p_{a,b}}(\pm tu), & [x_{p_{k-2,b}}(t), x_{p_{k-3}}(u)] &= x_{p_{k-3,b}}(\pm tu), \\ [x_{p_{k-1,b}}(t), x_{p_{c,k-2}}(u)] &= x_{p_{c,b}}(\pm tu), & [x_{p_{k,b}}(t), x_{p_{c,k-1}}(u)] &= x_{p_{c,b}}(\pm tu), \\ [x_{p_{k+1,b}}(t), x_{p_{c,k}}(u)] &= x_{p_{c,b}}(\pm tu), & [x_{p_{k+2,b}}(t), x_{p_{c,k+1}}(u)] &= x_{p_{c,b}}(\pm tu), \\ [x_{p_{k+3}}(t), x_{p_{c,k+2}}(u)] &= x_{p_{c,k+3}}(\pm tu), & [x_{p_{k+3,d}}(t), x_{p_{c,k+2}}(u)] &= x_{p_{c,d}}(\pm tu), \end{aligned}$$

где $1 \leq a \leq k-4$; $k+3 \leq b \leq l$; $1 \leq c \leq k-3$; $k+4 \leq d \leq l$. Из этих соотношений следует, что T_3 изоморфна $p^{s(l-k-2)(k-3)} \cdot p^{6s(l-5)}$.

Опишем строение подгруппы L_{J_3} . Имеем

$$W_k \cap {}^{z_3}W_k = W_{J_3} = \langle w_{p_1}, w_{p_2}, \dots, w_{p_{k-4}}, w_{p_{k-2}}, w_{p_{k-1}}, w_{p_{k+1}}, w_{p_{k+2}}, w_{p_{k+4}}, w_{p_{k+5}}, \dots, w_{p_l} \rangle, \text{ поэтому } J_3 = \{1, 2, \dots, k-4, k-2, k-1, k+1, k+2, k+4, k+5, \dots, l\}. \text{ Заметим, что } \langle h_{p_i}(u) \mid u \in K^*, i \in J_3 \rangle \leq \langle X_r \mid r \in \Phi_{J_3} \rangle \cong \bar{A}_{k-4}(q) \times \bar{A}_2(q) \times \bar{A}_2(q) \times \bar{A}_{l-k-3}(q) \text{ и } L_{J_3} \cong (\bar{A}_{k-4}(q) \times \bar{A}_2(q) \times \bar{A}_2(q) \times \bar{A}_{l-k-3}(q)): (q-1)^3. \text{ Таким образом } N_3 \cong (p^{s(l-k-2)(k-3)} \cdot p^{6s(l-5)}): L_{J_3} \text{ и подстепень } n_3 \equiv |P_k : N_3| \text{ равна } q^9 \frac{(q^{k-2}-1)(q^{k-1}-1)(q^k-1)(q^{l-k-1}-1)(q^{l-k}-1)(q^{l-k+1}-1)}{(q-1)^2(q^2-1)^2(q^3-1)^2}.$$

Рассмотрим элемент

$$z_i = w_{p_k} w_{p_{k-1}} \dots w_{p_{k-i+1}} w_{p_{k+1}} w_{p_k} \dots w_{p_{k-i+2}} \dots w_{p_{k+i-1}} w_{p_{k+i-2}} \dots w_{p_k}$$

из W и найдем образы простых корней при отображении z_i . При сопряжении элементом $y_i = (k-i+1, k+1)(k-i+2, k+2) \dots (k-1, k-1+i)(k, k+i)$ транспозиции $(1, 2), (2, 3), \dots, (k-i-1, k-i)$ и $(k+i+1, k+i+2), (k+i+2, k+i+3), \dots, (l, l+1)$ остаются на месте, поэтому простые корни $p_1, p_2, \dots, p_{k-i-1}$ и $p_{k+i+1}, p_{k+i+2}, \dots, p_l$ остаются на месте при действии элементом z_i . Подобным образом, как при действии элементом z_2 , воспользуемся матрицей Картана и равенствами

$$\begin{aligned} y_i(k-i, k-i+1) &= (k-i, k+1), & y_i(k-i+1, k-i+2) &= (k+1, k+2), \\ y_i(k-i+2, k-i+3) &= (k+2, k+3), & \dots, & y_i(k-1, k) &= (k+i-1, k+i), \\ y_i(k+1, k+2) &= (k-i+1, k-i+2), & \dots, & y_i(k+i, k+i+1) &= (k, k+i+1), \end{aligned}$$

и получим, что z_i действует на простых корнях так:

$$\begin{aligned} p_1 &\mapsto p_1, & p_2 &\mapsto p_2, & \dots, & p_{k-i-1} &\mapsto p_{k-i-1}, & p_{k-i} &\mapsto p_{k-i} + p_{k-i+1} + \dots + p_{k-1} + p_k, \\ p_{k-i+1} &\mapsto p_{k+1}, & p_{k-i+2} &\mapsto p_{k+2}, & \dots, & p_{k-1} &\mapsto p_{k-1+i}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_k &\mapsto -p_{k-i+1} - p_{k-i+2} \cdots - p_k - p_{k+1} - \cdots - p_{k+i-1}, \\
p_{k+1} &\mapsto p_{k-i+1}, \quad p_{k+2} \mapsto p_{k-i+2}, \quad \dots, \quad p_{k+i-1} \mapsto p_{k-1}, \quad p_{k+i} \mapsto p_k + p_{k+1} + \cdots + p_{k+i}, \\
p_{k+i+1} &\mapsto p_{k+i+1}, \quad p_{k+i+2} \mapsto p_{k+i+2}, \quad \dots, \quad p_l \mapsto p_l.
\end{aligned}$$

Из этого действия получаем $W_k \cap {}^{z_i}W_k = W_{J_i}$ и $J_i = \{1, 2, \dots, k-i-1, k-i+1, k-i+2, \dots, k-1, k+1, k+2, \dots, k+i-1, k+i+1, k+i+2, \dots, l\}$. Поэтому $L_{J_i} = \langle H, X_r \mid r \in \Phi_{J_i} \rangle \cong (\bar{A}_{k-i-1}(q) \times \bar{A}_{i-1}(q) \times \bar{A}_{i-1}(q) \times \bar{A}_{l-k-i}(q)) : (q-1)^3$. Далее вычисляем подгруппы $U_k \cap {}^{z_i}U_k$, $U_k \cap {}^{z_i}L_k$, $L_k \cap {}^{z_i}U_k$, содержащиеся в унитарной подгруппе T_i двойного стабилизатора $N_i \equiv P_k \cap {}^{z_i}P_k = (U_k \cap {}^{z_i}U_k)(U_k \cap {}^{z_i}L_k)(L_k \cap {}^{z_i}U_k) : L_{J_i} = T_i : L_{J_i}$.

$$\begin{aligned}
{}^{z_i}U_k &= \langle X_r \mid r \in \{p_{1,k-i}, p_{1,k-i+1}, \dots, p_{1,k-1}, p_{1,k+i}, p_{1,k+i+1}, \dots, p_{1,l}; p_{2,k-i}, p_{2,k-i+1}, \dots, p_{2,k-1}, \\
& p_{2,k+i}, p_{2,k+i+1}, \dots, p_{2,l}; \dots; p_{k-i-1,k-i}, p_{k-i-1,k-i+1}, \dots, p_{k-i-1,k-1}, p_{k-i-1,k+i}, p_{k-i-1,k+i+1}, \dots, \\
& p_{k-i-1,l}; p_{k-i}, p_{k-i,k-i+1}, \dots, p_{k-i,k-1}, p_{k-i,k+i}, p_{k-i,k+i+1}, \dots, p_{k-i,l}; -p_{k-i+1,k}, -p_{k-i+2,k}, \dots, \\
& -p_k, p_{k+1,k+i}, p_{k+1,k+i+1}, \dots, p_{k+1,l}; -p_{k-i+1,k+1}, -p_{k-i+2,k+1}, \dots, -p_k, p_{k+1,k+i}, \\
& p_{k+2,k+i+1}, \dots, p_{k+2,l}; \dots; -p_{k-i+1,k+i-2}, -p_{k-i+2,k+i-2}, \dots, -p_k, p_{k+i-1,k+i}, \\
& p_{k+i-1,k+i+1}, \dots, p_{k+i-1,l}; -p_{k-i+1,k+i-1}, -p_{k-i+2,k+i-1}, \dots, -p_k, p_{k+i-1}, \\
& p_{k+i}, p_{k+i,k+i+1}, \dots, p_{k+i,l}\} \rangle.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_k \cap {}^{z_i}U_k &= \langle X_r \mid r \in \{p_{1,k+i}, p_{1,k+i+1}, \dots, p_{1,l}; p_{2,k+i}, p_{2,k+i+1}, \dots, p_{2,l}; \dots; p_{k-i-1,k+i}, \\
& p_{k-i-1,k+i+1}, \dots, p_{k-i-1,l}; p_{k-i,k+i}, p_{k-i,k+i+1}, \dots, p_{k-i,l}\} \rangle.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{z_i}L_k &= \langle H, X_r \mid r \in \pm \{p_1, p_{1,2}, \dots, p_{1,k-i-1}, p_{1,k}, p_{1,k+1}, \dots, p_{1,k+i-1}; p_2, p_{2,3}, \dots, p_{2,k-i-1}, p_{2,k}, \\
& p_{2,k+1}, \dots, p_{2,k+i-1}; \dots; p_{k-i-1}, p_{k-i-1,k}, p_{k-i-1,k+1}, \dots, p_{k-i-1,k+i-1}; p_{k-i,k}, p_{k-i,k+1}, \dots, \\
& p_{k-i,k+i-1}; p_{k+1}, p_{k+1,k+2}, \dots, p_{k+1,k+i-1}; p_{k+2}, p_{k+2,k+3}, \dots, p_{k+2,k+i-1}; p_{k+i-1}; p_{k-i+1}, \\
& p_{k-i+1,k-i+2}, \dots, p_{k-i+1,k-1}, p_{k-i+1,k+i}, p_{k-i+1,k+i+1}, \dots, p_{k-i+1,l}; p_{k-i+2}, p_{k-i+2,k-i+3}, \dots, \\
& p_{k-i+2,k-1}, p_{k-i+2,k+i}, p_{k-i+2,k+i+1}, \dots, p_{k-i+2,l}; \dots; p_{k-1}, p_{k-1,k+i}, p_{k-1,k+i+1}, \dots, \\
& p_{k-1,l}; p_k, p_{k+i}, p_{k,k+i+1}, \dots, p_k, l; p_{k+i+1}, p_{k+i+1,k+i+2}, \dots, p_{k+i+1,l}; p_{k+i+2}, p_{k+i+2,k+i+3}, \dots, \\
& p_{k+i+2,l}; \dots; p_{l-1}, p_{l-1,l}; p_l\} \rangle.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_k \cap {}^{z_i}L_k &= \langle X_r \mid r \in \{p_{1,k}, p_{1,k+1}, \dots, p_{1,k+i-1}; p_{2,k}, p_{2,k+1}, \dots, p_{2,k+i-1}; \dots; p_{k-i-1,k}, \\
& p_{k-i-1,k+1}, \dots, p_{k-i-1,k+i-1}; p_{k-i,k}, p_{k-i,k+1}, \dots, p_{k-i,k+i-1}; p_{k-i+1,k+i}, p_{k-i+1,k+i+1}, \dots, p_{k-i+1,l}; \\
& p_{k-i+2,k+i}, p_{k-i+2,k+i+1}, \dots, p_{k-i+2,l}; \dots; p_{k-1,k+i}, p_{k-1,k+i+1}, \dots, p_{k-1,l}; p_k, p_{k+i}, \\
& p_k, k+i+1, \dots, p_k, l\} \rangle.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_k \cap {}^{z_i}U_k &= \langle X_r \mid r \in \{p_{1,k-i}, p_{1,k-i+1}, \dots, p_{1,k-1}; p_{2,k-i}, p_{2,k-i+1}, \dots, p_{2,k-1}; \dots; p_{k-i-1,k-i}, \\
& p_{k-i-1,k-i+1}, \dots, p_{k-i-1,k-1}; p_{k-i}, p_{k-i,k-i+1}, \dots, p_{k-i,k-1}; p_{k+1,k+i}, p_{k+1,k+i+1}, \dots, p_{k+1,l}; \\
& p_{k+2,k+i}, p_{k+2,k+i+1}, \dots, p_{k+2,l}; \dots; p_{k+i-1,k+i}, p_{k+i-1,k+i+1}, \dots, p_{k+i-1,l}; p_{k+i}, \\
& p_{k+i,k+i+1}, \dots, p_{k+i,l}\} \rangle.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_i &= \langle X_r \mid r \in \{p_{1,k-i}, p_{1,k-i+1}, \dots, p_{1,l}; p_{2,k-i}, p_{2,k-i+1}, \dots, p_{2,l}; \dots; p_{k-i-1,k-i}, p_{k-i-1,k-i+1}, \dots, \\
& p_{k-i-1,l}; p_{k-i}, p_{k-i,k-i+1}, \dots, p_{k-i,l}; p_{k-i+1,k+i}, p_{k-i+1,k+i+1}, \dots, p_{k-i+1,l}; p_{k-i+2,k+i}, \\
& p_{k-i+2,k+i+1}, \dots, p_{k-i+2,l}; \dots; p_{k-1,k+i}, p_{k-1,k+i+1}, \dots, p_{k-1,l}; p_k, p_{k+i}, p_k, k+i+1, \dots, \\
& p_k, l; \dots; p_{k+i-1,k+i}, p_{k+i-1,k+i+1}, \dots, p_{k+i-1,l}; p_{k+i}, p_{k+i,k+i+1}, \dots, p_{k+i,l}\} \rangle.
\end{aligned}$$

Нетривиальные коммутаторные соотношения для корневых порождающих подгруппы T_i , вытекающие из коммутаторной формулы Шевалле, имеют вид:

$$\begin{aligned}
[x_{p_{k-i+1,b}}(t), x_{p_{a,k-i}}(u)] &= x_{p_{a,b}}(\pm tu), & [x_{p_{k-i+1,b}}(t), x_{p_{k-i}}(u)] &= x_{p_{k-i,b}}(\pm tu), \\
[x_{p_{k-i+2,b}}(t), x_{p_{c,k-i+1}}(u)] &= x_{p_{c,b}}(\pm tu), & [x_{p_{k-i+3,b}}(t), x_{p_{c,k-i+2}}(u)] &= x_{p_{c,b}}(\pm tu), \\
\dots, & & [x_{p_{k+i-1,b}}(t), x_{p_{c,k+i-2}}(u)] &= x_{p_{c,b}}(\pm tu), \\
[x_{p_{k+i}}(t), x_{p_{c,k+i-1}}(u)] &= x_{p_{c,k+i}}(\pm tu), & [x_{p_{k+i,d}}(t), x_{p_{c,k+i-1}}(u)] &= x_{p_{c,d}}(\pm tu),
\end{aligned}$$

где $1 \leq a \leq k - i - 1$; $k + i \leq b \leq l$; $1 \leq c \leq k - i$; $k + i + 1 \leq d \leq l$. Из этих соотношений следует, что T_i изоморфна $p^{s(l-k-i+1)(k-i)} \cdot p^{2si(l-2i+1)}$ и подстепень $n_i \equiv |P_k : N_i|$ равна

$$q^{i^2} \frac{(q^{k-i+1} - 1)(q^{k-i+2} - 1) \dots (q^k - 1)(q^{l-k-i+2} - 1) \dots (q^{l-k+1} - 1)}{(q-1)^2(q^2-1)^2(q^3-1)^2 \dots (q^i-1)^2}.$$

Рассмотрим элемент $z_k = w_{p_k} w_{p_{k-1}} \dots w_{p_1} w_{p_{k+1}} w_{p_k} \dots w_{p_2} \dots w_{p_{2k-1}} w_{p_{2k-2}} \dots w_{p_k}$ из W и найдем образы простых корней при отображении z_k . Если $l > 2k$, то при сопряжении элементом $y_k = (1, k+1)(2, k+2) \dots (k-1, 2k-1)(k, 2k)$ транспозиции $(2k+1, 2k+2)$, $(2k+2, 2k+3)$, \dots , $(l, l+1)$ остаются на месте, поэтому простые корни p_{2k+1} , p_{2k+2} , \dots , p_l остаются на месте при действии на них элементом z_k . Из равенств

$$\begin{aligned} y_k(1, 2) &= y_k(1, 2)y_k^{-1} = {}^{(2,k+2)(1,k+1)}(1, 2) = {}^{(2,k+2)}(2, k+1) = (k+1, k+2), \\ y_k(2, 3) &= y_k(2, 3)y_k^{-1} = {}^{(3,k+3)(2,k+2)}(2, 3) = {}^{(3,k+3)}(3, k+2) = (k+2, k+3), \dots, \\ y_k(k-1, k) &= {}^{(k,2k)(k-1,2k-1)}(k-1, k) = {}^{(k,2k)}(k, 2k-1) = (2k-1, 2k), \\ y_k(k, k+1) &= {}^{(k,2k)(1,k+1)}(k, k+1) = {}^{(k,2k)}(1, k) = (1, 2k) = {}^{(2k-1,2k)}(1, 2k-1) \\ &= {}^{(2k-1,2k)(2k-2,2k-1)}(1, 2k-2) = {}^{(2k-1,2k)(2k-2,2k-1)(2k-3,2k-2)}(1, 2k-3) = \dots \\ &= {}^{(2k-1,2k)(2k-2,2k-1)(2k-3,2k-2) \dots (2,3)(1,2)}(1, 2), \quad y_k(2k, 2k+1) = y_k(2k, 2k+1)y_k^{-1} \\ &= {}^{(k,2k)}(2k, 2k+1) = (k, 2k+1) = {}^{(2k,2k+1)}(k, 2k) = {}^{(2k+1,2k)(2k-1,2k)}(k, 2k-1) \\ &= {}^{(2k,2k+1)(2k-1,2k)(2k-2,2k-1)}(k, 2k-2) = \dots = {}^{(2k,2k+1)(2k-1,2k) \dots (k+2,k+3)(k+1,k+2)}(k, k+1) \end{aligned}$$

следует, что

$$\begin{aligned} {}^{z_k}w_{p_1} &= w_{z_k(p_1)} = w_{p_{k+1}}, \quad {}^{z_k}w_{p_2} = w_{z_k(p_2)} = w_{p_{k+2}}, \quad \dots, \quad {}^{z_k}w_{p_{k-1}} = w_{p_{2k-1}}, \\ z_k(p_k) &= w_{p_{2k-1}} w_{p_{2k-2}} \dots w_{p_k} \dots w_{p_2} w_{p_1}(p_1) = -p_1 - p_2 - \dots - p_{2k-1}, \\ z_k(p_{2k}) &= w_{p_{2k}} w_{p_{2k-1}} \dots w_{p_{k+2}} w_{p_{k+1}}(p_k) = p_k + p_{k+1} + \dots + p_{2k}. \end{aligned}$$

Мы рассматриваем числа k , удовлетворяющие условию $k \leq [(l+1)/2]$, поэтому возможны два случая: $l \geq 2k$ или $l+1 = 2k$.

С л у ч а й $l \geq 2k$. Если $l \geq 2k$, то

$$\begin{aligned} z_k : p_1 &\mapsto p_{k+1}, \quad p_2 \mapsto p_{k+2}, \dots, p_{k-1} \mapsto p_{2k-1}, \quad p_k \mapsto -p_1 - p_2 - \dots - p_{2k-1}, \\ p_{k+1} &\mapsto p_1, \quad p_{k+2} \mapsto p_2, \dots, p_{2k-1} \mapsto p_{k-1}, \quad p_{2k} \mapsto p_k + p_{k+1} + \dots + p_{2k}, \quad p_{2k+1} \mapsto p_{2k+1}, \dots, p_l \mapsto p_l. \end{aligned}$$

$$N_k \equiv P_k \cap {}^{z_k}P_k = (U_k \cap {}^{z_k}U_k)(U_k \cap {}^{z_k}L_k)(L_k \cap {}^{z_k}U_k) : L_{J_k}, \quad W_k \cap {}^{z_k}W_k = W_{J_k},$$

$$J_k = \{1, 2, \dots, k-1, k+1, k+2, \dots, 2k-1, 2k+1, 2k+2, \dots, l\},$$

$$L_{J_k} = \langle H, X_r \mid r \in \Phi_{J_k} \rangle \cong (\bar{A}_{k-1}(q) \times \bar{A}_{k-1}(q) \times \bar{A}_{l-2k}(q)) : (q-1)^2.$$

$$\begin{aligned} {}^{z_k}U_k &= \langle X_r \mid r \in \{ -p_{1,k}, -p_{2,k}, \dots, -p_k; p_{k+1,2k}, p_{k+1,2k+1}, \dots, p_{k+1,l}; -p_{1,k+1}, \\ &-p_{2,k+1}, \dots, -p_{k,k+1}; p_{k+2,2k}, p_{k+2,2k+1}, \dots, p_{k+2,l}; \dots; -p_{1,2k-2}, -p_{2,2k-2}, \dots, -p_{k,2k-2}; p_{2k-1,2k}, \\ &p_{2k-1,2k+1}, \dots, p_{2k-1,l}; -p_{1,2k-1}, -p_{2,2k-1}, \dots, -p_{k,2k-1}; p_{2k}, p_{2k,2k+1}, \dots, p_{2k,l} \} \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^{z_k}L_k &= \langle H, X_r \mid r \in \pm \{ p_{k+1}, p_{k+1,k+2}, \dots, p_{k+1,2k-1}; p_{k+2}, p_{k+2,k+3}, \dots, p_{k+2,2k-1}; \dots, p_{2k-1}; p_1, \\ &p_{1,2}, \dots, p_{1,k-1}; p_{1,2k}, p_{1,2k+1}, \dots, p_{1,l}; p_2, p_{2,3}, \dots, p_{2,k-1}; p_{2,2k}, p_{2,2k+1}, \dots, p_{2,l}; \dots; p_{k-1}, p_{k-1,2k}, \\ &p_{k-1,2k+1}, \dots, p_{k-1,l}; p_k, p_k, p_{k,2k+1}, \dots, p_k, l; p_{2k+1}, p_{2k+1,2k+2}, \dots, p_{2k+1,l}; \dots; p_{l-1}, p_{l-1,l}; p_l \} \rangle. \end{aligned}$$

$$U_k \cap {}^{z_k}L_k = \langle X_r \mid r \in \{p_{1,2k}, p_{1,2k+1}, \dots, p_{1,l}; p_{2,2k}, p_{2,2k+1}, \dots, p_{2,l}; \dots; p_{k-1,2k}, p_{k-1,2k+1}, \dots, p_{k-1,l}; p_{k,2k}, p_{k,2k+1}, \dots, p_{k,l}\} \rangle.$$

$$L_k \cap {}^{z_k}U_k = \langle X_r \mid r \in \{p_{k+1,2k}, p_{k+1,2k+1}, \dots, p_{k+1,l}; p_{k+2,2k}, p_{k+2,2k+1}, \dots, p_{k+2,l}; \dots; p_{2k-1,2k}, p_{2k-1,2k+1}, \dots, p_{2k-1,l}; p_{2k}, p_{2k,2k+1}, \dots, p_{2k,l}\} \rangle.$$

$$T_k = (U_k \cap {}^{z_k}U_k)(U_k \cap {}^{z_k}L_k)(L_k \cap {}^{z_k}U_k) = \langle X_r \mid r \in \{p_{1,2k}, p_{1,2k+1}, \dots, p_{1,l}; p_{2,2k}, p_{2,2k+1}, \dots, p_{2,l}; \dots; p_{k-1,2k}, p_{k-1,2k+1}, \dots, p_{k-1,l}; p_{k,2k}, p_{k,2k+1}, \dots, p_{k,l}; p_{k+1,2k}, p_{k+1,2k+1}, \dots, p_{k+1,l}; p_{k+2,2k}, p_{k+2,2k+1}, \dots, p_{k+2,l}; \dots; p_{2k-1,2k}, p_{2k-1,2k+1}, \dots, p_{2k-1,l}; p_{2k}, p_{2k,2k+1}, \dots, p_{2k,l}\} \rangle.$$

Коммутаторные соотношения для корневых порождающих подгруппы T_k тривиальные, поэтому в случае $l \geq 2k$ группа T_k изоморфна $p^{s(l-2k+1)2k}$ и

$$|N_k| = |P_k \cap {}^{z_k}P_k| = |T_k| |L_{J_k}| = q^{\frac{l(l+1)}{2} - k^2} (q-1)^2 (q^2-1)^2 \dots (q^k-1)^2 (q^2-1) \dots (q^{l-2k+1}-1),$$

а подстепень $n_k \equiv |P_k : N_k|$ равна $q^{k^2} \frac{(q^{l-2k+2}-1)(q^{l-2k+3}-1) \dots (q^{l-k+1}-1)}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1) \dots (q^k-1)}$.

С л у ч а й $l+1 = 2k$. Если $l+1 = 2k$, то

$$\begin{aligned} z_k : p_1 \mapsto p_{k+1}, p_2 \mapsto p_{k+2}, \dots, p_{k-1} \mapsto p_{2k-1}, p_k \mapsto -p_1 - p_2 - \dots - p_{2k-1}, \\ p_{k+1} \mapsto p_1, p_{k+2} \mapsto p_2, \dots, p_{2k-1} \mapsto p_{k-1}. \quad J_k = \{1, 2, \dots, k-1, k+1, k+2, \dots, 2k-1 = l\}, \end{aligned}$$

$$L_{J_k} = \langle H, X_r \mid r \in \Phi_{J_k} \rangle \cong (\bar{A}_{k-1}(q) \times \bar{A}_{k-1}(q)) : (q-1).$$

$${}^{z_k}U_k = \langle X_r \mid r \in \{-p_{1,k}, -p_{2,k}, \dots, -p_k; -p_{1,k+1}, -p_{2,k+1}, \dots, -p_{k,k+1}; \dots; -p_{1,2k-2}, -p_{2,2k-2}, \dots, -p_{k,2k-2}; -p_{1,2k-1}, -p_{2,2k-1}, \dots, -p_{k,2k-1}\} \rangle.$$

$${}^{z_k}L_k = \langle H, X_r \mid r \in \pm\{p_{k+1}, p_{k+1,k+2}, \dots, p_{k+1,2k-1}, p_{k+2}, p_{k+2,k+3}, \dots, p_{k+2,2k-1}, \dots, p_{2k-1}; p_1, p_{1,2}, \dots, p_{1,k-1}; p_2, p_{2,3}, \dots, p_{2,k-1}; \dots; p_{k-2}, p_{k-2,k-1}; p_{k-1}\} \rangle.$$

Подгруппы $U_k \cap {}^{z_k}U_k$, $U_k \cap {}^{z_k}L_k$, $L_k \cap {}^{z_k}U_k$ тривиальны, поэтому в случае $l+1 = 2k$ группа T_k тривиальна и $N_k \cong L_{J_k}$. Подстепень $n_k \equiv |P_k : N_k|$ равна q^{k^2} .

Теорема доказана.

3. Примитивные параболические представления групп $A_l(q)$

Параболические максимальные подгруппы универсальной группы $\bar{A}_l(q)$ содержат ее подгруппу Картана, значит (см. [8, теорема 12.1.1]), содержат и центр $Z(\bar{A}_l(q))$, поэтому параболические максимальные подгруппы присоединенной группы $A_l(q)$ являются фактор-группами параболических максимальных подгрупп группы $\bar{A}_l(q)$ по центру $Z(\bar{A}_l(q))$. Степени, ранги и подстепени подстановочных представлений группы $A_l(q)$ по параболическим максимальным подгруппам совпадают с соответствующими степенями, рангами и подстепенями подстановочных представлений группы $\bar{A}_l(q)$. Из строения двойного стабилизатора

$$N_i \equiv P_k \cap {}^{z_i}P_k = (U_k \cap {}^{z_i}U_k)(U_k \cap {}^{z_i}L_k)(L_k \cap {}^{z_i}U_k) : L_{J_i}$$

в группе $\bar{A}_l(q)$ ($0 \leq i \leq k$) следует, что наибольшая нормальная унитарная подгруппа $T_i \equiv (U_k \cap {}^{z_i}U_k)(U_k \cap {}^{z_i}L_k)(L_k \cap {}^{z_i}U_k)$ из N_i не пересекается с подгруппой Картана группы $\bar{A}_l(q)$ и поэтому изоморфна соответствующей наибольшей нормальной унитарной подгруппе из двойного стабилизатора группы $A_l(q)$. Отличная ситуация в другой подгруппе L_{J_i} двойного стабилизатора N_i , а именно подгруппы L_{J_i} из N_i для любого $i = 0, 1, 2, \dots, k-1, k$

($L_{J_0} = L_k$) содержат центр $Z(\bar{A}_l(q))$, поэтому двойные стабилизаторы примитивных параболических представлений группы $A_l(q)$ являются фактор-группами соответствующих двойных стабилизаторов группы $\bar{A}_l(q)$ по циклической группе, порядок которой равен наибольшему общему делителю чисел $l+1$ и $q-1$. Если же наибольший общий делитель чисел $l+1$ и $q-1$ равен 1, то такие двойные стабилизаторы представлений группы $A_l(q)$ совпадают с соответствующими двойными стабилизаторами группы $\bar{A}_l(q)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кораблева В.В.** Ранги примитивных параболических подстановочных представлений простых групп $B_l(q)$, $C_l(q)$ и $D_l(q)$ // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 2. С. 340–356.
2. **Кораблева В.В.** Параболические подстановочные представления группы $F_4(q)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1998. Т. 5. С. 39–59.
3. **Кораблева В.В.** Параболические подстановочные представления групп $E_6(q)$ и $E_7(q)$ // Комбинатор. и вычисл. методы в математике / ОмГУ. Омск, 1999. С. 160–189.
4. **Кораблева В.В.** Параболические подстановочные представления групп $E_8(q)$ / Челяб. гос. ун-т. Деп. в ВИНИТИ 29.10.99, № 3224–В99. 221 с.
5. **Кораблева В.В.** Параболические подстановочные представления групп ${}^2F_4(q)$ и ${}^3D_4(q^3)$ // Мат. заметки. 2000, Т. 67, № 1. С. 69–76.
6. **Кораблева В.В.** Параболические подстановочные представления групп ${}^2E_6(q)$ // Мат. заметки. 2000. Т. 67, № 6. С. 899–912.
7. **Кораблева В.В.** Ранги примитивных параболических подстановочных представлений классических групп лиевского типа $A_l(q)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2001. Т. 7, № 2. С. 188–193.
8. **Carter R.W.** Simple groups of Lie type. L.: Wiley, 1972. 331 с.
9. **Стейнберг Р.** Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975. 181 с.
10. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли (Гл. IV–VI). М.: Мир, 1972. 334 с.
11. **Carter R.W.** Finite groups of Lie type, conjugacy classes and complex characters. L.: Wiley, 1993. 543 с.

Кораблева Вера Владимировна
канд. физ.-мат. наук, доц.
кафедра компьют. безопасности и прикл. алгебры
Челябин. гос. ун-т
e-mail: vvk@csu.ru

Поступила 26.05.2008

УДК 517.977.58

УСЛОВИЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТИ ВЕТВЕЙ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С КРУГОВОЙ ИНДИКАТРИСОЙ¹

П. Д. Лебедев, А. А. Успенский

Предлагаются аналитические и численные подходы к построению решения одного класса задач быстрого действия, использующие конструкции теории особенностей дифференцируемых отображений, негладкого анализа и дифференциальной геометрии.

Ключевые слова: функция оптимального результата, множество симметрии, диффеоморфизм.

Введение

Для частного случая задачи динамического управления по быстрдействию на плоскости предлагается метод решения, основанный на выделении негладких особенностей функции оптимального результата. Множество негладкости этой функции определяется геометрией границы краевого условия. В редких случаях это множество может быть выделено явно в аналитической форме. В общем случае построение множества негладкости требует решения по существу нелинейного уравнения, выписанного относительно параметров задачи управления. В работе изучаются свойства этого уравнения, рассматриваемого над разными по своим дифференциальным свойствам семействами кривых, ограничивающих целевое множество. Исследуются дифференциальные свойства решений этого уравнения. Выписываются условия трансверсальности для ветвей решения этого уравнения, рассматриваемого в окрестности точки вырождения каустики. В работе используются конструкции [1, 2]. Полученные результаты применимы при изучении геометрии невыпуклых множеств, в теории оптимального управления и в теории позиционных дифференциальных игр [3, 4] при изучении негладких особенностей множеств достижимости, стабильных мостов. Кроме того, результаты могут быть полезны специалистам по уравнениям типа Гамильтона — Якоби, работающим в рамках различных концепций [5–7] обобщенных решений этих уравнений. Результаты могут быть использованы в геометрической оптике [8] при изучении особенностей эволюции волновых фронтов, при исследовании характеристического уравнения для волнового уравнения [9]. Работа продолжает исследования [10–15].

1. Задача Коши — Дирихле для уравнения Айзекса — Беллмана

Рассматривается задача Коши–Дирихле:

$$\min_{\nu: \|\nu\| \leq 1} \left(\nu_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \nu_2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 1 = 0, \quad (1.1)$$

$$u|_{\Gamma} = 0. \quad (1.2)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00587-а), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-2640.2008.1) и регионального гранта РФФИ/ПСО (проект 07-0196085).

Здесь $\|\nu\| = \sqrt{\sum_{i=1}^2 \nu_i^2}$ — норма вектора $\nu = (\nu_1, \nu_2)$. Краевое условие (1.2) определено на границе

$\Gamma = \partial M$ замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}^2$. Будем полагать, что граница $\Gamma = \partial M$ этого множества является непрерывной склейкой дважды гладких кривых без точек самопересечения.

Решение задачи (1.1), (1.2) понимается в обобщенном смысле в соответствии с концепцией минимаксного решения [5] уравнения типа Гамильтона — Якоби.

Уравнение (1.1) в теории дифференциальных игр называется уравнением Айзекса — Беллмана. При этом минимаксное решение $u = u(x, y)$ задачи (1.1), (1.2) является функцией оптимального результата в соответствующей задаче быстрогодействия [5]:

$$\begin{cases} \dot{x} = \nu_1, \\ \dot{y} = \nu_2, \end{cases} \quad (1.3)$$

где управление $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ стеснено ограничением $\|\nu\| \leq 1$. Задача управления рассматривается в классе позиционных процедур управления [4]. Содержательно задача быстрогодействия заключается в приведении движения динамической системы (1.3) на множество M за наименьшее время за счет надлежащего выбора допустимого управления $\nu = (\nu_1, \nu_2)$.

Структура минимаксного решения $u = u(x, y)$ задачи (1.1), (1.2) известна [15]:

$$u(x, y) = \rho((x, y), M).$$

Здесь $\rho(\mathbf{x}, M) = \min_{\mathbf{y} \in M} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ — евклидово расстояние от точки \mathbf{x} до множества M . При этом надо подчеркнуть, что для существования решения достаточно замкнутости целевого множества и не являются существенными какие-либо свойства его границы, такие, например, как гладкость.

Наряду с минимаксным подходом к определению решения уравнения типа Гамильтона — Якоби, имеющим корни в теории позиционных дифференциальных игр, существуют и другие подходы [6, 7] к определению обобщенного решения уравнения типа Гамильтона — Якоби. Один из них стоит выделить особо. С. Н. Кружков, следуя аксиоматике геометрической оптики, ввел [6] главное (фундаментальное) решение задачи Коши — Дирихле для уравнения в частных производных первого порядка типа эйконала. В соответствии с этой концепцией фундаментальное решение $u_K = u_K(x, y)$ задачи Коши — Дирихле для уравнения в частных производных первого порядка:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1, \quad (1.4)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad (1.5)$$

имеет вид $u_K(x, y) = -\rho(x, y, M)$. Здесь, как и в (1.2), краевое условие (1.5) определено на границе $\Gamma = \partial M$ замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}^2$. Таким образом, фундаментальное решение задачи (1.4), (1.5) отличается от минимаксного решения соответствующей задачи (1.1), (1.2) только лишь знаком.

Уравнение (1.4) изучается в геометрической оптике. Его решение $u_K = u_K(x, y)$ называется эйконалом. Эйконал — функция, линии уровня которой являются волновыми фронтами. Здесь имеет смысл напомнить принцип Гюйгенса (см., например, [8]), в соответствии с которым мгновенный волновой фронт есть огибающая сферических волн, порожденных точечными источниками. Очевидно, что карты (совокупности всех) множеств Лебега фундаментального решения задачи (1.4), (1.5) и минимаксного решения соответствующей задачи (1.1), (1.2) совпадают. Поэтому линии уровня минимаксного решения исходной задачи (1.1), (1.2) можно также трактовать как волновые фронты и при их построении использовать конструкции геометрической оптики.

Построение волновых фронтов требует отыскания эквидистант кривой Γ , ибо волновой фронт принадлежит соответствующей эквидистанте [16]. Известно [1], что в общем случае

достаточно удаленная эквидистанта E гладкой кривой теряет дифференциальные свойства, возникают особенности типа “ласточкиного хвоста” (рис. 1), у эквидистанты появляются точки самопересечения. Объединения таких точек эквидистант образуют многообразия, на которых решение теряет гладкость (происходит “градиентная катастрофа”).

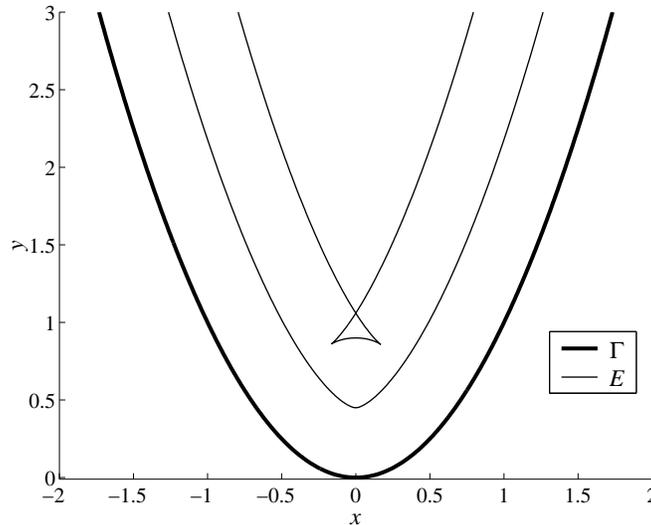


Рис. 1.

Изучению таких многообразий с точки зрения их конструктивного построения посвящена настоящая работа. При этом используются методы и конструкции дифференциальной геометрии [16], геометрической оптики [8], теории особенностей гладких отображений [1].

2. Биссектриса — множество симметрии и элементы ее построения

Пусть M — замкнутое множество в евклидовом пространстве \mathbb{R}^2 , точка $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus M$. Под проекцией точки \mathbf{x} на множество M понимаем ближайшую к \mathbf{x} в евклидовой метрике точку из M . Символом $\Omega_M(\mathbf{x})$ обозначим совокупность всех проекций точки \mathbf{x} на M . Введем в рассмотрение $\rho(\mathbf{x}, M) = \min_{\mathbf{y} \in M} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ — евклидово расстояние от точки \mathbf{x} до множества M .

Из определения проекции следует, что для замкнутого множества M

$$\rho(\mathbf{x}, M) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega_M(\mathbf{x}).$$

О п р е д е л е н и е 1. Биссектрисой $L(M)$ множества M назовем [15] множество всех точек из его дополнения до \mathbb{R}^2 , которые имеют не менее двух проекций на множество M :

$$L(M) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus M : \exists \mathbf{y}_1 \in \Omega_M(\mathbf{x}), \exists \mathbf{y}_2 \in \Omega_M(\mathbf{x}) (\mathbf{y}_1 \neq \mathbf{y}_2)\}.$$

Биссектриса является частным представителем множеств симметрии. Топологические особенности множеств симметрии исследуются в теории особенностей дифференцируемых отображений [1, 2]. В работе В. Д. Седых [17] изучались схожие с биссектрисой многообразия, называемые “middle point set” и “medial axe”.

В настоящей работе предлагаются конструктивные подходы к построению биссектрисы.

Для случая, когда M — выпуклое множество, из теоремы Моцкина [18] следует $L(M) = \emptyset$. Если M — невыпуклое множество, его биссектриса является непустым множеством. Располагая биссектрисой множества, можно найти его меру невыпуклости. Понятие меры невыпуклости введено В. Н. Ушаковым [13]. Во многих случаях задача нахождения функции расстояния от точки до множества M (и, стало быть, решения задачи (1.1), (1.2)) так или иначе сводится к построению его биссектрисы $L(M)$.

Здесь отметим, что с точки зрения теории дифференциальных игр биссектриса $L(M)$ целевого множества M для соответствующей задачи управления по быстрдействию — это расщепляющая кривая. Из каждой точки $\mathbf{x} \in L(M)$ выходят не менее двух оптимальных траекторий — отрезки $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, $\mathbf{y} \in \Omega_M(\mathbf{x})$ [3]. При этом структура биссектрисы как объединения многообразий определяется геометрией границы целевого множества. В плоском случае биссектриса является объединением нуль- и одномерных многообразий, построение которых возможно в ряде простых ситуаций в точном аналитическом виде, но в самой общей ситуации требуется разработка численных алгоритмов.

Биссектриса $L(M)$ замкнутого плоского множества M зависит от геометрии его границы. При этом одномерные многообразия (“ветви биссектрисы”), составляющие $L(M)$, определяются особыми точками границы множества. Строгие определения этих особых точек приведены ниже.

В дальнейшем полагаем, что граница $\Gamma = \partial M$ множества M является непрерывной склейкой графиков дважды гладких функций без точек самопересечения.

Обозначим $\Gamma = \text{gr } f$, $\text{gr } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x), x \in X \subseteq \mathbb{R}\}$ — график функции $y = f(x)$. Будем рассматривать функции $y = f(x)$, определенные на конечном или бесконечном интервале $X \subseteq \mathbb{R}$.

Выделим окрестность $O(x_0) = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2) \subset X$ точки $x = x_0$, где $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, и отвечающую ей выколотую окрестность $O_0(x_0) = O(x_0) \setminus \{x_0\}$. Рассмотрим гладкие функции без критических точек (диффеоморфизмы), отображающие левую полуокрестность $(x_0 - \delta_1, x_0) \subset O_0(x_0)$ этой точки в ее правую полуокрестность $(x_0, x_0 + \delta_2) \subset O_0(x_0)$.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что локальный диффеоморфизм $x_2 = x_2(x_1)$ непрерывен слева в точке $x_1 = x_0$ и отображает левую полуокрестность точки $x_1 = x_0$ в ее правую полуокрестность, если выполняются условия:

- (1) $\lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} x_2(x_1) = x_0$;
- (2) $x_2(x_0 - \delta_1, x_0) = (x_0, x_0 + \delta_2)$.

Нетрудно видеть, что односторонняя непрерывность слева диффеоморфизма $x_2 = x_2(x_1)$ обеспечивается требованием строгой отрицательности его производной.

Введем в рассмотрение в качестве параметров задачи скалярные переменные x_1 и x_2 , стесненные неравенством $x_2 > x_1$. Проведем касательные через точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ графика функции. В предположении, что касательные пересекаются, обозначим (x_*, y_*) решение системы уравнений:

$$\begin{cases} y_* = f'(x_1)(x_* - x_1) + f(x_1), \\ y_* = f'(x_2)(x_* - x_2) + f(x_2). \end{cases} \quad (2.1)$$

Далее в плоскости параметров на множестве $\Pi_+ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > x_1\}$ рассмотрим уравнение

$$G(x_1, x_2) = 0. \quad (2.2)$$

Здесь $G(x_1, x_2) = \rho^2((x_1, f(x_1)), (x_*, y_*)) - \rho^2((x_2, f(x_2)), (x_*, y_*))$ — разность квадратов расстояний между указанными точками графика функции и точкой пересечения касательных. Функции, аналогичные $G = G(x_1, x_2)$, используются при изучении свойств кривых [2].

О п р е д е л е н и е 3. Псевдовершиной кривой $\Gamma = \text{gr } f$ будем называть точку

$$(x_0, f(x_0)) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} (x_*, y_*),$$

где $(x_*, y_*) = (x_*(x_1), y_*(x_1))$ — решение системы уравнений (2.1), в которой $x_2 = x_2(x_1)$ — непрерывный слева в точке $x_1 = x_0$ локальный диффеоморфизм левой полуокрестности точки в ее правую полуокрестность, определяемый уравнением (2.2).

О п р е д е л е н и е 4. Конечный односторонний предел $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} (x_0, y_0)$ решений системы

$$\begin{cases} -x + x_1 - f(x_1)(y - f(x_1)) = 0, \\ -x + x_2 - f(x_2)(y - f(x_2)) = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

будем называть крайней точкой биссектрисы. Здесь $x_2 = x_2(x_1)$ — непрерывный слева в точке $x_1 = x_0$ локальный диффеоморфизм левой полуокрестности точки на ее правую полуокрестность, определяемый уравнением (2.2). Если означенный предел равен бесконечности или не существует, то будем говорить, что псевдовершина $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ не порождает крайнюю точку биссектрисы.

Система уравнений (2.3) является сопряженной к системе линейных уравнений (2.1) и определяет точки из $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, которые имеют две ортогональные проекции на кривую Γ , причем проекции отстоят от соответствующей точки на равном расстоянии.

О п р е д е л е н и е 5. Ветвью $L(x_0, y_0)$ биссектрисы кривой $\Gamma = \text{gr } f$, где $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ — псевдовершина $\Gamma = \text{gr } f$, будем называть множество точек (x, y) на плоскости, удовлетворяющих системе уравнений (2.3), когда параметры x_1 и x_2 связаны непрерывным слева в точке $x_1 = x_0$ локальным диффеоморфизмом $x_2 = x_2(x_1)$ левой полуокрестности точки $x_1 = x_0$ на ее правую полуокрестность, определяемым уравнением (2.2).

П р и м е р. Для иллюстрации корректности введенных определений рассмотрим параболу $\Gamma = \text{gr } f$, $\text{gr } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2, x \in \mathbb{R}\}$. В качестве плоского множества M примем

$$\text{hyp } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2, x \in \mathbb{R}\},$$

подграфик функции $f(x) = x^2$. Тогда $\text{gr } f = \partial M$.

Исследуем множество M на наличие псевдовершин. Выбрав произвольно точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) параболы Γ , найдем точки пересечения касательных, проходящих через (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Отметим также, что поскольку точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) “равноправны” между собой, то в дальнейшем, не нарушая общности рассуждений, будем полагать, что параметры x_1 и x_2 связаны неравенством $x_1 < x_2$. Выпишем систему уравнений (2.1):

$$\begin{cases} 2x_1(x - x_1) - (y - x_1^2) = 0, \\ 2x_2(x - x_2) - (y - x_2^2) = 0. \end{cases}$$

Ее общее решение:

$$x_*(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_*(x_1, x_2) = x_1 x_2.$$

На этом множестве решений системы (2.1), которое в данном случае совпадает с подграфиком функции $y = x^2$ за вычетом самой параболы, выделим только те точки, которые равноудалены от точек касания. Для этого решим уравнение (2.2), которое здесь принимает вид:

$$\left(x_1 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + (x_1^2 - x_1 x_2)^2 = \left(x_2 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + (x_2^2 - x_1 x_2)^2.$$

Его решение

$$x_2(x_1) = -x_1, \quad \text{где } x_1 < 0.$$

Эта функция — локальный диффеоморфизм, отображающий левую полуокрестность точки $x_1 = 0$ на ее правую полуокрестность, причем

$$\lim_{x_1 \rightarrow -0} x_2(x_1) = \lim_{x_1 \rightarrow -0} (-x_1) = 0.$$

Тогда однопараметрическое семейство решений системы (2.2), построенное при условии, что параметры x_1 и x_2 связаны в силу непрерывного слева в точке $x_1 = 0$ локального диффеоморфизма $x_2 = -x_1$, имеет вид:

$$\begin{cases} x_*(x_1) = \frac{x_1 - x_1}{2} = 0, \\ y_*(x_1) = x_1(-x_1) = -x_1^2. \end{cases}$$

Следуя определению 3, получаем

$$\lim_{x_1 \rightarrow -0} (x_*, y_*) = \lim_{x_1 \rightarrow -0} (0, -x_1^2) = (0, 0),$$

Тем самым найдена точка $(x_0, y_0) = (0, 0)$ — псевдовершина параболы.

Поскольку у параболы псевдовершина единственная, то биссектриса $L(M)$ имеет единственную ветвь $L(x_0, y_0)$, определяемую псевдовершиной $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Для отыскания биссектрисы $L(M)$ параболы решаем систему уравнений (2.3):

$$\begin{cases} x - x_1 + 2x_1(y - x_1^2) = 0, \\ x - x_2 + 2x_2(y - x_2^2) = 0, \end{cases}$$

где $x_2(x_1) = -x_1$; здесь $x_1 < 0$.

Получаем

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = \frac{1}{2} + x_1^2, \quad x_1 < 0. \end{cases}$$

Построена биссектриса подграфика степенной функции с показателем 2:

$$L(M) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y = \frac{1}{2} + x_1^2, x_1 < 0 \right\}.$$

Следуя определению 4, находим односторонний предел:

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} (x, y) = \lim_{x_1 \rightarrow 0 - 0} \left(0, \frac{1}{2} + x_1^2 \right) = \left(0, \frac{1}{2} \right).$$

Тем самым найдена крайняя точка $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = (0, 1/2)$ биссектрисы $L(M)$. Крайняя точка биссектрисы является ее “началом”, которое, заметим, биссектрисе не принадлежит.

Соответствующие построения представлены на рис. 2. Маркерами выделены псевдовершина параболы и крайняя точка биссектрисы.

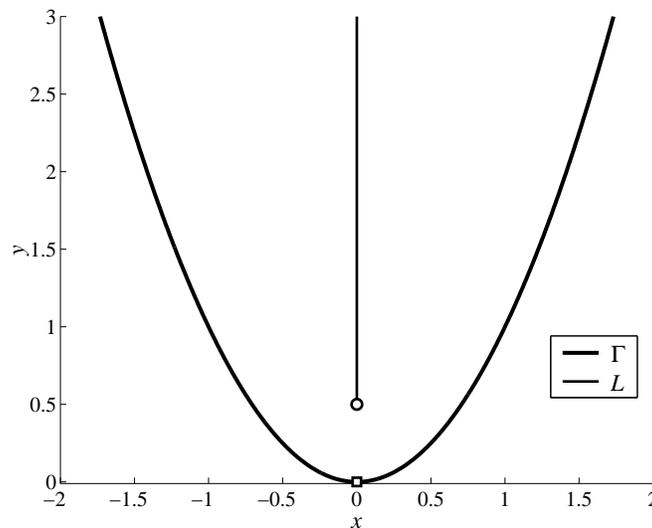


Рис. 2.

Рассмотренный пример относится к числу немногих примеров, для которых биссектриса может быть построена в явном аналитическом виде. В общем случае на пути к построению биссектрисы множества наибольшую сложность представляет отыскание локальных решений уравнения (2.2). Следующий пункт посвящен изучению свойств этого уравнения.

3. О продолжимости локального решения уравнения, связывающего параметры

Рассмотрим подробнее нелинейное (в самом общем случае) уравнение (2.2):

$$G(x_1, x_2) = 0,$$

определяющее неявно зависимости $x_2 = x_2(x_1)$ и $x_1 = x_1(x_2)$ между параметрами x_1 и x_2 . Изучим свойства уравнения и его локальных решений, рассматривая уравнение над разными (по вхождению в него) классами функций.

Заметим, что определяющая значимую часть этого уравнения функция

$$G(x_1, x_2) = 2(f(x_1) - f(x_2))(x_2 - x_1) + (f'(x_2) + f'(x_1))(x_2 - x_1)^2 - 2f'(x_1)f'(x_2)(x_2 - x_1)(f(x_1) - f(x_2)) - (f'(x_1) + f'(x_2))(f(x_1) - f(x_2))^2$$

является симметрической, вследствие чего тождественные отображения $x_2 = x_1$ и $x_1 = x_2$ являются его решениями.

В дальнейшем будем рассматривать функции $y = f(x)$, определенные на конечном или бесконечном интервале $X \subseteq \mathbb{R}$, со следующими дифференциальными свойствами. Для любой точки $x_0 \in X$ существует достаточно малая окрестность $O(x_0) = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2)$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, такая, что функция $y = f(x)$, будучи непрерывной в точке $x = x_0$, дважды дифференцируема в выколотой окрестности $O_0(x_0) = O(x_0) \setminus \{x_0\}$.

Свойства таких функций будем изучать локально в окрестности произвольно взятой точки $x_0 \in X$. С каждой точкой $(x, y) = (x_0, y_0)$ плоскости свяжем совокупность $F(x_0, y_0)$ функций $y = f(x)$, $f(x_0) = y_0$, каждая из которых:

- (1) непрерывна в точке $x_0 \in X$;
- (2) дважды непрерывно дифференцируема в выколотой окрестности точки $x = x_0$;
- (3) если имеет производную первого порядка в точке $x = x_0$, то в сколь угодно малой окрестности точки не является линейной функцией.

В зависимости от дифференциальных свойств функций в точке $x = x_0$ выделим во множестве $F(x_0, y_0)$ семейства функций:

$$F^{(2)}(x_0, y_0) = \{f \in F(x_0, y_0) : \exists f'(x_0), \exists f''(x_0)\},$$

$$F^{(1)}(x_0, y_0) = \{f \in F(x_0, y_0) : \exists f'(x_0), \exists f''_-(x_0), \exists f''_+(x_0), f''_-(x_0) \neq f''_+(x_0)\},$$

$$F^{(0)}(x_0, y_0) = \{f \in F(x_0, y_0) : \exists f'_-(x_0), \exists f'_+(x_0), f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)\}.$$

Здесь $f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ — односторонние производные в точке $x = x_0$ слева и справа соответственно.

Аналогично символами $f''_-(x_0)$, $f''_+(x_0)$ обозначены односторонние производные второго порядка соответственно слева и справа в точке $x = x_0$.

Вообще говоря, здесь допускается, что производные могут и не быть конечными величинами.

Лемма 1. *Какова бы ни была точка $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, в каждом из семейств $F^{(2)}(x_0, y_0)$, $F^{(1)}(x_0, y_0)$, $F^{(0)}(x_0, y_0)$, существуют функции, графики которых имеют в точке $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ псевдовершину.*

Доказательство. Поскольку дифференциальные свойства функций не зависят от линейного преобразования координат

$$(x, y) \rightarrow (x', y') : x' = x - x_0, \quad y' = y - f(x_0)$$

на плоскости (параллельного переноса графиков), то для доказательства утверждения достаточно привести примеры функций из семейств $F^{(2)}(0, 0)$, $F^{(1)}(0, 0)$, $F^{(0)}(0, 0)$, графики которых проходят через начало координат, а точка $(x_0, f(x_0)) = (0, 0)$ является псевдовершиной.

Пример 1. Функция $f(x) = x^2$, $x_0 = 0$, $O(0) = (-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, принадлежит семейству функций $F^{(2)}(0, 0)$. Следуя определению псевдовершины, показано (см. пример в п. 2), что начало координат является псевдовершиной графика. Здесь локальный диффеоморфизм, отображающий левую полуокрестность точки $x_0 = 0$ в ее правую полуокрестность, имеет вид

$$x_2 = -x_1.$$

Пример 2. Функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0, \end{cases}$$

$x_0 = 0$, $O(0) = (-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, принадлежит семейству функций $F^{(1)}(0, 0)$. Функция является гладкой в точке $x_0 = 0$, производная второго порядка в этой точке не существует, ее односторонние производные второго порядка равны $f''_-(0) = 2$, $f''_+(0) = 0$. Действуя по определению псевдовершины, нетрудно показать, что начало координат является псевдовершиной графика. При этом локальный диффеоморфизм, отображающий левую полуокрестность точки $x_0 = 0$ в ее правую полуокрестность, и определяемый неявно уравнением (2.2), имеет вид

$$x_2 = \frac{x_1}{2} \left(1 - \sqrt{1 + 4x_1^2} \right).$$

Пример 3. Функция $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $x_0 = 0$, $O(0) = (-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, принадлежит семейству функций $F^{(0)}(0, 0)$, ибо не имеет производной первого порядка. Более того, будучи непрерывной в точке $x_0 = 0$, она не удовлетворяет в окрестности этой точки условию Липшица. Между тем, следуя определению псевдовершины, нетрудно проверить, что начало координат является псевдовершиной графика. Здесь локальный диффеоморфизм, отображающий левую полуокрестность точки $x_0 = 0$ в ее правую полуокрестность, имеет вид

$$x_2 = -x_1.$$

Примеры 1–3 доказывают истинность леммы 1.

Будем полагать, что точка $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ такова, что $x_0 - \delta_1 < x_1 < x_0$, $x_0 - \delta_2 < x_2 < x_0 + \delta_2$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$. Если $\frac{\partial G}{\partial x_2}(x_1, x_2) \neq 0$, в соответствии с классической теоремой о существовании и дифференцируемости неявно заданной функции существует локальное гладкое решение $x_2 = x_2(x_1) : (x_0, x_0 - \delta_1) \rightarrow (x_2^{(1)}, x_2^{(2)})$ уравнения $G(x_1, x_2) = 0$, где $\delta_1 > 0$, интервал $(x_2^{(1)}, x_2^{(2)}) \subset X$. Подчеркнем, что в общем случае локальное решение $x_2 = x_2(x_1)$ уравнения $G(x_1, x_2) = 0$ таково, что $x_2^{(1)} \neq x_0$. Другими словами, левая полуокрестность точки $x_0 \in X$ не отображается функцией $x_2 = x_2(x_1)$ в правую полуокрестность точки $x_0 \in X$. В качестве иллюстрирующего примера можно рассмотреть уравнение

$$(x_2 - x_1)^2 = 0.$$

Это уравнение имеет только тождественное решение $x_2 = x_1$, переводящее интервал $(x_0, x_0 - \delta_1)$ на себя, т. е. эта функция переводит, например, левую полуокрестность точки $x_1 = x_0$ в левую же (а не правую) полуокрестность этой точки.

В силу специфики рассматриваемого круга проблем нас интересуют только те локальные решения $x_2 = x_2(x_1)$, которые обладают дополнительно следующими свойствами (см. определение 3):

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} x_2(x_1) = x_0,$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{dx_2}{dx_1}(x_1) = c = \text{const} \leq 0.$$

Эти условия выражают непрерывность слева локального решения уравнения и строго монотонное убывание решения в левой полуокрестности точки $x = x_0$. Отображение $x_2 = x_2(x_1) : (x_0, x_0 - \delta_1) \rightarrow (x_0, x_0 + \delta_2(\delta_1))$ является полунепрерывным слева в точке $x_1 = x_0$ локальным диффеоморфизмом, отображающим левую полуокрестность этой точки в ее правую полуокрестность.

В силу того что функция $G = G(x_1, x_2)$ является симметрической функцией относительно переменных x_1 и x_2 , существование полунепрерывного слева в точке $x_1 = x_0$ локального диффеоморфизма, отображающего левую полуокрестность точки $x = x_0$ в ее правую полуокрестность, влечет существование полунепрерывного справа в точке $x_2 = x_0$ локального диффеоморфизма $x_1 = x_1(x_2) : (x_0, x_0 + \delta_2) \rightarrow (x_0, x_0 - \delta_2(\delta_1))$, отображающего правую полуокрестность точки $x_2 = x_0$ в ее левую полуокрестность, и имеющего аналогичные свойства.

Имеет место утверждение о непрерывной, но, вообще говоря, не во всех случаях гладкой продолжимости локального диффеоморфизма, определяемого уравнением (2.2).

Лемма 2. *Если уравнение*

$$G(x_1, x_2) = 0$$

с симметрической левой частью определяет локальный диффеоморфизм $x_2 = x_2(x_1) : (x_0, x_0 - \delta_1) \rightarrow (x_0, x_0 + \delta_2)$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 = \delta_2(\delta_1) > 0$ такой, что

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} x_2(x_1) = x_0,$$

и

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{dx_2}{dx_1}(x_1) = c \leq 0,$$

то обратный диффеоморфизм $x_1 = x_1(x_2) : (x_0, x_0 + \delta_2) \rightarrow (x_0, x_0 - \delta_2)$ также является решением уравнения. При этом в плоскости переменных x_1 и x_2 существует непрерывная кривая $\gamma_0 = \gamma_0(t)$, $t \in (t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2)$, $t_0 = x_0$, задаваемая уравнением

$$G(t, \gamma_0(t)) = 0,$$

и гладкая во всех точках интервала $(t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2)$ кроме, быть может, точки $t = t_0$.

Доказательство. По условию

$$G(x_1, x_2(x_1)) = 0$$

для всех $x_1 \in (x_0, x_0 - \delta_1)$, $\delta_1 > 0$. Выберем произвольно $\tilde{x}_1 \in (x_0, x_0 - \delta_1)$. Найдем значение $\tilde{x}_2 = x_2(\tilde{x}_1)$ локального диффеоморфизма $x_2 = x_2(x_1)$, отображающего интервал $(x_0, x_0 - \delta_1) \subset \mathbb{R}$ на интервал $(x_0, x_0 + \delta_2) \subset \mathbb{R}$. $G = G(x_1, x_2)$ — симметрическая функция, стало быть,

$$G(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = G(\tilde{x}_2, \tilde{x}_1).$$

Тогда

$$G(\tilde{x}_2, \tilde{x}_1) = 0.$$

Здесь $\tilde{x}_1 = x_1(\tilde{x}_2)$ — значение обратного диффеоморфизма $x_1 = x_1(x_2) : (x_0, x_0 + \delta_2) \rightarrow (x_0, x_0 - \delta_2)$. В силу произвольности выбора точки равенство выполняется для всех $\tilde{x}_2 \in (x_0, x_0 + \delta_2)$. Таким образом,

$$G(x_2, x_1(x_2)) = 0$$

для всех $x_2 \in (x_0, x_0 + \delta_2)$. Это и означает, что обратный диффеоморфизм является решением уравнения.

Составим из графиков диффеоморфизмов кривую $\gamma_0 = \gamma_0(t)$, $t \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2)$, по правилу

$$\gamma_0(t) = \begin{cases} (t, x_2(t)), & t \in (x_0, x_0 - \delta_1), \\ (t_0, t_0), & t = x_0, \\ (t, x_1(t)), & t \in (x_0, x_0 + \delta_2). \end{cases}$$

По построению кривая $\gamma_0 = \gamma_0(t)$, $t \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2)$ слева от точки $x_0 = t_0$ параметризована как $t = x_1, x_1 \in (x_0, x_0 - \delta_1)$, $\delta_1 > 0$, а справа от точки $x_0 = t_0$ она параметризована как $t = x_2, x_2 \in (x_0, x_0 + \delta_2)$, $\delta_2 > 0$. Заметим, что $(x_2, x_1) = (x_0, x_0)$ является точечным решением уравнения, так как $G(x_0, x_0) = 0$.

Поскольку выполняются равенства

$$G(x_1, x_2(x_1)) = 0,$$

$$G(x_2, x_1(x_2)) = 0,$$

$$G(x_0, x_0) = 0,$$

где $x_1 \in (x_0, x_0 - \delta_1)$, $x_2 \in (x_0, x_0 + \delta_2)$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, то

$$G(t, \gamma_0(t)) = 0$$

для всех $t \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2)$, т. е. $\gamma_0 = \gamma_0(t)$, $t \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2)$ удовлетворяет исходному уравнению (2.2). Существование общего предела у диффеоморфизмов:

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} x_2(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow x_0 + 0} x_1(x_2) = x_0$$

означает непрерывную кривой склейку кривой $\gamma_0 = \gamma_0(t)$ при $t = t_0$.

Если

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{dx_2}{dx_1}(x_1) = c \leq 0, \quad (3.1)$$

то вследствие теоремы о существовании и дифференцируемости обратной функции

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_0 + 0} \frac{dx_1}{dx_2}(x_1) = \frac{1}{\lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{dx_2}{dx_1}(x_1)} = \frac{1}{c} \leq 0. \quad (3.2)$$

Предельные соотношения (3.1) и (3.2) говорят о том, что в общем случае склейка кривой $\gamma_0 = \gamma_0(t)$ при $t = t_0$ не является гладкой.

Лемма 2 доказана.

Следствие. Если в условиях леммы 2 существует локальный диффеоморфизм $x_2 = x_2(x_1)$, определяемый уравнением с симметрической левой частью, отображающий левую полукрестность точки $x_1 = x_0$ в ее правую полукрестность, то его можно гладко продолжить в точке $x_1 = x_0$ тогда и только тогда, когда

$$c = -1.$$

С точки зрения (дифференциальной) геометрии мы имеем дело с непрерывной ветвью (дугой) $\gamma_0 \in \mathbb{R}^2$ кривой $\gamma(t) \in \mathbb{R}^2$, определяемой уравнением

$$G(t, \gamma(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

4. Необходимые условия трансверсальности ветвей решения уравнения, связывающего параметры, в вырожденном случае

Воспользуемся классической теоремой о существовании и дифференцируемости неявно заданной функции, согласно которой производная решения $x_2 = x_2(x_1)$, $x_1 \in (x_0, x_0 - \delta_1)$, уравнения (2.2) находится из соотношения

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} + \frac{dx_2}{dx_1} \frac{\partial G}{\partial x_2} = 0. \quad (4.1)$$

Проинтерпретируем это уравнение с точки зрения геометрии. Примем обозначения:

$$\nabla G = \left(\frac{\partial G}{\partial x_1}, \frac{\partial G}{\partial x_2} \right), \quad n = \left(1, \frac{dx_2}{dx_1} \right).$$

Тогда $\langle \nabla G, n \rangle = \frac{\partial G}{\partial x_1} + \frac{dx_2}{dx_1} \frac{\partial G}{\partial x_2}$ — скалярное произведение векторов $\nabla G = \left(\frac{\partial G}{\partial x_1}, \frac{\partial G}{\partial x_2} \right)$ и $n = (1, dx_2/dx_1)$. Уравнение (4.1), связывающее производную решения, формально можно записать:

$$\langle \nabla G, n \rangle = 0.$$

Уравнение $G(x_1, x_2) = 0$ определяет кривую γ в плоскости переменных (в пространстве параметров исходной задачи) x_1 и x_2 . Если в точке $(x_1, x_2) \in \gamma$ кривая является невырожденной, т. е. в ней градиент $\nabla G \neq (0, 0)$, то градиент определяет нормаль к кривой γ в этой точке. В этом случае, как следует из уравнения $\langle \nabla G, n \rangle = 0$, вектор $n = (1, dx_2/dx_1)$ задает касательное направление в точке $(x_1, x_2) \in \gamma$.

Напомним, что решение мы строим при условии $x_1 < x_2$, т. е. его график находится в “верхней” полуплоскости

$$П_+ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > x_1\}.$$

Заметим также, что для любого $x_0 \in \mathbb{R}$ точки $(x_1, x_2) = (x_0, x_0)$ в силу симметричности функции $G = G(x_1, x_2)$ являются точечными решениями уравнения $G(x_1, x_2) = 0$. В плоскости переменных x_1, x_2 эти точки принадлежат прямой, задаваемой уравнением

$$I = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = x_1\}.$$

Условие

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} x_2(x_1) = x_0$$

означает, что точки $(x_1, x_2(x_1)) \in \gamma$ стремятся к прямой I , а именно к точечному решению $(x_1, x_2) = (x_0, x_0)$ уравнения $G(x_1, x_2) = 0$. При этом предельное положение касательного вектора $n = (1, dx_2/dx_1)$ в точке $(x_0, x_0) \in \gamma_0$ определяется из условия

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \langle \nabla G, n \rangle = 0.$$

Если допустить, что градиент $\nabla G(x_0, x_0) \neq (0, 0)$, то последнее предельное равенство выражает условие трансверсальности для решений уравнения $G(x_1, x_2) = 0$ в точке $(x_1, x_2) = (x_0, x_0)$. Под трансверсальностью здесь понимается некасательное (“протыкающее”) пересечение кривой γ_0 с прямой I . Условие трансверсальности — это условие пересечения ветвей решения исследуемого уравнения

$$G(x_1, x_2) = 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x_2} &= 2(1 + (f'(x_2))^2) [f'(x_1)(x_2 - x_1) - (f(x_2) - f(x_1))] \\ &+ f''(x_2)(x_2 - x_1)^2 - f''(x_2)(f(x_2) - f(x_1))^2 + 2f'(x_1)f''(x_2)(x_2 - x_1)(f(x_2) - f(x_1)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x_1} &= 2(1 + (f'(x_1))^2) [f'(x_2)(x_1 - x_2) + (f(x_2) - f(x_1))] \\ &+ f''(x_1)(x_2 - x_1)^2 - f''(x_1)(f(x_2) - f(x_1))^2 + 2f'(x_2)f''(x_1)(x_2 - x_1)(f(x_2) - f(x_1)). \end{aligned}$$

Очевидно, что $\frac{\partial G}{\partial x_1}(x_0, x_0) = 0$ и $\frac{\partial G}{\partial x_2}(x_0, x_0) = 0$. Таким образом, каустика (огibaющая нормали) к дуге γ_0 в точке $(x_1, x_2) = (x_0, x_0)$ проходит через саму точку $(x_1, x_2) = (x_0, x_0)$. Имеем дело с вырожденным случаем.

Тождественная функция $x_2 = x_1$ является решением как исходного уравнения $G(x_1, x_2) = 0$, так и уравнений $\frac{\partial G}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0$ и $\frac{\partial G}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0$ относительно частных производных. Это означает, что разность $x_2(x_1) - x_1$ является корнем уравнений $\frac{\partial G}{\partial x_1}(x_1, x_2(x_1)) = 0$ и $\frac{\partial G}{\partial x_2}(x_1, x_2(x_1)) = 0$. Допустим, у уравнений $\frac{\partial G}{\partial x_1}(x_1, x_2(x_1)) = 0$ и $\frac{\partial G}{\partial x_2}(x_1, x_2(x_1)) = 0$ кратность этого корня равна k_1 и k_2 соответственно. Поделив частные производные $\frac{\partial G}{\partial x_1}(x_1, x_2(x_1))$ на $(x_2(x_1) - x_1)^{k_1}$ и $\frac{\partial G}{\partial x_2}(x_1, x_2(x_1))$ на $(x_2(x_1) - x_1)^{k_2}$, мы избавимся от тождественного решения исходного уравнения $G(x_1, x_2) = 0$ и от вырожденности условия трансверсальности в форме

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \langle \nabla G, n \rangle = 0,$$

перейдем к невырожденным условиям трансверсальности в виде системы равенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{\frac{\partial G}{\partial x_1}(x_1, x_2(x_1))}{(x_2(x_1) - x_1)^{k_1}} = 0, \\ \lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{\frac{dx_2(x_1)}{dx_1} \frac{\partial G}{\partial x_2}(x_1, x_2(x_1))}{(x_2(x_1) - x_1)^{k_2}} = 0. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Условия трансверсальности (4.2) являются необходимыми условиями существования локального диффеоморфизма левой полуокрестности точки в ее правую полуокрестность, задаваемого исходным уравнением (2.2).

Теорема. Если в семействе $F^{(2)}(x_0, y_0)$ дважды дифференцируемых в точке $x = x_0$ функций $y = f(x)$, $f(x_0) = y_0$, для случая $f''(x_0) \neq 0$ существует локальный диффеоморфизм $x_2 = x_2(x_1)$ левой полуокрестности точки $x_1 = x_0$ в ее правую полуокрестность, определяемый уравнением $G(x_1, x_2) = 0$ и непрерывный слева в точке $x_1 = x_0$, то он имеет гладкое продолжение в точке $x_1 = x_0$, причем

$$\frac{dx_2}{dx_1}(x_0) = -1.$$

Доказательство. Пусть $x_2 = x_2(x_1)$ — локальный диффеоморфизм левой полуокрестности точки $x_1 = x_0$ в ее правую полуокрестность, непрерывный слева в точке $x_1 = x_0$ и определяемый уравнением

$$G(x_1, x_2) = 0.$$

Это означает, что выполняются условия из определения 2:

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} x_2(x_1) = x_0, \quad (4.3)$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{dx_2}{dx_1}(x_1) = c = \text{const} \leq 0. \quad (4.4)$$

При этом функция $x_2 = x_2(x_1)$ удовлетворяет условиям трансверсальности (4.2):

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{\frac{\partial G}{\partial x_1}(x_1, x_2(x_1))}{(x_2(x_1) - x_1)^{k_1}} = 0, \\ \lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{\frac{dx_2(x_1)}{dx_1} \frac{\partial G}{\partial x_2}(x_1, x_2(x_1))}{(x_2(x_1) - x_1)^{k_2}} = 0. \end{array} \right.$$

Условие (4.3) непрерывности слева в точке $x_1 = x_0$ решения $x_2 = x_2(x_1) : (x_0, x_0 - \delta_1) \rightarrow (x_0, x_0 + \delta_2)$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 = \delta_2(\delta_1) > 0$, уравнения $G(x_1, x_2) = 0$ наряду с условием (4.4) строгой монотонности решения влечет в силу симметричности функции $G = G(x_1, x_2)$ существование обратного непрерывного справа в точке $x_2 = x_0$ диффеоморфизма $x_1 = x_1(x_2)$, отображающего правую полуокрестность точки в ее левую полуокрестность:

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_1 + 0} x_1(x_2) = x_0.$$

Стало быть,

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} x_2(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow x_0 + 0} x_1(x_2) = x_0. \quad (4.5)$$

Предельное соотношение (4.5) означает, что кривая

$$\gamma_0(t) = \begin{cases} (t, x_2(t)), & t \in (x_0, x_0 - \delta_1), \\ (t_0, t_0), & t = x_0, \\ (t, x_1(t)), & t \in (x_0, x_0 + \delta_2), \end{cases}$$

является непрерывным решением уравнения $G(x_1, x_2) = 0$ при $t = x_0$. Здесь кривая $\gamma_0(t)$ параметризована слева от точки $x_0 = t_0$ как $t = x_1, x_1 \in (x_0, x_0 - \delta_1)$, $\delta_1 > 0$, а справа от точки $x_0 = t_0$ она параметризована как $t = x_2, x_2 \in (x_0, x_0 + \delta_2)$, $\delta_2 > 0$.

Воспользуемся условиями трансверсальности для нахождения константы $c \leq 0$. Поскольку функция $x_2 = x_2(x_1)$ непрерывно продолжима в точке $x_1 = x_0$ и в этой точке существует производная слева $\lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{dx_2}{dx_1}(x_1) = c = \text{const} \leq 0$, то функция $x_2 = x_2(x_1)$ разложима в левой полуокрестности этой точки:

$$x_2(x_1) = c(x_1 - x_0) + x_0 + o(x_1 - x_0),$$

где $\frac{o(x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)} \rightarrow 0$ при $(x_0 - x_1) \downarrow 0$.

Найдем кратность тождественного решения $x_2 = x_1$ уравнения

$$\frac{\partial G}{\partial x_2}(x_1, x_2(x_1)) = 0.$$

Приращение функции $y = f(x)$ представимо по формуле конечных приращений Лагранжа:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(z)(x_2 - x_1), \text{ где } x_1 < z < x_2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x_2} &= 2(1 + (f'(x_2))^2) [(f'(x_1) - f'(z))(x_2 - x_1)] \\ &\quad + f''(x_2)(x_2 - x_1)^2 (1 - (f'(z))^2 + 2f'(x_1)f'(z)) \\ &= (x_2 - x_1)^2 \left[2(1 + (f'(x_2))^2) \frac{f'(x_1) - f'(z)}{x_2 - x_1} + f''(x_2) (1 - (f'(z))^2 + 2f'(x_1)f'(z)) \right]. \end{aligned}$$

С целью преобразования этого выражения отметим, что

$$x_2(x_1) - x_1 = c(x_1 - x_0) + x_0 - x_1 + o(x_1 - x_0) = (1 - c)(x_0 - x_1) + o(x_0 - x_1).$$

Поскольку $f''(x_0) \neq 0$, то функция $y = f(x)$ локально выпуклая либо локально вогнутая в окрестности точки $x = x_0$, а ее производная в средней точке находится из уравнения $G(x_1, x_2) = 0$ и имеет вид

$$f'(z) = \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg} f'(x_1) + \operatorname{arctg} f'(x_2)}{2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x_2} &= (1 - c)^2 (x_0 - x_1)^2 \left[2(1 + (f'(x_2))^2) \frac{f'(x_1) - \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg} f'(x_1) + \operatorname{arctg} f'(x_2)}{2}}{(1 - c)(x_0 - x_1) + o(x_0 - x_1)} \right. \\ &\left. + f''(x_2) \left(1 - \left(\operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg} f'(x_1) + \operatorname{arctg} f'(x_2)}{2} \right)^2 + 2f'(x_1) \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg} f'(x_1) + \operatorname{arctg} f'(x_2)}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Найдем предел выражения [...], стоящего в “квадратных” скобках, принимая во внимание, что

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} f'(z) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg} f'(x_1) + \operatorname{arctg} f'(x_2)}{2} = f'(x_0).$$

Получим

$$\begin{aligned} \lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} [...] &= 2 \left(1 + (f'(x_0))^2 \right) \left(-\frac{f''(x_0)}{(1 - c)} \right) + f''(x_0) \left(1 + (f'(x_0))^2 \right) \\ &= f''(x_0) \left(1 + (f'(x_0))^2 \right) \left(1 - \frac{2}{(1 - c)} \right) = f''(x_0) \left(1 + (f'(x_0))^2 \right) \frac{c + 1}{c - 1}. \end{aligned}$$

Стало быть, частная производная $\frac{\partial G}{\partial x_2}(x_1, x_2(x_1))$, вычисленная вдоль решения $x_2 = x_2(x_1)$ в левой окрестности точки $x_1 = x_0$, эквивалентна функции

$$g_2(x_1) = f''(x_0) \left(1 + (f'(x_0))^2 \right) \frac{c + 1}{c - 1} (x_1 - x_0)^2, \quad x_1 \rightarrow x_0 - 0.$$

Аналогично рассуждая, получаем разложение частной производной $\frac{\partial G}{\partial x_1}(x_1, x_2(x_1))$ вдоль решения $x_2 = x_2(x_1)$ в левой окрестности точки $x_1 = x_0$. Частная производная $\frac{\partial G}{\partial x_1}(x_1, x_2(x_1))$ эквивалентна функции

$$g_2(x_1) = f''(x_0) \left(1 + (f'(x_0))^2 \right) \frac{c + 1}{c - 1} (x_1 - x_0)^2, \quad x_1 \rightarrow x_0 - 0.$$

Поскольку по условию $f''(x_0) \neq 0$, $c \neq 1$ (на тождественное решение $x_2 = x_1$, отвечающее $c = 1$, мы сократили с учетом его кратности при выводе условий трансверсальности), то система уравнений (4.2) принимает вид

$$\begin{cases} \frac{c + 1}{c - 1} = 0, \\ c \frac{c + 1}{c - 1} = 0. \end{cases}$$

Ее единственным решением является число $c = -1$. Это означает, что локальный диффеоморфизм $x_2 = x_2(x_1)$ левой полуокрестности точки $x_1 = x_0$ в ее правую полуокрестность имеет следующее разложение:

$$x_2 = -(x_1 - x_0) + x_0 + o(x_0 - x_1), \quad x_1 \rightarrow x_0 - 0.$$

В силу условия (4.4)

$$c = \lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{dx_2}{dx_1}(x_1) = -1.$$

Тогда для обратного диффеоморфизма $x_1 = x_1(x_2)$ в точке $x_2 = x_0$

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_0 + 0} \frac{dx_1}{dx_2}(x_1) = \frac{1}{\lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{dx_2}{dx_1}(x_1)} = \frac{1}{c} = -1.$$

Поскольку односторонние производные совпали:

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{dx_2}{dx_1}(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow x_0 + 0} \frac{dx_1}{dx_2} = -1,$$

то дуга γ_0 имеет в точке $(x_1, x_2) = (x_0, x_0)$ касательный вектор $n(x_0, x_0) = (1, c)$. Другими словами, и функция $x_2 = x_2(x_1)$, и функция $x_1 = x_1(x_2)$ гладко продолжимы в общей предельной точке $x = x_0$ областей определения:

$$\frac{dx_2}{dx_1}(x_0) = \frac{dx_1}{dx_2}(x_0) = -1.$$

Теорема доказана.

Вывод, проистекающий из доказанной теоремы, состоит в следующем. Если $(x_0, f(x_0))$ — псевдовершина графика дважды непрерывно дифференцируемой в точке $x = x_0$ функции $y = f(x)$, $f''(x_0) \neq 0$, то в плоскости параметров x_1 и x_2 существуют две взаимно ортогональные кривые, являющиеся решениями уравнения

$$G(x_1, x_2) = 0.$$

При этом они пересекаются в точке $(x_1, x_2) = (x_0, x_0)$, касательные направления к которым определяются векторами $n^{(1)} = (-1, -1)$ и $n^{(2)} = (-1, 1)$.

5. Пример построения функции оптимального результата в задаче быстрого действия

Изложенная выше техника исследования особенностей использована, в частности, при построении функции оптимального результата в задаче быстрого действия с динамикой

$$\begin{cases} \dot{x} = \nu_1, \\ \dot{y} = \nu_2, \end{cases}$$

где управление $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ стеснено ограничением $\|\nu\| \leq 1$, а целевое множество $M = \text{hur } f$, где $\text{hur } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^4, x \in \mathbb{R}\}$, — подграфик степенной функции $f(x) = x^4$.

Решение уравнения (2.2), определяющего связь между параметрами задачи управления, имеет несколько ветвей, показанных на рис. 3. Три гладких кривых ортогонально пересекают график тождественного решения этого уравнения. Точки пересечения этих линий определяют в исходном пространстве псевдовершины $A_1 = (-56^{-1/6}, 56^{-3/2})$, $A_2 = (56^{-1/6}, 56^{-3/2})$ и $A_3 = (0, 0)$ границы $\Gamma = \{(x, y) : y = x^4, x \in \mathbb{R}\}$ целевого множества. Нетрудно показать, что все три точки являются вершинами (согласно принятой в дифференциальной геометрии терминологии) кривой Γ , причем A_1 и A_2 — точки, в которых кривизна кривой достигает максимума, а A_3 — точка, в которой кривизна минимальна.

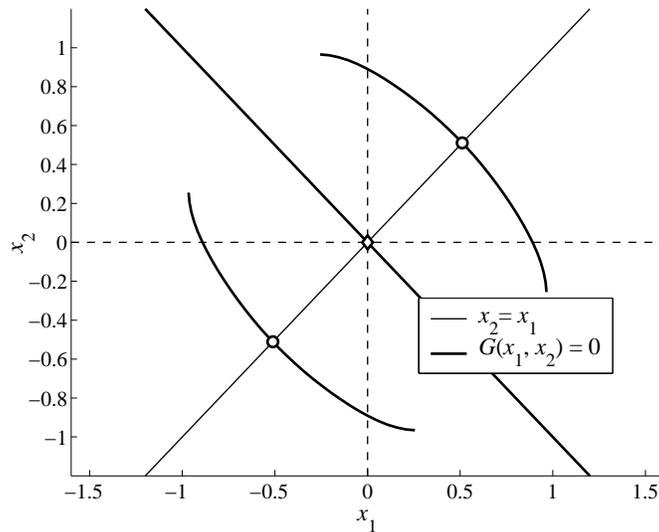


Рис. 3.

При этом ветви биссектрисы порождают лишь A_1 и A_2 — точки максимума кривизны (рис. 4). Эти ветви затем сливаются в точке бифуркации в один луч, лежащий на оси ординат. То есть биссектриса $L(M)$ является объединением трех одномерных многообразий (ветвей) и одного нульмерного (точки их слияния). Заметим, что эта точка является устойчивой относительно малых деформаций целевого множества [2, 17]. Биссектриса, как и целевое множество, симметрична относительно оси ординат.

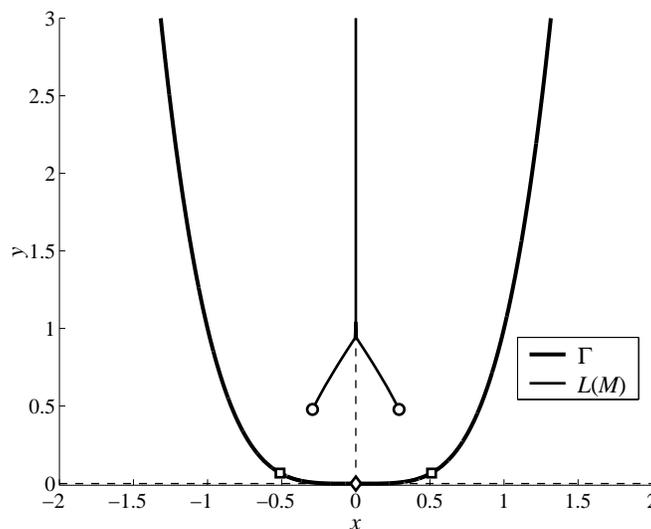


Рис. 4.

В точках биссектрисы линии уровня функции оптимального результата $u = u(x, y)$ имеют изломы. График решения $u = u(x, y)$ представлен на рис. 5. Во всех точках $\mathbb{R}^2 \setminus \{M \cup L(M)\}$ функции $u = u(x, y)$ дифференцируема и имеет градиент по модулю, равный 1 [19].

Подробнее о дифференциальных свойствах функции $u = u(x, y)$ в точках биссектрисы можно посмотреть, например, в [20]. Непрерывное продолжение решения на множество M принимается тождественно равным нулю.

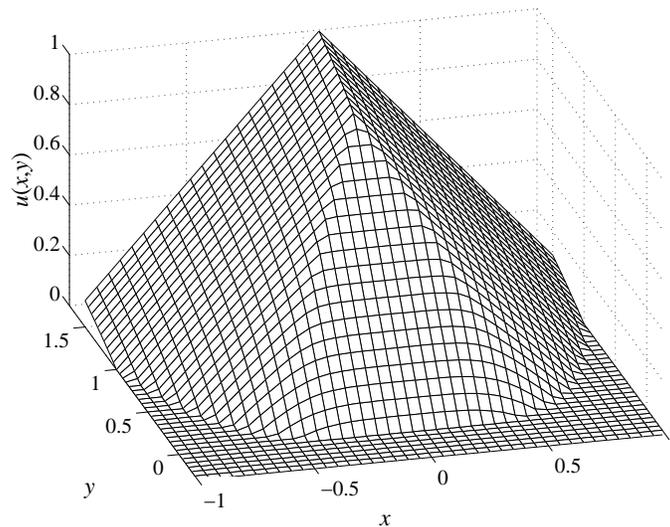


Рис. 5.

Функция $u = u(x, y)$ является также решением задачи (1.1), (1.2) в случае, когда краевое условие (1.2) задано на кривой $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^4, x \in \mathbb{R}\}$. Уравнение (1.1) выполняется во всех точках надграфика функции $f(x) = x^4$, кроме биссектрисы $L(M)$. На биссектрисе $L(M)$ определены супердифференциалы $u = u(x, y)$

$$D^+u(\mathbf{x}) = \text{co} \left\{ \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} : \mathbf{y} \in \Omega_M(\mathbf{x}) \right\}.$$

В точке бифуркации биссектрисы множество $D^+u(\mathbf{x})$ — это треугольник, а в остальных точках $\mathbf{x} \in L(M)$ оно является отрезком [19].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арнольд В.И.** Особенности каустик и волновых фронтов. М.: ФАЗИС, 1996. 334 с.
2. **Брус Дж., Джиблин П.** Кривые и особенности: Геометрическое введение в теорию особенностей. М.: Мир, 1988. 262 с.
3. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
4. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
5. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации / Ин-т компьютер. исслед. М.; Ижевск: 2003. 336 с.
6. **Кружков С.Н.** Обобщенные решения уравнений Гамильтона — Якоби типа эйконала. I // Мат. сб. 1974. Т. 98, вып. 3. С. 450–493.
7. **Колокольцов В.Н., Маслов В.П.** Задача Коши для однородного уравнения Беллмана // Докл. АН СССР. 1987. Т. 296, №. 4. С. 796–800.
8. **Слюсарев Г.Г.** Геометрическая оптика. М.: Изд-во АН СССР, 1946. 332 с.
9. **Солимено О., Крозиньяни Б., Ди Порто П.** Дифракция и волноводное распространение оптического излучения М.: Мир, 1989. 662 с.
10. **Тарасьев А.М., Успенский А.А., Ушаков В.Н.** Аппроксимационные операторы и конечно-разностные схемы для построения обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби // Изв. РАН. Сер. Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 173–185.
11. **Папаков Г.В., Тарасьев А.М., Успенский А.А.** Численные аппроксимации обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 4. С. 570–581.
12. **Пахотинских В.Ю., Успенский А.А., Ушаков В.Н.** Конструирование стабильных мостов в дифференциальных играх с фазовыми ограничениями // Прикл. математика и механика. 2003. Т. 67, вып. 5. С. 771–783.

13. **Успенский А.А., Ушаков В.Н., Фомин А.Н.** α -множества и их свойства / Ин-т математики и механики УрО РАН. Деп. в ВИНТИ 02.04.04, № 543-B2004. 62 с.
14. **Успенский А.А.** Аналитические методы вычисления меры невыпуклости плоских множеств / Ин-т математики и механики УрО РАН. Деп. в ВИНТИ 07.02.07, № 104-B2007. 21 с.
15. **Лебедев П.Д., Успенский А.А.** Исследование геометрии и асимптотики волновых фронтов в некоторых задачах управления // Тр. IX Междунар. Четаевской конф. 2007. Т. 5. С. 224–236.
16. **Рашевский П.К.** Курс дифференциальной геометрии. 4-е изд. М.: Едиториал–УРСС, 2003. 432 с.
17. **Sedykh V.D.** On the topology of symmetry sets of smooth submanifolds in \mathbb{R}^k // Advanced Studies in Pure Math. 2006. Vol. 43. Singularity Theory and Its Appl. P. 401–419.
18. **Лейхтвейс К.** Выпуклые множества. М.: Наука, 1985. 335 с.
19. **Демьянов В.Ф., Васильев Л.В.** Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.
20. **Лебедев П.Д., Успенский А.А., Ушаков В.Н.** Построение минимаксного решения уравнения типа эйконала // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2008. Т. 14, №. 2. С. 182–191.

Лебедев Павел Дмитриевич

Поступила 13.03.2008

аспирант

Ин-т математики и механики УрО РАН

e-mail: pleb@yandex.ru

Успенский Александр Александрович

канд. физ.-мат. наук

ст. науч. сотрудник

Ин-т математики и механики УрО РАН

e-mail: uspen@imm.uran.ru

УДК 512.542

КЛАССИФИКАЦИЯ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП НЕЧЕТНОГО ИНДЕКСА В КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ КЛАССИЧЕСКИХ ГРУППАХ ¹

Н. В. Маслова

Получена классификация максимальных подгрупп нечетного индекса конечных простых классических групп.

Ключевые слова: конечная простая классическая группа, максимальная подгруппа, нечетный индекс.

1. Введение

На основе классификации конечных простых групп М. Ашбахер в [1] описал большое семейство естественных геометрически определенных подгрупп конечных простых классических групп, которое было разбито им на восемь классов C_i ($1 \leq i \leq 8$), называемых теперь классами Ашбахера. Позже М. Либекком и Я. Сакслон [2] и независимо В. Кантором [3] был получен один из самых сильных результатов последних лет в теории конечных групп подстановок, а именно дана классификация конечных примитивных групп подстановок нечетной степени. В частности, в обеих указанных работах были представлены списки подгрупп конечных простых классических групп, которые могут являться максимальными подгруппами нечетного индекса.

В случае четной характеристики поля максимальные подгруппы нечетного индекса конечной простой классической группы — это в точности параболические максимальные подгруппы. В случае нечетной характеристики поля, согласно [2, 3], это, за некоторыми исключениями для конечного числа групп малых степеней, подгруппы из объединения классов Ашбахера $C_1 \cup C_2 \cup C_5$. Однако в этих работах нет описания того, какие из указанных подгрупп в точности являются максимальными подгруппами нечетного индекса, так что проблема полной классификации максимальных подгрупп нечетного индекса конечных простых классических групп оставалась открытой. Настоящая работа посвящена решению этой проблемы.

Приведем более точную формулировку результатов работ [2, 3].

Пусть q — натуральная степень простого нечетного числа p и G — одна из конечных простых классических групп $PSL_n(q)$, $PSU_n(q)$, $PSp_n(q)$ для четного n , $P\Omega_n(q)$ для нечетного n и $P\Omega_n^\varepsilon(q)$ для четного n , где $\varepsilon \in \{+, -\}$. Будем обозначать через V естественное векторное пространство размерности n над полем F с определенной на нем соответствующей билинейной или квадратичной формой, ассоциированной с группой G , где $F = F_q$ для линейных, симплектических и ортогональных групп и $F = F_{q^2}$ для унитарных групп.

В случае группы $P\Omega_n^\varepsilon(q)$ для четного n параметр ε называется знаком этой группы и соответствующего ей векторного пространства V и обозначается через $\text{sign}(V)$. Для каждого невырожденного подпространства U четной размерности m из V определяется также знак $v = \text{sign}(U)$ [4, гл. 2]. Положим

$$D(U) = D_m^v(q) = \begin{cases} 1, & \text{если } v = + \text{ и } (q-1)m/4 \text{ четно или } v = - \text{ и } (q-1)m/4 \text{ нечетно,} \\ -1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00148).

Если V является прямой суммой невырожденных, ортогональных друг другу подпространств U и W четной размерности, то $D(V) = D(U) \cdot D(W)$ и $\text{sign}(V) = \text{sign}(U) \cdot \text{sign}(W)$ (в последнем случае умножение понимается в обычном смысле “умножения знаков”).

В [2, 3] доказано, что если H — максимальная подгруппа нечетного индекса в G , то для G и H выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) $H = N_G(C_G(\sigma))$ для полевого автоморфизма σ простого нечетного порядка группы G .
- (2) H — стабилизатор невырожденного подпространства из V или в случае $G = PSL_n(q)$ стабилизатор любого подпространства из V .
- (3) H — стабилизатор ортогонального разложения $V = \bigoplus V_i$ в прямую сумму изометричных подпространств V_i или в случае $G = PSL_n(q)$ стабилизатор любого разложения $V = \bigoplus V_i$ в прямую сумму подпространств одинаковой размерности.
- (4) $G = PSL_2(q)$ и H — диэдральная группа (отметим, что этот случай пропущен в [3]), A_4 , S_4 , A_5 или $PGL_2(q^{1/2})$.
- (5) $G = PSU_3(5)$ и $H \cong M_{10}$.
- (6) $G = P\Omega_7(q)$ для простого $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$ и $H \cong \Omega_7(2)$.
- (7) $G = P\Omega_8^+(q)$ для простого $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$ и $H \cong \Omega_8^+(2)$.

Подгруппы типов (1), (2) и (3) содержатся в классах Ашбахера C_5 , C_1 и C_2 соответственно.

Заметим, что в случае $G \neq PSL_n(q)$ множество стабилизаторов невырожденных подпространств пространства V совпадает со множеством стабилизаторов ортогональных разложений пространства V в прямую сумму двух соответствующих подпространств.

Максимальные подгруппы конечных простых классических групп из классов Ашбахера были описаны П. Клейдманом и М. Либекком в [4]. Описание подгруппового строения простых групп малых порядков можно найти в [5]. Максимальные подгруппы конечных простых классических групп степени не более 11 описаны П. Клейдманом в [6]. Мы будем пользоваться этими описаниями. Однако мы заметили в [4] некоторые несоответствия с [5] и [6] (см. доказательство теоремы 1).

В случаях (1) и (5)–(7) подгруппа H всегда будет максимальной подгруппой нечетного индекса в G (см. [2, 3, 6]). В случаях (2)–(4) максимальность H в G и четность индекса H в G существенно зависят от многих параметров, в том числе от n и q . Далее будет указано, когда в точности H будет максимальной подгруппой нечетного индекса в G . Кроме того, результаты в [2, 3] получены для групп $P\Omega_6^+(q)$, $P\Omega_6^-(q)$ и $P\Omega_5(q)$, а не для их изоморфных копий $PSL_4(q)$, $PSU_4(q)$ и $PSp_4(q)$ соответственно. Наш результат будет сформулирован для последних групп.

Пусть \mathcal{M} — множество всех последовательностей $(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$, где $x_i \in \{0, 1\}$ для всех i и число ненулевых компонент конечно. Введем на \mathcal{M} естественный порядок \geq , считая $1 \geq 0$, а для $u = (u_0, u_1, \dots, u_n, \dots)$, $v = (v_0, v_1, \dots, v_n, \dots)$ из \mathcal{M} , полагая $u \geq v$ тогда и только тогда, когда $u_i \geq v_i$ для всех i . Через ψ обозначим функцию, которая ставит в соответствие каждому целому неотрицательному числу s последовательность $(s_0, s_1, \dots, s_k, \dots)$ из \mathcal{M} такую, что $\overline{s_k s_{k-1} \dots s_0}$ — запись числа s в двоичной системе счисления и $s_n = 0$ для всех $n > k$. При этом s_i будем обозначать также через $\psi_i(s)$.

Доказана следующая

Теорема 1. Пусть G — одна из конечных простых классических групп $PSL_n(q)$ для $n \geq 2$, $PSU_n(q)$ для $n \geq 3$, $PSp_n(q)$ для четного $n \geq 4$, $P\Omega_n(q)$ для нечетного $n \geq 7$ и $P\Omega_n^\pm(q)$ для четного $n \geq 8$, q везде нечетно, V — естественное векторное пространство, ассоциированное с группой G . Подгруппа H является максимальной подгруппой нечетного индекса в G тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) $H = N_G(C_G(\sigma))$ для полевого автоморфизма σ простого нечетного порядка группы G ;
- (2) $G = PSL_n(q)$, H — стабилизатор подпространства размерности t пространства V и $\psi(n) \geq \psi(t)$;
- (3) $G = PSU_n(q)$ или $G = PSp_n(q)$, H — стабилизатор невырожденного подпространства размерности t пространства V и $\psi(n) \geq \psi(t)$;

(4) $G = P\Omega_n(q)$, H – стабилизатор невырожденного подпространства U четной размерности m пространства V , $D(U) = 1$, $\psi(n) \geq \psi(m)$ и $(q, m, \varepsilon) \neq (3, 2, +)$;

(5) $G = P\Omega_n^\varepsilon(q)$, H – стабилизатор невырожденного подпространства U размерности m пространства V и либо m нечетно, $D(V) = -1$ и $\psi(n-2) \geq \psi(m-1)$, за исключением случая, когда $m = n/2$ и подпространства U и U^\perp не изометричны, либо m четно, $(q, m, \text{sign}(U)) \neq (3, 2, +), (3, n-2, +)$, $D(U) = D(V) = -1$ и $\psi(n-2) \geq \psi(m-2)$, либо m четно, $(q, m, \text{sign}(U)) \neq (3, 2, +), (3, n-2, +)$, $D(U) = D(V) = 1$ и $\psi(n) \geq \psi(m)$;

(6) $G = PSL_n(q)$, H – стабилизатор разложения $V = \bigoplus V_i$ в прямую сумму подпространств одинаковой размерности m и либо $m = 2^w \geq 2$ и $(n, m, q) \neq (4, 2, 3)$, либо $m = 1$, $q \equiv 1 \pmod{4}$ и $q \geq 13$ в случае $n = 2$;

(7) $G = PSU_n(q)$, H – стабилизатор ортогонального разложения $V = \bigoplus V_i$ в прямую сумму изометричных подпространств V_i размерности m и либо $m = 2^w \geq 2$, либо $m = 1$, $q \equiv 3 \pmod{4}$ и $(n, q) \neq (4, 3)$;

(8) $G = PSp_n(q)$, H – стабилизатор ортогонального разложения $V = \bigoplus V_i$ в прямую сумму изометричных подпространств V_i размерности m и $m = 2^w \geq 2$;

(9) $G = P\Omega_n(q)$, H – стабилизатор ортогонального разложения $V = \bigoplus V_i$ в прямую сумму изометричных подпространств V_i размерности 1, q – простое число и $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$;

(10) $G = P\Omega_n^\varepsilon(q)$, H – стабилизатор ортогонального разложения $V = \bigoplus V_i$ в прямую сумму изометричных подпространств V_i размерности m и либо $m = 1$, q – простое число, $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$ и $(n, \varepsilon) \neq (8, +)$, либо $m = 2^w \geq 2$, $D(V) = D(V_i) = 1$ и $(m, q, \text{sign}(V_i)) \neq (2, 3, \pm), (2, 5, +)$;

(11) $G = PSL_2(q)$ и $H \cong PGL_2(q_0)$, где $q = q_0^2$;

(12) $G = PSL_2(q)$ и $H \cong A_4$, где q – простое число, $q \equiv 3, 5, 13, 27, 37 \pmod{40}$;

(13) $G = PSL_2(q)$ и $H \cong S_4$, где q – простое число, $q \equiv \pm 7 \pmod{16}$;

(14) $G = PSL_2(q)$ и $H \cong A_5$, где q – простое число, $q \equiv 11, 19, 21, 29 \pmod{40}$;

(15) $G = PSL_2(q)$ и $H \cong D_{q+1}$, где $7 < q \equiv 3 \pmod{4}$;

(16) $G = PSU_3(5)$ и $H \cong M_{10}$;

(17) $G = PSL_4(q)$ и $H \cong 2^4.A_6$, где q – простое число, $q \equiv 5 \pmod{8}$;

(18) $G = PSL_4(q)$ и $H \cong PSp_4(q).2$, где $q \equiv 3 \pmod{4}$;

(19) $G = PSU_4(q)$ и $H \cong 2^4.A_6$, где q – простое число, $q \equiv 3 \pmod{8}$;

(20) $G = PSU_4(q)$ и $H \cong PSp_4(q).2$, где $q \equiv 1 \pmod{4}$;

(21) $G = PSp_4(q)$ и $H \cong 2^4.A_5$, где q – простое число, $q \equiv 3 \pmod{8}$;

(22) $G = P\Omega_7(q)$ и $H \cong \Omega_7(2)$, где q – простое число, $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$;

(23) $G = P\Omega_8^+(q)$ и $H \cong \Omega_8^+(2)$, где q – простое число, $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$.

2. Определения, обозначения и вспомогательные результаты

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [4, 5].

Наибольшая целая неотрицательная степень двойки, делящая натуральное число j , называется 2-частью числа j и обозначается через j_2 .

Пусть j – натуральное число. Положим

$$I_j(q) = \sum_{i=0}^{j-1} q^i.$$

Пусть $r: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ – функция, ставящая в соответствие каждому натуральному числу j целое неотрицательное число $\log_2(j+1)_2$, т. е. $(j+1)_2 = 2^{r(j)}$. Если j нечетно, то $r(j) \geq 1$.

Пусть n_1 и n_2 – натуральные числа и q – натуральная степень простого нечетного числа. Положим

$$a_{n_1, n_2}^\varepsilon(q) = |\{(\lambda_1, \lambda_2) \in F_{q^2}^* \times F_{q^2}^* \mid \lambda_i^{q-\varepsilon} = 1, \lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2} = 1\}|,$$

$$b_{n_1, n_2}^\varepsilon = \frac{q - \varepsilon 1}{a_{n_1, n_2}^\varepsilon} (q - \varepsilon 1, n_1)(q - \varepsilon 1, n_2).$$

Пусть $\{F_i, G_i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}\}_{i=1}^\infty$ — набор функций таких, что F_i ставит в соответствие каждому натуральному числу его остаток от деления на 2^i , а G_i ставит в соответствие каждому натуральному числу n его неполное частное $[n/2^i]$ при делении на 2^i , т. е. для всех натуральных чисел n и i выполняются соотношения $n = F_i(n) + 2^i G_i(n)$, $0 \leq F_i(n) < 2^i$, $G_i(n) = [n/2^i]$.

Пусть n, m — целые неотрицательные числа и $n > m$. Для всех натуральных чисел i положим $\alpha_i(n, m) = G_i(n) - G_i(m) - G_i(n - m)$.

Лемма 1. *Для всех целых неотрицательных чисел m и n со свойством $n > m$ и для всех натуральных чисел i выполняются утверждения:*

- (1) $\alpha_i(n, m) \geq 0$;
- (2) $\alpha_i(n, m) = 0$ тогда и только тогда, когда $F_i(n) \geq F_i(m)$.

Доказательство. Имеем $\alpha_i(n, m) = G_i(n) - G_i(m) - G_i(n - m)$, $G_i(n) = (n - F_i(n))/2^i$ и $G_i(m) = (m - F_i(m))/2^i$.

Если $F_i(n) \geq F_i(m)$, то $0 \leq F_i(n) - F_i(m) < 2^i$ и, следовательно, $G_i(n - m) = (n - m - (F_i(n) - F_i(m)))/2^i$ и $\alpha_i(n, m) = 0$.

Пусть $F_i(n) < F_i(m)$. Тогда $G_i(n) > G_i(m)$, так как $n > m$. Следовательно, $n - m = 2^i(G_i(n) - G_i(m) - 1) + (2^i + F_i(n) - F_i(m))$ и $0 \leq 2^i + F_i(n) - F_i(m) < 2^i$. Поэтому $G_i(n - m) = (n - m - (2^i + F_i(n) - F_i(m)))/2^i$ и $\alpha_i(n, m) = 1$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть n и m — натуральные числа и $n > m$. В этом случае $(C_n^m)_2 = 1$ тогда и только тогда, когда для всех натуральных чисел t выполняется неравенство $F_t(n) \geq F_t(m)$.*

Доказательство. Для всех натуральных чисел k имеем $(k!)_2 = 2^{\sum_{i=1}^{\infty} G_i(k)}$, следовательно, $(C_n^m)_2 = 2^{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(n, m)}$ и $(C_n^m)_2 = 1$ тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(n, m) = 0$. При $t \geq [\log_2 n] + 1$ имеем $n = F_t(n) \geq F_t(m) = m$. Отсюда по лемме 1 при $t \geq [\log_2 n] + 1$ имеем $\alpha_t(n, m) = 0$ и, следовательно, $(C_n^m)_2 = 1$ тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^{[\log_2 n]} \alpha_i(n, m) = 0$. Сумма неотрицательных слагаемых равна нулю тогда и только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю. Поэтому ввиду леммы 1 $(C_n^m)_2 = 1$ тогда и только тогда, когда для всех натуральных чисел t со свойством $1 \leq t \leq [\log_2 n]$ выполняется неравенство $F_t(n) \geq F_t(m)$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть n и m — натуральные числа и $n > m$. В этом случае $(C_n^m)_2 = 1$ тогда и только тогда, когда $\psi(n) \geq \psi(m)$. Поскольку $C_n^m = C_n^{n-m}$, $\psi(n) \geq \psi(m)$ тогда и только тогда, когда $\psi(n) \geq \psi(n - m)$.*

Доказательство. Пусть $(C_n^m)_2 = 1$. Тогда ввиду леммы 2 для всех натуральных чисел t выполняется неравенство $F_t(n) \geq F_t(m)$.

Для любого целого неотрицательного числа v имеем $v = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(v) \cdot 2^j$, следовательно, $F_t(v) = \sum_{j=0}^{t-1} \psi_j(v) \cdot 2^j$. Покажем, что для всех натуральных чисел t выполняется неравенство $\psi_{t-1}(n) \geq \psi_{t-1}(m)$. Предположим, что существует t_0 со свойством $\psi_{t_0-1}(n) < \psi_{t_0-1}(m)$. При этом $t_0 > 1$ (так как иначе $F_1(n) < F_1(m)$), $\psi_{t_0-1}(n) = 0$ и $\psi_{t_0-1}(m) = 1$. Отсюда $F_{t_0}(n) = \sum_{j=0}^{t_0-1} \psi_j(n) \cdot 2^j = \sum_{j=0}^{t_0-2} \psi_j(n) \cdot 2^j$ и $F_{t_0}(m) = \sum_{j=0}^{t_0-1} \psi_j(m) \cdot 2^j = 2^{t_0-1} + \sum_{j=0}^{t_0-2} \psi_j(m) \cdot 2^j$. Следовательно,

$$F_{t_0}(n) - F_{t_0}(m) = \left(\left(\sum_{j=0}^{t_0-2} \psi_j(n) \cdot 2^j \right) - 2^{t_0-1} \right) - \left(\sum_{j=0}^{t_0-2} \psi_j(m) \cdot 2^j \right) < 0;$$

противоречие. Значит, $\psi(n) \geq \psi(m)$.

Пусть теперь $\psi(n) \geq \psi(m)$. Тогда для всех натуральных чисел t из равенства $\psi_{t-1}(m) = 1$ следует равенство $\psi_{t-1}(n) = 1$. Значит, для всех натуральных чисел t справедливы соотношения $F_t(n) - F_t(m) = \sum_{j=1}^{t-1} 2^j \cdot (\psi_j(n) - \psi_j(m)) \geq 0$. Из последнего неравенства и леммы 2 следует, что $(C_n^m)_2 = 1$. Лемма доказана.

Близкий к леммам 2 и 3 результат получен в [7, лемма 2].

Лемма 4. Пусть m и t — натуральные числа. Тогда для всех натуральных чисел i справедливо неравенство $G_i(mt) - tG_i(m) \geq 0$.

Доказательство. Имеем $m = F_i(m) + 2^i G_i(m)$ и $t = F_i(t) + 2^i G_i(t)$, при этом выполняются неравенства $F_i(m) \geq 0$, $G_i(m) \geq 0$, $F_i(t) \geq 0$, $G_i(t) \geq 0$. Отсюда

$$mt = F_i(m)F_i(t) + 2^i(F_i(m)G_i(t) + G_i(m)F_i(t) + 2^i G_i(m)G_i(t)).$$

Следовательно,

$$mt \geq 2^i(F_i(m)G_i(t) + G_i(m)F_i(t) + 2^i G_i(m)G_i(t)).$$

Поэтому

$$G_i(mt) \geq F_i(m)G_i(t) + G_i(m)F_i(t) + 2^i G_i(m)G_i(t),$$

и так как $tG_i(m) = G_i(m)F_i(t) + 2^i G_i(m)G_i(t)$, то $G_i(mt) - tG_i(m) \geq F_i(m)G_i(t) \geq 0$. Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть m и t — натуральные числа и $t \geq 2$. В этом случае

$$\sum_{i=1}^{\infty} G_i(mt) = \sum_{i=1}^{\infty} G_i(t) + t \sum_{i=1}^{\infty} G_i(m)$$

тогда и только тогда, когда $m = 2^w$, где w — некоторое целое неотрицательное число.

Доказательство. Пусть $m = 2^w$, где w — целое неотрицательное число. Тогда $G_i(m) = m/2^i$ при $i \leq w$ и $G_i(m) = 0$ при $i > w$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} G_i(mt) - \sum_{i=1}^{\infty} G_i(t) - t \sum_{i=1}^{\infty} G_i(m) &= \sum_{i=1}^w G_i(2^w t) + \sum_{i=w+1}^{\infty} G_i(2^w t) - \sum_{i=1}^{\infty} G_i(t) - \sum_{i=1}^w \frac{2^w t}{2^i} \\ &= \sum_{i=1}^w \frac{2^w t}{2^i} + \sum_{i=1}^{\infty} G_i(t) - \sum_{i=1}^{\infty} G_i(t) - \sum_{i=1}^w \frac{2^w t}{2^i} = 0. \end{aligned}$$

Пусть теперь $m = 2^{m_1} + \dots + 2^{m_k}$ — 2-адическое разложение числа m , где $m_1 < \dots < m_k$ и $k > 1$. Тогда $G_i(m) = 0$ при $i > m_k$. Имеем

$$\begin{aligned} A := \sum_{i=1}^{\infty} G_i(mt) - \sum_{i=1}^{\infty} G_i(t) - t \sum_{i=1}^{\infty} G_i(m) &= \sum_{i=1}^{m_k} G_i(mt) + \sum_{i=m_k+1}^{\infty} G_i(mt) - \sum_{i=1}^{\infty} G_i(t) - t \sum_{i=1}^{m_k} G_i(m) \\ &= \sum_{i=1}^{m_k} (G_i(mt) - tG_i(m)) + \left(\sum_{i=m_k+1}^{\infty} G_i(mt) - \sum_{i=1}^{\infty} G_i(t) \right). \end{aligned}$$

Так как $m > 2^{m_k}$, то $G_i(mt) \geq G_i(2^{m_k} t)$ для всех i . Отсюда слагаемое $\sum_{i=m_k+1}^{\infty} G_i(mt) - \sum_{i=1}^{\infty} G_i(t)$ неотрицательно. По лемме 4 в сумме $\sum_{i=1}^{m_k} (G_i(mt) - tG_i(m))$ каждое слагаемое неотрицательно, следовательно, вся сумма не меньше каждого из этих слагаемых. При этом из того, что $k > 1$, следует, что в этой сумме содержится слагаемое $G_{m_1+1}(mt) - tG_{m_1+1}(m)$. Отсюда имеем

$$A \geq G_{m_1+1}(mt) - tG_{m_1+1}(m) = [2^{m_k - m_1 - 1} t + \dots + t/2] - t(2^{m_k - m_1 - 1} + \dots + [1/2]) = [t/2].$$

Но так как $t \geq 2$, то $[t/2] > 0$. Лемма доказана.

Лемма 6. Для любого натурального числа $t \geq 2$ имеем $(t!)_2 = 2^{G_1(t)} (G_1(t)!)_2$.

Доказательство. Имеем $(t!)_2 = 2^{\sum_{i=1}^{\infty} G_i(t)} = 2^{G_1(t) + \sum_{i=2}^{\infty} G_i(t)}$. Непосредственно рассматривая случаи четного и нечетного t , показываем, что $G_{i+1}(t) = G_i(\lfloor t/2 \rfloor)$ для всех натуральных чисел i . Лемма доказана.

Лемма 7. Для любого натурального числа t имеем $G_1(t) + G_1(t+1) = t$, при этом $G_1(t)$ — количество четных натуральных чисел в отрезке $[1, t]$ и $G_1(t+1)$ — количество нечетных натуральных чисел в $[1, t]$.

Доказательство. Непосредственно рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного t . Лемма доказана.

Лемма 8. Пусть q — целое нечетное число. Тогда 2-часть числа $I_j(q)$ равна 1 при нечетном j и $2^{r(j)-1} j_2$ при четном j .

Доказательство. Действительно, при нечетном j число $I_j(q)$ является суммой нечетного числа нечетных слагаемых, поэтому оно нечетно.

При четном j число $I_j(q)$ является суммой четного числа слагаемых. Группируя подряд идущие слагаемые по два, получим

$$I_j(q) = q^{j-2} \times (q+1) + q^{j-4} \times (q+1) + 1 \times (q+1) = (q+1) I_{j/2}(q^2).$$

Далее индукцией по s получаем

$$I_j(q) = (q+1) \times \prod_{i=1}^{s-1} (q^{2^i} + 1) \times I_{j/2^s}(q^{2^s}),$$

где $j_2 = 2^s$. Если i — натуральное число, то $q^{2^i} + 1 \equiv 2 \pmod{4}$. Так как $j_2 = 2^s$, то $j/2^s$ нечетно, поэтому множитель $I_{j/2^s}(q^{2^s})$ нечетен по доказанному выше. Лемма доказана.

Лемма 9. Пусть q и j — нечетные натуральные числа. Тогда $(q^j + 1)_2 = (q+1)_2$ и $(q^j - 1)_2 = (q-1)_2$.

Доказательство. Имеем $q^j + 1 = (q+1)I_j(-q)$ и $q^j - 1 = (q-1)I_j(q)$. По лемме 8 второй множитель в обоих случаях нечетен. Лемма доказана.

Лемма 10. Пусть k и q — натуральные числа и q нечетно. Тогда

$$\left(\prod_{i=1}^k I_j(q) \right)_2 = 2^{(r(q)-1)G_1(k)} \cdot (k!)_2.$$

Доказательство. Следует из лемм 7 и 8.

Лемма 11. Если $D_m^v(q) = 1$, то $(q^{m/2} - v1)_2 \geq 4$ и $(q^{m/2} + v1)_2 = 2$. Если $D_m^v(q) = -1$, то $(q^{m/2} - v1)_2 = 2$ и $(q^{m/2} + v1)_2 \geq 4$.

Доказательство. Пусть $D_m^v = 1$. Если $v = +1$, то либо $m/2$ четно, либо $m/2$ нечетно и $q \equiv 1 \pmod{4}$. В первом случае $(q^{m/2} - 1)_2 = (q^{m/4} - 1)_2 (q^{m/4} + 1)_2 \geq 2 \cdot 2 = 4$ и $q^{m/2} + 1 \equiv 2 \pmod{4}$ (см. доказательство леммы 8), поэтому $(q^{m/2} + 1)_2 = 2$. Во втором случае $(q^{m/2} - 1)_2 = (q-1)_2 \geq 4$ и $(q^{m/2} + 1)_2 = (q+1)_2 = 2$.

Если $v = -1$, то $m/2$ нечетно и $q \equiv 3 \pmod{4}$. Тогда по лемме 9 имеем $(q^{m/2} + 1)_2 = (q+1)_2 \geq 4$ и $(q^{m/2} - 1)_2 = (q-1)_2 = 2$.

Пусть $D_m^v = -1$. Если $v = +1$, то $m/2$ нечетно и $q \equiv 3 \pmod{4}$. Тогда по лемме 9 имеем $(q^{m/2} - 1)_2 = (q-1)_2 = 2$ и $(q^{m/2} + 1)_2 = (q+1)_2 \geq 4$.

Если $v = -1$, то либо $m/2$ четно, либо $m/2$ нечетно и $q \equiv 1 \pmod{4}$. В первом случае $q^{m/2} + 1 \equiv 2 \pmod{4}$ (см. доказательство леммы 8), поэтому $(q^{m/2} + 1)_2 = 2$ и $(q^{m/2} - 1)_2 = (q^{m/4} - 1)_2 (q^{m/4} + 1)_2 \geq 2 \cdot 2 = 4$. Во втором случае $(q^{m/2} + 1)_2 = (q+1)_2 = 2$ и $(q^{m/2} - 1)_2 = (q-1)_2 \geq 4$. Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1

Сначала рассмотрим исключительные случаи. Пусть $G = PSL_2(q)$. Согласно [4, 6] в случае, когда q является полным квадратом, подгруппа $PGL_2(q^{1/2})$ будет максимальной подгруппой в G . Непосредственно вычисляя ее индекс, убеждаемся, что он нечетен. Ввиду [4] подгруппа S_4 является максимальной подгруппой в G при простом $q \equiv \pm 1 \pmod{8}$. Вычислив ее индекс, получим, что он нечетен в случае $q \equiv \pm 7 \pmod{16}$. По [4, табл. 3.5.A, утв. 4.6.7] подгруппа A_4 максимальна в G при простом $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$, что неверно, так как в соответствии с [5], например, в группах $PSL_2(11)$, $PSL_2(19)$, $PSL_2(29)$ нет максимальной подгруппы, изоморфной A_4 . По [6] подгруппа A_4 максимальна в G только при простом $q \equiv 3, 5, 13, 27, 37 \pmod{40}$. Мы будем пользоваться этим результатом. Вычисляя при этих условиях индекс A_4 в G , убеждаемся, что он нечетен. По [6] подгруппа A_5 максимальна в G тогда и только тогда, когда $q \equiv \pm 1 \pmod{10}$ и $F_q = F_p(\sqrt{5})$. Вычисляя индекс A_5 в G , получаем, что он нечетен только в случае $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$. Таким образом, A_5 будет максимальной подгруппой нечетного индекса в G тогда и только тогда, когда q — простое число и $q \equiv 11, 19, 21, 29 \pmod{40}$. По [4, табл. 3.5.A, утв. 4.3.6] подгруппа D_{q+1} максимальна в G при всех q , что неверно, так как в соответствии с [5], например, в группах $PSL_2(7)$, $PSL_2(9)$ нет максимальной подгруппы, изоморфной D_{q+1} . По [6] подгруппа D_{q+1} максимальна в G при $q \neq 7, 9$. Мы будем пользоваться этим результатом. Вычисляя индекс D_{q+1} в G , получаем, что он нечетен только в случае $q \equiv 3 \pmod{4}$.

Пусть $G = PSU_3(5)$. Согласно [5] M_{10} является максимальной подгруппой нечетного индекса в G .

Как было замечено во введении, результаты работ [2, 3] были получены для групп $P\Omega_6^+(q)$, $P\Omega_6^-(q)$ и $P\Omega_5(q)$, а не для их изоморфных копий $PSL_4(q)$, $PSU_4(q)$ и $PSp_4(q)$ соответственно. Мы получим результат для последних. Пусть G — одна из конечных простых классических групп $PSL_4(q)$, $PSU_4(q)$ и $PSp_4(q)$ и H — максимальная подгруппа нечетного индекса в G . Воспользуемся описанием всех максимальных подгрупп этих групп, приведенным в [6]. Ввиду лемм 8–10, непосредственно вычисляя индексы всех подгрупп, получим, что, кроме указанных во введении случаев, когда H — подгруппа из объединения $C_1 \cup C_2 \cup C_5$, для G и H выполняется одна из следующих альтернатив (см. заключение теоремы 1):

- (17) $G = PSL_4(q)$ и $H \cong 2^4.A_6$, где q — простое число, $q \equiv 5 \pmod{8}$;
- (18) $G = PSL_4(q)$ и $H \cong PSp_4(q).2$, где $q \equiv 3 \pmod{4}$;
- (19) $G = PSU_4(q)$ и $H \cong 2^4.A_6$, где q — простое число, $q \equiv 3 \pmod{8}$;
- (20) $G = PSU_4(q)$ и $H \cong PSp_4(q).2$, где $q \equiv 1 \pmod{4}$;
- (21) $G = PSp_4(q)$ и $H \cong 2^4.A_5$, где q — простое число, $q \equiv 3 \pmod{8}$.

В соответствии с [6] подгруппы $\Omega_7(2)$ и $\Omega_8^+(2)$ являются максимальными подгруппами групп $P\Omega_7(q)$ и $P\Omega_8^+(q)$ соответственно. Непосредственно вычисляя их индексы, убеждаемся, что последние нечетны.

Пусть G — конечная простая классическая группа и $H = N_G(C_G(\sigma))$ для полевого автоморфизма σ простого нечетного порядка группы G . Тогда ввиду [2, 3] подгруппа H является максимальной подгруппой нечетного индекса в G .

Доказательство теоремы 1 следует далее из теорем 2–12, доказанных ниже.

Теорема 2. Пусть $G = PSL_n(q)$, $n \geq 2$, q — натуральная степень простого нечетного числа (если $n = 2$, то $q \geq 5$), V — естественное n -мерное векторное пространство, ассоциированное с группой G , и H — стабилизатор в G подпространства U размерности t из V ($1 \leq t \leq n - 1$). Тогда H является максимальной подгруппой нечетного индекса в G в том и только том случае, когда $\psi(n) \geq \psi(t)$.

Доказательство. Теоретико-групповая структура H известна, кроме того, H максимальна при всех допустимых t (см. [4, табл. 3.5.A, утв. 4.1.17]). Имеем

$$H \cong [q^{m(n-m)}].[a_{m,n-m}^+(q)/(q-1, n)].(PSL_m(q) \times PSL_{n-m}(q)).[b_{m,n-m}^+(q)]$$

и $|G : H| = |G|/|H|$. По лемме 10 после сокращения дроби получаем

$$|G : H|_2 = \frac{\prod_{j=1}^n I_j(q)_2}{\prod_{j=1}^m I_j(q)_2 \prod_{j=1}^{n-m} I_j(q)_2} = 2^{(r(q)-1)\alpha_1(n,m)} (C_n^m)_2 \geq (C_n^m)_2.$$

Если $\psi(n) \geq \psi(m)$, то $\alpha_1(n, m) = 0$ и $(C_n^m)_2 = 1$, поэтому $|G : H|_2 = 1$. В противном случае $(C_n^m)_2$ четно, поэтому $|G : H|_2 \geq (C_n^m)_2 \geq 2$. Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть $G = PSU_n(q)$, $n \geq 3$, q — натуральная степень простого нечетного числа, V — естественное n -мерное векторное пространство, ассоциированное с группой G , и H — стабилизатор в G невырожденного подпространства U из V размерности m ($1 \leq m < n/2$). Тогда H является максимальной подгруппой нечетного индекса в G в том и только том случае, когда $\psi(n) \geq \psi(m)$.

Доказательство. Теоретико-групповая структура H известна, кроме того, H максимальна при всех допустимых m (см. [4, табл. 3.5.В, утв. 4.1.4]). Имеем

$$H \cong [a_{m,n-m}^-(q)/(q+1, n)] \cdot (PSU_m(q) \times PSU_{n-m}(q)) \cdot [b_{m,n-m}^-(q)]$$

и $|G : H| = |G|/|H|$. По лемме 10 после сокращения дроби получаем

$$|G : H|_2 = \frac{\prod_{j=1}^n (q^j - (-1)^j)_2}{\prod_{j=1}^m (q^j - (-1)^j)_2 \prod_{j=1}^{n-m} (q^j - (-1)^j)_2}.$$

Если j нечетно, то по лемме 9 $(q^j - (-1)^j)_2 = (q^j + 1)_2 = (q + 1)_2 = 2^{r(q)}$.

1) Пусть n и m четны. Тогда по лемме 7

$$\begin{aligned} |G : H|_2 &= \frac{(q+1)_2^{n/2} \prod_{j=1}^{n/2} (q^{2j} - 1)_2}{(q+1)_2^{m/2} \prod_{j=1}^{m/2} (q^{2j} - 1)_2 (q+1)_2^{(n-m)/2} \prod_{j=1}^{(n-m)/2} (q^{2j} - 1)_2} \\ &= \frac{\prod_{j=1}^{n/2} (q^{2j} - 1)_2}{\prod_{j=1}^{m/2} (q^{2j} - 1)_2 \prod_{j=1}^{(n-m)/2} (q^{2j} - 1)_2} = \frac{\prod_{j=1}^{n/2} I_j(q^2)_2}{\prod_{j=1}^{m/2} I_j(q^2)_2 \prod_{j=1}^{(n-m)/2} I_j(q^2)_2}. \end{aligned}$$

По теореме 2 $|G : H|_2 = 1$ тогда и только тогда, когда $\psi(n/2) \geq \psi(m/2)$. Поскольку числа n и m четны, то $\psi_0(n) = \psi_0(m) = 0$ и поэтому $\psi(n/2) \geq \psi(m/2)$ тогда и только тогда, когда $\psi(n) \geq \psi(m)$.

2) Пусть n нечетно и m четно. Тогда $n - m$ нечетно и по лемме 7

$$|G : H|_2 = \frac{(q+1)_2^{(n+1)/2} \prod_{j=1}^{(n-1)/2} (q^{2j} - 1)_2}{(q+1)_2^{m/2} \prod_{j=1}^{m/2} (q^{2j} - 1)_2 (q+1)_2^{(n-m+1)/2} \prod_{j=1}^{(n-m-1)/2} (q^{2j} - 1)_2}$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^{(n-1)/2} (q^{2j} - 1)_2}{\prod_{j=1}^{m/2} (q^{2j} - 1)_2 \prod_{j=1}^{(n-m-1)/2} (q^{2j} - 1)_2} = \frac{\prod_{j=1}^{(n-1)/2} I_j(q^2)_2}{\prod_{j=1}^{m/2} I_j(q^2)_2 \prod_{j=1}^{(n-m-1)/2} I_j(q^2)_2}.$$

По теореме 2 $|G : H|_2 = 1$ тогда и только тогда, когда $\psi((n-1)/2) \geq \psi(m/2)$. Поскольку n нечетно, а m четно, то $\psi_0(n) = 1$ и $\psi_0(m) = 0$, поэтому $\psi((n-1)/2) \geq \psi(m/2)$ тогда и только тогда, когда $\psi(n) \geq \psi(m)$.

В случае, когда n нечетно и m нечетно, имеем $n - m$ четно и по доказанному выше $|G : H|_2 = 1$ тогда и только тогда, когда $\psi(n) \geq \psi(n - m)$. По лемме 3 $\psi(n) \geq \psi(m)$ тогда и только тогда, когда $\psi(n) \geq \psi(n - m)$.

3) Пусть n четно и m нечетно. Тогда $n - m$ нечетно и по лемме 7

$$\begin{aligned} |G : H|_2 &= \frac{(q^n - 1)_2 (q + 1)_2^{n/2} \prod_{j=1}^{(n-2)/2} (q^{2j} - 1)_2}{(q + 1)_2^{(m+1)/2} \prod_{j=1}^{(m-1)/2} (q^{2j} - 1)_2 (q + 1)_2^{(n-m+1)/2} \prod_{j=1}^{(n-m-1)/2} (q^{2j} - 1)_2} \\ &= \frac{(q^n - 1)_2}{(q + 1)_2} \frac{\prod_{j=1}^{(n-2)/2} (q^{2j} - 1)_2}{\prod_{j=1}^{(m-1)/2} (q^{2j} - 1)_2 \prod_{j=1}^{(n-m-1)/2} (q^{2j} - 1)_2} \\ &= \frac{(q^n - 1)_2}{(q + 1)_2} \frac{\prod_{j=1}^{(n-2)/2} I_j(q^2)_2}{\prod_{j=1}^{(m-1)/2} I_j(q^2)_2 \prod_{j=1}^{(n-m-1)/2} I_j(q^2)_2} \geq \frac{(q^n - 1)_2}{(q + 1)_2}. \end{aligned}$$

Но n четно, следовательно, $(q^n - 1)_2 = (q^{n/2} - 1)_2 (q^{n/2} + 1)_2 \geq 2(q + 1)_2$. Поэтому $|G : H|_2 \geq 2$. Поскольку n четно и m нечетно, то $\psi_0(n) = 0$ и $\psi_0(m) = 1$, поэтому $\psi(n) \not\geq \psi(m)$. Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть $G = PSp_n(q)$, n четно, $n \geq 4$, q — натуральная степень простого нечетного числа, V — естественное n -мерное векторное пространство, ассоциированное с группой G , и H — стабилизатор в G невырожденного подпространства U размерности m ($2 \leq m < n/2$). Тогда выполняются следующие утверждения:

- (i) m четно;
- (ii) H является максимальной подгруппой нечетного индекса в G тогда и только тогда, когда $\psi(n) \geq \psi(m)$.

Доказательство. (i) Утверждение взято из [4, табл. 3.5.C].

(ii) Теоретико-групповая структура H известна, кроме того, H максимальна при всех допустимых m (см. [4, Таблица 3.5.C, утв. 4.1.3]). Имеем

$$H \cong (2, q - 1) \cdot (PSp_m(q) \times PSp_{n-m}(q))$$

и $|G : H| = |G|/|H|$. По лемме 10 после сокращения дроби получаем

$$|G : H|_2 = \frac{\prod_{j=1}^{n/2} I_j(q^2)_2}{\prod_{j=1}^{m/2} I_j(q^2)_2 \prod_{j=1}^{(n-m)/2} I_j(q^2)_2}.$$

Из доказательства теоремы 2 видно, что $|G : H|_2 = 1$ тогда и только тогда, когда $\psi(n/2) \geq \psi(m/2)$. Так как n и m четны, то $\psi_0(n) = \psi_0(m) = 0$. Поэтому $\psi(n/2) \geq \psi(m/2)$ тогда и только тогда, когда $\psi(n) \geq \psi(m)$. Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть $G = P\Omega_n(q)$, n нечетно, $n \geq 7$, q — натуральная степень простого нечетного числа, V — естественное n -мерное векторное пространство, ассоциированное с группой G , и H — стабилизатор в G ортогонального разложения пространства V в прямую сумму подпространств U нечетной размерности m ($1 \leq m < n$) и W четной размерности $n - m$ и знака ε . Тогда выполняются следующие утверждения:

(i) $\varepsilon \in \{+, -\}$;

(ii) H является максимальной подгруппой нечетного индекса в G тогда и только тогда, когда $\psi(n) \geq \psi(m)$, $D(W) = 1$ и $(q, m, \varepsilon) \neq (3, n - 2, +)$.

Доказательство. (i) Утверждение взято из [4, табл. 3.5.D].

(ii) Теоретико-групповая структура H известна, кроме того, H максимальна при всех допустимых m , за исключением случая $(q, m, \varepsilon) = (3, n - 2, +)$ (см. [4, табл. 3.5.D, утв. 4.1.6]).

1) Пусть $m = 1$. Тогда

$$H \cong (\Omega_1(q) \times \Omega_{n-1}^\varepsilon(q)).2$$

и $|G : H| = |G|/|H|$. После сокращения дроби получаем

$$|G : H|_2 = \frac{(q^{(n-1)/2} + \varepsilon 1)_2}{2}.$$

По лемме 11 $|G : H|_2 = 1$ тогда и только тогда, когда $D(W) = 1$. Так как n нечетно, то $\psi_0(n) = 1$ и, следовательно, $\psi(n) \geq \psi(1)$.

2) Пусть $m > 1$. Тогда

$$H \cong (\Omega_m(q) \times \Omega_{n-m}^\varepsilon(q)).[4]$$

и $|G : H| = |G|/|H|$. По лемме 10 после сокращения дроби получаем

$$|G : H|_2 = \frac{(q^{(n-m)/2} + \varepsilon 1)_2}{2} \frac{\prod_{j=1}^{(n-1)/2} I_j(q^2)_2}{\prod_{j=1}^{(m-1)/2} I_j(q^2)_2 \prod_{j=1}^{(n-m)/2} I_j(q^2)_2}.$$

Из доказательства теоремы 2 видно, что $|G : H|_2 = 1$ тогда и только тогда, когда $\psi((n-1)/2) \geq \psi((m-1)/2)$ и $(q^{(n-m)/2} + \varepsilon 1)_2 = 2$. По лемме 11 $(q^{(n-m)/2} + \varepsilon 1)_2 = 2$ тогда и только тогда, когда $D(W) = 1$. Так как n и m нечетны, то $\psi_0(n) = \psi_0(m) = 1$; следовательно, $\psi((n-1)/2) \geq \psi((m-1)/2)$ тогда и только тогда, когда $\psi(n) \geq \psi(m)$. Теорема доказана.

Теорема 6. Пусть $G = P\Omega_n^\varepsilon(q)$, n четно, $n \geq 8$, $\varepsilon \in \{+, -\}$, q — натуральная степень простого нечетного числа, V — естественное n -мерное векторное пространство, ассоциированное с группой G , H — стабилизатор в G ортогонального разложения пространства V в прямую сумму подпространств U размерности m ($1 \leq m \leq n/2$) и W размерности $n - m$, и H — подгруппа из класса Ашбахера C_1 . Тогда выполняются следующие утверждения:

(i) если m четно и пространство U имеет знак v ($v \in \{+, -\}$), то W имеет знак $\varepsilon \cdot v$;

(ii) если $\varepsilon = +$, то $m < n/2$;

(iii) если $\varepsilon = -$ и $n/2$ нечетно, то $m < n/2$;

(iv) H является максимальной подгруппой нечетного индекса в G тогда и только тогда, когда $(q, m, v) \neq (3, 2, +)$ и выполняется одно из следующих условий:

(1) m нечетно, $\psi(n-2) \geq \psi(m-1)$ и $D(V) = -1$;

(2) m четно, $D(U) = -1$, $D(W) = 1$ и $\psi(n-2) \geq \psi(m-2)$;

(3) m четно, $D(U) = 1$, $D(W) = -1$ и $\psi(n-2) \geq \psi(m)$;

(4) m четно, $D(U) = D(W) = 1$ и $\psi(n) \geq \psi(m)$.

Доказательство. (i)–(iii) Утверждения взяты из [4, табл. 3.5.E, 3.5.F, утв. 2.5.11, 4.1.6].

(iv) Теоретико-групповая структура H известна, кроме того, H максимальна при всех допустимых m , за исключением случая $(q, m, v) = (3, 2, +)$ (см. [4, табл. 3.5.E, 3.5.F, утв. 4.1.6]).

1) Пусть $m = 1$ и $D(V) = 1$. Тогда

$$H \cong \Omega_{n-1}(q)$$

и $|G : H| = |G|/|H|$. После сокращения дроби получаем

$$|G : H|_2 = 2 \frac{(q^{n/2} - \varepsilon 1)_2}{(q^{n/2} - \varepsilon 1, 4)} \geq 2.$$

2) Пусть $m = 1$ и $D(V) = -1$. Тогда

$$H \cong \Omega_{n-1}(q).2$$

и $|G : H| = |G|/|H|$. После сокращения дроби получаем

$$|G : H|_2 = \frac{(q^{n/2} - \varepsilon 1)_2}{(q^{n/2} - \varepsilon 1, 4)}.$$

По лемме 11 $(q^{n/2} - \varepsilon 1)_2 = 2$, поэтому $|G : H|_2 = 1$. Кроме того, $\psi(n-2) \geq \psi(0)$.

3) Пусть m нечетно, $m > 1$ и $D(V) = 1$. Тогда

$$H \cong (\Omega_m(q) \times \Omega_{n-m}(q)).2$$

и $|G : H| = |G|/|H|$. По лемме 10 после сокращения дроби получаем

$$|G : H|_2 = 2 \frac{(q^{n/2} - \varepsilon 1)_2}{(q^{n/2} - \varepsilon 1, 4)} \frac{\prod_{j=1}^{(n-2)/2} I_j(q^2)_2}{\prod_{j=1}^{(m-1)/2} I_j(q^2)_2 \prod_{j=1}^{(n-m-1)/2} I_j(q^2)_2} \geq 2.$$

4) Пусть m нечетно, $m > 1$ и $D(V) = -1$. Тогда

$$H \cong (\Omega_m(q) \times \Omega_{n-m}(q)).[4]$$

и $|G : H| = |G|/|H|$. По лемме 10 после сокращения дроби получаем

$$|G : H|_2 = \frac{(q^{n/2} - \varepsilon 1)_2}{(q^{n/2} - \varepsilon 1, 4)} \frac{\prod_{j=1}^{(n-2)/2} I_j(q^2)_2}{\prod_{j=1}^{(m-1)/2} I_j(q^2)_2 \prod_{j=1}^{(n-m-1)/2} I_j(q^2)_2}.$$

По лемме 11 $(q^{n/2} - \varepsilon 1)_2 = 2$, поэтому

$$|G : H|_2 = \frac{\prod_{j=1}^{(n-2)/2} I_j(q^2)_2}{\prod_{j=1}^{(m-1)/2} I_j(q^2)_2 \prod_{j=1}^{(n-m-1)/2} I_j(q^2)_2}.$$

Из доказательства теоремы 2 видно, что $|G : H|_2 = 1$ тогда и только тогда, когда $\psi((n-2)/2) \geq \psi((m-1)/2)$. Так как $n-2$ и $m-1$ четны, то $\psi_0(n-2) = \psi_0(m-1) = 0$; следовательно, $\psi((n-2)/2) \geq \psi((m-1)/2)$ тогда и только тогда, когда $\psi(n-2) \geq \psi(m-1)$.

5) Пусть m четно и $D(U) = D(W) = -1$. Тогда $D(V) = 1$,

$$H \cong (\Omega_m^v(q) \times \Omega_{n-m}^{\varepsilon \cdot v}(q)).2$$

и $|G : H| = |G|/|H|$. Ввиду леммы 11 имеем $(q^{m/2} - v1)_2 = 2$, $(q^{(n-m)/2} - (v \cdot \varepsilon)1)_2 = 2$ и $(q^{n/2} - \varepsilon 1)_2 \geq 4$. По лемме 10 после сокращения дроби получаем

$$\begin{aligned} |G : H|_2 &= \frac{(q^{n/2} - \varepsilon 1)_2 (q^{n-2} - 1)_2}{8} \frac{\prod_{j=1}^{(n-4)/2} I_j(q^2)_2}{\prod_{j=1}^{(m-2)/2} I_j(q^2)_2 \prod_{j=1}^{(n-m-2)/2} I_j(q^2)_2} \\ &\geq \frac{(q^{n/2} - \varepsilon 1)_2 (q^{n-2} - 1)_2}{8} \geq \frac{(q^{n-2} - 1)_2}{2} \geq 2. \end{aligned}$$

6) Пусть m четно и $D(V) = -1$. Тогда либо $D(U) = -1$, либо $D(W) = -1$,

$$H \cong (\Omega_m^v(q) \times \Omega_{n-m}^{\varepsilon \cdot v}(q)).[4]$$

и $|G : H| = |G|/|H|$. По лемме 11 имеем $(q^{n/2} - \varepsilon 1)_2 = 2$. По лемме 10 после сокращения дроби получаем

$$|G : H|_2 = \frac{\prod_{j=1}^{(n-2)/2} I_j(q^2)_2}{(q^{m/2} - v1)_2 \prod_{j=1}^{(m-2)/2} I_j(q^2)_2 (q^{(n-m)/2} - (\varepsilon \cdot v)1)_2 \prod_{j=1}^{(n-m-2)/2} I_j(q^2)_2}.$$

Если $D(U) = -1$, то $D(W) = 1$, $(q^{m/2} - v1)_2 = 2$ и $(q^{(n-m)/2} + (\varepsilon \cdot v)1)_2 = 2$. После умножения числителя и знаменателя дроби $|G|/|H|$ на $(q^{(n-m)/2} + (\varepsilon \cdot v)1)_2 = 2$, перегруппировки множителей и сокращения дроби получаем

$$|G : H|_2 = \frac{\prod_{j=1}^{(n-2)/2} I_j(q^2)_2}{\prod_{j=1}^{(m-2)/2} I_j(q^2)_2 \prod_{j=1}^{(n-m)/2} I_j(q^2)_2}.$$

Из доказательства теоремы 2 видно, что $|G : H|_2 = 1$ тогда и только тогда, когда $\psi((n-2)/2) \geq \psi((m-2)/2)$. Так как $n-2$ и $m-2$ четны, то $\psi_0(n-2) = \psi_0(m-2) = 0$; значит, $\psi((n-2)/2) \geq \psi((m-2)/2)$ тогда и только тогда, когда $\psi(n-2) \geq \psi(m-2)$.

Если $D(U) = 1$, то $D(W) = -1$ и, как в предыдущем случае, получаем, что $|G : H|_2 = 1$ тогда и только тогда, когда $\psi(n-2) \geq \psi(m)$.

7) Пусть m четно и $D(U) = D(W) = 1$. Тогда $D(V) = 1$,

$$H \cong 2.(P\Omega_m^v(q) \times P\Omega_{n-m}^{\varepsilon \cdot v}(q)).[4]$$

и $|G : H| = |G|/|H|$. По лемме 11 имеем $(q^{m/2} + v1)_2 = 2$, $(q^{(n-m)/2} + (v \cdot \varepsilon)1)_2 = 2$ и $(q^{n/2} + \varepsilon 1)_2 = 2$. По лемме 10 после умножения числителя и знаменателя дроби $|G|/|H|$ на

$(q^{n/2} + \varepsilon 1)_2$, $(q^{m/2} + \nu 1)_2$ и $(q^{(n-m)/2} + (\varepsilon \cdot \nu) 1)_2$, перегруппировки множителей и сокращения дроби получаем

$$|G : H|_2 = \frac{\prod_{j=1}^{n/2} I_j(q^2)}{\prod_{j=1}^{m/2} I_j(q^2) \prod_{j=1}^{(n-m)/2} I_j(q^2)}.$$

Из доказательства теоремы 2 видно, что $|G : H|_2 = 1$ тогда и только тогда, когда $\psi(n/2) \geq \psi(m/2)$. Так как n и m четны, то $\psi_0(n) = \psi_0(m) = 0$. Поэтому $\psi(n/2) \geq \psi(m/2)$ тогда и только тогда, когда $\psi(n) \geq \psi(m)$. Теорема доказана.

Теорема 7. Пусть $G = PSL_n(q)$, $n \geq 2$, q — натуральная степень простого нечетного числа (если $n = 2$, то $q \geq 5$), V — естественное n -мерное векторное пространство, ассоциированное с группой G , H — стабилизатор разложения $V = \bigoplus_{i=1}^t V_i$ в прямую сумму t подпространств V_i одинаковой размерности m ($n = mt$, $t \geq 2$). Тогда H является максимальной подгруппой нечетного индекса в G тогда и только тогда, когда либо $m = 2^w \geq 2$ и $(n, m, q) \neq (4, 2, 3)$, либо $m = 1$, $q \equiv 1 \pmod{4}$ и $q \geq 13$ в случае $n = 2$.

Доказательство. Теоретико-групповая структура H известна, кроме того, H максимальна при всех допустимых m за исключением случая $(q, m) = (3, 1)$ (см. [4, табл. 3.5.A, утв. 4.2.9]). Однако в случае $G = PSL_4(3)$ и $m = 2$ подгруппа H не будет максимальной в G . Действительно, в соответствии с [5] $H < PSU_4(2) : 2 \cong PSp_4(3).2 < G$. Кроме того, по [5, 6] при $(n, m) = (2, 1)$ и $q \in 5, 7, 9, 11$ подгруппа H также не будет максимальной в G .

Имеем

$$H \cong \left[\frac{(q-1)^{t-1} (q-1, m)}{(q-1, n)} \right] \cdot (PSL_m(q))^t \cdot [(q-1, m)^{t-1}] \cdot S_t$$

и $|G : H| = |G|/|H|$. По лемме 10 после сокращения дроби получаем

$$|G : H|_2 = \frac{\prod_{j=1}^n I_j(q)_2}{\left(\prod_{j=1}^m I_j(q)_2 \right)^t (t!)_2} = 2^{(r(q)-1)(G_1(mt)-tG_1(m))} 2^{\sum_{i=1}^{\infty} G_i(mt) - \sum_{i=1}^{\infty} G_i(t) - t \sum_{i=1}^{\infty} G_i(m)}.$$

По лемме 4 число $((r(q) - 1)(G_1(mt) - tG_1(m)))$ неотрицательно. Поэтому

$$|G : H|_2 \geq 2^{\sum_{i=1}^{\infty} G_i(mt) - \sum_{i=1}^{\infty} G_i(t) - t \sum_{i=1}^{\infty} G_i(m)}.$$

Из доказательства леммы 5 видно, что если m не является степенью числа 2, то $|G : H|_2 \geq 2$.

Пусть $m = 2^w \geq 2$. Тогда $G_1(mt) - tG_1(m) = 0$ и, следовательно,

$$|G : H|_2 = 2^{\sum_{i=1}^{\infty} G_i(mt) - \sum_{i=1}^{\infty} G_i(t) - t \sum_{i=1}^{\infty} G_i(m)}.$$

Но по лемме 5 в этом случае

$$\sum_{i=1}^{\infty} G_i(mt) - \sum_{i=1}^{\infty} G_i(t) - t \sum_{i=1}^{\infty} G_i(m) = 0,$$

следовательно, $|G : H|_2 = 1$.

Если $m = 1$, то $|G : H|_2 = 2^{(r(q)-1)G_1(n)}$ и, так как $n \geq 2$, то $G_1(n) \geq 2$. Поэтому $|G : H|_2 = 1$ тогда и только тогда, когда $r(q) = 1$, т. е. $q \equiv 1 \pmod{4}$. Теорема доказана.

Теорема 8. Пусть $G = PSU_n(q)$, $n \geq 3$, q — натуральная степень простого нечетного числа, V — естественное n -мерное векторное пространство, ассоциированное с группой G , H — стабилизатор ортогонального разложения $V = \bigoplus_{i=1}^t V_i$ в прямую сумму t изометричных подпространств V_i размерности m ($n = mt$, $t \geq 2$). Тогда H является максимальной подгруппой нечетного индекса в G тогда и только тогда, когда $m = 2^w \geq 2$ или $m = 1$, $(n, q) \neq (4, 3)$ и $q \equiv 3 \pmod{4}$.

Доказательство. Теоретико-групповая структура H известна, кроме того, H максимальна при всех допустимых m (см. [4, табл. 3.5.В, утв. 4.2.9]). Однако по [5] в случаях $G = PSU_4(3)$ и $G = PSU_3(5)$ при $m = 1$ подгруппа H не будет максимальной.

Имеем

$$H \cong \left[\frac{(q+1)^{t-1}(q+1, m)}{(q+1, n)} \right] \cdot (PSU_m(q))^t \cdot [(q+1, m)^{t-1}] \cdot S_t$$

и $|G : H| = |G|/|H|$. По лемме 10 после сокращения дроби получаем

$$A(n, m) := |G : H|_2 = \frac{\prod_{j=1}^n (q^j - (-1)^j)_2}{\left(\prod_{j=1}^m (q^j - (-1)^j)_2 \right)^t (t!)_2}.$$

1) Если m нечетно и $m > 1$, то n и t имеют одинаковую четность и

$$\begin{aligned} |G : H|_2 &= \frac{\prod_{j=n-t+1}^n (q^j - (-1)^j)_2}{(q^m + 1)_2^t} \frac{\prod_{j=1}^{n-t} (q^j - (-1)^j)_2}{\left(\prod_{j=1}^{m-1} (q^j - (-1)^j)_2 \right)^t (t!)_2} \\ &= \frac{\prod_{j=n-t+1}^n (q^j - (-1)^j)_2}{(q^m + 1)_2^t} A(n-t, m-1). \end{aligned}$$

По лемме 9 при нечетном j имеем $(q^j + 1)_2 = (q + 1)_2$. При четном j имеем $(q^j - (-1)^j)_2 = (q^{j/2} - 1)_2(q^{j/2} + 1)_2 > (q + 1)_2$. Так как $t \geq 2$, то в отрезке $[n-t+1, n]$ есть хотя бы одно

четное число; следовательно, множитель $\frac{\prod_{j=n-t+1}^n (q^j - (-1)^j)_2}{(q^m + 1)_2^t}$ четен. Поэтому $|G : H|_2 > 1$.

2) Если m четно, то n четно и из лемм 7 и 9 следует, что

$$|G : H|_2 = \frac{(q+1)_2^{n/2} \prod_{j=1}^{n/2} (q^{2j} - 1)_2}{((q+1)_2^{m/2})^t \left(\prod_{j=1}^{m/2} (q^{2j} - 1)_2 \right)^t (t!)_2} = \frac{\prod_{j=1}^{n/2} (q^{2j} - 1)_2}{\left(\prod_{j=1}^{m/2} (q^{2j} - 1)_2 \right)^t (t!)_2}.$$

Из доказательства теоремы 7 видно, что $|G : H|_2 = 1$ тогда и только тогда, когда $m/2 = 2^w$. Так как $q^2 \equiv 1 \pmod{4}$, то $w \geq 0$.

3) Если $m = 1$, то ввиду лемм 6 и 7 имеем

$$|G : H|_2 = \frac{\prod_{j=1}^{\lfloor t/2 \rfloor} (q^{2j} - 1)_2 \prod_{j=1}^{\lfloor (t+1)/2 \rfloor} (q^{2j-1} + 1)_2}{(q+1)_2^t (t!)_2} = \frac{(q^2 - 1)_2^{\lfloor t/2 \rfloor} (q+1)_2^{\lfloor (t+1)/2 \rfloor} \prod_{j=1}^{\lfloor t/2 \rfloor} I_j(q^2)_2}{(q+1)_2^t (t!)_2}$$

$$= \frac{(q-1)_2^{[t/2]} ([t/2]!)_2}{(t!)_2} = \frac{(q-1)_2^{[t/2]}}{2^{[t/2]}}.$$

Поэтому $|G : H|_2 = 1$ тогда и только тогда, когда $(q-1)_2 = 2$, т. е. $q \equiv 3 \pmod{4}$. Теорема доказана.

Теорема 9. Пусть $G = PSp_n(q)$, n четно, $n \geq 4$, q — натуральная степень простого нечетного числа, V — естественное n -мерное векторное пространство, ассоциированное с группой G , H — стабилизатор ортогонального разложения $V = \bigoplus_{i=1}^t V_i$ в прямую сумму t изометричных подпространств V_i размерности m ($n = mt$, $t \geq 2$). Тогда выполняются следующие утверждения:

- (i) m четно;
- (ii) H является максимальной подгруппой нечетного индекса в G тогда и только тогда, когда $m = 2^w \geq 2$.

Доказательство. (i) Утверждение взято из [4, табл. 3.5.C].

(ii) Теоретико-групповая структура H известна, кроме того, H максимальна при всех допустимых m (см. [4, табл. 3.5.C, утв. 4.2.10]). Имеем

$$H \cong (2, q-1)^{t-1} \cdot (PSp_n(q) \wr S_t)$$

и $|G : H| = |G|/|H|$. По лемме 10 после сокращения дроби получаем

$$|G : H|_2 = \frac{\prod_{j=1}^{n/2} (q^{2j} - 1)_2}{\left(\prod_{j=1}^{m/2} (q^{2j} - 1)_2 \right)^t (t!)_2}.$$

Из доказательства теоремы 7 видно, что $|G : H|_2 = 1$ тогда и только тогда когда $m/2 = 2^w$. Так как $q^2 \equiv 1 \pmod{4}$, то в точности $w \geq 0$, откуда $m = 2^w \geq 2$. Теорема доказана.

Теорема 10. Пусть $G = P\Omega_n(q)$, n нечетно, $n \geq 7$, q — натуральная степень простого нечетного числа, V — естественное n -мерное векторное пространство, ассоциированное с группой G , H — стабилизатор ортогонального разложения $V = \bigoplus_{i=1}^t V_i$ в прямую сумму t изометричных подпространств V_i размерности m ($n = mt$, $t \geq 2$). Тогда выполняются следующие утверждения:

- (i) m нечетно;
- (ii) если $m = 1$, то q — простое число;
- (iii) H является максимальной подгруппой нечетного индекса в G тогда и только тогда, когда $m = 1$, q — простое число и $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$.

Доказательство. (i) Утверждение следует из того, что n нечетно и m делит n .

(ii) Утверждение взято из [4, табл. 3.5.D].

(iii) Теоретико-групповая структура H известна, кроме того, H максимальна при всех допустимых m , за исключением случая $(q, m) = (3, 3)$ (см. [4, табл. 3.5.D, утв. 4.2.14, 4.2.15]).

1) Пусть $m = 1$ и $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$. Тогда $(q^2 - 1)_2 = 8$ и

$$H \cong 2^{n-1} \cdot A_n.$$

По леммам 6 и 10 получаем

$$|G : H|_2 = \frac{\prod_{j=1}^{(n-1)/2} (q^{2j} - 1)_2}{2^{n-1} 2^{(n-1)/2} \left(\frac{n-1}{2}! \right)_2} = \frac{(q^2 - 1)_2^{(n-1)/2} \prod_{j=1}^{(n-1)/2} I_j(q^2)_2}{2^{n-1} 2^{(n-1)/2} \left(\frac{n-1}{2}! \right)_2}$$

$$= \frac{8^{(n-1)/2} \left(\frac{n-1}{2}! \right)_2}{8^{(n-1)/2} \left(\frac{n-1}{2}! \right)_2} = 1.$$

2) Пусть $m = 1$ и $q \equiv \pm 1 \pmod{8}$. Тогда $(q^2 - 1)_2 \geq 16$ и

$$H \cong 2^{n-1} \cdot S_n.$$

По леммам 6 и 10 получаем

$$\begin{aligned} |G : H|_2 &= \frac{\prod_{j=1}^{(n-1)/2} (q^{2j} - 1)_2}{2^n 2^{(n-1)/2} \left(\frac{n-1}{2}! \right)_2} = \frac{(q^2 - 1)_2^{(n-1)/2} \prod_{j=1}^{(n-1)/2} I_j(q^2)_2}{2^n 2^{(n-1)/2} \left(\frac{n-1}{2}! \right)_2} \\ &\geq \frac{16^{(n-1)/2} \left(\frac{n-1}{2}! \right)_2}{2 \cdot 8^{(n-1)/2} \left(\frac{n-1}{2}! \right)_2} = \frac{2^{(n-1)/2}}{2} \geq 2. \end{aligned}$$

3) Пусть $m > 1$. Тогда

$$H \cong (2^{t-1} \times \Omega_m(q)^t \cdot 2^{t-1}) \cdot S_t$$

и $|G : H| = |G|/|H|$. По лемме 10 после сокращения дроби получаем

$$\begin{aligned} |G : H|_2 &= \frac{\prod_{j=1}^{(n-1)/2} (q^{2j} - 1)_2}{\left(\prod_{j=1}^{(m-1)/2} (q^{2j} - 1)_2 \right)^t (t!)_2 2^{t-1}} \\ &= \frac{\prod_{j=(n-t+2)/2}^{(n-1)/2} (q^{2j} - 1)_2}{2^{t-1}} \frac{\prod_{j=1}^{(n-t)/2} (q^{2j} - 1)_2}{\left(\prod_{j=1}^{(m-1)/2} (q^{2j} - 1)_2 \right)^t (t!)_2} \geq \frac{\prod_{j=(n-t+2)/2}^{(n-1)/2} (q^{2j} - 1)_2}{2^{t-1}}. \end{aligned}$$

В произведении $\prod_{j=(n-t+2)/2}^{(n-1)/2} (q^{2j} - 1)_2$ содержится $(t-1)/2$ множителей, каждый из которых делится на 8. Поэтому $|G : H|_2 \geq 2$. Теорема доказана.

Теорема 11. Пусть $G = P\Omega_n^\varepsilon(q)$, n четно, $n \geq 8$, $\varepsilon \in \{+, -\}$, q — натуральная степень простого нечетного числа, V — естественное n -мерное векторное пространство, ассоциированное с группой G , H — стабилизатор ортогонального разложения $V = \bigoplus_{i=1}^t V_i$ в прямую сумму t изометричных подпространств V_i размерности m ($n = mt$, $t \geq 2$). Тогда выполняются следующие утверждения:

- (i) если t четно и V_i имеют знак v , то $v^t = \varepsilon$;
- (ii) если t нечетно, то $D(V) = 1$;
- (iii) если $\varepsilon = -$ и t четно, то t нечетно и $v = -$;
- (iv) если $t = 1$, то q — простое число;

(v) H является максимальной подгруппой нечетного индекса в G тогда и только тогда, когда либо $t = 1$, q — простое число, $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$ и $(n, \varepsilon) \neq (8, +)$, либо $t = 2^w \geq 2$, $D(V) = D(V_i) = 1$ и $(q, m, \varepsilon) \neq (3, 2, \pm), (5, 2, +)$.

Доказательство. (i)–(iv) Утверждения взяты из [4, табл. 3.5.E, 3.5.F, утв. 2.5.11, 4.2.11, 4.2.14, 4.2.15].

(v) Теоретико-групповая структура H известна, кроме того, H максимальна при всех допустимых m , за исключением случаев $(q, m) = (3, 3)$, $(q, m) = (3, 2)$, $(q, m, \varepsilon) = (5, 2, +)$ (см. [4, табл. 3.5.E, 3.5.F, утв. 4.2.11, 4.2.14, 4.2.15]). Заметим, что в отличие от [4] в [6, 8] указано, что в случае $(n, m, \varepsilon) = (8, 1, +)$ при $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$ подгруппа H не будет максимальной в G . Мы будем учитывать этот результат.

1) Пусть $m = 1$ и $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$. Тогда $D(V) = 1$, $(q^2 - 1)_2 = 8$,

$$H \cong 2^{n-2}.A_n$$

и $|G : H| = |G|/|H|$. По лемме 11 после умножения числителя и знаменателя на $(q^{n/2} + \varepsilon)_2 = 2$ получаем

$$|G : H|_2 = \frac{\prod_{j=1}^{(n)/2} (q^{2j} - 1)_2}{2^n(n!)_2}.$$

Как в доказательстве теоремы 10, по лемме 6 получаем $|G : H|_2 = 1$.

2) Пусть $m = 1$ и $q \equiv \pm 1 \pmod{8}$. Тогда $D(V) = 1$, $(q^2 - 1)_2 \geq 16$,

$$H \cong 2^{n-2}.S_n$$

и $|G : H| = |G|/|H|$. По лемме 11 после умножения числителя и знаменателя на $(q^{n/2} + \varepsilon)_2 = 2$ получаем

$$|G : H|_2 = \frac{\prod_{j=1}^{n/2} (q^{2j} - 1)_2}{2^{n+1}(n!)_2}.$$

Как в доказательстве теоремы 10, по лемме 6 получаем $|G : H|_2 \geq 2$.

3) Пусть $m > 1$ и m нечетно. Тогда $D(V) = 1$,

$$H \cong (2^{t-2} \times \Omega_m(q)^t \cdot 2^{t-1}).S_t$$

и $|G : H| = |G|/|H|$. По лемме 10 после умножения числителя и знаменателя на $(q^{n/2} + \varepsilon)_2 = 2$ и сокращения дроби получаем

$$\begin{aligned} |G : H|_2 &= \frac{\prod_{j=1}^{n/2} (q^{2j} - 1)_2}{2^t \left(\prod_{j=1}^{(m-1)/2} (q^{2j} - 1)_2 \right)^t (t!)_2} \\ &= \frac{\prod_{j=(n-t+2)/2}^{n/2} (q^{2j} - 1)_2}{2^t} \frac{\prod_{j=1}^{(n-t)/2} (q^{2j} - 1)_2}{\left(\prod_{j=1}^{(m-1)/2} (q^{2j} - 1)_2 \right)^t (t!)_2} \geq \frac{\prod_{j=(n-t+2)/2}^{n/2} (q^{2j} - 1)_2}{2^t}. \end{aligned}$$

В произведении $\prod_{j=(n-t+2)/2}^{n/2} (q^{2j} - 1)_2$ содержится $t/2$ множителей, каждый из которых делится на 8. Поэтому $|G : H|_2 \geq 2$.

4) Пусть m четно и $D(V) = -1$. Тогда $D(V_i) = -1$, t нечетно,

$$H \cong (2^{t-1} \times \Omega_m^v(q)^t \cdot 2^{t-1}).S_t$$

и $|G : H| = |G|/|H|$. Ввиду лемм 10 и 11 после умножения числителя и знаменателя дроби на $(q^{n/2} + \varepsilon 1)_2 \geq 4$ и на $(q^{m/2} + v 1)_2 \geq 4^t$ получаем

$$|G : H|_2 = \frac{(q^{m/2} + v 1)_2^t}{(q^{n/2} + \varepsilon 1)_2 2^{t-1}} \frac{\prod_{j=1}^{n/2} (q^{2j} - 1)_2}{\left(\prod_{j=1}^{m/2} (q^{2j} - 1)_2 \right)^t (t!)_2} \geq \frac{(q^{m/2} + v 1)_2^t}{(q^{n/2} + \varepsilon 1)_2 2^{t-1}}.$$

Из нечетности t следует, что $\varepsilon = v$, откуда ввиду лемм 9 и 11 имеем $(q^{n/2} + \varepsilon 1)_2 = (q^{m/2} + v 1)_2 \geq 4$. Поэтому $|G : H|_2 \geq 2$.

5) Пусть m четно, $D(V) = D(V_i) = 1$. Тогда

$$H \cong 2^{t-1} \cdot P\Omega_m^v(q)^t \cdot 2^{2(t-1)} \cdot S_t$$

и $|G : H| = |G|/|H|$. Ввиду леммы 11 после умножения числителя и знаменателя на $(q^{n/2} + \varepsilon 1)_2 = 2$ и на $(q^{m/2} + v 1)_2^t = 2^t$ получаем

$$|G : H|_2 = \frac{\prod_{j=1}^{n/2} (q^{2j} - 1)_2}{\left(\prod_{j=1}^{m/2} (q^{2j} - 1)_2 \right)^t (t!)_2}.$$

Из доказательства теоремы 7 видно, что $|G : H|_2 = 1$ тогда и только тогда, когда $m = 2^w \geq 2$.

6) Пусть m четно, $D(V) = 1$, $D(V_i) = -1$. Тогда

$$H \cong (2^{t-2} \times \Omega_m^v(q)^t \cdot 2^{t-1}) \cdot S_t$$

и $|G : H| = |G|/|H|$. По лемме 11 после умножения числителя и знаменателя дроби на $(q^{n/2} + \varepsilon 1)_2 = 2$ и на $(q^{m/2} + v 1)_2^t \geq 4^t$ получаем

$$|G : H|_2 = \frac{(q^{m/2} + v 1)_2^t}{2^{t-1} (q^{n/2} + \varepsilon 1)_2} \frac{\prod_{j=1}^{n/2} (q^{2j} - 1)_2}{\left(\prod_{j=1}^{m/2} (q^{2j} - 1)_2 \right)^t (t!)_2} \geq \frac{(q^{m/2} + v 1)_2^t}{2^{t-1} (q^{n/2} + \varepsilon 1)_2} = \frac{(q^{m/2} + v 1)_2^t}{2^t} \geq 2.$$

Теорема доказана.

Теорема 12. Пусть $G = P\Omega_n^\varepsilon(q)$, n четно, $n \geq 10$, $n/2$ нечетно, $\varepsilon \in \{+, -\}$, q — натуральная степень простого нечетного числа, V — естественное n -мерное векторное пространство, ассоциированное с группой G , и H — стабилизатор в G ортогонального разложения пространства V в прямую сумму не изометричных подпространств U и W одинаковой размерности $n/2$. Тогда выполняются следующие утверждения:

- (i) $D(V) = -1$;
- (ii) $q \equiv -\varepsilon 1 \pmod{4}$;
- (iii) индекс H в G всегда четен.

Доказательство. (i)–(ii) Утверждения взяты из [4, табл. 3.5.E, 3.5.F, утв. 2.4.13, 4.2.16].

(iii) Теоретико-групповая структура H известна, кроме того, H максимальна при всех допустимых m (см. [4, табл. 3.5.E, 3.5.F, утв. 4.2.16]). Имеем

$$H \cong SO_{n/2}(q) \times SO_{n/2}(q)$$

и $|G : H| = |G|/|H|$. По леммам 10 и 11 после сокращения дроби получаем

$$|G : H|_2 = \frac{\prod_{j=1}^{(n-2)/2} I_j(q^2)_2}{\left(\prod_{j=1}^{(n-2)/4} I_j(q^2)_2\right)^2} = 2 \frac{\prod_{j=1}^{(n-2)/2} I_j(q^2)_2}{\left(\prod_{j=1}^{(n-2)/4} I_j(q^2)_2\right)^2 (2!)_2}.$$

Из доказательства теоремы 7 видно, что $|G : H|_2 \geq 2$. Теорема доказана.

Автор благодарит своего научного руководителя профессора А. С. Кондратьева за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Aschbacher M.** On the maximal subgroups of the finite classical groups // Invent. Math. 1984. Vol. 76, no. 3. P. 469–514.
2. **Liebeck M.W., Saxl J.** The primitive permutation groups of odd degree // J. London Math. Soc. 1985. Vol. 31, no. 2. P. 250–264.
3. **Kantor W.M.** Primitive permutation groups of odd degree, and an application to the finite projective planes // J. Algebra. 1987. Vol. 106, no. 1. P. 15–45.
4. **Kleidman P., Liebeck M.** The subgroup structure of the finite classical groups // Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. 303 p.
5. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.] Oxford: Clarendon Press, 1985. 250 p.
6. **Kleidman P.** The subgroup structure of some finite simple groups // Ph. D. Thesis. Cambridge: Cambridge Univ., 1986.
7. **Thompson J.G.** Hall subgroups of the symmetric groups // J. Comb. Theory. 1966. Vol. 1. P. 271–279.
8. **Kleidman P.** The maximal subgroup structure of the finite 8-dimensional orthogonal groups $P\Omega_8^+$ and of their automorphism groups // J. Algebra. 1987. Vol. 110, no. 1. P. 173–242.

Маслова Наталья Владимировна
математик

Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: butterson@mail.ru

Поступила 19.06.2008

УДК 519.17

О ХОРОШИХ ПАРАХ ВЕРШИН В РЕБЕРНО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ С $k = 3b_1 - 1$ ¹

А. А. Махнев, Н. В. Чуксина

Пусть Γ является связным реберно регулярным графом с параметрами (v, k, λ) и $k = 3b_1 - 1$. Получены верхние оценки для числа вершин v , зависящие от наличия хороших и почти хороших пар и троек вершин в графе.

Ключевые слова: реберно регулярный граф, хорошие и почти хорошие пары вершин, почти хорошие тройки вершин.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ , то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b , а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ , индуцированный множеством вершин, которые находятся в Γ на расстоянии i от вершины a . Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается через $[a]$, если граф Γ фиксирован. Через a^\perp обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a .

Граф Γ называется *регулярным графом степени k* , если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ . Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами (v, k, λ)* , если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k и каждое ребро Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ)* , если Γ реберно регулярен и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*. Число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначим через $\lambda(a, b)$ (через $\mu(a, b)$), если $d(a, b) = 1$ (если $d(a, b) = 2$), а соответствующий подграф назовем (μ) - λ -подграфом.

Пусть Γ — реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) и $b_1 = k - \lambda - 1$. Пара вершин $\{u, w\}$ называется *(почти) хорошей*, если $d(u, w) = 2$ и $\mu(u, w)$ равно $k - 2b_1 + 1$ (равно $k - 2b_1 + 2$). Тройка вершин (u, w, z) называется *(почти) хорошей*, если $w, z \in \Gamma_2(u)$ и $\mu(u, w) + \mu(u, z)$ не больше $2k - 4b_1 + 3$ (равно $2k - 4b_1 + 4$).

Через K_{m_1, \dots, m_n} обозначим полный n -дольный граф с долями порядков m_1, \dots, m_n . Если $m_1 = \dots = m_n = m$, то соответствующий граф обозначается через $K_{n \times m}$. Если $m \geq 2$, то граф $K_{1, m}$ называется *m -лапой*. *Треугольным графом $T(m)$* называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, $|X| = m$, и пары $\{a, b\}, \{c, d\}$ смежны тогда и только тогда, когда они имеют единственный общий элемент. Граф на множестве вершин $X \times Y$ называется *$m \times n$ -решеткой*, если $|X| = m$, $|Y| = n$ и вершины $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. Для подграфа Δ через $|\Delta|$ обозначим число его вершин, а через $X_i(\Delta)$ обозначим множество вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ .

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Заметим, что в реберно

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00009).

регулярном графе с параметрами (v, k, λ) значение $b_1(u, w)$ не зависит от выбора ребра $\{u, w\}$ и равно $k - \lambda - 1$.

В [1] получена верхняя оценка для числа вершин связного реберно регулярного графа диаметра 2 с параметрами (v, k, λ) и $k = 3b_1 + \delta$, $\delta \geq -2$. В данной работе с помощью результатов о почти хороших тройках эта оценка уточняется для графов с $k = 3b_1 - 1$.

Теорема 1. Пусть Γ — реберно регулярный граф с $k = 3b_1 - 1$, $\mu(u, w) + \mu(u, z) = 2b_1 + 2$ для различных w, z из $\Gamma_2(u)$, $\Delta = [u] \cap [w] \cap [z]$ и $\delta = |\Delta|$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) вершины w, z не смежны и $\delta = 0$;
- (2) $\Delta = \{a\}$, $[u] \cap [w] - a^\perp$ содержит единственную вершину c , $[u] \cap [z] - a^\perp$ содержит единственную вершину e и $[w] \cup [z] - [u] \subset \{w, z\} \cup ([w] \cap [z])$;
- (3) Δ является 2-кликкой, $[w] - ([u] \cup z^\perp)$ содержит единственную вершину z^* и $[z] - ([u] \cup w^\perp)$ содержит единственную вершину w^* ;
- (4) Δ является 2-кликкой.

Следствие. Пусть Γ — связный неполный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) и $k = 3b_1 - 1$. Тогда либо граф Γ является многоугольником или графом икосаэдра, либо выполняется одно из утверждений:

- (1) для некоторой вершины u в Γ найдутся две вершины w, z , образующие хорошие пары с u , и либо вершины w, z смежны и $v \leq 5b_1$, либо вершины w, z не смежны и $v \leq 6b_1 - 8$;
- (2) в Γ нет вершин, лежащих в двух хороших парах, некоторая вершина u образует хорошую пару с w , и $v \leq 6b_1 - 6$;
- (3) в Γ нет хороших пар и либо
 - (i) Γ не содержит почти хороших пар и $v \leq 6b_1 - 6$, либо
 - (ii) Γ содержит почти хорошую тройку (u, w, z) , вершины w, z смежны и $v \leq 5b_1 + (b_1 - 3)/2$, либо
 - (iii) Γ не содержит почти хороших троек (u, w, z) со смежными вершинами w, z и $v \leq 6b_1 - 9 + 16/(b_1 + 2)$.

Для конкретных параметров аналогичный результат можно получить при более слабых предположениях.

Теорема 2. Пусть Γ — связный реберно регулярный граф с параметрами $k = 17$ и $b_1 = 6$. Тогда $v = 30$ и в Γ нет хороших и почти хороших пар вершин.

1. Предварительные результаты

В этом параграфе приведены некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1.1. Пусть Γ — реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) и $b_1 = k - \lambda - 1$. Если вершины u, w находятся на расстоянии 2 в Γ , то выполняются следующие утверждения:

- (1) степень любой вершины в μ -подграфе из Γ не меньше $k - 2b_1$;
- (2) вершина d имеет степень α в графе $[u] \cap [w]$ тогда и только тогда, когда $[d]$ содержит точно $\alpha - (k - 2b_1)$ вершин вне $u^\perp \cup w^\perp$;
- (3) если $\mu(u, w) = k - 2b_1 + 1$, то подграф $[u] \cap [w]$ является кликой и $[d] \subset u^\perp \cup w^\perp$ для любой вершины $d \in [u] \cap [w]$;
- (4) если $\Gamma - (u^\perp \cup w^\perp)$ содержит единственную вершину z , то $\mu(u, z) = \mu(w, z)$.

Доказательство. Пусть $d \in [u] \cap [w]$. Тогда $|[d] - [u]| = |[d] - [w]| = b_1$. Поэтому по крайней мере $k - 2b_1$ вершин из $[d]$ содержится в $[u] \cap [w]$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $d \in [u] \cap [w]$ и степень d в этом μ -подграфе равна α . Тогда $k = \alpha + 2b_1 - |[d] - (u^\perp \cup w^\perp)|$. Поэтому $[d]$ содержит $\alpha - (k - 2b_1)$ вершин вне $u^\perp \cup w^\perp$. Утверждение (2) доказано.

Утверждение (3) следует из (1), (2).

Пусть $\{z\} = \Gamma - (u^\perp \cup w^\perp)$. Так как число ребер между $[u] - [w]$ и $[w] - [u]$ равно $b_1|[u] - [w]| - \mu(u, z)$, то $\mu(u, z) = \mu(w, z)$.

Лемма 1.2. Пусть Γ — сильно регулярный граф, имеющий параметры (v, k, λ, μ) . Тогда либо $k = 2\mu$, $\lambda = \mu - 1$ (так называемый половинный случай), либо неглавные собственные значения $n - t$, $-t$ графа Γ — целые числа, где $n^2 = (\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)$, $n - \lambda + \mu = 2t$ и кратность $n - t$ равна $\frac{k(t-1)(k+t)}{\mu n}$. Далее, если t — целое число, большее 1, то $t - 1$ делит $k - \lambda - 1$ и

$$\mu = \lambda + 2 + (t - 1) - \frac{k - \lambda - 1}{t - 1}, \quad n = t - 1 + \frac{k - \lambda - 1}{t - 1}.$$

Доказательство. Это лемма 3.1 из [2].

Лемма 1.3. Пусть Γ — связный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) . Если $\lambda \geq k + 1/2 - \sqrt{2k + 2}$, то Γ — дополнительный граф для сильно регулярного графа Δ с $\mu(\Delta) \leq 2$.

Доказательство. Это второе утверждение теоремы 1.4.3 из [3].

Сильно регулярные графы с собственным значением -2 были классифицированы Зейделем [3, теорема 3.12.4]. Любой Зейделев граф — это либо полный многодольный граф $K_{r \times 2}$, либо решетчатый или треугольный граф, либо один из графов Шрикханде, Чанга, Петерсена, Клебша или Шлефли.

Лемма 1.4. Пусть Γ — сильно регулярный граф, имеющий целочисленные собственные значения, и $b_1 = k - \lambda - 1$. Тогда:

(1) если b_1 — простое число, то Γ является полным многодольным графом $K_{r \times (b_1+1)}$ или Зейделевым графом;

(2) если $b_1 = 2p$, p — простое число, то Γ либо является полным многодольным графом, либо имеет собственное значение -2 или -3 , либо является дополнительным к Зейделеву графу;

(3) если $b_1 = 4$, то Γ является полным многодольным графом $K_{r \times 5}$, 5×5 -решеткой, треугольным графом $T(7)$ или дополнительным графом к 4×4 -решетке, треугольному графу $T(6)$ или графу Клебша (заметим, что в половинном случае параметры графа равны $(17, 8, 3, 4)$ и он является графом Пэли).

Доказательство. Это лемма 1.4 из [4].

Лемма 1.5. Пусть Γ — реберно регулярный граф с $k \geq 3b_1 - 3$, $\mu(u, w) + \mu(u, z) = 2k - 4b_1 + 4$ для двух вершин w, z из $\Gamma_2(u)$, $\Delta = [u] \cap [w] \cap [z]$ и $\delta = |\Delta|$. Тогда выполняется одно из утверждений:

(1) вершины w, z несмежны, $\delta \leq 1$ и в случае $\delta = 1$ имеем $k = 3b_1 - 3$;

(2) Δ содержит две несмежные вершины, $\delta = 2$ и $k \leq 3b_1 - 1$;

(3) вершины w, z смежны, Δ является кликой и если $\delta > 1$, то либо

(i) подграф Δ содержит единственную вершину d , смежную с вершиной вне $u^\perp \cup [w] \cup [z]$, $\delta \leq 2$, $k \leq 3b_1 - 2$ и для $e \in \Delta(d)$ подграф $[d] \cup [e]$ содержит $[w] \cap [z] - [u]$, а $[d] \cap [e]$ содержится в $\{u, w, z\} \cup ([u] \cap ([w] \cup [z])) \cup ([w] \cap [z] - [u])$, либо

(ii) подграф Δ не содержит вершин, смежных с вершиной вне $u^\perp \cup [w] \cup [z]$, и для любых двух вершин $d, e \in \Delta$ подграф $[d] \cap [e]$ содержит $\lambda - 1 + \gamma$ вершин из $\{u, w, z\} \cup ([u] \cap ([w] \cup [z])) \cup ([w] \cap [z] - [u])$, где $\gamma = |[w] \cap [z] - ([d] \cup [e])|$.

Доказательство. Все утверждения леммы, кроме оценок для k , следуют из леммы 1.7 из [1].

Пусть вершины w, z смежны и d — вершина из Δ , смежная с вершиной вне $u^\perp \cup [w] \cup [z]$. Если $\delta = 1$, то $|[u] \cap [d]| \geq 2(k - 2b_1 + 1)$ и $k = 3b_1 - 3$. Аналогичные рассуждения применимы к случаю, когда вершины w, z не смежны и $d \in \Delta$.

Если $\delta = 2$, то $|[u] \cap [d]| \geq 1 + 2(k - 2b_1)$ и $k \leq 3b_1 - 2$.

Пусть Δ содержит две несмежные вершины a, b . Тогда $\delta = 2$, $|[u] \cap [d]| \geq 2(k - 2b_1)$ и $k \leq 3b_1 - 1$.

Лемма 1.6. Пусть Γ — реберно регулярный граф. Тогда:

- (1) если Γ содержит хорошую тройку (u, w, z) , то $|[u] \cap [w] \cap [z]| < 2$;
- (2) если $k = 3b_1 - 1$, $b_1 \leq 5$ и Γ содержит хорошую пару, то либо $b_1 = 1$ и Γ является n -угольником для $n \geq 5$, либо $b_1 = 2$ и Γ является графом икосаэдра;
- (3) если $k = 3b_1 - 1$, $b_1 \leq 6$ и Γ содержит почти хорошую пару, то $b_1 = 1$ и Γ — четырехугольник.

Доказательство. Утверждение (1) следует из лемм 4, 5 [5]. По лемме 2.1 из [1] если $b_1 \leq 4$ и Γ содержит хорошую пару, то выполняется заключение леммы. Пусть $b_1 = 5$. По теореме из [6] Γ является полным многодольным графом $K_{r \times 6}$, графом Шлефли или графом $\Omega_{2,3}$, где Ω — граф Клейна (единственный дистанционно регулярный локально семиугольный граф диаметра 3 на 24 вершинах, являющийся 3-накрытием 8-клики). Но в графе Шлефли $k = 16$, а граф $\Omega_{2,3}$ не содержит хороших пар. Утверждение (2) доказано.

Пусть $k = 3b_1 - 1$ и Γ содержит почти хорошую пару $\{u, w\}$. Если диаметр Γ больше 2, то по следствию из [7] Γ является многоугольником или графом икосаэдра и не содержит почти хороших пар. Значит, диаметр Γ равен 2, и если Γ — сильно регулярный граф, то он имеет собственное значение -2 .

Если $b_1 = 1$, то Γ — граф $K_{n \times 2}$. Так как $k = 3b_1 - 1$, то $n = 2$.

Если $b_1 = 2$, то ввиду предложения 1 из [4] Γ — 3×3 -решетка, треугольный граф $T(5)$ или граф Петерсена. В любом случае либо k четно, либо $k < 3b_1 - 1$.

Если $b_1 = 3$, то ввиду предложения 2 из [4] Γ — треугольный граф $T(6)$ или граф Клебша. В любом случае $\mu > b_1$.

Если $b_1 = 4$ и $k \geq 10$, то ввиду предложения 3 из [4] Γ является треугольным графом $T(7)$; противоречие с тем, что $k = 11$, а степень графа $T(7)$ равна 10.

Если $b_1 = 5$ и $k \geq 14$, то ввиду теоремы из [6] Γ является графом Шлефли или графом $\Omega_{2,3}$, где Ω — граф Клейна. Но в графе Шлефли $k = 16$, а граф $\Omega_{2,3}$ не содержит почти хороших пар.

Если $b_1 = 6$, то по предложению из [8] Γ не содержит почти хороших пар.

Лемма 1.7. Пусть Γ — реберно регулярный граф с $k = 3b_1 - 1$, $\mu(u, w) + \mu(u, z) = 2b_1 + 2$ для различных w, z из $\Gamma_2(u)$, $\Delta = [u] \cap [w] \cap [z]$ и $\delta = |\Delta|$. Если $\delta \geq 3$, то $b_1/2 + 2 \leq \delta \leq b_1 - 4$ и $b_1 \geq 12$.

Доказательство. Ввиду леммы 1.5 вершины w, z смежны и Δ является кликой, не содержащей вершин, смежных с вершиной вне $u^\perp \cup [w] \cup [z]$. Положим $\Sigma = [w] \cap [z] - [u]$.

Если $\delta \leq 2$, то либо $\delta = 2$, либо $\mu(u, w) = \mu(u, z) = b_1 + 1$ и $\delta = 1$.

Пусть $\delta \geq 3$. Покажем, что $\delta \geq b_1/2 + 2$. Для различных вершин a_i, a_j из Δ подграф $[a_i] \cap [a_j]$ содержит u, w, z , не менее $2b_1 - 2 - \delta$ вершин из $[u] \cap ([w] \cup [z])$ и не более $\delta - 3$ вершин из Σ . Допустим, что $\delta < b_1/2 + 2$. Докажем сначала утверждение

(а) $\delta = b_1/2 + 1$.

Пусть $\delta < b_1/2 + 1$. Тогда $b_1 \geq 7$, $|\Sigma| = \lambda - \delta > 3b_1/2 - 3$ и $|\Sigma - [a_1]| > b_1/2 - 1$ для любой вершины a_1 из Δ . Для различных вершин a_i, a_j из $\Delta - \{a_1\}$ подграф $[a_i] \cap [a_j]$ содержит более $3b_1/2 - 3$ вершин из $[u] \cap ([w] \cup [z])$ и менее $b_1/2 - 2$ вершин из Σ . С другой стороны,

$[a_i] \cap [a_j]$ содержит более $b_1/2 - 3$ вершин из Σ . Отсюда $b_1 = 2t + 1$, $\delta = t + 1$ и $[a_i] \cap [a_j]$ содержит точно $t - 2$ вершин из Σ . Кроме того, произвольная вершина a_1 из Δ смежна ровно с $b_1 - 2 = 2t - 1$ вершинами из Σ . Противоречие с тем, что $[a_i] \cap [a_j]$ содержит вершину из $[a_1] \cap \Sigma$. Утверждение (а) доказано. Докажем утверждение

(b) каждая вершина из Δ смежна с $b_1 - 2$ вершинами из Σ .

Ввиду утверждения (а) имеем $b_1 = 2t$, $\delta = t + 1$, $|\Sigma| = 3t - 3$ и для любых двух вершин a_i, a_j из Δ подграф $[a_i] \cap [a_j]$ содержит не менее $3t - 3$ вершин из $[u] \cap ([w] \cup [z])$ и не более $t - 2$ вершин из Σ .

Допустим, что $[a_1]$ содержит не более $2t - 3$ вершин из Σ . Тогда $[a_1]$ содержит точно $2t - 3$ вершин из Σ , $|\Sigma - [a_1]| = t$, $[a_i] \cap [a_j]$ содержит ровно $t - 2$ вершин из Σ и $|[a_i] \cap \Sigma| = t - 1$ для любых $a_i, a_j \in \Sigma - \{a_1\}$. Противоречие с тем, что $[a_i] \cap [a_j]$ содержит вершину из $[a_1] \cap \Sigma$. Докажем утверждение

(c) $\Sigma \subset [a_i] \cup [a_j]$ для любых различных вершин a_i, a_j из Δ .

Предположим, что две вершины a_1, a_2 из Δ не смежны с вершиной y из Σ . Ввиду леммы 1.5 подграф $[a_1] \cup [a_2]$ содержит $\Sigma - \{y\}$. Поэтому $\Sigma - \{y\}$ содержит по $t - 2$ вершин из $[a_1] - [a_2]$, $[a_2] - [a_1]$ и t вершин из $[a_1] \cap [a_2]$; противоречие.

Теперь число пар несмежных вершин (x, y) , где $x \in \Sigma$, $y \in \Delta$ равно $(t + 1)(t - 1)$, но не больше $3t - 3$, поэтому $1 \leq t \leq 2$; противоречие с леммой 1.6.

Итак, $\delta \geq b_1/2 + 2$.

Допустим, что $b_1 - 2 \leq \delta$. Тогда число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ равно $(3b_1 - 1)b_1$, но не меньше $(2b_1 - 6)(b_1 + 2) + (b_1 + 2)(b_1 + 1)$ и $b_1 \leq 5$; противоречие.

Пусть $\delta = b_1 - 3$. Тогда $b_1 \geq 10$ и число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ не меньше $(2b_1 - 8)(b_1 + 2) + (b_1 + 3)(b_1 + 1)$. В этом случае $\Gamma_2(u) \subset [w] \cup [z]$, $v = 6b_1 - 5$ и $b_1 \leq 13$. Если b_1 равно 10 или 12, то vk нечетно. Если $b_1 = 11$, то $vk\lambda$ не делится на 3. Поэтому $b_1 = 13$, число ребер между Δ и $[u] - ([w] \cup [z])$ не меньше 70 и некоторая вершина e из $[u] - ([w] \cup [z])$ смежна с 4 вершинами a_1, \dots, a_4 из Δ . Противоречие с тем, что для двух подходящих вершин a_i, a_j подграф $[a_i] \cap [a_j]$ содержит не менее двух вершин из $[u] - ([w] \cup [z])$.

Значит, $b_1/2 + 2 \leq \delta \leq b_1 - 4$ и $b_1 \geq 12$.

Лемма 1.8. Пусть выполнены условия леммы 1.7 и $\delta > 2$. Тогда каждая вершина из Δ смежна по крайней мере с $\delta - 3$ вершинами из $[u] - ([w] \cup [z])$ и выполняются следующие утверждения:

- (1) $b_1 \geq 13$;
- (2) в подграфе $[u] - ([w] \cup [z])$ нет вершин, смежных с 3 вершинами из Δ ;
- (3) $b_1 \geq 16$;
- (4) если каждая вершина из $[u] - ([w] \cup [z])$ смежна не более чем с 3 вершинами из Δ , то $b_1 \leq 15$.

Доказательство. Пусть $\delta > 2$. Заметим, что каждая вершина из Δ смежна не более чем с $2b_1 + 1 - \delta$ вершинами из $[u] \cap ([w] \cup [z])$ и по крайней мере с $\delta - 3$ вершинами из $[u] - ([w] \cup [z])$.

Пусть $b_1 = 12$. Тогда $\delta = 8$, $k = 35$, $\lambda = 22$ и v делится на 6. Поэтому $v = 30$ и $\Gamma_2(u) \subset [w] \cup [z]$. Так как число ребер между $[u] - ([w] \cup [z])$ и Δ не меньше 40, то $[u] - ([w] \cup [z])$ содержит не менее 6 вершин, смежных с тройками вершин из Δ . Пусть вершина e из $[u] - ([w] \cup [z])$ смежна с 3 вершинами a_1, a_2, a_3 из Δ . Если вершина a_1 смежна с 5 вершинами из $[u] - ([w] \cup [z])$, то $[a_1]$ содержит 8 вершин из Σ . Тогда $\Sigma - [a_1]$ содержится в $[a_2] \cup [a_3]$, поэтому $[a_2]$ и $[a_3]$ содержат по 10 вершин из Σ и по 7 вершин из $[u] - ([w] \cup [z])$. Поэтому число ребер между $[u] - ([w] \cup [z])$ и $\{a_1, a_2, a_3\}$ не меньше 18. Без ограничения общности $[a_1]$ содержит 2 вершины e, e' , смежные с тройками вершин из Δ . Тогда для отличной от a_1 вершины a_4 из $[e'] \cap \Delta$ подграф $[u] - ([w] \cup [z])$ содержит 2 вершины из $[a_2] \cap [a_4]$ или из $[a_3] \cap [a_4]$; противоречие. Утверждение (1) доказано.

Если некоторая вершина из $[u] - ([w] \cup [z])$ смежна с 4 вершинами из Δ , то $4(\delta - 4) \leq b_1 + \delta - 4$, поэтому $3b_1/2 + 6 \leq 3\delta \leq b_1 + 12$ и $b_1 \leq 12$; противоречие. Утверждение (2) доказано.

Пусть $b_1 = 13$. Тогда $\delta = 9$, $k = 38$ и $\lambda = 24$. Так как число ребер между $[u] - ([w] \cup [z])$ и Δ не меньше 54, то $[u] - ([w] \cup [z])$ содержит не менее 16 вершин, смежных с тройками вершин из Δ . Пусть вершина e из $[u] - ([w] \cup [z])$ смежна с 3 вершинами a_1, a_2, a_3 из Δ . Если вершина a_1 смежна с 6 вершинами из $[u] - ([w] \cup [z])$, то $[a_1]$ содержит 9 вершин из Σ . Тогда $\Sigma - [a_1]$ содержится в $[a_2] \cup [a_3]$, поэтому либо $[a_2]$ и $[a_3]$ содержат по 11 вершин из Σ и по 8 вершин из $[u] - ([w] \cup [z])$, либо $[a_2]$ содержит 11 вершин из Σ и 8 вершин из $[u] - ([w] \cup [z])$, а $[a_3]$ содержит 10 вершин из Σ и 7 вершин из $[u] - ([w] \cup [z])$. Но в первом случае число ребер между $\{a_1, a_2, a_3\}$ и $[u] - ([w] \cup [z] \cup \{e\})$ равно 19, а $|[u] - ([w] \cup [z] \cup \{e\})| = 18$; противоречие. Поэтому выполняется второй случай и число ребер между $[u] - ([w] \cup [z])$ и $\{a_1, a_2, a_3\}$ равно 21. Без ограничения общности $[a_1]$ содержит 2 вершины e, e' , смежные с тройками вершин из Δ . Тогда для отличной от a_1 вершины a_4 из $[e'] \cap \Delta$ подграф $[u] - ([w] \cup [z])$ содержит 2 вершины из $[a_2] \cap [a_4]$ или из $[a_3] \cap [a_4]$; противоречие.

Пусть $b_1 = 14$. Тогда $\delta \in \{9, 10\}$, $k = 41$, $\lambda = 26$ и v делится на 6. В случае $\delta = 10$ число ребер между $[u] - ([w] \cup [z])$ и Δ не меньше 70 и некоторая вершина из $[u] - ([w] \cup [z])$ смежна с 4 вершинами из Δ . Противоречие с утверждением (2). В случае $\delta = 9$ число ребер между $[u] - ([w] \cup [z])$ и Δ не меньше 54 и $[u] - ([w] \cup [z])$ содержит не менее 14 вершин, смежных с тройками вершин из Δ . Пусть вершина e из $[u] - ([w] \cup [z])$ смежна с 3 вершинами a_1, a_2, a_3 из Δ . Если вершина a_1 смежна с 7 вершинами из $[u] - ([w] \cup [z])$, то $[a_1]$ содержит 10 вершин из Σ . Тогда $\Sigma - [a_1]$ содержит 7 вершин из $[a_2] \cup [a_3]$, поэтому $[a_2]$ и $[a_3]$ содержат по 12 вершин из Σ и по 9 вершин из $[u] - ([w] \cup [z])$. Значит, число ребер между $[u] - ([w] \cup [z] \cup \{e\})$ и $\{a_1, a_2, a_3\}$ не меньше 22; противоречие с тем, что $|[u] - ([w] \cup [z])| = 19$.

Пусть $b_1 = 15$. Тогда $\delta \in \{10, 11\}$, $k = 44$, $\lambda = 28$ и v делится на 3. В случае $\delta = 10$ число ребер между $[u] - ([w] \cup [z])$ и Δ не меньше 70. В случае $\delta = 11$ число ребер между $[u] - ([w] \cup [z])$ и Δ не меньше 88. В любом случае некоторая вершина из $[u] - ([w] \cup [z])$ смежна с 4 вершинами из Δ . Противоречие с утверждением (2). Утверждение (3) доказано.

Если каждая вершина из $[u] - ([w] \cup [z])$ смежна не более чем с 3 вершинами из Δ , то $\delta(\delta - 3) \leq 3(b_1 + \delta - 3)$. Отсюда $\delta^2 - 6\delta - 3b_1 + 9 \leq 0$ и $\delta \leq 3 + \sqrt{3b_1}$, поэтому $b_1^2 - 16b_1 + 4 \leq 0$ и $b_1 \leq 15$. Лемма и теорема 1 доказаны.

2. Реберно регулярный граф с $k = 17, b_1 = 6$

В этом параграфе Γ является связным реберно регулярным графом с $k = 17, b_1 = 6$. По следствию из [8] граф Γ имеет диаметр 2 и не более чем $2k = 34$ вершин. Так как $\lambda = 10$, число vk четно и $vk\lambda$ делится на 6, то $v = 30$.

Лемма 2.1. Пусть вершины u, w несмежны и $\mu = |[u] \cap [w]|$. Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) $\mu \geq 6$ и $\Gamma = u^\perp \cup w^\perp$ в случае $\mu = 6$;
- (2) Γ не содержит почти хороших пар.

Доказательство. Так как $k - 2b_1 + 1 = 6$, то $\mu \geq 6$, причем в случае $\mu = 6$ получим $\Gamma = u^\perp \cup w^\perp$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $\mu = 7$, $z \in \Gamma - (u^\perp \cup w^\perp)$ и $[z]$ содержит l вершин из $[u] \cap [w]$. По лемме 1.1 имеем $\mu(u, z) = \mu(w, z)$ и $17 = 2\mu(u, z) - l$, поэтому l нечетно и $\mu(u, z) = (17 + l)/2$.

Пусть X_i — множество вершин из $([u] - [w]) \cup ([w] - [u])$, смежных точно с i вершинами из $[u] \cap [w]$, $x_i = |X_i|$. Заметим, что $x_0 = 0$, иначе для $a \in X_0 \cap ([w] - [u])$ имеем $\lambda(w, a) < 10$. Если $a \in X_1 \cap ([w] - [u])$, то либо $[a]$ содержит z и 5 вершин из $[u] - [w]$, либо $[a]$ содержит 6 вершин из $[u] - [w]$. В любом случае $l \neq 7$. Иначе для вершины $b \in [u] \cap [w] \cap [a]$ подграф $[b] - a^\perp$ содержит u и 6 вершин из $[u] \cap [w]$; противоречие.

Если $l = 1$, $y \in [u] \cap [w] \cap [z]$, то $[y] - z^\perp$ содержит u, w и 6 вершин из $[u] \cap [w]$; противоречие.

Если $l = 7$, то $\sum x_i = 20$, $\sum ix_i = 56$, $\sum \binom{i}{2} x_i = 42$ и $x_0 + \sum \binom{i-1}{2} x_i = 6$. Отсюда $x_i = 0$ для $i > 4$, $x_2 = 14 + 2x_4$, $x_3 = 6 - 3x_4$ и $(28 + 4x_4) + (18 - 9x_4) + 4x_4 = 56$; противоречие.

Пусть $[u] \cap [w] \cap [z] = \{y_1, \dots, y_l\}$. Тогда $[y_i] \cap [y_j]$ содержит u, w, z , 5 вершин из $[u] \cap [w]$ и 2 вершины из $([u] - [w]) \cup ([w] - [u])$.

Пусть $l = 3$. Тогда $[y_i] - z^\perp$ содержит u, w и 4 вершины из $[u] \cap [w]$, поэтому $[y_i] \cap ([w] - [u]) \subset [z]$. Отсюда $[y_1] \cap [y_2]$ содержит по вершине из $[u] - [w]$ и из $[w] - [u]$. Противоречие с тем, что $[y_3] \cap [u] - [w]$ содержит не менее двух вершин из $[y_1]$ или из $[y_2]$.

Пусть $l = 5$, $\Psi = ([u] - [w]) \cup ([w] - [u])$. Тогда $[y_i] \cap [z]$ содержит 4 вершины из $[u] \cap [w]$ и 6 вершин из Ψ . Если $[y_1] \cap [y_2]$ содержит не более одной вершины из Ψ , то $[y_3] \cap \Psi$ содержит не менее трех вершин из $[y_1]$ или из $[y_2]$. Значит, $[y_i] \cap [y_j]$ содержит точно две вершины из Ψ для любых различных $i, j \in \{1, \dots, 5\}$. Далее, $[y_3]$ содержит обе вершины из $\Psi - ([y_1] \cup [y_2])$ и не пересекает $\Psi \cap [y_1] \cap [y_2]$. Противоречие с тем, что $[y_5] \cap \Psi$ содержит обе вершины из $[y_3] \cap [y_4]$. Лемма доказана.

До конца параграфа будем предполагать, что Γ содержит хорошую пару вершин u, w . По предложению из [7] имеем $\mu(u, z) \geq 8$ для любой вершины $z \in [w] - [u]$. Пусть $\Delta = [u] \cap [w]$, X_i — множество вершин из $([u] - [w]) \cup ([w] - [u])$, смежных точно с i вершинами из Δ , $x_i = |X_i|$.

Лемма 2.2. *Выполняются следующие утверждения:*

- (1) $\sum x_i = 22$, $\sum ix_i = 60$, $\sum \binom{i}{2} x_i = 60$ и $x_0 = x_1 = 0$;
- (2) если $z \in X_2 \cap ([w] - [u])$, $\Delta \cap [z] = \{a, a'\}$, то $[a] \cap [u]$ содержит не менее 9 вершин из $[w] \cup [z]$, $[a] \cap [a']$ содержит u, w, z , 4 вершины из $[u] \cap [w]$ и не менее 2 вершин из $[u] \cap [z]$;
- (3) если вершина a из Δ смежна с двумя вершинами z_1, z_2 из $X_2 \cap ([w] - [u])$, то z_1, z_2 смежны, $[z_1] \cap [z_2]$ содержит a, w , 5 вершин из $[a] \cap [w] - [u]$ и 3 вершины из $[a] \cap [u] - [w]$ и $[a] \cap ([w] - [u])$ содержится в $z_1^\perp \cap z_2^\perp$.

Доказательство. Подсчитав число ребер между Δ и $([u] - [w]) \cup ([w] - [u])$, а также число 2-путей с началом и концом в Δ и средней вершиной в $([u] - [w]) \cup ([w] - [u])$, получим равенства $\sum x_i = 22$, $\sum ix_i = 60$, $\sum \binom{i}{2} x_i = 60$. Ввиду предложения из [6] имеем $x_0 = x_1 = 0$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $\mu(u, z) = 8$ для некоторой вершины $z \in [w] - [u]$. Тогда $\Delta \cap [z] = \{a, a'\}$ и подграф $[a] \cap [u]$ содержит 5 вершин из Δ и не менее 4 вершин из $[u] \cap [z]$. Далее, $[a] \cap [a']$ содержит u, w, z , 4 вершины из Δ и не менее 2 вершин из $[u] \cap [z]$. Утверждение (2) доказано.

Пусть вершина a из Δ смежна с 2 вершинами z_1, z_2 из $X_2 \cap ([w] - [u])$. Если $\Delta \cap [z_1] = \Delta \cap [z_2]$, то вершины z_1, z_2 смежны, $[z_1] \cap [z_2]$ содержит не менее 8 вершин из w^\perp и $[u] \cap [a]$ содержит не менее 2 вершин из $[z_2] - [z_1]$; противоречие с утверждением (2). Значит, $\Delta \cap [z_i] = \{a, a_i\}$ и вершины a_1, a_2 различны. Если вершины z_1, z_2 не смежны, то $[a] \cap [z_i]$ содержит 5 вершин из $[u] - [w]$ и не более 4 вершин из w^\perp . Значит, вершины z_1, z_2 смежны, $[z_1] \cap [z_2]$ содержит a, w , 5 вершин из $[w] - [u]$ и 3 вершины из $[u] - [w]$. Далее, $[a] \cap [u]$ содержит 5 вершин из Δ , 3 вершины из $[z_1] \cap [z_2] \cap ([u] - [w])$ и по вершине из $[z_1] - ([w] \cup [z_2])$, $[z_2] - ([w] \cup [z_1])$. Таким образом, $[a] \cap ([w] - [u])$ содержится в $z_1^\perp \cap z_2^\perp$.

Лемма 2.3. *Выполняется одно из следующих утверждений:*

- (1) $x_2 = 12$, $x_3 = 4$ и $x_4 = 6$;
- (2) $x_2 = 11$, $x_3 = 7$, $x_4 = 3$ и $x_5 = 1$;
- (3) $x_2 = x_3 = 10$, $x_4 = 0$ и $x_5 = 2$.

Доказательство. Ввиду леммы 2.2 любая вершина из Δ смежна не более чем с двумя вершинами из $X_2 \cap ([w] - [u])$.

Пусть $y \in X_i \cap ([w] - [u])$. Если $i = 6$, то $[w] - [u]$ содержит 6 вершин из X_2 и 4 из X_3 . Далее, любая вершина из Δ смежна точно с 2 вершинами из $X_2 \cap ([w] - [u])$. С другой стороны, вершина y не смежна с некоторой вершиной из $X_2 \cap ([w] - [u])$; противоречие с леммой 2.2. Значит, $x_6 = 0$.

Имеем $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 22$, $2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 60$ и $x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 10x_5 = 60$. Отсюда $x_2 = 2x_4 + 5x_5$, $x_3 = 22 - 3x_4 - 6x_5$ и $x_2 + 3x_3 = 60 - 6x_4 - 10x_5 = 66 - 7x_4 - 13x_5$,

поэтому $x_4 = 6 - 3x_5$. Таким образом, либо $x_2 = 12$, $x_3 = 4$ и $x_4 = 6$, либо $x_2 = 11$, $x_3 = 7$, $x_4 = 3$ и $x_5 = 1$, либо $x_2 = x_3 = 10$, $x_4 = 0$ и $x_5 = 2$.

Лемма 2.4. *Параметр x_5 меньше 2.*

Доказательство. Пусть $e \in X_5 \cap ([w] - [u])$, $e' \in X_5 \cap ([w] - [u])$. Предположим сначала, что вершины e, e' не смежны с вершиной a из Δ . Число ребер между $\Delta - \{a\}$ и $[a] - (\Delta \cup \{u, w\})$ равно 20, поэтому X_3 — регулярный 10-вершинный подграф степени 7 из $[a]$.

Если $z \in X_2 \cap [w]$, $[z] \cap \Delta = \{a_1, a_2\}$, то $e \in [z]$, иначе степени вершин a_i в графе $[u] \cap [z]$ равны 6 и $[a_1] \cap [a_2]$ содержит u, w, z и не менее 8 вершин из $[u]$. Поэтому $[e] \cap [w]$ содержит по 5 вершин из Δ и из X_2 . Так как $[a_1] \cap [a_2]$ содержит e, u, w, z , 4 вершины из Δ и 2 из $[z] \cap ([u] - [w])$, то $[z]$ содержит 4 вершины из $X_3 \cap [w]$, по 2 из $[a_1]$ и из $[a_2]$.

Напомним, что $\mu(a, e)$ или $\mu(a, e')$ больше 6. Без ограничения общности $\mu(a, e) \geq 8$. Тогда $[a] \cap [e]$ содержит w , пять вершин из Δ и вершину y из $X_3 \cap [u]$. Далее, степень y в графе $[a] \cap [e]$ не меньше 5, поэтому $[e]$ содержит $X_3 \cap [u]$ или 4-клику Y из $X_3 \cap [u]$. В первом случае некоторая вершина y из $X_3 \cap [u]$ смежна, по крайней мере, с 4 вершинами из $X_2 \cap [u]$, 3 из которых не смежны с e , и степень y в графе $[a] \cap [e]$ не меньше 8; противоречие. Так как число ребер между Y и $X_2 \cap [u]$ не меньше 15, то во втором случае некоторая вершина y из Y смежна, по крайней мере, с 4 вершинами из $X_2 \cap [u]$, 2 из которых не смежны с e , и степень y в графе $[a] \cap [e]$ не меньше 7; противоречие.

Значит, вершина e не смежна с вершиной a из Δ , e' не смежна с вершиной a' из Δ . Число ребер между $\Delta - \{a\}$ и $[a] - (\Delta \cup \{u, w\})$ равно 20, поэтому $[a]$ содержит e' , 7 вершин из X_3 и 2 из X_2 . Симметрично, $[a']$ содержит e , 7 вершин из X_3 и 2 из X_2 , поэтому $[a] \cap [a']$ содержит u, w и по 4 вершины из X_3 и из Δ . Положим $X'_2 = X_2 - ([a] \cup [a'])$.

Пусть $z \in X'_2$, для определенности, $z \in [w]$, $[z] \cap \Delta = \{a_1, a_2\}$. Ввиду леммы 2.2 подграф $[a_1] \cap [a_2]$ содержит u, w, z , 4 вершины из Δ и не менее 2 вершин из $[u] \cap [z] - [w]$. Отсюда $e \in [z]$ и $[a_1] \cap [a_2]$ содержит e, u, w, z , 4 вершины из Δ и точно 2 вершины из $[u] \cap [z] - [w]$, среди которых e' . Таким образом, $[e] \cap [e']$ содержит X'_2 , $[e'] - a^\perp = X'_2 = [e] - (a')^\perp$, и $[a] \cap [e']$ содержит u , 5 вершин из Δ и 4 вершины из $(X_2 - X'_2) \cup X_3$.

Число ребер между $\Delta - \{a, a'\}$ и X_2 равно $4 \cdot 1 + 6 \cdot 2$, поэтому каждая вершина a_i из $\Delta - \{a, a'\}$ смежна с 4 вершинами из X_2 и 4 из X_3 . По лемме 2.2 подграф $X_2 \cap [a_i]$ содержит по 2 вершины из $[u]$ и из $[w]$.

Пусть $[a] \cap X_2 = \{z_1, z_2\}$, $[z_i] \cap \Delta = \{a, a_i\}$. Так как $X'_2 = [e] - (a')^\perp$, то вершины z_1, z_2 не смежны с e . Допустим, что $z_1 \in [w]$. Тогда a_1 смежна с вершиной e , не лежащей в $u^\perp \cup z_1^\perp$, поэтому $[u] \cap [a_1] \subset [w] \cup [z_1]$ и $[u] \cap [z_1] - a_1^\perp$ содержит единственную вершину. Далее, вершина a_1 смежна с отличной от z_1 вершиной z из $X_2 \cap [w]$. Поэтому $[u] \cap [a_1] - [w]$ содержится в $[z_1]$ и содержит 4 вершины из $[z]$. Противоречие с тем, что вершины z, z_1 смежны и $[z] \cap [z_1]$ содержит 5 вершин из $[u]$ и не менее 6 вершин из $w^\perp - [u]$. Значит, $z_1, z_2 \in [u]$. Если вершина z_1 не смежна с e' , то $[a_1] \cap [z_1]$ содержит 5 вершин из $[w] - [u]$, в частности, $e \in [z_1]$; противоречие. Итак, $z_1, z_2 \in [e']$.

Пусть $[a'] \cap X_2 = \{z_3, z_4\}$, $[z_i] \cap \Delta = \{a', a_i\}$. Тогда $z_3, z_4 \in [w]$ и X'_2 содержит по 3 вершины из $[u]$ и из $[w]$, следовательно, $[u] \cap [e']$ содержится в $X_2 \cup \Delta$. Далее, $[e'] \cap [a]$ содержит u, z_1, z_2 , 4 вершины из Δ и 3 вершины из $[w] \cap X_3$. Так как $X'_2 = [e'] - a^\perp$, то $[e'] \cap [a] \cap X_3 \subset [a']$. Симметрично, $[e] \cap [u]$ содержит 3 вершины из $X_3 \cap [a] \cap [a']$. Противоречие с тем, что $|X_3 \cap [a] \cap [a']| = 4$.

Лемма 2.5. *Параметр x_5 равен 0.*

Доказательство. Из лемм 2.3, 2.4 следует, что $x_5 \leq 1$. Пусть $e \in X_5$, $a \in \Delta - [e]$ и $[a]$ содержит y_i вершин из X_i . Без ограничения общности $e \in [w] - [u]$. Число ребер между $\Delta - \{a\}$ и $[a] - (\Delta \cup \{u, w\})$ равно 20, поэтому $y_2 + y_3 + y_4 = 10$ и $y_2 + 2y_3 + 3y_4 = 20$ и $y_2 = y_4$. Но $x_4 = 3$, поэтому $y_2 \leq 3$. Так как число ребер между X_2 и $\Delta - \{a\}$ не больше 20, то $y_2 \geq 2$, причем в случае $y_2 = 2$ каждая вершина из $\Delta - \{a\}$ смежна точно с 4 вершинами из X_2 .

Пусть $z \in X_2 \cap ([w] - [e])$ и $[z] \cap \Delta = \{a_1, a_2\}$. Тогда $a \in [z]$, иначе степени вершин a_i в графе $[u] \cap [z]$ равны 6 и $[a_1] \cap [a_2]$ содержит u, w, z и не менее 8 вершин из $[u]$. Пусть, для определенности, $a = a_2$. Если a_1 смежна еще с одной вершиной z_1 из $X_2 \cap [w]$, то вершины z, z_1 смежны и $[z] \cap [z_1]$ содержит 5 вершин из $[u]$ и не менее 6 вершин из $w^\perp - [u]$; противоречие. Значит, $[a]$ и $[a_1]$ содержат по 3 вершины из X_2 , а каждая вершина из $\Delta - \{a, a_1\}$ смежна с 4 вершинами из X_2 . Поэтому $[e]$ содержит 4 вершины из $X_2 \cap [w]$ и $|X_2 \cap [w]| = 5$. Отсюда $[w] - [u]$ содержит e , 5 вершин из X_2 и 5 вершин из X_3 . Противоречие с тем, что $[a] \cap [a_1]$ содержит u, w, z , 4 вершины из Δ , 3 вершины из $[u] \cap [z] - [w]$ и 2 вершины из $(\{e\} \cup X_3) \cap [w]$.

Таким образом, $[w] \cap X_2$ содержится в $[e]$, $|X_2 \cap [w]| = 5$ и $[w] - [u]$ содержит 5 вершин из X_3 . Если $\mu(a, e) = 6$, то $u \in X_5([a] \cap [e])$ и, как показано выше, $[u] \cap [a] - \Delta \subset X_2([a] \cap [e])$; противоречие. Значит, $\mu(a, e) \geq 8$.

Допустим, что a смежна с 2 вершинами z_1, z_2 из $X_2 \cap [w]$. Положим $[z_i] \cap \Delta = \{a, a_i\}$ для $i = 1, 2$. По лемме 2.2 подграф $[z_1] \cap [z_2]$ содержит a, w, e , 3 вершины из $[a] \cap [u] - [w]$ и 3 вершины из $[a] \cap [w] - [u]$. Пусть a_1 смежна с двумя вершинами из $X_2 \cap [w]$. Тогда $[a] \cap [a_1]$ содержит 2 вершины из $[w] - [u]$, поэтому $[z_1]$ содержит 4 вершины из $X_3 \cap [w]$ и $[z_1] \cap [u] - [w]$ содержит 5 вершин из $[e] \cap [u] - [w]$. Пусть a_1 смежна с единственной вершиной из $X_2 \cap [w]$. Тогда $[a_1]$ содержит 3 вершины из $X_3 \cap [w]$. Если одна из вершин в $[a_1] \cap X_3 \cap [w]$ не смежна с z_1 , то $[a] \cap [a_1]$ содержит точно одну вершину из $[w] - [u]$. Если же $[a_1] \cap X_3 \cap [w]$ содержится в $[z_1]$, то точно одна вершина из $[a_1] \cap X_3 \cap [w]$ попадает в $[a]$. В любом случае $[z_1]$ содержит 5 вершин из $X_3 \cap [w]$. Поэтому $[z_1] \cap [u] - [w] = [e] \cap [u] - [w]$. Так как $[z_1] \cap [z_2]$ содержит a, e, w и 3 вершины из $X_3 \cap [w]$, то $[z_1] \cap [z_2]$ содержит 4 вершины из $[e] \cap [u] - [w]$. Противоречие с тем, что z_1, z_2 смежны с тройками вершин из $X_2 \cap [w]$ и $[z_1] \cap [z_2]$ содержит вершину из $X_2 \cap [w]$.

Допустим, что a не смежна с вершинами из $X_2 \cap [w]$. Для вершины z из $X_2 \cap [w]$ положим $[z] \cap \Delta = \{a_1, a_2\}$. Тогда $[a_1] \cap [a_2]$ содержит z, e и 2 вершины из $[u] - [w]$, поэтому $[z]$ содержит не менее 4 вершин из $X_3 \cap [w]$. Положим $[a_i] \cap X_2 \cap [w] = \{z, z_i\}$ для $i = 1, 2$. Если $[z]$ содержит 5 вершин из $X_3 \cap [w]$, то $[z] \cap [u] - [w]$ содержит 1 вершину из $[a_1] - [e]$, 3 из $[a_1] \cap [e]$ и 2 вершины из $[e] - [a_1]$. Аналогично, $[z_1] \cap [u] - [w]$ содержит 2 вершины из $[a_1] - [e]$, 2 из $[a_1] \cap [e]$ и 2 вершины из $[e] - [a_1]$. Противоречие с тем, что $[z] \cap [z_1]$ содержит a, e, w , 4 вершины из $X_3 \cap [w]$ и 4 вершины из $[u] - [w]$. Значит, любая вершина из $X_2 \cap [w]$ смежна точно с 4 вершинами из $X_3 \cap [w]$ и с 3 из $X_2 \cap [w]$; противоречие с тем, что число ребер в $X_2 \cap [w]$ равно $15/2$.

Итак, a смежна точно с одной вершиной z из $X_2 \cap [w]$. Тогда $[a] \cap [w]$ содержит 4 вершины из X_3 . Положим $X_3 \cap [w] - [a] = \{c\}$. Если вершина z смежна с c , то степень z в графе $[a] \cap [e]$ равна 6, поэтому $[a] \cap [e] \cap [z]$ содержит w , вершину из Δ и 4 вершины из $[u] - [w]$. В этом случае $\mu(a, e) = 11$ и $\mu(x, e) = 8$ для любой вершины x из $\Gamma_2(e) - \{a, u\}$. Отсюда $\Gamma - (c^\perp \cup e^\perp) = \{a, u\}$ и $\mu(a, c) + \mu(u, c) = 22$. Значит, $\mu(a, c) = 13$ и $[a] \cap [c]$ содержит w, z , 2 вершины из Δ , 4 вершины из $X_3 \cap [w]$ и 5 из $[u] - [w]$. Противоречие с тем, что $[c] \cap [e]$ содержит w , 3 вершины из Δ , 3 вершины из $X_2 \cap [w]$ и не менее 4 вершин из $[u] - [w]$.

Таким образом, вершина z не смежна с c , степень z в графе $[a] \cap [e]$ равна 5, поэтому $[a] \cap [e] \cap [z]$ содержит w , вершину из Δ и 3 вершины из $[u] - [w]$. В этом случае $\mu(a, e) = 10$. Если $\mu(c, e) = 8$, то $\Gamma - (c^\perp \cup e^\perp) = \{a, u\}$ и $\mu(a, c) + \mu(u, c) = 21$. Поэтому $\mu(a, c) = 12$ и $[a] \cap [c]$ содержит w , 2 вершины из Δ , 4 вершины из $X_3 \cap [w]$ и 5 из $[u] - [w]$. Противоречие с тем, что $[c] \cap [e]$ содержит w , 3 вершины из Δ , 3 вершины из $X_2 \cap [w]$ и не менее 3 вершин из $[u] - [w]$. Значит, $\mu(c, e) = 9$ и $\mu(x, e) = 8$ для любой вершины x из $\Gamma_2(e) - \{a, c, u\}$. Так как степень a в графе $[u] \cap [z]$ не больше 6, то $\Gamma - (u^\perp \cup z^\perp)$ содержит c и вершину z_1 из $X_2 \cap [w]$.

Если $\Gamma - (c^\perp \cup e^\perp)$ содержит вершину y из $[w] - [u]$, то $[c] \cap [w]$ содержит по 3 вершины из Δ , $X_3 \cap [w]$ и 4 из $X_2 \cap [w]$. Так как $\Gamma - (y^\perp \cup e^\perp) = \{u, c\}$, то $\mu(u, e) = \mu(y, c) = 11$. Далее, $\Gamma - (c^\perp \cup u^\perp) = \{e, y, z\}$, $\mu(u, e) = \mu(y, c) = 11$ и $\mu(u, y) = \mu(e, c) = 9$, поэтому $\mu(u, z) = \mu(z, c) = 8$. Отсюда $[c] \cap [z]$ содержит w , по 3 вершины из $X_2 \cap [w]$, $X_3 \cap [w]$ и вершину из $[u] - [w]$. Аналогично, $[c] \cap [e]$ содержит w , 3 вершины из Δ , 4 из $X_2 \cap [w]$, и вершину из $[u] - [w]$. Теперь $[u] - ([w] \cup [c])$ содержится в $[e] \cap [z]$, а подграф $[a] \cap [c]$ содержит w и по 3 вершины из Δ , $X_3 \cap [w]$ и из $[u] - [w]$.

Имеем $\Gamma - (c^\perp \cup e^\perp) = \{a, y, u\}$, $\mu(a, e) = \mu(a, c) = 10$, $\mu(u, e) = 11$, $\mu(u, c) = 9$ и $\mu(e, y) = 8$, поэтому $\mu(y, c) = 10$. С другой стороны, $\Gamma - (y^\perp \cup e^\perp) = \{u, c\}$, $\mu(u, e) = 11$ и $\mu(u, y) = \mu(e, c) = 9$, поэтому $\mu(y, c) = 11$; противоречие.

Если $\Gamma - (c^\perp \cup e^\perp)$ содержит вершину f из $[u] - [w]$, то $[c] \cap [w]$ содержит по 3 вершины из Δ , $X_2 \cap [w]$ и 4 из $X_3 \cap [w]$. В этом случае $[c] \cap [e]$ содержит w , точно 2 вершины из $[u] - [w]$, 3 вершины из Δ и 3 из $X_2 \cap [w]$. Так как $\mu(u, c) = 9$, $\mu(u, e) = 11$, то $\mu(f, c) - \mu(f, e) = 2$. Пусть $[f]$ содержит δ вершин из $[c] \cap [e]$. Если $\mu(f, e) = 8$, то $[f]$ содержит $8 - \delta$ вершин из $[e] - [c]$ и $10 - \delta$ вершин из $[c] - [e]$. Противоречие с тем, что тогда $[f]$ содержит $18 - \delta$ вершин из $[c] \cup [e]$ и не более 2 вершин из $\Gamma - (c^\perp \cup e^\perp)$. Значит, $\mu(f, e) = 9$, $[f]$ содержит $9 - \delta$ вершин из $[e] - [c]$ и $11 - \delta$ вершин из $[c] - [e]$. Таким образом, $[f]$ содержит $20 - \delta$ вершин из $[c] \cup [e]$ и $1 + \delta$ вершин из $\{a, u\}$. Противоречие с тем, что $|[c] - [e]| = 8$, а $[f]$ содержит не менее 10 вершин из $[c] - [e]$.

Лемма 2.6. *Параметр x_5 не равен 0.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_5 = 0$. Тогда $x_2 = 12$, $x_3 = 4$, $x_4 = 6$ и $[w] - [u]$ содержит 6 вершин из X_2 , 2 вершины из X_3 и 3 из X_4 .

Пусть $z \in X_2 \cap [w]$, $\Delta \cap [z] = \{a_1, a_2\}$. Тогда $[a_i] \cap X_2 \cap [w] = \{z, z_i\}$ и по лемме 2.2 подграф $[a_i]$ содержит u, w , 5 вершин из Δ , 3 вершины из $([u] - [w]) \cap [z] \cap [z_i]$, по одной вершине из $([u] - [w]) \cap ([z] - [z_i])$ и из $([u] - [w]) \cap ([z_i] - [z])$, и 5 вершин из $([w] - [u]) \cap [z] \cap [z_i]$. Поэтому $[z] \cap [w] - [u]$ содержит z_1, z_2 , вершину из $[a_1] \cap [a_2]$, по 2 вершины из $[a_1] - [a_2]$ и из $[a_2] - [a_1]$ и вершину y вне $[a_1] \cup [a_2]$. Отсюда $[z] \cap [z_1] \cap [w] - [u]$ содержит 3 вершины из $[a_1]$, а также z_2 и y . Таким образом, либо $\Delta \cap [z_1] = \{a_1, a_3\}$, $\Delta \cap [z_2] = \{a_2, a_4\}$ и $\Delta \cap [y] = \{a_3, a_4\}$, либо $\Delta \cap [z_1] = \{a_1, a_3\}$, $\Delta \cap [z_2] = \{a_2, a_3\}$ и $y \notin X_2$. Но в первом случае степени вершин из $X_2 \cap [w] - \{z, z_1, z_2, y\}$ в графе $X_2 \cap [w]$ не больше 1; противоречие. Так как вершина y не смежна ни с одной вершиной из $\{a_1, \dots, a_3\}$, то $y \in X_3$. Аналогично, $X_2 \cap [w] - \{z, z_1, z_2\}$ является 3-кликкой из окрестности некоторой вершины y' из X_3 . Противоречие с тем, что вершина x из $X_4 \cap [w]$ не смежна с вершинами из $X_2 \cap [w]$ и $|[x] \cap [w]| \leq 9$. Лемма доказана.

Из лемм 2.5 и 2.6 следует теорема 2.

3. Хорошие пары в графах с $k = 3b_1 - 1$

В этом параграфе Γ является связным реберно регулярным графом с параметрами (v, k, λ) и $k = 3b_1 - 1$. По следствию из [8] граф Γ является многоугольником, графом икосаэдра или графом диаметра 2 с не более чем $2k$ -вершинами. Если Γ является n -угольником для $n \geq 5$ или графом икосаэдра, то любая пара вершин, находящихся на расстоянии 2 друг от друга, является хорошей.

Лемма 3.1. *Пусть w, z — смежные вершины из $\Gamma_2(u)$, $\mu(u, w) = b_1$ и $\mu(u, z) = b_1 + 1$. Тогда $[u] \cap [w] \cap [z]$ содержит единственную вершину a , $[w] - ([u] \cup z^\perp)$ содержит единственную вершину z^* , $[a] \cap [u]$ содержит по $b_1 - 1$ вершин из $[w]$ и из $[z]$, и $[a] - u^\perp$ содержит $b_1 - 2$ вершин из $[w] \cap [z]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 1.6 подграф $[u] \cap [w] \cap [z]$ содержит единственную вершину a , $[a] \cap [u]$ содержит по $b_1 - 1$ вершин из $[w]$ и из $[z]$. Так как $[w] - z^\perp$ содержит $b_1 - 1$ вершин из $[u]$, то $[w] - ([u] \cup z^\perp)$ содержит единственную вершину z^* . Так как степень a в графе $[u] \cap [z]$ равна $b_1 - 1$, то $[a] - u^\perp$ содержит $b_1 - 2$ вершин из $[w] \cap [z]$. Лемма доказана.

В леммах 3.2, 3.3 будем предполагать, что диаметр Γ равен 2, и для некоторой вершины $u \in \Gamma$ подграф $\Gamma_2(u)$ содержит две вершины w, z , образующие хорошие пары с u .

Лемма 3.2. *Пусть вершины w, z смежны. Тогда $[w] \cap [z]$ не пересекает $[u]$, $\Gamma_2(u) = \{w, z\} \cup ([w] \cap [z])$, $b_1(b_1 - 1)$ делится на 3 и $\mu(u, y) \geq b_1 + 3$ для любой вершины y из $[w] \cap [z]$.*

Доказательство. Допустим, что $[w] \cap [z]$ пересекает $[u]$. По лемме 1.6 подграф $[u] \cap [w] \cap [z]$ содержит единственную вершину a , $[a] \cap [u]$ содержит по $b_1 - 1$ вершин из $[w]$ и из $[z]$.

Если $\Gamma_2(u)$ не содержится в $[w] \cup [z]$, то для $x \in \Gamma_2(u) - ([w] \cup [z])$ получим $\mu(a, x) \leq b_1 - 2$; противоречие. Поэтому $\Gamma_2(u) \subset [w] \cup [z]$, причем $\Gamma_2(u)$ содержит единственную вершину w^* вне w^\perp и единственную вершину z^* вне z^\perp . Итак, $v = 5b_1 + 1$, $\lambda = 2b_1 - 2$, поэтому $b_1 - 1$ делится на 3.

По лемме 1.1 имеем $\mu(u, w^*) = \mu(w, w^*)$. Пусть $[w^*]$ содержит α вершин из $[u] \cap [z]$.

Если вершины w^*, z^* смежны, то $[w^*]$ содержит $b_1 - 1$ вершин из $[u] - ([w] \cup [z])$ и $\mu(u, w^*) = \alpha + b_1 - 1$. В этом случае $[w] \cap [w^*]$ содержит z, z^* и $\alpha + b_1 - 3$ вершин из $[w] \cap [z]$, поэтому $\alpha + (\alpha + b_1 - 3) = 2b_1 - 2$ и $\alpha = (b_1 + 1)/2$. Если вершины w^*, z^* не смежны с некоторой вершиной из $[u] - ([w] \cup [z])$, то $[w^*] - (z^*)^\perp$ содержит $z, (b_1 + 1)/2$ вершин из $[u] \cap [z]$ и $(b_1 - 3)/2$ вершин из $[w] \cap [z] - \{d\}$. Противоречие с тем, что $[w^*] \cap [z^*]$ содержит $b_1 - 1$ вершин из $[u]$ и b_1 вершин из $[w] \cap [z]$. Если вершины w^*, z^* несмежны с разными вершинами из $[u] - ([w] \cup [z])$, то $[w^*] - (z^*)^\perp$ содержит z , вершину из $[u] - ([w] \cup [z])$, $(b_1 + 1)/2$ вершин из $[u] \cap [z]$ и $(b_1 - 5)/2$ вершин из $[w] \cap [z] - \{d\}$. Противоречие с тем, что $[w^*] \cap [z^*]$ содержит $b_1 - 2$ вершин из $[u]$ и $b_1 + 2$ вершин из $[w] \cap [z]$.

Значит, вершины w^*, z^* не смежны. Поэтому $[w^*]$ содержит b_1 вершин из $[u] - ([w] \cup [z])$ и $\mu(u, w^*) = \alpha + b_1$. В этом случае $[w] \cap [w^*]$ содержит z и $\alpha + b_1 - 1$ вершин из $[w] \cap [z]$, поэтому $\alpha + (\alpha + b_1 - 1) = 2b_1 - 2$ и $\alpha = (b_1 - 1)/2$. По лемме 1.1 подграф $[u] - ([w] \cup [z])$ является b_1 -кликкой.

Пусть $d \in [w] \cap [z] - \{a\}$ и $[d]$ содержит γ вершин из $[u] - ([w] \cup [z])$.

Если $d \in [w^*] \cap [z^*]$, то $[d]$ содержит по $b_1 - 1 - \gamma$ вершин из $[u] \cap [w] - \{a\}$, $[u] \cap [z] - \{a\}$. В случае, когда вершины a, d смежны, подграф $[a] - d^\perp$ содержит $2\gamma + 1$ вершин из u^\perp и $b_1 - 2\gamma - 1$ вершин из $[w] \cap [z] - \{a, d\}$, подграф $[d] - a^\perp$ содержит w^*, z^* , γ вершин из $[u]$ и $b_1 - 2 - \gamma$ вершин из $[w] \cap [z] - \{a, d\}$. Поэтому $[w] \cap [z] - \{a\}$ содержит $d, b_1 - 2\gamma - 1$ вершин из $[a] - d^\perp$, $b_1 - 2 - \gamma$ вершин из $[d] - a^\perp$ и $3\gamma - 1$ вершин из $[a] \cap [d]$. В итоге $[a] \cap [d]$ содержит $w, z, 2(b_1 - \gamma - 1)$ вершин из $[u] \cap ([w] \cup [z])$ и $3\gamma - 1$ вершин из $[w] \cap [z]$; противоречие. Таким образом, $[w^*] \cap [z^*]$ не пересекает $[a] \cap [w] \cap [z]$.

С другой стороны, $[w^*] \cap [z^*]$ содержит не менее $(3b_1 - 3) - (2b_1 - 3) = b_1$ вершин из $[w] \cap [z] - \{a\}$, $[a]$ содержит $b_1 - 2$ вершин из $[w] \cap [z] - \{a\}$, $|[w] \cap [z] - \{a\}| = 2b_1 - 3$ и $[w^*] \cap [z^*]$ пересекает $[a] \cap [w] \cap [z]$; противоречие.

Значит, $[u] \cap [z]$ не пересекает $[w]$. Тогда $[w] - [z]$ содержит b_1 вершин из $[u]$, поэтому $\Gamma_2(u) = \{w, z\} \cup ([w] \cap [z])$. Отсюда $v = 5b_1$ и $b_1(b_1 - 1)$ делится на 3.

Пусть $y \in [w] \cap [z]$. Если $\mu(u, y) = b_1$, то, как показано выше, подграф $[u] \cap [y]$ не пересекает $[w]$ и $[z]$; противоречие. Если $\mu(u, y) = b_1 + 1$, то ввиду леммы 3.1 подграф $[u] \cap [y]$ содержит вершину d из $[w]$, вершину e из $[z]$ и $b_1 - 1$ вершин из $[u] - ([w] \cup [z])$. Подграф $[u] \cap [d]$ содержит по $b_1 - 1$ вершин из $[w]$ и из $[u] - [w]$, поэтому $[d] \cap [u] \cap [z] \subset \{e\}$ и $\mu(d, z) \leq b_1 + 1$. Далее, $\Gamma_2(u) - y^\perp$ содержит единственную вершину y^* , причем по лемме 1.1 имеем $\mu(u, y^*) = \mu(y, y^*)$. Заметим, что $[d] - y^\perp$ содержит u и $b_1 - 1$ вершин из $[u] \cap [w]$, поэтому вершины d, e не смежны с y^* . Если $[y^*]$ содержит β вершин из $[u] - ([w] \cup [z])$, то $[y^*]$ содержит по $b_1 - \beta$ вершин из $[u] \cap [w]$ и из $[u] \cap [z]$, в частности, $\mu(u, y^*) = 2b_1 - \beta$. Далее, $[w] \cap [y^*]$ содержит $z, b_1 - \beta$ вершин из $[u]$ и $b_1 + \beta - 3$ вершин из $[w] \cap [z]$. Теперь $\mu(y, y^*) = 2 + \beta + (b_1 - 3 + \beta)$ и $b_1 + 1 = 3\beta$; противоречие с тем, что $b_1(b_1 - 1)$ делится на 3.

Если $\mu(u, y) = b_1 + 2$, то ввиду леммы 1.7 подграф $[u] \cap [y]$ содержит либо по 2 вершины из $[w]$ и из $[z]$, либо не менее $b_1/2 + 2$ вершин в одном из подграфов $[w], [z]$ и 2 вершины в другом. Допустим, что $[u] \cap [y]$ содержит 2 вершины из $[z]$ и $\delta \geq b_1/2 + 2$. Тогда $[w] \cap [y]$ содержит вершину z , несмежную с вершинами из $[u] \cap [w] \cap [y]$. Ввиду теоремы 1 из [9] получим $b_1/2 + 2 \leq \delta \leq 3$ и $b_1 \leq 2$; противоречие.

Итак, $[u] \cap [w] \cap [y] = \{a_1, a_2\}$ и $[u] \cap [z] \cap [y] = \{c_1, c_2\}$. Положим $[w] \cap [z] - y^\perp = \{y', y''\}$ и $\Sigma = [w] \cap [z] \cap [y]$. Тогда $|\Sigma| = 2b_1 - 5$, $[u] \cap [a_i]$ содержит $b_1 - 1$ вершин из $[u] \cap [w]$ и не менее

$b_1 - 2$ вершин из $[u] \cap [y] - [w]$, а $[a_1] \cap [a_2]$ содержит u, w, y , $b_1 - 2$ вершин из $[u] \cap [w]$ и не менее $b_1 - 4$ вершин из $[u] \cap [y] - [w]$. Если a_1 смежна с вершиной из $\{y', y''\}$, то $[u] \cap [a_1]$ содержит по $b_1 - 1$ вершин из $[u] \cap [w]$ и из $[u] \cap [y] - [w]$, а $[a_1] \cap [a_2]$ содержит u, w, y , $b_1 - 2$ вершин из $[u] \cap [w]$ и $b_1 - 3$ вершин из $[u] \cap [y] - [w]$, поэтому a_2 не смежна ни с одной вершиной из $\{y', y''\}$. Если же a_1 и a_2 не смежны ни с одной вершиной из $\{y', y''\}$, то $[a_1] \cap [a_2]$ содержит u, w, y , $b_1 - 2$ вершин из $[u] \cap [w]$, $b_1 - 4$ вершин из $[u] \cap [y] - [w]$ и точно одну вершину из Σ .

Пусть a_i смежна с β_i вершинами из $\{c_1, c_2\}$. Если $\beta_i = 0$, то $\mu(a_i, z) \leq b_1 + 1$.

Допустим, что $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Так как $[a_1] \cap [a_2] \cap [z]$ содержит w, y , то $\mu(a_1, z) = \mu(a_2, z) = b_1 + 1$. Далее, $[a_1] \cap [a_2]$ содержит вершину u , несмежную с вершинами из $[a_1] \cap [a_2] \cap [z]$, и по теореме 1 из [9] имеем $|[a_1] \cap [a_2] \cap [z]| \leq 3$, причем в случае $|[a_1] \cap [a_2] \cap [z]| = 3$ имеем $b_1 = 6, k = 17$. Противоречие с предложением. Итак, $[a_1] \cap [a_2] \cap [z] = \{w, y\}$ и $[w] \cap [y]$ содержит a_1, a_2, z и по $b_1 - 2$ вершин из $[a_1] \cap [z]$ и из $[a_2] \cap [z]$; противоречие.

Пусть вершина a_1 смежна с вершиной y' . Тогда $[a_1]$ содержит вершину из $\{c_1, c_2\}$ и $\mu(a_1, z) \leq b_1 + 2$. Если $[a_1]$ содержит $\{c_1, c_2\}$, то $\mu(a_1, z) = b_1 + 2$ и вершина y' смежна с одной из вершин c_1, c_2 , скажем с c_1 . Тогда Σ содержит $b_1 - 3$ вершин из $[c_1]$ и $b_1 - 2$ вершин из $[c_2]$. Далее, $[a_1] \cap [c_1]$ содержит u, y, y', a_2, c_2 и $b_1 - 4$ вершин из Σ . Противоречие с тем, что $[a_1] \cap [c_2]$ содержит u, y, c_1 , не более одной вершины из Σ и не более $b_1 - 3$ вершин из $[u] \cap [y] - \{a_1, c_1, c_2\}$. Значит, $[a_1]$ содержит точно одну вершину из $\{c_1, c_2\}$, скажем c_1 . Тогда $\mu(a_1, z) = b_1 + 1$ и вершина y' смежна с c_1 . Далее, $[a_1] \cap [c_1]$ содержит u, y, y' и $b_1 - 3$ вершин из Σ . Противоречие с тем, что $[a_1] \cap [c_2]$ не пересекает Σ и содержит u, y, a_2, c_1 и не более $b_1 - 3$ вершин из $[u] \cap [y] - \{a_1, c_1, c_2\}$.

Значит, любая из вершин a_1, a_2, c_1, c_2 не смежна ни с одной вершиной из $\{y', y''\}$. Поэтому Σ содержит единственную вершину из $[c_1] \cap [c_2]$. Если $a_1 \in [c_1] \cap [c_2]$, то $[a_1] \cap [c_1] \cap [z]$ содержит y не более 2 вершин из $[u] \cap [z]$ и не менее $b_1 - 4$ вершин из Σ . Аналогично, $[a_1] \cap [c_2] \cap [z]$ содержит не менее $b_1 - 4$ вершин из Σ , поэтому $2(b_1 - 4) - (b_1 - 2) \leq 1$ и $b_1 \leq 7$. Отсюда $b_1 = 7, k = 20, \lambda = 12$ и $[a_1] \cap [z]$ содержит вершину из $[u] - [y]$. Далее, a_2 смежна с одной из вершин c_1, c_2 , скажем с c_1 . Тогда $[a_1] \cap [c_1]$ содержит u, y , по 2 вершины из $[u] \cap [w]$, $[u] \cap [z]$, 3 вершины из Σ и 3 вершины из $[u] \cap [y] - ([w] \cup [z])$, поэтому $[u] \cap [y] - a_1^\perp = [u] \cap [y] - c_1^\perp$. Противоречие с тем, что $[a_1] \cap [c_2]$ содержит u, y , 2 вершины из $[u] \cap [z]$, 3 вершины из Σ и не более 3 вершин из $([u] \cap [y] - ([w] \cup [z])) \cup ([u] \cap [w])$.

Итак, $[a_i]$ не содержит $\{c_1, c_2\}$ и $[c_j]$ не содержит $\{a_1, a_2\}$. Без ограничения общности вершины a_1, c_1 смежны и вершины a_2, c_2 смежны. Пусть $\mu(a_1, z) = \mu(a_2, z) = b_1 + 1$. Тогда (z, a_1, a_2) является почти хорошей тройкой и $[a_1] \cap [a_2] \cap [z] = \{w, y, x\}$ для некоторой вершины x из Σ ; противоречие с леммой 1.7. Теперь можно считать, что $\mu(a_1, z) = b_1 + 2$. Тогда (z, u, a_1) является почти хорошей тройкой и $[u] \cap [a_1] \cap [z] = \{c_1, c_3\}$ для некоторой вершины c_3 из $[u] \cap [z]$. Далее, $[c_1] \cap [c_3]$ содержит u, a_1, z , $b_1 - 2$ вершин из $[u] \cap [z]$ и $b_1 - 3$ вершин из $[a_1] \cap [z]$, поэтому $[c_1] \cap [c_3]$ не пересекает Σ и вершина c_3 смежна с a_2 . Противоречие с тем, что $[a_1] \cap [a_2]$ содержит u, w, y, c_3 , $b_1 - 2$ вершин из $[u] \cap [w]$, вершину из Σ и не менее $b_1 - 4$ вершин из $[u] \cap [y] - ([w] \cup [z])$.

Лемма 3.3. Пусть вершины w, z не смежны и $\mu = \mu(w, z)$. Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) $\Gamma_2(u) \subset w^\perp \cup z^\perp$, $|\Gamma_2(u)| = 4b_1 - \mu$ и $(b_1 - 1)(\mu - b_1)$ делится на 3;
- (2) если $\mu(u, y) \leq b_1 + 2$ для некоторой вершины $y \in \Gamma_2(u) - \{w, z\}$, то $\mu(u, y) = b_1 + 2$, $y \notin [w] \cap [z]$, $b_1 + 8 \leq \mu \leq 3b_1/2 - 1$ и $b_1 \geq 18$;
- (3) $b_1 + 8 \leq \mu \leq 2b_1 - 3$ и $b_1 \geq 13$.

Доказательство. Так как диаметр Γ равен 2, то $|[w] - ([u] \cup [z])| = |[z] - ([u] \cup [w])| = 2b_1 - 1 - \mu$ и $|\Gamma_2(u) \cap (w^\perp \cup z^\perp)| = 4b_1 - \mu$. Если $\Gamma_2(u) - (w^\perp \cup z^\perp)$ содержит вершину x , то $\mu(u, x) \leq b_1 - 1$; противоречие.

Значит, $\Gamma_2(u) \subset w^\perp \cup z^\perp$. Поэтому $|\Gamma_2(u)| = 4b_1 - \mu$ и $(b_1 - 1)(\mu - b_1)$ делится на 3. Если $[z] \subset [w] \cup [u]$, то $\mu = 2b_1 - 1$, $|\Gamma - (u^\perp \cup w^\perp)| = 1$ и по лемме 1.1 имеем $\mu(u, z) = \mu$. Отсюда $b_1 = 1$ и Γ является 5-угольником; противоречие с тем, что вершины w, z не смежны.

Пусть $\mu = 2b_1 - 2$. Тогда $[w] - ([u] \cup [z])$ содержит единственную вершину z^* и $[z] - ([u] \cup [w])$ содержит единственную вершину w^* . Далее, $[z^*] - w^\perp$ содержит вершину w^* и все $b_1 - 1$ вершин из $[u] - ([w] \cup [z])$. Если $[w^*]$ содержит α вершин из $[u] \cap [z]$, то число ребер между $[u] - [w]$ и $[w] \cap [z]$ равно $(2b_1 - 1)(b_1 - 2) + (b_1 - \alpha)$. С другой стороны, вершина x из $[w] \cap [z]$ смежна с $b_1 - 2$ вершинами из $[u] - [w]$, если x смежна с z^* ; смежна с $b_1 - 1$ вершинами из $[u] - [w]$, если x не смежна с z^* , поэтому указанное число ребер равно $(2b_1 - 2)(b_1 - 2) + \alpha$. Отсюда $\alpha = b_1 - 1$. Симметрично, $[z^*]$ содержит по $b_1 - 1$ вершин из $[u] \cap [w]$ и из $[w] \cap [z]$, в частности, пары w, w^* и z, z^* являются хорошими. Положим $\Sigma = [w] \cap [z] \cap [w^*]$, $\{a\} = [u] \cap [z] - [w^*]$, $\{c\} = [u] \cap [w] - [z^*]$. Так как пары w, w^* и z, z^* являются хорошими, то любая вершина из Σ не смежна ни с a , ни с c . Подграф $[a] - u^\perp$ содержит z и все $b_1 - 1$ вершин из $[w] \cap [z] - \Sigma$. Поэтому $[a] \cap [z^*]$ содержится в $[u]$ и $tu(a, z^*) \leq b_1 - 1$; противоречие.

Выберем вершину y из $\Gamma_2(u) - \{w, z\}$. Пусть $\mu(u, y) = b_1$. Если $y \in [w] \cap [z]$, то по лемме 3.1 подграф $[u] \cap [y]$ не пересекает ни $[w]$ и ни $[z]$; противоречие. Если же $y \in [w] - [z]$, то $[u] \cap [y]$ пересекает $[z]$; противоречие.

Пусть $\mu(u, y) = b_1 + 1$. Тогда $y \in [w] \cap [z]$, $[u] \cap [y]$ содержит вершину d из $[w]$, вершину e из $[z]$ и $b_1 - 1$ вершин из $[u] - ([w] \cup [z])$. Противоречие с тем, что $|[y] - w^\perp| = b_1 + 1$.

Пусть $\mu(u, y) = b_1 + 2$. Если $y \in [w] \cap [z]$, то $[u] \cap [y]$ содержит либо по 2 вершины из $[w]$, $[z]$ и $b_1 - 2$ вершин из $[u] - ([w] \cup [z])$, либо 2 вершины из $[w]$, $\delta \geq b_1/2 + 2$ вершин из $[z]$ и $b_1 - \delta$ вершин из $[u] - ([w] \cup [z])$, либо не менее $b_1/2 + 2$ вершин из $[w]$ и из $[z]$. В первых двух случаях имеем $|[y] - w^\perp| = b_1 + 1$, а в последнем $\mu(u, y) \geq b_1 + 4$. Если $y \in [z] - [w]$, то $[u] \cap [y]$ не пересекает $[w]$ и содержит $\delta \geq b_1/2 + 2$ вершин из $[z]$, $b_1 + 2 - \delta \leq b_1/2$ вершин из $[u] - ([w] \cup [z])$ и $\delta - 2 \geq b_1/2$ вершин из $[w] - [z]$. Поэтому $2b_1 - \mu - 1 \geq b_1/2$ и $\mu \leq 3b_1/2 - 1$.

Итак, число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ равно $b_1(3b_1 - 1)$, но не меньше $2b_1 + \mu(b_1 + 3) + (4b_1 - 2\mu - 2)(b_1 + 2)$. Отсюда $\mu \geq (b_1^2 + 9b_1 - 4)/(b_1 + 1) = b_1 + 8 - 12/(b_1 + 1)$. Так как $b_1 \geq 7$, то $b_1 + 7 \leq \mu \leq 2b_1 - 3$ и $b_1 \geq 10$. Заметим, что в случае $b_1 = 10$ имеем $k = 29, \mu = 17, v = 53$; противоречие с тем, что число kv четно. В случае $b_1 = 11$ имеем $k = 32$ и $\mu \in \{18, 19\}$; противоречие с тем, что $(b_1 - 1)(\mu - b_1)$ не делится на 3. В случае $b_1 = 12$ имеем $k = 35$ и $\mu \in \{19, 20, 21\}$. Далее, $(b_1 - 1)(\mu - b_1)$ делится на 3, поэтому $\mu = 21$ и $v = 63$; снова противоречие с тем, что число kv четно. Итак $b_1 \geq 13$. Напомним, что $\mu \geq b_1 + 8 - 12/(b_1 + 1)$. Так как $b_1 \geq 13$, то $\mu \geq b_1 + 8$.

Если $\mu(u, y) = b_1 + 2$ для некоторой вершины $y \in \Gamma_2(u)$, то указанное число ребер не меньше $2b_1 + \mu(b_1 + 3) + (4b_1 - 2\mu - 2)(b_1 + 2)$. Отсюда $b_1 + 8 \leq \mu \leq 3b_1/2 - 1$ и $b_1 \geq 18$.

Пусть $\mu(u, y) \geq b_1 + 3$ для любой вершины $y \in \Gamma_2(u)$. Тогда число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ не меньше $(4b_1 - \mu)(b_1 + 3) - 6$, поэтому $\mu \geq b_1 + 10 - 36/(b_1 + 3)$. В случае $\mu = b_1 + 7$ имеем $7 \leq b_1 \leq 9$. Если $b_1 = 9$, то $vk\lambda$ не делится на 3. Если $b_1 = 8$, то vk нечетно. Поэтому $b_1 = 7, k = 20, \lambda = 12, \mu = 14$ и $b_1 + \mu > k$; противоречие.

Итак $b_1 + 8 \leq \mu \leq 2b_1 - 3$. В случае $b_1 = 11$ имеем $\mu = 19$ и $vk\lambda$ не делится на 3. В случае $b_1 = 12$ имеем $k = 35$ и $\mu \in \{20, 21\}$. Далее, $(b_1 - 1)(\mu - b_1)$ делится на 3, поэтому $\mu = 21$ и $v = 63$; противоречие с тем, что число kv четно. Итак $b_1 \geq 13$. Лемма доказана.

Заметим, что при малых b_1 возможны только следующие случаи: $(b_1, v) = (13, 68), (13, 69), (14, 72), (15, 78), (15, 81), (16, 84), (16, 86), (17, 90), (17, 93)$.

До конца параграфа будем предполагать, что диаметр графа Γ равен 2 и в Γ нет вершин, лежащих в двух хороших парах, но некоторая вершина $u \in \Gamma$ лежит в хорошей паре $\{u, w\}$. Положим $|\Gamma - (u^\perp \cup w^\perp)| = \alpha$.

Лемма 3.4. *Если $v > 6b_1 - 8$, то выполняются следующие утверждения:*

- (1) $[w] - [u]$ содержит не более одной вершины z такой, что $\mu(u, z) = b_1 + 1$;
- (2) $b_1 - 7 \leq \alpha \leq b_1 - 6$ и $v \leq 6b_1 - 6$.

Доказательство. Допустим, что $[w] - [u]$ содержит вершину z с $\mu(u, z) = b_1 + 1$. Тогда $[u] \cap [w] \cap [z]$ содержит единственную вершину a и $[z] \subset [u] \cup w^\perp$.

Если $[w] - [u]$ содержит еще одну вершину y с $\mu(u, y) = b_1 + 1$, то (u, y, z) — почти хорошая тройка и $[u] \cap [w] \cap [y]$ содержит единственную вершину c . Положим $|[u] \cap [y] \cap [z]| = \delta$.

По предложению 1 имеем $\delta \leq 2$. В случае $[u] \cap [y] \cap [z] = \{e\}$ вершина e смежна с вершиной из $\{a, c\}$. Если $a, c \in [e]$, то $[a]$ содержит вершину из $[u] \cap [z] - e^\perp$, поэтому $[a] \cap [c]$ содержит $e, u, w, b_1 - 2$ вершин из $[u] \cap [w]$ и $b_1 - 2$ вершин из $[e] \cap [w] - \{y, z\}$; противоречие. Без ограничения общности, $e \in [a] - [c]$. Снова $[a]$ содержит вершину из $[u] \cap [z] - e^\perp$, поэтому $[a] \cap [w]$ содержит $b_1 - 1$ вершин из $[u]$ и b_1 вершин из $[e] \cap [w]$; противоречие.

В случае $[u] \cap [y] \cap [z] = \{d, e\}$ подграф $[d] \cap [e]$ содержит u, y, z , и либо по $b_1 - 3$ вершин из $[u] \cap [y]$, $[u] \cap [z]$ и единственную вершину из $[y] \cap [z] - (\{w\} \cup [u])$, либо $2b_1 - 5$ вершин из $[u] \cap ([y] \cup [z])$. Если вершина a смежна с d, e , то $[a] \cap [d]$ содержит $u, w, b_1 - 3$ вершин из $[u] \cap [z]$, быть может, c , не более одной вершины из $[u] - ([y] \cup [z])$ и не менее $b_1 - 3$ вершин из $[y] \cap [z] - [u]$. Противоречие с тем, что тогда $[a] \cap [e]$ содержит не более одной вершины из $[y] \cap [z] - [u]$. Если вершина a смежна с d , а c смежна с e , то $[a] \cap [c]$ содержит $u, w, b_1 - 2$ вершины из $[u] \cap [w]$, и $b_1 - 2$ вершин из $[y] \cap [z] - \{w\}$. Противоречие с тем, что тогда $[a] \cap [d]$ или $[c] \cap [e]$ содержит не более одной вершины из $[y] \cap [z] - [u]$. Итак, можно считать, что вершины a, c смежны с d . Тогда $[d] - a^\perp$ содержит y, e и $b_1 - 2$ вершин из $[u] \cap [y] - [z]$, $[a] - d^\perp$ содержит $z, b_1 - 2$ вершин из $[u] \cap [w] - \{c\}$ и вершину из $[y] \cap [z] - [u]$. Противоречие с тем, что тогда $[u] \cap [d]$ содержит e и лишь по $b_1 - 2$ вершин из $[u] \cap [y]$, $[u] \cap [z]$. Утверждение (1) доказано.

Число ребер между $\Gamma - (u^\perp \cup w^\perp)$ и $[u] \cup [w]$ не меньше $\alpha(k - \alpha + 1)$. Поэтому можно считать, что число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ не меньше $\alpha(3b_1 - \alpha)/2 + 2b_1(b_1 + 2) - 3$, поэтому $\alpha^2 - 3b_1\alpha + 2b_1^2 - 10b_1 + 6$. Так как $(b_1 + 10)^2 \geq 9b_1^2 - 4(2b_1^2 - 10b_1 + 6)$, то $b_1 - 8 \leq \alpha \leq b_1 - 5$.

Пусть $\alpha = b_1 - 5$. Тогда можно считать, что число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ не меньше $(2b_1 + 5)(b_1 - 5)/2 + 2b_1(b_1 + 2) - 3$, поэтому $b_1 \leq 31/5$; противоречие. Итак, $\alpha \leq b_1 - 6$ и $v \leq 6b_1 - 6$. Лемма доказана.

Из лемм 3.1–3.4 следует, что выполняется одно из утверждений (1) или (2) из заключения следствия.

4. Графы без хороших пар

В этом параграфе Γ является связным реберно регулярным графом с параметрами (v, k, λ) диаметра 2, $k = 3b_1 - 1$ и в Γ нет хороших пар.

Лемма 4.1. *Если Γ не содержит почти хороших пар, то $v \leq 6b_1 - 6$, причем в случае $v = 6b_1 - 6$ имеем $6 \leq b_1 \leq 11$.*

Доказательство. Пусть Γ не содержит почти хороших пар. Тогда $(v - k - 1)(b_1 + 2) \leq 3b_1^2 - b_1$, поэтому $v \leq 6b_1 - 7 + 14/(b_1 + 2)$ и $v \leq 6b_1 - 6$. В случае $v = 6b_1 - 6$ имеем $b_1 \leq 12$, причем в случае $b_1 = 12$ граф Γ сильно регулярен с параметрами $(66, 35, 22, 14)$. Противоречие с тем, что $(\lambda - \mu)^2 - 4(k - \mu) = 148$ не является квадратом. Лемма доказана.

До конца параграфа будем предполагать, что Γ содержит почти хорошую пару $\{u, w\}$. Тогда $b_1 > 6$.

Лемма 4.2. *Пусть $[w] - [u]$ содержит вершину z с $\mu(u, z) = b_1 + 1$, $\Delta = [u] \cap [w] \cap [z]$, $\delta = |\Delta|$, $\Sigma = [w] \cap [z] - [u]$ и $\Lambda = \Gamma - (u^\perp \cup [w] \cup [z])$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

- (1) $\delta = 1$, $\mu(u, y) \geq b_1 + 2$ для любой вершины $y \in \Lambda$, $|\Lambda| \leq (b_1 - 1)/2$ и $v \leq 5b_1 + (b_1 - 3)/2$;
- (2) $\delta = 2$, $\mu(u, y) \geq b_1 + 2$ для любой вершины $y \in \Lambda$, $|\Lambda| \leq (2b_1 - 5)/3$ и $v \leq 5b_1 + (b_1 - 3)/2$.

Доказательство. Ввиду предложения 1 имеем $\delta \leq 2$. Пусть $\delta = 1$. Тогда $\Delta = \{a\}$, $[u] \cap [a]$ содержит по $b_1 - 1$ из $[w]$ и из $[z]$, поэтому $[u] \cap [w]$ содержит единственную несмежную с a вершину c и $[u] \cap [z]$ содержит единственную несмежную с a вершину e . Далее, $\Gamma_2(u) = \{w, z\} \cup \Sigma$ и $|[u] - ([w] \cup [z])| = b_1 - 2$.

Пусть $\mu(u, y) = b_1 + 1$ для некоторой вершины $y \in \Lambda$. По утверждению (1) леммы 1.5 имеем $|[u] \cap [w] \cap [y]| \leq 1$ и $|[u] \cap [y] \cap [z]| \leq 1$; противоречие с тем, что тогда $\mu(u, y) \leq b_1$. Значит, $\mu(u, y) \geq b_1 + 2$ для любой вершины $y \in \Lambda$ и y смежна по крайней мере с 4 вершинами из $[u] \cap ([w] \cup [z])$. С другой стороны, каждая вершина из $[u] \cap ([w] \cup [z]) - \{a, c, e\}$ смежна не более чем с 1 вершиной из Λ . Поэтому $4|\Lambda| \leq 2b_1 - 2$ и $v \leq 5b_1 + (b_1 - 3)/2$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $\delta = 2$. Тогда $\Delta = \{a, d\}$, $[u] \cap [a]$ содержит d и по $b_1 - 2$ из $[w]$ и из $[z]$. Далее, $[w] - ([u] \cup z^\perp)$ содержит единственную вершину z^* и $[z] - ([u] \cup w^\perp)$ содержит единственную вершину w^* . Если a смежна с одной из вершин w^*, z^* , то $[a] \cap [d]$ содержит u, w, z и $2b_1 - 5$ вершин из $[u] \cap ([w] \cup [z])$, поэтому d не смежна ни с одной из вершин w^*, z^* и $[u] \cap ([w] \cup [z]) - \{a, d\}$ содержит не менее 3 вершин, несмежных ни с одной вершиной из Λ . Так как $\Gamma_2(u) = \{w, z, w^*, z^*\} \cup \Sigma \cup \Lambda$, то $|([w] \cup [z]) - [u]| = 2b_1$ и $|[u] - ([w] \cup [z])| = b_1 - 1$.

Пусть $\mu(u, y) = b_1 + 1$ для некоторой вершины $y \in \Lambda$. Тогда $[u] \cap [y]$ содержит не более $b_1 - 1$ вершин из $[u] - ([w] \cup [z])$ и 2 вершины из $[u] \cap ([w] \cup [z])$. По утверждению (1) леммы 1.5 имеем $|[u] \cap [w] \cap [y]| = |[u] \cap [y] \cap [z]| = 1$; противоречие с тем, что тогда $k = 3b_1 - 3$.

Значит, $\mu(u, y) \geq b_1 + 2$ для любой вершины $y \in \Lambda$ и y смежна по крайней мере с 3 вершинами из $[u] \cap ([w] \cup [z])$. Пусть y смежна точно с 3 вершинами из $[u] \cap ([w] \cup [z])$. Если $[y]$ содержит точно 1 вершину x из $[u] \cap ([w] - [z])$, то $[u] \cap [x]$ содержит b_1 вершин из $[w]$ и не менее $b_1 - 1$ вершин из $[y] - [w]$; противоречие. Если $[y]$ содержит точно 3 вершины x_1, x_2, x_3 из $[u] \cap ([w] - [z])$, то $[u] \cap [x_i]$ содержит b_1 вершин из $[w]$ и не менее $b_1 - 2$ вершин из $[y] - [w]$. Противоречие с тем, что $[x_1] \cap [x_2]$ содержит $u, y, w, b_1 - 1$ вершин из $[u] \cap [w]$ и не менее $b_1 - 3$ вершин из $[y] - [w]$.

Значит, любая вершина $y \in \Lambda$ смежна, по крайней мере, с 4 вершинами из $[u] \cap ([w] \cup [z])$. С другой стороны, каждая вершина из $[u] \cap ([w] \cup [z]) - \{a, d\}$ смежна не более чем с 1 вершиной из Λ . Поэтому $4|\Lambda| \leq 2b_1 - 5$ и $v \leq 5b_1 + (2b_1 - 5)/4$. Отсюда $v \leq 5b_1 + (b_1 - 3)/2$.

Лемма 4.3. *Если $v > 5b_1 + (b_1 - 3)/2$, то вершина u лежит не более чем в двух почти хороших парах и $v \leq 6b_1 - 9 + 16/(b_1 + 2)$.*

Доказательство. Пусть $v > 5b_1 + (b_1 - 3)/2$. По лемме 4.2 подграф $[w] - [u]$ не содержит вершин, образующих почти хорошие пары с u .

Если $\Gamma_2(u) - w^\perp$ содержит вершину z , образующую почти хорошую пару с u , то по лемме 1.5 подграф $[u] \cap [z]$ не пересекает $[w]$ и $|[u] - ([w] \cup [z])| = b_1 - 3$. Отсюда $\Gamma_2(u) - \{w, z\}$ не содержит вершин, образующих почти хорошие пары с u , и $v - k - 1 \leq (3b_1^2 - 3b_1 - 2)/(b_1 + 2) = 3b_1 - 9 + 16/(b_1 + 2)$. Лемма доказана.

Из лемм 4.1–4.3 следует, что выполняется утверждение (3) из заключения следствия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** Новая оценка для числа вершин в реберно регулярных графах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48. С. 46–61.
2. **Махнев А.А.** О расширениях частичных геометрий, содержащих малые μ -подграфы // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1996. Т. 3, №3. С. 71–83.
3. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 485 p.
4. **Махнев А.А.** О сильной регулярности некоторых реберно регулярных графов // Изв. РАН. Сер. мат. 2004. Т. 68. С. 159–172.
5. **Махнев А.А., Веденев А.А., Кузнецов А.Н., Носов В.В.** О хороших парах в реберно регулярных графах // Дискрет. математика. 2003. Т. 15. С. 77–97.
6. **Махнев А.А., Чуксина Н.В.** О реберно регулярных графах, в которых каждая вершина лежит не более чем в одной хорошей паре // Владикавказ. мат. журн. 2008. Т. 10, вып. 1. С. 53–67.
7. **Минакова И.М., Махнев А.А.** Об одном классе реберно регулярных графов // Изв. Гомел. гос. ун-та. 2000. Т. 3, № 16. С. 145–154.

8. **Казарина В.И., Махнев А.А.** О реберно регулярных графах с $b_1 = 5$ // Алгебра, логика и кибернетика: тез. докл. Междунар. конф. Иркутск, 2004. С. 159–161.
9. **Нирова М.С.** О вполне регулярных графах с $b_1 \leq 5$ // Сиб. электрон. мат. изв. 2007. Т. 4. С. 1–11.
URL: <http://semr.math.nsc.ru>.

Махнев Александр Алексеевич,
д-р. физ.-мат. наук, чл.-кор. РАН
зав. отд.

Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Чуксина Наталия Владимировна
аспирант

Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: natalia_1@e1.ru

Поступила 20.02.2008

УДК 512.552.7

УРАВНЕНИЯ ПЕЛЛЯ И ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ЕДИНИЦЫ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ ГРУПП $PSL_2(q)$, ГДЕ q НЕЧЕТНО

О. В. Митина

Изучаются группы центральных единиц целочисленных групповых колец групп $PSL_2(q)$, где q нечетно. Получен достаточный критерий разложения этих групп в прямое произведение подгрупп в случае, когда $q \equiv 1 \pmod{4}$, q является степенью простого числа и не является квадратом.

Ключевые слова: центральные единицы, групповое кольцо.

Введение

Исследования по теории групп единиц целочисленных групповых колец конечных групп имеют достаточно большую историю, начатую в 1940 г. знаменитой работой Хигмана [1]. Важной информацией о группах единиц таких колец являются их центры, которые совпадают с группами центральных единиц (обратимых элементов центров групповых колец). В работах [2, 3] получено описание группы центральных единиц целочисленного группового кольца группы $PSL_2(5) \simeq A_5$. Также в [3] описана группа центральных единиц целочисленного группового кольца группы $PSL_2(9) \simeq A_6$.

В [4] были исследованы группы центральных единиц целочисленных групповых колец групп $PSL_2(q)$, где q нечетно. В частности, оказалось, что такие группы раскладываются в прямое произведение подгрупп, которые устроены проще, чем вся группа [4, теоремы 1, 2]. В данной работе указаны условия, при которых это разложение можно улучшить в случае, когда $q \equiv 1 \pmod{4}$ и q не является квадратом.

Уравнением Пелля называется уравнение вида $x^2 - qy^2 = 1$, где q — целое положительное число, не являющееся квадратом (см., например, [5, гл. 17, разд. 5]). Это уравнение возникает при исследовании строения групп центральных единиц целочисленных групповых колец групп $PSL_2(q)$, когда $q \equiv 1 \pmod{4}$ и q не является квадратом (см. лемму 3). Нас интересуют только его целочисленные решения.

Основными результатами данной статьи являются теоремы 1 и 2. Встречающиеся в них обозначения объяснены в разд. 1.

Теорема 1. Пусть V — нормализованная группа центральных единиц целочисленного группового кольца группы $PSL_2(q)$, $q \equiv 1 \pmod{4}$ и q является нечетной степенью простого числа, $K = q(q-1)^2/4$, (\hat{x}_0, \hat{y}_0) — наименьшее целочисленное решение уравнения $x^2 - Ky^2 = 1$. Если $\hat{x}_0 \equiv -1 \pmod{2q}$, то

$$V = A \times B \times C,$$

где

$$\begin{aligned} A &= \left\{ v \in V \mid \beta_v(\xi_1) = \beta_v(\xi_2) = 1, \beta_v(\theta_j) = 1 \text{ для } j = 1, \dots, q_2 \right\} \\ &= \left\{ v \in V \mid \gamma_v(c) = \gamma_v(d), \gamma_v(b^m) = 0 \text{ для } m = 1, \dots, q_2 \right\}, \\ B &= \left\{ v \in V \mid \beta_v(\xi_1) = \beta_v(\xi_2) = 1, \beta_v(\chi_i) = 1 \text{ для } i = 1, \dots, q_1 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ v \in V \mid \gamma_v(c) = \gamma_v(d), \gamma_v(a^l) = 0 \text{ для } l = 1, \dots, q_1 \right\}, \\
C &= \left\{ v \in V \mid \beta_v(\chi_i) = \beta_v(\theta_j) = 1 \text{ для } i = 1, \dots, q_1 \text{ и } j = 1, \dots, q_2 \right\} \\
&= \left\{ v \in V \mid \gamma_v(b^m) = 0 \text{ для } m = 1, \dots, q_2, \gamma_v(a^l) = (-1)^{l-1} \gamma_v(a) \text{ для } l = 1, \dots, q_1 + 1 \right\}.
\end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть $q \equiv 1 \pmod{4}$, q не является квадратом, $K = q(q-1)^2/4$ и (\hat{x}_0, \hat{y}_0) — наименьшее целочисленное решение уравнения $x^2 - Ky^2 = 1$. Пусть также $q < 150$, тогда $\hat{x}_0 \equiv 1 \pmod{2q}$ при $q \in \{97, 137\}$ и $\hat{x}_0 \equiv -1 \pmod{2q}$ при других q .

Доказательства теорем приводятся в разд. 3.

1. Обозначения и известные результаты

О п р е д е л е н и е. Пусть q — целое положительное число, не являющееся квадратом. Целочисленное решение (\hat{x}, \hat{y}) уравнения Пелля $x^2 - qy^2 = 1$ называется *наименьшим*, если при $x = \hat{x}$, $y = \hat{y}$ двучлен $x + \sqrt{q}y$ имеет наименьшую величину из всех значений, которые он принимает при подстановке вместо (x, y) любых целых положительных решений этого уравнения.

Легко проверить, что наименьшее целочисленное решение уравнения $x^2 - qy^2 = 1$ единственно.

Лемма 1 [6, теорема II, разд. 4]. *Всякое целочисленное решение уравнения $x^2 - qy^2 = 1$ при положительном q и иррациональном \sqrt{q} имеет вид $(\pm x_n, \pm y_n)$, где для любого целого положительного n*

$$x_n + \sqrt{q}y_n = (\hat{x} + \sqrt{q}\hat{y})^n$$

и (\hat{x}, \hat{y}) — наименьшее целочисленное решение этого уравнения.

Всюду далее

$$G = PSL_2(q), \text{ где } q \equiv 1 \pmod{4},$$

q является нечетной степенью простого числа p . Таблица характеров группы G [7, гл. 7, разд. Д] представлена в табл.1 (с немного измененными обозначениями).

Т а б л и ц а 1

g	1	c	d	a_2	$a^l, 1 \leq l \leq q_1$	$b^m, 1 \leq m \leq q_2$
$ C_G(g) $	$ G $	q	q	$2q_3$	q_3	q_4
$ g^G $	1	$2q_3q_4$	$2q_3q_4$	qq_4	$2qq_4$	$2qq_3$
1_G	1	1	1	1	1	1
ξ_1	q_4	$(1 + \sqrt{q})/2$	$(1 - \sqrt{q})/2$	$(-1)^{q_1+1}$	$(-1)^l$	0
ξ_2	q_4	$(1 - \sqrt{q})/2$	$(1 + \sqrt{q})/2$	$(-1)^{q_1+1}$	$(-1)^l$	0
φ	q	0	0	1	1	-1
$\chi_i, 1 \leq i \leq q_1$	$2q_4$	1	1	$2(-1)^i$	$2 \cos(2il\pi/q_3)$	0
$\theta_j, 1 \leq j \leq q_2$	$2q_3$	-1	-1	0	0	$-2 \cos(2jm\pi/q_4)$

Здесь и далее используются следующие обозначения из [4]:

$$q_1 = (q-5)/4, \quad q_2 = (q-1)/4, \quad q_3 = (q-1)/2, \quad q_4 = (q+1)/2;$$

$1, c, d, a_2, a, a^2, \dots, a^{q_1}, b, b^2, \dots, b^{q_2}$ — представители всех классов сопряженности группы G , где c, d — элементы порядка p , a, a^2, \dots, a^{q_1} — элементы порядка $(q-1)/2$, b, b^2, \dots, b^{q_2} — элементы порядка $(q+1)/2$, $a_2 = a^{(q-1)/4}$ — инволюция;

$1_G, \xi_1, \xi_2, \varphi, \chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{q_1}, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{q_2}$ — все неприводимые комплексные характеры группы G , где ξ_1, ξ_2 — характеры степени q_4 , φ — степени q , $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{q_1}$ — степени $2q_4$, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{q_2}$ — степени $2q_3$;

V — нормализованная группа центральных единиц целочисленного группового кольца группы G , т. е. таких центральных единиц, что сумма коэффициентов при разложении по элементам группы равна 1 (группа всех центральных единиц $U(Z(\mathbb{Z}G)) = \langle -1 \rangle \times V$);

$\gamma_v(x)$ — коэффициент при классовой сумме класса x^G в разложении произвольного элемента $v \in V$ по базису из классовых сумм центра целочисленного группового кольца группы G ;

$\beta_v(\chi)$ — коэффициент при минимальном центральном идемпотенте, который соответствует характеру χ в разложении произвольного элемента $v \in V$ по базису из минимальных центральных идемпотентов центра комплексной групповой алгебры группы G (см., например, [7, гл. 3, лемма Г5, п. 4]).

Для сокращения размера формул введем обозначения $\Gamma_v(a) = \sum_{l=1}^{q_1} \gamma_v(a^l)$ и $\Gamma_v(a, alt) = \sum_{l=1}^{q_1} (-1)^l \gamma_v(a^l)$.

В приведенных выше терминах в [4] доказаны следующие результаты.

Лемма 2 [4, теорема 2]. Пусть $q \equiv 1 \pmod{4}$, q не является квадратом. Тогда $V = F \times B$, где

$$F = \{v \in V \mid \beta_v(\theta_j) = 1 \text{ для } j = 1, \dots, q_2\} = \{v \in V \mid \gamma_v(b^m) = 0 \text{ для } m = 1, \dots, q_2\},$$

$$B = \left\{ v \in V \mid \beta_v(\chi_i) = 1 \text{ для } i = 1, \dots, q_1, \beta_v(\xi_1) = \beta_v(\xi_2) = 1 \right\} \\ = \left\{ v \in V \mid \gamma_v(a^l) = 0 \text{ для } l = 1, \dots, q_1, \gamma_v(c) = \gamma_v(d) \right\}.$$

Лемма 3 [4, лемма 18]. Пусть $v \in V$, $q \equiv 1 \pmod{4}$, q не является квадратом, $y = \gamma_v(c) - \gamma_v(d)$, $x = 1 + 2qx'$, где $x' = \frac{(-1)^{q_1+1} - 1}{2} \gamma_v(a_2) + \Gamma_v(a, alt) - \Gamma_v(a)$. Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) $\beta_v(\xi_1) = x + \frac{\sqrt{q}(q-1)}{2}y$, $\beta_v(\xi_2) = x - \frac{\sqrt{q}(q-1)}{2}y$.
- (2) Числа x и y удовлетворяют равенству $x^2 - \frac{q(q-1)^2}{4}y^2 = 1$.

2. Технические леммы

Исследуем решения уравнения Пелля из п. (2) леммы 3. Эти исследования имеют самостоятельный интерес и полезны при нахождении центральных единиц для конкретных q . Всяду в этом разделе q — нечетная степень простого числа.

Лемма 4. Пусть (\tilde{x}, \tilde{y}) — целочисленное решение уравнения Пелля $x^2 - Ky^2 = 1$ для $K = q(q-1)^2/4$ и $\tilde{x} = 1 + 2qx'$ для некоторого целого x' . Тогда существуют такие целые числа x'' , y'' и $\lambda = \pm 1$, что:

- (1) $(x'')^2 - q(y'')^2 = \lambda$;
- (2) $(y'')^2(x'')^2 = q_2^2 \tilde{y}^2$;
- (3) $\tilde{x} = 1 + 2q\lambda(y'')^2 = 2\lambda(x'')^2 - 1$.

Доказательство. 1. Из условия леммы следует, что

$$\frac{q(q-1)^2}{4} \tilde{y}^2 = K \tilde{y}^2 = \tilde{x}^2 - 1 = (\tilde{x} - 1)(\tilde{x} + 1) = 2qx'(2qx' + 2) = 4qx'(qx' + 1).$$

Поэтому

$$x'(qx' + 1) = \left(\frac{q-1}{4}\right)^2 \tilde{y}^2 = q_2^2 \tilde{y}^2. \quad (2.1)$$

Правая часть равенства является квадратом, $qx' + 1$ и x' взаимно просты, поэтому $qx' + 1$ и x' являются с точностью до знака квадратами. Положим

$$qx' + 1 = \lambda(x'')^2 \text{ и } x' = \lambda(y'')^2 \quad (2.2)$$

для подходящих целых x'' и y'' , $\lambda = \pm 1$. Тогда $q\lambda(y'')^2 + 1 = qx' + 1 = \lambda(x'')^2$ и, следовательно, $\lambda((x'')^2 - q(y'')^2) = 1$, т. е. $(x'')^2 - q(y'')^2 = \lambda$.

2. Используя то, что $x' = \lambda(y'')^2$, $qx' + 1 = \lambda(x'')^2$ и равенство (2.1), получаем

$$(y'')^2(x''^2) = \lambda(y'')^2 \lambda(x'')^2 = x'(qx' + 1) = \left(\frac{q-1}{4}\right)^2 \tilde{y}^2 = q_2^2 \tilde{y}^2. \quad (2.3)$$

3. По (2.2) $x' = \lambda(y'')^2$, по п. (1) $q(y'')^2 = (x'')^2 - \lambda$, следовательно,

$$\tilde{x} = 1 + 2qx' = 1 + 2q\lambda(y'')^2 = 1 + 2\lambda((x'')^2 - \lambda) = 2\lambda(x'')^2 - 1.$$

Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть $v \in V$ и $\beta_v(\xi_1) = \tilde{x} + \frac{\sqrt{q}(q-1)}{2}\tilde{y}$, где \tilde{x} , \tilde{y} удовлетворяют условию леммы 4. Тогда $\tilde{x} > 0$, $\tilde{x} - 1$ делится на 32 и в условиях леммы 4 $\lambda = 1$.

Доказательство. По лемме 4 $(x'')^2 - q(y'')^2 = \lambda = \pm 1$ и $q_2\tilde{y} = (q-1)/4 \tilde{y} = \pm y''x''$ для некоторых целых чисел x'' и y'' .

Покажем, что $\lambda = 1$. Если x'' и y'' нечетны, то $\lambda = (x'')^2 - q(y'')^2$ четно, что невозможно. Значит, $(q-1)/4 \tilde{y} = y''x''$ является четным числом. Если $(q-1)/4 = q_1 + 1$ нечетно, то \tilde{y} четно, т. е. $\tilde{y} = 2k$, k — целое. Из (2.3) получаем, что

$$x'(qx' + 1) = q_2^2 \tilde{y}^2 = 4t^2 \quad (2.4)$$

для $t = q_2k$. Числа $qx' + 1$ и x' взаимно просты, поэтому x' является квадратом. Предположим, что при этом x' нечетно, тогда $x' = 1 + 8m$, m — целое. Подставим x' в (2.4).

$$(1 + 8m)(1 + q + 8qm) = 4t^2,$$

т. е. для некоторого целого A

$$1 + q + 8A = 4t^2. \quad (2.5)$$

Левая часть равенства (2.5) сравнима с 2 по модулю 4, а правая сравнима с 0. Получили противоречие. Значит, если $(q-1)/4$ нечетно, то x' четно.

Если же $(q-1)/4 = q_1 + 1$ четно, то $\frac{(-1)^{q_1+1} - 1}{2} = 0$. Кроме того, разность

$$\Gamma_v(a, alt) - \Gamma_v(a) = \sum_{l=1}^{q_1} ((-1)^l \gamma_v(a^l) - \gamma_v(a^l)) = \sum_{l=1}^{q_1} ((-1)^l - 1) \gamma_v(a^l)$$

является четным числом. Поэтому по лемме 3 $x' = 0 \cdot \gamma_v(a_2) + \Gamma_v(a, alt) - \Gamma_v(a)$ снова четно.

Итак, $\tilde{x} = 1 + 2qx' = 1 + 4qs_0$ для некоторого целого s_0 .

Из равенства $\tilde{x}^2 - K\tilde{y}^2 = 1$ для $K = q(q-1)^2/4$ получаем

$$\frac{q(q-1)^2}{4} \tilde{y}^2 = K\tilde{y}^2 = \tilde{x}^2 - 1 = (\tilde{x} - 1)(\tilde{x} + 1) = 4qs_0(4qs_0 + 2) = 8qs_0(2qs_0 + 1).$$

Следовательно,

$$\left(\frac{q-1}{4}\right)^2 \tilde{y}^2 = 2s_0(2qs_0 + 1).$$

Числа $2s_0$ и $2qs_0 + 1$ могут отличаться от квадратов только знаком, так как $2s_0$ и $2qs_0 + 1$ взаимно просты, а в левой части равенства стоит квадрат. Поэтому s_0 делится на 2, т. е. $s_0 = 2s_1$ для некоторого целого s_1 . Значит,

$$\left(\frac{q-1}{4}\right)^2 \tilde{y}^2 = 4s_1(4qs_1 + 1). \quad (2.6)$$

Если $4qs_1 + 1 = -(x'')^2$ для некоторого целого x'' , то $(x'')^2 \equiv -1 \pmod{4}$, что невозможно. Поэтому $4s_1$ и $4qs_1 + 1$ являются квадратами. По (2.2) $x' = \lambda(y'')^2$ и $x' = 4s_1$ — квадрат, следовательно, $\lambda = 1$.

Из (2.2) и равенства $\lambda = 1$ получаем, что $\tilde{x} = 1 + 2qx' = 1 + 2q(y'')^2 > 0$. Предположим, что в (2.6) s_1 нечетно, т. е. $s_1 = 2s_2 + 1$ для некоторого целого s_2 . Тогда

$$(x'')^2 = 4qs_1 + 1 = 4q(2s_2 + 1) + 1 \equiv 4q + 1 \pmod{8}.$$

Но $q \equiv 1 \pmod{4}$, т. е. $q = 4k + 1$, где k — целое. Значит,

$$(x'')^2 \equiv 4q + 1 \equiv 4(4k + 1) + 1 \equiv 5 \pmod{8},$$

что невозможно. Таким образом, $s_1 = 2s_2$. Из (2.6) получаем $8s_2(8qs_2 + 1) = ((q-1)/4)^2 \tilde{y}^2$. Тогда s_2 также обязано делиться на 2 и поэтому $s_2 = 2s_3$ для некоторого целого s_3 . Итак,

$$\tilde{x} - 1 = 4qs_0 = 8qs_1 = 16qs_2 = 32qs_3.$$

Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть $q \equiv 1 \pmod{4}$, q не является квадратом, (\hat{x}, \hat{y}) — наименьшее целочисленное решение уравнения $x^2 - qy^2 = 1$ и при любом целом положительном n числа x_n, y_n определены равенством $x_n + \sqrt{q}y_n = (\hat{x} + \sqrt{q}\hat{y})^n$. Положим $x_0 = 1, y_0 = 0$. Тогда для любого целого положительного n выполняются следующие утверждения:

- (1)
$$\begin{cases} x_{n+2} = 2x_{n+1}\hat{x} - x_n, \\ y_{n+2} = 2y_{n+1}\hat{x} - y_n. \end{cases}$$
- (2) x_n — нечетно, y_n — четно.

Доказательство. 1. По лемме 1 $x_{n+1} + \sqrt{q}y_{n+1} = (\hat{x} + \sqrt{q}\hat{y})^{n+1} = (x_n + \sqrt{q}y_n) \cdot (\hat{x} + \sqrt{q}\hat{y}) = x_n\hat{x} + qy_n\hat{y} + \sqrt{q}(x_n\hat{y} + y_n\hat{x})$. Поэтому для любого целого положительного n

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n\hat{x} + qy_n\hat{y}, \\ y_{n+1} = x_n\hat{y} + y_n\hat{x}. \end{cases}$$

Запишем эту систему в матричном виде $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, где $A = \begin{pmatrix} \hat{x} & q\hat{y} \\ \hat{y} & \hat{x} \end{pmatrix}$. Вычислим характеристический многочлен матрицы A .

$$\det(A - \alpha E) = \begin{vmatrix} \hat{x} - \alpha & q\hat{y} \\ \hat{y} & \hat{x} - \alpha \end{vmatrix} = (\hat{x} - \alpha)^2 - q\hat{y}^2 = \hat{x}^2 - 2\alpha\hat{x} + \alpha^2 - q\hat{y}^2 = \alpha^2 - 2\alpha\hat{x} + 1.$$

По теореме Гамильтона — Кэли получаем $A^2 - 2\hat{x}A + E = 0$, т. е. $A^2 = 2\hat{x}A - E$.

Тогда

$$\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ y_{n+2} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = (2\hat{x}A - E) \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = 2\hat{x} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

что и требовалось.

2. Предположим, что y_n нечетно, т. е. $y_n = 1 + 2k$, k — целое, тогда $y_n^2 = 1 + 4k + 4k^2 \equiv 1 \pmod{4}$. По условию $q \equiv 1 \pmod{4}$, поэтому $qy_n^2 \equiv 1 \pmod{4}$ и $x_n^2 = 1 + qy_n^2 \equiv 2 \pmod{4}$, что невозможно. Итак, y_n четно, т. е. $y_n = 2k$. Тогда $x_n^2 = 1 + qy_n^2 = 1 + 4k^2q \equiv 1 \pmod{4}$. Поэтому $x_n \equiv \pm 1 \pmod{4}$, значит, x_n нечетно. Лемма доказана.

Лемма 7. Пусть $q \equiv 1 \pmod{4}$, q не является квадратом, (\hat{x}, \hat{y}) — наименьшее решение уравнения $x^2 - qy^2 = 1$ и $x_n + \sqrt{q}y_n = (\hat{x} + \sqrt{q}\hat{y})^n$ при целом положительном n . Тогда для любого целого положительного n выполняются следующие утверждения:

- (1) $x_n \equiv \hat{x}^n \pmod{2q}$,
 $y_n \equiv n\hat{x}^{n-1}\hat{y} \pmod{2q}$.
- (2) Возможны только два случая:
 - 1) $\hat{x} \equiv 1 \pmod{2q}$, $x_n \equiv 1 \pmod{2q}$, $y_n \equiv n\hat{y} \pmod{2q}$;
 - 2) $\hat{x} \equiv -1 \pmod{2q}$, $x_n \equiv (-1)^n \pmod{2q}$, $y_n \equiv (-1)^{n-1}n\hat{y} \pmod{2q}$.

Доказательство. 1. По п. (2) леммы 6 число $\hat{y} = y_1$ четно, т. е. $\hat{y} = 2z$ для некоторого целого z . Тогда

$$\begin{aligned} x_n + \sqrt{q}y_n &= (\hat{x} + \sqrt{q}\hat{y})^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \hat{x}^{n-k} (\sqrt{q}\hat{y})^k = \hat{x}^n + n\sqrt{q}\hat{x}^{n-1}\hat{y} + q \sum_{k=2}^n C_n^k \hat{x}^{n-k} (\sqrt{q})^{k-2} \hat{y}^k \\ &= \hat{x}^n + n\sqrt{q}\hat{x}^{n-1}\hat{y} + 2q \sum_{k=2}^n C_n^k \hat{x}^{n-k} (\sqrt{q})^{k-2} 2^{k-1} z^k \equiv \hat{x}^n + n\sqrt{q}\hat{x}^{n-1}\hat{y} \pmod{2q}. \end{aligned}$$

Получили, что $x_n \equiv \hat{x}^n \pmod{2q}$, $y_n \equiv n\hat{x}^{n-1}\hat{y} \pmod{2q}$.

2. Так как q есть степень простого нечетного числа и $\hat{y} = 2z$, то из уравнения Пелля следует, что $\hat{x}^2 = 1 + q\hat{y}^2 = 1 + q4z^2 \equiv 1 \pmod{4q}$, т. е. $\hat{x} \equiv \pm 1 \pmod{2q}$. Если $\hat{x} \equiv 1 \pmod{2q}$, то по п. (1) $x_n \equiv 1^n \pmod{2q} \equiv 1 \pmod{2q}$ и $y_n \equiv n\hat{y} \pmod{2q}$. Если $\hat{x} \equiv -1 \pmod{2q}$, то $x_n \equiv (-1)^n \pmod{2q}$ и $y_n \equiv (-1)^{n-1}n\hat{y} \pmod{2q}$. Лемма доказана.

Лемма 8. Пусть $q \equiv 1 \pmod{4}$, q не является квадратом, (\hat{x}, \hat{y}) — наименьшее целочисленное решение уравнения $x^2 - qy^2 = 1$, $K = q(q-1)^2/4$, $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, (x_0, y_0) — некоторое целочисленное решение уравнения $x^2 - Ky^2 = 1$. Тогда существует целое положительное n такое, что $x_0 + \sqrt{K}y_0 = (\hat{x} + \sqrt{q}\hat{y})^n$.

Доказательство. Пусть (x_0, y_0) — целочисленное решение уравнения $x^2 - Ky^2 = 1$. Тогда $x_0^2 - Ky_0^2 = x_0^2 - q((q-1)/2 y_0)^2 = 1$. Следовательно, $(x_0, (q-1)/2 y_0)$ — решение уравнения $x^2 - qy^2 = 1$. По лемме 1 существует такое целое положительное n , что $x_0 + \sqrt{q}((q-1)/2 y_0) = (\hat{x} + \sqrt{q}\hat{y})^n$. Значит, $x_0 + \sqrt{K}y_0 = (\hat{x} + \sqrt{q}\hat{y})^n$. Лемма доказана.

Обозначения подгрупп A и C , используемые в следующей лемме, указаны в теореме 1.

Лемма 9 [4, лемма 33]. Пусть V — нормализованная группа центральных единиц целочисленного группового кольца группы G , $F = \{v \in V \mid \beta_v(\theta_j) = 1 \text{ для } j = 1, \dots, q_2\}$. Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) F является подгруппой группы V .
- (2) $F = \{v \in V \mid \gamma_v(b^m) = 0 \text{ для } m = 1, \dots, q_2\}$.
- (3) $|F : A \times C| \leq 2$.
- (4) Если $\beta_v(\xi_1) = \pm(x_n \pm \sqrt{K}y_n)$ для $v \in F$ при подходящем четном n и целых x_n, y_n , то $v \in A \times C$ и $\beta_v(\xi_1) = x_n \pm \sqrt{K}y_n$.

3. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1. Пусть (\hat{x}_0, \hat{y}_0) — наименьшее целочисленное решение уравнения $x^2 - Ky^2 = 1$, (\hat{x}, \hat{y}) — наименьшее целочисленное решение уравнения $x^2 - qy^2 = 1$ и $x_n + \sqrt{q}y_n = (\hat{x} + \sqrt{q}\hat{y})^n$ для любого целого положительного n при подходящих целых x_n, y_n .

По лемме 8 существует такое целое положительное n , что $\hat{x}_0 + \sqrt{K}\hat{y}_0 = (\hat{x} + \sqrt{q}\hat{y})^n$. Так как по условию теоремы $\hat{x}_0 \equiv -1 \pmod{2q}$, то по лемме 7 $\hat{x} \equiv -1 \pmod{2q}$ и $x_n \equiv 1 \pmod{2q}$ только при четных n . Значит, по п. (4) леммы 9 получаем, что $F = A \times C$. Тогда по лемме 2 $V = A \times B \times C$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть (\hat{x}, \hat{y}) — наименьшее целочисленное решение уравнения $x^2 - qy^2 = 1$. По лемме 8 существует такое целое положительное s , что $\hat{x}_0 + \sqrt{K}\hat{y}_0 = (\hat{x} + \sqrt{q}\hat{y})^s$. Если $\hat{y} = (q-1)/2 y'$ для некоторого целого y' , то $\sqrt{q}\hat{y} = \sqrt{q}((q-1)/2)y' = \sqrt{K}y'$, т. е. $\hat{y}_0 = y'$ и, значит, $\hat{x}_0 = \hat{x}$. Используем данные [8, разд. 1.9, табл. 1.7] и найдем (\hat{x}_0, \hat{y}_0) (табл. 2).

Т а б л и ц а 2

q	5	13	17	29	37	41	53	61	73	89
\hat{y}	4	180	8	1820	12	320	9100	226153980	267000	53000
q	97	101	109		113	125	137	149		
\hat{y}	6377352	20	15140424455100		113296	83204	519712	2113761020		

При $q = 5$ из табл. 2 получаем, что \hat{y} равно 4 и делится на $(q-1)/2 = 2$. Поэтому $\hat{y}_0 = y'$, $\hat{x}_0 = \hat{x}$.

$$\hat{x}^2 = 1 + 5\hat{y}^2 = 81, \quad \hat{x}_0 = \hat{x} = 9 \equiv -1 \pmod{10}, \quad \text{т. е. } \hat{x}_0 \equiv -1 \pmod{2q}.$$

Аналогично рассматриваются случаи $q = 13, 17, 29, 41, 53, 61, 109, 125$. Для них также \hat{x}_0 сравнимо с -1 по модулю $2q$.

При $q = 37$ из табл. 2 получаем, что \hat{y} равно 12 и не делится на $(q-1)/2 = 18$,

$$\hat{x}^2 = 1 + 37\hat{y}^2 = 5379 = 73^2, \quad \hat{x} = 73 \equiv -1 \pmod{74}.$$

Более точно: \hat{y} делится на 2 и не делится на 9. Найдем такое наименьшее целое положительное s , что $(\hat{x} + \sqrt{q}\hat{y})^s = \hat{x}_0 + \sqrt{K}\hat{y}_0$, где \hat{y}_0 делится на $(q-1)/2 = 18$. Рассмотрим решения по модулю 9 и используем п. (2) леммы 6:

$$y_{n+2} = 2y_{n+1}\hat{x} - y_n = 146y_{n+1} - y_n \equiv 2y_{n+1} - y_n \pmod{9},$$

$$y_0 = 0, \quad y_1 \equiv 3 \pmod{9}, \quad y_2 \equiv 6 \pmod{9}, \quad y_3 \equiv 0 \pmod{9}.$$

Поэтому $s = 3$ и по лемме 7

$$\hat{x}_0 = x_3 \equiv (-1)^3 \pmod{74} \equiv -1 \pmod{74}, \quad \text{т. е. } \hat{x}_0 \equiv -1 \pmod{2q}.$$

Аналогично рассматриваются случаи $q = 73, 89, 101, 113, 149$. Для них также \hat{x}_0 сравнимо с -1 по модулю $2q$.

При $q = 97$ из табл. 2 получаем, что \hat{y} равно 6377352 и не делится на $(q-1)/2 = 48$,

$$\hat{x}^2 = 1 + 97\hat{y}^2 = 62809633^2, \quad \hat{x} = 62809633 \equiv -1 \pmod{194}.$$

Более точно: \hat{y} делится на 3 и не делится на 16. Найдем такое наименьшее целое положительное s , что $(\hat{x} + \sqrt{q}\hat{y})^s = \hat{x}_0 + \sqrt{K}\hat{y}_0$, где \hat{y}_0 делится на $(q-1)/2 = 48$. Рассмотрим решения по модулю 16 и используем п. (2) леммы 6:

$$y_{n+2} = 2y_{n+1}\hat{x} - y_n = 2 \cdot 62809633y_{n+1} - y_n \equiv 2y_{n+1} - y_n \pmod{16},$$

$$y_0 = 0, \quad y_1 \equiv 8 \pmod{16}, \quad y_2 \equiv 0 \pmod{16}.$$

Поэтому $s = 2$ и по лемме 7 $\hat{x}_0 = x_2 \equiv (-1)^2 \pmod{194} \equiv 1 \pmod{194}$. Следовательно, $\hat{x}_0 \equiv 1 \pmod{2q}$.

При $q = 137$ из табл. 2 получаем, что \hat{y} равно 519712 и не делится на $(q - 1)/2 = 68$,

$$\hat{x}^2 = 1 + 137\hat{y}^2 = 6083073^2, \quad \hat{x} = 6083073 \equiv -1 \pmod{274}.$$

Более точно: \hat{y} делится на 4 и не делится на 17. Также используя леммы 6 и 7, получаем, что $\hat{x}_0 = x_4 \equiv (-1)^4 \pmod{274} \equiv 1 \pmod{274}$. Следовательно, $\hat{x}_0 \equiv 1 \pmod{2q}$.

Теорема доказана.

Следствие. При $q < 150$ указанное в теореме 1 разложение группы V может нарушаться только при $q = 97$ и $q = 137$.

Доказательство. Очевидным образом следует из теорем 1 и 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Higman G.** The units of group rings // Proc. London Math. Soc. 1940. Vol. 46. P. 231–248.
2. **Li Y., Parmenter M.M.** Central units of the integral group ring $\mathbb{Z}A_5$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1997. Vol. 25, no. 1. P. 61–65.
3. **Aleev R. Ž.** Higman's central unit theory, units of integral group rings of finite cyclic groups and Fibonacci numbers // Intern. J. Algebra and Computations. 1994. Vol. 4, no. 3. P. 309–358.
4. **Алеев Р.Ж., Митина О.В.** Теория центральных единиц целочисленных групповых колец групп $PSL_2(q)$, q нечетно. I / Челяб. гос. ун-т. Деп. ВИНТИ 11.11.05, № 1462-B2005. 63 с.
5. **Айерлэнд К., Роузен М.** Классическое введение в современную теорию чисел. М.: Мир, 1987. 416 с.
6. **Гельфонд А.О.** Решение уравнений в целых числах. М.: Наука, 1978. 63 с.
7. **Белоногов В.А.** Представления и характеры в теории конечных групп. Свердловск: УрО АН СССР, 1990. 378 с.
8. **Эдвардс Г.** Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел. М.: Мир, 1980. 484 с.

Митина Ольга Викторовна
 ст. преподаватель
 кафедры компьютер. топологии и алгебры
 Челяб. гос. ун-т
 e-mail: ovm@csu.ru

Поступила 18.03.2008

УДК 517.977

СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО ВРЕМЕНИ В КООРДИНАТАХ И УПРАВЛЕНИИ

С. И. Солодушкин

Рассматривается вопрос линейно-квадратичной стабилизации систем с запаздыванием в координатах и управлении. Задача стабилизации заменяется задачей оптимального управления на бесконечном промежутке [1, 2]. Минимизируемый при этом квадратичный функционал выбирается таким образом, чтобы упростить систему обобщенных уравнений Риккати. Решение полученной системы обобщенных уравнений Риккати явным образом сведено к решению одного алгебраического матричного уравнения. Приведено достаточное условие стабилизируемости системы найденным управлением.

Ключевые слова: стабилизация, системы с запаздыванием.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему с последствием вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_\tau x(t - \tau) + \int_{-\tau}^0 A(s)x(t+s) ds + Bu(t) + B_\Delta u(t - \Delta) + \int_{-\Delta}^0 B(\zeta)u(t + \zeta) d\zeta. \quad (1.1)$$

Здесь τ и Δ — положительные константы; A, A_τ — постоянные $(n \times n)$ -матрицы; B, B_Δ — постоянные $(n \times r)$ -матрицы; $A(\cdot)$ — $(n \times n)$ -матрица-функция с непрерывными на $[-\tau; 0]$ элементами; $B(\cdot)$ — $(n \times r)$ -матрица-функция с непрерывными на $[-\Delta; 0]$ элементами; $x \in R^n$ — фазовый вектор; $u \in R^r$ — управление. В дальнейшем не будем каждый раз оговаривать отдельно, что та или иная матрица является функциональной, так как это будет ясно из контекста.

Управление системой (1.1) осуществляется за счет выбора конечномерного вектора $u(t) \in R^r$. В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений для определения решений функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) (1.1) необходимо в каждый момент времени t знать вектор $x(t)$, а также функции предыстории $u(t + \zeta)$, $-\Delta \leq \zeta < 0$, и $x(t + s)$, $-\tau \leq s < 0$. Поэтому фазовым пространством ФДУ должно быть не конечномерное пространство R^n , а некоторое функциональное пространство [3]. Для обоснования развиваемого метода, однако, будет удобно рассматривать функции предыстории на больших промежутках, а именно, $u(t + \zeta)$, $-\tau - \Delta \leq \zeta < 0$, и $x(t + s)$, $-2\tau \leq s < 0$. В силу специфики задачи — задачи стабилизации на бесконечном промежутке — данное расширение ни сколько не умаляет общности подхода и носит формальный характер.

Учитывая разделение конечномерных и бесконечномерных составляющих в структуре ФДУ, удобно в качестве фазового пространства рассматривать $H = R^n \times Q_{(n)}[-2\tau; 0] \times Q_{(r)}[-\tau - \Delta; 0]$. Здесь $Q_{(n)}[-2\tau; 0]$ — пространство кусочно-непрерывных на $[-2\tau; 0]$ n -мерных функций, $Q_{(r)}[-\tau - \Delta; 0]$ — пространство кусочно-непрерывных на $[-\tau - \Delta; 0]$ r -мерных функций. Состоянием системы (1.1) будем называть тройку $\{x(t); x(t + s), s \in [-2\tau; 0]; u(t + \zeta), \zeta \in [-\tau - \Delta; 0]\} \in H$.

Будем использовать условные обозначения для ФДУ, следуя [4]. Вводя обозначение $\{x, y(\cdot), w(\cdot)\} = \{x(t); x(t + s), s \in [-2\tau; 0]; u(t + \zeta), \zeta \in [-\tau - \Delta; 0]\}$, придем к следующей

условной записи системы (1.1):

$$\dot{x} = Ax + A_\tau y(-\tau) + \int_{-\tau}^0 A(s)y(s) ds + Bu(t) + B_\Delta w(-\Delta) + \int_{-\Delta}^0 B(\zeta)w(\zeta) d\zeta. \quad (1.2)$$

Состоянием системы (1.2) является тройка $\{x, y(\cdot), w(\cdot)\} \in H$, поэтому управление для системы (1.2) ищется в классе отображений $u[t, x, y(\cdot), w(\cdot)] : R \times R^n \times Q_{(n)}[-2\tau; 0] \times Q_{(r)}[-\tau - \Delta; 0] \rightarrow R^r$. Конкретно, в классе линейных отображений

$$u[t, x, y(\cdot), w(\cdot)] = Ex + E_\tau y(-\tau) + \int_{-\tau}^0 L_\tau(s)y(s) ds + \int_{-\Delta}^0 L_\Delta(\zeta)w(\zeta) d\zeta. \quad (1.3)$$

Здесь E, E_τ — постоянные $(r \times n)$ -матрицы, $L_\tau(\cdot), L_\Delta(\cdot)$ — $(r \times n)$ и $(r \times r)$ -матрицы с непрерывными и кусочно-непрерывно дифференцируемыми на $[-\tau; 0]$ и $[-\Delta; 0]$ элементами соответственно. Справедливо (см. [5])

Утверждение 1. Система функциональных и функционально-дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + A_\tau y(-\tau) + \int_{-\tau}^0 A(s)y(s) ds + Bu + B_\Delta w(-\Delta) + \int_{-\Delta}^0 B(\zeta)w(\zeta) d\zeta, \\ u = Ex + E_\tau y(-\tau) + \int_{-\tau}^0 L_\tau(s)y(s) ds + \int_{-\Delta}^0 L_\Delta(\zeta)w(\zeta) ds \end{cases} \quad (1.4)$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} x(t_0) = x^0, \\ x(t_0 + s) = y^0(s), \quad -2\tau \leq s < 0, \\ u(t_0 + \zeta) = w^0(\zeta), \quad -\tau - \Delta \leq \zeta < 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

имеет единственное решение на промежутке $[t_0; +\infty)$.

Здесь и далее без ограничения общности будем считать, что начальный момент времени $t_0 = 0$.

Система (1.4), называется замкнутой системой, соответствующей управлению с обратной связью (1.3). Для решения основной задачи — задачи стабилизации — нам будет удобно работать не с системой функциональных и функционально-дифференциальных уравнений, а с системой функционально-дифференциальных уравнений; осуществим этот переход.

В силу свойств матриц L_τ, L_Δ отображение (1.3) имеет в каждой точке $\{x, y(\cdot), w(\cdot)\}$ инвариантные производные [4, с. 29]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u[x, y(\cdot), w(\cdot)]}{\partial t} &= 0, & \frac{\partial u[x, y(\cdot), w(\cdot)]}{\partial x} &= E, \\ \partial_y u[x, y(\cdot), w(\cdot)] &= E_\tau \dot{y}(-\tau) + L_\tau(0)x - L_\tau(-\tau)y(-\tau) + \int_{-\tau}^0 \frac{dL_\tau(s)}{ds} y(s) ds, \\ \partial_w u[x, y(\cdot), w(\cdot)] &= L_\Delta(0)u - L_\Delta(-\Delta)w(-\Delta) + \int_{-\Delta}^0 \frac{dL_\Delta(\zeta)}{d\zeta} y(\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Продифференцировав по t обе части уравнения (1.3), приходим к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + A_\tau y(-\tau) + \int_{-\tau}^0 A(s)y(s) ds + Bu + B_\Delta w(-\Delta) + \int_{-\Delta}^0 B(\zeta)w(\zeta) d\zeta, \\ \dot{u} = E\dot{x} + E_\tau \dot{y}(-\tau) + L_\tau(0)x - L_\tau(-\tau)y(-\tau) + \int_{-\tau}^0 \frac{dL_\tau(s)}{ds} y(s) ds \\ + L_\Delta(0)u - L_\Delta(-\Delta)w(-\Delta) + \int_{-\Delta}^0 \frac{dL_\Delta(\zeta)}{d\zeta} w(\zeta) d\zeta. \end{cases}$$

Выразив \dot{x} и $\dot{y}(-\tau)$ из первого уравнения полученной системы, получаем *замкнутую систему в дифференциальной форме*:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + A_\tau y(-\tau) + \int_{-\tau}^0 A(s)y(s) ds + Bu + B_\Delta w(-\Delta) + \int_{-\Delta}^0 B(\zeta)w(\zeta) d\zeta, \\ \dot{u} = [EA + L_\tau(0)]x + [EA_\tau - L_\tau(-\tau) + E_\tau A]y(-\tau) + E_\tau A_\tau y(-2\tau) \\ + \int_{-\tau}^0 \left[EA(s) + \frac{dL_\tau(s)}{ds} \right] y(s) ds + \int_{-\tau}^0 E_\tau A(s)y(-\tau + s) ds \\ + [EB + L_\Delta(0)]u + [EB_\Delta - L_\Delta(-\Delta)]w(-\Delta) + E_\tau Bw(-\tau) + E_\tau B_\Delta w(-\tau - \Delta) \\ + \int_{-\Delta}^0 \left[EB(\zeta) + \frac{dL_\Delta(\zeta)}{d\zeta} \right] y(\zeta) d\zeta + \int_{-\Delta}^0 E_\tau B(\zeta)y(-\tau + \zeta) d\zeta. \end{cases} \quad (1.6)$$

Утверждение 2. Система (1.6) с начальными условиями

$$\begin{cases} x(t_0) = x^0, \\ x(t_0 + s) = y^0(s), \quad -2\tau \leq s < 0, \\ u(0) = Ex^0 + E_\tau y^0(-\tau) + \int_{-\tau}^0 L_\tau(s)y^0(s) ds + \int_{-\Delta}^0 L_\Delta(\zeta)w^0(\zeta) ds, \\ u(t_0 + \zeta) = w^0(\zeta), \quad -\tau - \Delta \leq \zeta < 0, \end{cases} \quad (1.7)$$

имеет единственное решение на промежутке $[t_0; +\infty)$.

Доказательство. Рассмотрим множество $E_\kappa[x^0, y^0(\cdot), u^0, w^0(\cdot)]$, $\kappa > 0$, состоящее из пар функций $\{x(t), u(t)\}$, удовлетворяющих следующим условиям:

- (1) $x(\cdot) : [-2\tau; \kappa] \rightarrow R^n$, $u(\cdot) : [-\tau - \Delta; \kappa] \rightarrow R^r$ непрерывны на $[0; \kappa]$;
- (2) $x(0) = x^0$, $u(0) = u^0$;
- (3) $x(s) = y^0(s)$, $s \in [-2\tau; 0]$;
- (4) $u(s) = w^0(s)$, $s \in [-\tau - \Delta; 0]$.

Систему (1.6) можно записать в форме

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{u}(t) \end{pmatrix} = F[t, x, y(\cdot), u, w(\cdot)],$$

где

$$F[t, x, y(\cdot), u, w(\cdot)] = \begin{pmatrix} Ax + A_\tau y(-\tau) + \int_{-\tau}^0 A(s)y(s) ds + Bu + B_\Delta w(-\Delta) + \int_{-\Delta}^0 B(\zeta)w(\zeta) d\zeta \\ [EA + L_\tau(0)]x + [EA_\tau - L_\tau(-\tau) + E_\tau A]y(-\tau) + E_\tau A_\tau y(-2\tau) \\ + \int_{-\tau}^0 \left[EA(s) + \frac{dL_\tau(s)}{ds} \right] y(s) ds + \int_{-\tau}^0 E_\tau A(s)y(-\tau + s) ds \\ + [EB + L_\Delta(0)]u + [EB_\Delta - L_\Delta(-\Delta)]w(-\Delta) + E_\tau Bw(-\tau) + E_\tau B_\Delta w(-\tau - \Delta) \\ + \int_{-\Delta}^0 \left[EB(\zeta) + \frac{dL_\Delta(\zeta)}{d\zeta} \right] y(\zeta) d\zeta + \int_{-\Delta}^0 E_\tau B(\zeta)y(-\tau + \zeta) d\zeta \end{pmatrix}.$$

Известно [4, с. 73], что если отображение $F[t, x, y(\cdot), u, w(\cdot)]$:

(1) локально липшецово по $\{x, y(\cdot), u, w(\cdot)\}$, т. е. для любого ограниченного множества $D \subset R^n \times Q_{(n)}[-2\tau; 0] \times R^r \times Q_{(r)}[-\tau - \Delta; 0]$ существуют положительные константы L_1, L_2, L_3, L_4 такие, что при $\{x_1, y_1(\cdot), u_1, w_1(\cdot)\}, \{x_2, y_2(\cdot), u_2, w_2(\cdot)\} \in D$

$$\begin{aligned} & \left\| F[t, x_1, y_1(\cdot), u_1, w_1(\cdot)] - F[t, x_2, y_2(\cdot), u_2, w_2(\cdot)] \right\| \\ & \leq L_1 \|x_1 - x_2\|_{R^n} + L_2 \|y_1(\cdot) - y_2(\cdot)\|_{Q_{(n)}[-2\tau; 0]} + L_3 \|u_1 - u_2\|_{R^r} + L_4 \|w_1(\cdot) - w_2(\cdot)\|_{Q_{(r)}[-\tau - \Delta; 0]}; \end{aligned}$$

(2) непрерывно по сдвигу, т. е. для каждой пятерки $\{t_0, x^0, y^0(\cdot), u^0, w^0(\cdot)\} \in R \times R^n \times Q_{(n)}[-2\tau; 0] \times R^r \times Q_{(r)}[-\tau - \Delta; 0]$ существует $\kappa > 0$ такое, что для всех $\{x(\cdot), u(\cdot)\} \in E_\kappa[x^0, y^0(\cdot), u^0, w^0(\cdot)]$ функция $\Psi(t) = F[t, x, y(\cdot), u, w(\cdot)]$ непрерывна на $[t_0; t_0 + \kappa]$,

то для любых начальных данных $\{t_0, x^0, y^0(\cdot), u^0, w^0(\cdot)\} \in R \times R^n \times Q_{(n)}[-2\tau; 0] \times R^r \times Q_{(r)}[-\tau - \Delta; 0]$ существует $\bar{\kappa} \in (0; \kappa]$ такое, что на отрезке $[t_0 - \tau - \min\{\tau, \Delta\}; t_0 + \bar{\kappa}]$ решение системы (1.6), удовлетворяющее соответствующим начальным условиям, существует и единственно.

Отображение $F[t, x, y(\cdot), u, w(\cdot)]$ удовлетворяет приведенным условиям, откуда следует локальная единственность. В силу линейности решение бесконечно продолжаемо вправо.

Теорема 1. Пусть в системе (1.4) матрицы $L_\tau(\cdot)$ и $L_\Delta(\cdot)$ непрерывны и имеют кусочно-непрерывные производные, тогда задача (1.4), (1.5) эквивалентна задаче (1.6), (1.7). При этом функция $u(\cdot)$ является непрерывной и кусочно-дифференцируемой при $t > 0$ и удовлетворяет системе (1.6).

Доказательство. Покажем, что решение $\{x^*(\cdot), u^*(\cdot)\}$ задачи (1.6), (1.7) является решением задачи (1.4), (1.5).

Учитывая, что

$$\dot{x}^* = Ax^* + A_\tau y^*(-\tau) + \int_{-\tau}^0 A(s)y^*(s) ds + Bu^* + B_\Delta w^*(-\Delta) + \int_{-\Delta}^0 B(\zeta)w^*(\zeta) d\zeta,$$

получаем

$$\begin{aligned} \dot{u}^* = & E\dot{x}^* + E_\tau \dot{y}^*(-\tau) + L_\tau(0)x^* - L_\tau(-\tau)y^*(-\tau) + \int_{-\tau}^0 \frac{dL_\tau(s)}{ds} y^*(s) ds \\ & + L_\Delta(0)u^* - L_\Delta(-\Delta)w^*(-\Delta) + \int_{-\Delta}^0 \frac{dL_\Delta(\zeta)}{d\zeta} w^*(\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Далее интегрируем обе части получившегося выражения:

$$u^*(t) - u^*(0) = E[x^*(t) - x^*(0)] + E_\tau[y^*(-\tau) - y^0(-\tau)] + \int_{-\tau}^0 L_\tau(s)y^*(s) ds - \int_{-\tau}^0 L_\tau(s)y^0(s) ds + \int_{-\Delta}^0 L_\Delta(\zeta)w^*(\zeta) ds - \int_{-\Delta}^0 L_\Delta(\zeta)w^0(\zeta) ds.$$

Учитывая, что $u^*(0) = Ex^*(0) + E_\tau y^0(-\tau) + \int_{-\tau}^0 L_\tau(s)y^0(s) ds + \int_{-\Delta}^0 L_\Delta(\zeta)w^0(\zeta) ds$, получаем

$$u^*(t) = Ex^*(t) + E_\tau y^*(-\tau) + \int_{-\tau}^0 L_\tau(s)y^*(s) ds + \int_{-\Delta}^0 L_\Delta(\zeta)w^*(\zeta) ds.$$

Поскольку решения задач (1.4), (1.5) и (1.6), (1.7) существуют и единственны и определены на промежутке $t > 0$, то из доказанного следует, что и решение задачи (1.6), (1.7) является решением задачи (1.4), (1.5). Теорема доказана.

Основной целью настоящей работы является построение стабилизирующих управлений для системы (1.1).

О п р е д е л е н и е. Управление (1.3) стабилизирует систему (1.1), если тривиальное решение системы (1.6) асимптотически x -устойчиво, т. е. устойчиво по переменной x .

Отметим, что из асимптотической устойчивости (1.6) по всем переменным следует x -устойчивость, поэтому в дальнейшем рассмотрим вопрос о построении управления, для которого вся система (1.6) будет асимптотически устойчива.

Одним из методов решения задачи стабилизации является введение в рассмотрение некоторого квадратичного функционала качества и замена задачи стабилизации задачей управления. Сразу отметим, что задача состоит именно в стабилизации системы, поэтому структуру и коэффициенты функционала можно выбирать так, чтобы упростить *исходную* задачу.

Вычисление коэффициентов стабилизирующего управления для систем с последствием сводится к решению системы обобщенных уравнений Риккати (ОУР) (подробнее см. в разд. 2). Серьезной трудностью, возникающей на пути практического применения этого метода, является необходимость решения системы ОУР, представляющей собой систему алгебраических, обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений с запаздыванием и дифференциальных уравнений с частными производными. Разработанные в [6–10] приближенные методы решения ОУР зачастую сопряжены с большими сложностями, поэтому особенно остро встает вопрос нахождения способов упрощения системы ОУР и последующего ее решения.

В статье предложен метод явного сведения системы к одному алгебраическому уравнению, которое решается численно. Разработанный метод основан на идее введения дополнительных слагаемых в функционал качества [11, 12]. Подобная модификация функционала качества для систем с последствием использовалась в [5, 13–15] и работах других авторов.

2. Обобщенный квадратичный функционал качества

Поскольку выбор структуры вводимого функционала подчинен требованиям задачи стабилизации, то выгодно рассмотреть функционал вида (здесь и далее штрих означает транспонирование)

$$J = J[x(\cdot), u(\cdot)] = \int_0^\infty [Z + u' M u] dt, \tag{2.1}$$

где

$$\begin{aligned}
Z = Z[x(\cdot), u(\cdot)] = & x' \Phi_0 x \\
& + 2x' \int_{-\tau}^0 \Phi_1(s) y(s) ds + \int_{-\tau}^0 y'(s) \Phi_2(s) y(s) ds + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 y'(s) \Phi_3(s, \nu) y(\nu) ds d\nu + y'(-\tau) \Phi_4 y(-\tau) \\
& + 2x' \int_{-\Delta}^0 \Psi_1(s) w(s) ds + \int_{-\Delta}^0 w'(s) \Psi_2(s) w(s) ds + \int_{-\Delta}^0 \int_{-\Delta}^0 w'(s) \Psi_3(s, \nu) w(\nu) ds d\nu + w'(-\Delta) \Psi_4 w(-\Delta) \\
& + 2y'(-\tau) \int_{-\Delta}^0 \Upsilon_1(s) w(s) ds + y'(-\tau) \Upsilon_2(s) w(-\Delta) + 2 \int_{-\tau}^0 \int_{-\Delta}^0 y'(s) \Upsilon_3(s, \nu) w(\nu) ds d\nu.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь Φ_0 и Φ_4 — постоянные симметричные $(n \times n)$ -матрицы; $\Phi_1(s)$ — $(n \times n)$ -матрица с кусочно-непрерывными на $[-\tau; 0]$ коэффициентами; $\Phi_2(s)$ — симметричная $(n \times n)$ -матрица с кусочно-непрерывными на $[-\tau; 0]$ коэффициентами; $\Phi_3(s, \nu)$ — $(n \times n)$ -матрица с кусочно-непрерывными на $[-\tau; 0] \times [-\tau; 0]$ коэффициентами; $\Psi_1(s)$ — $(n \times r)$ -матрица с кусочно-непрерывными на $[-\Delta; 0]$ коэффициентами; $\Psi_2(s)$ — симметричная $(r \times r)$ -матрица с кусочно-непрерывными на $[-\Delta; 0]$ коэффициентами; $\Psi_3(s, \nu)$ — $(r \times r)$ -матрица с кусочно-непрерывными на $[-\Delta; 0] \times [-\Delta; 0]$ коэффициентами; Ψ_4 — постоянная симметричная $(r \times r)$ -матрица; $\Upsilon_1(s)$ — $(n \times r)$ -матрица с кусочно-непрерывными на $[-\Delta; 0]$ коэффициентами; Υ_2 — постоянная симметричная $(n \times r)$ -матрица; $\Upsilon_3(s, \nu)$ — $(n \times r)$ -матрица с кусочно-непрерывными на $[-\tau; 0] \times [-\Delta; 0]$ коэффициентами; M — симметричная положительно определенная $(r \times r)$ -матрица.

Матрицы $\Phi_0, \dots, \Upsilon_3$ являются некоторыми заранее не фиксированными параметрами; располагаясь ими, мы сможем упростить систему ОУР и предложим эффективный метод ее решения.

3. Обобщенные уравнения Риккати

При построении синтеза управления на основе теории аналитического конструирования оптимальных регуляторов принципиальным является нахождение решений системы ОУР, описывающей коэффициенты управления. Ниже мы выведем ОУР. Отметим, что ОУР выводятся на основе необходимых условий минимума функционала качества.

Обозначим через $W[x, y(\cdot), w(\cdot)]$ оптимальное значение функционала качества для задачи (1.4), (2.1) в позиции $\{x, y(\cdot), w(\cdot)\} \in H$. Будем предполагать, $W[x, y(\cdot), w(\cdot)]$ имеет вид

$$\begin{aligned}
W = W[x, y(\cdot), w(\cdot)] = & x' P x \\
& + 2x' \int_{-\tau}^0 D(s) y(s) ds + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 y'(s) R(s, \nu) y(\nu) ds d\nu + \int_{-\tau}^0 y'(s) \Pi(s) y(s) ds \\
& + 2x' \int_{-\Delta}^0 \Lambda(s) w(s) ds + \int_{-\Delta}^0 \int_{-\Delta}^0 w'(s) \Theta(s, \nu) w(\nu) ds d\nu + \int_{-\Delta}^0 w'(s) \Xi(s) w(s) ds \\
& + 2 \int_{-\tau}^0 \int_{-\Delta}^0 y'(s) \beta(s, \nu) w(\nu) ds d\nu + 2y'(-\tau) \int_{-\Delta}^0 \gamma(s) w(s) ds.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

В теореме 2 получен явный вид оптимального управления и ОУР для коэффициентов функционала (3.1). Можно показать, что функционал (3.1) не убывает вдоль решений, а при оптимальном управлении сохраняет постоянное значение, таким образом, действительно, является функционалом Беллмана (для систем без запаздывания по управлению см., например, [4, с. 182]).

Теорема 2. *Предположим, что:*

- (1) *существует решение задачи (1.4), (2.1);*
- (2) *P — симметричная $(n \times n)$ -матрица;*
- (3) *элементы $(n \times n)$ -матриц $D(\cdot)$ и $\Pi(\cdot)$ непрерывны и кусочно-дифференцируемы на $[-\tau, 0]$*
- (4) *элементы $(n \times r)$ -матриц $\Lambda(\cdot)$ и $\Xi(\cdot)$ непрерывны и кусочно-дифференцируемы на $[-\Delta, 0]$;*
- (5) *элементы $(n \times n)$ -матрицы $R(\cdot, \cdot)$ и ее производных $\partial R(s, \nu)/\partial s$ и $\partial R(s, \nu)/\partial \nu$ непрерывны всюду на $[-\tau, 0] \times [-\tau, 0]$ исключая, быть может, линию $s = \nu$;*
- (6) *элементы $(n \times r)$ -матрицы $\Theta(\cdot, \cdot)$ и ее производных $\partial \Theta(s, \nu)/\partial s$ и $\partial \Theta(s, \nu)/\partial \nu$ непрерывны всюду на $[-\Delta, 0] \times [-\Delta, 0]$ исключая, быть может, линию $s = \nu$;*
- (7) *для матрицы $R(\cdot, \cdot)$ выполнено условие $R(s, \nu) = R'(\nu, s)$ на $[-\tau, 0] \times [-\tau, 0]$;*
- (8) *для матрицы $\Theta(\cdot, \cdot)$ выполнено условие $\Theta(s, \nu) = \Theta'(\nu, s)$ на $[-\Delta, 0] \times [-\Delta, 0]$;*
- (9) *элементы $(n \times r)$ -матрицы $\beta(\cdot, \cdot)$ и ее производных $\partial \beta(s, \nu)/\partial s$ и $\partial \beta(s, \nu)/\partial \nu$ непрерывны всюду на $[-\tau, 0] \times [-\Delta, 0]$;*
- (10) *элементы $(n \times r)$ -матрицы $\gamma(\cdot)$ непрерывны и кусочно-дифференцируемы на $[-\Delta, 0]$.*

Тогда матрицы $P, D(\cdot), R(\cdot, \cdot), \Pi(\cdot), \Lambda(\cdot), \Theta(\cdot, \cdot), \Xi(\cdot)$ являются решением системы ОУР:

$$\begin{aligned}
 P'A + A'P + D(0) + D'(0) + \Pi(0) + \Phi_0 &= [P'B + \Lambda(0)]K[B'P + \Lambda'(0)], \\
 \frac{dD(s)}{ds} &= P'A(s) + A'D(s) + R(0, s) - [P'B + \Lambda(0)]K[B'D(s) + \beta'(s, 0)] + \Phi_1(s), \\
 \frac{d\Lambda(s)}{ds} &= P'B(s) + A'\Lambda(s) + \beta(0, s) - [P'B + \Lambda(0)]K[B'\Lambda(s) + \Theta(0, s)] + \Psi_1(s), \\
 \frac{d\Pi(s)}{ds} &= \Phi_2(s), \\
 \frac{d\Xi(s)}{ds} &= \Psi_2(s), \\
 \frac{\partial R(s, \nu)}{\partial s} + \frac{\partial R(s, \nu)}{\partial \nu} &= D'(s)A(\nu) + A'(\nu)D(s) - [D'(s)B + \beta(s, 0)]K[B'D(\nu) + \beta'(\nu, 0)] + \Phi_3(s, \nu), \\
 \frac{\partial \Theta(s, \nu)}{\partial s} + \frac{\partial \Theta(s, \nu)}{\partial \nu} &= \Lambda'(s)B(\nu) + B'(\nu)\Lambda(s) - [\Lambda'(s)B + \Theta(s, 0)]K[B'\Lambda(\nu) + \Theta(0, \nu)] + \Psi_3(s, \nu), \\
 \frac{\partial \beta(s, \nu)}{\partial s} + \frac{\partial \beta(s, \nu)}{\partial \nu} &= D'(s)B(\nu) + A'(s)\Lambda(s) - [D'(s)B + \beta(s, 0)]K[B'\Lambda(\nu) + \Theta(0, \nu)] + \Upsilon_3(s, \nu), \\
 \frac{d\gamma(s)}{ds} &= A'_\tau \Lambda(s) - \beta(-\tau, s) + \gamma(0)K[B'\Lambda(s) + \Theta(0, s)] + \Upsilon_1(s),
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned}
 D(-\tau) &= P'A_\tau + \gamma(0)K[B'P + \Lambda'(0)], \\
 \Lambda(-\Delta) &= P'B_\Delta, \\
 \Pi(-\tau) &= \Phi_4 + \gamma(0)K\gamma'(0), \\
 \Xi(-\Delta) &= \Psi_4, \\
 R(-\tau, s) &= A'_\tau D(s) + \gamma(0)K[B'D(s) + \beta'(s, 0)], \\
 \Theta(-\Delta, s) &= B'_\Delta \Lambda(s), \\
 \beta'(s, -\Delta) &= B'_\Delta D(s), \\
 \gamma(-\Delta) &= \Upsilon_2
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

и условиями симметрии $P = P'$, $R(s, \nu) = R'(\nu, s)$, $\Theta(s, \nu) = \Theta'(\nu, s)$.

Доказательство. В силу свойств матриц $D(\cdot), R(\cdot, \cdot), \Pi(\cdot), \Lambda(\cdot), \Theta(\cdot, \cdot), \Xi(\cdot), \beta(\cdot, \cdot)$ функционал $W[x, y(\cdot), w(\cdot)]$ является инвариантно дифференцируемым в каждой позиции $(x, y(\cdot), w(\cdot)) \in H$ (см. [4]).

Построим функцию:

$$\alpha(u) = \frac{\partial W'[x, y(\cdot), w(\cdot)]}{\partial x} \left[Ax + A_\tau y(-\tau) + \int_{-\tau}^0 A(s)y(s) ds + Bu + B_\Delta w(-\Delta) + \int_{-\Delta}^0 B(\zeta)w(\zeta) d\zeta \right] \\ + \partial_y W[x, y(\cdot), w(\cdot)] + \partial_w W[x, y(\cdot), w(\cdot)] + Z[x, y(\cdot), w(\cdot)] + u'Mu. \quad (3.4)$$

Найдем градиент и инвариантные производные.

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 2Px + 2 \int_{-\tau}^0 D(s)y(s) ds + 2 \int_{-\Delta}^0 \Lambda(s)w(s) ds. \\ \partial_y W = 2x'D(0)x - 2x'D(-\tau)y(-\tau) - 2x' \int_{-\tau}^0 \frac{dD(s)}{ds} y(s) ds \\ + x' \int_{-\tau}^0 (R(0, s) + R'(s, 0))y(s) ds - y'(-\tau) \int_{-\tau}^0 (R(-\tau, s) + R'(s, -\tau))y(s) ds \\ - \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 y'(s) \left(\frac{\partial R(s, \nu)}{\partial s} + \frac{\partial R(s, \nu)}{\partial \nu} \right) y(\nu) ds \\ + x'\Pi(0)x - y'(-\tau)\Pi(-\tau)y(-\tau) - \int_{-\tau}^0 y'(s) \frac{d\Pi(s)}{ds} y(-\tau) ds \\ + 2x' \int_{-\Delta}^0 \beta(0, s)w(s) ds - 2y'(-\tau) \int_{-\Delta}^0 \beta(-\tau, s)w(s) ds - 2 \int_{-\tau}^0 \int_{-\Delta}^0 y'(s) \frac{\partial \beta(s, \nu)}{\partial s} w(\nu) ds d\nu. \\ \partial_w W = 2x'\Lambda(0)u - 2x'\Lambda(-\Delta)w(-\Delta) - 2x' \int_{-\Delta}^0 \frac{d\Lambda(s)}{ds} w(s) ds \\ + u' \int_{-\Delta}^0 (\Theta(0, s) + \Theta'(s, 0))w(s) ds - w'(-\Delta) \int_{-\Delta}^0 (\Theta(-\Delta, s) + \Theta'(s, -\Delta))w(s) ds \\ - \int_{-\Delta}^0 \int_{-\Delta}^0 w'(s) \left(\frac{\partial \Theta(s, \nu)}{\partial s} + \frac{\partial \Theta(s, \nu)}{\partial \nu} \right) w(\nu) ds \\ + u'\Xi(0)u - w'(-\Delta)\Xi(-\Delta)w(-\Delta) - \int_{-\Delta}^0 w'(s) \frac{d\Xi(s)}{ds} w(-\Delta) ds \\ + 2 \int_{-\tau}^0 y'(s)\beta(s, 0) ds u - 2 \int_{-\tau}^0 y'(s)\beta(s, -\Delta) ds w(-\Delta) - 2 \int_{-\tau}^0 \int_{-\Delta}^0 y'(s) \frac{\partial \beta(s, \nu)}{\partial \nu} w(\nu) ds d\nu \\ + 2y'(-\tau)\gamma(0)u - 2y'(-\tau)\gamma(-\Delta)w(-\Delta) - 2y'(-\tau) \int_{-\Delta}^0 \frac{d\gamma(s)}{ds} w(s) ds.$$

Так как функционал $W[(x, y(\cdot), w(\cdot))]$ не убывает вдоль допустимых траекторий, а вдоль оптимальной траектории постоянен, то оптимальное стабилизирующее управление

$u^*(x, y(\cdot), w(\cdot))$ должно минимизировать функцию $\alpha(u)$ и, более того, $\alpha(u^*(x, y(\cdot), w(\cdot))) = 0$. Функция $\alpha(u)$ является квадратичной формой относительно $u \in R^r$; с учетом того, что

$$\frac{\partial^2 \alpha(u)}{\partial^2 u} = 2(\Xi(0) + M) > 0,$$

значение u^* , минимизирующее $\alpha(u)$, может быть найдено из соотношения

$$\frac{\partial \alpha(u)}{\partial u} = 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha(u)}{\partial u} &= B' \frac{\partial W}{\partial x} + 2\Lambda'(0)x + \int_{-\Delta}^0 (\Theta(0, s) + \Theta'(s, 0))w(s) ds \\ &+ 2 \int_{-\tau}^0 \beta'(s, 0)y(s) ds + 2\gamma'(0)y(-\tau) + 2\Xi(0)u + 2Mu = 0. \end{aligned}$$

Подставив выражение для $\partial W / \partial x$ и выразив u , получим

$$\begin{aligned} u^* &= -K \left[(B'P + \Lambda'(0))x + \int_{-\tau}^0 (B'D(s) + \beta'(s, 0))y(s) ds + \gamma'(0)y(-\tau) \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\Delta}^0 (B'\Lambda(s) + \Theta(0, s))w(s) ds \right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $K = [\Xi(0) + M]^{-1}$.

Подставив в (3.4) выражения для градиента и инвариантных производных и проведя соответствующие преобразования, получим:

$$\begin{aligned} &x' [2P'A + 2D(0) + \Pi(0) - [P'B + \Lambda(0)]K[B'P + \Lambda'(0)] + \Phi_0]x \\ &\quad + x' [2P'A_\tau - 2D(-\tau) - [P'B + \Lambda(0)]K\gamma(0)]y(-\tau) \\ &+ x' \int_{-\tau}^0 \left[2P'A(s) + 2A'D(s) - 2\frac{dD(s)}{ds} + 2R(0, s) - 2[P'B + \Lambda(0)]K[B'D(s) + \beta'(s, 0)] \right. \\ &\quad \left. + 2\Phi_1(s) \right] y(s) ds + x' [2P'B_\Delta - 2\Lambda(-\Delta)]w(-\Delta) \\ &+ x' \int_{-\Delta}^0 \left[2P'B(s) + 2A'\Lambda(s) - 2\frac{d\Lambda(s)}{ds} + 2\beta(0, s) - 2[P'B + \Lambda(0)]K[B'\Lambda(s) + \Theta(0, s)] \right. \\ &\quad \left. + 2\Psi_1(s) \right] w(s) ds + y'(-\tau) [-\Pi(-\tau) - \gamma(0)K\gamma'(0) + \Phi_4]y(-\tau) \\ &+ y'(-\tau) \int_{-\tau}^0 \left[2A'_\tau D(s) - 2R(-\tau, s) - \gamma(0)K[B'D(s) + \beta'(s, 0)] \right] y(s) ds \\ &\quad + \int_{-\tau}^0 y'(s) \left[-\frac{d\Pi(s)}{ds} + \Phi_2(s) \right] y(s) ds \\ &+ \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 y'(s) \left[2D'(s)A(\nu) - \frac{\partial R(s, \nu)}{\partial s} - \frac{\partial R(s, \nu)}{\partial \nu} - [D'(s)B + \beta(s, 0)]K[B'D(\nu) + \beta'(\nu, 0)] \right. \\ &\quad \left. + \Phi_3(s, \nu) \right] y(\nu) ds d\nu + 2y'(-\tau) [-\gamma(-\Delta) + \Upsilon_2]w(-\Delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + y'(-\tau) \int_{-\Delta}^0 \left[2A'_\tau \Lambda(s) - 2\beta(-\tau, s) - 2\frac{d\gamma(s)}{ds} - \gamma(0)K[B'\Lambda(s) + \Theta(0, s)] \right] w(s) ds \\
& \quad + w'(-\Delta) \int_{-\tau}^0 [2B'_\Delta D(s) - 2\beta'(s, -\Delta)] y(s) ds \\
& + \int_{-\tau}^0 \int_{-\Delta}^0 y'(s) \left[2D'(s)B(\nu) + 2A'(s)\Lambda(s) - 2[D'(s)B + \beta(s, 0)]K[B'\Lambda(\nu) + \Theta(0, \nu)] \right. \\
& \quad \left. - 2\frac{\partial\beta(s, \nu)}{\partial s} - 2\frac{\partial\beta(s, \nu)}{\partial\nu} + 2\Upsilon(s, \nu) \right] w(\nu) ds d\nu + w'(-\Delta) [-\Xi(-\Delta) + \Psi_4] w(-\Delta) \\
& + w'(-\Delta) \int_{-\Delta}^0 [2B'_\Delta \Lambda(s) - 2\Theta(-\Delta, s)] w(s) ds + \int_{-\Delta}^0 w'(s) \left[-\frac{d\Xi(s)}{ds} + \Psi_2(s) \right] w(s) ds \\
& + \int_{-\Delta}^0 \int_{-\Delta}^0 w'(s) \left[2\Lambda'(s)B(\nu) - \frac{\partial\Theta(s, \nu)}{\partial s} - \frac{\partial\Theta(s, \nu)}{\partial\nu} - [\Lambda'(s)B + \Theta(s, 0)]K[B'\Lambda(\nu) + \Theta(0, \nu)] \right. \\
& \quad \left. + \Psi_3(s, \nu) \right] w(\nu) ds d\nu = 0.
\end{aligned}$$

Тройка $\{x, y(\cdot), w(\cdot)\}$ является произвольным элементом из H , следовательно, квадратичный функционал $\alpha(u^*(x, y(\cdot), w(\cdot)))$ равен нулю, если его коэффициенты равны нулю. Воспользуемся свойством квадратичной формы $x'Ax = x'(1/2 A + 1/2 A')x$. Отсюда и получаем искомые уравнения, граничные условия и условия симметричности. Теорема доказана.

4. Явные решения обобщенных уравнений Риккати

В этом разделе описывается подход к нахождению явных решений ОУР. Подход основан на подходящем выборе матриц $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Upsilon_1, \Upsilon_2, \Upsilon_3$ в функционале качества (2.1). В рамках такого подхода матрицы $\Phi_0, \dots, \Upsilon_3$ представляются через матрицы $P, D(s), R(s, \nu), \Lambda(s), \Theta(s, \nu), \beta(s, \nu), \gamma(s)$ таким образом, чтобы упростить систему (3.2).

$$\begin{aligned}
\Phi_0 &= C_{\phi_0}, \\
\Phi_1(s) &= -P'A(s) - R(0, s) + [P'B + \Lambda(0)]K[B'D(s) + \beta'(s, 0)], \\
\Phi_2(s) &= \phi_2(s), \\
\Phi_3(s, \nu) &= -D'(s)A(\nu) - A'(\nu)D(s) + [D'(s)B + \beta(s, 0)]K[B'D(\nu) + \beta'(\nu, 0)], \\
\Phi_4 &= C_{\phi_4}, \\
\Psi_1(s) &= -P'B(s) - \beta(0, s) + [P'B + \Lambda(0)]K[B'\Lambda(s) + \Theta(0, s)], \\
\Psi_2(s) &= \psi_2(s), \\
\Psi_3(s, \nu) &= -\Lambda'(s)B(\nu) - B'(\nu)\Lambda(s) + [\Lambda'(s)B + \Theta(s, 0)]K[B'\Lambda(\nu) + \Theta(0, \nu)], \\
\Psi_4 &= C_{\psi_4}, \\
\Upsilon_1(s) &= -A'_\tau \Lambda(s) + \beta(-\tau, s) + \gamma(0)K[B'\Lambda(s) + \Theta(0, s)] + v(s), \\
\Upsilon_2 &= - \int_{-\Delta}^0 v(s) ds, \\
\Upsilon_3(s, \nu) &= -D'(s)B(\nu) - A'(s)\Lambda(s) + [D'(s)B + \beta(s, 0)]K[B'\Lambda(\nu) + \Theta(0, \nu)]
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь $C_{\phi_0}, C_{\phi_4}, C_{\psi_4}, \phi_2(s), \psi_2(s), v(s)$ — произвольные матрицы соответствующих размерностей.

Система ОУР, соответствующая весовым матрицам (4.1), заметно упрощается и принимает вид:

$$\begin{aligned}
 P'A + A'P + D(0) + D'(0) + \Pi(0) + C_{\phi 0} &= [P'B + \Lambda(0)]K[B'P + \Lambda'(0)], \\
 \frac{dD(s)}{ds} &= A'D(s), \\
 \frac{d\Lambda(s)}{ds} &= A'\Lambda(s), \\
 \frac{d\Pi(s)}{ds} &= \phi_2(s), \\
 \frac{d\Xi(s)}{ds} &= \psi_2(s), \\
 \frac{\partial R(s, \nu)}{\partial s} + \frac{\partial R(s, \nu)}{\partial \nu} &= 0, \\
 \frac{\partial \Theta(s, \nu)}{\partial s} + \frac{\partial \Theta(s, \nu)}{\partial \nu} &= 0, \\
 \frac{\partial \beta(s, \nu)}{\partial s} + \frac{\partial \beta(s, \nu)}{\partial \nu} &= 0, \\
 \frac{d\gamma(s)}{ds} &= v(s)
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned}
 D(-\tau) &= P'A_\tau, \\
 \Lambda(-\Delta) &= P'B_\Delta, \\
 \Pi(-\tau) &= C_{\phi 4}, \\
 \Xi(-\Delta) &= C_{\psi 4}, \\
 R(-\tau, s) &= A'_\tau D(s), \\
 \Theta(-\Delta, s) &= B'_\Delta \Lambda(s), \\
 \beta'(s, -\Delta) &= B'_\Delta D(s), \\
 \gamma(-\Delta) &= - \int_{-\Delta}^0 v(s) ds
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

и условиями симметрии $P = P'$, $R(s, \nu) = R'(\nu, s)$, $\Theta(s, \nu) = \Theta'(\nu, s)$.

Теорема 3. Пусть в системе ОУР $C_{\phi 0}, C_{\phi 4}, C_{\psi 4}$ — симметричные матрицы; $\phi_2(s)$ — симметричная матрица с кусочно-непрерывными на $[-\tau; 0]$ коэффициентами; $\psi_2(s), v(s)$ — симметричные матрицы с кусочно-непрерывными на $[-\Delta; 0]$ коэффициентами. Пусть P является решением матричного уравнения

$$PA + A'P + e^{A'\tau} PA_\tau + A'_\tau P e^{A\tau} + \int_{-\tau}^0 \phi_2(\zeta) d\zeta + C_{\phi 4} + C_{\phi 0} = [PB + e^{A'\Delta} PB_\Delta]K[B'P + B'_\Delta P e^{A\Delta}], \tag{4.4}$$

а матрицы $D(s), \Lambda(s), \Pi(s), \Xi(s), R(s, \nu), \Theta(s, \nu), \beta(s, \nu), \gamma(s)$ заданы по формулам:

$$D(s) = e^{A'(s+\tau)} P'A_\tau, \quad \Pi(s) = \int_{-\tau}^s \phi_2(\zeta) d\zeta + C_{\phi 4}, \quad R(s, \nu) = \begin{cases} T(s)D(\nu), & (s, \nu) \in \Omega_{\tau 1}, \\ D'(s)T'(\nu), & (s, \nu) \in \Omega_{\tau 2} \end{cases}$$

$$\Lambda(s) = e^{A'(s+\Delta)} P'B_\Delta, \quad \Xi(s) = \int_{-\Delta}^s \psi_2(\zeta) d\zeta + C_{\psi 4}, \quad \Theta(s, \nu) = \begin{cases} Q(s)\Lambda(\nu), & (s, \nu) \in \Omega_{\Delta 1}, \\ \Lambda'(s)Q'(\nu), & (s, \nu) \in \Omega_{\Delta 2} \end{cases}$$

$$\beta(s, \nu) = D'(s - \nu - \Delta)B_\Delta, \quad \gamma(s) = \int_0^s v(\zeta) d\zeta,$$

где

$$\begin{aligned}\Omega_{\tau 1} &= \{(s, \nu) \in [-\tau, 0] \times [-\tau, 0] : s < \nu\}; \\ \Omega_{\tau 2} &= \{(s, \nu) \in [-\tau, 0] \times [-\tau, 0] : s > \nu\}; \\ \Omega_{\Delta 1} &= \{(s, \nu) \in [-\Delta, 0] \times [-\Delta, 0] : s < \nu\}; \\ \Omega_{\Delta 2} &= \{(s, \nu) \in [-\Delta, 0] \times [-\Delta, 0] : s > \nu\}; \\ T(s) &= A'_\tau e^{-A'(s+\tau)}, \quad Q(s) = B'_\Delta e^{-A'(s+\Delta)}.\end{aligned}$$

Тогда матрицы $P, D(s), \Pi(s), R(s, \nu), \Lambda(s), \Xi(s), \Theta(s, \nu), \beta(s, \nu), \gamma(s)$ являются решением ОУР (4.2), (4.3).

Доказательство. Матрица $D(s)$. Решение уравнения $dD(s)/ds = A'D(s)$, т. е. второго уравнение системы (4.2), на отрезке $[-\tau; 0]$ имеет вид

$$D(s) = e^{A'(s+\tau)} C_D.$$

Константу C_D можно найти из граничного условия $D(-\tau) = C_D = P'A_\tau$. Таким образом,

$$D(s) = e^{A'(s+\tau)} P'A_\tau.$$

Матрица $\Lambda(s)$. Решение уравнения $d\Lambda(s)/ds = A'\Lambda(s)$, т. е. третьего уравнение системы (4.2), на отрезке $[-\Delta; 0]$ имеет вид

$$\Lambda(s) = e^{A'(s+\Delta)} C_\Lambda.$$

Константу C_Λ можно найти из граничного условия $\Lambda(-\Delta) = C_\Lambda = P'B_\Delta$. Таким образом,

$$\Lambda(s) = e^{A'(s+\Delta)} P'B_\Delta.$$

Матрица $\Pi(s)$. Решение уравнения $d\Pi(s)/ds = \phi_2(s)$, т. е. четвертого уравнение системы (4.2), с начальным условием $\Pi(-\tau) = C_{\phi 4}$ имеет вид

$$\Pi(s) = \int_{-\tau}^s \phi_2(\zeta) d\zeta + C_{\phi 4}.$$

Матрица $\Xi(s)$. Решение уравнения $d\Xi(s)/ds = \psi_2(s)$, т. е. пятого уравнение системы (4.2), с начальным условием $\Xi(-\Delta) = C_{\psi 4}$ имеет вид

$$\Xi(s) = \int_{-\Delta}^s \psi_2(\zeta) d\zeta + C_{\psi 4}.$$

Матрица $R(s, \nu)$. В области $\Omega_{\tau 1} = \{(s, \nu) \in [-\tau, 0] \times [-\tau, 0] : s < \nu\}$ имеем $R(s, \nu) = T(s)D(\nu)$, поэтому

$$\begin{aligned}\frac{\partial R(s, \nu)}{\partial s} + \frac{\partial R(s, \nu)}{\partial \nu} &= \frac{dT(s)}{ds} D(\nu) + T(s) \frac{dD(s)}{ds} \\ &= \frac{dT(s)}{ds} D(\nu) + T(s) A' D(\nu) = \left(\frac{dT(s)}{ds} + T(s) A' \right) D(\nu) = 0.\end{aligned}$$

Поскольку $D(\nu)$ не особенная, то имеем $dT(s)/ds = -T(s)A'$. Откуда получаем $T(s) = C_T e^{-A'(s+\tau)}$. Константу C_T найдем из граничного условия $R(-\tau, \nu) = T(-\tau)D(\nu) =$ [граничное условие] $= A'_\tau D(\nu)$; следовательно, $T(-\tau) = A'_\tau$. С другой стороны, $T(-\tau) = C_T e^0$; сопоставляя два последних равенства, получим $C_T = A'_\tau$ и

$$R(s, \nu) = A'_\tau e^{-A'(s+\tau)} D(\nu), \quad (s, \nu) \in \Omega_{\tau 1}.$$

В области $\Omega_{\tau 2} = \{(s, \nu) \in [-\tau, 0] \times [-\tau, 0] : s > \nu\}$ имеем $R(s, \nu) = D'(s)T'(\nu)$, поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(s, \nu)}{\partial s} + \frac{\partial R(s, \nu)}{\partial \nu} &= \frac{dD'(s)}{ds}T'(\nu) + D'(s)\frac{dT'(s)}{ds} \\ &= D'(s)AT'(\nu) + D'(s)\frac{dT'(\nu)}{ds} = D'(s)\left(AT'(s) + \frac{dT'(s)}{ds}\right) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку $D(s)$ не особенная, то имеем $AT'(s) + dT'(s)/ds = 0$. Откуда получаем $T'(s) = e^{-A(s+\tau)}C_T$. Константу C_T надо выбирать так, чтобы удовлетворить условию симметрии $R(s, \nu) = R'(\nu, s)$. В результате получим

$$R(s, \nu) = D'(s)e^{-A(\nu+\tau)}A_\tau, \quad (s, \nu) \in \Omega_{\tau 2}.$$

Матрица $\Theta(s, \nu)$. Рассуждения аналогичны только что проделанным.

Матрица $\beta(s, \nu)$. Решение уравнения $\partial\beta(s, \nu)/\partial s + \partial\beta(s, \nu)/\partial \nu = 0$, т. е. восьмого уравнения системы (4.2), следует искать в виде $\beta(s, \nu) = \tilde{\beta}(s - \nu)$. В силу граничного условия имеем $\beta(s, -\Delta) = \tilde{\beta}(s + \Delta) = [\text{граничное условие}] = D'(s)B_\Delta$. Откуда находим $\tilde{\beta}(s - \nu) = D'(s - \nu - \Delta)B_\Delta$ и в итоге получаем

$$\beta(s, \nu) = D'(s - \nu - \Delta)B_\Delta.$$

Матрица $\gamma(s)$. Решение уравнения $d\gamma(s)/ds = v(s)$, т. е. последнего уравнения системы (4.2), имеет вид $\gamma(s) = \int_{-\Delta}^s v(\zeta) d\zeta + C_\gamma$. Константу C_γ определим из начального условия $\gamma(-\Delta) = -\int_{-\Delta}^0 v(s) ds$, получим $C_\gamma = -\int_{-\Delta}^0 v(s) ds$. В итоге имеем

$$\gamma(s) = \int_0^s v(\zeta) d\zeta.$$

Теорема доказана.

5. Достаточные условия стабилизируемости

Известно, что для систем с последствием, в отличие от конечномерных систем, линейное управление, построенное на основе решения ОУР, не всегда является стабилизирующим. Следующая теорема дает достаточные условия стабилизируемости системы.

Теорема 4. Пусть выполнены следующие условия:

- (1) *весовой функционал $Z[x, y(\cdot), w(\cdot)]$ является положительно определенным на H ;*
- (2) *матрицы $P, D, R, \Pi, \Lambda, \Theta, \Xi, \beta, \gamma$ являются решением системы ОУР (3.2);*
- (3) *функционал Беллмана $W[x, y(\cdot), w(\cdot)]$ является положительно определенным на H ,* тогда система (1.1) стабилизируема и управление с обратной связью (3.5) является решением задачи стабилизации (1.1), (1.3) в классе стабилизирующих управлений, а минимальное значение функционала качества J , соответствующее начальной позиции $\{x, y(\cdot), w(\cdot)\}$, имеет вид (3.1).

Доказательство. В соответствии с определением (см. с. 147) достаточно проверить асимптотическую устойчивость тривиального решения замкнутой системы в дифференциальной форме (1.6); еще раз обратим внимание на то, что система (1.6) относительно $(n + r)$ -мерного вектора $(x; u)$ является системой с запаздыванием только в координатах.

Рассмотрим положительно определенный функционал (3.1) как функционал Ляпунова для этой системы. С учетом того что матрицы $P, D, R, \Pi, \Lambda, \Theta, \Xi, \beta, \gamma$ являются решением системы ОУР, полная производная функционала (3.1) в силу системы (1.1) имеет вид

$$\dot{W}_{(1.1)} = -Z[x, y(\cdot), w(\cdot)] - u'Mu.$$

Квадратичный функционал $Z[x, y(\cdot), w(\cdot)]$ является положительно определенным, следовательно, функционал $\dot{W}_{(1.1)}$ будет отрицательно определенным на H . Таким образом, тривиальное решение системы (1.6) асимптотически устойчиво [3, с. 172], а, значит, система (1.1) стабилизируема управлением (3.5). Теорема доказана.

6. Пример

Применение развиваемого метода к стабилизации системы (1.1) с помощью управления (1.3) можно разбить на три этапа: (1) выбор свободных параметров $C_{\phi_0}, \dots, v(s)$, нахождение матриц — коэффициентов усиления — $P, D(s), \dots, \gamma(s)$ и матриц — коэффициентов весового функционала $Z — \Phi_0, \dots, \Upsilon_3(s, \nu)$; (2) доказательство положительной определенности функционалов W и Z ; (3) построение управления по принципу обратной связи. Стабилизирующее управление находится по (1.3); в соответствии с (3.5) имеем $E = -K(B'P + \Lambda'(0))$,

$$E_\tau = -K\gamma'(0), L_\tau(s) = -K \int_{-\tau}^0 (B'D(s) + \beta'(s, 0)) ds, L_\Delta(s) = -K \int_{-\Delta}^0 (B'\Lambda(s) + \Theta'(s, 0)) ds.$$

Проиллюстрируем сказанное на примере. Рассмотрим управляемую систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - 3x_2 + \frac{1}{5} \int_{-1}^0 e^s y_1(s) ds + u + \frac{1}{5} \int_{-0.5}^0 \sin(2\pi\zeta) w(\zeta) d\zeta, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - x_2 + \frac{1}{5} \int_{-1}^0 e^s y_2(s) ds + \frac{1}{5} \int_{-0.5}^0 \sin(2\pi\zeta) w(\zeta) d\zeta. \end{cases}$$

Тривиальное решение неуправляемой системы ($u(\cdot) \equiv 0$) неустойчиво. Следуя алгоритму, построим стабилизирующее управление (1.3) в три этапа.

(1) Зададим управляющие параметры следующим образом: $M = 1/20$, $C_{\phi_0} = \begin{pmatrix} 2/5 & 0 \\ 0 & 4/5 \end{pmatrix}$, $C_{\phi_4} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 2/5 \end{pmatrix}$, $\phi_2(s) \equiv \begin{pmatrix} 2/5 & 0 \\ 0 & 4/5 \end{pmatrix}$, $C_{\psi_4} = 1/20$, $\psi(s) \equiv 1/5$, $v(s) \equiv 0$.

Уравнение (4.4) допускает решение $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Остальные матрицы — коэффициенты усиления — найдем с использованием теоремы 3: $D(s) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R(s, \nu) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\Lambda(s) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\Theta(s, \nu) \equiv 0$, $\beta(s, \nu) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\gamma(s) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\Pi(s) = \begin{pmatrix} (2s+3)/5 & 0 \\ 0 & (4s+6)/5 \end{pmatrix}$, $\Xi(s) = (4s+3)/20$.

Из (4.1) получим $\Phi_0 = \begin{pmatrix} 2/5 & 0 \\ 0 & 4/5 \end{pmatrix}$, $\Phi_1(s) = -1/5 \begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^s \end{pmatrix}$, $\Phi_2(s) \equiv \begin{pmatrix} 2/5 & 0 \\ 0 & 4/5 \end{pmatrix}$, $\Phi_3(s, \nu) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\Phi_4 = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 2/5 \end{pmatrix}$, $\Psi_1(s) = -1/5 \begin{pmatrix} \sin(2\pi s) \\ \sin(2\pi s) \end{pmatrix}$, $\Psi_2(s) \equiv 1/5$, $\Psi_3(s, \nu) \equiv 0$, $\Psi_4 = 1/20$, $\Upsilon_1(s) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\Upsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\Upsilon_3(s, \nu) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(2) В функционал (3.1) подставим значения найденных матриц, получим:

$$W[x, y(\cdot), w(\cdot)] = x' \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \int_{-1}^0 y'(s) \begin{bmatrix} (2s+3)/5 & 0 \\ 0 & (4s+6)/5 \end{bmatrix} y(s) ds + \int_{-0.5}^0 w'(s)(4s+3)/20 w(s) ds.$$

Матрица $\Pi(s)$, $s \in [-1; 0]$, представляет собой положительно определенную квадратичную форму, кроме того, $\Xi(s) > 0.05$, $s \in [-0.5; 0]$. Ясно, что функционал W положительно определенный.

В функционал (2.2) подставим значения найденных матриц, получим:

$$Z[x, y(\cdot), u(\cdot)] = x' \Phi_0 x + 2x' \int_{-\tau}^0 \Phi_1(s) y(s) ds + \int_{-\tau}^0 y'(s) \Phi_2(s) y(s) ds + y'(-\tau) \Phi_4 y(-\tau) + 2x' \int_{-\Delta}^0 \Psi_1(s) w(s) ds + \int_{-\Delta}^0 w'(s) \Psi_2(s) w(s) ds + w'(-\Delta) \Psi_4 w(-\Delta).$$

Для проверки положительной определенности функционала Z сгруппируем слагаемые. Подобные группировки полезны при проверке положительной определенности и в других более общих задачах.

$$Z[x, y(\cdot), w(\cdot)] = \int_{-\tau}^0 [x \quad y(s)] \begin{bmatrix} 1/2\tau \Phi_0 & \Phi_1(s) \\ \Phi_1'(s) & \Phi_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y(s) \end{bmatrix} ds + y'(-\tau) \Phi_4 y(-\tau) + \int_{-\Delta}^0 [x \quad w'(s)] \begin{bmatrix} 1/2\Delta \Phi_0 & \Psi_1(s) \\ \Psi_1'(s) & \Psi_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w(s) \end{bmatrix} ds + w'(-\Delta) \Psi_4 w(-\Delta) = \int_{-1}^0 [x \quad y(s)] \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & e^s/5 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & e^s/5 \\ e^s/5 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & e^s/5 & 0 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y(s) \end{bmatrix} ds + y'(-1) \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 2/5 \end{bmatrix} y(-1) + \int_{-0.5}^0 [x \quad w'(s)] \begin{bmatrix} 2/5 & 0 & \sin(2\pi s)/5 \\ 0 & 4/5 & \sin(2\pi s)/5 \\ \sin(2\pi s)/5 & \sin(2\pi s)/5 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w(s) \end{bmatrix} ds + w'(-0.5) 1/20 w(-0.5).$$

Теперь положительная определенность функционалов легко проверяется по определению, так как каждое слагаемое есть положительно определенный функционал. Согласно теореме 4 конструируемое управление будет стабилизирующим.

(3) Найдем числовые значения матриц, фигурирующих в (1.3), $E = [-5 \ 0]$, $E_\tau = [0 \ 0]$, $L_\tau = [0 \ 0]$, $L_\Delta = [0]$. Искомое управление имеет вид $u = -5x_1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Оптимальные процессы в системах с запаздыванием. [Krasovskii N.N. Optimal Processes in Systems with Time Lag] // Proc. 2nd IFAC Congress (Basel, 1963). Butterwoths: London, 1964.
2. **Красовский Н.Н.** Об аналитическом конструировании регулятора для систем с последствием // Прикл. математика и механика. 1962. Т. 26. № 1. С. 39–51.

3. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1959. 211 с.
4. **Ким А.В.** i -Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения / Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1996. 236 с.
5. **Ким А.В., Волканин Л.С.** К синтезу управления для систем с последействием в управляющих параметрах // Изв. Урал. гос. ун-та. 2003. № 26. С. 81–86.
6. **Колмановский В.Б., Майзенберг Т.Л.** Оптимальное управление стохастическими системами с последействием // Автоматика и телемеханика. 1973. № 1. С. 47–62.
7. **Eleer D.H., Aggarwal J.K., Banks H.T.** Optimal control of linear time-delay system // IEEE Trans. Automat. Control. 1969. Vol. 14. P. 678–687.
8. **Ross D.W.** Control Design for Time Lag Systems via Quadratic Criterion // IEEE Trans. Automat. Control. 1971. Vol. 16. P. 664–672.
9. **Ross D.W., Flugge-Lots I.** An Optimal Control Problem for Systems with Differential-difference Equation Dynamics // SIAM J. Control. 1969. Vol. 7. P. 609–623.
10. **Soliman M.A., Ray W.H.** Optimal feedback control for linear-quadratic system having time delay // Int. J. Control. 1972. Vol. 15, no. 4. P. 609–627.
11. **Летов А.М.** Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 360 с.
12. **Красовский А.А.** Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973. 558 с.
13. **Колмановский В.Б., Королева Н.И.** Оптимальное управление некоторыми билинейными системами с последействием // Прикл. математика и механика. 1989. Т. 53. С. 283–243.
14. **Ким А.В., Ложников А.Б.** Линейно-квадратичные задачи управления для систем с запаздыванием по состоянию. Точные решения уравнений Риккати // Автоматика и телемеханика. 2000. № 7. С. 15–31.
15. **Ushida K., Shemimura E., Kube T., Abe N.** The linear–quadratic optimal control approach in feedback control design for system with delay // Automatica. 1988. Vol. 24, no. 6. P. 773–780.

Солодушкин Святослав Игоревич
аспирант
программист
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: solodushkin_s@mail.ru

Поступила 16.06.2008

УДК 517.929.8+517.983.3

ЛОМАНЫЕ ЭЙЛЕРА И ВРЕМЕННЫЕ ШКАЛЫ В УСЛОВИЯХ КАРАТЕОДОРИ¹

Д. В. Хлопин

В работе исследуется сходимости ломаных Эйлера к траекториям в системах, удовлетворяющих условиям Каратеодори. Для всякой такой системы предложена процедура, конструирующая последовательность ломаных Эйлера, сходящихся к пучку траекторий. Для этого множество временных шкал на этом промежутке оснащается псевдометрикой (зависящей от системы). Оснащение такой псевдометрикой позволяет свести вопрос сходимости ломаных Эйлера к вопросу о непрерывной зависимости решений интегрального уравнения от параметра (временной шкалы). Показывается, что в условиях Каратеодори сходимости по соответствующей псевдометрике гарантирует сходимости ломаных Эйлера к пучку траекторий системы. В силу использования временных шкал все результаты статьи переносятся также и на случай, когда ломаная Эйлера имеет бесконечное число звеньев и фактически является решением некоторого интегрального уравнения с сосредоточенным запаздыванием.

Ключевые слова: временные шкалы, топологии на пространстве временных шкал, ломаные Эйлера, пучки решений.

Введение

Хорошо известно, что в системах с достаточно гладкой (непрерывной по времени, непрерывно дифференцируемой по фазовой переменной) правой частью в случае выполнения условия подлинейного роста и при стремлении диаметра разбиения к нулю ломаные Эйлера, соответствующие этим разбиениям, равномерно на всяком отрезке сходятся к единственной траектории системы. При условии лишь непрерывности правой части можно указать такой промежуток времени, что ломаная Эйлера лежит сколь угодно близко к траектории системы при достаточно малом диаметре породившего ее разбиения [8, упражнение II.2.1], в частности из последовательности ломаных Эйлера можно выделить сходящуюся к какой-либо траектории подпоследовательность. Для измеримой правой части ранее исследовались всевозможные пределы последовательностей ломаных Эйлера (см., например, [19]); вмещающее их дифференциальное включение можно получить также из [5, теорема 1.1.3].

В данной работе исследуются условия, которые нужно наложить на правую часть системы для того, чтобы ломаные Эйлера сходились к пучку траекторий системы, в частности, чтобы из всякой последовательности ломаных Эйлера можно было выделить сходящуюся на всем рассматриваемом промежутке времени к какой-либо траектории подпоследовательность.

Помимо обычных ломаных Эйлера, в отличие от работы [10], в данной статье рассматриваются также ломаные с бесконечным числом звеньев. Для этого множество \mathbb{D} всевозможных конечных разбиений отрезка времени погружается в множество \mathcal{D} всех замкнутых подмножеств этого отрезка, содержащих его концы, в множество временных шкал. Каждая временная шкала порождает, вообще говоря, пучок обобщенных ломаных Эйлера. Как и в [10], множество \mathcal{D} предлагается оснастить псевдометрикой ρ , которая подбирается по правой части системы. Вместо диаметра разбиения в качестве характеристики близости ломаных Эйлера и пучка траекторий системы при этом используется “расстояние” ρ от разбиения до исходного отрезка

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 06-01-00414, 07-01-96088) и Фонда содействия отечественной науке.

времени. В случае непрерывной правой части система окрестностей вокруг этого отрезка, порожденная этой псевдометрикой, в общем случае грубее системы окрестностей, порожденной диаметром разбиения.

Создание такой псевдометрики позволяет свести вопрос сходимости ломаных Эйлера к вопросу о непрерывной зависимости решений интегрального уравнения от параметра (временной шкалы); строго говоря, требуется полунепрерывность сверху, поскольку исследуется сходимость ломаных к пучку, а не к отдельной траектории.

Показывается, что в условиях Каратеодори, если нет траекторий, уходящих за рассматриваемый отрезок времени в бесконечность, всякая последовательность временных шкал, сходящаяся (по соответствующей псевдометрике) к исходному промежутку времени, генерирует последовательность ломаных Эйлера, предельные точки которой суть траектории исходной системы. Это для всякой системы Каратеодори позволяет сконструировать последовательность конечных разбиений, диаметр которых стремится к нулю, а соответствующие ломаные Эйлера — к траекториям системы.

Подобные, но более слабые результаты показаны для случая ограниченной правой части или при дополнительных предположениях (равнотепенная непрерывность сечений по времени правой части [10]). В отличие от той работы в данной статье используется также более слабая псевдометрика. Результаты представленной работы ранее были анонсированы в [12].

1. Определения, обозначения и условия

Для всякого натурального числа $m \in \mathbb{N}$ через \mathbb{R}^m обозначим m -мерное евклидово пространство с евклидовой нормой $\|\cdot\|_m$.

Для всякого топологического пространства X и метрического пространства Y под $B(X, Y)$ будем понимать множество всех ограниченных, измеримых по Борелю функций, действующих из топологического пространства X в Y ; оснастим это множество топологией равномерной сходимости при помощи нормы $\|f\|_{B(X, Y)} \triangleq \sup_{x \in X} \|f(x)\|_Y$; соответствующее подпространство всех непрерывных функций из $B(X, Y)$ будем обозначать через $C(X, Y)$. Для краткости примем также $C_k(X) \triangleq C(X, \mathbb{R}^k)$, $B_k(X) \triangleq B(X, \mathbb{R}^k)$ для всякого $k \in \mathbb{N}$ и $C(X) \triangleq C_1(X)$, $B(X) \triangleq B_1(X)$.

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.1)$$

функционирующую в m -мерном фазовом пространстве \mathbb{R}^m ($m \in \mathbb{N}$) на конечном промежутке $I_0 \triangleq [t_0, T]$ ($t_0 < T$) при заданном начальном условии $x(t_0) = x_0$. В (1.1) параметр $t \in I_0$ — время, $x \in \mathbb{R}^m$.

На функцию $f : I_0 \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ наложим следующие условия:

(K1) для произвольных $x \in \mathbb{R}^m$ функция $(f(t, x) | t \in I_0) : I_0 \mapsto \mathbb{R}^m$ измерима по Борелю на I_0 ;

(K2) для каждого $t \in I_0$ функция $(f(t, x) | x \in \mathbb{R}^m) : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ непрерывна;

(K3) для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^m$ существует такая суммируемая функция $M_K \in B(I_0, (0, \infty))$, что

$$\|f(t, x)\|_m \leq M_K(t), \quad \forall (t, x) \in I_0 \times K;$$

(C) все локальные правосторонние решения системы (1.1) продолжимы до момента T и равномерно ограничены.

Первые три условия фактически совпадают с условиями Каратеодори, однако мы требуем их выполнения для всех, а не при почти всех $t \in I_0$ как, например, в [6]. Заметим, что в условиях (K1)–(K3) локальное решение (1.1) существует и в силу (C) каждое из них должно

быть продолжимо до T . Все траектории системы (1.1), определенные на промежутке $[t_0, T]$, обозначим через Φ , введем также для всех $\theta \in [t_0, T]$

$$\Phi_\theta \triangleq \{x|_{[t_0, \theta]} \in C_m([t_0, \theta]) \mid x \in \Phi\}.$$

В силу (C) существует такой компакт \mathbb{K}_0 , что $\Phi \subset C(I_0, \mathbb{K}_0)$. При выполнении (K1)–(K3) вместо (C) достаточно на правую часть системы (1.1) потребовать условие типа подлинейного роста (или иное условие продолжимости всех решений на весь отрезок I_0).

Обозначим через \mathbb{D} совокупность всех конечных множеств из I_0 , содержащих точки t_0, T . Назовем такие множества конечными разбиениями. Каждое множество $\Delta \in \mathbb{D}$ можно единственным образом представить в виде возрастающей конечной последовательности вида $(t_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{k}(\Delta)}}$. Наибольшее из чисел $t_i - t_{i-1}$ назовем диаметром разбиения и обозначим через $\mathbf{d}(\Delta)$.

По заданному разбиению *ломаная Эйлера* строится следующим образом: принимается $y(t_0) = x_0$, далее, $y(t) = y(t_0) + (t - t_0)f(t_0, y(t_0))$ для всякого $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$. Пусть построена ломаная вплоть до момента $t_k < T$. Построим ее до момента t_{k+1} для всех $t \in \langle t_k, t_{k+1} \rangle$ по правилу $y(t) = y(t_k) + (t - t_k)f(t_k, y(t_k))$. В силу конечности $\mathbf{k}(\Delta)$ ломаную можно продолжить до момента $t_{\mathbf{k}(\Delta)+1} = T$ включительно. Итак, для всякого $\Delta \in \mathbb{D}$ построена ломаная Эйлера $\xi_\Delta = y \in C_m(I_0)$.

2. О сходимости и непрерывности

Хорошо известно [8, упр. П.2.1], что если правая часть уравнения динамики непрерывна по совокупности переменных, то из последовательности ломаных Эйлера при выполнении $\mathbf{d}(\Delta_i) \rightarrow 0$ всегда можно выделить подпоследовательность, сходящуюся на некотором промежутке к траектории системы. Если такая траектория при заданном начальном условии неединственна, то не все последовательности ломаных Эйлера обязаны иметь предел и не все такие траектории могут быть пределами ломаных. Заметим также, что в качестве промежутка, на котором ломаные Эйлера сходятся к траекториям, при этом можно взять весь I_0 , для этого достаточно потребовать выполнения условия (C) [10]. Т. е. в случае непрерывной правой части и выполнения условия продолжимости (C) имеет место

$$\forall \varepsilon \in \langle 0, \infty \rangle \exists \delta \in \langle 0, \infty \rangle \forall \Delta \in \mathbb{D} (\mathbf{d}(\Delta) < \delta) \exists x \in \Phi \|x - \xi_\Delta\|_{C_m(I_0)} < \varepsilon. \quad (2.1)$$

Можно ли на правую часть наложить более слабые условия, нежели непрерывность, гарантирующие выполнение (2.1)?

Заметим, что? поскольку конструкция ломаных Эйлера пошаговая, ломаная Эйлера зависит лишь от конечного числа значений правой части в конечном числе моментов времени, а предел последовательности ломаных — от счетного числа. Но на траекторию системы (1.1) не влияет изменение правой части при нулевом множестве из I_0 . Итак, условия (K1)–(K3), (C) не гарантируют (2.1).

Если правая часть кусочно-непрерывна, т. е. если I_0 можно разбить на конечное число промежутков так, что для каждого такого промежутка I сужение правой части на $I \times \mathbb{R}^m$ непрерывно по совокупности переменных, то, безусловно, (2.1) имеет место. Однако малого диаметра разбиения недостаточно для сходимости даже в случае, когда правая часть при всякой фиксированной фазовой переменной как функция времени является разрывной лишь в одной точке, а в случае ограниченной правой части — в счетном числе точек. Сходимости может также не быть, если правая часть ограничена и вдоль всякой траектории имеет не более одной точки разрыва (см. [11]). В [11] также анонсированы некоторые условия на правую часть системы, достаточные для сходимости ломаных Эйлера к траекториям системы, если только диаметры разбиений стремятся к нулю.

Возможно, всякую правую часть достаточно исправить на множестве нулевой меры Лебега, т. е.: для всякой функции Каратеодори найдется ли эквивалентная ей со свойством (2.1) (при выполнении условия (C))? Это также неверно. Соответствующий пример (см. [10]) строится на основе нигде не плотного множества ненулевой меры, имеющего структуру, близкую к канторовскому множеству. Более того, как показывает тот же пример, при выборе последовательности разбиений для выполнения (2.1) недостаточно также брать только те разбиения, для которых во все моменты переключения правая часть непрерывна.

Итак, для переноса (2.1) на произвольные системы, удовлетворяющие условиям Каратеодори, вместо диаметра $\mathbf{d}(\Delta)$ имеет смысл рассматривать иной критерий качества разбиения.

Заметим, что вопрос о сходимости ломаных Эйлера к траекториям можно свести к вопросу о непрерывной зависимости решений некоторого уравнения от параметра. Действительно, погрузим всевозможные конечные разбиения в некоторое пространство \mathcal{D} , топологию которого доопределим позже. Сопоставим каждому элементу $\Delta \in \mathcal{D}$ отображение $\mathbb{L}_\Delta \in \mathfrak{L} \subset C(C_m(I_0), C_m(I_0))$, причем так, что неподвижные точки этого отображения (т. е. решения уравнения $\xi = \mathbb{L}_\Delta \xi$) суть ломаные Эйлера, если Δ есть конечное разбиение, и являются траекториями (1.1) при некотором значении параметра Δ_0 . Теперь непрерывная зависимость решений от параметра в окрестности Δ_0 (при непрерывном отображении $\Delta \rightarrow \mathbb{L}_\Delta$) будет означать сходимость ломаных Эйлера к траекториям, если только порожденные разбиениями операторы сходятся к \mathbb{L}_{Δ_0} . Для непрерывной зависимости решений, согласно идеологии [13], множество $\mathbb{L}_\Delta \in \mathfrak{L}$ должно иметь топологию не слабее топологии равномерной сходимости. Имея топологию на \mathfrak{L} , на \mathcal{D} достаточно взять самую слабую топологию, обеспечивающую непрерывность отображения $\Delta \rightarrow \mathbb{L}_\Delta$.

Предыдущий абзац можно изобразить и в виде схемы.

$$\begin{array}{ccccccc} \Delta \in \mathcal{D} & \mapsto & \mathbb{L}_\Delta \in \mathfrak{L} & \mapsto & \xi_\Delta = \mathbb{L}_\Delta \xi_\Delta & \mapsto & \xi_\Delta \in \Xi^\Delta \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow? \\ \Delta_0 = I_0 \in \mathcal{D} & \mapsto & \mathbb{L}_{I_0} \in \mathfrak{L} & \mapsto & x = \mathbb{L}_{I_0} x & \mapsto & x \in \Phi = \Xi^{I_0} \end{array}$$

Отметим, что в случае ограниченной правой части описанная схема выполнена, удается снять и имеющийся в ней знак вопроса (см. замечание). Для неограниченной правой части при реализации схемы приходится рассматривать такие операторы \mathbb{L}_Δ , неподвижные точки которых не являются ломаными Эйлера или решениями исходной системы, а лишь содержат их в качестве компонент. При этом оператор \mathbb{L}_Δ уже переводит некоторое подмножество из $C_{m+2}(I_0)$ в $C_{m+2}(I_0)$.

3. Детализация схемы

Пусть \mathcal{D} — семейство всех замкнутых подмножеств множества I_0 , содержащих точки t_0, T . В частности, в \mathcal{D} входят само множество I_0 и все конечные разбиения — множества из \mathbb{D} . Будем называть эти множества из \mathcal{D} , следуя [16, 18], временными шкалами (time scales).

Каждой шкале $\Delta \in \mathcal{D}$ сопоставим функцию $\tau_\Delta^* : I_0 \mapsto I_0$ по правилу

$$\tau_\Delta^*(t) = \max \{ \tau \in \Delta \mid \tau \leq t \} \quad \forall t \in I_0.$$

Теперь для любой временной шкалы $\Delta \in \mathcal{D}$ определим ее зернистость (graininess):

$$\mathbf{d}(\Delta) \stackrel{\Delta}{=} \|\tau_{I_0}^* - \tau_\Delta^*\|_{B(I_0)}.$$

Заметим, что зернистость совпадает для конечных разбиений с введенным для них ранее диаметром.

Рассмотрим некоторое $m' \in \mathbb{N}$. Зафиксируем некоторую функцию Каратеодори $F : I_0 \times \mathbb{R}^{m'} \mapsto \mathbb{R}^{m'}$. Введем для всякого $t \in I_0$ семейство функций $\bar{F}_t : C_{m'}(I_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ по правилу

$$\bar{F}_t(x) = F(t, x(t)) \quad \forall (t, x) \in I_0 \times C_{m'}(I_0).$$

Зафиксируем теперь некоторое компактное в $C(I_0, \mathbb{R}^{m'})$ множество Ψ . Отметим, что в силу условий (K1), (K2) для всякого $x \in \Psi$ функция $\bar{F}(x) = (\bar{F}_t(x) | t \in I_0)$ измерима по Борелю на I_0 , а отображение $\bar{F}_t = (\bar{F}_t(x) | x \in \Psi)$ непрерывно, т. е. $\bar{F}_t \in C_{m'}(\Psi)$ для всякого $t \in I_0$.

Теперь определим всякому $\Delta \in \mathbb{D}$ интегральный оператор \mathbb{L}_Δ по правилу

$$(\mathbb{L}_\Delta y)(\theta) \triangleq x_0 + \int_{[t_0, \vartheta)} \bar{F}_{\tau_\Delta^*(t)}(y) dt = x_0 + \int_{[t_0, \vartheta)} F(\tau_\Delta^*(t), y(\tau_\Delta^*(t))) dt$$

для всех $y \in \Psi$ и $\theta \in I_0$ таких, что интеграл существует. Семейство непрерывных функций, являющееся областью значений отображения $\Delta \mapsto \mathbb{L}_\Delta$, обозначим через \mathfrak{L} . Введем на \mathfrak{L} зависящую от компакта Ψ и функции Каратеодори F топологию равномерной сходимости. Тогда на \mathbb{D} получаем принимающую в том числе и бесконечные значения псевдометрику $\varrho_\Psi^F: \mathcal{D} \times \mathcal{D} \mapsto [0, +\infty]$ по правилу

$$\begin{aligned} \varrho_\Psi^F(\Delta_1, \Delta_2) &\triangleq \sup_{y \in \Psi} \max_{\theta \in I_0} \left\| \int_{[t_0, \theta]} \bar{F}_{\tau_{\Delta_1}^*(t)}(y) - \bar{F}_{\tau_{\Delta_2}^*(t)}(y) dt \right\|_m \\ &= \sup_{y \in \Psi} \max_{\theta \in I_0} \left\| \int_{[t_0, \theta]} F(\tau_{\Delta_1}^*(t), y(\tau_{\Delta_1}^*(t))) - F(\tau_{\Delta_2}^*(t), y(\tau_{\Delta_2}^*(t))) dt \right\|_m. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Фактически это норма отображения $(y, \theta) \mapsto (\mathbb{L}_{\Delta_1} y)(\theta) - (\mathbb{L}_{\Delta_2} y)(\theta)$ из некоторого подмножества множества $\Psi \times I_0$ в $C_{m'}(I_0)$. Эта норма может стать бесконечной, если какая-либо функция $\mathbb{L}_{\Delta_i} y$ будет определена не для всех $\theta \in I_0$. Непосредственная проверка показывает, что для ϱ_Ψ^F действительно выполнены все свойства псевдометрики. При необходимости можно перейти и к конечной псевдометрике, эквивалентной данной, например, по формуле $\min(\varrho_\Psi^F, 1)$. Отметим, что в [10] рассматривалась более сильная, чем описанная здесь, топология (индуцированная топологией равномерной сходимости самих функций \bar{F}).

Как показано в [10, теорема 1], для всякого $r \in \langle 0, \infty \rangle$ найдется конечное разбиение Δ со свойством $\varrho_\Psi^F(\Delta, I_0) < r$. Там же показано, что в случае непрерывной правой части (1.1) система окрестностей вокруг I_0 , порожденная этой псевдометрикой, не слабее системы окрестностей, порожденной диаметром разбиения $\mathbf{d}(\Delta)$.

Отметим также, что всюду далее вместо псевдометрики ϱ_Ψ^F можно использовать метрику $\max(\varrho_\Psi^F(\Delta, I_0), \mathbf{d}(\Delta))$.

Определим, наконец, обобщенные ломаные Эйлера. Установим теперь $F = f$ и рассмотрим для всякой шкалы $\Delta \in \mathbb{D}$ уравнение

$$\xi(\vartheta) = (\mathbb{L}_\Delta \xi)(\vartheta) = x_0 + \int_{[t_0, \vartheta)} f(\tau_\Delta^*(t), \xi(\tau_\Delta^*(t))) dt. \quad (3.2)$$

Для всякого $t^* \in \langle t_0, T \rangle$ через $\Xi_{t^*}^\Delta$ обозначим множество всех решений (из $C_m([t_0, t^*])$) этого уравнения на промежутке $[t_0, t^*]$. Для удобства определим также $\Xi_\theta^\Delta(K) \triangleq \Xi_\theta^\Delta \cap C([t_0, \theta], K)$ для всякого компакта $K \subset \mathbb{R}^m$.

Как показано ранее, для всякого конечного разбиения $\Delta \in \mathbb{D}$ это множество состоит из единственного элемента, уже введенного $\xi_\Delta|_{[t_0, t^*]}$. С другой стороны, в силу $I_0 \in \mathcal{D}$, определено множество $\Xi_{t^*}^{I_0}$, но оно совпадает со всеми решениями исходного уравнения (1.1), продолжимыми вплоть до t^* , т. е. (при условии (C)) $\Xi_{t^*}^{I_0} = \Phi_{t^*}$.

В [2] для достаточно гладкой правой части построены ломаные Эйлера с бесконечным числом моментов переключения, графики которых сходятся к графику непродолжимой траектории во всей области определения. Ломаные Эйлера со счетным числом кусков рассматривались также в [3], там же указано аналогичное (3.2) уравнение (см. [3, (1.11)]), решениями которого являются как траектории исходной системы, так и ломаные Эйлера.

Отметим, что в уравнениях с запаздыванием с неограниченной правой частью решения как непрерывной функции может и не быть даже локально [4]. Для обобщенной ломаной Эйлера имеет место подобный результат.

П р и м е р. Примем $\Delta = \{1/k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ и определим $g \in B([0, 1])$ по правилу

$$g(t, x) \triangleq \begin{cases} 0, & \forall t \notin \Delta \setminus \{0\} \quad \forall x \in \mathbb{R}; \\ (-1)^k 2k(k+1), & t = 1/k \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Тогда для задачи Коши $\dot{x} = g(t, x)$, $x(0) = 0$, $t \in [0, 1]$ у ломаной Эйлера ξ_Δ для всех $k \in \mathbb{N}$ должно быть $|\xi_\Delta(1/k) - \xi_\Delta(1/(k+1))| = 2$, что невозможно для непрерывных в окрестности нуля функций. Отсюда для всякого $t \in \langle 0, 1 \rangle$ множество Ξ_t^Δ пусто.

Покажем достаточное условие существования ломаных Эйлера. Отметим, что если функция Каратеодори F не зависит от x , то псевдометрика ϱ_Ψ^F (см. (3.1)) не зависит от компакта Ψ . В этом случае ее можно обозначить как ϱ^F .

Предложение 1. Пусть функция $f \in B(I_0 \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, $K \subset \mathbb{R}^m$ — некоторый компакт, содержащий в качестве внутренней точку x_0 , для некоторого $\Delta \in \mathcal{D}$ конечно $\varrho^{M_K}(\Delta, I_0)$.

Тогда $\emptyset \neq \Xi_{t^*}^\Delta \subset C([t_0, t^*], K)$ для всех $t^* \in [t_0, T^0]$ при некотором $T^0 \in \langle t_0, T \rangle$. Кроме того, для всех $\theta \in \langle t_0, T \rangle$ множество $\Xi_\theta^\Delta(K)$ компактно и всякий его элемент можно продолжить до $\tilde{\xi} \in \Xi_{t^*}^\Delta(K)$ (для какого-то $t^* \in \langle \theta, T \rangle$) так, что или $t^* = T$, или $\tilde{\xi}(t^*)$ принадлежит границе компакта K .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Схема доказательства этого предложения следует доказательству теорем 1.1 и 1.4 из [6]. Общие теоремы из [7] не применимы в силу нарушения к ломаным Эйлера полугруппового свойства при $t \notin \Delta$.

Зафиксируем вплоть до конца доказательства удовлетворяющие условиям предложения множество $\Delta \in \mathcal{D}$ и компакт K . Обозначим через ∂K границу компакта K .

Определим монотонно возрастающую функцию v по правилу

$$v(t) = \int_{[t_0, t]} M_K(\tau_\Delta^*(s)) ds$$

для всех $t \in I_0$, для которых интеграл сходится. Тогда во всей своей области определения

$$v(t) \leq \left| \int_{[t_0, t]} M_K(s) - M_K(\tau_\Delta^*(s)) ds \right| + \int_{[t_0, t]} M_K(\tau_\Delta^*(s)) ds \leq \int_{I_0} M_K(\tau_\Delta^*(s)) ds + \varrho^{M_K}(\Delta, I_0). \quad (3.3)$$

В силу суммируемости M_K и конечности $\varrho^{M_K}(\Delta, I_0)$ имеем $v \in C(I_0)$, в частности $(M_K(\tau_\Delta^*(s)) \mid s \in I_0)$ — суммируемая функция.

Рассмотрим произвольные $t^0 \in \Delta \setminus \{T\}$ и внутреннюю точку x^0 компакта K . Покажем существование функции $\xi \in C([t^0, t^*], K)$ со свойством

$$\xi(t) = x^0 + \int_{[t^0, t]} f(\tau_\Delta^*(s), \xi(\tau_\Delta^*(s))) ds \quad \forall t \in [t^0, t^*] \quad (3.4)$$

для некоторого $t^* \in \langle t^0, T \rangle$.

При всяком $h \in \langle 0, 1 \rangle$ для $t \leq t^0$ определим $x_h(t) = x^0$, а для всех $t \in \langle t^0, T \rangle$ определим

$$x_h(t) = x^0 + \int_{[t^0, t]} f(\tau_\Delta^*(s), x_h(\tau_\Delta^*(s) - h)) ds. \quad (3.5)$$

Отметим, что для всех $h \in [0, 1]$ или найдется нижняя грань таких t , что $x_h(t) \in K$ (обозначим ее через θ_h , в этом случае $x_h(\theta_h) \in \partial K$) или $x_h \in C(I_0, K)$ (примем тогда $\theta_h \triangleq T$). Отсюда $x_h|_{[t_0, \theta_h]} \in C([t_0, \theta_h], K)$ для всякого $h \in [0, 1]$. Последовательность частичных отображений $(x_{1/i}|_{[t_0, \theta_{1/i}]})_{i \in \mathbb{N}}$ (из I_0 в K) равномерно ограничена и равностепенно непрерывна (модулем непрерывности функции v), тогда эта последовательность имеет (см. [7, теорема 3.6.2]) предел — функцию $\xi \in C([t_0, t^*], K)$ для некоторого $t^* \in I_0$ (в частности, графики функций из последовательности сходятся к графику предела в метрике Хаусдорфа). Отсюда, переходя к пределу в (3.5), для любого $t \in [t_0, t^*]$ имеем, что ξ есть решение уравнения (3.4) на $[t^0, t]$, следовательно на $[t^0, t^*]$, но тогда и на всем отрезке $[t^0, t^*]$. Кроме того, из сходимости графиков следует, что или $t^* = T$, или $\xi(t^*)$ принадлежит ∂K , но x^0 — внутренняя точка этого компакта, таким образом $t^0 < t^*$. Итак, существует функция $\xi \in C([t_0, t^*], K)$, являющаяся решением (3.4) на $[t^0, t^*]$.

Если для некоторого $\theta \in \langle t_0, t^* \rangle$ нашлось $\xi \in \Xi_\theta^\Delta \setminus C([t_0, \theta], K)$, то $\xi|_{[t_0, t']} \in \Xi_{t'}^\Delta(K)$, где t' есть нижняя грань тех $t \in \langle t_0, \theta \rangle$, что $\xi(t) \notin K$. Тогда $\xi(t') \in \partial K$. В частности $v(t') - v(t_0) \geq \varkappa$. Итак, в качестве T^0 можно взять любое $t \in \langle t_0, T \rangle$ со свойством $v(t) < \varkappa$.

Пусть $\theta \in I_0$ таково, что $\Xi_\theta^\Delta \cap C([t_0, \theta], K)$ непусто. Его предельные точки в нем содержатся, поскольку правая часть (3.4) непрерывно зависит от $\tilde{\xi}$. Тогда $\Xi_\theta^\Delta(K)$ замкнуто, но оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно (модулем непрерывности функции R), следовательно компактно.

Множество $\cup_{t^* \in I_0} \Xi_{t^*}^\Delta(K)$ как множество частичных отображений в равномерной метрике также компактно. Действительно, равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность показываются аналогично, а замкнутость этого множества следует из того, что предел графиков решений (3.4) также является графиком решения (3.4) (это следствие непрерывности $\mathbb{L}_{\Delta, y}$ по y).

Рассмотрим произвольные $\theta \in I_0$, $\xi_0 \in \Xi_\theta^\Delta(K)$. Тогда в силу компактности $\cup_{t^* \in I_0} \Xi_{t^*}^\Delta(K)$ корректно определить

$$t^0 \triangleq \max \{t^* \in [\theta, T] \mid \exists \tilde{\xi} \in \Xi_{t^*}^\Delta(K) \tilde{\xi}|_{[t_0, \theta]} = \xi_0\}. \quad (3.6)$$

Но тогда существует $\tilde{\xi} \in \Xi_{t^0}^\Delta(K)$ со свойством $\tilde{\xi}|_{[t_0, \theta]} = \xi_0$.

Если $\tilde{\xi}(t^0) \in \partial K$ или $t^0 = T$, то все показано. Предположим, не так. Тогда обозначим $t_* = \tau_\Delta^*(t^0)$. Если $t^0 > t_*$, то график решения на $[t_*, t^0]$ есть кусок прямой внутри K , т. е. решение $\tilde{\xi}$ можно продолжить (внутри K) линейно до некоторого $t^* \in \langle t^0, T \rangle$ по правилу

$$\tilde{\xi}(t) = \tilde{\xi}(t_*) + \frac{t - t_*}{t^0 - t_*} (\tilde{\xi}(t^0) - \tilde{\xi}(t_*)) \quad \forall t \in \langle t^0, t^* \rangle.$$

При этом новая функция будет принадлежать $\Xi_{t^*}^\Delta(K)$, а ее сужение на $[t_0, \vartheta]$ — совпадать с ξ_0 . Но $t^* > t^0$, что противоречит определению t^0 как верхней грани множества (3.6). Таким образом, $t_* = t^0 \in \Delta$.

Тогда $t^0 = t_* \neq T$, поскольку $\tilde{\xi}(t^0) \notin \partial K$, из уже показанного при $t^* = t^*$, $x^0 = \tilde{\xi}(t^*)$ следует существование для некоторого $t^* \in \langle t^0, T \rangle$ функции $\xi \in C([t^0, t^*], K)$ со свойством (3.4). Доопределим $\tilde{\xi}$ по правилу $\tilde{\xi}(t) = \xi(t)$ для всех $\langle t^0, t^* \rangle$. Поскольку $t^0 \in \Delta$, то для такого $\tilde{\xi}$ уравнение (3.2) выполнено на всем $[t_0, t^*]$, т. е. $\tilde{\xi} \in \Xi_{t^*}^\Delta(K)$, а сужение $\tilde{\xi}$ на $[t_0, \vartheta]$ совпадает с ξ_0 . Но $t^* > t^0$, что противоречит определению t^0 как верхней грани множества (3.6). Полученное противоречие завершает доказательство. \square

Часть, связанная с существованием обобщенных ломаных Эйлера, следует из замечания 2.6 в [9], однако формально она там доказана в предположении единственности решения уравнения с запаздыванием.

Вопросы существования, единственности, продолжимости и устойчивости решений уравнений с пошаговым запаздыванием при линейной правой части смотрите в [17].

4. Сходимость ломаных Эйлера

Теорема. В условиях (K1), (K2), (K3), (C) можно подобрать компакт $\Psi \subset C_{m+2}(I_0)$ и функцию Каратеодори $F \in B(I_0 \times \mathbb{R}^{m+2}, \mathbb{R}^{m+2})$ так, что для любого $\varepsilon \in \langle 0, \infty \rangle$ при некотором $d \in \langle 0, \infty \rangle$ для всякого $\Delta \in \mathcal{D}$, $\varrho_{\Psi}^F(\Delta, I_0) \leq d$ множество Ξ_T^{Δ} непусто и для всякой ломаной Эйлера $\xi \in \Xi_T^{\Delta}$ найдется $x \in \Phi$ со свойством $\|x - \xi\|_{C_m(I_0)} < \varepsilon$.

Доказательство. В силу (C) для некоторого компакта $\mathbb{K}_0 \subset \mathbb{R}^m$ выполнено $\Phi \subset C(I_0, \mathbb{K}_0)$. Зафиксируем такой компакт \mathbb{K}_0 , а также некоторое число $\varkappa \in \langle 0, \infty \rangle$, определим компакт

$$\mathbb{K} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^m \mid \exists y \in \mathbb{R}^m \|x - y\|_m \leq \varkappa\}.$$

Зафиксируем также из условия (K3) суммируемую функцию $M_{\mathbb{K}}$.

Определим монотонную функцию $\Omega_{\mathbb{K}} \in B([0, \infty))$ по правилу

$$\Omega_{\mathbb{K}}(\varepsilon) \triangleq \sup_{A \in \mathcal{B}(I_0), \lambda(A) \leq \varepsilon} \int_A M_{\mathbb{K}}(t) dt \quad \forall \varepsilon \in [0, \infty), \quad (4.1)$$

где $\mathcal{B}(I_0)$ — семейство всех борелевских множеств из I_0 , а $\lambda(A)$ — мера Лебега множества $A \subset I_0$. Заметим, что $\Omega_{\mathbb{K}}(0) = 0$ и из [1, лемма 3.4.13]

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \Omega_{\mathbb{K}}(\varepsilon) = \Omega_{\mathbb{K}}(0) = 0. \quad (4.2)$$

Тогда в силу своей полуаддитивности функция $\Omega_{\mathbb{K}}$ непрерывна.

Введем для всех $\theta \in [t_0, T]$

$$\tilde{\Psi}_{\theta} \triangleq \{z \in C([t_0, \theta], \mathbb{K}) \mid \forall t', t'' \in [t_0, \theta] \|z(t') - z(t'')\|_m \leq \Omega_{\mathbb{K}}(|t' - t''|)\}.$$

Отметим, что для всех $x \in \Phi$, $t', t'' \in I_0$ ($t' \leq t''$) выполнено

$$\|x(t') - x(t'')\|_m \leq \int_{[t', t'']} \|f(t, x(t))\|_m dt \leq \int_{[t', t'']} M_{\mathbb{K}}(t) dt \stackrel{(4.1)}{\leq} \Omega_{\mathbb{K}}(t'' - t').$$

В частности, $\Phi_{\theta} \subset \tilde{\Psi}_{\theta}$ для всех $\theta \in [t_0, T]$.

Определим функцию $\varpi \in \mathbb{R}^{I_0 \times [0, \varkappa]}$ для всех $(t, r) \in I_0 \times [0, \varkappa]$ по правилу

$$\varpi(t, r) \triangleq \max \{\|f(t, x) - f(t, y)\|_m \mid x, y \in \mathbb{K}, \|x - y\|_m \leq r\}.$$

Примем $\varpi(t, -r) = 0$ для всех $(t, r) \in I_0 \times \langle 0, \infty \rangle$. Отметим, что эта функция непрерывна по x при всяком фиксированном $t \in I_0$ и измерима по t при всяком фиксированном $r \in [0, \varkappa]$. Поскольку условие (K3) для нее выполнено в силу неравенства

$$\varpi(t, r) \leq 2M_{\mathbb{K}}(t) \quad \forall (t, r) \in I_0 \times [0, \varkappa], \quad (4.3)$$

то эта функция удовлетворяет всем условиям Каратеодори.

Для всякого $r \in [0, \varkappa]$ определим $\mathbf{c}_r = (\mathbf{c}_r(t) = r \mid t \in I_0) \in C(I_0)$. Обозначим теперь $\Psi' = \{\mathbf{c}_r \in C_m(I_0) \mid r \in [0, \varkappa]\}$.

Наконец, вводим компакт $\Psi \triangleq \tilde{\Psi}_T \times \{\mathbf{c}_0\} \times \Psi' \in C(I_0, \mathbb{K} \times \{0\} \times [0, \varkappa])$, строим функцию Каратеодори F из $I_0 \times \mathbb{R}^{m+2}$ в \mathbb{R}^{m+2} для всякого $(x, s, r) \in I_0 \times \mathbb{R}^{m+2}$ по правилу

$$F(t, (x, s, r)^{\mathbb{T}}) = (f(t, x), M_{\mathbb{K}}(t), \varpi(t, r))^{\mathbb{T}}. \quad (4.4)$$

Для F и компакта Ψ строим на \mathcal{D} псевдометрику ϱ_{Ψ}^F . Тогда помимо

$$\left\| \int_{[t_0, \theta]} f(\tau_{\Delta}^*(t), x(\tau_{\Delta}^*(t))) - f(t, x(t)) dt \right\|_m \leq \varrho_{\Psi}^F(\Delta, I_0) \quad \forall x \in \tilde{\Psi}_T, \Delta \in \mathcal{D}, \theta \in I_0$$

выполнено

$$\left| \int_{[t_0, \theta]} \varpi(\tau_{\Delta}^*(t), r) - \varpi(t, r) dt \right| \leq \varrho_{\Psi}^F(\Delta, I_0) \quad \forall \Delta \in \mathcal{D}, r \in [0, \varkappa], \theta \in I_0. \quad (4.5)$$

Можно далее ограничиться такими $\Delta \in \mathcal{D}$, что $\varrho_{\Psi}^F(\Delta, I_0)$ конечно. Для таких разбиений выполнены условия предложения 1, множество ломаных Эйлера непусто. Рассмотрим множество всех таких моментов времени $t_* \in I_0$, для которых найдутся $t^* \in [t_*, T]$ и $\xi \in \Xi_{t^*}^{\Delta}$ со свойством $\xi(t_*)$ лежит на границе компакта \mathbb{K} . Через $\theta(\Delta)$ обозначим нижнюю грань этого множества, а если оно пусто, то присвоим $\theta(\Delta) = T$. Теперь, воспользовавшись определением v из предложения 1 и определением (4.1), аналогично неравенству (3.3) получаем

$$\|\xi(t') - \xi(t'')\|_m \leq v(t'') - v(t') \leq \Omega_{\mathbb{K}}(t'' - t') + \varrho_{\Psi}^{M_{\mathbb{K}}}(\Delta, I_0),$$

для любых $\Delta \in \mathcal{D}$, $t^* \in \langle t_0, \theta(\Delta) \rangle$, $t' \in [t_0, t^*]$, $t'' \in [t_0, t']$, $\xi \in \Xi_{t^*}^{\Delta}$, т. е.

$$\|\xi(t') - \xi(t'')\|_m \leq \Omega_{\mathbb{K}}(|t'' - t'|) + \varrho_{\Psi}^F(\Delta, I_0) \quad \forall t', t'' \in [t_0, t^*]. \quad (4.6)$$

Отметим, что если $\theta(\Delta) \neq T$, то $\Omega_{\mathbb{K}}(\theta(\Delta) - t_0) + \varrho_{\Psi}^F(\Delta, I_0)$ не меньше расстояния от x_0 до границы компакта \mathbb{K} . Тогда, в силу $x_0 \in \mathbb{K}_0$, имеем

$$(\theta(\Delta) \neq T) \Rightarrow (\Omega_{\mathbb{K}}(\theta(\Delta) - t_0) + \varrho_{\Psi}^F(\Delta, I_0) \geq \varkappa). \quad (4.7)$$

Лемма 1. Пусть для последовательностей $(\Delta_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$, $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ выполнено $\lim_{i \rightarrow \infty} \varrho_{\Psi}^F(\Delta_i, I_0) = 0$ и $\xi_i \in \Xi_{\theta(\Delta_i)}^{\Delta_i}$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Тогда, если $\eta \in I_0$ таково, что $\theta(\Delta_i) \geq \eta$ для всех $i \in \mathbb{N}$, то из последовательности $(\xi_i|_{[t_0, \eta]})_{i \in \mathbb{N}}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу $x \in \tilde{\Psi}_{\eta}$.

Доказательство полностью повторяет доказательство леммы 3 из [10] и опирается на полученную в [20] оценку сверху для меры некомпактности Куратовского семейства непрерывных функций $(\xi_i|_{[t_0, \eta]})_{i \in \mathbb{N}}$ через мажоранту (4.6) их модулей непрерывности.

Лемма 2. Пусть для последовательности $(\Delta_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$, $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ выполнено $\lim_{i \rightarrow \infty} \varrho_{\Psi}^F(\Delta_i, I_0) = 0$ и $\xi_i \in \Xi_{\theta(\Delta_i)}^{\Delta_i}$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Если $\eta \in I_0$ таково, что $\theta(\Delta_i) \geq \eta$ для всех $i \in \mathbb{N}$, а последовательность $(\xi_i|_{[t_0, \eta]})_{i \in \mathbb{N}}$ сходится (в метрике $C([t_0, \eta])$) к некоторой $y \in \tilde{\Psi}_{\eta}$, то $y \in \Phi_{\eta}$.

Доказательство. Зафиксируем $(\Delta_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$, $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $\eta \in I_0$, $y \in \tilde{\Psi}_{\eta}$, удовлетворяющие условиям леммы. Введем $z \in C_m([t_0, \eta])$ по правилу

$$z(t) = x_0 + \int_{[t_0, t]} f(t, y(t)) dt \quad \forall t \in [t_0, \eta].$$

Почти всюду на $[t_0, \eta]$ выполнено (3.2), тогда для $\forall t \in [t_0, \eta]$

$$\begin{aligned} \|z(t) - \xi_i(t)\|_m &= \left\| \int_{[t_0, t]} f(\tau_{\Delta_i}^*(t), \xi_i(\tau_{\Delta_i}^*(t))) - f(t, y(t)) dt \right\|_m \\ &\leq \int_{[t_0, t]} \|f(\tau_{\Delta_i}^*(t), \xi_i(\tau_{\Delta_i}^*(t))) - f(\tau_{\Delta_i}^*(t), y(\tau_{\Delta_i}^*(t)))\|_m dt + \left\| \int_{[t_0, t]} f(\tau_{\Delta_i}^*(t), y(\tau_{\Delta_i}^*(t))) - f(t, y(t)) dt \right\|_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{[t_0, t)} \varpi_{\mathbb{K}}(\tau_{\Delta_i}^*(t), \|\xi_i - y\|_{C_m([t_0, \eta])}) dt + \varrho_{\Psi}^F(\Delta_i, I_0) \\
&\stackrel{(4.5)}{\leq} \int_{I_0} \varpi_{\mathbb{K}}(t, \|\xi_i - y\|_{C_m([t_0, \eta])}) dt + 2\varrho_{\Psi}^F(\Delta_i, I_0). \tag{4.8}
\end{aligned}$$

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon \in \langle 0, \infty \rangle$. Поскольку $I_0 \times \mathbb{K}$ — компакт, то по свойству Скорца Драгоны [14, 15] для функции Каратеодори f при любом $\varepsilon \in \langle 0, \infty \rangle$ существует такое замкнутое множество $F_\varepsilon \subset I_0$, что

$$\lambda(I_0 \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon, \quad f|_{F_\varepsilon \times \mathbb{K}} \in C_m(F_\varepsilon \times \mathbb{K}).$$

Зафиксируем это множество F_ε . Определим модуль непрерывности функции f на $F_\varepsilon \times \mathbb{K}$:

$$\omega_\varepsilon(\delta) \triangleq \sup_{t \in F_\varepsilon} \sup_{x_1, x_2 \in \mathbb{K}, \|x_1 - x_2\|_m \leq \delta} \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\|_m \quad \forall \delta \in \langle 0, \infty \rangle.$$

В силу определения $\varpi_{\mathbb{K}}$ выполнено $\varpi_{\mathbb{K}}(t, r) \leq \omega_\varepsilon(r)$ для всех $t \in F_\varepsilon, r \in [0, \varkappa]$. Тогда, продолжая оценку (4.8), имеем

$$\begin{aligned}
\|z(t) - \xi_i(t)\|_m &\leq \int_{F_\varepsilon} \omega_\varepsilon(\|\xi_i - y\|_{C_m([t_0, \eta])}) dt + \int_{I_0 \setminus F_\varepsilon} \varpi_{\mathbb{K}}(t, \|\xi_i - y\|_{C_m([t_0, \eta])}) dt \\
&+ 2\varrho_{\Psi}^F(\Delta_i, I_0) \stackrel{(4.3)}{\leq} \lambda(F_\varepsilon) \omega_\varepsilon(\|\xi_i - y\|_{C_m([t_0, \eta])}) + \int_{I_0 \setminus F_\varepsilon} 2M_{\mathbb{K}}(t) dt + 2\varrho_{\Psi}^F(\Delta_i, I_0) \\
&\leq \lambda(I_0) \omega_\varepsilon(\|\xi_i - y\|_{C_m([t_0, \eta])}) + 2\Omega_{\mathbb{K}}(\varepsilon) + 2\varrho_{\Psi}^F(\Delta_i, I_0).
\end{aligned}$$

Устремляя эту оценку к пределу при $i \rightarrow \infty$, поскольку $\lim_{i \rightarrow \infty} \|\xi_i - y\|_{C_m([t_0, \eta])} = \lim_{i \rightarrow \infty} \varrho_{\Psi}^F(\Delta_i, I_0) = 0$, а функция f равномерно непрерывна на компакте $F_\varepsilon \times \mathbb{K}$, имеем для всех $t \in [t_0, \eta]$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|z(t) - \xi_i(t)\|_m \leq 2\Omega_{\mathbb{K}}(\varepsilon).$$

Вновь переходя к пределу, но уже при $\varepsilon \rightarrow 0$, из (4.2) получаем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|z - \xi_i\|_{C_m([t_0, \eta])} = 0,$$

т. е. $(\xi_i|_{[t_0, \eta]})_{i \in \mathbb{N}}$ сходится к z , отсюда $z = y$, т. е. $y \in \Phi_\eta$. \square

Лемма 3. При некотором $d_0 \in \langle 0, \infty \rangle$ для всех $\Delta \in \mathcal{D}$ из $\varrho_{\Psi}^F(\Delta, I_0) \leq d_0$ следует $\theta(\Delta) = T$.

Доказательство. Предположим обратное, что для всякого $i \in \mathbb{N}$ найдется такое $\Delta_i \in \mathcal{D}$, что $\varrho_{\Psi}^F(\Delta_i, I_0) \leq 1/i$ и $\theta(\Delta_i) < T$. Тогда для всякого $i \in \mathbb{N}$ в силу определения $\theta(\Delta_i)$ существуют такие момент времени $t_i \in I_0$ и ломаная Эйлера $\xi_i \in \Xi_{t_i}^{\Delta_i}(\mathbb{K})$, что $t_i - \theta(\Delta_i) \in [0, 1/i]$, и $\xi_i(t_i)$ принадлежит границе компакта \mathbb{K} .

Обозначим $\hat{\theta} = \liminf_{i \rightarrow \infty} \theta(\Delta_i)$. Переходя к нижнему пределу в (4.7), имеем $\Omega_{\mathbb{K}}(\hat{\theta} - t_0) \geq \varkappa$, отсюда $\hat{\theta} > t_0$, тогда в силу (4.2) существует такое $\eta \in \langle t_0, \hat{\theta} \rangle$, что

$$\Omega_{\mathbb{K}}(\hat{\theta} - \eta) < \varkappa. \tag{4.9}$$

Зафиксируем такое $\eta \in \langle t_0, \hat{\theta} \rangle$.

Теперь найдется такая монотонно возрастающая функция $\iota = (\iota(k) \in \mathbb{N} | k \in \mathbb{N})$, что $\theta(\Delta_{\iota(k)}) > \eta$ для всех $k \in \mathbb{N}$, выполнено

$$(t_{\iota(k)})_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \hat{\theta}, \quad (\varrho_{\Psi}^F(\Delta_{\iota(k)}, I_0))_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow 0, \tag{4.10}$$

а кроме того, в силу леммы 1, существует такое $x \in \tilde{\Psi}|_{[t_0, \eta]}$, что имеет место сходимость (в метрике $C_m([t_0, \eta])$)

$$(\xi_{i(k)}|_{[t_0, \eta]})_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow x. \quad (4.11)$$

Тогда, в силу леммы 2, $x \in \Phi_\eta$, т. е. $x(\eta) \in \mathbb{K}_0$, но точки $\xi_{i(k)}(t_{i(k)})$ лежат на границе компакта \mathbb{K} . По построению \mathbb{K} для всех $k \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\begin{aligned} \varkappa &\leq \|x(\eta) - \xi_{i(k)}(t_{i(k)})\|_m \leq \|x(\eta) - \xi_{i(k)}(\eta)\|_m + \|\xi_{i(k)}(\eta) - \xi_{i(k)}(t_{i(k)})\|_m \\ &\stackrel{(4.6)}{\leq} \|x(\eta) - \xi_{i(k)}(\eta)\|_m + \Omega_{\mathbb{K}}(t_{i(k)} - \eta) + \varrho_{\tilde{\Psi}}^F(\Delta_{i(k)}, I_0). \end{aligned}$$

Устремляя полученную оценку к пределу при $k \rightarrow \infty$, из (4.11), (4.10) имеем $\varkappa \leq \Omega_{\mathbb{K}}(\hat{\theta} - \eta)$. Полученное с (4.9) противоречие доказывает лемму 3. \square

Вернемся к доказательству теоремы. Предположим противное, пусть существуют такие $\varepsilon \in \langle 0, \infty \rangle$ и последовательности $(\Delta_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$, $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in (\Xi_T^{\Delta_i})^{\mathbb{N}}$, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \varrho_{\tilde{\Psi}}^F(\Delta_i, I_0) = 0$ и

$$\|x - \xi_i\|_{C_m(I_0)} \geq \varepsilon \quad \forall x \in \Phi, i \in \mathbb{N}. \quad (4.12)$$

Можно при этом также считать, при необходимости перейдя к подпоследовательности, что $\varrho_{\tilde{\Psi}}^F(\Delta_i, I_0) \leq d_0$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Тогда из леммы 3 для всех $i \in \mathbb{N}$ выполнено $\theta(\Delta_i) = T$. Вновь перейдя при необходимости к подпоследовательности, в силу леммы 1 можно считать, что $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in (\Xi_T^{\Delta_i})^{\mathbb{N}}$ сходится (в метрике $C_m(I_0)$) к элементу $x \in \tilde{\Psi}_T$. Тогда $x \in \Phi_T$ в силу леммы 2, т. е. для некоторого элемента $x \in \Phi$ выполнено $\lim_{i \rightarrow \infty} \|x - \xi_i\|_{C_m(I_0)} = 0$, но это противоречит (4.12). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. \square

Следствие. В условиях (K1), (K2), (K3), (C) найдется такая последовательность конечных разбиений $(\Delta_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{d}(\Delta_i) = 0$ и $(\xi_{\Delta_i})_{i \in \mathbb{N}}$ равномерно сходится на I_0 к некоторой траектории $x \in \Phi$.

Для доказательства достаточно применить [10, теорема 1] к только что доказанной теореме, а затем воспользоваться компактностью Φ .

Отметим, что в случае ограниченной (на всяких компактах из $I_0 \times \mathbb{R}^m$) правой части доказательства теоремы существенно упрощается. Прежде всего заметим, что функция $M_{\mathbb{K}}$ может быть выбрана константой, тогда условия предложения 1 всегда выполнены, следовательно, вторая компонента в F (см. (4.4)) может быть отброшена. Кроме того в условиях леммы 1 все ломаные Эйлера на $[t_0, \eta]$ равностепенно непрерывны и могут быть вложены в компакт $\tilde{\Psi}_\eta$. Но тогда функция ϖ как третья компонента F может понадобиться лишь для неравенства (4.5), которое используется только при доказательстве (4.8). Однако из вложения $\xi_i|_{[t_0, \eta]} \in \tilde{\Psi}_\eta$ следует, что

$$\int_{[t_0, \eta]} \|f(\tau_{\Delta_i}^*(t), \xi_i(\tau_{\Delta_i}^*(t))) - f(t, \xi_i(t))\|_m dt \leq \varrho_{\tilde{\Psi}_T}^f(\Delta_i, I_0).$$

Теперь (4.8) можно показать и без (4.5) следующим образом:

$$\begin{aligned} \|z(t) - \xi_i(t)\|_m &= \left\| \int_{[t_0, t]} f(\tau_{\Delta_i}^*(t), \xi_i(\tau_{\Delta_i}^*(t))) - f(t, y(t)) dt \right\|_m \\ &\leq \left\| \int_{[t_0, t]} f(\tau_{\Delta_i}^*(t), \xi_i(\tau_{\Delta_i}^*(t))) - f(t, y(t)) dt \right\|_m \\ &+ \int_{[t_0, t]} \|f(\tau_{\Delta_i}^*(t), \xi_i(\tau_{\Delta_i}^*(t))) - f(\tau_{\Delta_i}^*(t), y(\tau_{\Delta_i}^*(t)))\|_m dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\| \int_{[t_0, t)} f(\tau_{\Delta_i}^*(t), y(\tau_{\Delta_i}^*(t))) - f(t, y(t)) dt \right\|_m \\
& \leq \varrho_{\Psi_T}^f(\Delta_i, I_0) + \int_{[t_0, t)} \varpi_{\mathbb{K}}(t, \|\xi_i - y\|_{C_m([t_0, \eta])}) dt + \varrho_{\Psi_T}^f(\Delta_i, I_0) \\
& \leq \int_{I_0} \varpi_{\mathbb{K}}(t, \|\xi_i - y\|_{C_m([t_0, \eta])}) dt + 2\varrho_{\Psi_T}^f(\Delta_i, I_0).
\end{aligned}$$

Но тогда в определении F (см.(4.4)) можно оставить только одну компоненту — собственно правую часть f исходной системы, при этом функция F совпадет с f .

Итак, в случае ограниченной правой части в качестве топологии на \mathcal{D} можно взять псевдометрику $\varrho_{\Psi_T}^f$ вместо более сильной и более сложной по конструкции псевдометрики ϱ_{Ψ}^F .

З а м е ч а н и е. В условиях $(K1)$, $(K2)$, (C) , если для всякого компакта $K \subset \mathbb{R}^m$ функция $f|_{I_0 \times K}$ ограничена, то при некотором компакте $\Psi_T \subset C_m(I_0)$ для любого $\varepsilon \in \langle 0, \infty \rangle$ существует такое $d \in \langle 0, \infty \rangle$, что для всякого $\Delta \in \mathcal{D}$, $\varrho_{\Psi}^f(\Delta, I_0) \leq d$, множество Ξ_T^{Δ} непусто и для всякой ломаной Эйлера $\xi \in \Xi_T^{\Delta}$ найдется $x \in \Phi$ со свойством $\|x - \xi\|_{C_m(I_0)} < \varepsilon$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы: в 3-х т. М.: ИЛ, 1962. Т.1: Общая теория. 895 с.
2. Жуковский Е. С. О параметрическом задании решения дифференциального уравнения и его приближенном построении // Изв. вузов. Сер. Математика. 1996. Т. 407, № 4. С. 31–34.
3. Панасюк А.И. Свойства решений обобщенных дифференциальных уравнений аппроксимационного типа в \mathbb{R}^m // Диф. уравнения. 1991. Т. 27, № 12. С. 2065–2076.
4. Петухов В.Р. Исследование одной системы дифференциально-функциональных уравнений // Диф. уравнения. 1968. Т. 4, № 5. С. 875–880.
5. Толстоногов А. А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве. Новосибирск: Наука, 1986. 296 с.
6. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 216 с.
7. Филиппов В. В. Пространства решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1993. 334 с.
8. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
9. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
10. Хлопин Д.В. Ломаные Эйлера в системах с условиями Каратеодори // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2007. Т. 13, № 2. С.167–184.
11. Хлопин Д.В. Сходимость ломаных Эйлера к решениям системы в условиях Каратеодори // Проблемы теорет. и прикл. математики: сб. тр. конф. Екатеринбург, 2008.
12. Хлопин Д.В. Сходимость ломаных Эйлера в условиях Каратеодори // Вестн. Удмурт. ун-та. Сер. Математика. 2008. Вып. 2. С. 163–164.
13. Artstein Z. Continuous dependence on parameters: On the best possible results // J. Diff. Eq. 1975. Vol. 19, no. 2. P. 214–225.
14. Averna D., Fiacca A. On the Scorza Dragoni property // Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. 1984. Vol. 33, no. 2. P. 313–318.
15. Averna D., Fiacca A. Some results on theorems of G. Scorza Dragoni and L. Tibaldo in abstract spaces // Riv. Mat. Univ. Parma. 1986. Vol. 12, no. 4. P. 217–225.
16. Bohner M., Peterson A.C. Dynamic equations on time scales. An introduction with applications. Boston: Birkhäuser, 2001. 358 p.
17. Cooke K.L., Wiener J. A survey of differential equations with piecewise continuous arguments // Lecture Notes in Math. Vol. 1475. Berlin: Springer, 1991. P. 1–15.

18. **Lakshmikantham V., Vatsala A.S.** Hybrid systems on the time scales // J. Comp. Appl. Math. 2002. Vol. 141. P. 227–236.
19. **Miriča S.** Feedback differential systems: approximate and limiting trajectories // Studia Univ. Babeş-Bolyai Math. 2004. Vol. 49, no. 3. P. 83–96.
20. **Nussbaum R.D.** A generalisation of the Ascoli theorem and an application to functional differential equations // J. Math. Anal. Appl. 1971. Vol. 35, no. 3. P. 600–610.

Хлопин Дмитрий Валерьевич
канд. физ.-мат. наук
ст. науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: khlopin@imm.uran.ru

Поступила 9.06.2008

УДК 512.552.7

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ЕДИНИЦЫ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ ДИЭДРАЛЬНЫХ И БЛИЗКИХ К НИМ ГРУПП

Е. О. Шумакова

В работе найдены ранги групп центральных единиц целочисленных групповых колец диэдральных, обобщенных кватернионных и обобщенных полудиэдральных групп. Доказано, что, зная группу центральных единиц целочисленного группового кольца циклической группы $\langle b \rangle$ порядка n , мы можем определить группу центральных единиц целочисленного группового кольца группы диэдра D_{2n} , обобщенной группы кватернионов Q_{4n} и обобщенной полудиэдральной группы S_{8n} .

Ключевые слова: групповые кольца, центральные единицы, группа диэдра, ранг группы.

Введение

В изучении групп центральных единиц (равносильно центров групп единиц) целочисленных групповых колец достигнут определенный прогресс. Усилиями Р. Ж. Алеева и его учеников были исследованы группы центральных единиц целочисленных групповых колец для некоторых неразрешимых групп, таких как A_5 , A_6 , $PSL(2, q)$ и $PSL(2, 2^n)$. Эти результаты можно найти в [1]. В работе [2] рассматриваются группы центральных единиц целочисленных групповых колец конечных нильпотентных групп. Группы центральных единиц целочисленных групповых колец разрешимых ненильпотентных групп не подвергались тщательному изучению.

В данной работе для натуральных $n \geq 2$ рассматриваются:

- группы диэдра $D_{2n} = \langle a, b \mid a^2 = b^n = 1, aba = b^{-1} \rangle$;
- обобщенные группы кватернионов $Q_{4n} = \langle a, b \mid a^2 = b^n, a^{-1}ba = b^{-1} \rangle$;
- обобщенные полудиэдральные группы $S_{8n} = \langle a, b \mid a^2 = b^{4n} = 1, aba = b^{2n-1} \rangle$.

Эти группы в случае, когда n не является степенью 2, являются разрешимыми ненильпотентными группами.

Будем придерживаться следующих обозначений.

Пусть n — натуральное число. Тогда:

$\nu(n)$ — число всех натуральных делителей n ;

$\varphi(n)$ — функция Эйлера;

$[n]$ — целая часть n ;

i — мнимая единица, т. е. $i^2 = -1$; $\zeta_n = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$ — первообразный корень степени n из единицы.

Пусть G — конечная группа. Тогда:

$\mathbb{Z}G$ — целочисленное групповое кольцо группы G ;

$Z(\mathbb{Z}G)$ — центр кольца $\mathbb{Z}G$;

$U(Z(\mathbb{Z}G))$ — группа центральных единиц (обратимых элементов центра) кольца $\mathbb{Z}G$;

$r(U(Z(\mathbb{Z}G)))$ — ранг группы $U(Z(\mathbb{Z}G))$, т. е. число бесконечных прямых циклических множителей в конечно порожденной абелевой группе $U(Z(\mathbb{Z}G))$;

отображение $\varepsilon : \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}$, где для элементов $\sum_{g \in G} z_g g \in \mathbb{Z}G$ с $z_g \in \mathbb{Z}$ выполняется равенство $\varepsilon(\sum_{g \in G} z_g g) = \sum_{g \in G} z_g$, называется гомоморфизмом тривиализации;

$V(Z(\mathbb{Z}G)) = \{u \in U(Z(\mathbb{Z}G)) \mid \varepsilon(u) = 1\}$ — нормализованная группа центральных единиц $\mathbb{Z}G$, причем $U(Z(\mathbb{Z}G)) = \langle -1 \rangle \times V(Z(\mathbb{Z}G))$ [1, лемма 1.48];

$y(x) = \sum_{t \in x^G} t$ — классовая сумма в $\mathbb{Z}G$ класса сопряженности x^G группы G ;

$X(G)$ — некоторая система представителей классов сопряженности конечной группы G .

$Irr(G)$ — множество всех неприводимых характеров G над \mathbb{C} ; $Irr(\chi, alc)$ — класс характеров, алгебраически сопряженных [3, 2A24] с неприводимым характером χ ;

$Irr(G, alc)$ — некоторая система представителей классов алгебраически сопряженных неприводимых характеров конечной группы G ;

$Irr(G, \mathbb{R}, alc) = \{\chi \in Irr(G, alc) \mid \mathbb{Q}(\chi) \subseteq \mathbb{R}\}$ — множество всех действительных характеров в $Irr(G, alc)$;

$e(\chi)$ — минимальный центральный идемпотент в комплексной групповой алгебре, соответствующий неприводимому характеру χ .

Нам понадобятся следующие три леммы.

Лемма 1 [4, теорема 2]. *Группа единиц $U(I(Z(\mathbb{Q}G)))$ кольца целых центра рациональной групповой алгебры $\mathbb{Q}G$ изоморфна прямому произведению групп единиц $U(I(\mathbb{Q}(\chi)))$ колец целых полей $\mathbb{Q}(\chi)$ по всем $\chi \in Irr(G, alc)$, т. е.*

$$U(I(Z(\mathbb{Q}G))) \cong \prod_{\chi \in Irr(G, alc)} U(I(\mathbb{Q}(\chi))).$$

Лемма 2 [4, теорема 5]. *Группы единиц $U(Z(\mathbb{Z}G))$ и $U(I(Z(\mathbb{Q}G)))$ имеют одинаковый ранг.*

Лемма 3. *Пусть K — расширение Галуа поля \mathbb{Q} . Тогда:*

(1) $U(I(K)) = W \times A$, где W — конечная циклическая подгруппа, состоящая из всех корней из единицы, содержащихся в K , A — свободная абелева группа ранга

$$r = \begin{cases} [K : \mathbb{Q}] - 1, & \text{если поле } K \text{ действительно,} \\ \frac{[K : \mathbb{Q}]}{2} - 1, & \text{если } K \text{ комплексно и } K \not\subseteq \mathbb{R}; \end{cases}$$

(2) если $K = \mathbb{Q}(\zeta_d)$, то $[K : \mathbb{Q}] = \varphi(d)$;

(3) если $K = \mathbb{Q}(\zeta_d + \zeta_d^{-1})$, то $[K : \mathbb{Q}] = \varphi(d)/2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение [1, лемма 1.6] следует из теоремы Дирихле [5, гл. 2, теорема 5] и теоремы [6, §57, с. 195], второе утверждение [1, лемма 1.18] следует из [6, §60, с. 204], третье утверждение [1, лемма 1.30] следует из основной теоремы теории Галуа [6, §58, с. 197] и теоремы [6, §59, с. 202].

1. Группы диэдра

В этом разделе $D_{2n} = \langle a, b \mid a^2 = b^n = 1, aba = b^{-1} \rangle$ — группа диэдра порядка $2n$, $\langle b \rangle$ — максимальная циклическая подгруппа D_{2n} порядка n .

Теорема 1. *Группа центральных единиц целочисленного группового кольца группы диэдра D_{2n} имеет вид*

$$U(Z(\mathbb{Z}D_{2n})) = \langle -1 \rangle \times Z(D_{2n}) \times V,$$

где V — прямое произведение бесконечных циклических групп и:

(1) ранг группы $U(Z(\mathbb{Z}D_{2n}))$ равен $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 - \nu(n)$;

(2) группа V порождается элементами вида $\sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \gamma_j y(b^j)$, где γ_j — целые числа.

Доказательство. В силу лемм 1 и 2 имеем

$$r(U(Z(\mathbb{Z}D_{2n}))) = r(U(I(Z(\mathbb{Q}D_{2n})))) = \sum_{\chi \in \text{Irr}(D_{2n}, \text{alc})} r(U(I(\mathbb{Q}(\chi)))).$$

Рассмотрим таблицы характеров групп диэдра из [3]. Возможны два случая:

(1) для $n = 2m + 1$

$ x^G $	1	2	n
	1	b^j	a
ψ_0	1	1	1
ψ_1	1	1	-1
χ_k	2	ω_{kj}	0

, где $k, j \in \{1, \dots, m\}$, $\omega_{kj} = 2 \cos \frac{2\pi kj}{n}$;

(2) для $n = 2m$

$ x^G $	1	2	1	m	m
	1	b^j	b^m	a	ab
ψ_0	1	1	1	1	1
ψ_1	1	1	1	-1	-1
ψ_2	1	$(-1)^j$	$(-1)^m$	1	-1
ψ_3	1	$(-1)^j$	$(-1)^m$	-1	1
χ_k	2	ω_{kj}	$(-1)^k 2$	0	0

, где $k, j \in \{1, \dots, m-1\}$, $\omega_{kj} = 2 \cos \frac{2\pi kj}{n}$.

Линейные характеры ψ_s имеют целые значения и ранг группы $U(I(\mathbb{Q}(\psi_s)))$ равен 0.

Ясно, что если ω_{k1} и ω_{d1} алгебраически сопряжены, то соответствующие характеры χ_k и χ_d алгебраически сопряжены. С другой стороны, $\omega_{k1} = 2 \cos(2\pi k/n) = \zeta_n^k + \zeta_n^{-k}$ алгебраически сопряжен $\omega_{d1} = 2 \cos(2\pi d/n) = \zeta_{n/d} + \zeta_{n/d}^{-1}$, где $d = (k, n)$ — наибольший общий делитель чисел k и n . Поэтому максимальное число попарно алгебраически несопряженных характеров равно числу делителей d числа n , которые меньше $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Отсюда

$$|\text{Irr}(D_{2n}, \text{alc})| = \begin{cases} \nu(n) - 1 & \text{при нечетном } n, \\ \nu(n) - 2 & \text{при четном } n. \end{cases}$$

По лемме 3 для любого делителя $d \notin \{1, 2\}$ числа n

$$r(U(I(\mathbb{Q}(\chi_d)))) = [\mathbb{Q}(\chi_d) : \mathbb{Q}] - 1 = [\mathbb{Q}(\zeta_d + \zeta_d^{-1}) : \mathbb{Q}] - 1 = \frac{\varphi(d)}{2} - 1.$$

Следовательно, при нечетном n по леммам 1 и 2 имеем

$$\begin{aligned} r(U(Z(\mathbb{Z}D_{2n}))) &= \sum_{\chi \in \text{Irr}(D_{2n}, \text{alc})} r(U(I(\mathbb{Q}(\chi)))) = \sum_{d|n, d \neq 1} \frac{\varphi(\beta)}{2} - (\nu(n) - 1) \\ &= \frac{1}{2}(n - 1) - (\nu(n) - 1) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 - \nu(n). \end{aligned}$$

Аналогично при четном n имеем

$$\begin{aligned} r(U(Z(\mathbb{Z}D_{2n}))) &= \sum_{\chi \in \text{Irr}(D_{2n}, \text{alc})} r(U(I(\mathbb{Q}(\chi)))) = \sum_{d|n, d \neq 1, 2} \frac{\varphi(\beta)}{2} - (\nu(n) - 2) \\ &= \frac{1}{2}(n - 2) - (\nu(n) - 2) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 - \nu(n). \end{aligned}$$

Первое утверждение доказано.

Докажем второе утверждение. Группа центральных единиц целочисленного группового кольца группы диэдра D_{2n} имеет вид $U(Z(\mathbb{Z}D_{2n})) = \langle -1 \rangle \times V(Z(\mathbb{Z}D_{2n}))$. Пусть $V(Z(\mathbb{Z}D_{2n})) = Z(D_{2n}) \times V$, где V — прямое произведение бесконечных циклических групп. Ранг группы V равен $\left[\frac{n}{2} \right] + 1 - \nu(n)$ по первому утверждению. Найдем порождающие элементы группы V .

Пусть сначала $n = 2m + 1$. Рассмотрим два упорядоченных базиса \mathbb{C} -пространства $\mathbb{C}D_{2n}$:

$Y(D_{2n}) = (y_0, y_1, \dots, y_{m+1})$, где $y_0 = y(1) = 1$, $y_1 = y(b), \dots$, $y_m = y(b^m)$, $y_{m+1} = y(a)$ (базис из классовых сумм для центра комплексной групповой алгебры $\mathbb{C}D_{2n}$);

$E(D_{2n}) = (e_0, e_1, \dots, e_{m+1})$, где $e_0 = e(\psi_0)$, $e_1 = e(\psi_1)$, $e_2 = e(\chi_1), \dots$, $e_{m+1} = e(\chi_m)$ (базис из минимальных центральных идемпотентов центра комплексной групповой алгебры $\mathbb{C}D_{2n}$).

Пусть $T(D_{2n})$ и $S(D_{2n})$ — матрицы перехода от базиса $Y(D_{2n})$ к $E(D_{2n})$ и от базиса $E(D_{2n})$ к $Y(D_{2n})$ соответственно, т. е.

$$(e_0, \dots, e_{m+1}) = (y_0, \dots, y_{m+1}) T(D_{2n}) \quad \text{и} \quad (y_0, \dots, y_{m+1}) = (e_0, \dots, e_{m+1}) S(D_{2n}).$$

По формулам из [3, с. 109]

$$e(\chi) = \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{x \in X(G)} \overline{\chi(x)} y(x) \quad \text{и} \quad y(x) = |x^G| \sum_{\chi \in Irr(G)} \frac{\chi(x)}{\chi(1)} e(\chi) \quad \text{получаем}$$

$$T(D_{2n}) = \frac{1}{2n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2\omega_{kj} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad S(D_{2n}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & n \\ 1 & 2 & -n \\ 1 & \omega_{kj} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Здесь матрицы записаны в сокращенной форме, по типу таблиц характеров, в частности в матрице $T(D_{2n})$ блок во второй строке является квадратным блоком порядка m .

Пусть u — произвольный элемент из V . Тогда

$$u = \gamma_0 1 + \gamma_1 y_1 + \dots + \gamma_{m+1} y_{m+1} = \beta_0 e_0 + \dots + \beta_{m+1} e_{m+1},$$

где коэффициенты γ_t целые, а β_t являются обратимыми элементами колец целых соответствующих полей характеров, причем

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_{m+1} \end{pmatrix} = T(D_{2n}) \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{m+1} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{m+1} \end{pmatrix} = S(D_{2n}) \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_{m+1} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Так как $|(1)^{D_{2n}}| = 1$, $|(a)^{D_{2n}}| = n$, $|(b^j)^{D_{2n}}| = 2$, то по определению группы V $\varepsilon(u) = \gamma_0 + 2\gamma_1 + \dots + 2\gamma_m + n\gamma_{m+1} = 1$. Из соотношений (1.1) и (1.2) получаем

$$\begin{cases} \beta_0 = \gamma_0 + 2\gamma_1 + \dots + 2\gamma_m + n\gamma_{m+1} = 1, \\ \beta_1 = \gamma_0 + 2\gamma_1 + \dots + 2\gamma_m - n\gamma_{m+1} \end{cases} \quad \text{и} \quad \gamma_{m+1} = \frac{1}{2n}(\beta_0 - \beta_1).$$

β_1 является обратимым элементом кольца целых поля характеров $\mathbb{Q}(\psi_1)$. Поэтому $\beta_1 \in \{-1, 1\}$. Так как $\beta_0 = 1$, то $\beta_1 = 1$ и $\gamma_{m+1} = 0$, что доказывает второе утверждение для нечетного n .

Пусть теперь $n = 2m$. Рассмотрим два упорядоченных базиса \mathbb{C} -пространства $\mathbb{C}D_{2n}$:

$Y(D_{2n}) = (y_0, y_1, \dots, y_{m+2})$, где $y_0 = y(1) = 1$, $y_1 = y(b), \dots$, $y_m = y(b^m)$, $y_{m+1} = y(a)$, $y_{m+2} = y(ab)$ (базис из классовых сумм для центра комплексной групповой алгебры $\mathbb{C}D_{2n}$);

$E(D_{2n}) = (e_0, e_1, \dots, e_{m+2})$, где $e_0 = e(\psi_0)$, $e_1 = e(\psi_1), \dots, e_4 = e(\chi_1), \dots$, $e_{m+2} = e(\chi_{m-1})$ (базис из минимальных центральных идемпотентов центра комплексной групповой алгебры $\mathbb{C}D_{2n}$).

Пусть $T(D_{2n})$ и $S(D_{2n})$ — матрицы перехода от базиса $Y(D_{2n})$ к $E(D_{2n})$ и от базиса $E(D_{2n})$ к $Y(D_{2n})$ соответственно, т. е.

$$(e_0, \dots, e_{m+2}) = (y_0, \dots, y_{m+2}) T(D_{2n}) \quad \text{и} \quad (y_0, \dots, y_{m+2}) = (e_0, \dots, e_{m+2}) S(D_{2n}).$$

По формулам из [3, с. 109]

$$e(\chi) = \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{x \in X(G)} \overline{\chi(x)} y(x) \quad \text{и} \quad y(x) = |x^G| \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \frac{\chi(x)}{\chi(1)} e(\chi) \quad \text{получаем}$$

$$T(D_{2n}) = \frac{1}{2n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & (-1)^j & (-1)^j & 2\omega_{kj} \\ 1 & 1 & (-1)^m & (-1)^m & 4(-1)^k \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad S(D_{2n}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & m & m \\ 1 & 2 & 1 & -m & -m \\ 1 & 2(-1)^j & (-1)^m & m & -m \\ 1 & 2(-1)^j & (-1)^m & -m & m \\ 1 & \omega_{kj} & (-1)^k & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Пусть u — произвольный элемент из V . Тогда

$$u = \gamma_0 1 + \gamma_1 y_1 + \dots + \gamma_{m+2} y_{m+2} = \beta_0 e_0 + \dots + \beta_{m+2} e_{m+2},$$

где коэффициенты γ_t целые, а β_t являются обратимыми элементами колец целых соответствующих полей характеров, причем

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_{m+2} \end{pmatrix} = T(D_{2n}) \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{m+2} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{m+2} \end{pmatrix} = S(D_{2n}) \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_{m+2} \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Так как $|(1)^{D_{2n}}| = 1$, $|(a)^{D_{2n}}| = m$, $|(ab)^{D_{2n}}| = m$, $|(b^j)^{D_{2n}}| = 2$, $|(b^m)^{D_{2n}}| = 1$, то по определению группы V $\varepsilon(u) = \gamma_0 + 2\gamma_1 + \dots + 2\gamma_{m-1} + \gamma_m + m\gamma_{m+1} + m\gamma_{m+2} = 1$. Из (1.3) и (1.4) получаем

$$\begin{cases} \beta_0 = \gamma_0 + 2\gamma_1 + \dots + 2\gamma_{m-1} + \gamma_m + m\gamma_{m+1} + m\gamma_{m+2} = 1, \\ \beta_1 = \gamma_0 + 2\gamma_1 + \dots + 2\gamma_{m-1} + \gamma_m - m\gamma_{m+1} - m\gamma_{m+2}, \\ \beta_2 = \gamma_0 - 2\gamma_1 + \dots + 2(-1)^{m-1}\gamma_{m-1} + (-1)^m\gamma_m + m\gamma_{m+1} - m\gamma_{m+2}, \\ \beta_3 = \gamma_0 - 2\gamma_1 + \dots + 2(-1)^{m-1}\gamma_{m-1} + (-1)^m\gamma_m - m\gamma_{m+1} + m\gamma_{m+2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_{m+1} = \frac{1}{2n}(\beta_0 - \beta_1 + \beta_2 - \beta_3), \\ \gamma_{m+2} = \frac{1}{2n}(\beta_0 - \beta_1 - \beta_2 + \beta_3). \end{cases}$$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ являются обратимыми элементами колец целых полей характеров $\mathbb{Q}(\psi_1), \mathbb{Q}(\psi_2), \mathbb{Q}(\psi_3)$ соответственно. Поэтому $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \{1, -1\}$. Поскольку $\gamma_{m+1} + \gamma_{m+2} = 1/n(\beta_0 - \beta_1)$ является целым числом и $\beta_0 = 1$, то $\beta_1 = 1$. Так как $\gamma_{m+1} = -\gamma_{m+2} = 1/(2n)(\beta_2 - \beta_3)$ является целым числом, то $\beta_2 = \beta_3$ и $\gamma_{m+1} = \gamma_{m+2} = 0$.

Итак, для произвольного элемента u из V $u = \gamma_0 1 + \gamma_1 y_1 + \dots + \gamma_m y_m$. Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е. Группу центральных единиц кольца $\mathbb{Z}G$ назовем *тривиальной*, если она имеет вид

$$U(Z(\mathbb{Z}G)) = \langle -1 \rangle \times Z(G).$$

Следствие 1. *Группа центральных единиц целочисленного группового кольца группы диэдра D_{2n} тривиальна только при $n \in \{2, 3, 4, 6\}$.*

Доказательство. Заметим, что $n > 2\nu(n)$ при нечетном $n > 3$ (по крайней мере, делителями нечетного n не являются $(n-1)/2$ четных чисел и число $n-2$ и $\nu(n) \leq n-1 - (n-1)/2 < n/2$).

Рассмотрим случай $n = 2m + 1$. Выясним, когда $r = m + 1 - \nu(2m + 1) = 0$. Так как $\nu(2m + 1) < (2m + 1)/2 < m + 1$ при $2m + 1 > 3$, то $r > 0$ при $n > 3$. В случае $n = 3$ получаем $r = 0$.

Пусть $n = 2m = 2^t l$, где $t \geq 1$ и $(2, l) = 1$. Выясним, когда $r = 2^{t-1}l + 1 - (t + 1)\nu(l) = 0$. Так как $\nu(l) < l/2$ при $l > 3$, и $t + 1 \leq 2^t$ для натурального t , то $r > 0$ при $l > 3$.

В случае $l = 1$ получаем $r = 2^{t-1} + 1 - (t + 1) = 2^{t-1} - t > 0$ при $t > 2$ и $n > 4$. Если $n = 2$ или $n = 4$, то $r = 0$.

В случае $l = 3$ получаем $r = 3 \cdot 2^{t-1} + 1 - 2(t + 1) = 3 \cdot 2^{t-1} - 2t - 1 \geq 3t - 2t - 1 > 0$ при $t > 1$ и $n > 6$. Если $n = 6$, то $r = 0$. Следствие доказано.

2. Обобщенные группы кватернионов

В этом разделе $Q_{4n} = \langle a, b \mid a^2 = b^n, a^{-1}ba = b^{-1} \rangle$ — обобщенная группа кватернионов порядка $4n$, $\langle b \rangle$ — максимальная циклическая подгруппа Q_{4n} порядка $2n$.

Лемма 4. Таблица характеров группы Q_{4n} имеет вид

$ x^G $	1	2	1	n	n	
	1	b^j	b^n	a	ab	
ψ_0	1	1	1	1	1	
ψ_1	1	1	1	-1	-1	, где $k, j \in \{1, \dots, n-1\}$, $\omega_{kj} = 2 \cos \frac{\pi kj}{n}$, $\theta = n-2 \left[\frac{n}{2} \right]$.
ψ_2	1	$(-1)^j$	$(-1)^n$	i^θ	$-i^\theta$	
ψ_3	1	$(-1)^j$	$(-1)^n$	$-i^\theta$	i^θ	
χ_k	2	ω_{kj}	$2(-1)^k$	0	0	

Доказательство. Перечислим классы сопряженных элементов группы Q_{4n} : $C_0 = \{1\}$; $C_j = \{b^j, b^{-j}\}$ при $j \in \{1, \dots, n-1\}$; $C_n = \{b^n\}$; $C_{n+1} = \{ab^{2l} \mid l \in \{0, \dots, n-1\}\}$; $C_{n+2} = \{ab^{2l+1} \mid l \in \{0, \dots, n-1\}\}$.

Заметим, что в произведении классов

$$C_{n+1}C_{n+2} = \{ab^{2l}ab^{2s+1} \mid l, s \in \{0, \dots, n-1\}\} = \{b^{n+1+2s-2l} \mid l, s \in \{0, \dots, n-1\}\}$$

коэффициент $h_{(n+1), (n+2), 0}$ при C_0 равен 0, если n четно, и равен n , если n нечетно.

Из теоремы 8 и следствия 15 [7, разд. 47] следует, что существует 4 различных линейных представления и $n-1$ различных неприводимых представлений степени 2. Матрицы представлений степени 2 определяются формулами:

$$a \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & (-1)^k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} \zeta_{2n}^k & 0 \\ 0 & \zeta_{2n}^{-k} \end{pmatrix}, \quad \text{где } k \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Пусть ψ_s , где $s \in \{0, 1, 2, 3\}$, — характеры линейных представлений, а χ_k , где $k \in \{1, \dots, n-1\}$, — характеры представлений степени 2. Тогда $\chi_k(a) = 0$ для любого k и можно считать, что $\chi_k(b^j) = \zeta_{2n}^{kj} + \zeta_{2n}^{-kj} = 2 \cos(\pi kj/n) = \omega_{kj}$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Пусть $\psi_0 = 1_G$. Осталось вычислить значения ψ_1, ψ_2, ψ_3 . Положим $\lambda_s^j = \psi_s(b^j) = \psi_s(b^j)$, $\mu_s = \psi_s(a)$ при $s \in \{1, 2, 3\}$. Тогда $\lambda_s \in \{\zeta_{2n}^j, j \in \{1, \dots, 2n\}\}$ и $\mu_s \in \{-1, 1, -i, i\}$.

По первому соотношению ортогональности [3, 2A4] для $s \in \{1, 2, 3\}$ получаем

$$\sum_{g \in Q_{4n}} \psi_s(g)\psi_0(g^{-1}) = 1 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_s^j + \lambda_s^n + n\mu_s(1 + \lambda_s) = 0. \tag{2.1}$$

Пусть $\lambda_1 = 1$. Тогда $2 + 2(n-1) + 2n\mu_1 = 0$, откуда $\mu_1 = -1$. Теперь для $s \in \{2, 3\}$

$$\sum_{g \in Q_{4n}} \psi_s(g) \psi_1(g^{-1}) = 1 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_s^j + \lambda_s^n - n\mu_s(1 + \lambda_s) = 0. \quad (2.2)$$

Из соотношений (2.1) и (2.2) получаем $2n\mu_s(1 + \lambda_s) = 0$, откуда $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. По второму соотношению ортогональности [3, 2A4] получаем $0 = \sum_{\chi \in Irr(Q_{4n})} \chi(a) \chi(1) = 1 - 1 + \mu_2 + \mu_3$, откуда $\mu_3 = -\mu_2$.

Для коэффициентов в таблице умножения классов [3, 2A25] получаем

$$h_{(n+1), (n+2), 0} = \frac{n^2}{4n} \sum_{\chi \in Irr(Q_{4n})} \frac{\chi(a) \chi(ab) \overline{\chi(1)}}{\chi(1)} = \frac{n}{4} (1 + 1 - \mu_2^2 - \mu_2^2),$$

откуда

$$\mu_2 = \begin{cases} \pm 1, & \text{при четном } n, \\ \pm i, & \text{при нечетном } n. \end{cases}$$

Можно считать $\mu_2 = i^\theta$, где $\theta = n - 2 \left[\frac{n}{2} \right]$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Группа центральных единиц целочисленного группового кольца группы Q_{4n} имеет вид*

$$U(Z(\mathbb{Z}Q_{4n})) = \langle -1 \rangle \times Z(Q_{4n}) \times V,$$

где V есть прямое произведение циклических групп бесконечного порядка и:

- (1) ранг группы $U(Z(\mathbb{Z}Q_{4n}))$ равен $n + 1 - \nu(2n)$;
- (2) группа V порождается элементами вида $\sum_{j=0}^n \gamma_j y(b^j)$, где γ_j — целые числа.

Доказательство. В силу лемм 1 и 2 имеем

$$r(U(Z(\mathbb{Z}Q_{4n}))) = r(U(I(Z(\mathbb{Q}Q_{4n})))) = \sum_{\chi \in Irr(Q_{4n}, alc)} r(U(I(\mathbb{Q}(\chi)))).$$

Заметим, что таблица характеров группы Q_{4n} из леммы 4 отличается от таблицы характеров группы D_{2n} в случае $n = 2m$ значениями характеров ψ_2 и ψ_3 . По лемме 3 $r(U(I(\mathbb{Q}(\sqrt{-1})))) = 0$. По теореме 1 $r(U(Z(\mathbb{Z}D_{4m}))) = m + 1 - \nu(2m)$ и, значит, $r(U(Z(\mathbb{Z}Q_{4n}))) = n + 1 - \nu(2n)$. Первое утверждение доказано.

Докажем второе утверждение. Группа центральных единиц целочисленного группового кольца группы Q_{4n} имеет вид $U(Z(\mathbb{Z}Q_{4n})) = \langle -1 \rangle \times V(Z(\mathbb{Z}Q_{4n}))$. Пусть $V(Z(\mathbb{Z}Q_{4n})) = Z(Q_{4n}) \times V$, где V — прямое произведение бесконечных циклических групп. Ранг группы V равен $n + 1 - \nu(2n)$ по первому утверждению. Найдем порождающие элементы группы V .

Рассмотрим два упорядоченных базиса \mathbb{C} -пространства $\mathbb{C}Q_{4n}$:

$Y(Q_{4n}) = (y_0, y_1, \dots, y_{n+2})$, где $y_0 = y(1) = 1$, $y_1 = y(b)$, \dots , $y_n = y(b^n)$, $y_{n+1} = y(a)$, $y_{n+2} = y(ab)$ (базис из классовых сумм для центра комплексной групповой алгебры $\mathbb{C}Q_{4n}$);

$E(Q_{4n}) = (e_0, e_1, \dots, e_{n+2})$, где $e_0 = e(\psi_0)$, \dots , $e_3 = e(\psi_3)$, $e_4 = e(\chi_1)$, \dots , $e_{n+2} = e(\chi_{n-1})$ (базис из минимальных центральных идемпотентов центра комплексной групповой алгебры $\mathbb{C}Q_{4n}$).

Пусть $T(Q_{4n})$ и $S(Q_{4n})$ — матрицы перехода от базиса $Y(Q_{4n})$ к $E(Q_{4n})$ и от базиса $E(Q_{4n})$ к $Y(Q_{4n})$ соответственно, т. е.

$$(e_0, \dots, e_{n+2}) = (y_0, \dots, y_{n+2}) T(Q_{4n}) \quad \text{и} \quad (y_0, \dots, y_{n+2}) = (e_0, \dots, e_{n+2}) S(Q_{4n}).$$

По формулам из книги [3, с. 109]

$$e(\chi) = \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{x \in X(G)} \overline{\chi(x)} y(x) \quad \text{и} \quad y(x) = |x^G| \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \frac{\chi(x)}{\chi(1)} e(\chi) \quad \text{получаем}$$

$$T(Q_{4n}) = \frac{1}{4n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & (-1)^j & (-1)^j & 2\omega_{kj} \\ 1 & 1 & (-1)^n & (-1)^n & 4(-1)^k \\ 1 & -1 & i^\theta & -i^\theta & 0 \\ 1 & -1 & -i^\theta & i^\theta & 0 \end{pmatrix}, \quad S(Q_{4n}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & n & n \\ 1 & 2 & 1 & -n & -n \\ 1 & 2(-1)^j & (-1)^n & ni^\theta & -ni^\theta \\ 1 & 2(-1)^j & (-1)^n & -ni^\theta & ni^\theta \\ 1 & \omega_{kj} & (-1)^k & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Пусть u — произвольный элемент из V . Тогда

$$u = \gamma_0 1 + \gamma_1 y_1 + \dots + \gamma_{n+2} y_{n+2} = \beta_0 e_0 + \dots + \beta_{n+2} e_{n+2},$$

где коэффициенты γ_t целые, а β_t являются обратимыми элементами колец целых соответствующих полей характеров, причем

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_{n+2} \end{pmatrix} = T(Q_{4n}) \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{n+2} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{n+2} \end{pmatrix} = S(Q_{4n}) \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_{n+2} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Так как $|C_0| = 1$; $|C_j| = 2, j \in \{1, \dots, n-1\}$; $|C_n| = 1$; $|C_{n+1}| = n$; $|C_{n+2}| = n$, то по определению $V \varepsilon(u) = \gamma_0 + 2\gamma_1 + \dots + 2\gamma_{n-1} + \gamma_n + n\gamma_{n+1} + n\gamma_{n+2} = 1$. Из соотношений (2.3) и (2.4) получаем

$$\begin{cases} \gamma_{n+1} = \frac{1}{4n}(\beta_0 - \beta_1 + i^\theta \beta_2 - i^\theta \beta_3), \\ \gamma_{n+2} = \frac{1}{4n}(\beta_0 - \beta_1 - i^\theta \beta_2 + i^\theta \beta_3), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_0 = \gamma_0 + 2\gamma_1 + \dots + 2\gamma_{n-1} + \gamma_n + n\gamma_{n+1} + n\gamma_{n+2} = 1, \\ \beta_1 = \gamma_0 + 2\gamma_1 + \dots + 2\gamma_{n-1} + \gamma_n - n\gamma_{n+1} - n\gamma_{n+2}, \\ \beta_2 = \gamma_0 - 2\gamma_1 + \dots + 2(-1)^{n-1}\gamma_{n-1} + (-1)^n\gamma_n + ni^\theta\gamma_{n+1} - ni^\theta\gamma_{n+2}, \\ \beta_3 = \gamma_0 - 2\gamma_1 + \dots + 2(-1)^{n-1}\gamma_{n-1} + (-1)^n\gamma_n - ni^\theta\gamma_{n+1} + ni^\theta\gamma_{n+2}. \end{cases}$$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ являются обратимыми элементами колец целых полей характеров $\mathbb{Q}(\psi_1), \mathbb{Q}(\psi_2), \mathbb{Q}(\psi_3)$ соответственно. Поэтому $\beta_1 \in \{\pm 1\}$ и $\beta_2, \beta_3 \in \{\pm 1, \pm i\}$.

Поскольку $\gamma_{n+1} + \gamma_{n+2} = 1/(2n)(\beta_0 - \beta_1)$ является целым числом и $\beta_0 = 1$, то $\beta_1 = 1$ и $\gamma_{n+1} + \gamma_{n+2} = 0$. Так как $\gamma_{n+1} = i^\theta/(4n)(\beta_2 - \beta_3)$ является целым числом, то $\beta_2 = \beta_3$ и $\gamma_{n+1} = \gamma_{n+2} = 0$.

Таким образом, для произвольного элемента u из V получили, что $u = \gamma_0 1 + \gamma_1 y_1 + \dots + \gamma_n y_n$. Теорема доказана.

Следствие 2. *Группа центральных единиц целочисленного группового кольца группы Q_{4n} тривиальна только при $n = 2$ и $n = 3$.*

Доказательство подобно доказательству случая $n = 2m$ следствия 1.

3. Обобщенные полудиэдральные группы

В этом разделе $S_{8n} = \langle a, b \mid a^2 = b^{4n} = 1, aba = b^{2n-1} \rangle$ — обобщенная полудиэдральная группа порядка $8n$, $\langle b \rangle$ — максимальная циклическая подгруппа S_{8n} порядка $4n$.

Положим $M = \{n, s, 2n + s \mid s = 1, \dots, n - 1\}$ и $M' = \{0, 2n\}$ — для четного n и $M = \{s, 2n + s \mid s = 1, \dots, n - 1\}$ и $M' = \{0, n, 2n, 3n\}$ — для нечетного n .

Лемма 5. Таблица характеров группы S_{8n} , где n четно, имеет вид

$ x^G $	1	2	1	$2n$	$2n$
	1	b^j	b^{2n}	a	ab
ψ_0	1	1	1	1	1
ψ_1	1	1	1	-1	-1
ψ_2	1	$(-1)^j$	1	-1	1
ψ_3	1	$(-1)^j$	1	1	-1
χ_k	2	ω_{kj}	$2(-1)^k$	0	0

$$, \text{ где } k, j \in M \text{ и } \omega_{kj} = \begin{cases} 2 \cos \frac{2\pi kj}{4n}, & \text{если } kj \text{ четно,} \\ 2i \sin \frac{2\pi kj}{4n}, & \text{если } kj \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Доказательство. Перечислим классы сопряженных элементов группы S_{8n} : $C_0 = \{1\}$; $C_j = \{b^j, b^{(2n-1)j}\}$, где $j \in M$; $C_{2n} = \{b^{2n}\}$; $\overline{C}_1 = \{ab^{2t(1-n)} \mid t \in \{1, \dots, 2n\}\}$; $\overline{C}_2 = \{ab^{2t(1-n)+1} \mid t \in \{1, \dots, 2n\}\}$.

Из теоремы 8 и следствия 15 [7, разд. 47] вытекает, что существует 4 различных линейных представления и $2n - 1$ различных неприводимых представлений степени 2. Матрицы представлений степени 2 определяются формулами:

$$a \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} \zeta_{4n}^k & 0 \\ 0 & \zeta_{4n}^{(2n-1)k} \end{pmatrix}, \quad \text{где } k \in M.$$

Пусть ψ_s , где $s \in \{0, 1, 2, 3\}$, — характеры линейных представлений, а χ_k , где $k \in M$, — характеры представлений степени 2. Тогда $\chi_k(a) = 0$ для любого k и можно считать

$$\chi_k(b^j) = \zeta_{4n}^{kj} + \zeta_{4n}^{kj(2n-1)} = \begin{cases} 2 \cos \frac{2\pi kj}{4n}, & \text{если } kj \text{ четно,} \\ 2i \sin \frac{2\pi kj}{4n}, & \text{если } kj \text{ нечетно,} \end{cases} \quad \text{где } k \in M.$$

Пусть $\psi_0 = 1_G$. Осталось вычислить значения ψ_1, ψ_2, ψ_3 . Положим $\lambda_s^j = \psi_s(b)^j = \psi_s(b^j)$, $\mu_s = \psi_s(a)$ при $s \in \{1, 2, 3\}$. Тогда $\lambda_s \in \{\zeta_{4n}^j, j \in \{1, \dots, 4n\}\}$ и $\mu_s \in \{-1, 1\}$.

По первому соотношению ортогональности [3, 2A4] для $s \in \{1, 2, 3\}$ получим

$$\sum_{g \in S_{8n}} \psi_s(g) \psi_0(g^{-1}) = 1 + 2 \sum_{j \in M} \lambda_s^j + \lambda_s^{2n} + 2n\mu_s(1 + \lambda_s) = 0. \quad (3.1)$$

Пусть $\lambda_1 = 1$. Тогда $2 + 2(2n - 1) + 4n\mu_1 = 0$, откуда $\mu_1 = -1$. Теперь для $s \in \{2, 3\}$:

$$\sum_{g \in S_{8n}} \psi_s(g) \psi_1(g^{-1}) = 1 + 2 \sum_{j \in M} \lambda_s^j + \lambda_s^{2n} - 2n\mu_s(1 + \lambda_s) = 0. \quad (3.2)$$

Из соотношений (3.1) и (3.2) получаем $4n\mu_s(1 + \lambda_s) = 0$, откуда $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. По второму соотношению ортогональности [3, 2A4] получаем $0 = \sum_{\chi \in Irr(S_{8n})} \chi(a) \chi(1) = 1 - 1 + \mu_2 + \mu_3$, откуда

$\mu_2 = -\mu_3$. Можно считать $\mu_2 = -\mu_3 = 1$. Лемма доказана.

Лемма 6. Таблица характеров группы S_{8n} , где n нечетно, имеет вид

$ x^G $	1	2	1	1	1	n	n	n	n
	1	b^j	b^n	b^{3n}	b^{2n}	a	ab	ab^2	ab^3
ψ_0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ψ_1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
ψ_2	1	$(-1)^j$	-1	-1	1	1	-1	1	-1
ψ_3	1	$(-1)^j$	-1	-1	1	-1	1	-1	1
ψ_4	1	i^j	i^n	i^{3n}	-1	1	i	-1	$-i$
ψ_5	1	i^j	i^n	i^{3n}	-1	-1	$-i$	1	i
ψ_6	1	$(-i)^j$	$(-i)^n$	$(-i)^{3n}$	-1	1	$-i$	-1	i
ψ_7	1	$(-i)^j$	$(-i)^n$	$(-i)^{3n}$	-1	-1	i	1	$-i$
χ_k	2	ω_{kj}	ω_{kn}	ω_{-kn}	$(-1)^k 2$	0	0	0	0

$$\text{где } k, j \in M \text{ и } \omega_{kj} = \begin{cases} 2 \cos \frac{2\pi kj}{4n}, & \text{если } kj \text{ четно,} \\ 2i \sin \frac{2\pi kj}{4n}, & \text{если нечетно.} \end{cases}$$

Доказательство. Перечислим классы сопряженных элементов группы S_{8n} : $C_0 = \{1\}$; $C_j = \{b^j, b^{(2n-1)j}\}$, где $j \in M$; $C_{sn} = \{b^{sn}\}$, где $s \in \{1, \dots, 3\}$; $\overline{C}_s = \{ab^{2t(1-n)+s} \mid t \in \{1, \dots, 2n\}\}$, где $s \in \{0, \dots, 3\}$.

Из теоремы (47.8) и следствия (47.15) [7, разд. 47] следует, что существует 4 различных линейных представления и $2n-2$ различных неприводимых представлений степени 2. Матрицы представлений степени 2 определяются формулами:

$$a \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} \zeta_{4n}^k & 0 \\ 0 & \zeta_{4n}^{(2n-1)k} \end{pmatrix}, \quad \text{где } k \in M.$$

Пусть ψ_s , где $s \in \{0, \dots, 7\}$, — характеры линейных представлений, а χ_k , где $k \in M$, — характеры представлений степени 2. Тогда $\chi_k(a) = 0$ для любого k и можно считать

$$\chi_k(b^j) = \zeta_{4n}^{kj} + \zeta_{4n}^{kj(2n-1)} = \begin{cases} 2 \cos \frac{2\pi kj}{4n}, & kj \text{ четно,} \\ 2i \sin \frac{2\pi kj}{4n}, & kj \text{ нечетно,} \end{cases} \quad \text{где } k \in M.$$

Пусть $\psi_0 = 1_G$. Осталось вычислить значения ψ_s , где $s = 1, \dots, 7$. Положим $\lambda_s^j = \psi_s(b)^j = \psi_s(b^j)$, $\mu_s = \psi_s(a)$, где $s \in \{1, \dots, 7\}$. Тогда $\lambda_s \in \{\zeta_{4n}^j, j \in \{1, \dots, 4n\}\}$ и $\mu_s \in \{-1, 1\}$.

По первому соотношению ортогональности [3, 2A4] для $s \in \{1, \dots, 7\}$ получим

$$\sum_{g \in S_{8n}} \psi_s(g) \psi_0(g^{-1}) = 1 + 2 \sum_{j \in M} \lambda_s^j + \lambda_s^n + \lambda_s^{2n} + \lambda_s^{3n} + n\mu_s(1 + \lambda_s + \lambda_s^2 + \lambda_s^3) = 0. \quad (3.3)$$

Пусть $\lambda_1 = 1$. Тогда $4 + 2(2n - 2) + 4n\mu_1 = 0$, откуда $\mu_1 = -1$. Теперь для $s \in \{2, \dots, 7\}$:

$$\sum_{g \in S_{8n}} \psi_s(g) \psi_1(g^{-1}) = 1 + 2 \sum_{j \in M} \lambda_s^j + \lambda_s^n + \lambda_s^{2n} + \lambda_s^{3n} - n\mu_s(1 + \lambda_s + \lambda_s^2 + \lambda_s^3) = 0. \quad (3.4)$$

Из соотношений (3.3) и (3.4) получаем $2n\mu_s(1 + \lambda_s + \lambda_s^2 + \lambda_s^3) = 0$, откуда $\lambda_s \in \{-1, -i, i\}$. Можно считать $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = \lambda_5 = i$, $\lambda_6 = \lambda_7 = -i$ и $\mu_2 = \mu_4 = \mu_6 = 1$, $\mu_1 = \mu_3 = \mu_5 = \mu_7 = -1$. Лемма доказана.

Теорема 3. *Группа центральных единиц целочисленного группового кольца группы S_{8n} имеет вид*

$$U(Z(\mathbb{Z}S_{8n})) = \langle -1 \rangle \times Z(S_{8n}) \times V,$$

где V — прямое произведение циклических групп бесконечного порядка и:

- (1) ранг группы $U(Z(\mathbb{Z}S_{8n}))$ равен $r = 2n + 1 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \nu(4n)$;
- (2) группа V порождается элементами вида $\sum_{j \in M \cup M'} \gamma_j y(b^j)$, где γ_j — целые числа.

Доказательство. В силу лемм 1 и 2 имеем:

$$r(U(Z(\mathbb{Z}S_{8n}))) = r(U(I(Z(\mathbb{Q}S_{8n})))) = \sum_{\chi \in Irr(S_{8n}, alc)} r(U(I(\mathbb{Q}(\chi)))).$$

Воспользуемся таблицами характеров из лемм 5 и 6. Линейные характеры ψ_s имеют значения $\{\pm 1\}$ или $\{\pm 1, \pm i\}$, и для них ранг группы $U(I(\mathbb{Q}(\psi_s)))$ равен 0.

Ясно, что если ω_{k1} и ω_{d1} алгебраически сопряжены, то соответствующие характеры χ_k и χ_d алгебраически сопряжены.

Заметим, что для четного $k = 2s$ $\omega_{k1} = 2 \cos\{2\pi k/4n\} = 2 \cos\{2\pi s/2n\} = \zeta_{2n}^s + \zeta_{2n}^{-s}$ алгебраически сопряжен $\omega_{d1} = 2 \cos\{2\pi d/2n\} = \zeta_{2n/d} + \zeta_{2n/d}^{-1}$, где $d = (k, 2n)$. Поэтому максимальное число попарно алгебраически несопряженных действительных характеров равно числу делителей d числа $2n$, которые меньше n . Отсюда $|Irr(S_{8n}, \mathbb{R}, alc)| = \nu(2n) - 2$.

По лемме 3 для любого делителя $d \notin \{1, 2\}$ числа $2n$

$$r(U(I(\mathbb{Q}(\chi_d)))) = [\mathbb{Q}(\chi_d) : \mathbb{Q}] - 1 = [\mathbb{Q}(\zeta_d + \zeta_d^{-1}) : \mathbb{Q}] - 1 = \frac{\varphi(d)}{2} - 1.$$

Откуда

$$\sum_{\chi \in Irr(S_{8n}, \mathbb{R}, alc)} r(U(I(\mathbb{Q}(\chi)))) = \sum_{d|2n, d \neq 1, 2} \frac{\varphi(d)}{2} - (\nu(2n) - 2) = \frac{2n - 2}{2} - (\nu(2n) - 2) = n + 1 - \nu(2n). \quad (3.5)$$

Далее заметим, что для нечетного k

$$\omega_{k1}^2 = \left(2i \sin \frac{2\pi k}{4n}\right)^2 = \left(\zeta_{4n}^k - \zeta_{4n}^{-k}\right)^2 = \zeta_{4n}^{2k} + \zeta_{4n}^{-2k} - 2 = \zeta_{2n}^k + \zeta_{2n}^{-k} - 2 \in \mathbb{Q}(\zeta_{2n} + \zeta_{2n}^{-1}). \quad (3.6)$$

Кроме того, $\omega_{k1} = 2i \sin\{2\pi k/4n\} = \zeta_{4n}^k - \zeta_{4n}^{-k}$ алгебраически сопряжен $\omega_{d1} = 2i \sin\{2\pi d/4n\} = \zeta_{4n/d} - \zeta_{4n/d}^{-1}$, где $d = (k, 4n)$. Поэтому максимальное число попарно алгебраически несопряженных недействительных характеров равно числу нечетных делителей числа $4n$, которые меньше n . Будем рассматривать отдельно случаи, когда n четно или нечетно. В случае четного n положим $4n = 2^u v$, $(2, v) = 1$, тогда $|Irr(S_{8n}, alc) \setminus Irr(S_{8n}, \mathbb{R}, alc)| = \nu(v)$. Согласно лемме 3 и равенству (3.6) для любого делителя d числа v

$$r(U(I(\mathbb{Q}(\chi_{2^u d})))) = \frac{[\mathbb{Q}(\chi_{2^u d}) : \mathbb{Q}] - 1}{2} = \frac{2[\mathbb{Q}(\zeta_{2^{u-1}d} + \zeta_{2^{u-1}d}^{-1}) : \mathbb{Q}] - 1}{2} = \frac{\varphi(2^{u-1}d)}{2} - 1 = 2^{u-3} \varphi(d) - 1.$$

Откуда

$$\begin{aligned} \sum_{\chi \in Irr(S_{8n}, alc) \setminus Irr(S_{8n}, \mathbb{R}, alc)} r(U(I(\mathbb{Q}(\chi)))) &= \sum_{d|v, 4n=2^u v} 2^{u-3} \varphi(d) - \nu(v) = 2^{u-3} v - \nu(v) = \frac{n}{2} - \nu(v) \\ &= n - \left[\frac{n}{2}\right] - \nu(4n) + \nu(2n). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Пусть теперь n нечетно, тогда $|Irr(S_{8n}, alc) \setminus Irr(S_{8n}, \mathbb{R}, alc)| = \nu(n) - 1$. Согласно лемме 3 и равенству (3.6) для любого делителя $d \neq 1$ числа n

$$r(U(I(\mathbb{Q}(\chi_{4d})))) = \frac{[\mathbb{Q}(\chi_{4d}) : \mathbb{Q}] - 1}{2} = \frac{2[\mathbb{Q}(\zeta_{2d} + \zeta_{2d}^{-1}) : \mathbb{Q}] - 1}{2} = \frac{\varphi(2d)}{2} - 1 = \frac{\varphi(d)}{2} - 1.$$

Откуда

$$\begin{aligned} \sum_{\chi \in Irr(S_{8n}, alc) \setminus Irr(S_{8n}, \mathbb{R}, alc)} r(U(I(\mathbb{Q}(\chi)))) &= \sum_{d|n, d \neq 1} \frac{\varphi(d)}{2} - (\nu(n) - 1) = \frac{n - 1}{2} + 1 - \nu(n) \\ &= n - \left[\frac{n}{2}\right] - \nu(4n) + \nu(2n). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Теперь по леммам 1 и 2 и равенствам (3.5), (3.7) и (3.8) получаем

$$\begin{aligned} r(U(Z(\mathbb{Z}S_{8n}))) &= \sum_{\chi \in Irr(S_{8n}, \mathbb{R}, alc)} r(U(I(\mathbb{Q}(\chi)))) + \sum_{\chi \in Irr(S_{8n}, alc) \setminus Irr(S_{8n}, \mathbb{R}, alc)} r(U(I(\mathbb{Q}(\chi)))) \\ &= n + 1 - \nu(2n) + n - \left[\frac{n}{2}\right] - \nu(4n) + \nu(2n) = 2n + 1 - \left[\frac{n}{2}\right] - \nu(4n). \end{aligned}$$

Первое утверждение доказано.

Доказательство второго утверждения аналогично доказательству второго утверждения теоремы 1 или теоремы 3.

Следствие 3. *Группа центральных единиц целочисленного группового кольца группы S_{8n} тривиальна только при $n = 2$ и $n = 3$.*

Доказательство. Заметим, что $n > 2\nu(n)$ при нечетном $n > 3$.

Рассмотрим случай $n = 2m + 1$. Выясним, когда $r = 4m + 3 - m - \nu(4(2m + 1)) = 3m + 3 - 3\nu(2m + 1) = 0$. Так как $\nu(2m + 1) < (2m + 1)/2 < m + 1$ при $2m + 1 > 3$, то $r > 0$ при $n > 3$. В случае $n = 3$ получаем $r = 0$.

Теперь $n = 2m = 2^t l$, где $t \geq 1$ и $(2, l) = 1$. Выясним, когда $r = 3 \cdot 2^{t-1} l + 1 - (t + 3)\nu(l) = 0$. Так как $l/2 > \nu(l)$ при $l > 3$ и $2^t \geq t + 1 > (t + 3)/3$ для натуральных t , то $r > 0$ при $l > 3$.

В случае $l = 1$ получаем $r = 3 \cdot 2^{t-1} + 1 - (t + 3) = 3 \cdot 2^{t-1} - n - 2 \geq 3t - t - 2 > 0$ при $t > 1$ и $n > 2$. Если $n = 2$, то $r = 0$.

В случае $l = 3$ получаем $r = 9 \cdot 2^{t-1} + 1 - 2(t + 3) = 9 \cdot 2^{t-1} - 2t - 5 \geq 9t - 2t - 5 > 0$. Следствие доказано.

4. Связь с циклическими группами

Пусть $*$ — каноническая инволюция на $\mathbb{Z}G$, т. е. $(\sum_{g \in G} a_g g)^* = \sum_{g \in G} a_g g^{-1}$.

О п р е д е л е н и е. Элемент a из $\mathbb{Z}G$ называется *симметрическим*, если $a^* = a$.

Лемма 7. *Пусть A есть конечная абелева группа. Тогда $U(\mathbb{Z}A) = \langle -1 \rangle \times \langle b \rangle \times V$, где V есть прямое произведение циклических групп бесконечного порядка, порожденных симметрическими элементами нормализованной группы единиц $V(\mathbb{Z}A)$.*

Доказательство следует из леммы 2.6 [8].

Теорема 4. *Пусть $\langle b \rangle$ — максимальная циклическая подгруппа порядка n , $2n$ и $4n$ в группах $G \cong D_{2n}$, $G \cong Q_{4n}$ или $G \cong S_{8n}$ соответственно. Пусть $U(\mathbb{Z}\langle b \rangle) = \langle -1 \rangle \times \langle b \rangle \times V$, где V выбрана по лемме 7.*

Если $G \cong D_{2n}$ или $G \cong Q_{4n}$, то $U(Z(\mathbb{Z}G)) = \langle -1 \rangle \times Z(G) \times V$.

В случае $G \cong S_{8n}$ имеем $U(Z(\mathbb{Z}G)) = \langle -1 \rangle \times Z(G) \times V_0$, где $V_0 = C_V(\phi) = \{v \in V \mid \phi(v) = v\}$ и ϕ — автоморфизм группы V , определяемый равенством $\phi(b) = b^{2n-1}$.

Доказательство. По лемме 7 группа единиц $U(\mathbb{Z}\langle b \rangle) = \langle -1 \rangle \times \langle b \rangle \times V$, где V есть прямое произведение циклических групп бесконечного порядка, порожденных симметрическими элементами нормализованной группы единиц $V(\mathbb{Z}\langle b \rangle)$. Пусть $t = |b|$ и $G \cong D_{2n}$ или $G \cong Q_{4n}$. По теоремам 1 и 2 $U(Z(\mathbb{Z}G)) = \langle -1 \rangle \times Z(G) \times V_0$, где V_0 порождается элементами вида $\sum_{j=0}^{[t/2]} \gamma_j y(b^j)$, где γ_j — целые числа. Элементы $u = \sum_{j=0}^{[t/2]} \gamma_j y(b^j)$ являются симметрическими, так как

$$u^* = \sum_{j=0}^{[t/2]} \gamma_j y(b^{-j}) = \sum_{j=0}^{[t/2]} \gamma_j y(b^j) = u.$$

Ясно, что любой элемент u из V_0 содержится и в V . Докажем обратное. Пусть $v \in V$. Обратимость элемента v очевидна, требуется проверить $v \in Z(\mathbb{Z}G)$. Положим $v = \sum_{j=0}^{t-1} \alpha_j b^j$, где $\alpha_j \in \mathbb{Z}$, тогда $v^* = \sum_{j=0}^{t-1} \alpha_j b^{-j}$. Поскольку элемент v симметрический, то $v^* = v$ и $\alpha_j = \alpha_{t-j}$. Тогда

$$v = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_0 + \sum_{j=1}^{(t-1)/2} \alpha_j (b^j + b^{t-j}), & \text{если } t \text{ нечетно} \\ \alpha_0 + \sum_{j=1}^{(t-2)/2} \alpha_j (b^j + b^{t-j}) + \alpha_{t/2} b^{t/2}, & \text{если } t \text{ четно} \end{array} \right\} = \sum_{j=0}^{[t/2]} \alpha_j y(b^j).$$

Следовательно, $vg = gv$ для всех $g \in G$ и $v \in V_0$, что и требовалось.

Пусть теперь $G \cong S_{8n}$. По теореме 3 $U(Z(\mathbb{Z}G)) = \langle -1 \rangle \times Z(G) \times V_0$, где V_0 порождается элементами вида $\sum_{j \in M \cup M'} \gamma_j y(b^j)$ (см. обозначения разд. 3). Ясно, что любой элемент u из V_0 со-держится и в V . Докажем, что если $v \in C_V(\phi)$, то $v \in V_0$ для автоморфизма ϕ группы V , определяемого равенством $\phi(b) = b^{2n-1}$. Пусть $v \in C_V(\phi)$. Обратимость элемента v очевидна. Требуется проверить, что $v \in Z(\mathbb{Z}G)$.

Положим $v = \sum_{j=0}^{4n-1} \alpha_j b^j$, где $\alpha_j \in \mathbb{Z}$. Тогда $\phi(v) = \sum_{j=0}^{4n-1} \alpha_j b^{(2n-1)j}$. Поскольку $\phi(v) = v$, то $\alpha_j = \alpha_{(2n-1)j}$. Тогда

$$v = \sum_{j \in A} \alpha_j (b^j + b^{(2n-1)j}) + \sum_{j \in A'} \alpha_j b^j = \sum_{j \in A \cup A'} \alpha_j y(b^j),$$

где при четном n $A = \{n, s, 2n + s \mid s \in \{1, \dots, n-1\}\}$ и $A' = \{0, 2n\}$, а при нечетном n $A = \{s, 2n + s \mid s \in \{1, \dots, n-1\}\}$ и $A' = \{0, n, 2n, 3n\}$. Следовательно, $vg = gv$ для всех $g \in G$ и $v \in V_0$, что и требовалось. Теорема доказана.

Таким образом, зная группу центральных единиц целочисленного группового кольца циклической группы $\langle b \rangle$, мы можем определить группу центральных единиц целочисленного группового кольца группы диэдра D_{2n} , обобщенной группы кватернионов Q_{4n} и обобщенной полудиэдральной группы S_{8n} .

П р и м е р. По теореме 4 и теореме 5.6 [1] получаем

$$U(Z(\mathbb{Z}D_{20})) = \langle -1 \rangle \times \langle b^5 \rangle \times \langle u_1 \rangle \times \langle u_2 \rangle,$$

где

$$\begin{aligned} u_1 &= -3 - (b + b^9 + b^4 + b^6) + 3(b^2 + b^8 + b^3 + b^7) - 4b^5; \\ u_2 &= 2 + (b + b^9 + b^5) - (b^2 + b^8 + b^3 + b^7). \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алеев Р.Ж.** Центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп: дис. ... д-ра физ-мат. наук. Челябинск, 2000. 355 с.
2. **Jespers E., Parmenter M.M., Sehgal S.K.** Central units of integral group rings of nilpotent groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. Vol. 124, no. 4. P. 1007–1012.
3. **Белоногов В.А.** Представления и характеры в теории конечных групп. Свердловск: УрО АН СССР, 1990. 378 с.
4. **Aleev R.Ž.** Higman's central unit theory, units of integral group rings of finite cyclic groups and Fibonacci numbers // Intern. J. of Algebra and Comp. 1994. Vol. 4, no. 3. P. 309–358.
5. **Боревич З.И., Шафаревич И.Р.** Теория чисел. М.: Наука, 1985. 504 с.
6. **Варден Б.Л. ван дер.** Алгебра. М.: Наука, 1979. 624 с.
7. **Кэртис Ч., Райнер И.** Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969. 668 с.
8. **Cliff G.H., Sehgal S.K., Weiss A.R.** Units of integral group rings of metabelian groups // J. of Algebra. 1981. Vol. 73, no. 1. P. 167–185.

Шумакова Екатерина Олеговна
аспиранка
Челяб. гос. ун-т
e-mail: shumkaterina@rambler.ru

Поступила 18.10.2007

УДК 519.248: [3 + 5/6]

EXACT APPROXIMATION OF AVERAGE SUBWORD COMPLEXITY OF FINITE RANDOM WORDS OVER FINITE ALPHABET

E. E. Ivanko

One of the ways to measure the random nature of a word is to evaluate the quantity of different subwords in it. Such a measure is called the subword complexity or complexity index. Direct interdependence between subword complexity and the state of chaos is intuitively obvious. In this article we develop an explicit formula suitable for approximation of the average subword complexity of the most chaotic—random—words.

Key words: subword complexity, string complexity, random words.

Introduction

“Randomness” of a word is an important and widely used concept in such areas as data compression, computational biology and linguistics [2]. There are two commonly used formal measures of “randomness”: subword complexity and Kolmogorov complexity [1, 3, 4]. In this article we consider subword complexity, also known as complexity index. Subword complexity of a finite word is defined as the number of distinct subwords in the word. Further we develop the formula for the approximation of the average subword complexity of the most chaotic—random—words. For this purpose we consider one probabilistic model of word which differs from the usual idea of random words and develop the desired formula for the considered model. After that we assume the applicability of the obtained formula for the approximation of average subword complexity of random words and report a number of experiments which support the assumption.

1. Theory

Definition 1. Let $S = (s_1, \dots, s_n)$ be a finite word whose length is n , where $\forall i = \overline{1, n} : s_i \in A = \{a_1, \dots, a_{|A|}\}$. Let the *alphabet* A be a finite set. Any word $S_s = (s_i, \dots, s_j)$, where $1 \leq i \leq j \leq n$, consisting of consecutive letters of S is called a *subword of* S . A subword whose length is k is called a *k-subword*.

Definition 2. Let us consider a word S . The number of distinct k -subwords of the word S is called the *k-subword complexity of* S . The number of all distinct subwords of S is called the *subword complexity of* S .

Let us consider the process of generating a *random word* whose length is n and whose symbols belong to a finite alphabet A . For this purpose we consider a sequence of independent experiments (E_1, \dots, E_n) . Every experiment E_i corresponds to selecting the i -th letter in the process of random word generation. The result of every experiment E_i is characterized by the value of a random variable φ_i that shows what the i -th letter of the generated word is. We assume that $\forall i = \overline{1, n}, \forall j = \overline{1, |A|} P\{\varphi_i = j\} = 1/|A|$. The word $w = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ is called *random*. By evaluation of the average k -subword complexity of the word w we naturally understand evaluation of the mathematical expectation of the number of distinct k -subwords in w .

The described probabilistic model reflects the concept of a random word as we usually think of it. Below we develop the formula for the average subword complexity of words satisfying another probabilistic model and make an assumption that the developed formula is applicable to random

words as well. Let us introduce a “new” probabilistic model of words. By analogy with random words, we consider a sequence of independent experiments (E_1, \dots, E_n) , where every experiment E_i corresponds to selecting the i -th letter. Each experiment E_i is characterized by a random variable ϕ_i , which takes values in a finite alphabet A . Now let us consider the sequence of random variables $(\xi_1, \dots, \xi_{n-k+1})$. The random variable ξ_i , where $i \in \overline{1, n-k+1}$, will take a value of 1 if the subword $(\phi_i, \dots, \phi_{i+k-1})$ was not met before: $(\phi_i, \dots, \phi_{i+k-1}) \notin \{(\phi_j, \dots, \phi_{j+k-1}) : j = \overline{1, i-1}\}$, otherwise ξ_i will take a value of 0. The desired number of different k -subwords may be expressed in the above terms as $\eta_n = \sum_{i=1}^{n-k+1} \xi_i$. Evidently $P\{\xi_1 = 1\} = 1$ and $P\{\xi_1 = 0\} = 0$. We assume that the word (ϕ_1, \dots, ϕ_n) satisfies the *new* probabilistic model if for any $i = \overline{2, n-k+1}$ *distributions of ξ_i depend only on the number of previously met distinct k -subwords*:

$$\begin{aligned} P\{\xi_i = 0 \mid \xi_1 = q_1, \dots, \xi_{i-1} = q_{i-1}\} &= \left(\sum_{j=1}^{i-1} q_j \right) / |A|^k, \\ P\{\xi_i = 1 \mid \xi_1 = q_1, \dots, \xi_{i-1} = q_{i-1}\} &= 1 - \left(\sum_{j=1}^{i-1} q_j \right) / |A|^k, \end{aligned} \quad (1)$$

where $\forall i = \overline{1, n-k+1} : q_i \in \{0, 1\}$, $|A|^k$ is the number of possible k -subwords over the alphabet A . We call this model *Random k -Subwords Consecution* or, in short, *k -RSC*. The following theorem gives an explicit mathematical expectation for the sum $\eta_n = \sum_{i=1}^{n-k+1} \xi_i$ under conditions of k -RSC model (1).

Theorem 1. *Using the above notation let us consider the word $W = (\phi_1, \dots, \phi_{n+k-1})$ consisting of the random variables ϕ_i which take values in a finite alphabet A . If W satisfies conditions (1), then mathematical expectation $M(\eta_n)$ of the number of different k -subwords of W can be expressed as follows:*

$$M(\eta_n) = |A|^k \left(1 - \left(1 - \frac{1}{|A|^k} \right)^n \right).$$

Proof. Let us consider the conditional expectations for any ξ_i , where $i \geq 2$:

$$\begin{aligned} M(\xi_i \mid \xi_1 = q_1, \dots, \xi_{i-1} = q_{i-1}) &= P\{\xi_i = 0 \mid \xi_1 = q_1, \dots, \xi_{i-1} = q_{i-1}\} \cdot 0 \\ &+ P\{\xi_i = 1 \mid \xi_1 = q_1, \dots, \xi_{i-1} = q_{i-1}\} \cdot 1 \stackrel{(1)}{=} 1 - \left(\sum_{j=1}^{i-1} q_j \right) / |A|^k. \end{aligned}$$

Using these expressions for the conditional expectations, we obtain the expressions for the expectations $M(\xi_i)$:

$$\begin{aligned} i = 1 & : M(\xi_i) = P\{\xi_i = 1\} = 1, \\ i \geq 2 & : M(\xi_i) = \sum_{\forall q_1, \dots, q_{i-1}} P\{\xi_1 = q_1, \dots, \xi_{i-1} = q_{i-1}\} \cdot M(\xi_i \mid \xi_1 = q_1, \dots, \xi_{i-1} = q_{i-1}) \\ &= \sum_{\forall q_1, \dots, q_{i-1}} P\{\xi_1 = q_1, \dots, \xi_{i-1} = q_{i-1}\} \cdot \left(1 - \left(\sum_{j=1}^{i-1} q_j \right) / |A|^k \right) \\ &= \sum_{\forall q_1, \dots, q_{i-1}} P\{\xi_1 = q_1, \dots, \xi_{i-1} = q_{i-1}\} \\ &\quad - \frac{1}{|A|^k} \sum_{\forall q_1, \dots, q_{i-1}} \left(P\{\xi_1 = q_1, \dots, \xi_{i-1} = q_{i-1}\} \cdot \sum_{j=1}^{i-1} q_j \right), \end{aligned} \quad (2)$$

$$- \frac{1}{|A|^k} \sum_{\forall q_1, \dots, q_{i-1}} \left(P\{\xi_1 = q_1, \dots, \xi_{i-1} = q_{i-1}\} \cdot \sum_{j=1}^{i-1} q_j \right), \quad (3)$$

where $\forall i = \overline{1, n-k+1} : q_i \in \{0, 1\}$. Now let us transform sums (2) and (3).

(2): $\sum_{\forall q_1, \dots, q_{i-1}} P\{\xi_1 = q_1, \dots, \xi_{i-1} = q_{i-1}\} = 1$ because the summation is over all possible values of the random variables ξ_1, \dots, ξ_{i-1} ;

$$\begin{aligned}
(3): \quad & \sum_{\forall q_1, \dots, q_{i-1}} \left(P\{\xi_1 = q_1, \dots, \xi_{i-1} = q_{i-1}\} \sum_{j=1}^{i-1} q_j \right) \\
&= \sum_{l=1}^{i-1} \left(\sum_{\substack{\xi_1 = q_1, \dots, \xi_{i-1} = q_{i-1} \\ \sum_{t=1}^{i-1} q_t = l}} P\{\xi_1 = q_1, \dots, \xi_{i-1} = q_{i-1}\} \cdot l \right) \\
&= \sum_{l=1}^{i-1} \left(l \sum_{\substack{\xi_1 = q_1, \dots, \xi_{i-1} = q_{i-1} \\ \sum_{t=1}^{i-1} q_t = l}} P\{\xi_1 = q_1, \dots, \xi_{i-1} = q_{i-1}\} \right) \\
&= \sum_{l=1}^{i-1} \left(l P\left\{ \sum_{t=1}^{i-1} \xi_t = l \right\} \right) = \sum_{t=1}^{i-1} \left(t P\{\eta_{i-1} = t\} \right) = M(\eta_{i-1}).
\end{aligned}$$

Substituting the obtained expressions for (2) and (3) into the above formula for $M(\xi_i)$, we have:

$$M(\xi_1) = 1, \quad i \geq 2 : M(\xi_i) = 1 - \frac{M(\eta_{i-1})}{|A|^k}. \quad (4)$$

Using (4) we can express $M(\eta_n)$ in terms of $M(\xi_i)$:

$$\begin{aligned}
n = 1 : \quad & M(\eta_1) = M(\xi_1) = 1, \\
n \geq 2 : \quad & M(\eta_n) = M\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n M(\xi_i) = M(\xi_1) + \sum_{i=2}^n M(\xi_i) = 1 + \sum_{i=2}^n \left(1 - \frac{M(\eta_{i-1})}{|A|^k}\right) \\
&= 1 + (n-1) - \frac{1}{|A|^k} \sum_{i=2}^n M(\eta_{i-1}) = n - \frac{1}{|A|^k} \sum_{i=1}^{n-1} M(\eta_i). \quad (5)
\end{aligned}$$

Further transformation of the obtained recursive expression allows to get a more convenient recursion formula for $M(\eta_n)$. Let us write expressions (5) for n and $n+1$ (assume $n \geq 2$):

$$\begin{cases} M(\eta_n) = n - \frac{1}{|A|^k} \sum_{i=1}^{n-1} M(\eta_i) \\ M(\eta_{n+1}) = n+1 - \frac{1}{|A|^k} \sum_{i=1}^n M(\eta_i) \end{cases} \Rightarrow M(\eta_n) - n = -\frac{1}{|A|^k} \sum_{i=1}^{n-1} M(\eta_i)$$

$$= M(\eta_{n+1}) - n - 1 + \frac{M(\eta_n)}{|A|^k} \Rightarrow M(\eta_{n+1}) = 1 + M(\eta_n) \left(1 - \frac{1}{|A|^k}\right). \quad (6)$$

The right-hand side of the obtained recursive formula (6) can be expressed as the sum of a geometric progression. Below we use induction to prove this fact:

$$n \geq 3 : \quad M(\eta_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{|A|^k}\right)^i. \quad (7)$$

$$\text{Base } n = 3 : \quad M(\eta_3) \stackrel{(6)}{=} 1 + M(\eta_2) \left(1 - \frac{1}{|A|^k}\right)$$

$$= 1 + \left(1 + M(\eta_1) \left(1 - \frac{1}{|A|^k}\right)\right) \left(1 - \frac{1}{|A|^k}\right) = 1 + \left(1 - \frac{1}{|A|^k}\right) + \left(1 - \frac{1}{|A|^k}\right)^2 = \sum_{i=0}^2 \left(1 - \frac{1}{|A|^k}\right)^i.$$

Step: let (7) be obtained $\forall i = \overline{3, n-1}$; let us obtain it for n .

$$\begin{aligned} M(\eta_n) &\stackrel{(6)}{=} 1 + M(\eta_{n-1}) \left(1 - \frac{1}{|A|^k}\right) \\ &= 1 + \left(\sum_{i=0}^{n-2} \left(1 - \frac{1}{|A|^k}\right)^i\right) \left(1 - \frac{1}{|A|^k}\right) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{|A|^k}\right)^i = \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{|A|^k}\right)^i. \end{aligned}$$

Finally, we use the known formula for the sum (7) of the first n elements of a geometrical progression:

$$M(\eta_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{|A|^k}\right)^i = \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{|A|^k}\right)^n}{1 - \left(1 - \frac{1}{|A|^k}\right)} = |A|^k \left(1 - \left(1 - \frac{1}{|A|^k}\right)^n\right). \quad (8)$$

It is easy to verify that (8) is correct for $n = 1, 2$.

$$n = 1: \quad |A|^k \left(1 - \left(1 - \frac{1}{|A|^k}\right)\right) = |A|^k \frac{1}{|A|^k} = 1 = M(\eta_1),$$

$$n = 2: \quad |A|^k \left(1 - \left(1 - \frac{1}{|A|^k}\right)^2\right) = 2 - \frac{1}{|A|^k} = 1 + M(\eta_1) \left(1 - \frac{1}{|A|^k}\right) \stackrel{(6)}{=} M(\eta_2).$$

□

Corollary 1. *Let us consider a word of length n over an alphabet A satisfying the k -RSC models for all $k = \overline{1, n}$. The expectation of the subword complexity K of such a word may be expressed as follows:*

$$K = \sum_{k=1}^n \left(|A|^k \left(1 - \left(1 - \frac{1}{|A|^k}\right)^{n-k+1}\right) \right). \quad (9)$$

Corollary 2. *Let the size $|A|$ of the alphabet be given. To find the length n of a k -RSC word that on average contains a specified number N of k -subwords, one can use the following expression:*

$$n = \left(\log_{\left(1 - \frac{1}{|A|^k}\right)} \left(1 - \frac{N}{|A|^k}\right) \right) + k - 1. \quad (10)$$

2. Discussion

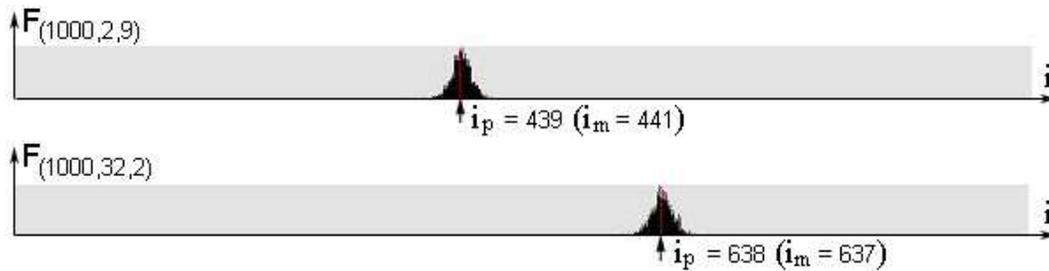
The considered k -RSC model is a rather exotic probabilistic model of a word, and results (8)–(10) have little independent pragmatic sense. It does not seem to be nonsense to assume that conditions (1) are approximately correct for a random word $w = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ for any $k = \overline{1, n}$. This assumption allows to use the obtained formulas (8)–(10) for approximation of the subword complexity of random words.

We have performed a number of experiments devoted to application of formula (8) to random words. In each experiment corresponding to one of the triplets $(n, |A|, k)$ we generated 1000 random words of lengths n over an alphabet of cardinality $|A|$. After that the number of distinct k -subwords was evaluated for every generated word. The result of the experiment corresponding to a triplet $(n, |A|, k)$ is the function $\mathbf{F}_{(n, |A|, k)}(i)$, which shows how many words from the 1000 generated contain i distinct subwords.

Experiments were carried out for every ordered triplet $(n, |A|, k)$, where the length of word $n \in \{10, 50, 10^3, 10^4\}$, the size of alphabet $|A| \in \{2, 2^2, 2^3, \dots, 2^8\}$, the size of k -subwords (for different values of n):

n	10	50	1000	10000
k	1 – 3	1 – 10	1 – 20	1 – 20

All the experiments showed a good prediction accuracy of (8). The figure below represents graphs obtained in two example experiments.



Examples of graphs of $\mathbf{F}_{(n,|A|,k)}(i)$. The arrows show the values of i_p predicted by (8); by comparison i_m maximizes $\mathbf{F}_{(n,|A|,k)}(i)$.

REFERENCES

1. **Ilie L., Yu S., Zhang K.** Repetition complexity of words // Computing and combinatorics. Ser. Lecture Notes in Comput. Sci. Vol. 2387. Berlin: Springer, 2002. P. 320–329.
2. **Janson S., Lonardi S., Szpankowski W.** On Average Sequence Complexity // Theoret. Comput. Sci. 2004. Vol. 326, no. 1-3. P. 213–227.
3. **Li M., Vitanyi P.** An introduction to Kolmogorov complexity and its applications. Texts and Monographs in Computer Science. New York: Springer-Verlag, 1993. 546 p.
4. **Niederreiter H.** Some computable complexity measures for binary sequences // Sequences and their appl.: Proc. SETA' 98. Ser. Discrete Math. Theor. Comput. Sci. London: Springer, 1999. P. 67–78.

Ivanko Evgeny Evgenievich
Cand. of Phys.-Math. Sciences
Researcher

Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch RAS
Specialist in Data Mining
e-mail: ivanko@ural.ru

Received May, 7, 2008

СВЕТЛАНА ИВАНОВНА ТАРАСОВА

29 июня после тяжелой болезни ушла из жизни Светлана Ивановна Тарасова, старший научный сотрудник Института математики и механики УрО РАН. Она была в расцвете сил, ей совсем недавно исполнилось пятьдесят лет.

Светлана Ивановна окончила в 1980 году математико-механический факультет Уральского государственного университета и поступила на работу в Институт математики и механики. Основная тематика ее научных исследований была связана с теорией управления, с работами свердловской школы Н. Н. Красовского. Эти исследования она успешно сочетала с решением крупных прикладных задач, что было, в частности, отмечено авторским свидетельством об изобретении.

В 1995 году С. И. Тарасова успешно защитила кандидатскую диссертацию, посвященную проблеме построения корректных расширений задач управления. Данная тематика, связанная с такими фундаментальными разделами современной математики, как теория меры и топология, стала на долгие годы основным направлением научных исследований Светланы Ивановны. Она является автором и соавтором нескольких десятков научных работ, включая монографию. Эти исследования опубликованы в нашей стране и за рубежом, докладывались на крупных международных конференциях; они получили достойную оценку специалистов.

Много сил и энергии Светлана Ивановна отдавала работе в редакционной коллегии “Трудов Института математики и механики” — здесь она “замыкала” на себя самые трудные дела. К ней обращались авторы научных статей, она выполняла переводы на английский язык, непременно уделяла большое внимание качеству публикаций.

С. И. Тарасова активно участвовала в жизни Института, не отказываясь ни от каких поручений дирекции, какими бы сложными они не были. Она успевала делать все. В отделе управляемых систем, где она работала, к ней обращались за помощью все сотрудники и неизменно эту помощь получали.

На протяжении целого ряда лет Светлана Ивановна читала лекции и вела практические занятия в Уральском Государственном Техническом Университете — УПИ, руководила дипломным проектированием. Она добросовестно относилась к преподавательской работе и воспитанию молодого поколения.

Светлана Ивановна была добрым и отзывчивым человеком, замечательным помощником, внимательным собеседником. Круг ее жизненных интересов был необычайно широк. Она увлекалась литературой и искусством, любила походы, много и успешно занималась спортом, неоднократно была победителем лыжных соревнований в Институте математики и механики и в Уральском отделении РАН. Много замечательных дел успела сделать Светлана Ивановна, много хорошего отдала людям.

Светлая память о Светлане Ивановне Тарасовой навсегда сохранится в наших сердцах.

Труды Института математики и механики УрО РАН

Том 14

№ 4

2008

Учредитель

Учреждение Российской академии наук

Институт математики и механики Уральского отделения РАН

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-30115 от 31 октября 2007 г.

ISSN 0134-4889

Редактор Н. М. Юркова

Технический редактор Н. Н. Моргунова

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 20.11.08. Формат $60 \times 84^{1/8}$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 25. Уч.-изд. л. 19,2. Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620219, Екатеринбург, ул. С.Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, д.17, офис 226