РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14 № 3 2008

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДИТ 4 РАЗА В ГОД

том 14 № 3 2008

ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 14, № 3. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2008. 204 с.

ISSN 0134–4889

СОДЕРЖАНИЕ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14 № 3 2008

УДК 517.518

О СХОДИМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ КРАТНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СУММ ФУРЬЕ[1]

Н. Ю. Антонов

В случае, когда последовательность d-мерных векторов $\mathbf{n}_k = (n_k^1, n_k^2, \ldots, n_k^d)$ с неотрицательными целочисленными координатами удовлетворяет условию

$$n_k^j = \alpha_j m_k + O(1), \qquad k \in \mathbb{N}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant d,$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_d > 0$, а $m_k \in \mathbb{N}$, $\lim_{k\to\infty} m_k = \infty$, при некоторых условиях на функцию $\varphi\colon\ [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ доказано, что если тригонометрический ряд Фурье любой функции из $\varphi(L)([-\pi,\pi))$ сходится почти всюду, то для любого $d \in \mathbb{N}$, для всех $f \in \varphi(L)(\ln^+ L)^{d-1}([-\pi,\pi)^d)$ последовательность $S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x})$ прямоугольных частичных сумм кратного тригонометрического ряда Фурье функции f, а также соответствующие последовательности частичных сумм всех его сопряженных рядов сходятся почти всюду.

Ключевые слова: кратные тригонометрические ряды Фурье, сходимость почти всюду.

1. Введение

Пусть d — натуральное число, $E \subset \mathbb{R}^d$ — измеримое по Лебегу множество, $\varphi\colon\ [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ — неубывающая функция. Обозначим через $\varphi(L)(E)$ множество всех определенных на множестве $E \subset \mathbb{R}^d$ измеримых по Лебегу вещественнозначных функций f, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_E \varphi(|f(\mathbf{t})|)d\mathbf{t} < \infty.$$

Пусть $\mathbb{Z}^d$ — целочисленная решетка в $\mathbb{R}^d$, $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{kx} = k_1x_1 + \ldots + k_dx_d$,

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kx}} \tag{1.1}$$

— кратный тригонометрический ряд Фурье 2π-периодической по каждой переменной и суммируемой на $[-\pi,\pi)^d$ функции f и для $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_d)$, $n_j \geqslant 0$, $1 \leqslant j \leqslant d$,

$$S_{\mathbf{n}}(f,\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_d)\colon\ |k_j|\leqslant n_j, 1\leqslant j\leqslant d} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kx}}$$

— $\mathbf{n}$-я прямоугольная частичная сумма ряда (1.1).

Пусть $B = \{r_1, \ldots, r_l\} \subset \{1, \ldots, d\}$ — некоторое подмножество множества первых d натуральных чисел. Ряд

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \prod_{j=1}^{l} (-i \operatorname{sign} k_{r_j}) a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kx}} \tag{1.2}$$

называется сопряженным к ряду (1.1) по переменным, номера которых входят во множество B, или B-сопряженным, а $\mathbf{n}$-я прямоугольная частичная сумма $\widetilde{S}_{\mathbf{n},B}(f,\mathbf{x})$ ряда (1.2) определяется аналогично $\mathbf{n}$-й прямоугольной частичной сумме ряда (1.1).

[1]Работа поддержана РФФИ (08-01-00320) и Программой государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-1071.2008.1).

При $d = 1$ ряды (1.1) и (1.2) совпадают соответственно с обычным тригонометрическим рядом Фурье 2π-периодической функции и его сопряженным рядом. В случае, когда множество B пустое, будем считать, что ряд (1.2) совпадает с рядом (1.1). Вообще всюду далее произведение $\prod$, в котором множество сомножителей пусто, считается по определению равным единице. Будем полагать для $u \geqslant 0$ $\ln^+ u = \ln(u + e)$.

В случае $d = 1$ Л. Карлесон [1] доказал, что если $f \in L^2([-\pi, \pi))$, то тригонометрический ряд Фурье функции f сходится почти всюду. Р. Хант [2] обобщил это утверждение о сходимости почти всюду рядов Фурье на функции из классов $L^p([-\pi, \pi))$, $p > 1$, и $L(\ln^+ L)^2([-\pi, \pi))$, а П. Шёлин [3] — на функции из класса $L(\ln^+ L)(\ln^+ \ln^+ L)([-\pi, \pi))$. Автором [4] было установлено, что условие $f \in L(\ln^+ L)(\ln^+ \ln^+ \ln^+ L)([-\pi, \pi))$ также является достаточным для сходимости почти всюду ряда Фурье функции f.

Отметим, что наилучший на сегодня результат противоположного характера, т. е. касающийся расходимости рядов Фурье на множестве положительной меры, принадлежит С. В. Конягину [5]: для любой неубывающей функции $\varphi\colon\ [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, удовлетворяющей условию $\varphi(u) = o(u\sqrt{\ln u/\ln\ln u})$ при $u \to \infty$, найдется функция из класса $\varphi(L)$ такая, что ее ряд Фурье неограниченно расходится всюду на $[-\pi, \pi)$.

Пусть $d \geqslant 2$. Ряд (1.1) (ряд (1.2)) называется сходящимся по кубам в точке $\mathbf{x} \in [-\pi, \pi)^d$, если последовательность кубических частичных сумм, т. е. последовательность $S_n(f,\mathbf{x}) = S_{\mathbf{n}}(f,\mathbf{x})$ $(\widetilde{S}_{n,B}(f,\mathbf{x}) = \widetilde{S}_{\mathbf{n},B}(f,\mathbf{x}))$, где $\mathbf{n} = (n, n, \ldots, n)$, имеет предел при $n \to \infty$.

Сходимость почти всюду по квадратам (двумерным кубам) рядов Фурье функций f из $L^2([-\pi, \pi)^2)$ была установлена Н. Р. Тевзадзе [6]. Ч. Фефферман [7] распространил этот результат на функции $f \in L^p([-\pi, \pi)^d)$, $p > 1$, $d \geqslant 2$, а затем П. Шёлин [8] доказал, что если функция f принадлежит классу $L(\ln^+ L)^d(\ln^+ \ln^+ L)([-\pi, \pi)^d)$, то ее ряд Фурье сходится по кубам почти всюду.

Автором [9] доказана теорема, позволяющая переносить результаты о сходимости почти всюду одномерных рядов Фурье функций из классов $\varphi(L)([-\pi, \pi))$ на кратные ряды Фурье функций из классов $\varphi(L)(\ln^+ L)^{d-1}([-\pi, \pi)^d)$ в случае сходимости по кубам. В качестве следствия этой теоремы и результата работы [4] получается утверждение о сходимости почти всюду по кубам рядов Фурье функций из класса $L(\ln^+ L)^d(\ln^+ \ln^+ \ln^+ L)([-\pi, \pi)^d)$.

Наилучший в настоящий момент результат, касающийся расходимости по кубам кратных рядов Фурье функций из $\varphi(L)([-\pi, \pi)^d)$, $d \geqslant 2$, как и в одномерном случае, принадлежит С. В. Конягину [10]: для любой функции $\varphi(u) = o(u(\ln u)^{d-1}\ln\ln u)$ при $u \to \infty$ существует $f \in \varphi(L)([-\pi, \pi)^d)$ с расходящимся всюду по кубам рядом Фурье.

В настоящей работе результат работы [9] переносится со случая последовательности кубических частичных сумм на несколько более общий случай последовательностей кратных прямоугольных сумм Фурье $S_{\mathbf{n}_k}(f, \mathbf{x})$ таких, что векторы $\mathbf{n}_k = (n_k^1, n_k^2, \ldots, n_k^d)$ удовлетворяют условию

$$n_k^j = \alpha_j m_k + O(1), \qquad k \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant j \leqslant d, \tag{1.3}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ — вектор с положительными координатами, а $m_k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{k\to\infty} m_k = \infty$.

Неотрицательную неубывающую функцию $\psi(u)$ назовем медленно растущей при $u \geqslant u_0$, если при любом $\delta > 0$ функция $\psi(u)u^{-\delta}$ убывает на $[u_0, +\infty)$.

Ниже будет доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Предположим, что выпуклая функция* $\varphi\colon\ [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *представима в виде* $\varphi(u) = u\psi(u)$ *с медленно растущей функцией* $\psi(u)$. *Тогда если тригонометрический ряд Фурье любой функции* $g \in \varphi(L)([-\pi, \pi))$ *сходится почти всюду, то каковы бы ни были число* $d \in \mathbb{N}$, *функция* $f \in \varphi(L)(\ln^+ L)^{d-1}([-\pi, \pi)^d)$, *множество* $B \subset \{1, 2, \ldots, d\}$ *и последовательность* $\mathbf{n}_k$, *удовлетворяющая условию* (1.3), *последовательности* $S_{\mathbf{n}_k}(f, \mathbf{x})$ *и* $\widetilde{S}_{\mathbf{n}_k,B}(f, \mathbf{x})$ *сходятся почти всюду.*

Из теоремы 1 и результата автора [4] о сходимости почти всюду тригонометрического ряда Фурье любой функции из класса $L(\ln^+ L)(\ln^+ \ln^+ \ln^+ L)([-\pi, \pi))$ вытекает

Теорема 2. *Пусть* $d \in \mathbb{N}$, $B \subset \{1, 2, \ldots, d\}$, *последовательность* $\mathbf{n}_k = (n_k^1, n_k^2, \ldots, n_k^d)$ *удовлетворяет условию* (1.3). *Тогда если* $f \in L(\ln^+ L)^d(\ln^+\ln^+\ln^+ L)([0, 2\pi)^d)$, *то последовательности* $S_{\mathbf{n}_k}(f, \mathbf{x})$ *и* $\widetilde{S}_{\mathbf{n}_k,B}(f, \mathbf{x})$ *сходятся почти всюду на* $([-\pi, \pi)^d)$.

При доказательстве теоремы 1 мы будем следовать схеме, аналогичной схеме доказательства теоремы из нашей работы [11]. Через $\mathrm{m}E$ будем обозначать лебегову меру множества E, через C_1, $C_2, \ldots$ — положительные константы.

2. Вспомогательные утверждения

Пусть функция $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p < \infty$, $\overline{f}(x)$ — преобразование Гильберта функции f:

$$\overline{f}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{f(t+x)}{t}\, dt,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Отметим, что преобразование Гильберта является оператором слабого типа $(1,1)$ и $(2,2)$ (см., например, [12, гл. 5, теоремы 1,2]), т. е. существует абсолютная константа $A_1 > 0$ такая, что для всех $y > 0$

$$\mathrm{m}\{x \in \mathbb{R}\colon\ |\overline{f}(x)| > y\} \leqslant \frac{A_1}{y}\ \|f\|_{L(\mathbb{R})}, \qquad \mathrm{m}\{x \in \mathbb{R}\colon\ |\overline{g}(x)| > y\} \leqslant \frac{A_1}{y^2}\ \|g\|^2_{L^2(\mathbb{R})}, \tag{2.1}$$

где $f \in L(\mathbb{R})$ и $g \in L^2(\mathbb{R})$.

Лемма 1. *Пусть выпуклая функция* φ: $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *представима в виде* $\varphi(u) = u\psi(u)$, *где* $\psi(u) = \sqrt{u/e}$ *при* $0 \leqslant u \leqslant e$ *и* $\psi(u)$ *— медленно растущая при* $u \geqslant e$. *Тогда для любой функции* $f \in \varphi(L)\ln^+ L(\mathbb{R})$ *справедлива оценка*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(|\overline{f}(t)|)\, dt \leqslant A_2 \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(|f(t)|)\ln^+(|f(t)|)\, dt, \tag{2.2}$$

где константа A_2 *не зависит от* f.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y > 0$. Положим

$$g(x) = g_y(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| > y, \\ 0, & |f(x)| \leqslant y, \end{cases} \qquad h(x) = h_y(x) = f(x) - g(x).$$

Тогда, обозначив $\lambda_f(y) = \mathrm{m}\{x \in \mathbb{R}\colon\ |f(x)| > y\}$, имеем

$$\lambda_{\overline{f}}(y) \leqslant \mathrm{m}\{x \in \mathbb{R}\colon\ |\overline{g}_y(x)| > y/2\} + \mathrm{m}\{x \in \mathbb{R}\colon\ |\overline{h}_y(x)| > y/2\} = \lambda_{\overline{g}}(y/2) + \lambda_{\overline{h}}(y/2). \tag{2.3}$$

Заметим, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(|\overline{f}(t)|)\, dt = -\int\limits_0^\infty \varphi(y)\, d\lambda_{\overline{f}}(y) = \int\limits_0^\infty \lambda_{\overline{f}}(y)\, d\varphi(y)$$

(см., например, [13, гл. 1, § 13, формула (13.6)] — для функций, определенных на ограниченном интервале; способ перехода к случаю функций, определенных на $\mathbb{R}$, см., например, в [12, прил. 1, § 1, замеч. 2]). Пользуясь этим, оценкой (2.3) и неравенствами (2.1), примененными к функциям $g_y(x)$ и $h_y(x)$ соответственно, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(|\overline{f}(t)|)\, dt \leqslant \int\limits_0^\infty \lambda_{\overline{g}}\Big(\frac{y}{2}\Big) d\varphi(y) + \int\limits_0^\infty \lambda_{\overline{h}}\Big(\frac{y}{2}\Big) d\varphi(y)$$

$$\leqslant 2A_1 \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{y} \int\limits_{\{t\in\mathbb{R}:\ |f(t)|>y\}} |f(t)|\,dt \right) d\varphi(y) + 4A_1 \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{y^2} \int\limits_{\{t\in\mathbb{R}:\ |f(t)|\leqslant y\}} |f(t)|^2\,dt \right) d\varphi(y).$$

Далее, поскольку функция $\varphi(u)$ почти всюду дифференцируема, а $\varphi'(u) \leqslant C_1\psi(u)$ (ибо ψ медленно растущая), имеем, применяя теорему Фубини,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(|\overline{f}(t)|)\,dt \leqslant C_2 \int\limits_{\mathbb{R}} |f(t)| \left(\int\limits_0^{|f(t)|} \frac{\psi(y)}{y}\,dy \right) dt + C_2 \int\limits_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \left(\int\limits_{|f(t)|}^\infty \frac{\psi(y)}{y^2}\,dy \right) dt. \tag{2.4}$$

Оценим внутренние интегралы в правой части (2.4). При $0 \leqslant u < e$

$$\int\limits_0^u \frac{\psi(y)}{y}\,dy = \frac{1}{\sqrt{e}} \int\limits_0^u y^{-1/2}\,dy = \frac{2u^{1/2}}{\sqrt{e}} = \frac{2\varphi(u)}{u}.$$

Если $u \geqslant e$, то, используя неубывание функции ψ, получаем

$$\int\limits_0^u \frac{\psi(y)}{y}\,dy = \frac{1}{\sqrt{e}} \int\limits_0^e y^{-1/2}\,dy + \int\limits_e^u \frac{\psi(y)}{y}\,dy \leqslant 2 + \psi(u) \int\limits_e^u \frac{dy}{y} \leqslant \frac{C_3\,\varphi(u)\ln u}{u}.$$

Таким образом, для всех $u \geqslant 0$

$$\int\limits_0^u \frac{\psi(y)}{y}\,dy \leqslant \frac{C_4\varphi(u)\ln^+ u}{u}. \tag{2.5}$$

При $u \geqslant e$, поскольку $\psi(u)u^{-1/2}$ убывает, то

$$\int\limits_u^\infty \frac{\psi(y)}{y^2}\,dy \leqslant \frac{\psi(u)}{u^{1/2}} \int\limits_u^\infty \frac{dy}{y^{3/2}} \leqslant \frac{C_5\psi(u)}{u} \leqslant \frac{C_5\varphi(u)\ln u}{u^2}.$$

При $0 \leqslant u \leqslant e$ можно получить аналогичную оценку. Таким образом, для всех $u \geqslant 0$

$$\int\limits_u^\infty \frac{\psi(y)}{y^2}\,dy \leqslant \frac{C_6\varphi(u)}{u^2} \leqslant \frac{C_6\varphi(u)\ln^+ u}{u^2}. \tag{2.6}$$

Объединяя (2.4), (2.5) и (2.6), получаем (2.2). □

Лемма 2. *Пусть функция* $\varphi:\ [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ *удовлетворяет условиям леммы* 1, $f \in \varphi(L)\ln^+ L\,(\mathbb{R}^d)$, $\mu,\nu \in \mathbb{R}$, $\mu^2+\nu^2 \neq 0$. *Тогда функция* $h^{\mu,\nu}(x_1,x_2,\dots,x_d)$, *определяемая равенством*

$$h^{\mu,\nu}(x_1,x_2,\dots,x_d) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x_1+\mu t, x_2+\nu t, x_3,\dots,x_d)\frac{1}{t}\ dt,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения, принадлежит классу $\varphi(L)(\mathbb{R}^d)$ *и*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(|h^{\mu,\nu}(x_1,\dots,x_d)|)\ dx_1\dots dx_d \leqslant A_2 \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(|f(x_1,\dots,x_d)|)\ln^+|f(x_1,\dots,x_d)|\ dx_1\dots dx_d. \tag{2.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности можно считать, что $\mu \neq 0$. Вводя новые переменные $x_1 = x_1',\ x_2 = x_2' + \dfrac{\nu}{\mu} x_1',\ x_3 = x_3', \ldots, x_d = x_d'$, получим

$$h^{\mu,\nu}(x_1, x_2, \ldots, x_d) = \int\limits_{\mathbb{R}} f\Big(x_1' + \mu t, x_2' + \frac{\nu}{\mu} x_1' + \nu t, x_3', \ldots, x_d'\Big) \frac{1}{t}\ dt$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f\Big(x_1' + t, x_2' + \frac{\nu}{\mu}(x_1' + t), x_3', \ldots, x_d'\Big) \frac{1}{t}\ dt. \qquad (2.8)$$

При фиксированных x_2',…,x_d' правая часть (2.8) как функция переменной x_1' является преобразованием Гильберта функции $f\Big(x_1', x_2' + \dfrac{\nu}{\mu} x_1', x_3', \ldots, x_d'\Big)$, поэтому из леммы 1 следует

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi\Big(\Big|\int\limits_{\mathbb{R}} f\Big(x_1' + t, x_2' + \frac{\nu}{\mu}(x_1' + t), x_3', \ldots, x_d'\Big) \frac{1}{t} dt\Big|\Big) dx_1'$$

$$\leqslant A_2 \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi\bigg(\Big|f\Big(x_1', x_2' + \frac{\nu}{\mu} x_1', x_3', \ldots, x_d'\Big)\Big|\bigg) \ln^+ \bigg(\Big|f\Big(x_1', x_2' + \frac{\nu}{\mu} x_1', x_3', \ldots, x_d'\Big)\Big|\bigg)\ dx_1'. \qquad (2.9)$$

Интегрируя (2.9) по $(x_2', \ldots, x_d') \in \mathbb{R}^{d-1}$, пользуясь равенством (2.8) и замечая, что якобиан перехода от $(x_1', x_2', \ldots, x_d')$ к $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ равен единице, получаем (2.7). $\square$

В следующей лемме $S_n(f, x)$ обозначает n-ю частичную сумму (однократного) ряда Фурье 2π-периодической функции f, а $M(f, x)$ — мажоранту частичных сумм этого ряда: $M(f, x) = \sup_{n \geqslant 1} |S_n(f, x)|$. Пусть

$$D_n(t) = \frac{\sin((n + 1/2)t)}{2\sin(t/2)} \qquad (n \in \mathbb{N}, \quad t \in [-\pi, \pi)),$$

$$D_\alpha^*(t) = \frac{\sin \alpha t}{t}, \qquad \widetilde{D}_\alpha^*(t) = \frac{1 - \cos \alpha t}{t} \qquad (\alpha > 0, \quad t \in \mathbb{R})$$

— ядро Дирихле, модифицированное ядро Дирихле и модифицированное сопряженное ядро Дирихле соответственно. Положим для функции $f \in L(\mathbb{R})$

$$S_\alpha^*(f, x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} D_\alpha^*(t) f(x + t)\, dt, \qquad \widetilde{S}_\alpha^*(f, x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \widetilde{D}_\alpha^*(t) f(x + t)\, dt,$$

$$M^*(f, x) = \sup_{\alpha \geqslant 1} |S_\alpha^*(f, x)|, \qquad \widetilde{M}^*(f, x) = \sup_{\alpha \geqslant 1} |\widetilde{S}_\alpha^*(f, x)|.$$

Лемма 3. *Пусть функция φ удовлетворяет условиям леммы 1. Предположим, что ряд Фурье любой функции $g \in \varphi(L)([-\pi, \pi))$ сходится почти всюду. Тогда для любой функции $f \in \varphi(L)(\mathbb{R})$ и числа $y > 1$*

$$m\{x \in [-\pi, \pi) \colon\ M^*(f, x) > y\} \leqslant A_3 \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi\Big(\frac{|f(x|}{y}\Big) dx, \qquad (2.10)$$

$$m\{x \in [-\pi, \pi) \colon\ \widetilde{M}^*(f, x) > y\} \leqslant A_3 \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi\Big(\frac{|f(x|}{y}\Big) dx, \qquad (2.11)$$

где константа A_3 не зависит ни от f, ни от y.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ряды Фурье всех функций $g \in \varphi(L)([-\pi,\pi))$ сходятся почти всюду. Тогда и сопряженные ряды всех этих рядов также сходятся почти всюду [13, т. 2, гл. 13, теорема 5.1]. Далее мы докажем оценку (2.10), а параллельно фактически и оценку (2.11), поскольку все рассуждения будут справедливы и в случае (2.11) при использовании аналогичных свойств частичных сумм сопряженных рядов.

Так как мажоранты сумм Фурье функций $g \in \varphi(L)([-\pi,\pi))$ конечны почти всюду, то для них справедлива оценка

$$\mathrm{m}\,\{x \in [-\pi,\pi)\colon\ M(g,x) > y\} \leqslant C_7 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi\Big(\frac{|g(x)|}{y}\Big)\,dx. \tag{2.12}$$

Это следует из [14, теорема 3]; отметим, что требуемое там условие вогнутости функции $\varphi(\sqrt{u})$ при наших предположениях можно, не ограничивая общности, считать выполненным; в противном случае при $u \geqslant e$ вместо функции $\varphi(u)$ можно рассмотреть функцию $\varphi(Au) - B$, выбрав подходящим образом константы A и B; такое изменение функции $\varphi(u)$ не приведет к изменению соответствующего класса $\varphi(L)$.

Покажем, что из (2.12) для функций $f \in \varphi(L)(\mathbb{R})$ вытекает оценка

$$\mathrm{m}\bigg\{x \in (-\pi/2,\pi/2)\colon\ \sup_{k\geqslant 1}\bigg|\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t-x)D_k(t)dt\bigg| > y\bigg\} \leqslant C_8 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi\Big(\frac{|f(x)|}{y}\Big)\,dx. \tag{2.13}$$

В самом деле, обозначая через $f^1(x)$ 2π-периодическую функцию, совпадающую на $[-\pi,\pi)$ с функцией $f(x)$, имеем для $x \in (-\pi/2,\pi/2)$

$$\bigg|\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t-x)D_k(t)\,dt\bigg| = \bigg|\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^1(t-x)D_k(t)\,dt - \bigg(\int\limits_{-\pi}^{-\pi/2} + \int\limits_{\pi/2}^{\pi}\bigg) f^1(t-x)D_k(t)\,dt\bigg|$$

$$\leqslant \pi|S_k(f^1,x)| + \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f^1(t)|\,dt.$$

Отсюда следует, что левая часть (2.13) не превосходит

$$\mathrm{m}\Big\{x \in (-\pi/2,\pi/2)\colon\ M(f^1,x) > \frac{y}{2\pi}\Big\} + \mathrm{m}\Big\{x \in (-\pi/2,\pi/2)\colon\ \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f^1(t)|\,dt > \frac{y}{2}\Big\}.$$

Далее имеем:

$$\mathrm{m}\Big\{x \in (-\pi/2,\pi/2)\colon\ \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f^1(t)|\,dt > \frac{y}{2}\Big\} = \mathrm{m}\Big\{x \in (-\pi/2,\pi/2)\colon\ \varphi\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{|f^1(t)|}{y}\,dt\Big) > \varphi\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big\}$$

$$\leqslant \mathrm{m}\Big\{x \in (-\pi/2,\pi/2)\colon\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi\Big(\frac{2\pi|f^1(t)|}{y}\Big)\,dt > \varphi\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big\} \leqslant \frac{4\pi^2}{\varphi(1/2)} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi\Big(\frac{|f^1(t)|}{y}\Big)\,dt;$$

цепочка неравенств в этой формуле вытекает из неравенств Иенсена и Чебышева. Отсюда и из оценки (2.12) при $g(x) = f^1(x)$ получаем соотношение (2.13), так как в нем используются значения функции $f(x)$ лишь на $[-\pi,\pi)$.

Затем с помощью неравенства

$$|D_k(t) - D^*_\alpha(t)| \leqslant C_9, \qquad -\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi/2, \quad \alpha \in [k,k+1],$$

и рассуждений, аналогичных только что приведенным, из (2.13) имеем

$$\mathrm{m}\Bigl\{x \in (-\pi/2, \pi/2)\colon\ \sup_{\alpha \geqslant 1} \Bigl| \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t-x) D^*_\alpha(t)\,dt \Bigr| > y \Bigr\} \leqslant C_{10} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi\Bigl(\frac{|f(x)|}{y}\Bigr)\,dx. \tag{2.14}$$

Пусть теперь f — произвольная функция из $\varphi(L)(\mathbb{R})$ с ограниченным носителем: $f(t)=0$ при $t \notin [-a,a]$, $a > \pi/2$. Тогда, рассматривая вместо функции $f(t)$ функцию $g(t) = f(2at/\pi)$ и применяя к ней (2.14), а затем переходя обратно к $f(t)$, получаем

$$\mathrm{m}\Bigl\{x \in (-a, a)\colon\ \sup_{\alpha \geqslant 1} \Bigl| \int\limits_{x-a}^{x+a} f(t-x) D^*_\alpha(t)\,dt \Bigr| > y \Bigr\} \leqslant C_{11} \int\limits_{-a}^{a} \varphi\Bigl(\frac{|f(x)|}{y}\Bigr)\,dx, \tag{2.15}$$

где константа C_{11} не зависит от f, y, a.

Пусть, наконец, f — произвольная функция из $\varphi(L)(\mathbb{R})$. Тогда для $x \in [-\pi,\pi]$ и $a > \pi$

$$\pi M^*(f,x) \leqslant \sup_{\alpha \geqslant 1} \Bigl| \int\limits_{x-a}^{x+a} f(t-x) D^*_\alpha(t)\,dt \Bigr| + \sup_{\alpha \geqslant 1} \Bigl| \Bigl(\int\limits_{-\infty}^{x-a} + \int\limits_{x+a}^{+\infty} \Bigr) f(t-x) D^*_\alpha(t)\,dt \Bigr|.$$

Замечая, что мера множества тех $x \in [-\pi, \pi)$, для которых первое слагаемое правой части последнего неравенства больше y, оценивается с помощью (2.15), а второе слагаемое за счет выбора числа a можно сделать сколь угодно малым, имеем (2.10), а фактически и (2.11).

3. Основные леммы

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $B \subset \{1,2,\dots,d\}$, $\{m_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность натуральных чисел, $(\alpha_1,\dots,\alpha_d)$ — d-мерный вектор с положительными координатами. Для функции f, определенной на $\mathbb{R}^d$, и $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_d)$ положим

$$S^*_{k,B}(f,\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \prod_{j\in B} (-\widetilde{D}^*_{\alpha_j m_k}(t_j)) \prod_{j \in \{1,\dots,d\}\setminus B} D^*_{\alpha_j m_k}(t_j) f(\mathbf{x}+\mathbf{t})\,d\mathbf{t}, \quad M^*_B(f,\mathbf{x}) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |S^*_{k,B}(f,\mathbf{x})|.$$

Лемма 4. *Пусть функция $\varphi\colon\ [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ удовлетворяет условиям леммы* 1. *Предположим, что ряд Фурье любой функции $g \in \varphi(L)([-\pi,\pi))$ сходится почти всюду. Тогда для каждого $d \in \mathbb{N}$ существует константа $K_d > 0$ такая, что для любой функции $f \in \varphi(L)(\ln^+ L)^{d-1}(\mathbb{R}^d)$, для всех $B \subset \{1,2,\dots,d\}$ и любых $y > 1$*

$$\mathrm{m}\Bigl\{\mathbf{x} \in [-\pi,\pi)^d\colon\ M^*_B(f,\mathbf{x}) > y\Bigr\} \leqslant \frac{K_d}{y} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(|f(\mathbf{x})|)(\ln^+ |f(\mathbf{x})|)^{d-1}\,d\mathbf{x}. \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим для краткости

$$\varphi_d(u) = \varphi(u)(\ln^+ u)^{d-1}, \qquad d \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Доказательство будем проводить индукцией по d, точнее, по размерности пространства $\mathbb{R}^d$, на котором определена функция f.

При $d = 1$ утверждение настоящей леммы следует из леммы 3: при $B = \varnothing$ оценка (3.1) превращается в оценку (2.10), а при $B = \{1\}$ — в оценку (2.11).

Пусть $d \geqslant 2$. Предположим, что оценка (3.1) верна для размерности $d-1$, и докажем ее для размерности d. Обозначим $N_d = \{1,2,\dots,d\}$, $\overline{B} = N_d \setminus B$. Рассмотрим три случая.

С л у ч а й 1: $1 \in \overline{B}$, $2 \in \overline{B}$.

Обозначим $\Pi_k = \Pi_k(t_3,\dots,t_d) = \prod\limits_{j\in B}(-\widetilde{D}^*_{\alpha_j m_k}(t_j)) \prod\limits_{j\in \overline{B}\setminus\{1,2\}} D^*_{\alpha_j m_k}(t_j)$. Тогда

$$S^*_{k,B}(f,\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} D^*_{\alpha_1 m_k}(t_1) D^*_{\alpha_2 m_k}(t_2)\Pi_k(t_3,\dots,t_d) f(\mathbf{x}+\mathbf{t})\,d\mathbf{t}. \tag{3.3}$$

Применяя последовательно тождества

$$\sin(\alpha_1 m_k t_1)\sin(\alpha_2 m_k t_2) = \Big[\big(\cos m_k(\alpha_1 t_1 - \alpha_2 t_2) - 1\big) - \big(\cos m_k(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2) - 1\big)\Big]/2$$

и

$$\frac{1}{t_1 t_2} = \frac{1}{t_1\Big(t_2 \pm \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}t_1\Big)} + \frac{1}{t_2\Big(t_1 \pm \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}t_2\Big)},$$

имеем

$$D^*_{\alpha_1 m_k}(t_1) D^*_{\alpha_2 m_k}(t_2) = \frac{\sin(\alpha_1 m_k t_1)\sin(\alpha_2 m_k t_2)}{t_1 t_2}$$

$$= \frac{(\cos m_k(\alpha_1 t_1 - \alpha_2 t_2) - 1) - (\cos m_k(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2) - 1)}{2 t_1 t_2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\cos m_k(\alpha_1 t_1 - \alpha_2 t_2) - 1}{t_1\Big(t_2 - \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}t_1\Big)} + \frac{\cos m_k(\alpha_1 t_1 - \alpha_2 t_2) - 1}{t_2\Big(t_1 - \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}t_2\Big)}\right)$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{\cos m_k(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2) - 1}{t_1\Big(t_2 + \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}t_1\Big)} + \frac{\cos m_k(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2) - 1}{t_2\Big(t_1 + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}t_2\Big)}\right)$$

$$= \frac{1}{2t_1}\left(\frac{\cos m_k(\alpha_1 t_1 - \alpha_2 t_2) - 1}{t_2 - \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}t_1} - \frac{\cos m_k(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2) - 1}{t_2 + \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}t_1}\right)$$

$$+ \frac{1}{2t_2}\left(\frac{\cos m_k(\alpha_1 t_1 - \alpha_2 t_2) - 1}{t_1 - \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}t_2} - \frac{\cos m_k(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2) - 1}{t_1 + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}t_2}\right).$$

Таким образом,

$$D^*_{\alpha_1 m_k}(t_1) D^*_{\alpha_2 m_k}(t_2) = D^1_k + D^2_k, \tag{3.4}$$

где

$$D^1_k = \frac{1}{2t_1}\Big[\widetilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}\Big(t_2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}t_1\Big) - \widetilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}\Big(t_2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}t_1\Big)\Big], \tag{3.5}$$

$$D^2_k = \frac{1}{2t_2}\Big[\widetilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}\Big(t_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}t_2\Big) - \widetilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}\Big(t_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}t_2\Big)\Big]. \tag{3.6}$$

Заметим, что при каждом k функции D^1_k и D^2_k ограничены.

Пусть $(x_1,\dots,x_d) \in [-\pi,\pi)^d$. Умножим обе части равенства (3.5) на

$$\Pi_k(t_3,\dots,t_d) f(x_1+t_1,\dots,x_d+t_d)$$

и проинтегрируем по множеству $\{(t_1,t_2,\dots,t_d)\in\mathbb{R}^d:\ |t_1|>\varepsilon\}$. Затем разобьем получившийся в правой части интеграл на разность двух интегралов в соответствии с разностью в (3.5), сделаем в них замену переменных $u_1=t_1,\ u_2=t_2+(\alpha_1/\alpha_2)t_1,\ u_3=t_3,\dots,u_d=t_d$ и соответственно $u_1=t_1,\ u_2=t_2-(\alpha_1/\alpha_2)t_1,\ u_3=t_3,\dots,u_d=t_d$ и перейдем к пределу при $\varepsilon\to 0$. Получим равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} D_k^1\Pi_k(t_3,\dots,t_d)f(x_1+t_1,\dots,x_d+t_d)\,dt_1\dots dt_d = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\widetilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}(u_2)\Pi_k(u_3,\dots,u_d)$$

$$\times\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}} f\Big(x_1+u_1,x_2+u_2-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}u_1,x_3+u_3,\dots,x_d+u_d\Big)\frac{1}{u_1}\,du_1\Bigg)du_2\dots du_d$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\widetilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}(u_2)\Pi_k(u_3,\dots,u_d)$$

$$\times\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}} f\Big(x_1+u_1,x_2+u_2+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}u_1,x_3+u_3,\dots,x_d+u_d\Big)\frac{1}{u_1}\,du_1\Bigg)du_2\dots du_d. \tag{3.7}$$

Внутренние интегралы в правой части (3.7), понимаемые в смысле главного значения, согласно обозначениям леммы 2 можно записать как $h^{1,-\alpha_1/\alpha_2}(x_1,x_2+u_2,x_3+u_3,\dots,x_d+u_d)$ и $h^{1,\alpha_1/\alpha_2}(x_1,x_2+u_2,x_3+u_3,\dots,x_d+u_d)$. Проделав с равенством (3.6) то же, что и с (3.5), только производя при этом замены $u_1=t_1+(\alpha_2/\alpha_1)t_2,\ u_2=t_2,\dots,u_d=t_d$ и соответственно $u_1=t_1-(\alpha_2/\alpha_1)t_2,\ u_2=t_2,\dots,u_d=t_d$, получаем:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} D_k^2\Pi_k(t_3,\dots,t_d)f(x_1+t_1,\dots,x_d+t_d)\,dt_1\dots dt_d = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\widetilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}(u_1)\Pi_k(u_3,\dots,u_d)$$

$$\times\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}} f\Big(x_1+u_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}u_2,x_2+u_2,x_3+u_3,\dots,x_d+u_d\Big)\frac{1}{u_2}\,du_2\Bigg)du_1du_3\dots du_d$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\widetilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}(u_1)\Pi_k(u_3,\dots,u_d)$$

$$\times\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}} f\Big(x_1+u_1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}u_2,x_2+u_2,x_3+u_3,\dots,x_d+u_d\Big)\frac{1}{u_2}\,du_2\Bigg)du_1du_3\dots du_d$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\widetilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}(u_1)\Pi_k(u_3,\dots,u_d)h^{-\alpha_2/\alpha_1,1}\big(x_1+u_1,x_2,x_3+u_3,\dots,x_d+u_d\big)\,du_1du_3\dots du_d$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\widetilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}(u_1)\Pi_k(u_3,\dots,u_d)\,h^{\alpha_2/\alpha_1,1}\big(x_1+u_1,x_2,x_3+u_3,\dots,x_d+u_d\big)\,du_1du_3\dots du_d. \tag{3.8}$$

Используя определение $M_B^*(f,\mathbf{x})$, а также (3.3), (3.4), (3.7) и (3.8), имеем

$$2M_B^*(f,\mathbf{x})$$

$$\leqslant\sup_{k\in\mathbb{N}}\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\widetilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}(u_2)\Pi_k(u_3,\dots,u_d)h^{1,-\alpha_1/\alpha_2}\big(x_1,x_2+u_2,x_3+u_3,\dots,x_d+u_d\big)\,du_2\dots du_d\Bigg|$$

$$+\sup_{k\in\mathbb{N}}\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\widetilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}(u_2)\Pi_k(u_3,\dots,u_d)h^{1,\alpha_1/\alpha_2}\big(x_1,x_2+u_2,x_3+u_3,\dots,x_d+u_d\big)\,du_2\dots du_d\Bigg|$$

$$+\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \widetilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}(u_1)\Pi_k(u_3,\dots,u_d)h^{-\alpha_2/\alpha_1,1}\big(x_1+u_1,x_2,x_3+u_3,\dots,x_d+u_d\big)\,du_1du_3\dots du_d\right|$$

$$+\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \widetilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}(u_1)\Pi_k(u_3,\dots,u_d)h^{\alpha_2/\alpha_1,1}\big(x_1+u_1,x_2,x_3+u_3,\dots,x_d+u_d\big)\,du_1du_3\dots du_d\right|$$

$$=M_B^1(f,\mathbf{x})+M_B^2(f,\mathbf{x})+M_B^3(f,\mathbf{x})+M_B^4(f,\mathbf{x}). \tag{3.9}$$

Покажем, что $M_B^1(f,\mathbf{x})$ удовлетворяет неравенству (3.1) с некоторой константой K_d^1.

Зафиксируем $x_1\in[-\pi,\pi)$. Тогда множество $B'=B\cup\{2\}\subset\{2,\dots,d\}$, последовательность $\{m_k\}_{k=1}^\infty$, $(d-1)$-мерный вектор $(\alpha_2,\dots,\alpha_d)$ и построенный на их основе применяемый к функции $d-1$ переменной $g(x_2,\dots,x_d)$ оператор

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|S^*_{k,B'}(g,(x_2,\dots,x_d))\right|,$$

где

$$S^*_{k,B'}(g(x_2,\dots,x_d))=\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\prod_{j\in B'}\big(-\widetilde{D}^*_{\alpha_j m_k}(u_j)\big)\prod_{j\in\{1,\dots,d\}\setminus B'}D^*_{\alpha_j m_k}(u_j)g\big(x_2+u_2,\dots,x_d+u_d\big)\,du_2\dots du_d,$$

удовлетворяют предположению индукции.

Поэтому согласно предположению индукции для функции

$$g(x_2,\dots,x_d)=h^{1,-\alpha_2/\alpha_1}(x_1,x_2,x_3,\dots,x_d)$$

(x_1 фиксировано) справедлива оценка

$$\mathrm{m}\Bigg\{(x_2,\dots,x_d)\in[-\pi,\pi)^{d-1}\colon\ \sup_{k\in\mathbb{N}}\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\widetilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}(u_2)\Pi_k(u_3,\dots,u_d)$$

$$\times h^{1,-\alpha_2/\alpha_1}\big(x_1,x_2+u_2,x_3+u_3,\dots,x_d+u_d\big)\,du_2\dots du_d\Bigg|>y\Bigg\}$$

$$=\ \mathrm{m}\Bigg\{(x_2,\dots,x_d)\in[-\pi,\pi)^{d-1}\colon\ \sup_{k\in\mathbb{N}}\Big|S^*_{k,B'}\Big(h^{1,-\alpha_2/\alpha_1},(x_2,\dots,x_d)\Big)\Big|>y\Bigg\}$$

$$\leqslant\ \frac{K_{d-1}}{y}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\varphi_{d-1}\Big(\Big|h^{1,-\alpha_2/\alpha_1}(x_1,x_2,x_3,\dots,x_d)\Big|\Big)\,dx_2\dots dx_d,\qquad y>1. \tag{3.10}$$

Пользуясь тем, что

$$\mathrm{m}\Big\{(x_1,x_2,\dots,x_d)\in[-\pi,\pi)^d\colon\ M_B^1(f,\mathbf{x})>y\Big\}$$

$$=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{m}\Big\{(x_2,\dots,x_d)\in[-\pi,\pi)^{d-1}\colon\ \sup_{k\in\mathbb{N}}\Big|S^*_{k,B'}\Big(h^{1,-\alpha_2/\alpha_1},(x_2,\dots,x_d)\Big)\Big|>y\Big\}\,dx_1,$$

а затем применяя (3.10) и теорему Фубини, получаем

$$\mathrm{m}\Big\{(x_1,x_2,\dots,x_d)\in[-\pi,\pi)^d\colon\ M_B^1(f,\mathbf{x})>y\Big\}$$

$$\leqslant\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{K_{d-1}}{y}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\varphi_{d-1}\Big(\Big|h^{1,-\alpha_2/\alpha_1}(x_1,x_2,\dots,x_d)\Big|\Big)\,dx_2\dots dx_d dx_1$$

$$\leqslant \frac{K_{d-1}}{y} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi_{d-1}\Big(\Big|h^{1,-\alpha_2/\alpha_1}(x_1, x_2, \ldots, x_d)\Big|\Big)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_d.$$

Отсюда и из леммы 2 для $y > 1$ заключаем

$$\mathrm{m}\Big\{(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in [-\pi, \pi)^d\colon\ M_B^1(f, \mathbf{x}) > y\Big\} \leqslant \frac{K_d^1}{y} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi_d\big(|f(x_1, x_2, \ldots, x_d)|\big)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_d.$$

Аналогично доказывается, что мажоранты $M_B^i(f, \mathbf{x})$, $i = 2, 3, 4$, также удовлетворяют (3.1) с той же константой K_d^1. Таким образом, для $M_B^*(f, \mathbf{x})$ неравенство (3.1) выполняется с константой $K_d = 4K_d^1$.

С л у ч а й 2: $1 \in B$, $2 \in \overline{B}$. (Случай, когда $1 \in \overline{B}$, $2 \in B$, рассматривается аналогично). Здесь

$$S_{k,B}^*(f, \mathbf{x}) = -\int\limits_{\mathbb{R}^d} \widetilde{D}_{\alpha_1 m_k}^*(t_1) D_{\alpha_2 m_k}^*(t_2) \Pi_k(t_3, \ldots, t_d) f(\mathbf{x} + \mathbf{t})\, d\mathbf{t}. \tag{3.11}$$

Применяя последовательно тождества, аналогичные использованным в предыдущем случае, получаем:

$$\frac{(\cos(\alpha_1 m_k t_1) - 1)\sin(\alpha_2 m_k t_2)}{t_1 t_2} = \frac{\frac{1}{2}\Big(\sin m_k(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2) + \sin m_k(\alpha_2 t_2 - \alpha_1 t_1)\Big) - \sin m_k \alpha_2 t_2}{t_1 t_2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin m_k(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)}{t_1\Big(t_2 + \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} t_1\Big)} + \frac{\sin m_k(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)}{t_2\Big(t_1 + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} t_2\Big)}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\sin m_k(\alpha_2 t_2 - \alpha_1 t_1)}{t_1\Big(t_2 - \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} t_1\Big)} + \frac{\sin m_k(\alpha_2 t_2 - \alpha_1 t_1)}{t_2\Big(t_1 - \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} t_2\Big)}\right) - \frac{\sin m_k \alpha_2 t_2}{t_1 t_2},$$

т. е.

$$\widetilde{D}_{\alpha_1 m_k}^*(t_1) D_{\alpha_2 m_k}^*(t_2) = D_k^3 + D_k^4, \tag{3.12}$$

где

$$D_k^3 = \frac{1}{2t_1}\left[D_{\alpha_2 m_k}^*\Big(t_2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} t_1\Big) + D_{\alpha_2 m_k}^*\Big(t_2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} t_1\Big) - 2D_{\alpha_2 m_k}^*(t_2)\right], \tag{3.13}$$

$$D_k^4 = \frac{1}{2t_2}\left[D_{\alpha_1 m_k}^*\Big(t_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} t_2\Big) - D_{\alpha_1 m_k}^*\Big(t_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} t_2\Big)\right]. \tag{3.14}$$

Теперь обе части равенства (3.13) умножим на $\Pi_k f(\mathbf{x} + \mathbf{t})$ и проинтегрируем по множеству $\{(t_1, t_2, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d\colon\ |t_1| > \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Затем разобьем получившийся в правой части интеграл на три интеграла, сделаем в первых двух из них замену переменных $u_1 = t_1,\ u_2 = t_2 + (\alpha_1/\alpha_2)\, t_1,\ u_3 = t_3, \ldots, u_d = t_d$ и соответственно $u_1 = t_1,\ u_2 = t_2 - (\alpha_1/\alpha_2)\, t_1,\ u_3 = t_3, \ldots, u_d = t_d$ и перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$. Аналогичные действия проделаем с равенством (3.14). Используя получившиеся соотношения, а также (3.12) и (3.11), получим

$$2M_B^*(f, \mathbf{x})$$

$$\leqslant \sup_{k \in \mathbb{N}} \Bigg| \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} D_{\alpha_2 m_k}^*(u_2) \Pi_k(u_3, \ldots, u_d) h^{1,-\alpha_1/\alpha_2}\big(x_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3, \ldots, x_d + u_d\big)\, du_2 \ldots du_d \Bigg|$$

$$+\sup_{k\in\mathbb{N}}\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} D^*_{\alpha_2 m_k}(u_2)\Pi_k(u_3,\dots,u_d)h^{1,\alpha_1/\alpha_2}(x_1,x_2+u_2,x_3+u_3,\dots,x_d+u_d)\,du_2\dots du_d\Bigg|$$

$$+\sup_{k\in\mathbb{N}}\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} D^*_{\alpha_2 m_k}(u_2)\Pi_k(u_3,\dots,u_d)h^{1,0}(x_1,x_2+u_2,x_3+u_3,\dots,x_d+u_d)\,du_2\dots du_d\Bigg|$$

$$+\sup_{k\in\mathbb{N}}\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} D^*_{\alpha_1 m_k}(u_1)\Pi_k(u_3,\dots,u_d)h^{-\alpha_2/\alpha_1,1}(x_1+u_1,x_2,x_3+u_3,\dots,x_d+u_d)\,du_1du_3\dots du_d\Bigg|$$

$$+\sup_{k\in\mathbb{N}}\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} D^*_{\alpha_1 m_k}(u_1)\Pi_k(u_3,\dots,u_d)h^{\alpha_2/\alpha_1,1}(x_1+u_1,x_2,x_3+u_3,\dots,x_d+u_d)\,du_1du_3\dots du_d\Bigg|. \tag{3.15}$$

С использованием тех же рассуждений, что и в случае 1, доказывается, что все пять слагаемых в правой части (3.15) удовлетворяют (3.1), откуда следует (3.1) для $M^*_B(f,\mathbf{x})$.

С л у ч а й 3: $1\in B$, $2\in B$.

Этот случай рассматривается аналогично предыдущим. Здесь используется тождество

$$\widetilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}(t_1)\widetilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}(t_2)=D^5_k+D^6_k,$$

где

$$D^5_k=\frac{1}{2t_1}\Big[\widetilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}\Big(t_2+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}t_1\Big)+\widetilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}\Big(t_2-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}t_1\Big)-2\widetilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}(t_2)\Big],$$
$$D^6_k=\frac{1}{2t_2}\Big[\widetilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}\Big(t_1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}t_2\Big)+\widetilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}\Big(t_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}t_2\Big)-2\widetilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}(t_1)\Big].$$

Таким образом, (3.1) справедливо для любого $d\in\mathbb{N}$ и произвольного $B\subset\{1,2,\dots,d\}$. □

Лемма 5. *Пусть функция* $\varphi\colon\ [0,+\infty)\to[0,+\infty)$ *удовлетворяет условиям леммы* 1, $\widetilde{\varphi}(u)=\max\{u,\varphi(u)\}$, $u\geqslant 0$. *Предположим, что ряд Фурье любой функции* $g\in\varphi(L)([-\pi,\pi))$ *сходится почти всюду. Тогда для каждого* $d\in\mathbb{N}$ *существует константа* $\overline{K}_d>0$ *такая, что для любой функции* $f\in\widetilde{\varphi}(L)(\ln^+L)^d(\mathbb{R}^d)$ *и для всех* $B\subset\{1,2,\dots,d\}$

$$\int\limits_{[-\pi,\pi)^d} M^*_B(f,\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\leqslant\overline{K}_d\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\widetilde{\varphi}(|f(\mathbf{x})|)(\ln^+|f(\mathbf{x})|)^d\,d\mathbf{x}+1\Bigg). \tag{3.16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\lambda_M(y)=\mathrm{m}\big\{\mathbf{x}\in[-\pi,\pi)^d\colon\ M^*_B(f,\mathbf{x})>y\big\}$. Тогда

$$\int\limits_{[-\pi,\pi)^d} M^*_B(f,\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\leqslant 2(2\pi)^d-\int\limits_2^\infty y\,d\lambda_M(y)\leqslant 2(2\pi)^d+\int\limits_2^\infty\lambda_M(y)dy.$$

Далее, проводя относительно последнего интеграла рассуждения, аналогичные рассуждениям леммы 1, а именно, снова представляя $f(x)$ в виде $f(x)=g_y(x)+h_y(x)$, выписывая аналог (2.3) для $\lambda_M(y)$ и используя при этом оценку (3.1) (по аналогии с применением первой оценки (2.1)) и тот факт, что $M^*_B(\,\cdot\,,\mathbf{x})$ является оператором слабого типа $(2,2)$, получаем

$$\int\limits_{[-\pi,\pi)^d} M^*_B(f,\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\leqslant 2(2\pi)^d+2K_d\int\limits_2^\infty\Bigg(\frac{1}{y}\int\limits_{\{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^d\colon\ |f(\mathbf{t})|>y\}}\varphi(|f(\mathbf{t})|)(\ln^+|f(\mathbf{t})|)^{d-1}\,d\mathbf{t}\Bigg)dy$$

$$+ C_{12}\int\limits_2^\infty \left(\frac{1}{y^2}\int\limits_{\{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^d\colon\ |f(\mathbf{t})|\leqslant y\}} |f(\mathbf{t})|^2\,d\mathbf{t}\right)dy$$

$$= 2K_d \int\limits_{\mathbb{R}^d\cap\{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^d\colon\ |f(\mathbf{t})|>2\}} \varphi(|f(\mathbf{t})|)(\ln^+|f(\mathbf{t})|)^{d-1}\left(\int\limits_2^{|f(\mathbf{t})|}\frac{dy}{y}\right)d\mathbf{t}$$

$$+ C_{12}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|f(\mathbf{t})|^2\left(\int\limits_{|f(\mathbf{t})|}^\infty\frac{dy}{y^2}\right)d\mathbf{t} + 2(2\pi)^d,$$

откуда очевидно вытекает (3.16).

4. Доказательство теоремы 1

Пусть последовательность векторов $\mathbf{n}_k = (n_k^1, n_k^2, \ldots, n_k^d)$ с неотрицательными координатами удовлетворяет условию (1.3). Тогда ядро Дирихле $D_{n_k^j}(t)$ и сопряженное к нему ядро $\widetilde{D}_{n_k^j}(t)$, $k\in\mathbb{N}$, $1\leqslant j\leqslant d$, представимы в виде

$$D_{n_k^j}(t) = \frac{\sin\left(n_k^j+\frac12\right)t}{2\sin\frac t2} = \frac{\sin\alpha_j m_k t}{t} + R_{n_k^j}(t) = D^*_{\alpha_j m_k}(t) + R_{n_k^j}(t),$$

$$\widetilde{D}_{n_k^j}(t) = \frac{\cos\frac t2 - \cos\left(n_k^j+\frac12\right)t}{2\sin\frac t2} = \frac{1-\cos\alpha_j m_k t}{t} + \widetilde{R}_{n_k^j}(t) = \widetilde{D}^*_{\alpha_j m_k}(t) + \widetilde{R}_{n_k^j}(t),$$

где функции

$$R_{n_k^j}(t) = \frac{\sin n_k^j t - \sin\alpha_j m_k t}{t} + \sin n_k^j t\left(\frac12\operatorname{ctg}\frac t2 - \frac1t\right) + \frac12\cos n_k^j t$$

и

$$\widetilde{R}_{n_k^j}(t) = \frac{\cos n_k^j t - \cos\alpha_j m_k t}{t} + (1-\cos n_k^j t)\left(\frac12\operatorname{ctg}\frac t2 - \frac1t\right) - \frac12\sin n_k^j t$$

равномерно ограничены по k, j и $t\in[-\pi,\pi)$. Отсюда для $B\subset\{1,\ldots,d\}$ и $f\in L([-\pi,\pi)^d)$

$$\widetilde{S}_{\mathbf{n}_k,B}(f,\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^d}\int\limits_{[-\pi,\pi)^d}\prod_{j\in B}(-\widetilde{D}_{n_k^j}(t_j))\prod_{j\in\{1,\ldots,d\}\setminus B} D_{n_k^j}(t_j) f(x_1+t_1,\ldots,x_d+t_d)\,dt_1\ldots dt_d$$

$$= \frac{1}{\pi^d}\int\limits_{[-\pi,\pi)^d}\prod_{j\in B}\left(-\widetilde{D}^*_{\alpha_j m_k}(t_j) - \widetilde{R}_{n_k^j}(t_j)\right)\prod_{j\in\{1,\ldots,d\}\setminus B}\left(D^*_{\alpha_j m_k}(t_j) + R_{n_k^j}(t_j)\right) f(\mathbf{x}+\mathbf{t})\,d\mathbf{t}. \tag{4.1}$$

Положим для $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d$ $f_1(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\chi_{[-2\pi,2\pi)^d}(\mathbf{x})$, где $\chi_{[-2\pi,2\pi)^d}(\mathbf{x})$ — характеристическая функция d-мерного куба $[-2\pi,2\pi)^d$. Заметим (и будем этим пользоваться в дальнейшем), что значение выражения в последней строке (4.1) для $x\in[-\pi,\pi)^d$ не изменится, если там заменить f на f_1.

Ядро в правой части (4.1), являющееся произведением двух произведений, можно разбить на 2^d слагаемых, в соответствии с этим интеграл разобьется на сумму 2^d интегралов. Каждое из слагаемых этой суммы будет иметь вид

$$\frac{1}{\pi^d}\int\limits_{[-\pi,\pi)^d}\prod_{j\in B_1}\left(-\widetilde{D}^*_{\alpha_j m_k}(t_j)\right)\prod_{j\in B_2}\left(-\widetilde{R}_{n_k^j}(t_j)\right)\prod_{j\in B_3}D^*_{\alpha_j m_k}(t_j)\prod_{j\in B_4}R_{n_k^j}(t_j)f_1(\mathbf{x}+\mathbf{t})\,d\mathbf{t}, \tag{4.2}$$

где B_1, B_2, B_3, B_4 зависят от слагаемого в сумме и удовлетворяют условиям $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, $B_1 \cup B_2 = B$, $B_3 \cap B_4 = \varnothing$, $B_3 \cup B_4 = \{1, \dots, d\} \backslash B$.

Обозначим через Δ семейство всех множеств G, представимых в виде декартова произведения $G = \prod_{j=1}^{d} G_j$, где $G_j \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}\backslash[-\pi,\pi)\}$, если $j \in B_1 \cup B_3$, и $G_j = [-\pi,\pi)$ при $j \in B_2 \cup B_4$. Пусть $\gamma(G)$ — количество тех $j \in \{1,\dots,d_0\}$, для которых G_j совпадает с $\mathbb{R}\backslash[-\pi,\pi)$. Тогда в силу аддитивности интеграла по множеству выражение (4.2) может быть переписано в виде

$$\frac{1}{\pi^d} \sum_{G \in \Delta} (-1)^{\gamma(G)} \int\limits_G \prod_{j \in B_1} \left(-\widetilde{D}^*_{\alpha_j m_k}(t_j)\right) \prod_{j \in B_2} \left(-\widetilde{R}_{n_k^j}(t_j)\right) \prod_{j \in B_3} D^*_{\alpha_j m_k}(t_j) \prod_{j \in B_4} R_{n_k^j}(t_j) f_1(\mathbf{x}+\mathbf{t})\, d\mathbf{t}. \tag{4.3}$$

Зафиксируем $G \in \Delta$. Обозначим через B_5 множество тех j, для которых $G_j = \mathbb{R}$, через B_6 — множество тех j, для которых $G_j = \mathbb{R}\backslash[-\pi,\pi)$. Положим $B_7 = B_1 \cap B_5$, $B_8 = B_1 \cap B_6$, $B_9 = B_3 \cap B_5$, $B_{10} = B_3 \cap B_6$. Для произвольной функции $\lambda(t)$, $t \in \mathbb{R}$, и произвольного множества $E \subset \mathbb{R}$ обозначим

$$(\lambda(t))_E = \lambda(t)\chi_E(t) = \begin{cases} \lambda(t), & t \in E, \\ 0, & t \notin E. \end{cases}$$

Тогда, используя введенные обозначения, интеграл по множеству G из суммы (4.3) можно записать следующим образом:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \prod_{j \in B_7} \left(-\widetilde{D}^*_{\alpha_j m_k}(t_j)\right) \prod_{j \in B_9} D^*_{\alpha_j m_k}(t_j) \prod_{j \in B_2} \left(-\widetilde{R}_{n_k^j}(t_j)\right)_{[-\pi,\pi)} \prod_{j \in B_4} (R_{n_k^j}(t_j))_{[-\pi,\pi)}$$
$$\times \prod_{j \in B_8} \left(-\widetilde{D}^*_{\alpha_j m_k}(t_j)\right)_{\mathbb{R}\backslash[-\pi,\pi)} \prod_{j \in B_{10}} (D^*_{\alpha_j m_k}(t_j))_{\mathbb{R}\backslash[-\pi,\pi)} f_1(\mathbf{x}+\mathbf{t})\, d\mathbf{t}. \tag{4.4}$$

Положим $d_0 = \mathrm{card} B_7 + \mathrm{card} B_9$. Переставим для удобства номера переменных $t_1, t_2, \dots, t_d$ и точно таким же образом номера переменных $x_1, x_2, \dots, x_d$ с тем, чтобы выполнялись равенства $B_7 \cup B_9 = \{1, \dots, d_0\}$ и, следовательно, $B_2 \cup B_4 \cup B_8 \cup B_{10} = \{d_0+1, \dots, d\}$. Положим

$$Q_k(t_{d_0+1}, \dots, t_d) = \prod_{j \in B_2} \left(-\widetilde{R}_{n_k^j}(t_j)\right)_{[-\pi,\pi)} \prod_{j \in B_4} (R_{n_k^j}(t_j))_{[-\pi,\pi)}$$
$$\times \prod_{j \in B_8} \left(-\widetilde{D}^*_{\alpha_j m_k}(t_j)\right)_{\mathbb{R}\backslash[-\pi,\pi)} \prod_{j \in B_{10}} (D^*_{\alpha_j m_k}(t_j))_{\mathbb{R}\backslash[-\pi,\pi)}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что функции Q_k ограничены в совокупности некоторой константой C_{13}, зависящей лишь от d и от исходной последовательности $\{\mathbf{n}_k\}$.

Если G такое, что $B_7 \cup B_9 = \{1, \dots, d\}$, т. е. $d_0 = d$ и $Q_k \equiv 1$, $k \in \mathbb{N}$, то выражение (4.4), согласно обозначениям разд. 3 и леммы 4, есть $S^*_{k,B_7}(f, \mathbf{x})$. Поэтому в силу леммы 4, примененной к функции $f_1(\mathbf{x})$, мера множества тех $\mathbf{x} \in [-\pi,\pi)^d$, для которых верхняя грань по k модулей выражений (4.4) больше, чем y, не превосходит

$$\frac{K_d}{y}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi_d(|f_1(\mathbf{x})|) d\mathbf{x} + 1\right) = \frac{K_d}{y}\left(2^d \int\limits_{[-\pi,\pi)^d} \varphi_d(|f(\mathbf{x})|) d\mathbf{x} + 1\right),$$

где φ_d определяется равенством (3.2).

Если же G таково, что $d_0 < d$, то выражение (4.4) примет вид

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{d-d_0}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{d_0}} \prod_{j \in B_7} \left(-\widetilde{D}^*_{\alpha_j m_k}(t_j)\right) \prod_{j \in B_9} D^*_{\alpha_j m_k}(t_j) f_1(x_1+t_1, \dots, x_d+t_d) dt_1 \dots dt_{d_0} \right)$$

$$\times Q_k(t_{d_0+1},\dots,t_d)\,dt_{d_0+1}\dots dt_d = S_k^G(f_1,\mathbf{x}).$$

Используя обозначения разд. 3 при $d=d_0$ и учитывая, что носитель рассматриваемой здесь функции f_1 содержится в кубе $[-2\pi,2\pi)^d$, для $\mathbf{x}\in[-\pi,\pi)^d$ имеем

$$S_k^G(f_1,\mathbf{x})$$

$$= \int\limits_{[-4\pi,4\pi)^{d-d_0}} Q_k(t_{d_0+1},\dots,t_d) S^*_{k,B_7}\Big(f_1(\cdot,\dots,\cdot,t_{d_0+1}+x_{d_0+1},\dots,t_d+x_d),(x_1,\dots,x_{d_0})\Big)dt_{d_0+1}\dots dt_d. \tag{4.5}$$

Если $f_1\in\varphi_d(L)(\mathbb{R}^d)$, то в силу ограниченности носителя функции f_1 имеем $f_1\in\widetilde{\varphi}_d(L)(\mathbb{R}^d)$, где $\widetilde{\varphi}_d$ взято из формулировки леммы 5. Следовательно, при почти всех фиксированных $(t_{d_0+1},\dots,t_d)\in[-4\pi,4\pi)^{d-d_0}$ функция $f_1(\cdot,\dots,\cdot,t_{d_0+1},\dots,t_d)$ принадлежит $\widetilde{\varphi}_d(L)(\mathbb{R}^{d_0})\subset\widetilde{\varphi}_{d_0+1}(L)(\mathbb{R}^{d_0})$, откуда в силу леммы 5 следует, что мажоранта

$$\sup_{k\geqslant 1}\Big|S^*_{k,B_7}\Big(f_1(\cdot,\dots,\cdot,t_{d_0+1},\dots,t_d),(x_1,\dots,x_{d_0})\Big)\Big|$$

суммируема на $[-\pi,\pi)^{d_0}$ и

$$\int\limits_{[-\pi,\pi)^{d_0}}\sup_{k\geqslant 1}\Big|S^*_{k,B_7}\Big(f_1(\cdot,\dots,\cdot,t_{d_0+1},\dots,t_d),(x_1,\dots,x_{d_0})\Big)\Big|\,dx_1\dots dx_{d_0}$$

$$\leqslant \overline{K}_{d_0}\bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{d_0}}\widetilde{\varphi}_{d_0+1}\Big(\big|f_1(t_1,\dots,dt_{d_0},dt_{d_0+1},\dots,t_d)\big|\Big)dt_1\dots dt_{d_0}+1\bigg)$$

$$\leqslant \overline{K}_{d_0}\bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{d_0}}\widetilde{\varphi}_{d}\Big(\big|f_1(t_1,\dots,dt_{d_0},dt_{d_0+1},\dots,t_d)\big|\Big)dt_1\dots dt_{d_0}+1\bigg).$$

Отсюда и из (4.5), учитывая ограниченность функций Q_k, получаем

$$\int\limits_{[-\pi,\pi)^d}\sup_{k\geqslant 1}|S_k^G(f_1,\mathbf{x})|d\mathbf{x}\leqslant\int\limits_{[-\pi,\pi)^{d-d_0}}\bigg(\int\limits_{[-4\pi,4\pi)^{d-d_0}}C_{13}\bigg(\int\limits_{[-\pi,\pi)^{d_0}}\sup_{k\geqslant 1}\Big|S^*_{k,B_7}\Big(f_1(\cdot,\dots,\cdot,t_{d_0+1}$$

$$+x_{d_0+1},\dots,t_d+x_d),(x_1,\dots,x_{d_0})\Big)\Big|dx_1\dots dx_{d_0}\bigg)dt_{d_0+1}\dots dt_d\bigg)dx_{d_0+1}\dots dx_d$$

$$\leqslant C_{14}\int\limits_{[-\pi,\pi)^{d-d_0}}\bigg(\int\limits_{[-4\pi,4\pi)^{d-d_0}}\bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{d_0}}\varphi_d\Big(\Big|f_1(t_1,\dots,t_{d_0},t_{d_0+1}$$

$$+x_{d_0+1},\dots,t_d+x_d)\Big|\Big)dt_1\dots dt_{d_0}+1\bigg)dt_{d_0+1}\dots dt_d\bigg)dx_{d_0+1}\dots dx_d$$

$$=C_{15}\bigg(\int\limits_{[-\pi,\pi)^d}\varphi_d\big(\big|f(t_1,\dots,t_d)\big|\big)dt_1\dots dt_d+1\bigg),$$

откуда

$$\mathrm{m}\Big\{\mathbf{x}\in[-\pi,\pi)^d\colon\ \sup_{k\geqslant 1}|S_k^G(f_1,\mathbf{x})|>y\Big\}\leqslant\frac{C_{15}}{y}\bigg(\int\limits_{[-\pi,\pi)^d}\varphi_d(|f(\mathbf{t})|)d\mathbf{t}+1\bigg).$$

Объединяя все такие оценки для выражений вида (4.4) из сумм (4.3), т. е. из выражений вида (4.2), получаем

$$\mathrm{m}\Big\{\mathbf{x}\in[-\pi,\pi)^d\colon \sup_{k\in\mathbb{N}}\Big|\widetilde{S}_{\mathbf{n}_k,B}(f,\mathbf{x})\Big|>y\Big\}\leqslant\frac{C_{16}}{y}\bigg(\int\limits_{[-\pi,\pi)^d}\varphi(|f(\mathbf{x})|)\Big(\ln^+(|f(\mathbf{x})|)\Big)^{d-1}d\mathbf{x}+1\bigg).$$

Отсюда стандартным способом (см., например, [9, лемма 3]) получается, что $\widetilde{S}_{\mathbf{n}_k,B}(f,\mathbf{x})$, а значит, и $S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x})=\widetilde{S}_{\mathbf{n}_k,\varnothing}(f,\mathbf{x})$ сходятся почти всюду.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Carleson L.** On convergence and growth of partial sums of Fourier series // Acta math. 1966. Vol. 116, no. 1–2. P. 135–157.
2. **Hunt R.A.** On the convergence of Fourier series // Orthogonal expansions and their continuous analogues. Proc. conf. Edwardsville, Ill., 1967. Carbondale, Illinois: SIU Press, 1968. P. 235–255.
3. **Sjölin P.** An inequality of Paley and convergence a.e. of Walsh–Fourier series // Ark. Mat. 1969. Vol. 7, no. 6. P. 551–570.
4. **Antonov N.Yu.** Convergence of Fourier series // East J. Approx. 1996. Vol. 2, no. 2. P. 187–196.
5. **Конягин С.В.** О расходимости всюду тригонометрических рядов Фурье // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 1. С. 103–126.
6. **Тевзадзе Н.Р.** О сходимости двойного ряда Фурье функции, суммируемой с квадратом // Сообщ. АН ГССР. 1970. Т. 58, № 2. С. 277–279.
7. **Fefferman C.** On the convergence of multiple Fourier series // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 77, no. 5. P. 744–745.
8. **Sjölin P.** Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series // Ark. Mat. 1971. Vol. 9, no. 1. P. 65–90.
9. **Антонов Н.Ю.** О сходимости почти всюду по кубам кратных тригонометрических рядов Фурье // Изв. РАН. Сер. мат. 2004. Т. 68, № 2. С. 3–22.
10. **Konyagin S.V.** On divergence of trigonometric Fourier series over cubes // Acta Sci. Math. 1995. Vol. 61. P. 305–329.
11. **Антонов Н.Ю.** О скорости роста последовательностей кратных прямоугольных сумм Фурье // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 10–29.
12. **Кашин Б.С., Саакян А.А.** Ортогональные ряды. М.: Изд-во Науч.-исслед. актуарно-финанс. центра, 1999. 560 с.
13. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: в 2 т. М.: Мир, 1965. Т. 1. 616 с. Т. 2. 538 с.
14. **Stein E.M.** On limits of sequences of operators // Ann. Math. 1961. Vol. 74, no. 1. P. 140–170.

Антонов Николай Юрьевич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: Nikolai.Antonov@imm.uran.ru

Поступила 5.05.2008

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14 № 3 2008

УДК 517.51

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ИНТЕРВАЛА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

А. Г. Бабенко[1], **Ю. В. Крякин**[2]

Доказано, что величина $E_{n-1}(\chi_h)_L$ наилучшего интегрального приближения на периоде $[-\pi,\pi)$ характеристической функции χ_h интервала $(-h,h)$ тригонометрическими полиномами степени не выше $n-1$ выражается через нули функции Бернштейна $\cos\left\{[nt-\arccos 2q-(1+q^2)\cos t]/(1+q^2-2q\cos t)\right\}$, $t\in[0,\pi]$, $q\in(-1,1)$. При этом параметры q,h,n связаны между собой специальным образом, в частности $q=\sec h-\operatorname{tg} h$ при $h=\pi/n$.

Ключевые слова: интегральное и равномерное приближение функций полиномами, канонические наборы.

Введение

Данная статья и предыдущая работа авторов [2] инициированы, на первый взгляд, простым вопросом: *“Чему равно наилучшее приближение в L характеристической функции интервала $(-\pi/n,\pi/n)$ тригонометрическими полиномами степени $n-1$ на периоде*[3] $\mathbb{T}=[-\pi,\pi)$*?”*. Ответ оказался нетривиальным, он сформулирован в разд. 5 (см. формулу (5.9), а также формулу (5.1) и утверждение (3) теоремы 6) в терминах первых двух нулей функции Бернштейна $\mathcal{B}(t)=\mathcal{B}(t,q,0)$, определенной формулами (3.6)–(3.8), со значением $q=\sec(\pi/n)-\operatorname{tg}(\pi/n)$.

В работе [2] получены оценки сверху для $E_{n-1}(\chi_h)_L$ при $0<h\le\pi$ и доказана их точность, когда h есть любой нуль функции $\cos nt$ из $(0,\pi)$. Случай произвольного h привел нас к вопросу о сигнум-функциях, ортогональных подпространству $\mathcal{T}_{n-1}$ тригонометрических полиномов степени не выше $n-1$. Ответ на этот вопрос является ключевым при решении задачи о точном значении величины $E_{n-1}(\chi_h)_L$ при $0<h<\pi$. После того как основной результат (теорема 5) был получен, нам стало известно, что тригонометрические полиномы, нули которых дают описание нужного класса сигнум-функций (см. теорему 4 и замеч. 1), возникли в исследованиях Я. Л. Геронимуса [6, 7, 23, 24] и Ф. Пейерсторфера [26, 27]. В разд. 4 мы приводим свое (элементарное) доказательство теоремы 4, которое, как нам кажется, имеет самостоятельный интерес и в идейном плане близко к доказательству А. Н. Коркина и Е. И. Золотарева (1873, [12, ст. 8]) результата о наилучшем интегральном приближении на $[-1,1]$ функции x^n подпространством $\mathcal{P}_{n-1}$ многочленов степени не выше $n-1$. Методы Коркина — Золотарева были развиты в работах В. Э. Гейта (см. библиографию в его статье [5]). Использование теоремы 4 как инструмента для вычисления $E_{n-1}(\chi_h)_L$ при всех $h\in(0,\pi)$ приводится в разд. 5.

Краткая история вопроса приближения индивидуальных функций в интегральной метрике содержится в [2]. В дополнение приведем еще несколько известных фактов, имеющих непосредственное отношение к теме данной статьи, делая акцент на результаты, относящиеся к приближению ступенчатых функций.

[1]Исследования первого автора поддержаны РФФИ (проект 08-01-00213), Интеграционным проектом фундаментальных научных исследований, выполняемых в УрО РАН совместно с учеными СО РАН, и Программой государственной поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-1071.2008.1).

[2]Исследования второго автора поддержаны правительством Польши (проект 201 016 31/1206).

[3]Период $\mathbb{T}=\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ удобно интерпретировать как окружность единичного радиуса или как полуинтервал $[\alpha,\alpha+2\pi)$ с отождествленными концами; часто полагают $\alpha=0$ или $\alpha=-\pi$.

В 1853 г. П. Л. Чебышев [18] решил задачу наилучшего равномерного приближения на отрезке функции x^n подпространством $\mathcal{P}_{n-1}$. Е. И. Золотарев (1868, см. [10, задача I]) исследовал задачу равномерного приближения на $[-1,1]$ функции $x^n - qx^{n-1}$, $q \in \mathbb{R}$, подпространством $\mathcal{P}_{n-2}$. Он также решил задачу (1877, [10, задача IV]), которая, как утверждается в [1, дополнения и задачи, задача 35], в существенном совпадает с такой задачей: *из всех дробей вида* φ/ψ, *где* $\varphi, \psi \in \mathcal{P}_n$, *найти ту, которая наименее уклоняется от функции* $\operatorname{sign} x$ *на множестве* $[-1,-a] \cup [a,1]$ $\quad(0 < a < 1)$ *в равномерной метрике.* Недавно полиномиальный аналог этой задачи ($\psi \equiv 1$) был рассмотрен в [22].

В работе Дж. Ваалера [28] приводятся точные результаты А. Берлинга 1930-х гг., А. Сельберга (1974) и самого автора по интегральному (в том числе одностороннему) приближению целыми функциями на $\mathbb{R}$ ступенчатых функций $\operatorname{sign} x$ и характеристической функции интервала, а также их приложения — короткие доказательства известных результатов теории чисел, которые установили ранее Х. Монтгомери, Р. Ваугхан, П. Эрдеш, П. Туран и др.

Точные результаты по L-аппроксимации характеристической функции сферической шапки на многомерной евклидовой сфере многочленами степени не выше заданной по совокупности переменных получены недавно М. В. Дейкаловой [9].

1. Обозначения и определения

Мы используем следующие обозначения:

$L = L(\mathbb{T})$ — пространство 2π-периодических интегрируемых по Лебегу функций $f\colon\ \mathbb{T} \mapsto \mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_L = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,dt$;

$C_{2\pi} = C(\mathbb{T})$ — пространство непрерывных 2π-периодических функций $f\colon\ \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ с равномерной нормой $\|f\|_{C_{2\pi}} = \max\{|f(t)| :\ t \in \mathbb{T}\}$;

$L_\infty = L_\infty(\mathbb{T})$ — пространство 2π-периодических измеримых существенно ограниченных на $\mathbb{T}$ функций $f\colon\ \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_{L_\infty} = \operatorname{ess\,sup}\{|f(t)| :\ t \in \mathbb{T}\}$;

$\mathcal{T}_n$ — подпространство тригонометрических полиномов $g(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ степени не выше n с вещественными коэффициентами;

$\mathcal{P}_n$ — подпространство алгебраических многочленов $p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ степени не выше n $(\deg p \le n)$ с вещественными коэффициентами;

$\mathcal{T}_{n-1}^{\perp}$ — множество функций $\varphi \in L$, ортогональных подпространству $\mathcal{T}_{n-1}$, т. е. множество таких функций $\varphi \in L$, для которых $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\,g(t)\,dt = 0$ при всех $g \in \mathcal{T}_{n-1}$;

$E_{n-1}(f)_L = \min\{\|f-g\|_L :\ g \in \mathcal{T}_{n-1}\}$ — величина наилучшего интегрального приближения функции $f \in L$ подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$.

Ниже приводятся определения, которые несколько отличаются от используемых в [27, определение 2], [21, гл. 3, § 10, (10.7)].

Определение 1. Пусть $\{t_j\}_{j=1}^{r}$ — набор из r попарно различных точек $t_1 < t_2 < \cdots < t_r$ из полуинтервала $[t_1, t_1+2\pi)$. Функцию $\sigma(t) = \varepsilon\sum_{j=1}^{r}(-1)^j \chi_{(t_j,t_{j+1})}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, называют *сигнум-функцией*, отвечающей набору $\{t_j\}_{j=1}^{r}$; здесь $\varepsilon = \pm 1$, $t_{r+1} = t_1 + 2\pi$, $\chi_{(t_j,t_{j+1})}$ — 2π-периодическое продолжение на $\mathbb{R}$ характеристической функции интервала (t_j, t_{j+1}).

Определение 2. Если набору $\{t_j\}_{j=1}^{r}$ точек из определения 1 отвечает сигнум-функция σ, принадлежащая $\mathcal{T}_{n-1}^{\perp}$, т. е. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sigma(t)\,g(t)\,dt = 0$ при всех $g \in \mathcal{T}_{n-1}$, то этот набор точек называется *каноническим* для $\mathcal{T}_{n-1}$.

2. Несколько общих утверждений из теории L-аппроксимации

В 1898 г. А. А. Марков доказал [13, ст. 9], что при любом фиксированном $\theta \in \mathbb{R}$ набор нулей функции $\cos(nt+\theta)$, расположенных на периоде $[-\pi,\pi)$, является каноническим для $\mathcal{T}_{n-1}$, т. е.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sign}\{\cos(nt+\theta)\}\, g(t)\, dt = 0 \quad \text{при всех} \quad g \in \mathcal{T}_{n-1}. \tag{2.1}$$

Кроме того, в той же статье он установил, что задача построения канонических наборов для $\mathcal{T}_{n-1}$ тесно связана с задачей интегрального приближения функций из $C_{2\pi}$ подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$ на периоде (см. [1, гл. 2, п. 50], [21, гл. 3, § 10, теорема 10.5]).

Теорема 1 (А. А. Марков). *Пусть набор $\{t_j\}_{j=1}^r$ точек $t_1 < t_2 < \ldots < t_r$, где $t_r < t_1 + 2\pi$, является каноническим для $\mathcal{T}_{n-1}$. Если полином $g_0 \in \mathcal{T}_{n-1}$ интерполирует функцию f из $C_{2\pi}$ в точках t_j, $j = 1, 2, \ldots, r$, а разность $f - g_0$ меняет знак в этих точках и не имеет других точек перемен знака на любом полуинтервале $[\alpha, \alpha + 2\pi)$, содержащем набор $\{t_j\}_{j=1}^r$, то полином g_0 является полиномом наилучшего интегрального приближения для f, причем*

$$E_{n-1}(f)_L = \|f - g_0\|_L = \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sign}\{f(t) - g_0(t)\}\, dt \right|.$$

Теорема 2. *Для того чтобы полином $g_0 \in \mathcal{T}_{n-1}$ доставлял наилучшее интегральное приближение функции $f \in L$, достаточно, а в случае, когда множество точек $t \in \mathbb{T}$, в которых $f(t) = g_0(t)$, имеет меру нуль, и необходимо, чтобы функция $\operatorname{sign}[f(t) - g_0(t)]$ принадлежала множеству $\mathcal{T}_{n-1}^{\perp}$, при этом*

$$E_{n-1}(f)_L = \|f - g_0\|_L = \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sign}\{f(t) - g_0(t)\}\, dt \right|.$$

Доказательство теоремы 2 базируется на соотношениях двойственности С. М. Никольского [15, следствие 2], см. также [11, предложение 2.5.2, теорема 3.3.2].

Ф. Пейерсторфер [26, теорема 2] нашел необходимые и достаточные условия для того, чтобы набор $\{t_j\}_{j=1}^{2r}$ точек $t_1 < t_2 < \ldots < t_{2r}$ (где $t_{2r} < t_1 + 2\pi$) являлся каноническим для $\mathcal{T}_{n-1}$. Существенный вклад в эту проблематику внес Я. Л. Геронимус [6, 7, 23].

Теорема 3 (Ф. Пейерсторфер). *Пусть $r, n \in \mathbb{N}$, $r \geq n$ и $g \in \mathcal{T}_r$ — тригонометрический полином вида $g(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{r-1} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) + A \cos rt + B \sin rt$, $A^2 + B^2 > 0$. Тогда конъюнкция следующих двух условий:*

(1) *число перемен знака полинома g на периоде $\mathbb{T}$ равно $2r$,*

(2) *набор нулей $t_1 < t_2 < \ldots < t_{2r}$ полинома g на периоде $[t_1, t_1 + 2\pi)$ является каноническим для $\mathcal{T}_{n-1}$*

эквивалентна условию

(3) *существует многочлен*[4]

$$p(z) = \prod_{j=1}^{r-n} (z - z_j) \qquad (z \in \mathbb{C}, \quad z_j \in \mathbb{C}, \quad |z_j| < 1)$$

такой, что[5] $g(t) = \operatorname{Re}\left\{(A - iB) z^{2n-r} p^2(z)\right\}$ *при* $z = e^{it}$, $t \in \mathbb{T}$.

[4] Если у знака произведения нижний индекс больше верхнего, то произведение считается равным 1.

[5] $\operatorname{Re} z = x$ означает действительную часть комплексного числа $z = x + iy$, а $\operatorname{Im} z = y$ — мнимую.

Из теоремы 3 следует, что два семейства канонических для $\mathcal{T}_{n-1}$ наборов с количеством точек $2n$ и $2n+2$ характеризуются соответственно нулями функций $\cos n(t+\theta)$, $\theta\in\mathbb{R}$, и (см. 2-ю часть формулы (3.8), а также первый абзац разд. 4 и теорему 4) нулями полиномов вида $aR_{q,0}(t+\theta)+bR_{q,\pi/2}(t+\theta)$, где $a,b,\theta\in\mathbb{R}$, $a^2+b^2>0$, $q\in(-1,1)$, и полином $R_{q,\xi}$ задается формулой $R_{q,\xi}(t)=\cos[(n+1)t+\xi]-2q\cos(nt+\xi)+q^2\cos[(n-1)t+\xi]$.

В разд. 6 найдено представление полинома $R_{q,\xi}(t)$ (см. (6.16)) в терминах функции Бернштейна $\mathcal{B}(t,q,\xi)$, которое содержит в себе полезную информацию о нулях полинома $R_{q,\xi}(t)$.

3. Функция Бернштейна

В 1935 г. Я. Л. Геронимус ([23], см. [24, формула (105)]) нашел многочлен $p_q\in\mathcal{P}_{n-2}$ наилучшего интегрального приближения на $[-1,1]$ для функции x^n-qx^{n-1} при $q\in\mathbb{R}$ и тем самым решил интегральный вариант задачи[6] Е. И. Золотарева. Он нашел явную формулу для разности $G_q(x)=x^n-qx^{n-1}-p_q(x)$, в частности при $-1\le q\le 1$ справедлива формула

$$2^nG_q(\cos t)\sin t=\sin(n+1)t-2q\sin nt+q^2\sin(n-1)t. \tag{3.1}$$

Этот результат связан (см. сноску 8 на с. 23) с результатами С. Н. Бернштейна 1912–1913 гг. [3, ст. 7–9] о приближении простейшей дроби $f_a(x)=1/(x-a)$, $a>1$, подпространством $\mathcal{P}_n$ на $[-1,1]$ в равномерной метрике. Постановка этой задачи принадлежит П. Л. Чебышеву (1892) [19]. Величину наилучшего равномерного приближения

$$E_n(f_a)_{C[-1,1]}=\inf_{p\in\mathcal{P}_n}\|f_a-p\|_{C[-1,1]} \tag{3.2}$$

функции f_a подпространством $\mathcal{P}_n$ он назвал *абсолютной погрешностью* [19]. Здесь $C[-1,1]$ — пространство непрерывных функций $f:\ [-1,1]\mapsto\mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_{C[-1,1]}=\max\{|f(x)|:\ x\in[-1,1]\}$. Сам П. Л. Чебышев в указанной работе нашел *относительную погрешность*, т. е. величину наилучшего равномерного приближения функции f_a подпространством $\mathcal{P}_n$ на отрезке $[-1,1]$ с весом[7] $1/f_a$:

$$\begin{aligned}\inf_{p\in\mathcal{P}_n}\|(f_a-p)/f_a\|_{C[-1,1]}&=\inf_{p\in\mathcal{P}_n}\|1-(x-a)p(x)\|_{C[-1,1]}\\&=\frac{2}{(a+\sqrt{a^2-1})^{n+1}+(a-\sqrt{a^2-1})^{n+1}}\end{aligned} \tag{3.3}$$

и соответствующий наилучший полином.

С. Н. Бернштейн [3, ст. 8] вычислил абсолютную погрешность (3.2)

$$E_n(f_a)_{C[-1,1]}=\frac{1}{(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n}. \tag{3.4}$$

Он нашел две формы записи для разности $\Phi_a(x)=f_a(x)-p_a(x)$ между функцией f_a и многочленом $p_a\in\mathcal{P}_n$ наилучшего равномерного приближения на $[-1,1]$, а именно, *алгебраическую*

$$\Phi_a(x)=\frac{[ax-1+s(a)s(x)]\,[x+s(x)]^n+[ax-1-s(a)s(x)]\,[x-s(x)]^n}{2s^2(a)[a+s(a)]^n(x-a)},\quad s(x)=\sqrt{x^2-1},$$

и *тригонометрическую*

$$\Phi_a(\cos t)=\frac{\cos\,[nt-\delta(t,a)]}{(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n},\qquad \delta(t,a)=\arccos\frac{1-a\cos t}{a-\cos t}.$$

[6]Этот результат был переоткрыт Э. М. Галеевым (1975) [4] с применением других подходов.

[7]Как фактически отмечает П. Л. Чебышев [19], задача (3.3) равносильна задаче об экстремальной экстраполяции полинома, исследованной им в работе 1881 г. [20]. Указанная задача сводится к задаче поиска максимально возможного значения $p(a)$ в точке $a>1$ на классе полиномов $p\in\mathcal{P}_n$, у которых равномерная норма на отрезке $[-1,1]$ ограничена единицей.

Функция $\delta(t,a)$ убывает по t на $[0,\pi]$, $\delta(0,a)=\pi$, $\delta(\pi,a)=0$. Отсюда следует, что функция $\varphi(t,a)=nt-\delta(t,a)$ возрастает по t на $[0,\pi]$, причем $\varphi(0,a)=-\pi$, $\varphi(\pi,a)=n\pi$ и разность $\Phi_a(x)=f_a(x)-p_a(x)$ имеет $(n+2)$-точечный альтернанс на $[-1,1]$. Поэтому (см. [14, гл. 2, § 2]) p_a является многочленом наилучшего равномерного приближения функции f_a на $[-1,1]$.

Пусть $t\in[0,\pi]$, $n\in\mathbb{N}$, $a\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, $\xi\in\mathbb{R}$. Функцию

$$B(t,a,\xi)=\cos\left[nt-\delta(t,a)+\xi\right], \qquad \delta(t,a)=\arccos\frac{1-a\cos t}{a-\cos t}, \tag{3.5}$$

назовем *функцией Бернштейна*. Для числа $a\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ найдется единственное число $q\in(-1,0)\cup(0,1)$ такое, что $a=(q+1/q)/2$. В разд. 6 показано, что в терминах параметра $q\in(-1,1)$ функция Бернштейна имеет вид

$$B(t,a,\xi)=\mathcal{B}(t,q,\xi)=\cos\left[nt-\lambda(t,q)+\xi\right]=\frac{R_{q,\xi}(t)}{2q\cos t-(1+q^2)}, \qquad t\in[0,\pi], \tag{3.6}$$

где

$$\delta(t,a)=\lambda(t,q)=\arccos\frac{2q-(1+q^2)\cos t}{1+q^2-2q\cos t}, \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} R_{q,\xi}(t)&=\cos[(n+1)t+\xi]-2q\cos(nt+\xi)+q^2\cos[(n-1)t+\xi]\\ &=\left\{\cos(n+1)t-2q\cos nt+q^2\cos(n-1)t\right\}\cos\xi\\ &-\left\{\sin(n+1)t-2q\sin nt+q^2\sin(n-1)t\right\}\sin\xi. \end{aligned} \tag{3.8}$$

На (3.6) можно смотреть как на представление полинома $R_{q,\xi}$ через функцию Бернштейна на $[0,\pi]$. Доказательство этого представления, а также аналогичного представления на $[-\pi,0]$ приведено в разд. 6 (см. формулу (6.16)). В указанном разделе изучаются свойства функции (3.6), связанные с ее нулями и точками альтернанса. В частности, доказана теорема 10, из которой следует, что нули синус-полинома Геронимуса (3.1), расположенные в $(0,\pi)$, совпадают[8] с точками альтернанса функции $\mathcal{B}(t)=\mathcal{B}(t,q,0)$.

4. Одно семейство сигнум-функций

Сопоставим тройке чисел $n\in\mathbb{N}$, $\xi\in\mathbb{R}$, $q\in(-1,1)$ многочлен

$$Q_{q,\xi}(z)=e^{i\xi}\left(z^{n+1}-2qz^n+q^2z^{n-1}\right)=e^{i\xi}z^{n-1}(z-q)^2.$$

Вещественная часть этого многочлена при $z=e^{it}$ совпадает с полиномом $R_{q,\xi}(t)$ (3.8), т. е. $\operatorname{Re}\left\{Q_{q,\xi}\left(e^{it}\right)\right\}=R_{q,\xi}(t)=\cos[(n+1)t+\xi]-2q\cos(nt+\xi)+q^2\cos[(n-1)t+\xi]$.

При $r=n+1$, $n\in\mathbb{N}$, $A-iB=e^{i\xi}$, $p(z)=z-q$ из теоремы 3 вытекает

Теорема 4 (А. А. Марков, Я. Л. Геронимус, Ф. Пейерсторфер). *При любых $n\in\mathbb{N}$, $q\in[-1,1]$, $\xi\in\mathbb{R}$ выполняется соотношение*

$$\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sign}\left\{R_{q,\xi}(t)\right\}g(t)\,dt=0 \quad \text{для любого полинома} \quad g\in\mathcal{T}_{n-1}; \tag{4.1}$$

следовательно, $R_{q,\xi}$ не приближается подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$ в метрике пространства L, т. е. $E_{n-1}(R_{q,\xi})_L=\|R_{q,\xi}\|_L$.

[8] Этот вывод следует также из леммы 3 статьи [27] и результатов п. 4.3 § 4 гл. 1 монографии [25].

З а м е ч а н и е 1. При $q = 0$ и $q = \pm 1$ теорема 4 сводится к утверждению об ортогональности соответственно $\operatorname{sign}\{\cos(n+1)t\}$ и $\operatorname{sign}\{\cos nt\}$ подпространству $\mathcal{T}_{n-1}$ (А. А. Марков, см. формулу (2.1) выше). При $-1 < q < 1$ утверждение теоремы 4 в случае $\xi = -\pi/2$ было получено Я. Л. Геронимусом, а в общем случае — Ф. Пейерсторфером.

Ниже мы приводим свое доказательство теоремы 4, основанное на теореме Виета, рекуррентных формулах Ньютона и формуле Эйлера.

Обозначим через $\mathbb{S} = \{z = e^{it} : \ t \in \mathbb{T}\}$ единичную окружность комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Лемма 1. *При $q \in (-1, 1)$, $\xi \in \mathbb{R}$ полином $R_{q,\xi}$ имеет $2n + 2$ различных нуля на $\mathbb{T}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полином $R_{q,\xi}(t)$ совпадает с $\operatorname{Re}\{Q_{q,\xi}\left(e^{it}\right)\}$. Все нули многочлена $Q_{q,\xi}(z)$ лежат внутри единичного круга. Согласно принципу аргумента [17, гл. 1, теорема 1.91.1] если z пробегает $\mathbb{S}$, то $Q_{q,\xi}(z)$ делает $n + 1$ оборот вокруг нуля и, следовательно, пересекает мнимую ось $2n + 2$ раза, а полином $R_{q,\xi}(t)$ имеет соответственно $2n + 2$ нуля на $\mathbb{T}$. □

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 4. Можно предполагать, что $0 \le q \le 1$, так как случай $-1 \le q \le 0$ сводится к случаю $0 \le q \le 1$ с помощью замены t на $\pi - t$. При $q = 0$ и $q = 1$ утверждение (4.1) справедливо (см. замеч. 1), поскольку $R_{0,\xi}(t) = \cos[(n + 1)t + \xi]$, $R_{1,\xi}(t) = 2(\cos t - 1)\cos(nt + \xi)$. Осталось рассмотреть случай $0 < q < 1$.

В силу леммы 1 полином $R_{q,\xi}(t)$ имеет на $[t_1, t_1 + 2\pi)$ ровно $2n + 2$ попарно различных нуля $t_1 < t_2 < \ldots < t_{2n+2}$. Утверждение (4.1) теоремы 4 равносильно каждому из следующих четырех утверждений:

$$\int\limits_{t_1}^{t_{2n+3}} \operatorname{sign}\{R_{q,\xi}(t)\}\, e^{ikt}\, dt = 0 \quad \text{при} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \quad \text{где} \quad t_{2n+3} = t_1 + 2\pi;$$

$$\sum_{\nu=1}^{2n+2} (-1)^{\nu} \int\limits_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} e^{ikt}\, dt = 0 \quad \text{при} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1;$$

$$\sum_{\nu=1}^{2n+2} (-1)^{\nu} \{t_{\nu+1} - t_\nu\} = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{2n+2} (-1)^{\nu} \left\{e^{ikt_{\nu+1}} - e^{ikt_\nu}\right\} = 0 \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1;$$

$$\pi + \sum_{j=1}^{n+1} t_{2j-1} - \sum_{j=1}^{n+1} t_{2j} = 0, \quad \sum_{j=1}^{n+1} e^{ikt_{2j}} - \sum_{j=1}^{n+1} e^{ikt_{2j-1}} = 0 \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{4.2}$$

Для доказательства теоремы 4 достаточно установить справедливость системы равенств (4.2).

Заметим сначала, что имеют место соотношения

$$\frac{1}{2}\left|\int\limits_{t_1}^{t_{2n+3}} \operatorname{sign}\{R_{q,\xi}(t)\} dt\right| = \frac{1}{2}\left|\sum_{\nu=1}^{2n+2} (-1)^{\nu} \{t_{\nu+1} - t_\nu\}\right| = \left|\pi + \sum_{j=1}^{n+1} t_{2j-1} - \sum_{j=1}^{n+1} t_{2j}\right| < \pi. \tag{4.3}$$

Рассмотрим теперь многочлен $P(z) = P_{q,\xi}(z)$ степени $2n + 2$, все нули $z_1, z_2, \ldots, z_{2n+2}$ которого расположены на единичной окружности $\mathbb{S}$ и связаны с нулями $t_1 < t_2 < \ldots < t_{2n+2}$ полинома $R_{q,\xi}(t)$ следующим образом:

$$z_1 = e^{it_1}, \quad z_2 = e^{it_2}, \quad \ldots, \quad z_{2n+2} = e^{it_{2n+2}}. \tag{4.4}$$

С помощью формулы Эйлера получаем, что при $z = e^{it}$ многочлен $P(z)$ имеет вид

$$P(z) = P_{q,\xi}(z) = 2\varepsilon z^{n+1} R_{q,\xi}(t) = z^{2n}(z - q)^2 + \varepsilon^2 (qz - 1)^2$$

$$= [z^n(z-q)]^2 - [i\varepsilon(qz-1)]^2 = P^+(z)P^-(z), \qquad \varepsilon = e^{-i\xi}, \tag{4.5}$$

где

$$P^+(z) = P^+_{q,\xi}(z) = z^n(z-q) + i\varepsilon(qz-1) = z^{n+1} - qz^n + i\varepsilon qz - i\varepsilon, \tag{4.6}$$

$$P^-(z) = P^-_{q,\xi}(z) = z^n(z-q) - i\varepsilon(qz-1) = z^{n+1} - qz^n - i\varepsilon qz + i\varepsilon. \tag{4.7}$$

Так как множитель $2\varepsilon z^{n+1}$ не обращается в нуль на $\mathbb{S}$, то многочлен $P(z)$ в силу (4.5) обладает свойством (4.4).

Из равенств $P = P^+P^-$, $\deg P^+ = \deg P^- = n+1$ следует, что каждый из многочленов P^+, P^- имеет на $\mathbb{S}$ точно $n+1$ нуль (все нули попарно различны): $z_1^+ = e^{it_1^+}, \ldots, z_{n+1}^+ = e^{it_{n+1}^+}$; $z_1^- = e^{it_1^-}, \ldots, z_{n+1}^- = e^{it_{n+1}^-}$; других нулей в $\mathbb{C}$ у них нет. При этом справедливы соотношения $\{z_1, z_2, \ldots, z_{2n+2}\} = \left\{z_1^+, z_2^+, \ldots, z_{n+1}^+\right\} \cup \left\{z_1^-, z_2^-, \ldots, z_{n+1}^-\right\}$, $\{t_1, t_2, \ldots, t_{2n+2}\} = \left\{t_1^+, t_2^+, \ldots, t_{n+1}^+\right\} \cup \left\{t_1^-, t_2^-, \ldots, t_{n+1}^-\right\}$.

Для того чтобы понять структуру взаимного расположения нулей многочленов P, P^+, P^-, рассмотрим случай $q = 0$. В этом случае имеем $P(z) = z^{2n+2} + \varepsilon^2 = z^{2n+2} + e^{-i2\xi}$. Отсюда получаем $z_\nu^{2(n+1)} = e^{i2(n+1)t_\nu} = -e^{i2\nu\pi}e^{-i2\xi} = e^{i(2\nu-1)\pi}e^{-i2\xi} = e^{i[(2\nu-1)\pi - 2\xi]}$. Следовательно, нули многочлена $P(z) = P_{0,\xi}(z)$ имеют вид

$$z_\nu = e^{it_\nu}, \qquad t_\nu = \frac{(2\nu-1)\pi}{2(n+1)} - \frac{\xi}{n+1}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, 2n+2.$$

Найдем нули многочлена $P^+_{0,\xi}(z) = z^{n+1} - i\varepsilon = z^{n+1} - ie^{-i\xi} = z^{n+1} - e^{i\pi/2}e^{-i\xi} = z^{n+1} - e^{i(\pi/2-\xi)}$. Имеем $(z_\nu^+)^{n+1} = e^{i(n+1)t_\nu^+} = e^{i2(\nu-1)\pi}e^{i(\pi/2-\xi)} = e^{i[2(\nu-1)\pi + \pi/2 - \xi]} = e^{i[(4\nu-3)/2\pi - \xi]}$, т. е.

$$z_\nu^+ = e^{it_\nu^+}, \qquad t_\nu^+ = \frac{(4\nu-3)\pi}{2(n+1)} - \frac{\xi}{n+1} = t_{2\nu-1}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Так как набор нулей многочлена $P = P_{0,\xi}$ с нечетными номерами совпадает с набором нулей многочлена $P^+ = P^+_{0,\xi}$, то и набор нулей многочлена $P = P_{0,\xi}$ с четными номерами совпадет с набором нулей многочлена $P^- = P^-_{0,\xi}$, т. е. имеем

$$z_\nu^+ = e^{it_\nu^+} = z_{2\nu-1}, \qquad t_\nu^+ = t_{2\nu-1}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n+1; \tag{4.8}$$

$$z_\nu^- = e^{it_\nu^-} = z_{2\nu}, \qquad t_\nu^- = t_{2\nu}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n+1. \tag{4.9}$$

Таким образом, при $q = 0$ структура взаимного расположения нулей многочленов P, P^+, P^- ясна. В частности, для нулей многочленов P^+, P^- имеет место свойство перемежаемости.

Свойства (4.8), (4.9) останутся справедливыми и в случае произвольного $q \in (0,1)$. Действительно, рассмотрим, например, свойство перемежаемости. Если бы для какого-то значения $\widehat{q} \in (0,1)$ свойство перемежаемости нарушилось, то в силу непрерывной зависимости нулей от параметра q нашлось бы $q^* \in (0, \widehat{q}]$, при котором некоторый нуль многочлена $P^-_{q^*,\xi}$ совпал бы с некоторым нулем многочлена $P^+_{q^*,\xi}$. Но тогда количество различных нулей многочлена $P_{q^*,\xi}$ не превзойдет $2n+1$, что противоречит лемме 1, в силу которой полином $R_{q^*,\xi}(t)$, а значит, и $P_{q^*,\xi}$ имеют по $2n+2$ различных нуля. Следовательно, для нулей многочленов $P = P_{q,\xi}$, $P^+ = P^+_{q,\xi}$, $P^- = P^-_{q,\xi}$ равенства (4.8), (4.9) остаются справедливыми при всех $0 < q < 1$.

Применив теорему Виета для $P^+(z) = z^{n+1} - qz^n + i\varepsilon qz - i\varepsilon$, с учетом (4.8) получим

$$-i\varepsilon = -e^{i\pi/2}e^{-i\xi} = e^{-i\pi/2}e^{-i\xi} = e^{-i(\pi/2+\xi)} = (-1)^{n+1}\prod_{\nu=1}^{n+1} z_\nu^+ = e^{-i(n+1)\pi}\prod_{\nu=1}^{n+1} z_{2\nu-1}$$

$$= e^{-i(n+1)\pi}\prod_{\nu=1}^{n+1} e^{it_{2\nu-1}} = \exp\left\{i\left[-(n+1)\pi + \sum_{\nu=1}^{n+1} t_{2\nu-1}\right]\right\}.$$

Отсюда следует равенство

$$-\frac{\pi}{2}-\xi=-(n+1)\pi+\sum_{\nu=1}^{n+1}t_{2\nu-1}+2\pi\ell_1, \tag{4.10}$$

где ℓ_1 — некоторое целое число.

Аналогично, применив теорему Виета для $P^-(z)=z^{n+1}-qz^n-i\varepsilon qz+i\varepsilon$, придем с учетом (4.9) к равенству

$$\frac{\pi}{2}-\xi=-(n+1)\pi+\sum_{\nu=1}^{n+1}t_{2\nu}+2\pi\ell_2, \qquad \ell_2\in\mathbb{Z}. \tag{4.11}$$

Вычитая из (4.10) равенство (4.11), получаем равенство

$$\pi+\sum_{\nu=1}^{n+1}t_{2\nu-1}-\sum_{\nu=1}^{n+1}t_{2\nu}=2\pi(\ell_2-\ell_1). \tag{4.12}$$

Из (4.3) следует, что (4.12) выполняется только при $\ell_2-\ell_1=0$, т. е. первое равенство в (4.2) доказано.

Введем обозначения сумм k-х степеней нулей

$$s_k^+=\sum_{\nu=1}^{n+1}(z_\nu^+)^k=\sum_{\nu=1}^{n+1}e^{ikt_{2\nu-1}}, \qquad s_k^-=\sum_{\nu=1}^{n+1}(z_\nu^-)^k=\sum_{\nu=1}^{n+1}e^{ikt_{2\nu}}, \qquad k=1,\dots,n-1, \tag{4.13}$$

многочленов

$$P^+(z)=z^{n+1}+\sum_{\ell=1}^{n+1}a_\ell^+z^{n+1-\ell}=z^{n+1}-qz^n+i\varepsilon qz-i\varepsilon,$$

$$P^-(z)=z^{n+1}+\sum_{\ell=1}^{n+1}a_\ell^-z^{n+1-\ell}=z^{n+1}-qz^n-i\varepsilon qz+i\varepsilon$$

соответственно.

Для доказательства остальных равенств в (4.2) применим рекуррентные формулы Ньютона (см. [8, § 90])

$$s_1^++a_1^+=0, \qquad s_2^++a_1^+s_1^++2a_2^+=0, \qquad s_3^++a_1^+s_2^++a_2^+s_1^++3a_3^+=0, \ \dots$$

$$\dots, \ s_{n-1}^++a_1^+s_{n-2}^++a_2^+s_{n-3}^++\dots+a_{n-2}^+s_1^++(n-1)a_{n-1}^+=0,$$

которые позволяют выразить s_k^+ при $k=1,2,\dots,n-1$ через коэффициенты многочлена P_q^+: $a_1^+=-q$, $a_2^+=0$, $\dots$, $a_{n-1}^+=0$. В результате получаем, что $s_k^+=q^k$, $k=1,2,\dots,n-1$.

Точно так же найдем, что $s_k^-=q^k$ при $k=1,2,\dots,n-1$. Следовательно, $s_k^--s_k^+=0$ при $k=1,2,\dots,n-1$, что с учетом обозначения (4.13) и есть доказываемые равенства (4.2). $\square$

З а м е ч а н и е 2. Из формул (4.6), (4.7) следует тождество

$$\left|P_{q,\xi}^+(e^{it})\right|^2+\left|P_{q,\xi}^-(e^{it})\right|^2=4\left(1+q^2-2q\cos t\right) \qquad (t\in\mathbb{T}, \quad \xi\in\mathbb{R}, \quad q\in(-1,1), \quad n\in\mathbb{N}),$$

которое является периодическим аналогом соответствующих утверждений, установленных в [12, ст. 8, п. 9] и развитых в [5, лемма 1].

5. L-приближение функции χ_h тригонометрическими полиномами

Числу $h \in (0,\pi]$ сопоставим характеристическую функцию

$$\chi_h(t) = \chi_{(-h,h)}(t) = \begin{cases} 1, & |t| < h, \\ 0, & h \le |t| \le \pi \end{cases}$$

интервала $(-h,h)$, периодически продолженную на $\mathbb{R}$ с периодом 2π.

В данном разделе рассматривается задача вычисления величины $E_{n-1}(\chi_h)_L$ наилучшего интегрального приближения на периоде $\mathbb{T} = [-\pi,\pi)$ функции χ_h подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$. Иногда мы будем использовать некоторые утверждения, доказанные в приложении (разд. 6).

Для краткости обозначим величину $E_{n-1}(\chi_h)_L$ через $\mathfrak{I}_n(h)$, т. е. положим

$$\mathfrak{I}_n(h) = E_{n-1}(\chi_h)_L \qquad \text{при} \qquad h \in (0,\pi). \tag{5.1}$$

Из равенства $1-\chi_h(t) = \chi_{\pi-h}(\pi - t)$ следует, что

$$\mathfrak{I}_n(\pi - h) = \mathfrak{I}_n(h) \qquad \text{при} \qquad h \in (0,\pi). \tag{5.2}$$

В работе [2, теорема 1.3.1] доказаны утверждения, равносильные следующим:

$$\mathfrak{I}_n(h) = 2h \qquad \text{при} \qquad 0 < h \le \frac{\pi}{2n}, \qquad n \ge 1, \tag{5.3}$$

$$\mathfrak{I}_n(h) \le \frac{\pi}{n} \qquad \text{при} \qquad 0 < h \le \pi, \qquad n \ge 1, \tag{5.4}$$

причем неравенство (5.4) обращается в равенство, когда h совпадает с любым нулем полинома $\cos nt$ из интервала $(0,\pi)$, т. е. при $h = h_j = (2j-1)\pi/(2n)$, $j \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Пусть $-1 < q < 1$ и $t_j = t_j(q) \in (0,\pi)$ $(j = 1,2,\ldots,n+1)$ — нули полинома[9]

$$R_q(t) = R_{q,0}(t) = \cos(n+1)t - 2q\cos nt + q^2\cos(n-1)t, \tag{5.5}$$

занумерованные в порядке возрастания. Согласно формуле (6.16) при $\xi = 0$ справедливо следующее представление полинома $R_q(t)$ на отрезке $t \in [0,\pi]$:

$$R_q(t) = \{2q\cos t - (1+q^2)\}\cos\left[nt - \lambda(t,q)\right], \qquad \lambda(t,q) = \arccos\frac{2q-(1+q^2)\cos t}{1+q^2-2q\cos t}, \tag{5.6}$$

которое несет в себе содержательную информацию о его нулях $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$ в интервале $(0,\pi)$. В частности (см. утверждение (b) теоремы 10 из разд. 6), каждый из этих нулей $t_j = t_j(q)$ является непрерывной убывающей функцией параметра $q \in (-1,1)$. Поэтому, учитывая явный вид полиномов $R_{-1}(t) = (\cos t + 1)\cos nt$ и $R_1(t) = (\cos t - 1)\cos nt$, приходим к следующему утверждению о нулях R_q.

Лемма 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. Тогда нули $t_1 < t_2 \ldots < t_{n+1}$ полинома R_q в интервале $(0,\pi)$ непрерывно зависят от параметра q и с возрастанием $q \in (-1,1)$ убывают: первый нуль $t_1 = t_1(q)$ — в промежутке $\left(0, \dfrac{\pi}{2n}\right)$, j-й нуль $t_j = t_j(q)$ $(2 \le j \le n)$ — в промежутке $\left(\dfrac{(2j-3)\pi}{2n}, \dfrac{(2j-1)\pi}{2n}\right)$, а $(n+1)$-й нуль $t_{n+1} = t_{n+1}(q)$ — в промежутке $\left(\pi - \dfrac{\pi}{2n}, \pi\right)$.*

При $-1 < q < 1$, $2 \le \ell \le n$ обозначим через $\tau_{q,\ell}$ косинус-полином степени не выше $n-1$, который интерполирует характеристическую функцию χ_{t_ℓ} интервала $(-t_\ell, t_\ell)$ в точках t_j, $1 \le j \le n+1$, $j \ne \ell$. Существование и единственность полинома $\tau_{q,\ell}$ (см. [21, гл. 3, § 3, свойство 3]) следуют из того, что система $\{1, \cos t, \cos 2t, \ldots, \cos(n-1)t\}$ является чебышевской на $[0,\pi]$.

[9] Полином R_q имеет $n+1$ нуль в интервале $(0,\pi)$, и все они различны; это следует из леммы 1, четности этого полинома и формул $R_q(0) = (1-q)^2 > 0$, $R_q(\pi) = (-1)^{n+1}(1+q)^2 \ne 0$.

Теорема 5. *При* $-1 < q < 1$, $2 \le \ell \le n$ *полином* $\tau_{q,\ell} \in \mathcal{T}_{n-1}$ *является полиномом наилучшего интегрального приближения для функции* χ_{t_ℓ}*, причем выполняются равенства*

$$E_{n-1}(\chi_{t_\ell})_L = \|\chi_{t_\ell} - \tau_{q,\ell}\|_L = \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \chi_{t_\ell}(t) \operatorname{sign}\{R_q(t)\}\, dt \right|; \tag{5.7}$$

$$E_{n-1}(\chi_{t_\ell})_L = \begin{cases} 2t_\ell - 4\sum\limits_{j=1}^{\ell/2}(t_{2j-1} - t_{2j-2}) & \text{при четном } \ell, \\ 2t_\ell - 4\sum\limits_{j=1}^{[\ell/2]}(t_{2j} - t_{2j-1}) & \text{при нечетном } \ell; \end{cases} \tag{5.8}$$

здесь $t_0 = 0$, $[\ell/2]$ *— целая часть числа* $\ell/2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о близко к доказательству теоремы 2.1.2 из [2], которое соответствует случаю $q = 1$. Повторим кратко рассуждения, адаптируя их к случаю $|q| < 1$.

Полином $\tau_{q,\ell}$ и функция χ_{t_ℓ} являются четными функциями, поэтому $\tau_{q,\ell}$ интерполирует χ_{t_ℓ} в точках $\pm t_j$, $1 \le j \le n+1$, $j \ne \ell$. Эти точки разбивают период $\mathbb{T}$ (который удобно представлять в виде единичной окружности) на $2n$ участков, расположенных симметрично относительно нуля. Два симметричных участка $[-t_{\ell+1}, -t_{\ell-1}]$ и $[t_{\ell-1}, t_{\ell+1}]$ (внутри которых лежат соответственно точки $-t_\ell$ и t_ℓ) условимся называть *большими*, а все остальные участки — *малыми*.

В концевых точках произвольного малого участка полином $\tau_{q,\ell}$ принимает одинаковые значения (либо нулевые, либо равные единице). Поэтому внутри каждого из этих участков производная $\tau'_{q,\ell}$ имеет по крайней мере один нуль. Но поскольку малых участков $2(n-1)$, то других нулей у полинома $\tau'_{q,\ell}$ быть не должно, так как его степень равна $n-1$. Следовательно, внутри каждого малого участка имеется ровно по одному нулю. Отсюда заключаем, что производная не обращается в нуль на обоих больших участках. Поэтому полином $\tau_{q,\ell}$ на отрезке $[t_{\ell-1}, t_{\ell+1}]$ убывает от значения $\tau_{q,\ell}(t_{\ell-1}) = \chi_{t_\ell}(t_{\ell-1}) = 1$ до значения $\tau_{q,\ell}(t_{\ell+1}) = \chi_{t_\ell}(t_{\ell+1}) = 0$, а на отрезке $[-t_{\ell+1}, -t_{\ell-1}]$ возрастает от 0 до 1. В точках разрыва функции χ_{t_ℓ}, т. е. в точках t_ℓ и $-t_\ell$ полином $\tau_{q,\ell}$ принимает одинаковые положительные значения. Следовательно, выполняется равенство $\operatorname{sign}\{\chi_{t_\ell}(t) - \tau_{q,\ell}(t)\} = (-1)^{\ell+1}\operatorname{sign}\{R_q(t)\}$.

В силу утверждения (4.1) теоремы 4, функция $\operatorname{sign}\{R_q(t)\}$ принадлежит $\mathcal{T}_{n-1}^{\perp}$. Отсюда и из теоремы 2 следует, что $\tau_{q,\ell} \in \mathcal{T}_{n-1}$ является полиномом наилучшего интегрального приближения для χ_{t_ℓ}, причем справедливы равенства

$$E_{n-1}(\chi_{t_\ell})_L = 2\left| \int\limits_{0}^{\pi} \chi_{t_\ell}(t) \operatorname{sign}\{R_q(t)\}\, dt \right| = 2\left| \int\limits_{0}^{t_\ell} \chi_{t_\ell}(t) \operatorname{sign}\{R_q(t)\}\, dt \right|,$$

которые равносильны утверждениям (5.7), (5.8). □

Важным частным случаем теоремы 5 является случай $\ell = 2$, когда $\tau_{q,2} \in \mathcal{T}_{n-1}$ — полином наилучшего интегрального приближения для χ_{t_2}, причем

$$E_{n-1}(\chi_{t_2})_L = \|\chi_{t_2} - \tau_{q,2}\|_L = 2t_2 - 4t_1 \qquad (-1 < q < 1, \quad 2 \le n). \tag{5.9}$$

Учитывая лемму 2, вместо параметра $q \in (-1, 1)$ можно использовать $h = t_2(q) \in \left(\dfrac{\pi}{2n}, \dfrac{3\pi}{2n}\right)$. При этом имеет место равенство

$$q = q(h) = \frac{\sin h + \cos nh}{\cos(n-1)h}, \qquad \text{где} \quad h = t_2(q) \in \left(\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}\right). \tag{5.10}$$

Действительно, из формулы (5.5) получаем уравнение

$$R_q(h) \equiv \cos(n+1)h - 2q\cos nh + q^2\cos(n-1)h = 0. \tag{5.11}$$

Относительно параметра q уравнение (5.11) имеет два решения. Одно из этих решений больше единицы по абсолютной величине. Другое решение $q = q(h)$ совпадает с $q(h)$ из (5.10); решение $q(h)$ пробегает интервал $(-1, 1)$, монотонно убывая при возрастании h в интервале $\left(\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}\right)$.

Обозначим через $t_1 = t_{1,h}$ первый положительный нуль полинома $R_{q(h)}(t)$. Для выяснения более подробной информации об этом нуле воспользуемся представлением (5.6). В силу (6.13) и двух последних равенств в (6.11) функция $\widetilde{\varphi}(t) = nt - \lambda(t, q(h))$ возрастает по t на $[0, \pi]$, причем $\widetilde{\varphi}(0) = -\pi$, $\widetilde{\varphi}(\pi) = n\pi$. Отсюда с помощью представления (5.6) заключаем, что $t_1 = t_{1,h}$ совпадает с корнем уравнения $nt - \lambda(t, q(h)) = -\pi/2$. Переписав это уравнение в эквивалентной форме $\cos nt = \sin\lambda(t, q(h))$ и применив формулу (6.12) разд. 6, приходим к уравнению

$$\cos nt = \frac{\left\{1 - q^2(h)\right\}\sin t}{1 + q^2(h) - 2q(h)\cos t}, \tag{5.12}$$

единственным корнем которого в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2n}\right)$ является $t_{1,h}$.

Теорема 6. *Справедливы следующие утверждения*:

(1) *величина* $v_{1,n} = nt_{1,\pi/n}$ *убывает по* $n \geq 2$;

(2) *предел* $v_1 = \lim\limits_{n\to\infty} v_{1,n} = 0.97116830789\ldots$ *совпадает с единственным корнем на* $[0, \pi/2]$ *уравнения*[10]

$$\cos v = \frac{2v\pi}{v^2 + \pi^2}; \tag{5.13}$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} n\mathfrak{I}_n\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2\pi - 4v_1 = 2.398512075618\ldots$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $h = \pi/n$ уравнение (5.12) приобретает вид

$$\cos nt = \frac{\left\{1 - q^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}\sin t}{1 + q^2\left(\frac{\pi}{n}\right) - 2q\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos t}. \tag{5.14}$$

Как говорилось выше, $t_1 = t_{1,\pi/n}$ совпадает с единственным корнем этого уравнения, расположенным в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2n}\right)$. Замена $t = v/n$ преобразует уравнение (5.14) к виду

$$\cos v = \frac{\left\{1 - q^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}\sin\frac{v}{n}}{1 + q^2\left(\frac{\pi}{n}\right) - 2q\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\frac{v}{n}}. \tag{5.15}$$

Понятно, что корень этого уравнения, расположенный в интервале $(0, \pi/2)$, совпадает с $v_{1,n}$, причем он является единственным в этом интервале.

Покажем, что $v_{1,n}$ убывает по $n \geq 2$. Действительно, $\cos v$ — левая часть уравнения (5.15) — является убывающей функцией в интервале $(0, \pi/2)$. Поэтому достаточно доказать, что правая часть уравнения возрастает по $n \geq 2$ при любом фиксированном значении v из $(0, \pi/2)$. Для доказательства этого утверждения сделаем еще одну замену $\alpha = 1/n$. Учитывая (5.10), после преобразований приходим к следующим формулам:

$$q(\alpha\pi) = \frac{1 - \sin\alpha\pi}{\cos\alpha\pi} = \sec\alpha\pi - \operatorname{tg}\alpha\pi, \quad q^2(\alpha\pi) = \frac{1 - \sin\alpha\pi}{1 + \sin\alpha\pi},$$

[10]Отметим, что на $[0, \pi/2]$ корень уравнения (5.13) совпадает с корнем уравнения $\sec v - \operatorname{tg} v = v/\pi$.

$$1-q^2(\alpha\pi)=\frac{2\sin\alpha\pi}{1+\sin\alpha\pi},\quad 1+q^2(\alpha\pi)=\frac{2}{1+\sin\alpha\pi}.$$

Используя эти формулы, перепишем уравнение (5.15) в виде

$$\cos v=\frac{\sin\alpha\pi\sin\alpha v}{1-\cos\alpha\pi\cos\alpha v}. \tag{5.16}$$

Для того чтобы доказать, что правая часть уравнения (5.15) возрастает по $n\ge 2$ при любом фиксированном $v\in(0,\pi/2)$, достаточно показать, что правая часть уравнения (5.16)

$$r(\alpha,v)=\frac{\sin\alpha\pi\sin\alpha v}{1-\cos\alpha\pi\cos\alpha v}=\frac{\cos(\pi-v)\alpha-\cos(\pi+v)\alpha}{2-\cos(\pi-v)\alpha-\cos(\pi+v)\alpha}$$

является убывающей функцией по $\alpha\in(0,1/2)$ при фиксированном $v\in(0,\pi/2)$.

Найдем частную производную функции $r(\alpha,v)$ по α и умножим ее на положительную функцию $\{2-\cos(\pi-v)\alpha-\cos(\pi+v)\alpha\}^2/2$. В результате получим

$$\frac{\big\{2-\cos(\pi-v)\alpha-\cos(\pi+v)\alpha\big\}^2}{2}\frac{\partial r(\alpha,v)}{\partial\alpha}=2\pi v\alpha\,(\cos v\alpha-\cos\pi\alpha)\Big(\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}-\frac{\sin v\alpha}{v\alpha}\Big). \tag{5.17}$$

Правая часть равенства (5.17) отрицательна при $\alpha\in(0,1/2)$, $v\in(0,\pi/2)$, поскольку функция $\sin x/x$ убывает по $x\in(0,\pi)$. Таким образом, величина $v_{1,n}=n\,t_{1,\pi/n}$ убывает по $n\ge 2$.

Для того чтобы найти предел величины $v_{1,n}$ при $n\to\infty$, устремим параметр α к нулю в правой части уравнения (5.16) и получим “предельное” уравнение $\cos v=2v\pi/(v^2+\pi^2)$. Из соображений непрерывности корень v этого уравнения, расположенный на $[0,\pi/2]$, совпадает с искомым пределом $v_1=\lim\limits_{n\to\infty}v_{1,n}=\lim\limits_{n\to\infty}n\,t_{1,\pi/n}$. Решая численно “предельное” уравнение на $[0,\pi/2]$, находим $v_1=0.97116830789\ldots$

Таким образом, имеем

$$\lim_{n\to\infty}n\,\mathfrak{I}_n\left(\frac{\pi}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}2n\left(\frac{\pi}{n}-2t_{1,\pi/n}\right)=2\lim_{n\to\infty}\left(\pi-2\,n\,t_{1,\pi/n}\right)$$
$$=2(\pi-2v_1)=2.398512075618\ldots$$

Теорема 6 доказана. □

В некоторых задачах теории приближения удобно применять вместо классической характеристической функции χ_h интервала $(-h,h)$ функцию $\mathcal{X}_h(t)=\chi_h(t)/(2h)$, $0<h\le\pi$, которую назовем *L-нормированной* характеристической функцией интервала $(-h,h)$, поскольку $\|\mathcal{X}_h\|_L=1$. Ясно, что $E_{n-1}(\mathcal{X}_h)_L=E_{n-1}(\chi_h)_L/(2h)=\mathfrak{I}_n(h)/(2h)$. В случае $h=t_2$ (см. формулу (5.9)) выполняется равенство

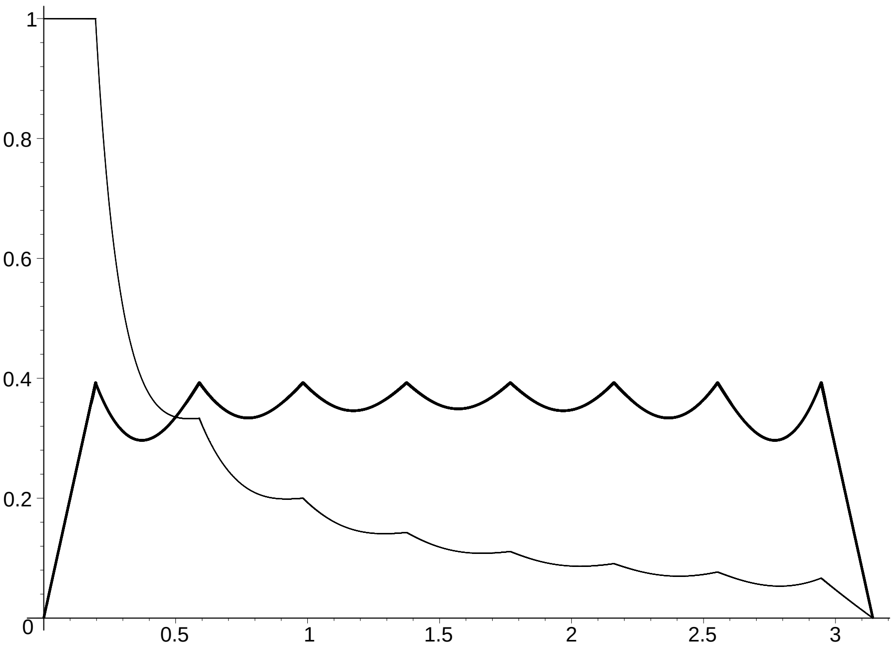
$$E_{n-1}(\mathcal{X}_{t_2})_L=1-\frac{2t_1}{t_2}.$$

С помощью теоремы 6 получаем, что последовательность $\mathcal{E}_{k-1}=E_{k-1}\left(\mathcal{X}_{\pi/k}\right)_L$, $k=2,3,\ldots$, монотонно возрастая, стремится к числу $1-2v_1/\pi$, т. е.

$$\mathcal{E}_1<\mathcal{E}_2<\ldots<\mathcal{E}_k<\mathcal{E}_{k+1}<\ldots<\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}_n=1-\frac{2v_1}{\pi}=0.3817350529\ldots$$

Вернемся к изучению поведения величины $\mathfrak{I}_n(h)=E_{n-1}(\chi_h)_L$ по h при фиксированном $n\ge 2$. Рассмотрим сначала случай $n=2$, когда в силу свойств (5.2), (5.3) достаточно найти $\mathfrak{I}_2(h)$ при $\pi/4\le h\le\pi/2$. Действуя так же, как и выше (см. формулы (5.10), (5.11)), найдем первый нуль $t_1=t_{1,h}=\pi/4+h/2-\arccos\left(\dfrac{\sin h}{2\sin(\pi/4+h/2)}\right)$ соответствующей функции Бернштейна. Тогда из (5.1), (5.9) и (5.10) получаем $\mathfrak{I}_2(h)=-\pi+4\arccos\left(\dfrac{\sin h}{2\sin(\pi/4+h/2)}\right)$ при $\pi/4\le h\le\pi/2$. В частности, $2\,\mathfrak{I}_2(\pi/2)=2\pi/3=2.094395102393\ldots$

При $n \geq 3$ явных формул для $\mathfrak{I}_n(h)$, аналогичных случаю $n = 2$, найти не удалось. Однако с помощью теоремы 5 можно с любой степенью точности найти эту функцию на густой сетке. Таким способом был построен график функции $\mathfrak{I}_8(h)$, который изображен на рисунке жирной линией. Напомним (см. (5.3), (5.2)), что $\mathfrak{I}_8(h) = 2h$ при $h \in (0, \pi/16)$ и $\mathfrak{I}_8(h) = 2(\pi - h)$ при $h \in (15\pi/16, \pi)$.



Графики функции $\mathfrak{I}_8(h)$ (жирная линия) и функции $\mathfrak{I}_8(h)/(2h)$ на отрезке $[0, \pi]$.

На рисунке тонкой линией изображен также график функции $\mathfrak{I}_8(h)/(2h) = E_7(\mathcal{X}_h)_L$. Отметим, что на полуинтервале $(0, \pi/16]$ функция $\mathfrak{I}_8(h)/(2h)$ постоянна и равна единице, что следует из (5.3).

6. Приложение. Свойства функции Бернштейна

В данном разделе изучаются свойства функции Бернштейна, определенной в (3.5):

$$B(t, a, \xi) = \cos\left[nt - \delta(t, a) + \xi\right] \qquad \left(\delta(t, a) = \arccos u(t, a), \qquad u(t, a) = \frac{1 - a\cos t}{a - \cos t}\right), \tag{6.1}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $\xi \in \mathbb{R}$, $t \in [0, \pi]$. Кроме того, будет также построено продолжение данной функции на $[-\pi, 0]$.

Легко проверить следующие соотношения:

$$1 - u^2(t, a) = 1 - \left(\frac{1 - a\cos t}{a - \cos t}\right)^2 = \frac{(a^2 - 1)\sin^2 t}{(a - \cos t)^2}; \tag{6.2}$$

$$\sin\delta(t, a) = \sin\arccos u(t, a) = \sqrt{1 - u^2(t, a)} = \frac{\sqrt{a^2 - 1}\sin t}{|a - \cos t|}; \tag{6.3}$$

$$\frac{\partial u(t, a)}{\partial t} = \frac{(a^2 - 1)\sin t}{(a - \cos t)^2}; \qquad \frac{\partial\delta(t, a)}{\partial t} = \frac{-\sqrt{a^2 - 1}}{|a - \cos t|}; \qquad \delta(0, a) = \pi, \qquad \delta(\pi, a) = 0. \tag{6.4}$$

Из (6.4) следует, что при $|a| > 1$ функция $\varphi(t, a, \xi) = nt - \delta_a(t) + \xi$ возрастает по t на $[0, \pi]$, причем $\varphi(0, a, \xi) = -\pi + \xi$, $\varphi(\pi, a, \xi) = n\pi + \xi$. Отсюда с учетом (6.1) получаем следующее утверждение.

Лемма 3. *При* $\xi, a \in \mathbb{R}$, $|a| > 1$ *функция* $B(t) = B(t, a, \xi)$, *определенная формулой* (6.1), *имеет* $(n+1)$*-точечный альтернанс на полуинтервале* $[0, \pi)$.

Функция $B(t, a, \xi)$ при $\xi = 0$ возникла в исследованиях С. Н. Бернштейна в связи с задачей (3.2). Он доказал [3, ст. 8, п. 3] лемму 3 при $\xi = 0$, что позволило ему найти решение (3.4) задачи (3.2). В случае произвольного $\xi \in \mathbb{R}$ доказательство леммы 3 такое же.

Пусть $a, \xi \in \mathbb{R}$, $|a| > 1$; рассмотрим функцию

$$\beta(t, a, \xi) = 2(\cos t - a)B(t, a, \xi) = 2(\cos t - a)\cos\left[nt - \delta(t, a) + \xi\right], \qquad t \in [0, \pi].$$

Из замечания С. Н. Бернштейна [3, ст. 9, п. 2, сноска 3] следует, что функция $\beta(t, a, \xi)$ при $\xi = 0$ является тригонометрическим полиномом. Чтобы убедиться в справедливости аналогичного утверждения в случае произвольного $\xi \in \mathbb{R}$, воспользуемся формулами (6.2), (6.3) и стандартными тригонометрическими формулами.

Для числа $a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ найдется единственное число $q \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, которое связано с ним следующим образом: $a = \big(q + 1/q\big)/2$. При этом параметру $a \in (-\infty, -1)$ соответствует параметр $q \in (-1, 0)$, а параметру $a \in (1, +\infty)$ — параметр $q \in (0, 1)$. А именно, имеют место соотношения

$$a + \sqrt{a^2 - 1} = 1/q, \qquad a - \sqrt{a^2 - 1} = q \qquad \text{при} \qquad a > 1, \qquad q \in (0, 1); \tag{6.5}$$

$$a - \sqrt{a^2 - 1} = 1/q, \qquad a + \sqrt{a^2 - 1} = q \qquad \text{при} \qquad a < -1, \qquad q \in (-1, 0). \tag{6.6}$$

Рассмотрим сначала случай $a > 1:$

$$\beta(t, a, \xi) = 2(\cos t - a)\Big[\cos(nt + \xi)\cos\delta(t, a) + \sin(nt + \xi)\sin\delta(t, a)\Big]$$

$$= 2(\cos t - a)\left[\frac{1 - a\cos t}{a - \cos t}\cos(nt + \xi) + \sqrt{1 - \left(\frac{1 - a\cos t}{a - \cos t}\right)^2}\sin(nt + \xi)\right]$$

$$= \Big\{a + \sqrt{a^2 - 1}\Big\}\cos[(n+1)t + \xi] - 2\cos(nt + \xi) + \Big\{a - \sqrt{a^2 - 1}\Big\}\cos[(n-1)t + \xi]. \tag{6.7}$$

Из формул (6.7) и (6.5) получаем равенство

$$q\,\beta(t, a, \xi) = \cos[(n+1)t + \xi] - 2q\cos(nt + \xi) + q^2\cos[(n-1)t + \xi]. \tag{6.8}$$

Рассмотрим теперь случай $a < -1:$

$$\beta(t, a, \xi) = 2(a\cos t - 1)\cos(nt + \xi) + 2\sqrt{a^2 - 1}\sin t\sin(nt + \xi)$$

$$= \Big\{a - \sqrt{a^2 - 1}\Big\}\cos[(n+1)t + \xi] - 2\cos(nt + \xi) + \Big\{a + \sqrt{a^2 - 1}\Big\}\cos[(n-1)t + \xi].$$

Отсюда с учетом (6.6) следует, что

$$q\,\beta(t, a, \xi) = \cos[(n+1)t + \xi] - 2q\cos(nt + \xi) + q^2\cos[(n-1)t + \xi]. \tag{6.9}$$

Сравнивая формулы (6.8), (6.9), приходим к заключению, что двум семействам полиномов $\{\beta(t, a, \xi),\ a > 1\}$ и $\{\beta(t, a, \xi),\ a < -1\}$ соответствует одно семейство полиномов

$$R_{q,\xi}(t) = q\,\beta(t, a, \xi) = 2q(\cos t - a)B(t, a, \xi)$$

$$= \cos[(n+1)t + \xi] - 2q\cos(nt + \xi) + q^2\cos[(n-1)t + \xi], \qquad -1 < q < 1, \tag{6.10}$$

при этом параметры a и q связаны между собой формулами (6.5), (6.6), а значению $q = 0$ соответствуют одновременно два предельных значения $a = \pm\infty$.

Нам будет проще изучать функцию Бернштейна в терминах параметра q. Перепишем сначала функцию $\delta(t,a)$ в терминах параметра $q \in (-1,1)$:

$$\delta(t,a) = \lambda(t,q) = \arccos \widetilde{u}(t,q), \qquad \widetilde{u}(t,q) = \frac{2q-(1+q^2)\cos t}{1+q^2-2q\cos t}.$$

Далее, нам понадобятся следующие формулы, аналогичные формулам (6.2)–(6.4):

$$1-\widetilde{u}^2(t,q) = \frac{(1-q^2)^2\sin^2 t}{(1+q^2-2q\cos t)^2}, \qquad \lambda(0,q)=\pi, \qquad \lambda(\pi,q)=0, \tag{6.11}$$

$$\sin\lambda(t,q) = \sin\arccos\widetilde{u}(t,q) = \sqrt{1-\widetilde{u}^2(t,q)} = \frac{(1-q^2)\sin t}{1+q^2-2q\cos t}, \tag{6.12}$$

$$\frac{\partial\widetilde{u}(t,q)}{\partial t} = \frac{(1-q^2)^2\sin t}{(1+q^2-2q\cos t)^2} = \frac{1-\widetilde{u}^2(t,q)}{\sin t}, \quad \frac{\partial\widetilde{u}(t,q)}{\partial q} = \frac{2(1-q^2)\sin^2 t}{(1+q^2-2q\cos t)^2} = 2\left\{1-\widetilde{u}^2(t,q)\right\},$$

$$\frac{\partial\lambda(t,q)}{\partial t} = \frac{-1}{\sqrt{1-\widetilde{u}^2(t,q)}}\frac{\partial\widetilde{u}(t,q)}{\partial t} = \frac{-\sqrt{1-\widetilde{u}^2(t,q)}}{\sin t} = \frac{q^2-1}{1+q^2-2q\cos t}, \tag{6.13}$$

$$\frac{\partial\lambda(t,q)}{\partial q} = \frac{-1}{\sqrt{1-\widetilde{u}^2(t,q)}}\frac{\partial\widetilde{u}(t,q)}{\partial q} = -2\sqrt{1-\widetilde{u}^2(t,q)} = -2\sin\lambda(t,q) = \frac{2(q^2-1)\sin t}{1+q^2-2q\cos t}. \tag{6.14}$$

Произведя замену $a=(1+q^2)/(2q)$ в $B(t,a,\xi)$, получим новую функцию, зависящую от q, которую обозначим через $\mathcal{B}(t,q,\xi)$.

Окончательно с учетом (6.10) для случая $t\in[0,\pi]$ $(\xi\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N})$ имеем

$$B(t,a,\xi) = \mathcal{B}(t,q,\xi) = \cos\left[nt-\lambda(t,q)+\xi\right] = \frac{R_{q,\xi}(t)}{2q\cos t-(1+q^2)}, \qquad -1<q<1. \tag{6.15}$$

Перейдем сейчас к изучению случая $t\in[-\pi,0]$. Выразим полином $R_{q,\xi}(t)$ при $t\in[-\pi,0]$ в терминах функции Бернштейна с помощью замены $t=\theta-\pi$, $\theta\in[0,\pi]$:

$$R_{q,\xi}(t) = R_{q,\xi}(\theta-\pi) = (-1)^{n+1}\Big\{\cos\big[(n+1)\theta+\xi\big] + 2q\cos(n\theta+\xi) + q^2\cos\big[(n-1)\theta+\xi\big]\Big\}$$

$$= (-1)^{n+1}R_{-q,\xi}(\theta) = (-1)^{n+1}\big\{2q\cos t-(1+q^2)\big\}\mathcal{B}_{-q,\xi}(t+\pi), \qquad t\in[-\pi,0].$$

Отсюда получаем представление

$$\frac{R_{q,\xi}(t)}{2q\cos t-(1+q^2)} = \begin{cases} (-1)^{n+1}\mathcal{B}(t+\pi,-q,\xi) & \text{при} \quad -\pi\le t\le 0, \\ \mathcal{B}(t,q,\xi) & \text{при} \quad 0\le t\le\pi. \end{cases} \tag{6.16}$$

Это представление можно переписать в другой эквивалентной форме, а именно

$$\frac{R_{q,\xi}(t)}{2q\cos t-(1+q^2)} = \cos\left[nt+\xi-\mu(t,q)\right], \qquad t\in[-\pi,\pi], \tag{6.17}$$

где $\mu(t,q)=\pi+\lambda(t+\pi,-q)$ при $t\in[-\pi,0]$, $\mu(t,q)=\lambda(t,q)$ при $t\in[0,\pi]$. Несложно проверить, что при любом $q\in(-1,1)$ функция $\mu(t,q)$ как функция переменной t является убывающей на $[-\pi,\pi]$, бесконечно дифференцируемой в интервале $(-\pi,\pi)$ и $\mu(-\pi,q)=2\pi$, $\mu(\pi,q)=0$.

Из представлений (6.16), (6.17) и леммы 3 следует, что при $n\in\mathbb{N}$, $q\in(-1,1)$, $\xi\in\mathbb{R}$ функция

$$F_{q,\xi}(t) = \frac{R_{q,\xi}(t)}{2q\cos t-(1+q^2)} = \frac{\cos\left[(n+1)t+\xi\right] - 2q\cos(nt+\xi) + q^2\cos\left[(n-1)t+\xi\right]}{2q\cos t-(1+q^2)} \tag{6.18}$$

на каждом из полуинтервалов $[-\pi,0)$ и $[0,\pi)$ имеет $(n+1)$-точечный альтернанс; на всем периоде $\mathbb{T}=[-\pi,\pi)$ функция $F_{q,\xi}$ имеет $(2n+2)$-точечный альтернанс; полином $R_{q,\xi}$ на каждом из полуинтервалов $[-\pi,0)$, $[0,\pi)$ имеет по $n+1$ различных нулей.

Отсюда с помощью теоремы Чебышева об альтернансе (см. [14, гл. 3, § 4, теорема 2]) и теоремы 4 получаем следующую теорему, в которой наряду с обозначением $E_{n-1}(f)_L$ величины наилучшего интегрального приближения функции $f\in L$ подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$ (см. разд. 1) используется обозначение величины $E_n(F)_{C_{2\pi}}\ \big(=\inf\limits_{g\in\mathcal{T}_n}\|F-g\|_{C_{2\pi}}\big)$ наилучшего равномерного приближения функции $F\in C_{2\pi}$ подпространством $\mathcal{T}_n$.

Теорема 7. *При* $n\in\mathbb{N}$, $q\in(-1,1)$, $\xi\in\mathbb{R}$ *функция* $F_{q,\xi}$ *не приближается ни в равномерной норме (подпространством* $\mathcal{T}_n$*), ни в интегральной (подпространством* $\mathcal{T}_{n-1}$*). Это означает, что*

$$E_n(F_{q,\xi})_{C_{2\pi}}=\|F_{q,\xi}\|_{C_{2\pi}},\qquad E_{n-1}(F_{q,\xi})_L=\|F_{q,\xi}\|_L$$

и единственным полиномом наилучшего приближения для $F_{q,\xi}$ *является тождественный нуль.*

Сопоставим паре чисел $q\in(-1,1)$, $\xi\in\mathbb{R}$ функцию

$$f_{q,\xi}(t)=\frac{2q}{2q\cos t-(1+q^2)}\left\{\cos\xi+\frac{2q\sin\xi\sin t}{1-q^2}\right\}.$$

Ниже изучается величина $E_n(f_{q,\xi})_{C_{2\pi}}=\inf\limits_{g\in\mathcal{T}_n}\|f_{q,\xi}-g\|_{C_{2\pi}}$.

Теорема 8. *При любых* $q\in(-1,1)$, $\xi\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ *имеем*

$$E_n(f_{q,\xi})_{C_{2\pi}}=\frac{4q^{n+2}}{(1-q^2)^2}. \tag{6.19}$$

Утверждение (6.19) при $\xi=0$ эквивалентно результату С. Н. Бернштейна (3.4).

Доказательство. При $q=0$ утверждение (6.19) очевидно. Пусть $q\in(-1,0)\cup(0,1)$. В силу первого утверждения теоремы 7 для доказательства (6.19) достаточно показать, что функция

$$\frac{4q^{n+2}}{(1-q^2)^2}\,\frac{R_{q,\xi}(t)}{2q\cos t-(1+q^2)}-f_{q,\xi}(t) \tag{6.20}$$

является тригонометрическим полиномом степени не выше n.

Из второго равенства в (3.8) следует, что $R_{q,\xi}(t)=R_{q,0}(t)\cos\xi+R_{q,\pi/2}(t)\sin\xi$. Поэтому для доказательства (6.20) достаточно показать, что функция

$$\frac{2q^{n+1}}{(1-q^2)^2}\,\frac{R_{q,0}(t)}{2q\cos t-(1+q^2)}-\frac{1}{2q\cos t-(1+q^2)},$$

соответственно функция

$$\frac{q^n}{1-q^2}\,\frac{R_{q,\pi/2}(t)}{2q\cos t-(1+q^2)}+\frac{\sin t}{2q\cos t-(1+q^2)}, \tag{6.21}$$

являются четным и соответственно нечетным тригонометрическими полиномами степени не выше n. Эти утверждения равносильны следующим:

$$\frac{2q^{n+1}\left\{T_{n+1}(x)-2qT_n(x)+q^2T_{n-1}(x)\right\}-(1-q^2)^2}{2qx-(1+q^2)}\in\mathcal{P}_n, \tag{6.22}$$

$$\frac{q^n\left\{U_n(x)-2qU_{n-1}(x)+q^2U_{n-2}(x)\right\}-(1-q^2)}{2qx-(1+q^2)}\in\mathcal{P}_{n-1}, \tag{6.23}$$

где T_k, U_k — многочлены Чебышева 1-го и 2-го рода соответственно. Включения (6.22), (6.23) выполняются тогда и только тогда, когда многочлены в числителях дробей обращаются в нуль при $x=\dfrac{1}{2}\Big(q+\dfrac{1}{q}\Big)$, а это имеет место в силу известных формул (см. [16, гл. 1, § 1, формулы (20), (21)])

$$2T_k\left(\frac{1}{2}\Big(q+\frac{1}{q}\Big)\right)=q^k+\frac{1}{q^k},\qquad \Big(q-\frac{1}{q}\Big)U_k\left(\frac{1}{2}\Big(q+\frac{1}{q}\Big)\right)=q^{k+1}-\frac{1}{q^{k+1}}.$$

Теорема доказана. □

Применение теоремы 8 в случае $\xi=\pi/2$ и замена $x=\cos t$ дают следующее утверждение.

Теорема 9. *При любых* $q\in(-1,1)$, $n\in\mathbb{N}$ *выполняется равенство*

$$\inf_{p\in\mathcal{P}_{n-1}}\left\|\left\{\frac{2q}{2qx-(1+q^2)}-p(x)\right\}\sqrt{1-x^2}\right\|_{C[-1,1]}=\frac{2q^{n+1}}{1-q^2}.$$

Представление (6.16) позволяет сделать вывод, что $(n+1)$-точечный альтернанс функции $\dfrac{R_{q,\xi}(t)}{2q\cos t-(1+q^2)}$ на $[0,\pi)$ совпадает с набором нулей частной производной

$$\frac{\partial\mathcal{B}(t,q,\xi)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\cos\big[nt-\lambda(t,q)+\xi\big]=-\left(n+\frac{1-q^2}{1+q^2-2q\cos t}\right)\sin\big[nt-\lambda(t,q)+\xi\big]$$

$$=\left(n+\frac{1-q^2}{1+q^2-2q\cos t}\right)\cos\big[nt-\lambda(t,q)+\xi+\pi/2\big]=\left(n+\frac{1-q^2}{1+q^2-2q\cos t}\right)\mathcal{B}\left(t,q,\xi+\pi/2\right).$$

Отсюда и из (6.15), (6.18) получаем

$$\frac{\partial\mathcal{B}(t,q,\xi)}{\partial t}=\left(n+\frac{1-q^2}{1+q^2-2q\cos t}\right)\mathcal{B}\left(t,q,\xi+\pi/2\right)$$

$$=-\left(n+\frac{1-q^2}{1+q^2-2q\cos t}\right)\frac{\sin[(n+1)t+\xi]-2q\sin(nt+\xi)+q^2\sin[(n-1)t+\xi]}{2q\cos t-(1+q^2)}.$$

Таким образом, имеет место следующая теорема, в которой через $\{t_j(q,\xi)\}_{j=1}^{n+1}$ обозначен упорядоченный по возрастанию набор нулей функции $\mathcal{B}(t)=\mathcal{B}(t,q,\xi)$ на $[0,\pi)$.

Теорема 10. *При* $n\in\mathbb{N}$, $q\in(-1,1)$, $\xi\in\mathbb{R}$ *справедливы следующие утверждения*:

(a) $(n+1)$-*точечный альтернанс функции* $\mathcal{B}(t,q,\xi)$ *на полуинтервале* $[0,\pi)$ *совпадает с набором нулей функции* $\mathcal{B}\Big(t,q,\xi+\pi/2\Big)$ *на* $[0,\pi)$, *а именно:*

$$\mathcal{B}\left(t_j\left(q,\xi+\pi/2\right),q,\xi\right)=\varepsilon_1(-1)^j,\qquad j=1,2,\dots,n+1,\qquad \varepsilon_1=\pm1;$$

$$\mathcal{B}\left(t_j(q,\xi),q,\xi+\pi/2\right)=\varepsilon_2(-1)^j,\qquad j=1,2,\dots,n+1,\qquad \varepsilon_2=\pm1;$$

(b) *нули* $t_j(q,\xi)$ *функции* $\mathcal{B}(t)=\mathcal{B}(t,q,\xi)$, *расположенные в интервале* $(0,\pi)$, *являются убывающими функциями параметра* $q\in(-1,1)$.

Утверждение (b) теоремы 10 является следствием равенств (6.14), из которых видно, что функция $\lambda(t,q)$ при каждом фиксированном $t\in(0,\pi)$ убывает по $q\in(-1,1)$. Теперь остается заметить, что каждый нуль функции $\mathcal{B}(t)=\mathcal{B}(t,q,\xi)$, расположенный в интервале $(0,\pi)$, совпадает с корнем уравнения $nt+\xi-(2k-1)\pi/2=\lambda(t,q)$, где k — некоторое целое число.

Г. Мейнардус [25, гл. 1, § 4, п. 4.3] (см. также [27, лемма 3]), используя другой способ, получил результат, содержащий в себе утверждение (b) теоремы 10 в случае $\xi=-\pi/2$.

Авторы искренне признательны профессору В. В. Арестову за ряд ценных замечаний и плодотворные обсуждения и М. В. Дейкаловой за помощь в численных расчетах разд. 5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ахиезер Н.И.** Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 406 с.
2. **Бабенко А.Г., Крякин Ю.В.** О приближении ступенчатых функций тригонометрическими полиномами в интегральной метрике // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 12, вып. 1. С. 27–56.
3. **Бернштейн С.Н.** Собрание сочинений: в 4 т. М.: АН СССР, 1952. Т. 1: Конструктивная теория функций (1905-1930). 581 с.
4. **Галеев Э.М.** Задача Золотарева в метрике $L_1([-1,1])$ // Мат. заметки. 1975. Т. 17, № 1. С. 13–20.
5. **Гейт В.Э.** О полиномах, наименее уклоняющихся от нуля в метрике $L[-1,1]$ (третье сообщ.) // Сиб. журн. вычисл. математики. 2003. Т. 6, № 1. С. 37–57.
6. **Геронимус Я.Л.** Об одной экстремальной задаче Чебышева // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1938. № 4. С. 445–456.
7. **Геронимус Я.Л.** Об одной задаче F. Riesz'a и обобщенной задаче Чебышева — Коркина — Золотарева // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1939. № 3. С. 279–288.
8. **Граве Д.А.** Трактат по алгебраическому анализу. Т. 1: Начала науки. Киев: Изд-во АН УССР, 1938. 208 с.
9. **Дейкалова М.В.** Функционал Тайкова в пространстве алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере // Мат. заметки. 2008. Т. 84, вып. 4. С. 532–551.
10. **Золотарев Е.И.** Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее отклоняющихся от нуля: полн. собр. соч. Вып. 2. Л.: Изд-во АН СССР, 1932. С. 1–59.
11. **Корнейчук Н.П.** Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука, 1976. 320 с.
12. **Коркин А.Н.** Сочинения. Т. 1. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-т, 1911.
13. **Марков А.А.** Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 411 с.
14. **Натансон И.П.** Конструктивная теория функций. М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. 688 с.
15. **Никольский С.М.** Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1946. Т. 10. С. 207–256.
16. **Пашковский С.** Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука, 1983. 406 с.
17. **Сеге Г.** Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.
18. **Чебышев П.Л.** Теория механизмов, известных под названием параллелограммов // Избр. тр. М.: Изд-во АН СССР, 1955. С. 611–648.
19. **Чебышев П.Л.** О полиномах, наилучше представляющих значения простейших дробных функций при величинах переменной, заключающихся между двумя данными пределами: полн. собр. соч. в 5 т. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. Т. 3: Математический анализ. С. 363–372.
20. **Чебышев П.Л.** О функциях, мало удаляющихся от нуля при некоторых величинах переменной: полн. собр. соч. Т. 3. С. 108–127.
21. **DeVore R.A., Lorentz G.G.** Constructive approximation. Berlin: Springer-Verlag, 1993. 446 p.
22. **Eremenko A., Yuditskii P.** Uniform approximation of $\operatorname{sgn} x$ by polynomials and entire functions // J. Anal. Math. 2007. Vol. 101. P. 313–324.
23. **Geronimus J.** Sur quelques propriétés extrémales polynômes, dont les coefficients premiers sont donnés // Сообщ. Харьк. мат. о-ва. Сер. 4. 1935. Т. 12. С. 49–59.
24. **Geronimus J.** On some extremal properties of polynomials // Ann. Math. 1936. Vol. 37, no. 2. P. 483–517.
25. **Meinardus G.** Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung. Berlin: Springer, 1964. 180 p.
26. **Peherstorfer F.** Trigonometric polynomials approximation in L^1-norm // Math. Z. 1979. Vol. 169, no. 3. P. 261–269.

27. **Peherstorfer F.** On the representation of extremal functions in the L^1-norm // J. Approx. Theory. 1979. Vol. 27, no. 1. P. 61–75.
28. **Vaaler J.D.** Some extremal functions in Fourier analysis // Bull. Amer. Math. Soc. (New Series). 1985. Vol. 12, no. 2. P. 183–216.

Бабенко Александр Григорьевич
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: babenko@imm.uran.ru

Поступила 03.05.2008

Kryakin, Yuriy
dr hab.
Mathematical Institute
University of Wroclaw
e-mail: kryakin@math.uni.wroc.pl

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14 № 3 2008

УДК 517.5

АСИМПТОТИКА НАИБОЛЬШЕГО НУЛЯ МНОГОЧЛЕНА, ОРТОГОНАЛЬНОГО НА ОТРЕЗКЕ С НЕКЛАССИЧЕСКИМ ВЕСОМ[1]

В. М. Бадков

Пусть $\{p_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ — система алгебраических многочленов, ортонормированная на отрезке $[-1,1]$ с весом $p(t)$; $\{x_{n,\nu}^{(p)}\}_{\nu=1}^{n}$ — нули многочлена $p_n(t)$ ($x_{n,\nu}^{(p)} = \cos\theta_{n,\nu}^{(p)}$; $0 < \theta_{n,1}^{(p)} < \theta_{n,2}^{(p)} < \ldots < \theta_{n,n}^{(p)} < \pi$). Известно, что для широкого класса весов $p(t)$, содержащего вес Якоби, величины $\theta_{n,1}^{(p)}$ и $1 - x_{n,1}^{(p)}$ по порядку совпадают с n^{-1} и n^{-2} соответственно. В настоящей работе устанавливается, что если вес $p(t)$ имеет вид $p(t) = 4(1-t^2)^{-1}\{\ln^2[(1+t)/(1-t)] + \pi^2\}^{-1}$, то при $n \to \infty$ справедливы асимптотические формулы

$$\theta_{n,1}^{(p)} = \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\ln(n+1)}}\left[1 + O\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right)\right], \qquad x_{n,1}^{(p)} = 1 - \frac{1}{n^2\ln(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^2\ln^2(n+1)}\right).$$

Ключевые слова: ортогональные многочлены, неклассический вес, асимптотика наибольшего нуля.

1. Введение

Всюду ниже $\mathbb{R} := (-\infty,\infty)$, $\mathbb{Z}_+ := \{0,1,\ldots\}$, $\mathbb{N} := \{1,2,\ldots\}$, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, L^1 — пространство 2π-периодических суммируемых на $[0,2\pi)$ функций.

Пусть $\{p_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ — система алгебраических многочленов, ортонормированная на отрезке $[-1,1]$ с весом $p(t)$; $\{x_{n,\nu}^{(p)}\}_{\nu=1}^{n}$ — нули многочлена $p_n(t)$, занумерованные в порядке убывания: $x_{n,\nu}^{(p)} = \cos\theta_{n,\nu}^{(p)}$ $\quad (0 < \theta_{n,1}^{(p)} < \theta_{n,2}^{(p)} < \ldots < \theta_{n,n}^{(p)} < \pi)$.

В [4, разд. 7] указан широкий класс весов $p(t)$ с особенностями (содержащий в себе вес Якоби) таких, что равномерно относительно произвольной пары τ', τ'' $(\tau' < \tau'')$ соседних нулей функции $p_n(\cos\tau)$ выполняется порядковое соотношение $\tau'' - \tau' \asymp n^{-1}$, а потому $\theta_{n,1}^{(p)} \asymp n^{-1}$. До последнего времени не был известен пример веса $p(t)$, для которого $\theta_{n,1}^{(p)} = o(n^{-1})$ или (что то же самое) $1 - x_{n,1}^{(p)} = o(n^{-2})$. В настоящей работе устанавливается следующая теорема, дающая такой пример.

Теорема. *Пусть вес $p(t)$ имеет вид*

$$p(t) = 4(1-t^2)^{-1}\{\ln^2[(1+t)/(1-t)] + \pi^2\}^{-1}. \tag{1.1}$$

Тогда при $n \to \infty$ справедливы асимптотические формулы

$$\theta_{n,1}^{(p)} = \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\ln(n+1)}}\left[1 + O\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right)\right], \qquad x_{n,1}^{(p)} = 1 - \frac{1}{n^2\ln(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^2\ln^2(n+1)}\right). \tag{1.2}$$

Формулы (1.2) равносильны. Доказательство теоремы основано на равенстве

$$\frac{p_n'(1)}{p_n(1)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{1 - x_{n,\nu}^{(p)}} \tag{1.3}$$

[1] Исследования поддержаны РФФИ (проект 08-01-00213) и Программой государственной поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-1071.2008.1).

и лемме, приведенной ниже. А именно, при помощи устанавливаемой в лемме формулы для левой части (1.3) находится асимптотика. Затем доказывается, что сумма слагаемых с номерами $\nu \geq 2$ в правой части (1.3) мала по сравнению с левой частью (1.3). Эта схема неприменима к многочлену Якоби, так как для него $1-x_{n,1}^{(p)} \asymp 1-x_{n,2}^{(p)} \asymp n^{-2}$, а порядок левой части есть n^{-2}.

2. Формула для производной $p_n^{(j)}(1)$

Ниже будет использована (при $j=1$) следующая

Лемма. *Пусть j и $n \in \mathbb{N}$, $j \leq n$, а $p(t)$ — вес на $[-1,1]$. Тогда выполняется равенство*

$$\frac{p_n^{(j)}(1)}{p_n(1)} = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{j}{A_m^{(p)} p_m(1) p_{m+1}(1)} \sum_{\nu=0}^{m} p_\nu^{(j-1)}(1) p_\nu(1), \tag{2.1}$$

где $A_m^{(p)} := k_m^{(p)}/k_{m+1}^{(p)}$, $k_m^{(p)}$ — коэффициент при t^m многочлена $p_m(t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся формулой Кристоффеля — Дарбу (см. [6, 7])

$$(t-1)\sum_{\nu=0}^{m} p_\nu(t)p_\nu(1) = A_m^{(p)}\big[p_{m+1}(t)p_m(1) - p_m(t)p_{m+1}(1)\big]. \tag{2.2}$$

Дифференцируя формулу (2.2) j раз, получаем равенство

$$(t-1)\sum_{\nu=0}^{m} p_\nu^{(j)}(t)p_\nu(1) + j\sum_{\nu=0}^{m} p_\nu^{(j-1)}(t)p_\nu(1) = A_m^{(p)}\Big[p_{m+1}^{(j)}(t)p_m(1) - p_m^{(j)}(t)p_{m+1}(1)\Big]. \tag{2.3}$$

Разделив на $A_m^{(p)} p_m(1)p_{m+1}(1)$ обе части (2.3) и затем положив $t=1$, найдем, что

$$\frac{p_{m+1}^{(j)}(1)}{p_{m+1}(1)} - \frac{p_m^{(j)}(1)}{p_m(1)} = \frac{j}{A_m^{(p)} p_m(1)p_{m+1}(1)} \sum_{\nu=0}^{m} p_\nu^{(j-1)}(1)p_\nu(1). \tag{2.4}$$

Складывая равенства, получающиеся из (2.4) при $m = 0, 1, \ldots, n-1$, приходим к (2.1).

3. Доказательство теоремы

Вначале докажем, что если вес $p(t)$ задан формулой (1.1), то

$$p_n(1) = [(2n+1)/2]^{1/2}(n+1)^{-1} = (n+1)^{-1/2}\big[1 + O((n+1)^{-1})\big]. \tag{3.1}$$

Для этого рассмотрим веса $\varphi(\tau) := p(\cos\tau)|\sin\tau|$, $\psi^{\alpha,\beta}(\tau) := (1-\cos\tau)^{\alpha+1/2}(1+\cos\tau)^{\beta+1/2}$ и ортонормированные относительно них на окружности $|z|=1$ системы алгебраических многочленов $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^\infty$, $\{\psi_n^{\alpha,\beta}(z)\}_{n=0}^\infty$. В [3, разд. 12] установлено, что для веса $\psi^{0,0}(\tau) = |\sin\tau|$ система $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^\infty$ является системой многочленов второго рода. Поэтому (см. [5, формула (1.17)])

$$\psi_n^{0,0}(z)\overline{\varphi_n(1/\overline{z})} + \overline{\psi_n^{0,0}(1/\overline{z})}\varphi_n(z) = 2/c_0, \tag{3.2}$$

где

$$c_0 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi^{0,0}(\tau)\,d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin\tau\,d\tau = \frac{2}{\pi}. \tag{3.3}$$

В силу четности весов $\varphi(\tau)$ и $\psi^{0,0}(\tau)$ многочлены $\varphi_n(z)$ и $\psi_n^{0,0}(z)$ при $z \in \mathbb{R}$ принимают вещественные значения. Поэтому из (3.2) и (3.3) следует, что

$$\psi_n^{0,0}(1)\varphi_n(1) = \pi/2 \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{3.4}$$

В [2, формула (2.12)] установлено, что

$$\psi_{2n}^{0,0}(1) = \sqrt{\frac{\pi}{2}(n+1)} \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{3.5}$$

Из (3.4) и (3.5) выводим равенство

$$\varphi_{2n}(1) = \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}}. \tag{3.6}$$

По формуле Сегё (см. [6, формулы (11.5.2)])

$$p_n(2^{-1}(z+z^{-1})) = (2\pi)^{-1/2}\{1+\varphi_{2n}(0)/\kappa_{2n}(\varphi)\}^{-1/2}\{z^{-n}\varphi_{2n}(z) + z^n\varphi_{2n}(z^{-1})\}, \tag{3.7}$$

где $\kappa_n(\varphi)$ — старший коэффициент многочлена $\varphi_n(z)$. В силу соотношений

$$\kappa_n(\varphi) = \kappa_n(\psi^{0,0}) \qquad (n \in \mathbb{Z}_+), \qquad \varphi_n(0) = -\psi_n^{0,0}(0) \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{3.8}$$

(см. [5, гл. 8]) и

$$\psi_{2n}^{0,0}(0)/\kappa_{2n}(\psi^{0,0}) = -(2n+1)^{-1} \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{3.9}$$

(см. [2, формула (2.2)]) из (3.7) следует, что

$$p_n(1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}\,\frac{2n+2}{2n+1}}\varphi_{2n}(1) \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{3.10}$$

Из (3.10) и (3.6) получаем (3.1).

Покажем, что

$$A_n^{(p)} := k_n^{(p)}/k_{n+1}^{(p)} = 2^{-1}\big[1 + O((n+1)^{-1})\big]. \tag{3.11}$$

Для этого, сравнивая коэффициенты при z^n в левой и правой частях (3.7), получаем, что

$$2^{-n}k_n^{(p)} = (2\pi)^{-1/2}\{1+\varphi_{2n}(0)/\kappa_{2n}(\varphi)\}^{-1/2}[\kappa_{2n}(\varphi) + \varphi_{2n}(0)]. \tag{3.12}$$

В силу (3.12)

$$A_n^{(p)} = \frac{1}{2}\,\frac{\kappa_{2n}(\varphi)}{\kappa_{2n+2}(\varphi)}\sqrt{\frac{1+\varphi_{2n}(0)/\kappa_{2n}(\varphi)}{1+\varphi_{2n+2}(0)/\kappa_{2n+2}(\varphi)}}. \tag{3.13}$$

Поскольку $\kappa_{n+1}^2(\varphi) - \kappa_n^2(\varphi) = |\varphi_{n+1}(0)|^2$ (см. [5, формула (1.5)]), то из (3.8), (3.9) и неравенств $0 < \lim\limits_{n\to\infty}\kappa_n(\varphi) < \infty$ (выполняющихся в силу того, что $\ln\varphi(\tau) \in L^1$) следует, что

$$[\kappa_{2n+2}(\varphi)/\kappa_{2n}(\varphi)]^2 = 1 + O((n+1)^{-2}). \tag{3.14}$$

Из (3.13), (3.14), (3.8) и (3.9) выводим (3.11).

Докажем, что

$$p_n'(1)/p_n(1) = n^2\ln(n+1) + O(n^2). \tag{3.15}$$

Согласно формуле (2.1) при $j = 1$ выполняется равенство

$$\frac{p_n'(1)}{p_n(1)} = \sum_{m=0}^{n-1}\frac{1}{A_m^{(p)}p_m(1)p_{m+1}(1)}\sum_{\nu=0}^{m}p_\nu^2(1). \tag{3.16}$$

В силу (3.16), (3.11) и (3.1)

$$\frac{p_n'(1)}{p_n(1)}=2\sum_{m=1}^{n-1}(m+1)\ln(m+1)\left[1+O\left(\frac{1}{m+1}\right)\right]=2\sum_{m=1}^{n-1}(m+1)\ln(m+1)+O(n\ln(n+1)). \quad (3.17)$$

Из (3.17) следует (3.15), так как

$$2(m+1)\ln(m+1)=\left[(m+1)^2\ln(m+1)-m^2\ln m\right]-m^2\left[\ln(m+1)-\ln m\right]+\ln(m+1),$$

в силу чего

$$2\sum_{m=1}^{n-1}(m+1)\ln(m+1)=n^2\ln(n+1)+O(n^2).$$

Убедимся в том, что

$$\sum_{\nu=2}^{n}\frac{1}{1-x_{n,\nu}^{(p)}}=O(n^2). \quad (3.18)$$

Пусть $\{r_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ — система алгебраических многочленов, ортонормированная на отрезке $[-1,1]$ с весом $r(t):=(1-t^2)p(t)$. Тогда нули многочленов $p_n(t)$ и $(1-t^2)r_{n-1}(t)$ перемежаются, т. е. $-1<x_{n,n}^{(p)}<x_{n-1,n-1}^{(r)}<\ldots<x_{n,2}^{(p)}<x_{n-1,1}^{(r)}<x_{n,1}^{(p)}<1$ (см. [4, разд. 6]). Поэтому

$$\sum_{\nu=2}^{n}\frac{1}{1-x_{n,\nu}^{(p)}}\le\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{1-x_{n-1,\nu}^{(r)}}. \quad (3.19)$$

Известно (см. [8] и [6, формула (III.43)]), что $\{r_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ есть система многочленов Лежандра второго рода, а потому нули многочлена $r_{n-1}(t)$ перемежаются с нулями $\{x_{n,\nu}^{0,0}\}_{\nu=1}^{n}$ многочлена Лежандра $P_n(t)$ (см. [1, гл. 1, § 2.2, теорема 1.2.2]), в силу чего $x_{n-1,\nu}^{(r)}<x_{n,\nu}^{0,0}$ $(\nu=1,\ldots,n-1)$. Поэтому выполняются неравенства

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{1-x_{n-1,\nu}^{(r)}}\le\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{1-x_{n,\nu}^{0,0}}\le\frac{P_n'(1)}{P_n(1)}. \quad (3.20)$$

Так как $P_n'(1)/P_n(1)=n(n+1)/2$ (см. [6,7]), то из (3.19) и (3.20) следует (3.18).

Следствием (1.3), (3.15) и (3.18) является вторая из формул (1.2), а из нее вытекает и первая.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ахиезер Н.И.** Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа. М.: Физматгиз, 1961. 310 с.
2. **Бадков В.М.** Равномерные асимптотические представления ортогональных полиномов // Тр. МИАН. 1983. Т. 164. С. 6–36.
3. **Бадков В.М.** Асимптотические и экстремальные свойства ортогональных полиномов при наличии особенностей у веса // Тр. МИАН. 1992. Т. 198. С. 41–88.
4. **Бадков В.М.** О нулях ортогональных полиномов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 30–46.
5. **Геронимус Я.Л.** Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке: Оценки, асимптотические формулы, ортогональные ряды. М.: Физматгиз, 1958. 240 с.
6. **Сегё Г.** Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.

7. **Суетин П.К.** Классические ортогональные многочлены. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Физматлит, 2005. 480 с.
8. **Sherman J.** On the numerators of the convergents of the Stieltjes continued fractions // Trans. Amer. Math. Soc. 1933. Vol. 35, no. 1. P. 64–87.

Бадков Владимир Михайлович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: Vladimir.Badkov@imm.uran.ru

Поступила 29.04.2008

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14 № 3 2008

УДК 517.51

О НЕКОТОРЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МНОГОЧЛЕНАХ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ НА ТРЕХМЕРНОМ СИМПЛЕКСЕ[1]

Н. В. Байдакова

Рассматриваемая задача интерполяции связана с методом конечных элементов в $\mathbb{R}^3$. В большинстве случаев при построении конечных элементов с разбиением исходной области в $\mathbb{R}^2$ на треугольники и интерполяцией типа Эрмита или Биркгофа в знаменателях оценок погрешности для производных присутствует синус наименьшего угла треугольника. В случае $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 3)$ используется аналог этой характеристики, представляющий отношение радиуса вписанного шара к диаметру симплекса. Это ведет к необходимости наложения ограничений на триангуляцию области. Исследования последних лет ряда авторов показывают, что в случае треугольников наименьший угол в оценках погрешности для некоторых интерполяционных процессов может быть заменен на средний или наибольший, что дает возможность ослабить требования к триангуляции. Для $m \geq 3$ работ такого рода несколько меньше, и оценки погрешности в них даются через другие характеристики симплекса. В статье предлагаются способы построения интерполяционного многочлена третьей степени на симплексе в $\mathbb{R}^3$, ведущие к получению оценок через новую характеристику достаточно простого вида и позволяющие снизить требования к триангуляции.

Ключевые слова: многомерная интерполяция, метод конечных элементов.

Введение

Пусть T — симплекс из триангуляции некоторой исходной области в $\mathbb{R}^m$, f — функция m переменных, непрерывная на T вместе со всеми частными производными до порядка $n+1$ включительно, причем производные $n+1$ порядка по любым направлениям $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}$ ограничены на T числом M_{n+1} :

$$||D^{n+1}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_{n+1}} f||_C \leq M_{n+1}.$$

Рассмотрим задачу интерполяции функции f многочленом P_n степени не выше n на T.

Известно, что при достаточно общих ограничениях на множество T из триангуляции (это необязательно симплекс) и на условия интерполяции имеют место следующие оценки погрешности аппроксимации производных [1]:

$$||D^k f(u) - D^k P_n(u)||_C \leq C M_{n+1} \frac{H^{n+1}}{\rho^k} \qquad (0 \leq k \leq n), \tag{0.1}$$

где $u \in T \subset \mathbb{R}^m$, $P_n(u)$ — интерполяционный многочлен типа Лагранжа, Эрмита или Биркгофа степени не выше n по совокупности переменных (степень монома есть сумма степеней всех его переменных, степень $P_n(u)$ есть максимум степеней его мономов); H — диаметр T; ρ — радиус шара, вписанного в T; C — константа, не зависящая от f и геометрии T.

В случае, когда T — треугольник, правая часть (0.1) с точностью до абсолютных констант эквивалентна величине

$$C M_{n+1} H^{n+1-k} \sin^{-k} \alpha,$$

[1]Работа поддержана грантом РФФИ (проект 08-01-00320), грантом Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (НШ-1071.2008.1) и целевой программой поддержки междисциплинарных проектов между УрО РАН и СО РАН.

где α — наименьший из углов треугольника. В двумерном случае такая оценка фигурирует и у других авторов [2–4]. Отметим, что в большинстве указанных здесь и ниже работ речь идет не только о полученных авторами оценках, но и о выборе ими способов интерполяции.

Указанные оценки накладывают ограничение на триангуляцию области — так называемое "условие наименьшего угла" или его обобщение — требование ограничения сверху отношений диаметров множеств из триангуляции области к радиусам наибольших содержащихся в них шаров в случае больших размерностей. Вместе с тем в 1957 г. Дж. Синг [5] и в 1976 И. Бабушка и А. Азиз [6] привели примеры многочленов малых степеней (первой и второй), показывающие, что "условие наименьшего угла треугольника" в некоторых случаях можно заменить ограничением на наибольший угол, т. е. более слабым.

В дальнейшем разными авторами было показано, что в ряде случаев при соответствующем выборе интерполяционных условий для $m \geq 2$ оценки (0.1) могут быть улучшены, что позволяет накладывать на триангуляцию менее жесткие ограничения. Так, для случая лагранжевой интерполяции многочленами произвольной степени на m-симплексе ($m = 2$ — 1981 г., m произвольное — 1989) Ю. Н. Субботиным были получены следующие оценки [8] (см. также [7]).

Пусть $\{a_j\}$ — вершины симплекса $T \in \mathbb{R}^m$ и

$$b_{ji} = a_j - a_i \qquad (j = 1, \ldots, m+1; \quad j \neq i).$$

Обозначим α угол между выбранным вектором $b_{j_0,i}$ и нормалью к гиперплоскости, проходящей через оставшиеся векторы b_{ji} (направление нормали выбирается так, чтобы угол между ней и вектором $b_{j_0,i}$ не превосходил $\pi/2$). Пусть

$$\gamma_{j_0,i} = 1/\cos\alpha, \qquad \gamma_i = \sup \gamma_{j_0,i} \qquad (1 \leq j_0 \leq m+1; \quad j_0 \neq i),$$

$$\gamma = \inf \gamma_i.$$

Теорема 1 (Ю. Н. Субботин [8]). *Для любой функции $f \in WM_{n+1}$ справедливы неравенства*

$$|D^s f(u) - D^s P_n(u)| \leq C\gamma^s M_{n+1} H^{n+1-s} \qquad (0 \leq s \leq n),$$

где $u \in T$, P_n — интерполяционный многочлен типа Лагранжа, интерполирующий f в "равномерных" узлах симплекса T, а константа C не зависит от f и T.

Указанные оценки позволяют снизить требования к триангуляции, в частности в случае $\mathbb{R}^2$ ограничения налагаются лишь на наибольший угол треугольника.

Для случая кратной интерполяции Ю. Н. Субботиным были получены неулучшаемые или неулучшаемые с точки зрения геометрии симплекса оценки приближения функций и их производных некоторыми интерполяционными многочленами Эрмита и Биркгофа малых степеней на треугольниках и m-симплексах [8–10], позволяющие ослабить "условие наименьшего угла" или показывающие, что данное условие является существенным. Этому же направлению посвящены работы автора [11] и Н. В. Латыповой [12], в которых найдены интерполяционные условия типа Биркгофа для построения многочленов степеней $4m+1$ и $4m+3$ на треугольнике, дающие возможность ослабить требования к триангуляции (но не освобождающие оценки полностью от присутствия синуса наименьшего угла в знаменателе в оценках погрешности для производных). В [13] был рассмотрен также ряд таких условий для многочленов 3-й степени.

В случае интерполяции функции на треугольнике многочленами Эрмита 3-й степени можно подобрать условия интерполяции таким образом, что оценки приближения функции и ее производных будут иметь вид

$$|D^s f(u) - D^s P_3(u)| \leq CM_4 H^{4-s}/(\sin\beta)^s \qquad (0 \leq s \leq 3),$$

где β — средний или наибольший угол треугольника. Для $s = 0, 1$ такие условия интерполяции представил Женишек [14], для $0 \leq s \leq 3$ — Ю. Н. Субботин [15] и автор [16].

Вопросы о возможности построения интерполяционного многочлена произвольной степени на m-симплексе, обеспечивающего высокую гладкость кусочно полиномиальной функции на триангулированной области, и в то же время позволяющего минимизировать ограничения на триангуляцию, а также о выборе универсальной геометрической характеристики симплекса, через которую могли бы выписываться оценки погрешности для таких способов интерполяции, остаются на данный момент открытыми.

В работах Женишека, Ходеровой-Зламаловой [17] и Ю. В. Матвеевой [18, 19] рассматривается интерполяция многочленами 3-й степени на трехмерном и m-мерном симплексах. В [17] предлагаются условия интерполяции функции трех переменных и устанавливаются соответствующие им оценки аппроксимации первых производных через довольно сложные, но, по мнению автора данной статьи, дающие хорошую точность оценок характеристики. Найденные интерполяционные условия позволяют ослабить требования на симплексы, но не всегда обеспечивают непрерывность результирующей кусочно полиномиальной функции, а их корректировка с целью добиться непрерывности в ряде случаев приводит к необходимости усиления ограничений на триангуляцию. В [18] и [19] для симплексов в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^m$ выбираются условия интерполяции и даются оценки аппроксимации производных функции до третьего порядка включительно по специально выбранным направлениям. Найденные условия также не всегда обеспечивают непрерывность результирующей кусочно полиномиальной функции на исходной области. Оценки производных по выбранным направлениям позволяют получить оценки и для произвольных направлений (например, методом, который используется в данной работе), однако, если говорить о множестве всех производных первого порядка в случае $\mathbb{R}^3$, такие оценки будут менее точными, чем в [17].

В настоящей работе рассмотрен новый частный случай проблемы: вводится достаточно простая характеристика симплекса $T \subset \mathbb{R}^3$, и предлагается способ интерполяции функции f многочленом третьей степени на T, допускающий в ряде случаев возможность построения непрерывной кусочно полиномиальной функции на исходной области; для данного способа интерполяции получены оценки аппроксимации производных в произвольных направлениях до третьего порядка включительно, зависящие только от введенной характеристики и позволяющие накладывать менее жесткие условия на симплекс, чем того требуют оценки (0.1). Полученные оценки дают бóльшую точность, чем оценки в [19] для $\mathbb{R}^3$. Для случая производных первого порядка найденные оценки дают примерно ту же точность (не меньшую), что и в [17], но через более простую характеристику.

Ниже приведем результаты, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Теорема 2 (A. Ženišek [2]). *Пусть $g(u)$ — функция действительной переменной $u \in [0, d]$, непрерывная на $[0, d]$ и имеющая ограниченную константой M_{n+1} производную порядка $n+1$ на $(0, d)$. Пусть $u_0 = 0 < u_1 < \ldots < u_r = d$ и значения функции и ее производных удовлетворяют неравенствам*

$$|g(u_i)| \le \zeta_i^0, \quad \ldots, \quad \left|g^{(\alpha_i - 1)}(u_i)\right| \le \zeta_i^{(\alpha_i-1)} \qquad (i = 0, \ldots, r),$$

где $\zeta_i^{(k)}$ — константы, α_i — натуральные числа, удовлетворяющие условию

$$\alpha_0 + \ldots + \alpha_r = n + 1.$$

Пусть $\zeta = \max\limits_{i=0,\ldots,r} \left| \max\limits_{k=0,\ldots,\alpha_i-1} d^k \zeta_i^{(k)} \right|$. Тогда

$$\left|g^{(p)}(u)\right| \le K_{2p+1} d^{-p} \zeta + K_{2p+2} M d^{n+1-p}, \qquad u \in [0, d] \qquad (p = 0, \ldots, n+1),$$

где K_{2p+1}, K_{2p+2} — некоторые константы.

Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ — невырожденный треугольник, H — его диаметр; a_i $(i = 1, 2, 3)$ — вершины треугольника Δ. Внутренние углы треугольника при вершинах a_1, a_2, a_3 обозначим через α, β, θ соответственно. Пусть $0 < \alpha \le \beta \le \theta$ или $0 < \alpha \le \theta \le \beta$, т. е. угол при вершине a_2 является средним или наибольшим углом треугольника. Разместим треугольник в прямоугольной системе координат $0xy$ так, чтобы ось $0x$ была параллельна стороне a_1a_2.

Через τ_{ij} обозначим единичные векторы, направленные от a_i к a_j $(1 \le i, j \le 3,\ i \ne j)$; $P_3(x, y)$ $(= P_3(z),\ z = (x, y))$ — многочлен степени не выше 3 по совокупности переменных, удовлетворяющий следующим интерполяционным условиям:

$$f(a_i) = P_3(a_i) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{0.2}$$

$$\frac{\partial f(a_i)}{\partial x} = \frac{\partial P_3(a_i)}{\partial x} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{0.3}$$

$$\frac{\partial f(a_i)}{\partial y} = \frac{\partial P_3(a_i)}{\partial y} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{0.4}$$

$$\frac{\partial^2 f(a_2)}{\partial \tau_{21} \partial \tau_{23}} = \frac{\partial^2 P_3(a_2)}{\partial \tau_{21} \partial \tau_{23}}. \tag{0.5}$$

Наконец, пусть

$$e(x, y) = f(x, y) - P_3(x, y).$$

Далее будет рассматриваться класс W^4M функций, непрерывных на Δ вместе со всеми частными производными до порядка 4 включительно и у которых все производные четвертого порядка ограничены по модулю константой M.

Теорема 3. *Для любой функции $f \in W^4M$ справедливы неравенства*

$$\left| \frac{\partial^n e(x, y)}{\partial x^{n-j} \partial y^j} \right| \le CMH^{4-n} \frac{1}{\sin^j \beta}, \tag{0.6}$$

где $(x, y) \in \Delta$, $0 \le n \le 3$, $0 \le j \le n$; β — средний или наибольший угол треугольника Δ, константа C не зависит от f и Δ.

В сформулированном виде теорема является объединением теоремы 1 и замечаний 1, 2 из [16]. Кроме того, справедливы очевидные следствия.

Следствие 1. *Для любой функции $f \in W^4M$ выполняются неравенства*

$$\left| \frac{\partial^n e(x, y)}{\partial \tau_{ij}^{n-s} \partial \xi^s} \right| \le \frac{CMH^{4-n}}{\sin^s \beta}, \tag{0.7}$$

где $(x, y) \in \Delta$, $1 \le i, j \le 3$, $i \ne j$, ξ — произвольное направление, $0 \le n \le 3$, $0 \le s \le n$; β — средний или наибольший угол треугольника Δ, а константа C не зависит от f и Δ.

Следствие 2. *Для любой функции $f \in W^4M$ справедливы неравенства*

$$\left| \frac{\partial^{s+p+q} e(x, y)}{\partial \tau_{ij}^s \partial \tau_{ik}^p \partial \tau_{jk}^q} \right| \le CMH^{4-n}, \tag{0.8}$$

где $(x, y) \in \Delta$, $0 \le s + p + q \le 3$, $0 \le s, p, q \le 3$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, а константа C не зависит от f и Δ.

Константы C в оценках (0.6)–(0.8) являются, вообще говоря, разными.

Оценки (0.7) и (0.8) следуют из (0.6) и из того, что $\tau_{21} = (1, 0)$, $\tau_{13} = (-\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\tau_{23} = (\cos\beta, \sin\beta)$ или $\tau_{23} = (\cos\theta, \sin\theta)$ (в зависимости от выбора системы координат xy), поскольку $\partial e/\partial\tau = (\partial e/\partial x)\tau_x + (\partial e/\partial y)\tau_y$, где $\tau = (\tau_x, \tau_y)$, $(\tau_x)^2 + (\tau_y)^2 = 1$. Следствие 2 независимо доказано Ю. В. Матвеевой [20].

Отметим, что так как $0.5 \sin\theta \le \sin\beta \le \sin\theta$ (где β — средний, θ — наибольший углы треугольника), то не имеет значения, какой из этих углов будет присутствовать в правых частях оценок (0.6)–(0.7), поскольку оценки выписаны с точностью до постоянных множителей.

1. Выбор интерполяционных условий

Пусть далее T — симплекс в $\mathbb{R}^3$ с вершинами a_1, a_2, a_3, a_4; H — диаметр T. Через T_i будем обозначать грани T напротив вершин a_i; через α_i, β_i, θ_i — соответственно наименьший, средний и наибольший углы в T_i. Положим $\tau_{ij} = (a_j - a_i)/|a_j - a_i|$.

Пусть функция f непрерывна на T вместе со всеми частными производными до порядка 4 включительно, причем для любых задающих направления единичных векторов $\xi_1, \ldots, \xi_4$ абсолютные значения производных $D^4_{\xi_1,\ldots,\xi_4} f$ ограничены на T числом M.

Рассмотрим полином P_3 степени не выше 3 по совокупности переменных (степень любого монома в P_3 не превосходит 3), интерполирующий функцию f и ее производные на T. Такой полином задается с помощью 20 условий, из которых 16, как обычно, имеют следующий вид:

$$P_3(a_i) = f(a_i) \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial P_3(a_i)}{\partial \tau_{ij}} = \frac{\partial f(a_i)}{\partial \tau_{ij}} \qquad (i = 1, 2, 3, 4; \quad j \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{i\}). \tag{1.2}$$

Оставшиеся условия могут варьироваться, при этом желательно выбирать их таким образом, чтобы в итоге можно было обеспечить непрерывность кусочно полиномиальной функции на исходной триангулированной области. Мы будем задавать по одной смешанной производной на каждой грани T_i в вершине при среднем или наибольшем угле. Таким образом, на каждой из граней многочлен P_3, становясь многочленом двух переменных, будет удовлетворять условиям вида (0.2)–(0.5).

Чтобы определить, в каком из углов каждого треугольника T_i будут задаваться смешанные производные, будем различать симплексы двух типов: К1 и К2. К типу К1 отнесем симплексы, у которых наименьшее и следующее по величине ребра (условимся далее два таких ребра называть наименьшими) не имеют общих точек, к типу К2 — симплексы, у которых такие ребра имеют общую вершину.

Пусть у симплекса типа К1 наименьшими являются ребра a_1a_4 и a_2a_3, т. е. $\max\{|a_1 - a_4|, |a_2 - a_3|\} \le \min\{|a_1 - a_2|, |a_1 - a_3|, |a_2 - a_4|, |a_3 - a_4|\}$ (см. рис. 1). Для данного типа симплекса две смешанные производные зададим в одной из точек a_1 или a_4 и две — в одной из точек a_2 или a_3. Для определенности пусть это будут точки a_1 и a_2:

$$\frac{\partial^2 P_3(a_i)}{\partial \tau_{ij} \partial \tau_{ik}} = \frac{\partial^2 f(a_i)}{\partial \tau_{ij} \partial \tau_{ik}} \qquad \big((i, j, k) \in \{(1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 1, 3), (2, 4, 3)\}\big). \tag{1.3}$$

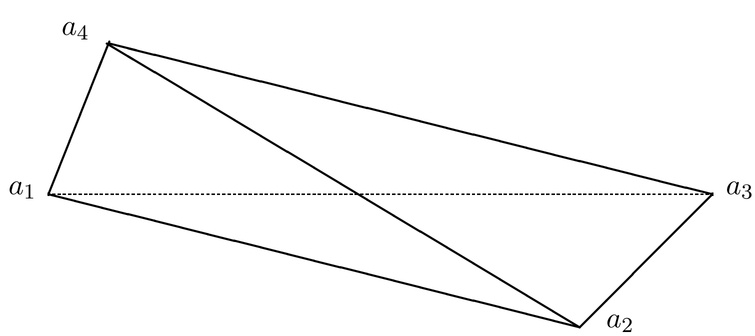


Рис. 1. Симплекс типа К1.

Для симплекса типа К2 будем предполагать, что наименьшее и следующее по величине ребра принадлежат грани T_1 (см. рис. 2), т. е.

$$\min\{\max\{|a_2 - a_3|, |a_2 - a_4|\},\ \max\{|a_2 - a_3|, |a_3 - a_4|\},\ \max\{|a_2 - a_4|, |a_3 - a_4|\}\}$$

$$\le \min\{|a_1 - a_2|, |a_1 - a_3|, |a_1 - a_4|\}.$$

Для такого симплекса рассмотрим следующие два способа задания смешанных производных.

1. Задаются по две производных в любых двух вершинах, принадлежащих T_1. Пусть это будут точки a_2 и a_3:

$$\frac{\partial^2 P_3(a_i)}{\partial\tau_{ij}\partial\tau_{ik}} = \frac{\partial^2 f(a_i)}{\partial\tau_{ij}\partial\tau_{ik}} \qquad \big((i,j,k) \in \{(2,1,3),(2,1,4),(3,1,4),(3,2,4)\}\big). \tag{1.4}$$

2. Задаются производные в вершинах, принадлежащих наименьшему ребру симплекса: три производных в одной вершине и одна — в другой. Пусть наименьшим является ребро a_2a_3. Тогда интерполяционные условия имеют вид

$$\frac{\partial^2 P_3(a_i)}{\partial\tau_{ij}\partial\tau_{ik}} = \frac{\partial^2 f(a_i)}{\partial\tau_{ij}\partial\tau_{ik}} \qquad \big((i,j,k) \in \{(3,1,2),(3,1,4),(3,2,4),(2,1,4)\}\big). \tag{1.5}$$

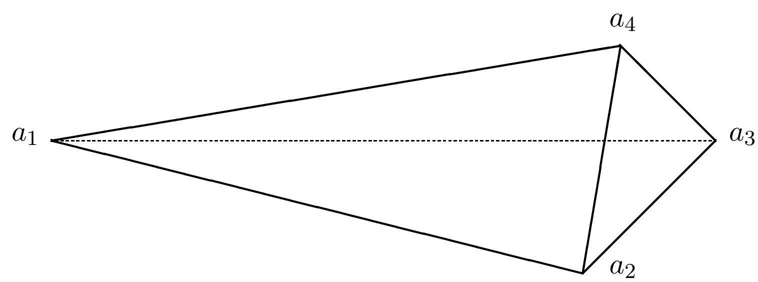


Рис. 2. Симплекс типа К2.

Пусть γ_{ij}^k — угол между a_ia_j и T_k. Обозначим через γ_i угол, для которого

$$\sin\gamma_i = \max_{\substack{1\le j\le 4\\ j\ne i}} \sin\gamma_{ij}^i\,,$$

а через γ — угол, для которого

$$\sin\gamma = \min_{1\le i\le 4} \sin\gamma_i\,.$$

Пусть $e(u) = f(u) - P_3(u)$, где $u \in T$. Далее будет доказано, что при выбранных интерполяционных условиях имеют место следующие оценки сверху:

$$\big|D^r_{\xi_1\ldots\xi_r} e(u)\big| \le \frac{CMH^{4-r}}{\sin^r\gamma}, \tag{1.6}$$

где $0 \le r \le 3$, $D^r_{\xi_1\ldots\xi_r}$ означает дифференцирование по любым направлениям $\xi_1,\ldots,\xi_r$, C — константа, не зависящая от f и T. Для каждого типа симплекса и соответствующей системы интерполяционных условий (1.1)–(1.3), (1.1), (1.2) и (1.4), (1.1), (1.2) и (1.5) будет выбрана собственная система координат xyz и доказана теорема об оценках сверху. Следствием этих теорем станет неравенство (1.6).

2. Оценки аппроксимации

Договоримся через R_i, R, C_i, C обозначать произвольные положительные константы, не зависящие от f и T, которые могут иметь разные значения в разных формулах.

Лемма 1. *Пусть функция $g(u)$, $u \in T$, непрерывна на T вместе со всеми частными производными до порядка $N+1$ включительно, а производные порядка $N+1$ ограничены на T константой M:*

$$|D^{N+1}g(u)| \le M \qquad (u \in T).$$

Рассмотрим произвольную вершину a_i симплекса T и соответствующие ей три единичных вектора τ_{ij}, $j \in \{1,2,3,4\} \setminus \{i\}$. Тогда существует константа C, зависящая только от N и такая, что

$$|g(u)| \le C \left(\max_{0 \le s+p+q \le N} \left| \frac{\partial^{s+p+q} g(a_i)}{\partial \tau_{ij}^s \partial \tau_{ik}^p \partial \tau_{il}^q} \; H^{s+p+q} \right| + MH^{N+1} \right) \qquad \big(\{j,k,l\} = \{1,2,3,4\} \setminus \{i\}\big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $h_{ij} = |a_i - a_j|$. Применим формулу Тейлора для $g(u)$ вдоль прямой L_1, проходящей через u в направлении τ_{ij}. Пусть u_j — точка пересечения грани T_j и прямой L_1, μ $(0 \le \mu \le 1)$ таково, что $\mu h_{ij} = |u - u_j|$. Тогда

$$g(u) = \sum_{s=0}^{N} \frac{1}{s!} \frac{\partial^s g(u_j)}{\partial \tau_{ij}^s} \; (\mu h_{ij})^s + E_N,$$

где $|E_N| \le C_N M H^{N+1}$, а C_N зависит только от N.

Повторим ту же процедуру для величин $\partial^s g(u_j)/\partial \tau_{ij}^s$ вдоль прямой L_2, проходящей через u_j в направлении τ_{ik}. Обозначим через u_{jk} точку пересечения L_2 и ребра $a_i a_l$. Пусть $0 \le \nu \le 1$, $\nu h_{ik} = |u_j - u_{jk}|$. Тогда

$$g(u) = \sum_{s=0}^{N} \frac{1}{s!} \; (\mu h_{ij})^s \left(\sum_{p=0}^{N-s} \frac{1}{p!} \frac{\partial^{s+p} g(u_{jk})}{\partial \tau_{ij}^s \; \partial \tau_{ik}^p} \; (\nu h_{ik})^p + E_{N-s}^s \right) + E_N,$$

где $|E_{N-s}^s| \le C_N^s M H^{N+1-s}$, а C_N^s — положительные константы, которые можно оценить сверху числом, зависящим только от N.

Наконец, применим формулу Тейлора к величинам $\partial^{s+p} g(u_{jk})/\partial \tau_{ij}^s \partial \tau_{ik}^p$ вдоль прямой L_3, проходящей через u_{jk} и a_i (сонаправленной с τ_{il}). Пусть $0 \le \lambda \le 1$, $\lambda h_{il} = |u_{jk} - a_i|$. Тогда

$$g(u) = \sum_{s=0}^{N} \frac{1}{s!} \; (\mu h_{ij})^s \sum_{p=0}^{N-s} \frac{1}{p!} \; (\nu h_{ik})^p \left(\sum_{q=0}^{N-s-p} \frac{1}{q!} \frac{\partial^{s+p+q} g(a_i)}{\partial \tau_{ij}^s \; \partial \tau_{ik}^p \; \partial \tau_{il}^q} \; (\lambda h_{il})^q + E_{N-s-p}^{sp} \right)$$
$$+ \sum_{s=0}^{N} \frac{1}{s!} \; (\mu h_{ij})^s E_{N-s}^s + E_N,$$

где $|E_{N-s-p}^{sp}| \le C_N^{sp} M H^{N+1-s-p}$, а C_N^{sp} — положительные константы, не превосходящие некоторого числа, зависящего только от N. Из полученного разложения следует утверждение леммы. $\square$

Ниже будут получены оценки для каждого типа симплексов и предложенных способов интерполяции.

I. Симплекс типа K1 и условия (1.1)–(1.3). Выберем систему координат xyz так, чтобы ось x была параллельна ребру $a_1 a_2$, в вершинах которого задаются смешанные производные (1.3). Данное ребро принадлежит граням T_4 и T_3. Пусть для определенности $\sin \beta_4 \ge \sin \beta_3$. В этом случае плоскость xy совместим с плоскостью треугольника T_4. Ось z перпендикулярна плоскости xy.

Пусть φ_x^{ij}, φ_y^{ij}, φ_z^{ij} — углы между τ_{ij} и соответствующими координатными осями. Тогда имеют место соотношения

$$|\cos \varphi_z^{14}| = \sin \gamma_{14}^4 = \sin \gamma_4, \qquad |\cos \varphi_y^{14}| \le R \sin \beta_3 \le R \sin \beta_4, \tag{2.1}$$

где R — некоторая константа, не зависящая от T. Чтобы убедиться в справедливости последних оценок, выберем направления осей x и y таким образом, чтобы углы между этими осями и вектором τ_{14} не превосходили $\pi/2$, и рассмотрим трехгранный угол с вершиной в точке a_1, образованный полупрямыми, направления которых совпадают с выбранными направлениями осей x, y и направлением вектора τ_{14}. Положим $\omega = \varphi_x^{14} + \varphi_y^{14}$. Тогда $\pi/2 \le \omega \le \pi$, откуда $0 \le \cos\varphi_y^{14} = \cos(\omega - \varphi_x^{14}) = \cos\omega\cos\varphi_x^{14} + \sin\omega\sin\varphi_x^{14} \le \sin\varphi_x^{14} \le \max\{\sin\beta_3, \sin\theta_3\} \le R\sin\beta_3 \le R\sin\beta_4$. Поскольку ниже для нас будут иметь значение абсолютные величины направляющих косинусов, требования на выбор направлений осей координат в дальнейшем можно не учитывать.

Теорема 4. *Для введенной системы координат, симплекса типа* К1 *и условий интерполяции* (1.1)–(1.3) *справедливы следующие оценки*:

$$\left|\frac{\partial^{s+p+q} e(u)}{\partial x^s\ \partial y^p\ \partial z^q}\right| \le \frac{CMH^{4-s-p-q}}{\sin^p\beta_4\ \sin^q\gamma_4}, \tag{2.2}$$

где $u \in T$; $0 \le s+p+q \le 3$; C — *константа, не зависящая от* T *и функции* f.

Доказательство. Получим сначала оценки производных функции $e(u)$ в вершине a_2. Отметим, что значения функции $e(u)$ и ее первых производных в точке a_2 равны нулю в силу условий (1.1), (1.2). Оценим значения производных второго и третьего порядков.

Лемма 2. *Пусть* $s+p+q=2$. *Тогда имеют место следующие оценки*:

$$\left|\frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x^s\ \partial y^p\ \partial z^q}\right| \le \frac{CMH^2}{\sin^p\beta_4\ \sin^q\gamma_4}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Для $q=0$ оценки (2.3) следуют из (0.6) для треугольника T_4. Остается получить (2.3) для $q=1,2$. Рассматривая T_3, согласно (0.8) получаем

$$\left|\frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x \partial \tau_{14}}\right| \le R_1 MH^2,$$

где R_1 — некоторая константа. Представляя производную по направлению τ_{14} через производные по переменным x, y, z, приходим к неравенству

$$\left|\frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x^2}\cos\varphi_x^{14} + \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x \partial y}\cos\varphi_y^{14} + \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x \partial z}\cos\varphi_z^{14}\right| \le R_1 MH^2,$$

откуда с учетом соотношений (2.1) и оценок (0.6) для T_4 получаем

$$\left|\frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x \partial z}\cos\varphi_z^{14}\right| = \left|\frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x \partial z}\sin\gamma_4\right| \le R_1 MH^2 + \left|\frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x^2}\cos\varphi_x^{14}\right| + \left|\frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x \partial y}\cos\varphi_y^{14}\right|$$

$$\le R_1 MH^2 + R_2 MH^2 + R_3 MH^2 \frac{1}{\sin\beta_4} R\sin\beta_4 \ \le CMH^2.$$

Таким образом,

$$\left|\frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x \partial z}\right| \le \frac{CMH^2}{\sin\gamma_4}. \tag{2.4}$$

Среди условий (1.3) имеются, в частности, следующие:

$$\frac{\partial}{\partial \tau_{21}}\left(\frac{\partial e(a_2)}{\partial \tau_{23}}\right) = \frac{\partial}{\partial \tau_{24}}\left(\frac{\partial e(a_2)}{\partial \tau_{23}}\right) = 0.$$

Отсюда следует равенство

$$\frac{\partial}{\partial\tau_{14}}\left(\frac{\partial e(a_2)}{\partial\tau_{23}}\right)=\frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial\tau_{23}\partial\tau_{14}}=0. \tag{2.5}$$

Переходя от производных по направлениям к производным по переменным x, y, z, используя оценки (0.6) и соотношения (1.3), как это было при выводе оценки (2.4), получаем

$$\left|\frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial y\partial z}\right|\le\frac{CMH^2}{\sin\beta_4\sin\gamma_4}. \tag{2.6}$$

Наконец, рассматривая T_3, с учетом (0.8) видим, что $\left|\dfrac{\partial^2 e(a_2)}{\partial\tau_{14}^2}\right|\le RMH^2$, откуда так же, как (2.4) и (2.6), получим последнюю оценку

$$\left|\frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial z^2}\right|\le\frac{CMH^2}{\sin^2\gamma_4}. \tag{2.7}$$

Лемма 2 доказана. □

Лемма 3. *Пусть $s+p+q=3$. Тогда имеют место следующие оценки:*

$$\left|\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^s\ \partial y^p\ \partial z^q}\right|\le\frac{CMH}{\sin^p\beta_4\ \sin^q\gamma_4}. \tag{2.8}$$

Доказательство. Как и в лемме 2, для $q=0$ оценки (2.8) следуют из (0.6) для треугольника T_4. Оставшиеся оценки для $q=1,2,3$ будем получать аналогично доказательству леммы 2, учитывая связь производных по выбранным направлениям с производными по x, y, z, оценки (0.6)–(0.8) и соотношения (2.1).

Из того, что на T_3 выполняется неравенство $\left|\dfrac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^2\ \partial\tau_{14}}\right|\le RMH$, получаем

$$\left|\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^2\ \partial z}\right|\le\frac{CMH}{\sin\gamma_4}.$$

Так как $\dfrac{\partial^2 e(a_1)}{\partial\tau_{12}\partial\tau_{14}}=\dfrac{\partial^2 e(a_1)}{\partial\tau_{13}\partial\tau_{14}}=0$ согласно (1.3), то

$$\frac{\partial^2 e(a_1)}{\partial y\partial\tau_{14}}=0, \tag{2.9}$$

откуда методом леммы 2 приходим к неравенству

$$\left|\frac{\partial^2 e(a_1)}{\partial y\ \partial z}\right|\le\frac{RMH^2}{\sin\beta_4\sin\gamma_4}. \tag{2.10}$$

Рассматривая $\dfrac{\partial^2 e}{\partial y\partial z}$ вдоль a_1a_2, из (2.6), (2.10) и теоремы 2 получаем

$$\left|\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x\partial y\partial z}\right|\le\frac{CMH}{\sin\beta_4\sin\gamma_4}.$$

Условия (1.2) и (2.5) дают

$$\frac{\partial e(a_3)}{\partial\tau_{14}}=\frac{\partial e(a_2)}{\partial\tau_{14}}=\frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial\tau_{14}\partial\tau_{23}}=0,$$

поэтому
$$\left|\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial\tau_{14}\partial\tau_{23}^2}\right| \le RM|a_2-a_3|,$$
и тогда
$$\left|\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial y^2\partial z}\right| \le \frac{CMH}{\sin^2\beta_4\sin\gamma_4}.$$

Из того, что на T_3 выполняется неравенство $\left|\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x\partial\tau_{14}^2}\right| \le RMH$, получаем
$$\left|\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x\partial z^2}\right| \le \frac{CMH}{\sin\gamma_4^2}.$$

Из (1.2) и (2.9) видим, что
$$\frac{\partial e(a_4)}{\partial y} = \frac{\partial e(a_1)}{\partial y} = \frac{\partial^2 e(a_1)}{\partial y\partial\tau_{14}} = 0,$$
откуда
$$\left|\frac{\partial^3 e(a_1)}{\partial y\partial\tau_{14}^2}\right| \le RM|a_1-a_4|,$$
и тогда
$$\left|\frac{\partial^3 e(a_1)}{\partial y\partial z^2}\right| \le \frac{CMH}{\sin^2\gamma_4} \le \frac{CMH}{\sin\beta_4\sin^2\gamma_4}.$$
Полагая $g(u) = \frac{\partial^3 e(u)}{\partial y\partial z^2}$ и $N=1$ в лемме 1, получаем
$$\left|\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial y\partial z^2}\right| \le \frac{CMH}{\sin\beta_4\sin^2\gamma_4}.$$
Наконец, так как $\left|\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial\tau_{14}^3}\right| \le RMH$ (на треугольнике T_3), получим последнюю оценку
$$\left|\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial z^3}\right| \le \frac{CMH}{\sin^3\gamma_4}.$$
Лемма доказана. □

Пусть $s,p,q,t,r,m \ge 0$ и $0 \le s+p+q+t+r+m \le 3$. Тогда, представляя производные по направлению через производные по x,y,z и оценивая их с помощью лемм 2, 3 и соотношения (2.1), будем иметь
$$\left|\frac{\partial^{s+p+q+t+r+m} e(a_2)}{\partial x^s\partial y^p\partial z^q\partial\tau_{21}^t\partial\tau_{23}^r\partial\tau_{24}^m}\right| \le \frac{CMH^{4-(s+p+q+t+r+m)}}{\sin^p\beta_4\sin^q\gamma_4}.$$
Для завершения доказательства теоремы остается применить лемму 1, положив
$$g(u) = \frac{\partial^{s+p+q} e(u)}{\partial x^s\partial y^p\partial z^q}, \qquad N = 3-(s+p+q), \qquad a_i = a_2.$$

II. Симплекс типа K2 и условия (1.1), (1.2), (1.4). Выберем систему координат xyz так, чтобы ось x была параллельна ребру a_2a_3, в вершинах которого задаются смешанные производные (1.4). Данное ребро принадлежит граням T_1 и T_4. Пусть для определенности $\sin\beta_4 \ge \sin\beta_1$. В этом случае плоскость xy совместим с плоскостью треугольника T_4. Ось z перпендикулярна плоскости xy. Направление осей значения не имеет.

Пусть, как и выше, φ_x^{ij}, φ_y^{ij}, φ_z^{ij} — углы между τ_{ij} и соответствующими координатными осями. Отметим, что так как условия (1.4) задаются в средних или наибольших углах граней T_i, ребра a_2a_4 и a_1a_4 при выбранном способе интерполяции не могут быть наименьшими в T_1 и T_2 соответственно. Тогда $|a_3 - a_4| \le 2\max\{|a_2 - a_4|, |a_1 - a_4|\}$. Таким образом, имеют место соотношения

$$|\cos\varphi_z^{34}| \ge 2\max\{\sin\gamma_{24}^4, \sin\gamma_{14}^4\} \ge R_1 \sin\gamma_4, \qquad |\cos\varphi_y^{34}| \le R_2 \sin\beta_1 \le R_2 \sin\beta_4 \tag{2.11}$$

(первое неравенство следует из соотношений между ребрами a_ia_4, $i = 1, 2, 3$; второе получаем аналогично неравенству из (2.1)).

Теорема 5. *Для введенной системы координат, симплекса типа* K2 *и условий интерполяции* (1.1), (1.2), (1.4) *справедливы следующие оценки*:

$$\left|\frac{\partial^{s+p+q} e(u)}{\partial x^s\ \partial y^p\ \partial z^q}\right| \le \frac{CMH^{4-s-p-q}}{\sin^p\beta_4\ \sin^q\gamma_4}, \tag{2.12}$$

где $u \in T$; $0 \le s + p + q \le 3$; C *— константа, не зависящая от* T *и функции* f.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства теоремы нам будут нужны оценки производных для $e(u)$ в точке a_3. Значения функции $e(u)$ и ее первых производных в a_3 равны нулю в силу условий (1.1), (1.2). Остается оценить производные второго и третьего порядков.

Лемма 4. *Пусть* $s + p + q = 2$. *Тогда имеют место следующие оценки*:

$$\left|\frac{\partial^2 e(a_3)}{\partial x^s\ \partial y^p\ \partial z^q}\right| \le \frac{CMH^2}{\sin^p\beta_4\ \sin^q\gamma_4}. \tag{2.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $q = 0$ оценки (2.13) следуют из (0.7) для треугольника T_4. Остается рассмотреть $q = 1, 2$. Так же, как при выводе (2.4), рассматривая последовательно треугольники T_1, T_2 и ребро a_3a_4, используя оценки (0.7) для $\tau_{ij} = \tau_{23}$ и соотношения (2.11) и представляя производные по направлениям через производные по x, y, z, получаем:

$$\left|\frac{\partial^2 e(a_3)}{\partial x\ \partial\tau_{34}}\right| \le RMH^2 \quad\Longrightarrow\quad \left|\frac{\partial^2 e(a_3)}{\partial x\ \partial z}\right| \le \frac{CMH^2}{\sin\gamma_4},$$

$$\left|\frac{\partial^2 e(a_3)}{\partial\tau_{13}\ \partial\tau_{34}}\right| \le RMH^2 \quad\Longrightarrow\quad \left|\frac{\partial^2 e(a_3)}{\partial y\ \partial z}\right| \le \frac{CMH^2}{\sin\beta_4\sin\gamma_4},$$

$$\left|\frac{\partial^2 e(a_3)}{\partial\tau_{34}^2}\right| \le RMH^2 \quad\Longrightarrow\quad \left|\frac{\partial^2 e(a_3)}{\partial z^2}\right| \le \frac{CMH^2}{\sin^2\gamma_4}.$$

Лемма 4 доказана. □

Лемма 5. *Пусть* $s + p + q = 3$. *Тогда имеют место следующие оценки*:

$$\left|\frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial x^s\ \partial y^p\ \partial z^q}\right| \le \frac{CMH}{\sin^p\beta_4\ \sin^q\gamma_4}. \tag{2.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценки для $q = 0$ следуют из (0.7) для треугольника T_4. Оставшиеся оценки для $q = 1, 2, 3$ получаются аналогично доказательствам лемм 2–4. Так, рассматривая T_1, получаем

$$\left|\frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial x^2\ \partial\tau_{34}}\right| \le RMH \quad\Longrightarrow\quad \left|\frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial x^2\ \partial z}\right| \le \frac{CMH}{\sin\gamma_4}.$$

Условия (1.4) имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial\tau_{23}}\left(\frac{\partial e(a_2)}{\partial\tau_{21}}\right)=\frac{\partial}{\partial\tau_{24}}\left(\frac{\partial e(a_2)}{\partial\tau_{21}}\right)=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial\tau_{31}}\left(\frac{\partial e(a_3)}{\partial\tau_{34}}\right)=\frac{\partial}{\partial\tau_{32}}\left(\frac{\partial e(a_3)}{\partial\tau_{34}}\right)=0.$$

Следствием этих условий являются равенства

$$\frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial\tau_{12}\,\partial\tau_{34}}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 e(a_3)}{\partial\tau_{12}\,\partial\tau_{34}}=0, \tag{2.15}$$

откуда будем иметь

$$\left|\frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial x\,\partial\tau_{12}\,\partial\tau_{34}}\right|\le RM|a_2-a_3|.$$

Снова, переходя от производных по направлениям к производным по x,y,z, используя оценки (0.7) и соотношения (2.11), приходим к неравенству

$$\left|\frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\right|\le\frac{CMH}{\sin\beta_4\sin\gamma_4}.$$

Далее, рассматривая последовательно треугольники T_2, T_1, T_2 и ребро a_3a_4, получим оставшиеся оценки:

$$\left|\frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial\tau_{13}^2\,\partial\tau_{34}}\right|\le RMH \quad\Longrightarrow\quad \left|\frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial y^2\,\partial z}\right|\le\frac{CMH}{\sin^2\beta_4\sin\gamma_4},$$

$$\left|\frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial x\,\partial\tau_{34}^2}\right|\le RMH \quad\Longrightarrow\quad \left|\frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial x\,\partial z^2}\right|\le\frac{CMH}{\sin^2\gamma_4},$$

$$\left|\frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial\tau_{13}\,\partial\tau_{34}^2}\right|\le RMH \quad\Longrightarrow\quad \left|\frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial y\,\partial z^2}\right|\le\frac{CMH}{\sin\beta_4\sin^2\gamma_4},$$

$$\left|\frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial\tau_{34}^3}\right|\le RMH \quad\Longrightarrow\quad \left|\frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial z^3}\right|\le\frac{CMH}{\sin^3\gamma_4}.$$

Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 5 завершается так же, как в теореме 4. □

З а м е ч а н и е. Если $\sin\beta_4\le\sin\beta_1$, достаточно перенумеровать вершины: $a_1\longleftrightarrow a_4$, $a_2\longleftrightarrow a_3$ и повторить построение системы координат и доказательство.

III. Симплекс типа K2 и условия (1.1), (1.2), (1.5). Систему координат xyz выберем так же, как в случае II при условии, что $\sin\beta_4\ge\sin\beta_1$ (в противном случае в доказательстве достаточно перенумеровать две вершины: $a_1\longleftrightarrow a_4$). Отметим, что в данном случае в тех же обозначениях остаются справедливыми соотношения (2.11).

Теорема 6. *Для введенной системы координат, симплекса типа* K2 *и условий интерполяции* (1.1), (1.2), (1.5) *справедливы следующие оценки*:

$$\left|\frac{\partial^{s+p+q}e(u)}{\partial x^s\,\partial y^p\,\partial z^q}\right|\le\frac{CMH^{4-s-p-q}}{\sin^p\beta_4\,\sin^q\gamma_4}, \tag{2.16}$$

где $u\in T$; $0\le s+p+q\le 3$; C *— константа, не зависящая от* T *и функции* f.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Получим оценки производных второго и третьего порядков функции $e(u)$ в a_3 (значения функции $e(u)$ и ее первых производных в точке a_3 равны нулю в силу условий (1.1)–(1.2)).

Лемма 6. *Пусть Δ — треугольник с вершинами b_1, b_2, b_3; α, β, θ — внутренние углы треугольника при вершинах b_1, b_2, b_3 соответственно, где $0 < \alpha \le \beta \le \theta$ или $0 < \alpha \le \theta \le \beta$, т. е. угол при вершине b_3 является наибольшим или средним углом треугольника, $b_2 b_3$ — наименьшая сторона треугольника; $\tau_{ij} = (b_j - b_i)/|b_j - b_i|$. Пусть функция $g(u)$, $u \in \Delta$, удовлетворяет в точке b_3 неравенствам*

$$\left|\frac{\partial g(b_3)}{\partial \tau_{31}}\right| \le R_1 M \varepsilon, \qquad \left|\frac{\partial g(b_3)}{\partial \tau_{32}}\right| \le R_2 M \varepsilon.$$

Тогда для любых i, j имеют место оценки

$$\left|\frac{\partial g(b_3)}{\partial \tau_{ij}}\right| \le C M \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть ось координат $0x$ параллельна τ_{31}, а $0y$ перпендикулярна $0x$. Угол при вершине b_3 обозначим через ω. Тогда условия леммы можно переписать следующим образом:

$$\left|\frac{\partial g(b_3)}{\partial x}\right| \le R_1 M \varepsilon, \qquad \left|\frac{\partial g(b_3)}{\partial x}\cos\omega \pm \frac{\partial g(b_3)}{\partial y}\sin\omega\right| \le R_2 M \varepsilon.$$

Тогда

$$\left|\frac{\partial g(b_3)}{\partial y}\right| \le \frac{RM\varepsilon}{\sin\omega},$$

откуда получаем требуемое неравенство

$$\left|\frac{\partial g(b_3)}{\partial \tau_{ij}}\right| \le \left|\frac{\partial g(b_3)}{\partial x}\right| C_1 \cos\alpha + \left|\frac{\partial g(b_3)}{\partial y}\right| C_2 \sin\beta \le C M \varepsilon. \qquad \square$$

Лемма 7. *Пусть $2 \le s + p + q \le 3$. Тогда имеют место следующие оценки:*

$$\left|\frac{\partial^{s+p+q} e(a_3)}{\partial x^s\ \partial y^p\ \partial z^q}\right| \le \frac{CMH^{4-(s+p+q)}}{\sin^p \beta_4\ \sin^q \gamma_4}. \tag{2.17}$$

Доказательство. Для $q = 0$ утверждение леммы является верным в силу (0.7). Прочие оценки производных второго порядка и производной $\partial^3 e(a_3)/\partial x^2 \partial z$ получаются так же, как в леммах 4–5.

Найдем оценку для $\dfrac{\partial^3 e(a_3)}{\partial x\ \partial y\ \partial z}$. Из условий (1.5) при $i = 3$, $j = 2$, $k = 4$ и из того, что в точках a_2, a_3 функция e и ее производные первого порядка равны нулю, получаем

$$\frac{\partial^2 e(a_3)}{\partial \tau_{34} \partial \tau_{23}} = 0, \qquad \frac{\partial^2 e(a_3)}{\partial \tau_{23} \partial \tau_{23}} \le RM|a_2 - a_3|^2.$$

Применение леммы 6 для $g = \partial e/\partial \tau_{23}$ на T_1 дает

$$\left|\frac{\partial^2 e(a_3)}{\partial \tau_{23} \partial \tau_{24}}\right| \le CM|a_2 - a_3|^2. \tag{2.18}$$

В (1.5) содержатся также условия $\dfrac{\partial^2 e(a_3)}{\partial \tau_{13} \partial \tau_{23}} = \dfrac{\partial^2 e(a_3)}{\partial \tau_{13} \partial \tau_{34}} = 0$, поэтому

$$\frac{\partial^2 e(a_3)}{\partial \tau_{13}\ \partial \tau_{24}} = 0. \tag{2.19}$$

Объединяя (2.18) и (2.19) и применяя лемму 6 для $g = \partial e/\partial\tau_{24}$ на T_4, приходим к неравенству

$$\left|\frac{\partial^2 e(a_3)}{\partial\tau_{24}\,\partial\tau_{12}}\right| \le RM|a_2 - a_3|^2,$$

откуда с учетом условий (1.5) для $i = 2$, $j = 1$, $k = 4$ по теореме 2 следует

$$\left|\frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial\tau_{24}\,\partial\tau_{12}\,\partial\tau_{23}}\right| = \left|\frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial\tau_{24}\,\partial\tau_{12}\,\partial x}\right| \le RM|a_2 - a_3|.$$

Отсюда, как и ранее, получаем

$$\left|\frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\right| \le \frac{CMH}{\sin\beta_4 \sin\gamma_4}.$$

Оставшиеся оценки леммы 7 и теорема 6 доказываются так же, как соответствующие утверждения в подразд. II.

IV. Общая теорема и заключительные замечания. Теоремы 4–6 можно объединить в одну с незначительной для практики потерей точности (обозначения введены в разд. 1).

Теорема 7. *Пусть многочлен P_3 задан на T интерполяционными условиями* (1.1), (1.2) *и в зависимости от типа симплекса условиями* (1.3), (1.4) *или* (1.5). *Пусть $D^r_{\xi_1\ldots\xi_r}e(u)$ означает результат дифференцирования функции $e(u) = f(u) - P_3(u)$ последовательно r раз по произвольным направлениям единичных векторов $\xi_1, \ldots, \xi_r$; $u \in T$. Тогда*

$$\left|D^r_{\xi_1\ldots\xi_r}e(u)\right| \le \frac{CMH^{4-r}}{\sin^r\gamma}, \tag{2.20}$$

где $0 \le r \le 3$, C — константа, не зависящая от f и T.

Доказательство. Для каждой системы координат, выбранной соответственно способу интерполяции, выполняются неравенства $\sin\gamma_4 \ge \sin\gamma$, $\sin\beta_4 \ge R\sin\gamma_2 \ge R\sin\gamma$. Тогда

$$\left|\frac{\partial^{s+p+q}e(u)}{\partial x^s\,\partial y^p\,\partial z^q}\right| \le \frac{CMH^{4-s-p-q}}{\sin^{p+q}\gamma}.$$

Таким образом, для доказательства (2.20) достаточно производную по направлению представить через производные по x, y, z. □

Замечание. Пусть $\tau_{i_1j_1}$, $\tau_{i_2j_2}$, $\tau_{i_3j_3}$ — произвольные направления вдоль ребер T, $0 \le s + p + q \le 3$, $u \in T$. Тогда

$$\left|\frac{\partial^{s+p+q}e(u)}{\partial\tau^s_{i_1j_1}\,\partial\tau^p_{i_2j_2}\,\partial\tau^q_{i_3j_3}}\right| \le CMH^{4-(s+p+q)}, \tag{2.21}$$

где C — константа, не зависящая от f и T.

Доказательство. Для каждого из рассмотренных способов интерполяции указанные единичные векторы в соответствующей системе координат могут быть представлены следующим образом:

$$\tau_{ij} = (\tau_x^{ij}, \tau_y^{ij}, \tau_z^{ij}),$$

где

$$|\tau_y^{ij}| \le \sin\beta_4, \qquad |\tau_z^{ij}| \le \sin\gamma_4.$$

Тогда, выражая производные по направлениям через производные по x, y, z, получаем (2.21).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ciarlet P.G., Raviart P.A.** General Lagrange and Hermite interpolation in R^n with applications to finite element methods // Arch. Rat. Mech. Anal. 1972. Vol. 46, no. 3. P. 177–199.
2. **Ženišek A.** Interpolation polynomials on the triangle // Numer. Math. 1970. Vol. 15. P. 283–296.
3. **Bramble J.H., Zlamal M.** Triangular elements in the finite element method // Math. Comp. 1970. Vol. 24, no. 112. P. 809–820.
4. **Zlamal M., Ženišek A.** Mathematical aspect of the finite element method // Technical, physical and mathematical principles of the finite element method / eds. V. Kolar et al. Praha: Acad. VED, 1971. P. 15–39.
5. **Synge J.L.** The hypercircle in mathematical physics. New York: Cambridge Univ. Press, 1957. 424 p.
6. **Babuška I., Aziz A.K.** On the angle condition in the finite element method // SIAM J. Numer. Anal. 1976. Vol. 13, no. 2. P. 214–226.
7. **Субботин Ю.Н.** Многомерная кусочно полиномиальная интерполяция // Методы аппроксимации и интерполяции / под ред. А.Ю. Кузнецова. Новосибирск: ВЦ СО АН, 1981. С. 148–153.
8. **Субботин Ю.Н.** Зависимость оценок многомерной кусочно полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик триангуляции // Тр. МИАН. 1989. Т. 189. С. 117–137.
9. **Субботин Ю.Н.** Погрешность аппроксимации интерполяционными многочленами малых степеней на n-симплексах // Мат. заметки. 1990. Т. 48, вып. 4. С. 88–100.
10. **Субботин Ю.Н.** Зависимость оценок аппроксимации интерполяционными полиномами пятой степени от геометрических характеристик треугольника // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 2. С. 110–119.
11. **Baidakova N.V.** On some interpolation process by polynomials of degree $4m+1$ on the triangle // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1999. Vol. 14, no. 2. P. 87–107.
12. **Latypova N.V.** Error estimates for approximation by polynomials of degree $4k+3$ on the triangle // Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. 1. 2002. P. S190–S213.
13. **Латыпова Н.В.** Погрешность кусочно-кубической интерполяции на треугольнике // Вестн. Удмурт. ун-та. Сер. Математика. 2003. С. 3–10.
14. **Ženišek A.** Maximum-angle condition and triangular finite elements of Hermite type // Math. Comp. 1995. Vol. 64, no. 211. P. 929–941.
15. **Subbotin Yu.N.** A new cubic element in the FEM // Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. 2. 2005. P. S176–S187.
16. **Baidakova N.V.** A method of Hermite interpolation by polynomials of the third degree on a triangle // Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. 2. 2005. P. S49–S55.
17. **Ženišek A., Hoderova-Zlamalova J.** Semiregular Hermite tetrahedral finite elements // Appl. of Math. 2001. Vol. 46, no. 4. P. 295–315.
18. **Куприянова Ю.В. (Матвеева Ю.В.)** Об одной теореме из теории сплайнов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48, № 2. С. 206–211.
19. **Матвеева Ю.В.** Сплайн-аппроксимация в $\mathbb{R}^m$ // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. XIV Сарат. зимней шк., посвященной памяти акад. П.Л. Ульянова. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. С. 111–113.
20. **Матвеева Ю.В.** Об эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике с использованием смешанных производных // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Математика. Механика. Информатика. 2007. Т. 7, вып. 1. С. 23–27.

Байдакова Наталия Васильевна
канд. физ.-мат. наук
ст. науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: baidakova@imm.uran.ru

Поступила 1.04.2008

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14 № 3 2008

УДК 512.54

О НЕПРИВОДИМЫХ ХАРАКТЕРАХ ГРУППЫ S_n, ПОЛУПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ НА A_n ИЛИ НА $S_n \setminus A_n$. II[1]

В. А. Белоногов

В предыдущей статье автора гипотеза об отсутствии пар полупропорциональных неприводимых характеров у знакопеременных групп A_n сведена к некоторой гипотезе, связанной с задачей описания пар неприводимых характеров симметрической группы S_n, полупропорциональных на одном из множеств A_n и $S_n \setminus A_n$. В этой гипотезе свойства такой пары характеров выражены в терминах диаграмм Юнга, соответствующих этим характерам. Доказанная здесь теорема позволяет исключить из рассмотрения некоторые этапы проверки этой гипотезы.

Ключевые слова: симметрические группы, знакопеременные группы, неприводимые характеры, полупропорциональность.

Введение

В настоящей статье продолжаются исследования, связанные со следующей гипотезой [1].

Гипотеза 1. *Знакопеременная группа A_n при любом $n \in \mathbb{N}$ не имеет полупропорциональных неприводимых характеров.*

Вопрос о наличии пар полупропорциональных неприводимых характеров в конечных группах определённых классов исследовался в ряде работ автора (их список имеется в [1, 2]). Интерес к таким исследованиям поддерживается, в частности, обнаруженной связью между наличием или отсутствием в группе такой пары и локальным строением этой группы.

Напомним, что функции φ и ψ из некоторого множества G в поле $\mathbb{C}$ называются *полупропорциональными*, если они не пропорциональны и для некоторого подмножества M из G пропорциональны ограничения φ и ψ на M и их ограничения на $G \setminus M$; и они называются *полупропорциональными на S*, где $S \subseteq G$, если полупропорциональны их ограничения на S.

По теореме 2 из [1] гипотеза 1 равносильна следующей гипотезе, сформулированной в терминах неприводимых характеров группы S_n.

Гипотеза 2. *Если χ^α и χ^β — неприводимые характеры группы S_n $(\alpha, \beta \in P(n))$, полупропорциональные на A_n, то одно из разбиений α и β самоассоциировано.*

Здесь $P(n)$ обозначает множество всех разбиений числа n, и χ^α — неприводимый характер группы S_n, соответствующий разбиению $\alpha \in P(n)$; встречающиеся далее обозначения и понятия, связанные с разбиениями, напоминаются в разд. 1.

Важные подходы к доказательству гипотезы 2 сделаны в [3]. Намеченный там план доказательства гипотезы 2 индукцией по n требует описания не только всех пар (α, β), для которых выполнено условие гипотезы 2, но также и всех пар (α, β) таких, что неприводимые характеры χ^α и χ^β группы S_n полупропорциональны на разности $S_n \setminus A_n$. В [3] сформулированы следующие три гипотезы.

Гипотеза 3. *Если χ^α и χ^β — неприводимые характеры группы S_n $(\alpha, \beta \in P(n))$, полупропорциональные на A_n, то*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00148).

(а) *диаграммы* $[\alpha]$ *и* $[\beta]$ *имеют точно по одному крюку длины* 3, *и*

(б) *после удаления из них этих крюков остаётся одна и та же самоассоциированная диаграмма, не имеющая крюков длины* 3.

Гипотеза 4. *Если* χ^α *и* χ^β — *неприводимые характеры группы* S_n $(\alpha, \beta \in P(n))$, *полупропорциональные на* $S_n \setminus A_n$, *то*

(а) *диаграммы* $[\alpha]$ *и* $[\beta]$ *имеют точно по одному крюку длины* 4, *и*

(б) *после удаления из них этих крюков остаётся одна и та же самоассоциированная диаграмма, не имеющая крюков длины* 4.

Вид диаграмм $[\alpha]$ и $[\beta]$, удовлетворяющих условиям (а) и (б) в гипотезах 3 и 4 получен соответственно в работах [4] и [5]. Это позволило конкретизировать гипотезы 3 и 4 и объединить их в следующей гипотезе А (утверждения (1) и (2) которой равносильны соответственно утверждениям гипотез 3 и 4). Определения участвующих в ней разбиений $2^k.()$, $2^k.(1)$, $3^k.\Delta_l$, $3^k.\Sigma_l$ и $3^k.2.\Sigma_l$ напоминаются в разд. 2; там же приводятся изображения диаграмм Юнга разбиений α и β для каждого из случаев гипотезы А. (Далее $(0^k, a, b)$ есть последовательность $(0, \ldots, 0, a, b)$ длины $k+2$; последовательности складываются покоординатно). Для $\varepsilon \in \{1, -1\}$ положим

$$S_n^\varepsilon := \begin{cases} S_n^+ := A_n, & \text{если } \varepsilon = 1, \\ S_n^- := S_n \setminus A_n, & \text{если } \varepsilon = -1. \end{cases}$$

Гипотеза А. *Пусть* $\alpha, \beta \in P(n)$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$ *и* χ^α *полупропорционально* χ^β *на* S_n^ε. *Тогда с точностью до перемены мест* α *и* β *верно одно из следующих утверждений*:

(1) $\varepsilon = 1$ *и выполнено одно из условий*:

(1а) $\alpha =' 2^k.() + (3)$ *и* $\beta = 2^k.() + (0^k, 2, 1)$, *где* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

(1б) $\alpha =' 2^k.(1) + (3)$ *и* $\beta = 2^k.(1) + (0^k, 1, 2)$, *где* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

(2) $\varepsilon = -1$ *и выполнено одно из условий* (*везде* k, l *целые*):

(2а) $\alpha =' 3^k.\Delta_l + (4)$ *и* $\beta =' 3^k.\Delta_l + (0^k, 2, 2)$, *где* $k \geq 0$ *и* $l \geq 1$;

(2б) $\alpha =' 3^k.\Sigma_l + (4)$ *и* $\beta =' 3^k.\Sigma_l + (0^k, 3, 1)$, *где* $k \geq 0$ *и* $l \geq 0$;

(2в) $\alpha =' 3^k.2.\Sigma_l + (4)$ *и* $\beta =' 3^k.2.\Sigma_l + (0^k, 1, 3)$, *где* $k \geq 0$ *и* $l \geq 0$.

После доказательства этой гипотезы доказанными становятся и все предыдущие гипотезы.

Отметим некоторые подтверждения гипотезы А.

Предложение 0.1. *Гипотеза* А *справедлива, если длина главной диагонали хотя бы одного из разбиений* α *и* β *меньше трёх.* (Это следует из [6, теорема Б] и [7, теорема 1]).

Предложение 0.2 [4, теорема]. *Гипотеза* А *справедлива, если хотя бы одно из разбиений* α *и* β *самоассоциировано.*

Очевидно, доказательство гипотезы А индукцией по числу n достаточно провести в предположении, что выполнено следующее

Условие А. Пусть n — натуральное число такое, что при любом $\widetilde{n} < n$ из того, что четвёрка $(\widetilde{n}, \widetilde{\varepsilon}, \widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$ удовлетворяет условию гипотезы А на месте $(n, \varepsilon, \alpha, \beta)$, следует, что она удовлетворяет и заключению этой гипотезы на месте $(n, \varepsilon, \alpha, \beta)$.

По [8, теорема А] доказательство гипотезы А можно разделить на две части, в которых выполнены соответственно условия $h_{11}^\alpha = h_{11}^\beta$ и $h_{12}^\alpha = h_{11}^\beta$. В статье [3] доказана следующая теорема, существенно проясняющая вид диаграмм $[\alpha]$ и $[\beta]$ в первом случае.

Теорема А1. *Пусть* $\alpha, \beta \in P(n)$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$, χ^α *полупропорционально* χ^β *на* S_n^ε *и выполнено условие* А. *Предположим, что* $h_{11}^\alpha = h_{11}^\beta$. *Тогда тройка* $(\alpha^{11}, \beta^{11}, \delta)$, *где* $\delta = (-1)^{h_{11}^\alpha + 1}\varepsilon$, *удовлетворяет заключению гипотезы* А *на месте* $(\alpha, \beta, \varepsilon)$.

В настоящей статье доказывается следующее усиление этой теоремы.

Теорема A2. *Пусть* $\alpha, \beta \in P(n)$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$, χ^α *полупропорционально* χ^β *на* S_n^ε *и выполнено условие A. Предположим, что* $h_{11}^\alpha = h_{11}^\beta$. *Тогда тройка* $(\alpha^{11}, \beta^{11}, \delta)$, *где* $\delta = (-1)^{h_{11}^\alpha + 1}\varepsilon$, *удовлетворяет условию* (2) *заключения гипотезы A на месте* $(\alpha, \beta, \varepsilon)$.

Используемые в статье обозначения, в основном, стандартны (см., например, [9, 10]). В частности, $\mathbb{C}$ и $\mathbb{N}$ — множества всех комплексных и натуральных чисел соответственно; запись $A := B$ (читается: A по определению равно B) означает, что A есть обозначение для B. Если $\alpha = (a_1, \ldots, a_k)$ и $\beta = (b_1, \ldots, b_l)$ — конечные последовательности, то $\alpha * \beta$ обозначает последовательность $(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l)$; если $k \geq l$, то $\alpha + \beta = (a_1 + b_1, \ldots, a_l + b_l, a_{l+1}, \ldots, a_k)$.

Пусть φ и ψ — обобщённые характеры группы G и $S \subseteq G$. Запись “$\varphi \sim \psi$ на S” означает, что ограничения φ и ψ на S имеют одно и то же множество корней.

Обозначения, связанные с разбиениями и характерами групп S_n, приводятся в разд. 1.

1. Разбиения и характеры групп S_n и A_n

Множество всех неприводимых характеров и множество всех классов сопряжённых элементов симметрической группы S_n находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством $P(n)$ всех разбиений числа n (см. [10, 11]). Если α — такое разбиение, то χ^α обозначает соответствующий ему неприводимый характер группы S_n.

Разбиение натурального числа n есть последовательность $\alpha = (a_1, \ldots, a_l)$ натуральных чисел такая, что $a_1 \geq \ldots \geq a_l$ и $n = a_1 + \ldots + a_l$. Каждому разбиению $\alpha = (a_1, \ldots, a_l) \in P(n)$ сопоставляется его *диаграмма Юнга* (или просто *диаграмма*) $[\alpha] := \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq l,\ 1 \leq j \leq a_i\}$. Клетки (элементы) вида (i, i) диаграммы $[\alpha]$ образуют её *главную диагональ*; её длина (мощность) обозначается через $d(\alpha)$. Говорят, что разбиения α и β *ассоциированы*, если диаграмма одного из них получается из диаграммы другого отражением относительно главной диагонали. Разбиение, ассоциированное с α, обозначается через α'. Разбиение называется *самоассоциированным*, если $\alpha = \alpha'$. Множество всех клеток (i, j) диаграммы $[\alpha]$ таких, что $[\alpha]$ не содержит клетки $(i+1, j+1)$, называется её *границей*.

Крюком диаграммы $[\alpha]$ (или разбиения α) с вершиной (i, j) называется множество $H_{ij}^\alpha := \{(i, j)\} \cup A \cup L$, где $A := \{(i, j+k) \in [\alpha] \mid k \geq 1\}$ (*рука крюка*) и $L := \{(i+k, j) \in [\alpha] \mid k \geq 1\}$ (*нога крюка*). *Косым крюком* с вершиной (i, j) диаграммы $[\alpha]$ называется часть границы диаграммы $[\alpha]$, “вырезанная” крюком H_{ij}^α. Его обозначают через R_{ij}^α или через $R(H_{ij}^\alpha)$.

Положим $h_{ij}^\alpha := |H_{ij}^\alpha|$ (*длина крюка* H_{ij}^α).

Разбиением числа 0 называют пустую (длины 0) последовательность натуральных чисел, обозначаемую через $()$, и считают, что $[()] = \varnothing$ и $()' = ()$. Далее под *разбиением* понимается разбиение некоторого целого неотрицательного числа.

Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$ и H есть крюк разбиения α. Введём обозначения:

$\alpha - H$ есть разбиение с диаграммой $[\alpha] \setminus R(H)$;

$\alpha^{ij} := \alpha - H_{ij}^\alpha$;

$\mathrm{H}^\alpha(m)$ — множество всех крюков длины m в $[\alpha]$; $\quad \mathrm{H}^{\alpha,\beta}(m) := \mathrm{H}^\alpha(m) \cup \mathrm{H}^\beta(m)$;

запись $\alpha =' \beta$ означает, что $\alpha \in \{\beta, \beta'\}$.

Следующие свойства неприводимых характеров группы S_n будем использовать далее без ссылок.

Предложение 1.1 [10, теоремы 2.1.8, 2.1.12, 2.3.15].

(1) Неприводимые характеры группы S_n принимают лишь целые значения.

(2) $\chi^{\alpha'} = \chi^\alpha \xi$ для всех $\alpha \in P(n)$, где ξ — знакопеременный характер группы S_n (линейный характер с ядром A_n).

(3) χ^α исчезает на $S_n \setminus A_n$ если и только если $\alpha = \alpha'$ ($\alpha \in P(n)$).

2. Свойства разбиений α и β из заключения гипотезы A

При доказательстве теоремы A2 читатель должен ясно представлять себе вид диаграмм $[\alpha]$ и $[\beta]$ из заключения гипотезы A. Здесь очень кратко мы напомним некоторые их свойства. Подробное изложение см. в [3, разд. 2].

Пусть $m \in \{2,3\}$. *m-накрытием* разбиения Θ длины $l \geq 0$ называется [3, определение 2.1] разбиение $m.\Theta := (\,\Theta_1+m+1,\ \Theta_1+1,\ \Theta_2+1,\ \ldots,\ \Theta_l+1,\ 1^m)\quad (m.() = (m+1, 1^m))$. Положим $m^0.\Theta := \Theta$ и $m^k.\Theta := m.(m^{k-1}.\Theta)$ для натуральных k.

Легко представить себе вид диаграмм $2.^k()$, $2.^k(1)$ и соответствующих им диаграмм $[\alpha]$ и $[\beta]$ из заключения гипотезы A, где при $\gamma \in \{2^k.(), 2^k.(1)\}$ положено

$$\beta = \gamma + (\widetilde{3}) := \begin{cases} 2^k.() \;\; + (0^k, 2, 1), & \text{если} \quad \gamma = 2^k.(), \\ 2^k.(1) + (0^k, 1, 2), & \text{если} \quad \gamma = 2^k.(1). \end{cases}$$

На рис. 2.1 изображены диаграммы этих разбиений при $k = 2$. Точками помечены их единственные косые крюки длины 3. Переместив помеченные точки в первую строку, получим диаграмму $[\alpha] = [\gamma] + (3)$.

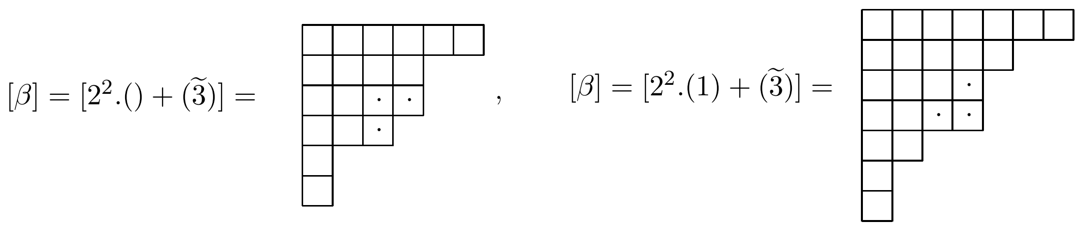


Рис. 2.1.

Определим разбиения [3, определение 2.2]
$\Delta_l := (\,l,\ l-1,\ \ldots,\ 2, 1\,)$ при любом $l \in \mathbb{N}$, и
$\Sigma_l := (\,(2l)^2,\ (2l-2)^2,\ \ldots,\ 2^2\,)$ при любом $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $(\Sigma_0 = ())$.

При γ, совпадающем с одним из разбиений $3^k.\Delta_l$, $3^k.\Sigma_l$ и $3^k.2.\Sigma_l$, положим

$$\gamma + (\widetilde{4}) := \begin{cases} 3^k.\Delta_l \;\; + (0^k, 2, 2), & \text{если} \quad \gamma = 3^k.\Delta_l; \\ 3^k.\Sigma_l \;\; + (0^k, 3, 1), & \text{если} \quad \gamma = 3^k.\Sigma_l; \\ 3^k.2.\Sigma_l + (0^k, 1, 3), & \text{если} \quad \gamma = 3^k.2.\Sigma_l. \end{cases}$$

На рис. 2.2 изображены диаграммы этих разбиений при $k = 0$. Точками помечены их единственные косые крюки длины 4. Легко представить себе вид этих диаграмм, а следовательно, и диаграмм $[\alpha]$ и $[\beta]$ из условий (2а)–(2в) гипотезы A и при $k > 0$.

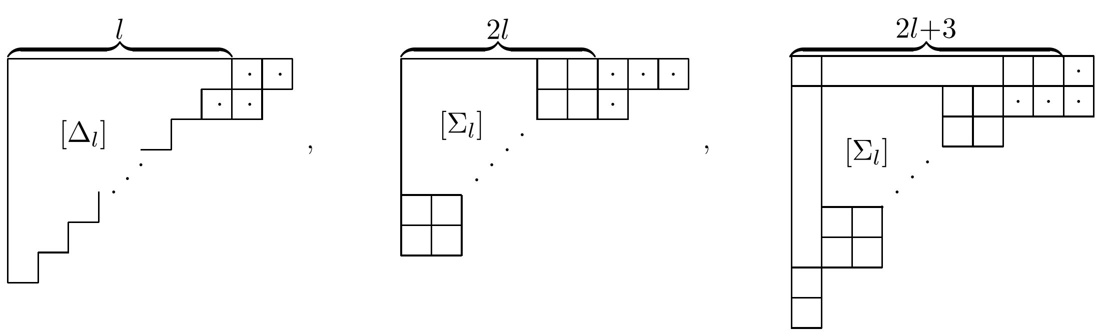


Рис. 2.2.

Часто в доказательстве теоремы A2 читателю предлагается установить несовпадение полученных разбиений довольно общего вида с разбиениями из заключения гипотезы A. При этом полезно иметь ввиду следующие утверждения, которые не всегда будут цитироваться.

Предложение 2.1 [3, предложение 2.1]. *Самоассоциированное разбиение* γ *не имеет крюков длины* 3 *если и только если* γ *есть одно из разбиений* $2^k.()$ *и* $2^k.(1)$ *при некотором* $k \geq 0$.

Предложение 2.2 [3, предложение 2.3]. *Разбиения* α *и* β *любого из условий* (1а), (1б) *гипотезы A имеют точно по одному крюку длины* 3 *и не имеют крюков длины* $3t$ *при натуральных* $t \geq 2$.

Предложение 2.3 [3, предложение 2.4]. *Самоассоциированное разбиение* γ *не имеет крюков длины* 4 *если и только если* γ *есть одно из разбиений* $3^k.\Delta_m$, $3^k.\Sigma_m$ *и* $3^k.2.\Sigma_m$ *при некоторых* k, m.

Предложение 2.4 [3, предложение 2.6]. *Разбиения* α *и* β *любого из условий* (2а)–(2в) *гипотезы A имеют точно по одному крюку длины* 4 *и не имеют крюков длины* $4t$ *при натуральных* $t \geq 2$.

Заметим ещё, что для любого $\beta = \gamma + (\widetilde{4})$, где γ есть $3^k.\Delta_m$, $3^k.\Sigma_m$ или $3^k.2.\Sigma_m$, диаграмма $[\beta]$ имеет точно два не самоассоциированных главных (т. е. с вершиной на главной диагонали) крюка $H^{\beta}_{k+1,k+1}$ и $H^{\beta}_{k+2,k+2}$.

3. О диаграммах $[\alpha]$ и $[\beta]$ для характеров χ^α и χ^β, полупропорциональных на S_n^ε

Предложение 3.1 [3, предложение 3.3]. *Пусть* $\alpha, \beta \in P(n)$ *и* $\varepsilon \in \{1, -1\}$. *Равносильны условия*:

(1) *характеры* χ^α *и* χ^β *пропорциональны на* S_n^ε;
(2) *выполнено по крайней мере одно из условий*:
  (2а) $\alpha =' \beta$;
  (2б) $\varepsilon = -1$, $\alpha = \alpha'$ *и* $\beta = \beta'$.

Предложение 3.2 [3, предложение 3.5]. *Пусть* $\alpha, \beta \in P(n)$ *и* $\chi^\alpha \sim \chi^\beta$ *на* S_n^ε, *где* $\varepsilon \in \{1, -1\}$. *Предположим, что* $[\alpha]$ *имеет единственный крюк* H *некоторой длины* m, *а* $[\beta]$ *не имеет крюков длины* m. *Тогда*

$$\alpha - H = (\alpha - H)' \quad \text{и} \quad \varepsilon = (-1)^m.$$

Предложение 3.3 [3, предложение 3.6]. *Пусть* χ^α *и* χ^β — *неприводимые характеры группы* S_n, *полупропорциональные на* S_n^ε $(\alpha, \beta \in P(n))$. *Предположим, что диаграммы* $[\alpha]$ *и* $[\beta]$ *имеют точно по одному крюку* H *и* K *соответственно некоторой длины* m. *Тогда* $\chi^{\alpha-H}$ *и* $\chi^{\beta-K}$ *пропорциональны или полупропорциональны на* S_{n-m}^δ, *где* $\delta = (-1)^{m+1}\varepsilon$.

Предложение 3.4 [12, теорема]. *Пусть* $\chi^\alpha \sim \chi^\beta$ *на* S_n^ε, *где* $\alpha, \beta \in P(n)$ *и* $\varepsilon \in \{1, -1\}$. *Предположим, что* $[\alpha]$ *имеет хотя бы один крюк некоторой длины* m, *а* $[\beta]$ *не имеет крюков длины* m. *Тогда верно одно из утверждений*:

(1) $\varepsilon = (-1)^m$, α *имеет единственный крюк* H *длины* m *и разбиение* $\alpha - H$ *самоассоциировано*;

(2) $\varepsilon = -1$, $\alpha = \alpha'$ *и* $\beta = \beta'$ (*в частности,* χ^α *и* χ^β *не полупропорциональны на* S_n^ε).

Предложение 3.5 [3, предложение 3.9]. *Пусть* $\alpha, \beta \in P(n)$, $\chi^\alpha \sim \chi^\beta$ *на* S_n^ε, *где* $\varepsilon \in \{1, -1\}$ *и для некоторого натурального числа* m $\mathrm{H}^\alpha(m) = \{H_1, \ldots, H_r\}$, $r \geq 1$ *и* $\mathrm{H}^\beta(m) = \{K_1, \ldots, K_s\}$, $s \geq 1$. *Предположим, что диаграмма* $[\alpha - H_1]$ (*мощности* $n - m$) *имеет единственный крюк* $\widetilde{H}$ *некоторой длины* l, *а диаграммы* $[\alpha - H_i]$ *при* $2 \leq i \leq r$ *и* $[\beta - K_j]$ *при* $1 \leq j \leq s$ *не имеют крюков длины* l. *Тогда*

$$\text{разбиение } (\alpha - H_1) - \widetilde{H} \text{ самоассоциировано и } \varepsilon = (-1)^{(m+l+1)}.$$

4. Доказательство теоремы А2

По условию теоремы А2 χ^α полупропорционально χ^β на S_n^ε, где $\varepsilon = \pm 1$, выполнено свойство А и
$$h_{11}^\alpha = h_{11}^\beta. \tag{4.1}$$
В частности, для $(n, \varepsilon, \alpha, \beta)$ не может быть выполнено заключение гипотезы А (что видно из рисунков 2.1, 2.2). Тогда согласно предложению 0.2
$$\alpha \neq \alpha' \quad \text{и} \quad \beta \neq \beta'. \tag{4.2}$$
Согласно теореме А1 тройка $(\alpha^{11}, \beta^{11}, \delta)$, где $\delta = (-1)^{h_{11}^\alpha + 1}\varepsilon$, удовлетворяет заключению гипотезы А на месте $(\alpha, \beta, \varepsilon)$.

В противоречие с заключением теоремы А2 предположим, что тройка $(\alpha^{11}, \beta^{11}, \delta)$ удовлетворяет условию (1) заключения гипотезы А на месте $(\alpha, \beta, \varepsilon)$.

Тогда $\delta = 1$ и, следовательно,
$$\varepsilon = (-1)^{h_{11}^\alpha + 1}. \tag{4.3}$$
Возможны два случая (соответствующие условиям (1а) и (1б) гипотезы А).

С л у ч а й А. Пусть $\alpha^{11} = \gamma + (3)$ и $\beta^{11} = \gamma + (\widetilde{3})$, где $\gamma = 2^k.()$ с $k \geq 0$.

В этом случае можно считать, что $[\alpha]$ и $[\beta]$ имеют вид, изображённый на рис. 4.1.

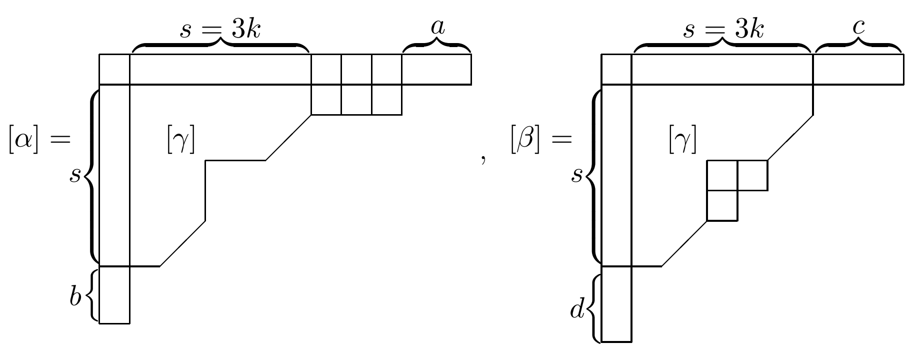


Рис. 4.1.

Здесь $s = \gamma_1 = 3k$ и $\{a, b, c, d\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$. По (4.1) $4 + 2s + a + b = 1 + 2s + c + d$, откуда
$$3 + a + b = c + d, \tag{4.4}$$
и по (4.3)
$$\varepsilon = (-1)^{a+b+1} = (-1)^{c+d}. \tag{4.5}$$
Так как $\beta \neq \beta'$, то можно считать, что
$$c > d. \tag{4.6}$$
Согласно предложению 0.1
$$d(\gamma) \geq 2, \qquad d(\alpha) \geq 3, \qquad d(\beta) \geq 4. \tag{4.7}$$

Подсчитаем (учитывая (4.7)) длины некоторых крюков в $[\alpha]$ и $[\beta]$:
$$h_{1\,2}^\alpha = 2s + 3 + a, \qquad h_{1\,2}^\beta = 2s + c,$$
$$h_{21}^\alpha = 2s + 3 + b, \qquad h_{21}^\beta = 2s + d.$$

Далее нам потребуются свойства диаграмм, изображённых на следующих рисунках:

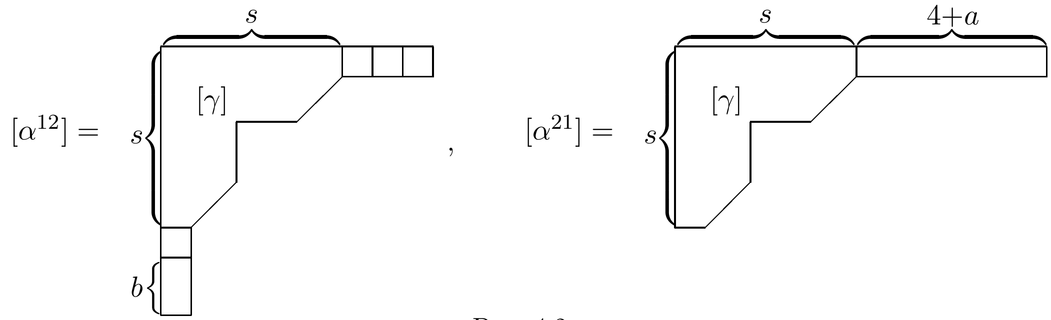


Рис. 4.2.

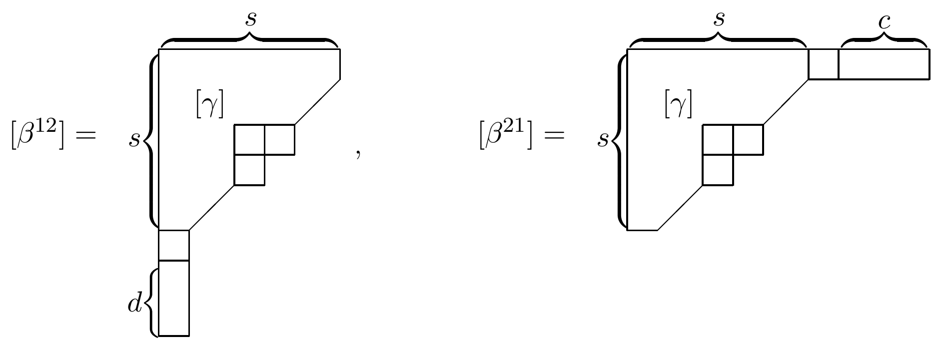


Рис. 4.3.

Поскольку $\beta^{12} \neq (\beta^{12})'$ (см. рис. 4.3), то согласно предложению 3.4

$$[\alpha] \text{ имеет крюк длины } h_{12}^{\beta} = 2s + c \ \text{ и, следовательно, } \ 3 + a \geq c. \tag{4.8}$$

Предположим, что $b > a$. Тогда H_{21}^{α} есть крюк предмаксимальной длины в $[\alpha]$ и ввиду (4.8) либо $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2s + 3 + b) = \{H_{21}^{\alpha}\}$, либо $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2s + 3 + b) = \{H_{21}^{\alpha}, H_{12}^{\beta}\}$. В первом случае по предложению 3.2 $\alpha^{21} = (\alpha^{21})'$, что противоречит рис. 4.2. Во втором случае $c = b+3$, $a = d$ (по (4.4)), и по предложению 3.3

$$\chi^{\alpha^{21}} \text{ и } \chi^{\beta^{12}} \text{ пропорциональны или полупропорциональны на } S_{n-h_{12}^{\alpha}}^{\sigma}, \text{ где } \sigma = (-1)^{c}.$$

Если они пропорциональны, то по предложению 3.1 либо $\alpha^{21} =' \beta^{12}$, либо $\varepsilon = -1$, $\alpha^{21} = (\alpha^{21})'$, $\beta^{12} = (\beta^{12})'$. Но, как видно из рис. 4.2 и 4.3, оба условия противоречивы.

Если они полупропорциональны, то по предположению индукции для $(\alpha^{21}, \beta^{12}, \sigma)$ выполнено одно из утверждений (1) и (2) гипотезы A на месте $(\alpha, \beta, \varepsilon)$. Первое утверждение не может быть выполнено потому, что α^{21} и β^{12} оба не самоассоциированы. Если же выполнено утверждение (2), то, как следует из вида диаграммы $[\alpha^{21}] = [\gamma + (4+a)]$, должно быть $a = 0$ и γ совпадает с одним из разбиений $3^k.\Delta_l$, $3^k.\Sigma_l$, или $3^k.2.\Sigma_l$ при некоторых k, l. В любом случае согласно предложению 2.3 γ не имеет крюков длины 4. Но это противоречиво, так как γ есть $2^k.(1)$ с $d(\gamma) \geq 2$ по (4.7) и, очевидно, имеет крюк такой длины.

Поэтому

$$a \geq b. \tag{4.9}$$

С л у ч а й A1. Предположим, что $a = b$.

Тогда $\mathrm{H}^{\alpha}(2s + 3 + a) = \{H_{12}^{\alpha}, H_{21}^{\alpha}\}$. Отсюда и из предложения 3.4 следует, что $[\beta]$ имеет крюк длины $2s + 3 + a$ и, значит, $a + 3 \leq c$. Но из (4.8) следует, что $a + 3 \geq c$. Поэтому $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2s + 3 + a) = \{H_{12}^{\alpha}, H_{21}^{\alpha}, H_{12}^{\beta}\}$ и

$$a = b = d = c - 3.$$

Для дальнейшего нам необходимо существенно расширить таблицу длин крюков в $[\alpha]$ и $[\beta]$. Из рис. 4.1, учитывая строение диаграммы $\gamma = 2^k.()$, получаем:

$$h^{\alpha}_{1,j} = 6k + a - 3(j-3) \text{ при } 2 \le j \le k+2, \quad h^{\alpha}_{1,k+3} = 3k + a + 2,$$
$$h^{\alpha}_{21} = 6k + a + 3 = h^{\alpha}_{12}, \quad h^{\alpha}_{i,1} = 6k + a - 3(i-2) = h^{\alpha}_{1,i+1} \text{ при } 3 \le i \le k+1,$$
$$h^{\beta}_{1,j} = 6k + a - 3(j-3) = h^{\alpha}_{1,j} \text{ при } 2 \le j \le k+1, \quad h^{\beta}_{1,k+2} = 3k + a + 5,$$
$$h^{\beta}_{i,1} = 6k + a - 3(i-2) = h^{\beta}_{1,i+1} = h^{\alpha}_{1,i+1} \text{ при } 2 \le i \le k, \quad h^{\beta}_{k+1,1} = 3k + a + 3,$$
$$h^{\alpha}_{2,j} = 6k + 2 + 3(j-2) \text{ при } 2 \le j \le k+1.$$

Положим
$$h := h^{\beta}_{1,k+2} = 3k + a + 5.$$

Мы хотим доказать, что
$$\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(h) = \{H^{\alpha}_{22}, H^{\beta}_{1,k+2}\}. \tag{4.10}$$

Из таблицы длин крюков видно, что $h^{\alpha}_{1,k+2} < h < h^{\alpha}_{1,k+1}$, $h^{\alpha}_{k+1,1} < h < h^{\alpha}_{k,1}$ и $h^{\beta}_{k+1,1} < h < h^{\beta}_{k,1}$. Отсюда следует, что

$$H^{\beta}_{1,k+2} \text{ — единственный крюк длины } h \text{ в множестве } \{H^{\alpha}_{1j}, H^{\alpha}_{j\,1}, H^{\beta}_{1j}, H^{\beta}_{j\,1} \mid j \ge 1\}. \tag{4.11}$$

Так как разбиение $\beta^{1,k+2}$, очевидно, не самоассоциировано, то по предложению 3.5 $[\alpha]$ имеет крюк длины h, и по (4.11) такой крюк должен лежать в $[\alpha^{11}]$. Следовательно, число $h = 3k + a + 5$ находится между числами $3k + 5 = h^{\alpha}_{2,k+1}$ и $6k + 2 = h^{\alpha}_{2,2}$ (в частности, $0 \le a \le 3k - 3$). Легко увидеть (учитывая строение диаграммы α^{11}), что длина любого крюка из $[\alpha]$, заключённая между этими числами, совпадает с числом вида $h^{\alpha}_{2,j}$, где $2 \le j \le k+1$. Поэтому $h = h^{\alpha}_{2,j} = 6k + 2 + 3(j-2)$ $(2 \le j \le k+1)$ и, следовательно,

$$3 \text{ делит } a \qquad (0 \le a \le 3k-3). \tag{4.12}$$

Очевидно,
$$\mathrm{H}^{\alpha^{11},\beta^{11}}(6k+2) = \{H^{\alpha}_{22}\}. \tag{4.13}$$

Предположим, что $[\alpha]$ имеет крюк H длины $6k+2$, отличный от H^{α}_{22}. Тогда из (4.13) и списка длин крюков следует, что H есть либо H^{α}_{1j}, где $j < k+2$, либо H^{α}_{i1}, где $i < k+1$ (так как $6k+2 > 3k+a+3 = h^{\alpha}_{1,k+2} = h^{\alpha}_{k+1,1}$). Но при таких j и i верны равенства $h^{\alpha}_{1j} = 6k+a-3(j-3)$ и $h^{\alpha}_{i1} = 6k + a - 3(i-3)$. Эти числа не могут быть равны $6k+2$ в силу (4.12). Следовательно,

$$\mathrm{H}^{\alpha}(6k+2) = \{H^{\alpha}_{22}\}. \tag{4.14}$$

Так как $\alpha^{22} \ne (\alpha^{22})'$, то по предложению 3.5 $[\beta]$ имеет крюк K длины $6k+2$. Из (4.13) и приведённого выше списка длин крюков следует, что K есть $H^{\beta}_{1,j}$ при $2 \le j \le 2$ или H^{β}_{i1} при $2 \le i \le k+1$ (так как $6k+2 \ge 3k+a+5 = h^{\beta}_{1,k+2} > 3k+a+3 = h^{\alpha}_{k+1,1}$). Поскольку числа $h^{\beta}_{1,j}$ и h^{β}_{i1} делятся на 3 при $2 \le j \le k+1$ и при $2 \le i \le k+1$ (по (4.12)), то для K имеется лишь одна возможность: $K = H^{\beta}_{1,k+2}$. Отсюда и из (4.14) вытекает справедливость утверждения (4.10).

Из (4.10) по предложению 3.3 следует, что

$$\chi^{\alpha^{22}} \text{ и } \chi^{\beta^{1,k+2}} \text{ пропорциональны или полупропорциональны на } S^{\sigma}_{n-(6k+2)},$$

где $\sigma = (-1)^{6k+3}\varepsilon = 1$ (см. (4.5)). Если $\chi^{\alpha^{22}}$ и $\chi^{\beta^{1,k+2}}$ пропорциональны на $S^{\sigma}_{n-2s-a} = A_{n-2s-a}$, то по предложению 3.1 должно быть $\alpha^{22} =' \beta^{1,k+2}$, что противоречиво. Следовательно, $\chi^{\alpha^{22}}$ и $\chi^{\beta^{1,k+2}}$ полупропорциональны на A_{n-2s-a} и по условию A $\{\alpha^{22}, \beta^{1,k+2}\} = \{\Gamma + (3), \Gamma + \widetilde{(3)}\}$, где Γ есть $2^k.()$ или $2^k.(1)$ при некотором $k \geq 0$. Однако это противоречиво, так как ни одно из разбиений α^{22} и $\beta^{1,k+2}$ не самоассоциировано.

Следовательно, случай A1 невозможен, т. е.

$$a > b$$

и либо $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2s+3+a) = \{H^{\alpha}_{12}\}$, либо (ввиду (4.8)) $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2s+3+a) = \{H^{\alpha}_{12}, H^{\beta}_{12}\}$.

С л у ч а й A2. Пусть $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2s+3+a) = \{H^{\alpha}_{12}\}$.

По предложению 3.2 отсюда следует, что $\alpha^{12} = (\alpha^{12})'$. Как видно из рис. 4.2, это возможно лишь при $b = 2$. Так как $a > b$, то $a \geq 3$ и по (4.4) $c + d = a + 5 \geq 8$. Далее, так как по условию случая A2 $h^{\alpha}_{12} \neq h^{\beta}_{12}$ и $[\alpha]$ имеет крюк длины $\beta^{12} = 2s + c$ по (4.8), то $3 + a > c$ и либо $h^{\beta}_{12} \leq h^{\alpha}_{13}$ и тогда $c \leq a$, либо $h^{\beta}_{12} \leq h^{\alpha}_{21}$ и $c \leq 3 + b = 5$. Итак,

$$b = 2, \qquad c \leq \max\{a, 5\}, \qquad c + d = a + 5 \geq 8. \tag{4.15}$$

Предположим, что $c > 5$. Тогда по (4.15) $c \leq a$. Согласно (4.8) $[\alpha]$ имеет крюк H длины $h^{\beta}_{12} = 2s + c$. Так как $2s + c > h^{\alpha}_{21} = 2s + 5$, то $H = H^{\alpha}_{1j}$ при некотором $j \geq 3$. Если $j = 3$, то $2s + c = h^{\alpha}_{13} = 2s + a$, $c = a$ и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2s + a) = \{H^{\alpha}_{13}, H^{\beta}_{12}\}$ и по предложению 3.3 $\chi^{\alpha^{13}}$ и $\chi^{\beta^{12}}$ пропорциональны или полупропорциональны на S^{σ}_{n-2s-a}, где $\sigma = (-1)^a\varepsilon = (-1)^b = 1$ (см. (4.5)). Если $\chi^{\alpha^{13}}$ и $\chi^{\beta^{12}}$ пропорциональны на $S^{\sigma}_{n-2s-a} = A_{n-2s-a}$, то по предложению 3.1 должно быть $\alpha^{13} =' \beta^{12}$, что противоречиво. Следовательно, $\chi^{\alpha^{13}}$ и $\chi^{\beta^{12}}$ полупропорциональны на A_{n-2s-a} и по условию A $\{\alpha^{13}, \beta^{12}\} = \{\Gamma + (3), \Gamma + (\widetilde{3})\}$, где Γ есть $2^k.()$ или $2^k.(1)$ при некотором $k \geq 0$. Однако это противоречит тому, что

$$\text{разбиение } (\alpha^{13})^{11} \text{ не самоассоциировано,} \tag{4.16}$$

поскольку длина второй строки диаграммы $[\alpha^{13}]$ равна $s - 2$, так как в γ первая строка на две клетки длиннее второй, а длина её второго столбца равна $1 + s$ (диаграмма $[\alpha^{13}]$ получается из $[\alpha^{12}]$ удлинением второго столбца до величины $1 + s$; см. рис. 4.2).

Поэтому $j > 3$ (т. е. $c < a$) и, очевидно, $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2s + a) = \{H^{\alpha}_{13}\}$. По предложению 3.2 отсюда следует, что $\alpha^{13} = (\alpha^{13})'$. Но это невозможно ввиду (4.16).

Итак, $c \leq 5$, откуда по (4.15) и (4.6) $8 \leq a + 5 = c + d \leq 9$. Следовательно, $c = 5$ и $a = d \in \{3, 4\}$. Тогда $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2s + a) = \{H^{\alpha}_{13}, H^{\beta}_{21}\}$ и по предложению 3.3 $\chi^{\alpha^{13}}$ и $\chi^{\beta^{21}}$ пропорциональны или полупропорциональны на S^{δ}_{n-2s-a}, где $\delta = (-1)^{a+1}\varepsilon = 1$ (см. (4.5)). Если $\chi^{\alpha^{13}}$ и $\chi^{\beta^{21}}$ пропорциональны на S^{δ}_{n-2s-a} $(= A_{n-2s-a})$, то по предложению 3.1 должно быть $\alpha^{13} =' \beta^{21}$, что противоречиво. Следовательно, $\chi^{\alpha^{13}}$ и $\chi^{\beta^{21}}$ полупропорциональны на A_{n-2s-a} и по условию A $\{\alpha^{13}, \beta^{21}\} = \{\Gamma + (3), \Gamma + (\widetilde{3})\}$, где Γ есть $2^k.()$ или $2^k.(1)$ при $k \geq 0$. Однако это противоречит тому, что $\alpha^{13} \neq (\alpha^{13})'$ ввиду (4.16).

Таким образом, случай A2 невозможен.

С л у ч а й A3. Пусть $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2s+3+a) = \{H^{\alpha}_{12}, H^{\beta}_{12}\}$ $(a > b)$.

Тогда $c = a + 3$ и по (4.4) $d = b$. Согласно предложению 3.3

$$\chi^{\alpha^{12}} \text{ пропорционально или полупропорционально } \chi^{\beta^{12}} \text{ на } S^{\delta}_{n-h^{\alpha}_{12}}, \tag{4.17}$$

где $\delta = (-1)^{h^{\alpha}_{12}+1}\varepsilon = (-1)^a\varepsilon = (-1)^{b+1}$ $(\varepsilon = (-1)^{a+b+1}$ согласно (4.5)). Положим $\widetilde{\alpha} := \alpha^{12}$ и $\widetilde{\beta} := \beta^{12}$. Диаграммы $[\widetilde{\alpha}]$ и $[\widetilde{\beta}]$ изображены на рис. 4.2, 4.3. Мы видим, что

$$h^{\widetilde{\alpha}}_{11} = 2s + b + 3, \qquad h^{\widetilde{\beta}}_{11} = 2s + b,$$

$$h^{\widetilde{\alpha}}_{12} = 2s - 1, \qquad h^{\widetilde{\beta}}_{12} = 2s - 4,$$

$$h^{\widetilde{\alpha}}_{21} = 2s + b - 3, \qquad h^{\widetilde{\beta}}_{21} = 2s + b - 3,$$

и поэтому $\mathrm{H}^{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}(2s+b) = \{H_{11}^{\widetilde{\beta}}\}$. Согласно предложению 3.2 отсюда и из (4.17) следует, что $\delta = (-1)^{h_{11}^{\widetilde{\beta}}} = (-1)^b$ в противоречие с ранее полученным равенством $\delta = (-1)^{b+1}$.

Таким образом, случай А противоречив.

С л у ч а й Б. Пусть $\varepsilon = (-1)^{m+1}$, $\alpha^{11} = \gamma + (3)$ и $\beta^{11} = \gamma + (\widetilde{3})$, где $\gamma = 2^k.(1)$ с $k \geq 0$.

В этом случае можно считать, что диаграммы α и β имеют вид, изображённый на рис. 4.2 ($s = \gamma_1 = 3k+1$, $\{a,b,c,d\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$).

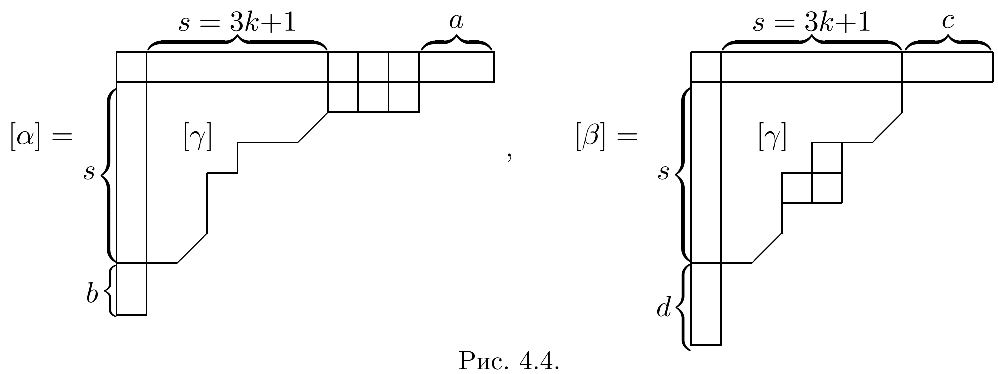


Рис. 4.4.

Как видно из рис. 4.4, здесь также выполняются утверждения (4.4)–(4.7) и остаётся верным список длин крюков в $[\alpha]$ и $[\beta]$, приведённый после (4.7). Далее, тем же способом, что и в случае А (соответствующим образом изменив рисунки 4.2 и 4.3), получаем утверждения (4.8) и (4.9).

С л у ч а й Б1. Предположим, что $a = b$.

Так же, как и в случае А1, получаем равенства $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2s+3+a) = \{H_{12}^{\alpha}, H_{21}^{\alpha}, H_{12}^{\beta}\}$ и $a = b = d = c - 3$, и из рис. 4.4, учитывая строение диаграммы $\gamma = 2^k.()$, получаем следующую таблицу длин крюков в $[\alpha]$ и $[\beta]$:

$$h_{1,j}^{\alpha} = 6k + (a = 2) - 3(j-3) \ \text{ при } \ 2 \leq j \leq k+2, \quad h_{1,k+3}^{\alpha} = 3k + (a+2) + 1,$$

$$h_{21}^{\alpha} = 6k + (a+2) + 3 = h_{12}^{\alpha}, \quad h_{i,1}^{\alpha} = 6k + (a+2) - 3(i-2) = h_{1,i+1}^{\alpha} \ \text{ при } \ 3 \leq i \leq k+1,$$

$$h_{1,j}^{\beta} = 6k + (a+2) - 3(j-3) = h_{1,j}^{\alpha} \ \text{ при } \ 2 \leq j \leq k+1, \quad h_{1,k+2}^{\beta} = 3k + (a+2) + 4,$$

$$h_{i,1}^{\beta} = 6k + a - 3(i-2) = h_{1,i+1}^{\beta} = h_{1,i+1}^{\alpha} \ \text{ при } \ 2 \leq i \leq k+1, \quad h_{k+2,1}^{\beta} = 3k + a + 2,$$

$$h_{2,j}^{\alpha} = 6k + 4 + 3(j-2) \ \text{ при } \ 2 \leq j \leq k+1.$$

Положим

$$h := h_{1,k+2}^{\beta} = 3k + a + 6.$$

Теперь по типу рассуждений, используемых в случае А1, последовательно получаем: условие (4.11), утверждение “3 делит $a+2$ ($3 \leq a+2 \leq 3k$)”, равенство $\mathrm{H}^{\alpha}(6k+4) = \{H_{22}^{\alpha}\}$, (4.10), утверждение “$\chi^{\alpha^{22}}$ и $\chi^{\beta^{1,k+2}}$ пропорциональны или полупропорциональны на $A_{n-(6k+4)}$” и его противоречивость ввиду условия А.

Следовательно, случай Б1 противоречив, т. е.

$$a > b \text{ и либо } \mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2s+3+a) = \{H_{12}^{\alpha}\}, \text{ либо } \mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2s+3+a) = \{H_{12}^{\alpha}, H_{12}^{\beta}\}.$$

Далее, как нетрудно увидеть, можно повторить все шаги доказательства противоречивости случаев А2 и А3 и тем самым доказать противоречивость случая Б. (При этом следует заменить ссылки на рис. 4.1 ссылками на рис. 4.4 и слегка изменить рисунки 4.2 и 4.3. Заметим, что при $k = 1$ увеличатся на единицу значения $h_{12}^{\widetilde{\beta}}$ и $h_{21}^{\widetilde{\beta}}$, но это не влияет на результат.)

Таким образом, теорема А2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белоногов В.А.** О неприводимых характерах групп S_n и A_n // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 5. С. 977–994.
2. **Белоногов В.А.** К гипотезе о полупропорциональных характерах // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 299–314.
3. **Белоногов В.А.** О неприводимых характерах группы S_n, полупропорциональных на A_n или на $S_n \setminus A_n$. I // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 143–163.
4. **Белоногов В.А.** О неприводимых характерах группы S_n, полупропорциональных на A_n // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 2. С. 135–156.
5. **Белоногов В.А.** Диаграммы Юнга без крюков длины 4 и характеры группы S_n // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 3. С. 30–40.
6. **Белоногов В.А.** О некоторых парах неприводимых характеров групп S_n и A_n // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН., 2007. Т. 13, № 1. С. 11–43.
7. **Белоногов В.А.** О некоторых парах неприводимых характеров групп S_n // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 2. С. 13–32.
8. **Белоногов В.А.** О равнокорневых неприводимых характерах групп S_n и A_n // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 1. С. 3–25.
9. **Белоногов В.А.** Представления и характеры в теории конечных групп. Свердловск: УрО АН СССР, 1990. 378 с.
10. **James G., Kerber A.** The representation theory of the symmetric group. London: Addison–Wesley, 1981. 510 p.
11. **Джеймс Г.** Теория представлений симметрических групп. М.: Мир, 1982. 214 с.
12. **Белоногов В.А.** О диаграммах Юнга пары неприводимых характеров S_n, равнокорневых на S_n^ε // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 5. С. 992–1006.

Белоногов Вячеслав Александрович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: belonogov@imm.uran.ru

Поступила 18.02.2008

Том 14 № 3 2008

УДК 519.62

ДВА СПОСОБА ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ВИДИМОСТИ ДВИЖУЩЕЙСЯ ТОЧКИ[1]

В. И. Бердышев

Даны два способа определения видимости (наблюдаемости) объекта, движущегося в пространстве с препятствием, которое мешает движению и восприятию объекта наблюдателем. Первый способ основан на учете расстояния от объекта до всех возможных наблюдателей. Второй, кроме расстояния, использует размер кругового конуса с вершиной в точке наблюдения, содержащего сферическую окрестность объекта. Установлена дифференцируемость по направлению функций, характеризующих видимость объекта. Поиск производных сводится к экстремальной задаче, для нее даны теоремы об "очистке".

Ключевые слова: навигация движущегося объекта, характеризация видимости объекта, дифференцируемость по направлению.

Введение

Работа посвящена понятию видимости (наблюдаемости) точечного объекта, движущегося в пространстве $\mathbb{R}^3$ с препятствием в виде фиксированного телесного замкнутого множества G, которое может нарушать видимость объекта. Примером служит движение объекта над земной поверхностью. В этом случае в качестве множества G выступает подграфик функции, определяющей высоту рельефа, а наблюдение за объектом осуществляется из точек надграфика.

Пусть функция $F = F(u)$ $(u \in Q \subset \mathbb{R}^2)$ задает поле высот земной поверхности над уровнем моря в некотором регионе, соответствующем множеству Q. Функция F может иметь точки разрыва первого рода. Под $\operatorname{graph} F$ будем понимать график функции F, пополненный вертикальными отрезками

$$\Big[\varliminf_{q\to u} F(q),\ \varlimsup_{q\to u} F(q)\Big], \qquad u \in Q.$$

Пусть $\Delta = \{l\}$ — совокупность всех лучей, исходящих из начала координат пространства $\mathbb{R}^3$. Для точки $t = (u_t, z_t) \in \mathbb{R}^3,\ z_t > F(u_t)$, и луча $l \in \Delta$ такого, что

$$(t + l) \cap \operatorname{graph} F \neq \varnothing, \tag{0.1}$$

обозначим через

$$\rho = \rho_t(l) \quad \text{и} \quad f_{t,l} \tag{0.2}$$

расстояние от t до множества (0.1) и соответственно ближайшую к t точку из этого множества. Если

$$(t + l) \cap \operatorname{graph} F = \varnothing,$$

то положим $\rho_t(l) = +\infty,\ \{f_{t,l}\} = \varnothing$.

В работе предлагаются два способа определения характеристик видимости точек траектории для наблюдателя. Первый способ, интегральный, носит эвристический характер. Второй обоснован более строго.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00325) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-1071.2008.1).

1. Интегральная характеристика видимости

Пусть точка $f = (u_f, z_f) \in \mathbb{R}^3$ такова, что $z_f \geq F(u_f)$. Если для интервала $(t, f) = \{\vartheta t + (1-\vartheta)f\colon 0 < \vartheta < 1\}$ с концами t и f

$$(t, f) \cap \operatorname{graph} F = \varnothing,$$

то точки t и f видимы одна для другой. Естественно предположить, что при малом евклидовом расстоянии $|t - f|$ между t и f точка t лучше видима для f (менее скрыта от f), чем при большом $|t - f|$. Требуется ввести усредненную характеристику видимости точки t.

Пусть $\eta = \eta(\rho)$ — такая положительная дифференцируемая и интегрируемая на $(0, \infty)$ функция, что

$$\eta(\rho) \to 0 \qquad (\rho \to +\infty). \tag{1.1}$$

Величина

$$\int\limits_{\Delta} \eta(\rho_t(l))\, dl \tag{1.2}$$

содержит информацию о расстоянии точки t до всех видимых из t точек f земной поверхности. Влияние на характеристику видимости точки t для $f \in \operatorname{graph} F$ регулируется выбором функции η. Влияние далеких точек нивелируется за счет свойства (1.1) функции η. Поэтому в области больших высот с увеличением высоты z_t точки t величина (1.2) уменьшается в силу возрастания величины $\rho_t(l)$. Однако при переходе от малых высот к средним видимость точки t из точек f земной поверхности на самом деле увеличивается за счет расширения множества точек $f_{t,l}$. Поэтому целесообразно задать еще дифференцируемую функцию

$$h = h(z) \geq 0 \qquad (z > 0), \qquad h(z) \to 0 \qquad (z \to +\infty)$$

такую, что функция

$$a(t) = h(z_t) \int\limits_{\Delta} \eta(\rho_t(l))\, dl \tag{1.3}$$

возрастает при увеличении z_t до средних высот и убывает в области больших z_t. Функция $a(t)$ является интегральной характеристикой видимости точки t для наблюдателей, расположенных на графике функции F. Предполагается, что с увеличением $a(t)$ растет видимость объекта. В качестве η и h можно выбирать функции Гаусса (функции плотности нормального распределения) с различными параметрами.

Приведем выражение для производной по направлению функции $a(t)$. Пусть вектор $\widetilde{t}$, $|\widetilde{t}| = 1$, задает направление дифференцирования, функции F, η и h дифференцируемы. Для не коллинеарного с $\widetilde{t}$ луча l через H обозначим двумерную плоскость, содержащую лучи $t + l$ и $\{t + \lambda\widetilde{t}\;:\;\; \lambda \geq 0\}$, через $\gamma = \gamma(t, l, \widetilde{t})$ — угол между вектором $\widetilde{t}$ и прямой, лежащей в H и касательной к $\operatorname{graph} F$ в точке $f_{t,l}$, а через $\beta = \beta(l, \widetilde{t})$ — угол между l и $\widetilde{t}$. С применением теоремы синусов легко устанавливается

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$\frac{\partial a(t)}{\partial \widetilde{t}} = h'(z_t) z_{\widetilde{t}} \int\limits_{\Delta} \eta(\rho_t(l))\, dl + h(z_t) \int\limits_{\Delta} \eta'(\rho_t(l)) \frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma + \beta)}\, dl.$$

2. Угловая характеристика видимости

2.1. Основные понятия

Пусть точки

$$t = (u_t, z_t), \qquad f = (u_f, z_f) \quad \bigl(z_t > F(u_t), \quad z_f > F(u_f)\bigr)$$

видимы одна для другой, т. е.

$$(t, f) \cap \operatorname{graph} F = \varnothing.$$

Здесь, как в предыдущем разделе, $|f - t|$ — евклидово расстояние между точками. Для числа r, $0 \le r \le |f - t|$, обозначим через

$$K = K_r(t) = K_r(t, f) = \operatorname{conv}(V_r(t) \cup f)$$

выпуклую оболочку точки f и шара $V_r(t) = \{v : |t-v| \le r\}$, через $\operatorname{bd} K$ и K° — границу и внутренность множества K, а через $G = \operatorname{graph} F$ — график функции F. Замыкание множества M далее обозначается через $\overline{M}$.

О п р е д е л е н и е. Пусть $\alpha = \arcsin(r/|f - t|)$, $0 \le \alpha < \pi/2$. Точку t назовем α-видимой для точки f, если

$$K_r^\circ(t, f) \cap G = \varnothing.$$

Это означает, что любая точка из $V_r(t)$ видима из f.

Поясним целесообразность введения понятия "α-видимости". Предположим, что через точку t проходит объект, движущийся с постоянной скоростью v_t, который "замечен" из точки f, и из этой точки f движется "преследователь" с постоянной скоростью v_f. Если

$$\frac{v_t}{v_f} \le \sin\alpha,$$

то за время $\tau = |f - t|/v_f$ движения "преследователя" из точки f в точку t "преследуемый" не выйдет из шара $V_r(t)$, так как

$$v_t \tau = v_t \frac{|f - t|}{v_f} \le |f - t| \sin\alpha = r,$$

а ввиду условия $V_r^\circ(t) \cap G = \varnothing$ он не имеет возможности стать невидимым для "преследователя".

Везде в дальнейшем точка f фиксирована, и будем считать, что

$$r = r(t) = r(t, G) = r(t, f, G) \quad \text{и} \quad \alpha = \alpha(t) = \alpha(t, G) = \alpha(t, f, G) \tag{2.1}$$

— наибольшие радиус и угол, для которых точка t является α-видимой для f, т. е.

$$K_r^\circ(t, f) \cap G = \varnothing, \qquad (K_r(t, f) \backslash f) \cap G \ne \varnothing, \qquad r = r(t) = |f - t| \sin\alpha(t).$$

Усредненную видимость точки t для точек земной поверхности можно характеризовать величиной (см. (0.2))

$$\operatorname{vis}(t) = \int\limits_{\Delta(t)} \sin\alpha(t, f_{t,l}, G)\, dl, \tag{2.2}$$

где $\Delta(t) = \{l \in \Delta : (t + l) \cap G \ne \varnothing\}$.

Лемма 1. *Функция* $r(t)$ (*см.* (2.1)) *непрерывна, более того, она удовлетворяет условию*

$$|r(t) - r(T)| \le |t - T| \qquad \big(T \in V_{|t-f|}(t)\big)\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, для точек t, T, $|t - T| = \delta$, из соотношений

$$V_{r(t)}(t) \subset V_{r(t)+\delta}(T), \qquad K_{r(t)}(t,f) \cap G \ne \varnothing$$

следует, что $G \cap K_{r(t)+\delta}(T,f) \ne \varnothing$ и, значит, $r(T) \le r(t) + \delta$. Неравенство $r(t) \le r(T) + \delta$ устанавливается аналогично. Лемма доказана. $\square$

Граница $\operatorname{bd} K$ множества K есть объединение двух поверхностей: сферической $s_r = s_r(t)$ — это замыкание не видимой из точки f части сферы $S_r = S_r(t) = \{q:\ |t - q| = r\}$, т. е. замыкание множества $\{v \in S_r\colon (v,f) \cap S_r \ne \varnothing\}$, и конической

$$\kappa_r(t) = \kappa_r(t,f) = (\operatorname{bd} K_r(t,f)) \backslash s_r(t).$$

Точки из множества $(K_r(t,f)\backslash f) \cap G$ могут располагаться как на $s_r(t)$, так и на $\kappa_r(t,f)$. Если $g \in \kappa_r(t,f) \cap G$, то луч $L_g = \{f + \vartheta(g - f)\colon \vartheta > 0\}$ касается сферы $S_r(t)$ в единственной точке $p = p(g)$, при этом

$$p \in S_{\frac{\rho}{2}}\left(\frac{t+f}{2}\right), \qquad g \in (p,f),$$

где $\rho = |t - f|$, а (p,f) — интервал с концами в точках p, f.

2.2. Одностороннее дифференцирование функции $r(t)$ по направлению

При планировании маршрута движения объекта важно знать величину производной по направлению от функции $\operatorname{vis}(t)$. Эта производная вычисляется через производные функций $r(t)$, $\alpha(t)$. Приведем два доказательства дифференцируемости по направлению $\widetilde{t}$, $|\widetilde{t}| = 1$, функции $r(t)$. Первое доказательство опирается на известную теорему В. Ф. Демьянова [1, гл. 4, § 2] и позволяет выписать формулу для величины производной. Второе доказательство верно в случае гильбертова пространства (произвольной размерности), но не дает выражения для производной. Оно принадлежит В. С. Балаганскому и приводится здесь с его согласия. Далее обозначается

$$\frac{\partial r(t)}{\partial \widetilde{t}} = \lim_{\lambda \to +0} \frac{r(t + \lambda \widetilde{t}) - r(t)}{\lambda}.$$

Теорема 2 (В. Ф. Демьянов). *Пусть $\mathcal{T}$ — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, G — ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{R}^m$, $R(t,g)$ — функция, непрерывно дифференцируемая на $\mathcal{T} \times G$ по переменной t,*

$$r(t) = \max\{R(t,g):\ g \in G\}, \qquad G(t) = \{g \in G:\ R(t,g) = r(t)\}. \tag{2.3}$$

Тогда функция $r(t)$ имеет в каждой точке $t \in \mathcal{T}$ производную по любому направлению $\widetilde{t}$, $|\widetilde{t}| = 1$, причем

$$\frac{\partial r(t)}{\partial \widetilde{t}} = \max\left\{\frac{\partial R(t,g)}{\partial \widetilde{t}}:\ g \in G(t)\right\}.$$

Введем функцию $R(t,g)$ для $g \in V_{|t-f|}(t)$ следующим образом:

$$R(t,g) = \sup\{r:\ g \notin K_r(t,f)\} = \min\{r:\ g \in K_r(t,f)\},$$

тогда (см. (2.1))

$$r(t) = r(t,G) = \min\{R(t,g):\ g \in G\}.$$

Если $g \in \kappa_{r(t)}(t,f)$, то $g \in \kappa_{r(T)}(T,f)$ для всех точек T из окрестности точки t, т. е.

$$R(T,g) = d(T,L_g), \tag{2.4}$$

где $d(T,L_g)$ — расстояние от точки T до луча $L_g = \{f + \vartheta(g-f):\ \vartheta > 0\}$.

Если $g \in s_{r(t)} \backslash \overline{\kappa}_{r(t)}(t,f)$, то $g \in s_{r(T)}(T)$ для точек T из окрестности точки t, т. е.

$$R(T,g) = |T-g|. \tag{2.5}$$

Пусть $g \in S_{r(t)}(t) \cap L_g$ и H — плоскость, ортогональная вектору $f-g,\ t \in H$. Если точка T из окрестности точки t лежит в замкнутом полупространстве, образованном плоскостью H и содержащем f, то

$$R(T,g) = |T-g|.$$

Если точка T не принадлежит этому полупространству, то

$$R(T,g) = d(T,L_g).$$

Покажем, что функция $R(t,g)$ непрерывно дифференцируема. В случае, когда $g \in s_r$, определим декартову систему координат с началом в точке g и осью аппликат, задаваемой вектором $t-g$. Оси абсцисс и ординат можно задать произвольно. Пусть $\widetilde{t} = (\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z})$, $|\widetilde{t}| = 1$, $t_\lambda = t + \lambda\widetilde{t}$ $(\lambda \geq 0)$, $r = |t-g|$, γ — угол между векторами $t-g,\ \widetilde{t}$. По теореме косинусов

$$|g-t_\lambda|^2 = r^2 + \lambda^2 + 2r\lambda\cos\gamma,$$

отсюда

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{|g-t_\lambda|^2 - r^2}{\lambda} = 2r\cos\gamma,$$

и значит,

$$\frac{d}{d\lambda}|g-t_\lambda| = \cos\gamma = \widetilde{z}. \tag{2.6}$$

Далее, в случае, когда $g \in \kappa_r(t,f)$, возьмем систему координат с началом в точке $p(g)$, осью аппликат, сонаправленной с вектором $t-p(g)$, и осью ординат, ортогональной плоскости, содержащей t и L_g. Тогда

$$d^2(t_\lambda,L_g) = (r+\lambda\widetilde{z})^2 + (\lambda\widetilde{y})^2,$$

откуда следует, что функция $d(t_\lambda,L_g)$ дифференцируема по λ и

$$\frac{d}{d\lambda}d(t_\lambda,L_g) = \widetilde{z}. \tag{2.7}$$

Непрерывность функции $\partial R(t,g)/\partial\widetilde{t}$ в случае $g \in \kappa_{r(t)}(t,f)$ следует из (2.4), (2.7), в случае $g \in s_{r(t)}(t)\backslash\overline{\kappa}_{r(t)}(t,f)$ — из (2.5), (2.6), а в случае $g \in S_{r(t)}(t) \cap L_g$ — из (2.6), (2.7). Применяя теорему В. Ф. Демьянова, убеждаемся, что справедлива

Теорема 3. *Функция $r(t)$ дифференцируема по любому направлению $\widetilde{t}$, $|\widetilde{t}| = 1$, при этом*

$$\frac{\partial r(t)}{\partial\widetilde{t}} = \min\left\{\frac{\partial R(t,g)}{\partial\widetilde{t}}:\ g \in G(t)\right\},$$

$$\frac{\partial R(t,g)}{\partial\widetilde{t}} = \frac{d}{d\lambda}|g-t_\lambda|_{\lambda=+0} \quad \textit{при} \quad g \in s_{r(t)}(t), \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial R(t,g)}{\partial\widetilde{t}} = \frac{d}{d\lambda}d(t_\lambda,L_g)_{\lambda=+0} \quad \textit{при} \quad g \in \kappa_{r(t)}(t), \tag{2.9}$$

где $G(t) = \{g \in G:\ R(t,g) = r(t)\}$, $t_\lambda = t + \lambda\widetilde{t}$.

Факт дифференцируемости функции $r(t)$ устанавливает также следующая

Теорема 4 (В. С. Балаганский). *Пусть X — гильбертово пространство. Функция $r(t)$ дифференцируема по любому направлению.*

Доказательство. Пусть $t=0$, $\widetilde{t}\in X\backslash\{0\}$, $\|\widetilde{t}\|=1$, $t_\lambda=\lambda\widetilde{t}$, $t_\mu=\mu\widetilde{t}$, $0<\lambda<\mu<1$. Сперва отметим очевидное включение

$$V_R(t_\lambda)\subset V_r(0)\cup V_{r(t_\mu)}(t_\mu), \tag{2.10}$$

где $r=r(0)$, $R=\sqrt{r^2+\lambda\Big(\lambda-\dfrac{r^2-r^2(t_\mu)+\mu^2}{\mu}\Big)}$.

Если предел

$$\lim_{\lambda\to+0}\frac{r(t_\lambda)-r(0)}{t}$$

не существует, то в силу липшицевости с константой 1 функции $r(t)$ (см. лемму 1), найдутся последовательности $\lambda_n,\mu_n\in(0,1)$, $\lambda_n\to+0$, $\mu_n\to+0$ и числа c_λ, c_μ такие, что справедливы следующие соотношения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r(t_{\mu_n})-r(0)}{\mu_n}=c_\mu>c_\lambda=\lim_{n\to\infty}\frac{r(t_{\lambda_n})-r(0)}{\lambda_n}.$$

Считаем без потери общности, что $\lambda_n\le\mu_n\le\lambda_{n-1}$.

В силу включения (2.10) справедливо неравенство

$$r(t_{\lambda_n})\ge\sqrt{r^2+\lambda_n\Big(\lambda_n-\frac{r^2-r^2(t_{\mu_n})+\mu_n^2}{\mu_n}\Big)}.$$

Выражение, стоящее в правой части этого неравенства, обозначим через $\rho(t_{\lambda_n})$. Имеем

$$\rho^2(t_{\lambda_n})-r^2(0)=r^2(0)+\lambda_n\left(\lambda_n-\frac{r^2(0)-r^2(t_{\mu_n})+\mu_n^2}{\mu_n}\right)-r^2(0)$$

$$=\lambda_n\left(\lambda_n-\frac{r^2(0)-r^2(t_{\mu_n})+\mu_n^2}{\mu_n}\right),$$

следовательно,

$$\frac{\rho(t_{\lambda_n})-r(0)}{\lambda_n}=\frac{\lambda_n-\dfrac{r^2(0)-r^2(t_{\mu_n})+\mu_n^2}{\mu_n}}{\rho(t_{\lambda_n})+r(0)}.$$

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(t_{\lambda_n})=r(0)$. Имеем

$$r^2=\lim_{n\to\infty}r^2(t_{\lambda_n})\ge\lim_{n\to\infty}\rho^2(t_{\lambda_n})=\lim_{n\to\infty}\left(r^2+\lambda_n\Big(\lambda_n-\frac{r^2-r^2(t_{\mu_n})+\mu_n^2}{\mu}\Big)\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(r^2-\lambda_n\frac{r^2-r^2(t_{\mu_n})}{\mu_n}\right)\ge\lim_{n\to\infty}\big(r^2-|r^2-r^2(t_{\mu_n})|\big)=r^2,$$

следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(t_{\lambda_n})=r(0)$. Тогда

$$c_\lambda=\lim_{n\to\infty}\frac{r(t_{\lambda_n})-r(0)}{\lambda_n}\ge\lim_{n\to\infty}\frac{\rho(t_{\lambda_n})-r(0)}{\lambda_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n-\dfrac{r^2(0)-r^2(t_{\mu_n})+\mu_n^2}{\mu_n}}{\rho(t_{\lambda_n})+r(0)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{r(t_{\mu_n}) - r(0)}{\mu_n} = c_\mu,$$

противоречие. Теорема доказана. □

В соответствии с теоремой 3 для поиска величины $\partial r(t)/\partial\widetilde{t}$ надо вычислять для всех точек $g \in G(t)$ величину $\partial R(t,g)/\partial\widetilde{t}$, т. е.

$$\frac{d}{d\lambda}|g - t_\lambda| \quad \text{при} \quad g \in s_{r(t)}(t) \quad \text{и} \quad \frac{d}{d\lambda} d(t_\lambda, L_g) \quad \text{при} \quad g \in \kappa_{r(t)}(t).$$

В силу (2.6)

$$\frac{d}{d\lambda}|g - t_\lambda| = \cos\gamma_g,$$

где γ_g — угол между векторами $t - g$ и $\widetilde{t}$.

В случае, когда $g \in G \cap \kappa_r(r, f)$ и векторы $f - t$ и t_λ не коллинеарны, выразим производную функций $d(t_\lambda, L_p)$, $p = p(g)$ через углы $\delta = \angle tfg$ и $\beta = \angle ftt_\lambda$ и через угол ξ между плоскостями предыдущих углов.

Лемма 2. *Имеет место равенство*

$$\lim_{\lambda\to+0} \frac{d(t_\lambda, L_p) - r}{\lambda} = \frac{\cos^2\beta}{\sin^2\delta}(\sin\beta\cos\delta\cos\xi + \sin\delta\cos\beta - r).$$

Данная лемма устанавливается непосредственным вычислением.

2.3. Теоремы об очистке

Задача дифференцирования функции $r(t)$ в соответствии с теоремой 3 сводится к минимизации величины $\partial R(t,g)/\partial\widetilde{t}$ на множестве $G(t)$. Ее сложность определяется мощностью множества $G(t)$. В простейшем случае, когда векторы $f - \widetilde{t}$ и $\widetilde{t}$ коллинеарны, величина (2.8) при $g \in s_r(t)$ совпадает с $\cos\gamma_g$, где γ_g — угол между векторами $t - g$ и $\widetilde{t}$, а величина (2.9) при $g \in \kappa_r(t)$ равна $\sin\alpha_g$, где α_g — угол между векторами $g - f$ и $t - f$, т. е.

$$\frac{\partial r(t)}{\partial\widetilde{t}} = \min\left\{\cos\gamma_g \;\; \text{при} \;\; g \in s_r(t) \cap G(t); \;\; \sin\alpha_g \;\; \text{при} \;\; g \in \kappa_r(t) \cap G(t)\right\}.$$

В этом случае $\min \partial R(t,g)/\partial\widetilde{t}$ легко определяется. В настоящем подразделе доказывается, что всегда существует подмножество из $G(t)$, на котором достаточно решить задачу минимизации. Это подмножество состоит из точек $g \in G(t) \cap s_r(t)$, располагающихся на окружности, лежащей в ортогональной к $\widetilde{t}$ плоскости, и точек $g \in G(t) \cap \kappa_r(t)$, лежащих на двух лучах L_{v^+}, L_{v^-}, положение которых определяется величиной $r'(t)$.

Будем обозначать

$$r = r(t), \qquad t_\lambda = t + \lambda\widetilde{t}, \qquad r_\lambda = r(t_\lambda), \qquad r' = \frac{\partial r(t)}{\partial\widetilde{t}} = \lim_{\lambda\to+0} \frac{r_\lambda - r}{\lambda}. \tag{2.11}$$

Отметим, что ввиду леммы 1 выполняется неравенство $|r'| \le 1$.

Поскольку $r' = \lim\limits_{\lambda\to+0}(r_\lambda - r)/\lambda$ (см. (2.11)), то существует сходящаяся последовательность точек $g_\lambda \in G$ (ясно, что $g = \lim\limits_{\lambda\to+0} g_\lambda \in G(t)$), для которой возможны случаи:

(1) $g_\lambda \in s_{r_\lambda}(t_\lambda)$, т. е. $|g_\lambda - t_\lambda| = r_\lambda$,

(2) $g_\lambda \in \kappa_{r_\lambda}(t_\lambda)$, т. е. $d(t_\lambda, L_{g_\lambda}) = r_\lambda$.

В первом случае имеет место

Теорема 5. *Точка* $g = \lim\limits_{\lambda\to+0} g_\lambda$ *лежит на окружности* C, *которая является пересечением сферы* $S_r(t)$ *с плоскостью, ортогональной вектору* $\widetilde{t}$ *и содержащей точку* $t + (r\,r')\widetilde{t}$, *и выполняется равенство*

$$\frac{\partial r(t)}{\partial \widetilde{t}} = \lim_{\lambda\to+0} \frac{|t_\lambda - g| - r}{\lambda}. \tag{2.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем в $\mathbb{R}^3$ декартову систему координат с центром в точке t и осью ординат, сонаправленной с вектором $\widetilde{t}$, не уточняя положение остальных осей. Сферы $S_r = S_r(t)$, $S_{r_\lambda} = S_{r_\lambda}(t_\lambda)$ задаются уравнениями $x^2+y^2+z^2 = r^2$, $x^2 + (y-\lambda)^2 + z^2 = r^2(t_\lambda)$. Вторая координата любой точки окружности $C = S_r \cap S_{r_\lambda}$ есть число

$$y_\lambda = -\frac{r^2(t_\lambda) - r^2 - \lambda^2}{2\lambda},$$

и существует предел

$$y_* = \lim_{\lambda\to 0} y_\lambda = -r'r.$$

По определению точек g, g_λ выполняются включения

$$g_\lambda \in (S_{r_\lambda} \backslash V_r^\circ(t)) \cap G, \qquad g \in \big(S_r \backslash V_{r_\lambda}^\circ(t_\lambda)\big) \cap G,$$

следовательно, плоскость, содержащая окружность C, разделяет точки g и g_λ. Поскольку $g_\lambda \to g$ $(\lambda\to+0)$, то точка g лежит на окружности $\{(x,z):\ x^2+y_*^2+z^2 = r^2\}$. Квадрат расстояния между точками $g = (x, y_*, z)$, $t_\lambda = (0,\lambda,0)$ выражается через r, y_* и λ формулой

$$|t_\lambda - g|^2 = x^2 + (\lambda - y_*)^2 + z^2 = x^2 + y_*^2 + z^2 - 2\lambda y_* + \lambda^2 = r^2 - 2\lambda y_* + \lambda^2,$$

а значит,

$$\lim_{\lambda\to+0} \frac{|t_\lambda - g|^2 - r^2}{\lambda} = \lim_{\lambda\to+0} \frac{-2\lambda y_* + \lambda^2}{\lambda} = -2y_* = 2r'r,$$

откуда следует (2.12). Теорема доказана. □

Рассмотрим второй случай:

$$g_\lambda \in \kappa_{r_\lambda}(t_\lambda), \quad \text{т. е.} \quad d(t_\lambda, L_{g_\lambda}) = r_\lambda \quad \text{и} \quad r' = \lim_{\lambda\to+0} \frac{d(t_\lambda, L_{g_\lambda}) - r}{\lambda}.$$

Пусть γ — угол между векторами $t-f$, $\widetilde{t}$ и $0<\gamma<\pi$. В плоскости Z, ортогональной вектору $f-t$ и содержащей точку t, введем ортогональную систему координат с началом в точке t так, чтобы ось ординат была сонаправлена с проекцией на Z вектора $\widetilde{t}$. На окружности $x^2+y^2 = R^2$ в этой плоскости отметим две точки v^+, v^- с одинаковыми ординатами, равными

$$\frac{r\rho(r\cos\gamma - \rho r')}{(\rho^2 - r^2)\sin\gamma},$$

где

$$R = \frac{r\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2}}, \qquad \rho = |t-f|,$$

и пусть $L_{v^\pm} = \{f + \vartheta(v^\pm - f):\ \vartheta > 0\}$. Имеет место

Теорема 6. *Точка* $g = \lim\limits_{\lambda\to+0} g_\lambda$ *лежит на одном из лучей* L_{v^+} *или* L_{v^-}, *и выполняется равенство*

$$\frac{\partial r(t)}{\partial \widetilde{t}} = \lim_{\lambda\to+0} \frac{d(t_\lambda, L_g) - r}{\lambda}. \tag{2.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\mathcal{L}(t) = \{L_g : \ g \in \kappa_{r(t)}(t) \cap G\}$. При $\lambda \to +0$ возможны случаи:

(a) для некоторого $\lambda_0 > 0$

$$d(t_{\lambda_0}, \mathcal{L}(t_{\lambda_0})) = d(t_{\lambda_0}, \mathcal{L}(t));$$

(b) для всех достаточно малых $\lambda > 0$ выполняются соотношения

$$\mathcal{L}(t_\lambda) \cap K_r^\circ(t) = \varnothing, \qquad d(t_\lambda, \mathcal{L}(t_\lambda)) \neq d(t_\lambda, \mathcal{L}(t));$$

(c) $\mathcal{L}(t_\lambda) \cap K_r^\circ(t) = \varnothing$ для бесконечной последовательности $\lambda = \lambda_n \to +0$.

Рассмотрим случай (a). Найдется луч $L \in \mathcal{L}(t)$, для которого

$$d(t_{\lambda_0}, L) = d(t_{\lambda_0}, \mathcal{L}(t)).$$

Определим конус $\mathcal{K}_\lambda = \mathcal{K}_{r_\lambda}(t_\lambda)$ $(0 \le \lambda \le \lambda_0)$ с вершиной в точке f, содержащий шар $V_{r_\lambda}(t_\lambda)$, где $t_0 = t, \ r_0 = r$. Множество

$$\bigcap_{\lambda=0}^{\lambda_0} \operatorname{bd} \mathcal{K}_\lambda(t_\lambda)$$

состоит из двух лучей: луча L и симметричного ему относительно прямой $\{t + \theta\widetilde{t} : \ \theta \in \mathbb{R}\}$ луча L'. Имеем

$$d(t_\lambda, L) = d(t_\lambda, L') \quad (0 \le \lambda \le \lambda_0),$$

$$\mathcal{K}_0^\circ \cap \mathcal{L}(t) = \varnothing, \qquad \mathcal{K}_{\lambda_0}^\circ \cap \mathcal{L}(t) = \varnothing,$$

и поскольку

$$\mathcal{K}_\lambda \in \mathcal{K}_0 \cup \mathcal{K}_{\lambda_0},$$

то

$$\mathcal{K}_\lambda^\circ \cap \mathcal{L}(t) = \varnothing \quad (0 < \lambda < \lambda_0).$$

Значит,

$$d(t_\lambda, \mathcal{L}(t_\lambda)) = d(t_\lambda, \mathcal{L}(t)) = d(t_\lambda, L),$$

откуда следует (2.13) при $L_p = L$. Отметим, что случай коллинеарности вектора $\widetilde{t}$ вектору $t - f$ содержится в случае (a).

Рассмотрим случай (b). Пусть вектор $\widetilde{t}$ и отрезок $[t, f]$ не коллинеарны. Введем в $\mathbb{R}^3$ декартову систему координат так, что точка t является ее началом, ось аппликат сонаправлена с вектором $f - t$, а осью ординат является пересечение плоскости $Z := \{(x, y, z) : z = 0\}$ с плоскостью Y, натянутой на точки $t, \ f, \ t + \widetilde{t}$ (направление оси выбрано так, что проекция точки $t + \widetilde{t}$ на плоскость Z имеет положительную ординату). Пересечениями конусов

$$\mathcal{K}_r = \{f + \theta v : \ v \in V_r(t), \ \theta \ge 0\} \quad \text{и} \quad \mathcal{K}_{r_\lambda} = \{f + \theta v : \ v \in V_{r_\lambda}(t_\lambda), \ \theta \ge 0\}$$

с плоскостью Z являются соответственно круг с границей

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad R = \frac{r\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2}}, \quad \rho = |t - f|, \tag{2.14}$$

и эллипс с границей

$$\left(\frac{x}{a_\lambda}\right)^2 + \left(\frac{y - c_\lambda}{b_\lambda}\right)^2 = 1. \tag{2.15}$$

Пусть γ — угол между вектором $\widetilde{t}$ и лучом $\{f + \theta(t - f) : \ \theta < 0\}$. Большая ось эллипса $\mathcal{K}_{r_\lambda} \cap Z$ лежит на оси ординат, точки $(0, b_1), \ (0, b_2) \quad (b_1 > 0, \ b_2 < 0)$ пересечения границы эллипса с осью имеют ординаты

$$b_1 = \frac{r_\lambda(\rho + \lambda\cos\gamma) + \lambda\sin\gamma\sqrt{\rho_\lambda^2 - r_\lambda^2}}{(\rho + \lambda\cos\gamma)\sqrt{\rho_\lambda^2 - r_\lambda^2} - \lambda r_\lambda \sin\gamma},$$

$$b_2 = -\frac{r_\lambda(\rho+\lambda\cos\gamma) - \lambda\sin\gamma\sqrt{\rho_\lambda^2 - r_\lambda^2}}{(\rho+\lambda\cos\gamma)\sqrt{\rho_\lambda^2 - r_\lambda^2} + \lambda r_\lambda \sin\gamma},$$

отсюда получаем величину диаметра эллипса

$$b_\lambda = \frac{b_1 - b_2}{2} = \frac{\rho r_\lambda \sqrt{\rho_\lambda^2 - r_\lambda^2}}{(\rho+\lambda\cos\gamma)^2 - r_\lambda^2}$$

и ординату его центра

$$c_\lambda = \frac{b_1 + b_2}{2} = \lambda\frac{\rho\sin\gamma(\rho+\lambda\cos\gamma)}{(\rho+\lambda\cos\gamma)^2 - r_\lambda^2}.$$

Для вычисления малой полуоси a_λ эллипса (2.15) построим плоскость X, ортогональную плоскости Y и содержащую точки $c = (0, c_\lambda)$, f, и найдем точку $g = X \cap Z \cap \operatorname{bd}\mathcal{K}_{r_\lambda}$. Тогда $a_\lambda = |c - g|$. Проекция $T = T_\lambda$ точки t_λ на прямую $X \cap Y$ является центром круга $V_{r_\lambda}(t_\lambda) \cap X$. Радиус этого круга равен

$$r_T = \sqrt{r_\lambda^2 - (t_\lambda T_\lambda)^2},$$

через него выражается величина a_λ:

$$a_\lambda = cg = \frac{(cf)\, r_T}{\sqrt{(Tf)^2 - r_T^2}},$$

где

$$(cf)^2 = c_\lambda^2 + \rho^2, \qquad (Tf)^2 = \rho_\lambda^2 - (t_\lambda T)^2.$$

Пусть $\beta = \beta_\lambda$ — угол между лучами $\{f + \theta(c - f) :\ \theta > 0\}$, $\{f + \theta(t - f) :\ \theta > 0\}$, тогда

$$t_\lambda T = c_\lambda \cos\beta_\lambda - \lambda\sin(\gamma - \beta), \qquad cf = \frac{\rho}{\cos\beta_\lambda}.$$

Отсюда

$$a_\lambda^2 = \frac{(c_\lambda^2 + \rho^2)[r_\lambda^2 - (t_\lambda T)^2]}{\rho_\lambda^2 - r_\lambda^2} = \rho^2\,\frac{r_\lambda^2 - [c_\lambda\cos\beta_\lambda - \lambda\sin(\alpha - \beta_\lambda)]^2}{(\rho_\lambda^2 - r_\lambda^2)\cos^2\beta_\lambda}.$$

Покажем, что если y_λ — решение системы уравнений

$$x^2 + y^2 = R^2, \qquad \left(\frac{x}{a_\lambda}\right)^2 + \left(\frac{y - c_\lambda}{b_\lambda}\right)^2 = 1$$

(см. (2.14), (2.15)), то

$$y_* := \lim_{\lambda\to+0} y_\lambda = \frac{r\rho(r\cos\gamma - \rho r'(0))}{(\rho^2 - r^2)\sin\gamma}. \tag{2.16}$$

В самом деле

$$y_\lambda = \frac{a_\lambda^2 c_\lambda - b_\lambda\sqrt{(b_\lambda^2 - a_\lambda^2)(R^2 - a_\lambda^2) + a_\lambda^2\, c_\lambda^2}}{b_\lambda^2 - a_\lambda^2}.$$

Непосредственной проверкой устанавливается, что $b_\lambda^2 - a_\lambda^2 = O(\lambda^2)$, в то время как $c_\lambda = O(\lambda)$. Отсюда следует, что существует $\lim\limits_{\lambda\to+0} y_\lambda$. Имеем

$$y_\lambda = \frac{a_\lambda^4 c_\lambda^2 - b_\lambda^2[(b_\lambda^2 - a_\lambda^2)(R^2 - a_\lambda^2) + a_\lambda^2 c_\lambda^2]}{(b_\lambda^2 - a_\lambda^2)[a_\lambda^2 c_\lambda + b_\lambda\sqrt{(b_\lambda^2 - a_\lambda^2)(R^2 - a_\lambda^2) + a_\lambda^2 c_\lambda^2}]}$$

$$= \frac{b_\lambda^2(R^2-a_\lambda^2)+a_\lambda^2c_\lambda^2}{a_\lambda^2c_\lambda+b_\lambda\sqrt{(b_\lambda^2-a_\lambda^2)(R^2-a_\lambda^2)+a_\lambda^2c_\lambda^2}} \longrightarrow \frac{\lim_{\lambda\to+0}\dfrac{R^2-a_\lambda^2}{\lambda}}{2\lim_{\lambda\to+0}\dfrac{c_\lambda}{\lambda}} \qquad (\lambda\to+0).$$

Далее,

$$\lim_{\lambda\to+0}\frac{c_\lambda}{\lambda}=\frac{\rho^2\sin\gamma}{\rho^2-r^2}, \qquad \lim_{\lambda\to+0}\frac{R^2-a_\lambda^2}{\lambda}=\frac{2r\rho^3}{(\rho^2-r^2)^2}\left(r\cos\alpha-\rho r'(0)\right),$$

поэтому

$$y_\lambda\to\frac{r\rho(r\cos\gamma-\rho r'(0))}{(\rho^2-r^2)\sin\gamma} \qquad (\lambda\to+0).$$

Равенство (2.16) установлено.

Предельные точки $\pm v$ для точек пересечения окружности (2.14) и эллипса (2.15) расположены симметрично относительно оси ординат: $\pm v=(\pm x_*,y_*)$. Имеем $p=\lim\limits_{\lambda\to+0}p_\lambda\in S_r(t)$. Обозначим

$$\overline{p}_\lambda=Z\cap L_{p_\lambda}, \qquad \overline{p}=Z\cap L_p.$$

Точка $\overline{p}_\lambda$ принадлежит границе эллипса и лежит вне открытого круга $Z\cap V_R^\circ(t)$, а точка $\overline{p}$ принадлежит окружности $Z\cap S_R^\circ(t)$. Это означает, что ордината y_λ точки пересечения окружности и эллипса расположена между ординатами $\overline{y}_\lambda$ и $\overline{y}$ точек $\overline{p}_\lambda$ и $\overline{p}$ соответственно. Поскольку $p_\lambda\to p \ \ (\lambda\to+0)$, то

$$\lim_{\lambda\to+0}\overline{y}_\lambda=\lim_{\lambda\to+0}y_\lambda,$$

т. е. $\overline{y}=y_*$ и луч L_p имеет вид

$$L_p=\{(\theta x^*,\theta y^*,(1-\theta)\rho):\ \theta\ge 0\}.$$

Квадрат расстояния от точки $t_\lambda=(0,\lambda\sin\gamma,-\lambda\cos\gamma)$ до луча L_p выражается следующим образом:

$$d^2(t_\lambda,L_p)=\theta^2(x_*^2+y_*^2+\rho^2)-2\theta(\lambda y_*\sin\gamma+\lambda\rho\cos\gamma+\rho^2)+\rho^2+2\lambda\rho\cos\gamma,$$

где

$$\theta=(\lambda y_*\sin\gamma+\lambda\rho\cos\gamma+\rho^2)(x_*^2+y_*^2+\rho^2)^{-1}.$$

Элементарные вычисления с учетом равенства (2.16) показывают, что

$$d^2(t_\lambda,L_p)-r^2=2rr'+o(\lambda),$$

откуда следует (2.13).

Перейдем к случаю (c). Пусть $L_{p_\lambda}\cap K_r^\circ(t)\ne\varnothing$ и $g_\lambda\in L_{p_\lambda}\cap G$. Покажем, что луч L_{p_λ} заходит вглубь шара $V_r(t)$ не более, чем на $O(\lambda^2)$, т. е.

$$r-d(t,L_{p_\lambda})=O(\lambda^2). \tag{2.17}$$

По определению множества $K_r(t)$ и точки p_λ

$$g_\lambda\notin K_r^\circ(t), \qquad g_\lambda\in[p_\lambda,f], \qquad d(t_\lambda,L_{p_\lambda})=|t_\lambda-p_\lambda|.$$

Пусть $a_\lambda,q_\lambda\in L_{p_\lambda}$, $|t-a_\lambda|=d(t,L_{p_\lambda})$, $q_\lambda=[p_\lambda,a_\lambda]\cap S_r(t)$. Имеем

$$r-d(t,L_{p_\lambda})=r-|t-a_\lambda|=O(|q_\lambda-a_\lambda|^2)=O(|p_\lambda-a_\lambda|^2). \tag{2.18}$$

По свойству оператора метрического проектирования

$$|p_\lambda-a_\lambda|\le|t_\lambda-t|=\lambda,$$

что вместе с (2.18) дает (2.17). Как легко убедиться, при $\overline{y}\ne y_*$ (см. (2.16)) для точек $(x,\overline{y})$ на окружности (2.14) и $(x_\lambda,\overline{y})$ на эллипсе (2.15) выполняется соотношение

$$|x_\lambda-x|=O(\lambda),$$

что не согласуется с (2.17). Поэтому $\overline{y}=y_*$ и, как установлено в случае (b), имеет место (2.18). Доказательство теоремы завершено. $\square$

Пусть $g^{\pm} = L_{v^{\pm}} \bigcap S_r(t)$.

Следствие 1. *Величина*

$$\min\left\{\frac{\partial R(t,g)}{\partial \widetilde{t}} : \ g \in G(t)\right\}$$

не изменится, если $G(t)$ заменить множеством точек $g \in G(t)$, лежащих на окружности C и лучах $L_{v^{\pm}}$, указанных в теоремах 5 и 6, т. е. для любого $g \in C \cup g^{+} \cup g^{-}$

$$\frac{\partial r(t)}{\partial \widetilde{t}} = \frac{\partial R(t,g)}{\partial \widetilde{t}}.$$

2.4. О дифференцируемости функции $\alpha(t, G)$ по направлению

По аналогии с $R(t, g)$ при фиксированной точке f введем функцию

$$\sin\alpha(t,g) = \sup\left\{\frac{r}{\rho} : \ g \notin \kappa_r(t,f)\right\} = \min\left\{\frac{r}{\rho} : \ g \in \kappa_r(t,f)\right\}, \quad \rho = |t-f|,$$

тогда (см. (2.1))

$$\alpha(t) = \alpha(t,G) = \alpha(t,f,G) = \min\{\alpha(t,g) : \ g \in G\},$$

и по теореме В. Ф. Демьянова задача вычисления производной от $\alpha(t)$ сводится к вычислению $\partial\alpha(t,g)/\partial\widetilde{t}$ для $g \in G(t)$. Напомним, что $\beta = \angle ftt_\lambda$, ξ — угол между плоскостями, определяемыми тройками точек t, f, g и t, f, t_λ соответственно.

Лемма 3. *Пусть $g \in s_r(t)$, $r = r(t,g)$, $\rho = |t-f|$, $\alpha = \arcsin(r/\rho)$, $t_\lambda = t + \lambda\widetilde{t}$, $\alpha(t_\lambda, g) = \arcsin\dfrac{|t_\lambda - g|}{|t_\lambda - f|}$, $\delta = \delta(g) = \angle tfg$. Тогда функция $\alpha(t_\lambda, g)$ дифференцируема по λ в нуле, и справедливо равенство*

$$\lim_{\lambda\to+0}\frac{\sin\alpha(t_\lambda,g) - \sin\alpha}{\lambda} = \frac{cos\beta\cos\delta - \sin\beta\sin\delta\cos\xi + \sin\alpha\cos\beta}{\rho}.$$

Доказательство. По теореме косинусов

$$|t_\lambda - f|^2 = \lambda^2 + \rho^2 - 2\lambda\rho\cos\beta.$$

Введем ортогональную систему координат с началом в точке t, осью абсцисс $\{t + \theta(f-t) \colon \theta \in \mathbb{R}\}$ и координатной плоскостью (x, z), натянутой на t, f и g; тогда точки t_λ и g будут иметь координаты

$$t_\lambda = (\lambda\cos\beta,\ \lambda\sin\beta\sin\xi,\ -\lambda\sin\beta\cos\xi), \qquad g = (-r\cos\delta,\ 0,\ -r\sin\delta).$$

Отсюда

$$\begin{aligned}|t_\lambda - g|^2 &= (\lambda\cos\beta + r\cos\delta)^2 + (\lambda\sin\beta\sin\xi)^2 + (\lambda\sin\beta\cos\xi - r\sin\delta)^2\\ &= \lambda^2 + r^2 + 2\lambda r(\cos\beta\cos\delta - \sin\beta\sin\delta\cos\xi)\end{aligned}$$

и далее

$$\frac{d}{d\lambda}\sin^2\alpha_\lambda\Big|_{\lambda=0} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\left(\frac{|t_\lambda - p|^2}{|t_\lambda - f|^2} - \frac{r^2}{\rho^2}\right)$$

$$= \lim_{\lambda\to+0}\frac{\lambda(\rho^2 - r^2) + 2\rho^2 r(\cos\beta\cos\delta - \sin\beta\sin\delta\cos\xi) + 2\rho r^2\cos\beta}{\rho^2(\lambda^2 + \rho^2 - 2\rho\lambda\cos\beta)}$$

$$= \frac{2r}{\rho^3}\big[\rho(\cos\beta\cos\delta - \sin\beta\sin\delta\cos\xi) + r\cos\beta\big].$$

Доказательство завершено. □

Элементарными вычислениями доказывается

Лемма 4. *Пусть*

$$g \in \kappa_r(t,f), \quad \alpha = \arcsin\frac{r}{\rho}, \quad L_g = \{f + \theta(g-f):\ \theta \geq 0\}, \quad \alpha(t_\lambda, g) = \arcsin\frac{d(t_\lambda, L_g)}{|t_\lambda - f|},$$

а β *и* ξ *— углы, определенные выше. Тогда функция* $\alpha(t_\lambda, g)$ *дифференцируема по* λ *и*

$$\lim_{\lambda\to+0}\frac{\cos\alpha(t_\lambda,g)-\cos\alpha}{\lambda} = \frac{(\sin\alpha\cos\xi - \cos\alpha)\sin\beta}{\rho}.$$

Переход от $\dfrac{d}{d\lambda}\cos\alpha(t_\lambda, g)$ к $\dfrac{d}{d\lambda}\sin\alpha(t_\lambda, g)$ осуществляется очевидным образом.

В заключение покажем, что производная по направлению $\widetilde{t}$ функции $\sin\alpha(t,G)$ выражается через величину $\partial r(t)/\partial\widetilde{t}$.

Теорема 7. *Пусть* $\alpha = \alpha(t,G)$, β *— угол между векторами* $t-f$ *и* $\widetilde{t}$, $\rho = |t-f|$. *Тогда*

$$\lim_{\lambda\to+0}\frac{\sin\alpha(t+\lambda\widetilde{t}, G)-\sin\alpha}{\lambda} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial r(t)}{\partial\widetilde{t}} + \sin\alpha\cos\beta\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку функция $r(t_\lambda)$ дифференцируема по λ, то

$$r(t_\lambda) = r(t) + \lambda r'(t) + o(\lambda),$$

где $r'(t) = \partial r(t)/\partial\widetilde{t}$. По теореме косинусов для $\rho_\lambda = |f - t_\lambda|$ имеем $\rho_\lambda^2 = \lambda^2 + \rho^2 - 2\rho\lambda\cos\beta$, поэтому

$$\lim_{\lambda\to+0}\frac{\rho_\lambda^2-\rho^2}{\lambda} = \lim_{\lambda\to+0}\frac{\lambda^2 - 2\lambda\rho\cos\beta}{\lambda} = -2\rho\cos\beta,$$

и значит, $\rho'_{\lambda=0} = -\cos\beta$. Отсюда

$$\lim_{\lambda\to+0}\frac{\sin\alpha(t_\lambda,G)-\sin\alpha(t,G)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to+0}\frac{1}{\lambda}\left(\frac{r(t_\lambda)}{\rho_\lambda} - \frac{r}{\rho}\right)$$

$$= \lim_{\lambda\to+0}\frac{\lambda r'(t)\rho - (\rho_\lambda - \rho)r + o(\lambda)}{\lambda\rho^2} = \frac{r'(t)\rho - r\rho'}{\rho^2}.$$

Отметив, что $r = \rho\sin\alpha$, завершаем доказательство теоремы. □

Результаты, приведенные в подразд. 2.2–2.4, позволяют вычислять производную по направлению от функции $\mathrm{vis}(t)$, определенной в (2.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н.** Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.

Бердышев Виталий Иванович
чл.-кор. РАН, директор
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: bvi@imm.uran.ru

Поступила 19.05.2008

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14 № 3 2008

УДК 514.7

К ПОСТРОЕНИЮ ЕДИНИЧНЫХ ПРОДОЛЬНО ВИХРЕВЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ С ПОМОЩЬЮ ГЛАДКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ[1]

В. П. Верещагин, Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных

Приводится решение задачи, заключающейся в построении единичного векторного поля, коллинеарного полю его ротора. Решение основывается на использовании подходящим образом параметризованного ортогонального преобразования единичного векторного поля, потенциального в $\mathbb{R}^3$. Результат сформулирован в теореме, содержащей рецепт построения требуемого поля.

Ключевые слова: скалярные, векторные и тензорные поля, ротор.

Пусть D — область евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. Задача состоит в том, чтобы найти способ построения в D единичных векторных полей $\mathbf{b}$ класса $C^{(1)}(D)$ таких, что $[\mathbf{b}, \operatorname{rot}\mathbf{b}] = 0$ всюду в D, $\operatorname{rot}\mathbf{b} \neq 0$ почти всюду в D. Здесь и далее обозначения $[\cdot,\cdot]$ и $(\cdot,\cdot)$ используются для векторного и скалярного произведений. Поле $\mathbf{b}$, коллинеарное полю $\operatorname{rot}\mathbf{b}$, назовем, как и в [1], *продольно вихревым*, а поле $\mathbf{g}$, ортогональное полю $\operatorname{rot}\mathbf{g}$, — *поперечно вихревым.* В качестве $\mathbf{g}$ можно взять градиент скалярного поля. Полю $\mathbf{g}$ требуется поставить в соответствие единичное поле $\mathbf{b}$, продольно вихревое в D, построив подходящее тензорное поле Ω. В подразделах 1–4 построен класс таких полей. Итог решения задачи сформулирован в теореме, которая приводится в подразд. 5. Для иллюстрации в подразд. 6 рассматривается пример построения единичного векторного поля, продольно вихревого в $\mathbb{R}^3$.

1. Обсудим принципы построения Ω. Согласно [1], взаимную ориентацию полей $\mathbf{g}$ и $\operatorname{rot}\mathbf{g}$ можно изменять произвольным образом посредством преобразования $\Omega\mathbf{g}$ поля $\mathbf{g}$, где $\Omega = \Omega(\psi, \mathbf{l})$ — тензорное поле вращений, непрерывное в D. Тензорное поле Ω, действуя в каждой точке $\mathbf{X}$ области D на вектор $\mathbf{g}(\mathbf{X})$, поворачивает последний на угол $\psi = \psi(\mathbf{X})$ вокруг оси, проходящей через точку $\mathbf{X}$ в направлении единичного вектора $\mathbf{l} = \mathbf{l}(\mathbf{X})$.

Ничто не мешает [1] выбрать поля ψ, $\mathbf{l}$ такими, чтобы поле $\Omega\mathbf{g}$ стало продольно вихревым, и отождествить его с искомым полем $\mathbf{b}$. Вместе с тем выбор подходящих полей ψ, $\mathbf{l}$ при заданном $\mathbf{g}$ совершенно произвольным быть не может и должен подчиняться определенным ограничениям, которые обусловлены требованием непрерывности и гладкости (скалярная или векторная функция считается здесь гладкой, если она непрерывно дифференцируема) искомого поля $\mathbf{b}$ в области D, а также требованием коллинеарности поля $\mathbf{b}$ полю $\operatorname{rot}\mathbf{b}$.

Взаимная ориентация единичного векторного поля и поля его ротора непосредственно связана с формой линий векторного поля. В случае единичных полей, потенциального и продольно вихревого, эта связь устанавливается с помощью формулы Гамильтона (см., например, [2, гл. 1, § 3]) для вектора кривизны линии векторного поля, позволяющей утверждать, что линии единичного векторного поля, потенциального или продольно вихревого в $D \subset \mathbb{R}^3$, прямолинейны.

Из формулы Гамильтона следует и в некотором смысле обратное утверждение: если единичное векторное поле, определенное в области D евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, принадлежит классу $C^{(1)}(D)$ и линии его прямолинейны, то $[\mathbf{b}, \operatorname{rot}\mathbf{b}] = 0$ всюду в D.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 08-01-00213, 08-01-00320) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-1071.2008.1).

Следовательно, для построения потенциального или продольно вихревого единичного поля в D достаточно:

• взять единичное векторное поле $\mathbf{g}$, линии которого — параллельные прямые;

• изменить взаимную ориентацию линий поля $\mathbf{g}$, чтобы через каждую точку области D проходила единственная прямая, изменив для этого направление каждого из векторов поля $\mathbf{g}$ в точках некоторой поверхности Π и определяемую им прямую с помощью преобразования Ω;

• отождествить полученное семейство прямых с линиями нового единичного векторного поля.

Новое поле будет либо потенциальным, либо продольно вихревым. Это зависит от выбора параметров ψ, $\mathbf{l}$ преобразования Ω, задаваемых в точках поверхности Π, и устанавливается путем вычисления ротора преобразованного поля. Именно такая схема используется ниже.

2. Перейдем непосредственно к описанию деталей указанной схемы. Пусть $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ — базис декартовой системы координат, Π — плоскость, ортогональная $\mathbf{i}_3$ и проходящая через начало координат O, а $\mathbf{g}(\mathbf{X}) \equiv \mathbf{i}_3$ в $\mathbb{R}^3$.

Через $\mathbf{k}$ обозначим радиус-вектор произвольной точки плоскости Π, а через $\mathbf{X}$ — радиус-вектор точки $\mathbb{R}^3$. Каждой точке $\mathbf{k}$ плоскости Π поставим в соответствие единичный вектор

$$\mathbf{t}(\mathbf{k}) = \mathbf{g}\cos\psi(\mathbf{k}) + [\mathbf{l}(\mathbf{k}), \mathbf{g}]\sin\psi(\mathbf{k}), \tag{1}$$

полученный поворотом $\Omega(\psi(\mathbf{k}), \mathbf{l}(\mathbf{k}))$ вектора $\mathbf{g}(\mathbf{k}) = \mathbf{g}$ на угол $\psi(\mathbf{k})$ вокруг оси, задаваемой единичным вектором

$$\mathbf{l}(\mathbf{k}) = \mathbf{i}_1\cos\varphi(\mathbf{k}) + \mathbf{i}_2\sin\varphi(\mathbf{k}) \tag{2}$$

с началом в точке $\mathbf{k}$ (см. рисунок). Здесь $\psi(\mathbf{k})$, $\varphi(\mathbf{k})$ — некоторые достаточно гладкие функции. Отметим, что векторное поле $\mathbf{l}(\mathbf{k})$ ортогонально полям $\mathbf{g}$ и $\mathbf{t}(\mathbf{k})$, т. е.

$$(\mathbf{g}, \mathbf{l}(\mathbf{k})) \equiv 0, \qquad (\mathbf{t}(\mathbf{k}), \mathbf{l}(\mathbf{k})) \equiv 0. \tag{3}$$

Через каждую точку $\mathbf{k}$ плоскости Π в направлении $\mathbf{t}(\mathbf{k})$ проведем прямую $\Gamma(\mathbf{k})$ (см. рисунок), определяемую уравнением

$$[\mathbf{X} - \mathbf{k}, \mathbf{t}(\mathbf{k})] = 0, \tag{4}$$

которое при заданном $\mathbf{k}$ устанавливает соответствие $\mathbf{k} \to \mathbf{X}$ между точкой $\mathbf{k}$ плоскости Π и точками $\mathbf{X}$ пространства $\mathbb{R}^3$. Легко показать, что векторное уравнение (4) эквивалентно системе двух скалярных уравнений

$$f_j(\mathbf{X}, \mathbf{k}) = f_j(X_1, X_2, X_3, k_1, k_2) = 0, \qquad j = 1, 2, \tag{5}$$

где

$$f_1(\mathbf{X}, \mathbf{k}) = (\mathbf{X} - \mathbf{k}, [\mathbf{l}(\mathbf{k}), \mathbf{t}(\mathbf{k})]), \qquad f_2(\mathbf{X}, \mathbf{k}) = (\mathbf{X} - \mathbf{k}, \mathbf{l}(\mathbf{k})). \tag{6}$$

Действительно, умножим (4) скалярно на $\mathbf{l}$, $\mathbf{g}$, $[\mathbf{l}, \mathbf{g}]$, воспользуемся формулами (1), (3) и тождеством

$$([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]) \equiv (\mathbf{a}, \mathbf{c})(\mathbf{b}, \mathbf{d}) - (\mathbf{a}, \mathbf{d})(\mathbf{b}, \mathbf{c}). \tag{7}$$

В результате получим систему трех скалярных уравнений, у которой два последних уравнения удовлетворяются совместно лишь при $(\mathbf{X} - \mathbf{k}, \mathbf{l}) = 0$. Учитывая это обстоятельство, придем к системе (5).

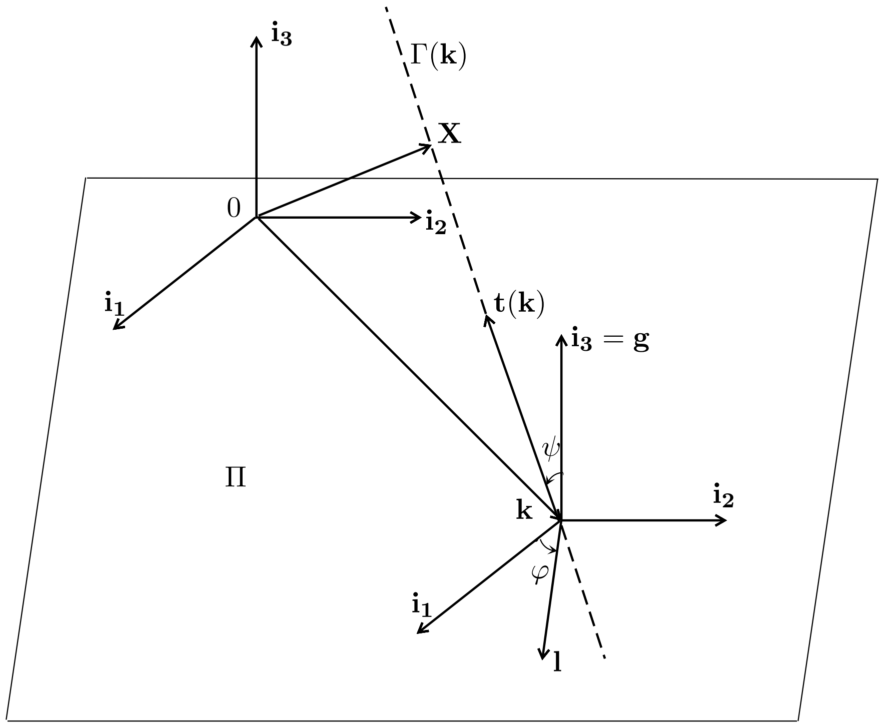


Иллюстрация к построению отображения.

Если прямые $\Gamma(\mathbf{k}),\ \Gamma(\mathbf{k}')$ с направляющими векторами $\mathbf{t}=\mathbf{t}(\mathbf{k}),\ \mathbf{t}'=\mathbf{t}(\mathbf{k}')$, проходящие соответственно через точки $\mathbf{k},\ \mathbf{k}'$ плоскости Π, не пересекаются при любых $\mathbf{k},\ \mathbf{k}',\ \mathbf{k}\neq\mathbf{k}'$, то через каждую точку $\mathbf{X}\in\mathbb{R}^3$ проходит не более одной прямой. Это имеет место, когда поле направлений (1), определенное в точках плоскости Π при любых таких $\mathbf{k},\ \mathbf{k}'$, отвечает одному из условий

$$[\mathbf{t}',\mathbf{t}]=0 \qquad (\Gamma(\mathbf{k}),\Gamma(\mathbf{k}') \text{ — параллельные прямые}),$$
$$V\equiv\big(\mathbf{k}'-\mathbf{k},\ [\mathbf{t}',\mathbf{t}]\big)\neq 0 \qquad (\Gamma(\mathbf{k}),\Gamma(\mathbf{k}') \text{ — скрещенные прямые}). \tag{8}$$

Пусть функции $\psi(\mathbf{k}),\varphi(\mathbf{k})$ в (1), (2) заданы в некоторой области Π_D плоскости Π, причем так, что через каждую точку $\mathbf{X}$ области D проходит только одна прямая $\Gamma(\mathbf{k})$ (4). Тогда уравнение (4) устанавливает неявно соответствие $\mathbf{X}\to\mathbf{k}$, т. е. $\mathbf{k}=\mathbf{k}(\mathbf{X})$, так как с каждой точкой $\mathbf{X}$ области D оно связывает точку $\mathbf{k}$ области Π_D плоскости Π посредством прямой $\Gamma(\mathbf{k})$. Прямые $\Gamma(\mathbf{k})$ (или их части, принадлежащие D) можно рассматривать как линии единичного векторного поля $\mathbf{t}(\mathbf{k})|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}(\mathbf{X})}$. Учитывая это, каждой точке $\mathbf{X}$ области D поставим в соответствие единичный вектор

$$\mathbf{b}(\mathbf{X})=\mathbf{t}(\mathbf{k}(\mathbf{X}))=\mathbf{t}(\psi(\mathbf{k}(\mathbf{X})),\varphi(\mathbf{k}(\mathbf{X}))) \tag{9}$$

и зададим тем самым в области D единичное векторное поле $\mathbf{b}$. Линии его прямолинейны по построению, если $\mathbf{t}$ как функция $\mathbf{k}$ выражается формулой (1), а зависимость координат $k_1,\ k_2$ вектора $\mathbf{k}$ от $\mathbf{X}$ при заданных $\psi(\mathbf{k})$ и $\varphi(\mathbf{k})$ определяется неявно векторным уравнением (4) или системой скалярных уравнений (5).

Согласно теореме существования решения системы уравнений (см., например, [3]), эта зависимость описывается непрерывно дифференцируемыми в D функциями

$$k_j=k_j(\mathbf{X}), \qquad j=1,2, \tag{10}$$

если система уравнений (5) обладает перечисленными ниже свойствами. Функции (6) определены в окрестности каждой точки $(\mathbf{X}^0,\mathbf{k}^0)$ пространства $\mathbb{R}^5$, удовлетворяющей системе (5), непрерывны в этой окрестности вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial f_1}{\partial X_m} = (\mathbf{i}_m, [\mathbf{l}(\mathbf{k}), \mathbf{t}(\mathbf{k})]), \qquad \frac{\partial f_2}{\partial X_m} = (\mathbf{i}_m, \mathbf{l}(\mathbf{k})), \qquad m = 1, 2, 3,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial k_m} = -(\mathbf{i}_m, [\mathbf{l}(\mathbf{k}), \mathbf{t}(\mathbf{k})]) - (\mathbf{X} - \mathbf{k}, \mathbf{t}(\mathbf{k}))\frac{\partial \psi(\mathbf{k})}{\partial k_m} + ([\mathbf{l}(\mathbf{k}), \mathbf{g}],\ [\mathbf{X} - \mathbf{k}, \mathbf{t}(\mathbf{k})])\frac{\partial \varphi(\mathbf{k})}{\partial k_m},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial k_m} = -(\mathbf{i}_m, \mathbf{l}(\mathbf{k})) - ([\mathbf{l}(\mathbf{k}), \mathbf{g}], \mathbf{X} - \mathbf{k})\frac{\partial \varphi(\mathbf{k})}{\partial k_m}, \qquad m = 1, 2,$$

и якобиан отличен от нуля:

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(k_1, k_2)} = \det\left[\frac{\partial f_j}{\partial k_m}\right] = \left\{1 - \left(\mathbf{X} - \mathbf{k}, \left[\mathbf{g}, \frac{\partial \varphi(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}}\right]\right)\right\}\cos\psi(\mathbf{k})$$

$$+ (\mathbf{X} - \mathbf{k}, \mathbf{t}(\mathbf{k}))\left\{(\mathbf{X} - \mathbf{k}, [\mathbf{l}(\mathbf{k}), \mathbf{g}])\left(\mathbf{g}, \left[\frac{\partial \psi(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}}, \frac{\partial \varphi(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}}\right]\right) + \left([\mathbf{l}(\mathbf{k}), \mathbf{g}], \frac{\partial \psi(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}}\right)\right\} \neq 0, \tag{11}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} = \mathbf{i}_1\frac{\partial}{\partial k_1} + \mathbf{i}_2\frac{\partial}{\partial k_2}. \tag{12}$$

3. Полагая функции (10) дифференцируемыми, найдем градиенты координат $k_1(\mathbf{X})$, $k_2(\mathbf{X})$ вектора $\mathbf{k}(\mathbf{X})$.

Продифференцируем сначала уравнение (4) по X_m при $m = 1, 2, 3$. В результате получим

$$\sum_{j=1}^{2} \left.\mathbf{q}_j\right|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}(\mathbf{X})} \frac{\partial k_j}{\partial X_m} = \left.[\mathbf{i}_m, \mathbf{t}]\right|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}(\mathbf{X})}, \tag{13}$$

где $m = 1, 2, 3$,

$$\mathbf{q}_j = [\mathbf{i}_j, \mathbf{t}] - \left[\mathbf{X} - \mathbf{k}, \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial k_j}\right]. \tag{14}$$

Умножая (13) скалярно на $\mathbf{l}$, $[\mathbf{l}, \mathbf{t}]$ и используя (7), (3), получим

$$\sum_{j=1}^{2} \left.(\mathbf{q}_j, \mathbf{l})\right|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}(\mathbf{X})} \frac{\partial k_j}{\partial X_m} = -\left.(\mathbf{i}_m, [\mathbf{l}, \mathbf{t}])\right|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}(\mathbf{X})},$$

$$\sum_{j=1}^{2} \left.(\mathbf{q}_j, [\mathbf{l}, \mathbf{t}])\right|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}(\mathbf{X})} \frac{\partial \mathbf{k}_j}{\partial X_m} = \left.(\mathbf{i}_m, \mathbf{l})\right|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}(\mathbf{X})}.$$

Умножая, наконец, каждое из этих уравнений на $\mathbf{i}_m$ и суммируя по m от 1 до 3, придем к системе уравнений

$$\sum_{j=1}^{2} \left.(\mathbf{q}_j, \mathbf{l})\right|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}(\mathbf{X})} \nabla k_j = -\left.[\mathbf{l}, \mathbf{t}]\right|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}(\mathbf{X})},$$

$$\sum_{j=1}^{2} \left.(\mathbf{q}_j, [\mathbf{l}, \mathbf{t}])\right|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}(\mathbf{X})} \nabla k_j = \left.\mathbf{l}\right|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}(\mathbf{X})} \tag{15}$$

относительно градиентов ∇k_j, $j = 1, 2$, где

$$\nabla = \sum_{m=1}^{3} \mathbf{i}_m \frac{\partial}{\partial X_m}. \tag{16}$$

При $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\mathbf{X})$ векторы (14) в силу (4) ортогональны $\mathbf{t}(\mathbf{k}(\mathbf{X}))$, поэтому их разложения по базису $\mathbf{l}, \mathbf{t}, [\mathbf{l}, \mathbf{t}]$, взятому при $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\mathbf{X})$, будут выражаться формулами

$$\mathbf{q}_j \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}(\mathbf{X})} = \{(\mathbf{q}_j, \mathbf{l})\mathbf{l} + (\mathbf{q}_j, [\mathbf{l}, \mathbf{t}])[\mathbf{l}, \mathbf{t}]\} \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}(\mathbf{X})}, \qquad j = 1, 2, \tag{17}$$

использование которых позволяет преобразовать систему (15) к виду

$$\nabla k_j = -\frac{1}{J} \sum_{n=1}^{2} \delta_{jn3} \mathbf{q_n} \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}(\mathbf{X})}, \qquad j = 1, 2, \tag{18}$$

где

$$J = -(\mathbf{t}, [\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}]) \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}(\mathbf{X})} \tag{19}$$

есть определитель системы (15), равный с точностью до знака якобиану (11) при $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\mathbf{X})$,

$$\delta_{jn3} = (\mathbf{i}_j, [\mathbf{i}_n, \mathbf{i}_3]) \,. \tag{20}$$

Определитель J в явном виде выражается формулой

$$\begin{gathered} J = -\Big\{ \cos\psi + (\mathbf{X} - \mathbf{k}, \mathbf{t})^2 \Big(\mathbf{g}, \Big[\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{k}}, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{k}} \Big] \Big) \sin\psi \\ + (\mathbf{X} - \mathbf{k}, \mathbf{t}) \Big(\Big([\mathbf{l}, \mathbf{g}], \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{k}} \Big) + \Big(\mathbf{l}, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{k}} \Big) \sin\psi \cos\psi \Big) \Big\} \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}(\mathbf{X})}, \end{gathered} \tag{21}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{k}}$ определяется формулой (12).

От формулы (19) к формуле (21) можно перейти, используя формулы (14) и формулы

$$(\mathbf{X} - \mathbf{k}) \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}(\mathbf{X})} = (\mathbf{X} - \mathbf{k}, \mathbf{t})\mathbf{t} \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}(\mathbf{X})},$$

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial k_j} = \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial k_j} + \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial k_j}, \tag{22}$$

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \psi} = [\mathbf{l}, \mathbf{t}], \qquad \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \varphi} = \mathbf{l} \sin\psi, \tag{23}$$

$$\Big[\mathbf{t}, \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial k_j} \Big] = \frac{\partial \psi}{\partial k_j} \mathbf{l} - \frac{\partial \varphi}{\partial k_j} \sin\psi [\mathbf{l}, \mathbf{t}], \tag{24}$$

$$\Big[\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial k_1}, \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial k_2} \Big] = \Big(\mathbf{g}, \Big[\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{k}}, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{k}} \Big] \Big) \sin\psi \mathbf{t}.$$

4. Исследуем вихревые свойства поля $\mathbf{b}$. Для этого найдем его ротор и дивергенцию. Пусть соответствие $\mathbf{X} \to \mathbf{b}$, устанавливаемое формулой (9) и уравнением (4), является гладким в области D. Тогда (9) и (4) определяют в этой области гладкое единичное векторное поле $\mathbf{b}$, линии которого прямолинейны.

Вектор $\mathbf{t}$ в (9) зависит через функции $\psi(\mathbf{k}(\mathbf{X}))$, $\varphi(\mathbf{k}(\mathbf{X}))$ от переменной $\mathbf{X}$, поэтому

$$\operatorname{rot} \mathbf{b} = [\nabla, \mathbf{t}] = \Big[\nabla\psi, \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \psi} \Big] + \Big[\nabla\varphi, \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \varphi} \Big], \qquad \operatorname{div} \mathbf{b} = (\nabla, \mathbf{t}) = \Big(\nabla\psi, \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \psi} \Big) + \Big(\nabla\varphi, \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \varphi} \Big), \tag{25}$$

где аргументы у $\mathbf{b}, \mathbf{t}, \psi, \varphi$ для сокращения записи опускаются; ∇ определяется формулой (16), а

$$\nabla\psi = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \psi}{\partial k_j} \nabla k_j, \qquad \nabla\varphi = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial \varphi}{\partial k_j} \nabla k_j. \tag{26}$$

Используя формулы (23), преобразуем (25) к виду

$$\operatorname{rot}\mathbf{b} = [\nabla\psi, [\mathbf{l}, \mathbf{t}]] + [\nabla\varphi, \mathbf{l}]\sin\psi, \tag{27}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{b} = (\nabla\psi, [\mathbf{l}, \mathbf{t}]) + (\nabla\varphi, \mathbf{l})\sin\psi. \tag{28}$$

Градиенты (26) — это согласно (17), (18) линейные комбинации векторов (14), лежащих в плоскости, ортогональной $\mathbf{t}$, т. е.

$$\nabla\psi = \mathbf{l}(\mathbf{l}, \nabla\psi) + [\mathbf{l}, \mathbf{t}]\left([\mathbf{l}, \mathbf{t}], \nabla\psi\right), \qquad \nabla\varphi = \mathbf{l}(\mathbf{l}, \nabla\varphi) + [\mathbf{l}, \mathbf{t}]\left([\mathbf{l}, \mathbf{t}], \nabla\varphi\right), \tag{29}$$

поэтому $\operatorname{rot}\mathbf{b}$ (27) коллинеарен $\mathbf{t}$.

Подстановка (29) в (27) приводит к формуле

$$\operatorname{rot}\mathbf{b} = B\mathbf{t}\Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}(\mathbf{X})} \qquad \left(B = \{-(\mathbf{l}, \nabla\psi) + ([\mathbf{l}, \mathbf{t}], \nabla\varphi)\sin\psi\}\Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}(\mathbf{X})}\right), \tag{30}$$

которую, учитывая (9), можно записать в виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{b} = B\mathbf{b}. \tag{31}$$

Скалярный множитель B в (30) выражается дробью

$$B = -\frac{(\mathbf{g}, \operatorname{Rot}\mathbf{t})}{J}\Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}(\mathbf{X})}, \tag{32}$$

числитель которой — скалярное произведение векторов $\mathbf{g}$ и $\operatorname{Rot}\mathbf{t} = \left[\dfrac{\partial}{\partial\mathbf{k}}, \mathbf{t}\right]$, равное

$$(\mathbf{g}, \operatorname{Rot}\mathbf{t}) = \left([\mathbf{l}, \mathbf{g}], \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{k}}\right)\sin\psi - \left(\mathbf{l}, \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{k}}\right)\cos\psi,$$

а знаменатель — определитель (см. (19), (21)) системы (15).

От (30) к (32) можно перейти с помощью формул

$$\begin{gathered}
(\mathbf{l}, \nabla\psi)\Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}(\mathbf{X})} = -\frac{1}{J}\left(\mathbf{l}, \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{k}}\right)\cos\psi\Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}(\mathbf{X})}, \\
([\mathbf{l}, \mathbf{t}], \nabla\varphi)\Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}(\mathbf{X})} = -\frac{1}{J}\left([\mathbf{l}, \mathbf{g}], \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{k}}\right)\Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}(\mathbf{X})}, \\
\operatorname{Rot}\,[\mathbf{g}, [\mathbf{t}, \mathbf{g}]] = \mathbf{g}(\mathbf{g}, \operatorname{Rot}\mathbf{t}), \\
\operatorname{Rot}\mathbf{t} = \left[\mathbf{g}, \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{k}}\right]\sin\psi + \mathbf{g}\left\{\left([\mathbf{l}, \mathbf{g}], \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{k}}\right)\sin\psi - \left(\mathbf{l}, \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{k}}\right)\cos\psi\right\},
\end{gathered} \tag{33}$$

которые выводятся из (26), (18), (14), (22), (23), (20), (24) в указанной последовательности.

Аналогичным образом выводятся формулы

$$([\mathbf{l}, \mathbf{t}], \nabla\psi)\Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}(\mathbf{X})} = -\frac{1}{J}\left\{\left([\mathbf{l}, \mathbf{g}], \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{k}}\right) + \left(\mathbf{g}, \left[\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{k}}, \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{k}}\right]\right)(\mathbf{X}-\mathbf{k}, \mathbf{t})\sin\psi\right\}\Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}(\mathbf{X})},$$

$$(\mathbf{l}, \nabla\varphi)\Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}(\mathbf{X})} = -\frac{1}{J}\left\{\left(\mathbf{l}, \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{k}}\right)\cos\psi + \left(\mathbf{g}, \left[\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{k}}, \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{k}}\right]\right)(\mathbf{X}-\mathbf{k}, \mathbf{t})\right\}\Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}(\mathbf{X})},$$

позволяющие выразить формулу (28) в виде

$$\operatorname{div}\mathbf{b} = -\frac{1}{J}\left\{2\left(\mathbf{g}, \left[\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{k}}, \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{k}}\right]\right)(\mathbf{X}-\mathbf{k}, \mathbf{t})\sin\psi\right.$$

$$+\left([\mathbf{l},\mathbf{g}],\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{k}}\right)+\left(\mathbf{l},\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{k}}\right)\sin\psi\cos\psi\Big\}\Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}(\mathbf{X})}. \tag{34}$$

Итак, вихревые свойства поля (9) в области D определяются, согласно (31)–(33), свойствами составляющей

$$[\mathbf{g},[\mathbf{t}(\mathbf{k}),\mathbf{g}]]=[\mathbf{l}(\mathbf{k}),\mathbf{g}]\sin\psi(\mathbf{k}) \tag{35}$$

поля (1) в области Π_D, образованной точками $\mathbf{k}$ плоскости Π, каждая из которых есть точка пересечения плоскости Π и линии поля (9), проходящей через точку $\mathbf{X}$ области D.

Поле (9) будет потенциальным в D ($B\equiv 0$), если потенциальна в Π_D составляющая (35) поля (1), т. е. если

$$[\mathbf{l}(\mathbf{k}),\mathbf{g}]\sin\psi(\mathbf{k})=\frac{\partial G(\mathbf{k})}{\partial\mathbf{k}},$$

где $G(\mathbf{k})$ — некоторое скалярное поле в Π_D с подходящими свойствами непрерывности, гладкости и ограниченным градиентом: $\left|\dfrac{\partial G(\mathbf{k})}{\partial\mathbf{k}}\right|\le 1$.

Поле (9) будет продольно вихревым в D ($B\neq 0$ почти всюду в D), если

$$\mathrm{Rot}\ [\mathbf{g},[\mathbf{t}(\mathbf{k}),\mathbf{g}]]\neq 0$$

почти всюду в Π_D.

5. Суммируем результаты проведенного анализа решения задачи построения продольно вихревых единичных векторных полей. Единичное векторное поле $\mathbf{b}$, определяемое формулой (9), обладает, согласно (31), (32), именно теми вихревыми свойствами при $B\neq 0$ почти всюду в D, которые оговариваются в условии задачи. Учитывая это, сформулируем итог описанного способа задания такого поля с помощью ортогонального преобразования, параметризованного подходящим образом на плоскости Π, в виде теоремы.

Пусть D — область евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, $\{\mathbf{i}_k\}$ — декартов базис в $\mathbb{R}^3$ с началом в точке O, Π — плоскость, ортогональная $\mathbf{i}_3$ и проходящая через начало O, $\mathbf{X}$ и $\mathbf{k}$ — радиус-векторы произвольной точки $\mathbb{R}^3$ и произвольной точки плоскости Π, $\psi(\mathbf{k})$, $\varphi(\mathbf{k})$ — гладкие скалярные поля, заданные в плоскости Π (или некоторой области Π_D (см. выше) плоскости Π), $\Omega(\mathbf{k})=\Omega(\psi(\mathbf{k}),\mathbf{l}(\mathbf{k}))$ — тензорное поле, которое, действуя на вектор $\mathbf{g}(\mathbf{k})$, поворачивает его на угол $\psi(\mathbf{k})$ вокруг оси, задаваемой ортом $\mathbf{l}(\mathbf{k})=\mathbf{i}_1\cos\varphi(\mathbf{k})+\mathbf{i}_2\sin\varphi(\mathbf{k})$ с началом в точке $\mathbf{k}$, $\dfrac{\partial}{\partial\mathbf{k}}=\mathbf{i}_1\dfrac{\partial}{\partial k_1}+\mathbf{i}_2\dfrac{\partial}{\partial k_2}$. Выше фактически доказана следующая

Теорема. *Единичное векторное поле*

$$\mathbf{b}(\mathbf{X})=\mathbf{t}(\mathbf{k}(\mathbf{X}))=\mathbf{t}\Big(\psi(\mathbf{k}(\mathbf{X})),\varphi(\mathbf{k}(\mathbf{X}))\Big)$$

в области D принадлежит классу $C^{(1)}(D)$, линии его прямолинейны, $[\mathbf{b}(\mathbf{X}),\mathrm{rot}\,\mathbf{b}(\mathbf{X})]\equiv 0$, $|\mathrm{rot}\,\mathbf{b}(\mathbf{X})|\neq 0$ почти всюду в D, т. е. $\mathbf{b}(\mathbf{X})$ — единичное поле, продольно вихревое в D. При этом:

- $\mathbf{t}$ *как функция $\mathbf{k}\in\Pi_D$ есть гладкое отображение $\mathbf{t}(\mathbf{k})=\Omega(\mathbf{k})\mathbf{g}(\mathbf{k})$ векторного поля $\mathbf{g}(\mathbf{k})\equiv\mathbf{i}_3$;*
- *зависимость координат k_1, k_2 вектора $\mathbf{k}$ от $\mathbf{X}$ определяется неявно системой уравнений*

$$\begin{cases}(\mathbf{X}-\mathbf{k},[\mathbf{l}(\mathbf{k}),\mathbf{t}(\mathbf{k})])=0,\\ (\mathbf{X}-\mathbf{k},\mathbf{l}(\mathbf{k}))=0;\end{cases}$$

- *функции $k_1(\mathbf{X})$, $k_2(\mathbf{X})$ непрерывно дифференцируемы в D;*
- $\left(\mathbf{i}_3,\left[\dfrac{\partial}{\partial\mathbf{k}},\mathbf{t}(\mathbf{k})\right]\right)\neq 0$ *почти всюду в Π_D.*

З а м е ч а н и е. Поле $\mathbf{b}(\mathbf{X})$, упоминаемое в формулировке теоремы, будет потенциальным, если скалярные поля $\psi(\mathbf{k})$, $\varphi(\mathbf{k})$ таковы, что $\left(\mathbf{i}_3, \left[\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{k}}, \mathbf{t}(\mathbf{k})\right]\right) \equiv 0$ в Π_D.

Сформулированное предложение имеет конструктивный характер, в отличие от упоминавшегося выше следствия из формулы Гамильтона, поскольку содержит рецепт фактического построения единичного векторного поля в области D, удовлетворяющего условиям $[\mathbf{b}, \operatorname{rot}\mathbf{b}] \equiv 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{b} \neq 0$ почти всюду в D, если требуется продольно вихревое поле, или условию $\operatorname{rot}\mathbf{b} \equiv 0$, если требуется потенциальное поле.

6. Для иллюстрации рассмотрим пример построения единичного векторного поля, продольно вихревого в $\mathbb{R}^3$. Пусть $\varphi(\mathbf{k}) = 0$ всюду в плоскости Π. Тогда

$$\mathbf{l}(\mathbf{k}) \equiv \mathbf{i}_1, \tag{36}$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{k}) = -\mathbf{i}_2 \sin\psi(\mathbf{k}) + \mathbf{i}_3 \cos\psi(\mathbf{k}). \tag{37}$$

Векторы (37) располагаются в плоскостях $k_1 = \text{const}$, перпендикулярных плоскости Π. Поэтому прямые $\Gamma(\mathbf{k})$, $\Gamma(\mathbf{k}')$, проходящие через любые две точки $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}'$, где $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$, не пересекаются при $k_1 \neq k_1'$, так как лежат в параллельных плоскостях. Эти прямые не пересекаются и при $k_1 = k_1'$ $(\mathbf{k} \neq \mathbf{k}')$, если $\psi(\mathbf{k}) - \psi(\mathbf{k}') = 0$, т. е. поле направлений (37) отвечает условиям (8), если $\psi(\mathbf{k}) = \psi(k_1)$.

Стало быть, для построения однозначного в $\mathbb{R}^3$ векторного поля

$$\mathbf{b}(\mathbf{X}) = \mathbf{t}(\mathbf{k}(\mathbf{X})) \tag{38}$$

при $\varphi(\mathbf{k}) \equiv 0$ выбор функции $\psi(\mathbf{k})$ следует подчинить требованию

$$\psi(\mathbf{k}) = \psi(k_1),$$

где $\psi(k_1)$ — гладкая функция.

Полагая это требование выполненным, будем иметь

$$\mathbf{t}(\mathbf{k}) = \mathbf{t}(k_1) = -\mathbf{i}_2 \sin\psi(k_1) + \mathbf{i}_3 \cos\psi(k_1). \tag{39}$$

Зависимость $\mathbf{k}$ от $\mathbf{X}$ найдем, обратившись к системе уравнений (5). Система (5) после подстановки (36), (39) записывается в виде

$$(X_2 - k_2)\cos\psi(k_1) + X_3 \sin\psi(k_1) = 0, \qquad X_1 - k_1 = 0. \tag{40}$$

Пусть функция $\psi(k_1)$ такая, что $\cos\psi(k_1) \neq 0$ при любом k_1. Тогда система (40) имеет решение

$$k_1 = X_1, \qquad k_2 = X_2 + X_3 \operatorname{tg}\psi(X_1),$$

и каждой точке $\mathbf{X} = X_1\mathbf{i}_1 + X_2\mathbf{i}_2 + X_3\mathbf{i}_3$ пространства $\mathbb{R}^3$ можно поставить в соответствие с помощью формул (38), (39) единичный вектор

$$\mathbf{b}(\mathbf{X}) = -\mathbf{i}_2 \sin\psi(X_1) + \mathbf{i}_3 \cos\psi(X_1). \tag{41}$$

Таким образом, формула (41) определяет в пространстве $\mathbb{R}^3$ единичное гладкое векторное поле, если при заданной функции $\psi(k_1)$ уравнение

$$\psi(k_1) = (2n+1)\pi/2 \tag{42}$$

не имеет вещественных корней при целочисленных n.

Предположим теперь, что функция $\psi(k_1)$ такая, что уравнение (42) при некоторых n из множества целых чисел имеет вещественные корни $k_{1s}^{(n)}$ (s — натуральное число, $s < k_n \leq \infty$), но множество всех корней не имеет конечных предельных точек.

Пусть $k_1^{(n)}$ — один из вещественных корней (номер s корня для сокращения записи опускается) уравнения (42). В точках $\mathbf{k}^{(n)} = k_1^{(n)}\mathbf{i}_1 + k_2\mathbf{i}_2,\ -\infty < k_2 < +\infty$, плоскости Π имеем

$$\mathbf{t}(\mathbf{k}^{(n)}) = \mathbf{t}(k_1^{(n)}) = (-1)^{n+1}\mathbf{i}_2. \tag{43}$$

Стало быть, через точки $\mathbf{k}^{(n)}$ плоскости Π и точки

$$\mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{X}\Big|_{X_1=k_1^{(n)}} = k_1^{(n)}\mathbf{i}_1 + X_2\mathbf{i}_2 + X_3\mathbf{i}_3$$

пространства $\mathbb{R}^3$, лежащие в плоскости $\Pi^{(n)} = \{\mathbf{X}:\ X_1 = k_1^{(n)}\}$, нельзя провести прямую с направляющим вектором (43), если $X_3 \neq 0$. Вследствие этого, система уравнений (40) совместна лишь в точках $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(n)}|_{X_3=0}$ линии пересечения плоскостей $\Pi^{(n)}$ и Π. А в точках $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(n)}$ при $X_3 \neq 0$ система несовместна и не позволяет установить правило $\mathbf{k}^{(n)} = \mathbf{k}^{(n)}(\mathbf{X}^{(n)})$, выражающее соответствие $\mathbf{X}^{(n)} \to \mathbf{k}^{(n)}$. Поэтому поле $\mathbf{b}(\mathbf{X})$ в точках $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(n)}$ при $X_3 \neq 0$ с помощью формул (38), (43) не поддается определению.

Ничто не мешает, однако, определить поле $\mathbf{b}(\mathbf{X})$ в этих точках по непрерывности, полагая

$$\mathbf{b}(\mathbf{X}^{(n)}) = \lim_{X_1 \to k_1^{(n)}} \mathbf{b}(\mathbf{X}) = (-1)^{n+1}\mathbf{i}_2,$$

где $\mathbf{b}(\mathbf{X})$ определяется формулой (41) для точек $\mathbf{X} \notin \Pi^{(n)}$.

Таким образом, каждой точке $\mathbf{X}$ пространства $\mathbb{R}^3$ можно поставить в соответствие вектор $\mathbf{b}(\mathbf{X})$, следуя правилу

$$\mathbf{b}(\mathbf{X}) = \begin{cases} -\mathbf{i}_2 \sin\psi(X_1) + \mathbf{i}_3 \cos\psi(X_1), & \text{если} \quad \psi(X_1) \neq (2n+1)\pi/2, \\ (-1)^{n+1}\mathbf{i}_2, & \text{если} \quad \psi(X_1) = (2n+1)\pi/2. \end{cases} \tag{44}$$

Формулы (44) определяют единичное векторное поле, гладкое всюду в $\mathbb{R}^3$, если $\psi(X_1)$ — гладкая функция, поскольку в точках $\mathbf{X} \in \Pi^{(n)}$ существует

$$\lim_{X_1 \to k_1^{(n)}} \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{X})}{\partial X_1} = (-1)^{n+1} \frac{\partial \psi(X_1)}{\partial X_1}\Big|_{X_1=k_1^{(n)}} \mathbf{i}_3.$$

Кроме того, поле (44) не зависит от X_2, X_3, поэтому

$$\frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{X})}{\partial X_2} \equiv 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{X})}{\partial X_3} \equiv 0.$$

Всюду в $\mathbb{R}^3$ ротор поля (44) и дивергенция выражаются формулами (31) и (34), в которых теперь в силу (36), (37) и ограничений $\varphi(\mathbf{k}) \equiv 0,\ \psi(\mathbf{k}) = \psi(k_1)$ имеем

$$B = -\frac{\partial \psi(X_1)}{\partial X_1}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{b}(\mathbf{X}) \equiv 0.$$

Следовательно, поле (44) потенциально в $\mathbb{R}^3$, если $\psi(X_1) \equiv \mathrm{const}$, и продольно вихревое, если $\dfrac{\partial \psi(k_1)}{\partial k_1} \neq 0$ почти всюду в Π_D.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Способ построения векторных полей с определенными вихревыми свойствами с помощью гладких отображений // Материалы Уфим. междунар. мат. конф., посвященной памяти А.Ф. Леонтьева. Уфа: ИМВЦ, 2007. Т. 1. С. 48–49.
2. **Аминов Ю.А.** Геометрия векторного поля. М.: Наука, 1990. 208 с.
3. **Никольский С.М.** Курс математического анализа: уч. для физ.-мат. спец. вузов. 4-е изд., перераб. и доп. Т. 1. М.: Наука, 1990. 528 с.

Верещагин Владимир Пантелеевич
д-р физ.-мат. наук, проф.
Рос. гос. педагог. ун-т, г. Екатеринбург

Поступила 20.03.2008

Субботин Юрий Николаевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-кор. РАН
зав. отд.
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: yunsub@imm.uran.ru

Черных Николай Иванович
д-р физ.-мат. наук
зав. отд.
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: Nikolai.Chernykh@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14 № 3 2008

УДК 514.7

ПРОДОЛЬНО ВИХРЕВЫЕ ЕДИНИЧНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ ИЗ КЛАССА АКСИАЛЬНО СИММЕТРИЧНЫХ ПОЛЕЙ[1]

В. П. Верещагин, Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных

В работе построены единичные векторные поля, принадлежащие классу гладких аксиально симметричных полей, продольно вихревых во всем пространстве $\mathbb{R}^3$.

Ключевые слова: скалярные, векторные и тензорные поля, аксиально симметричные поля.

В работе [1] предложен метод построения единичных продольно вихревых векторных полей. Построим, следуя [1], класс таких полей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, полагая, что область D совпадает с $\mathbb{R}^3$, искомое единичное векторное поле удовлетворяет условиям $[\mathbf{b}, \operatorname{rot}\mathbf{b}] = 0$ всюду в $\mathbb{R}^3$, $\operatorname{rot}\mathbf{b} \neq 0$ почти всюду в $\mathbb{R}^3$ и поле $\mathbf{b}$ является аксиально симметричным, т. е. самосовместимым при повороте на любой угол вокруг некоторой оси. Здесь и далее обозначения $[\cdot,\cdot]$ и $(\cdot,\cdot)$ используются для векторного и скалярного произведений.

1. Для начала перейдем в формулах (1), (2), (6), (8), (9) работы [1] от декартовых координат k_1, k_2 и X_1, X_2, X_3 точек $\mathbf{k}$ плоскости Π и точек $\mathbf{X}$ пространства $\mathbb{R}^3$ с базисом $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ к полярным координатам ρ, ϑ и цилиндрическим координатам r, θ, z с помощью формул

$$k_1 = \rho\cos\vartheta, \qquad k_2 = \rho\sin\vartheta,$$

$$X_1 = r\cos\theta, \qquad X_2 = r\sin\theta, \qquad X_3 = z,$$

$$\mathbf{k}(\rho,\vartheta) = \mathbf{i}_1 k_1 + \mathbf{i}_2 k_2 = \rho\mathbf{i}_\rho(\vartheta), \qquad \mathbf{X}(r,\theta,z) = r\mathbf{i}_r(\theta) + z\mathbf{i}_z,$$

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{k}} = \mathbf{i}_\rho(\vartheta)\frac{\partial}{\partial\rho} + \mathbf{i}_\vartheta(\vartheta)\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\vartheta},$$

$$\nabla = \mathbf{i}_r(\theta)\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{i}_\theta(\theta)\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathbf{i}_z\frac{\partial}{\partial z},$$

где

$$\mathbf{i}_\rho(\vartheta) = \mathbf{i}_1\cos\vartheta + \mathbf{i}_2\sin\vartheta, \qquad \mathbf{i}_\vartheta(\vartheta) = -\mathbf{i}_1\sin\vartheta + \mathbf{i}_2\cos\vartheta,$$

$$\mathbf{i}_r(\theta) = \mathbf{i}_1\cos\theta + \mathbf{i}_2\sin\theta, \qquad \mathbf{i}_\theta(\theta) = -\mathbf{i}_1\sin\theta + \mathbf{i}_2\cos\theta,$$

$$\mathbf{i}_z = \mathbf{i}_3, \qquad \mathbf{i}_\vartheta(\vartheta) = \mathbf{i}_r(\theta)\sin(\theta-\vartheta) + \mathbf{i}_\theta(\theta)\cos(\theta-\vartheta),$$

полагая

$$\mathbf{g} = \mathbf{i}_z, \qquad \varphi(\mathbf{k}(\rho,\vartheta)) = \vartheta, \qquad \psi(\mathbf{k}(\rho,\vartheta)) = \psi(\rho).$$

В дальнейшем предполагаем, что $\psi(\rho)$ — гладкая функция (скалярная или векторная функция считается здесь гладкой, если она непрерывно дифференцируема) и

$$\psi(0) = 0, \qquad \psi'(0) = 0, \qquad 0 \le \psi(\rho) \le k, \qquad \psi'(\rho) \ge 0, \qquad \psi''(0) = 0, \tag{1}$$

где $k < \pi/2$ — положительная постоянная и $\psi''(\rho)$ непрерывна в нуле.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 08-01-00213, 08-01-00320) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-1071.2008.1).

В результате придем к формулам (пояснения следуют ниже):

$$\mathbf{l}(\vartheta) = \mathbf{i}_\rho(\vartheta),$$

$$\mathbf{t}(\rho,\vartheta) = \mathbf{i}_z \cos\psi(\rho) - \mathbf{i}_\vartheta(\vartheta)\sin\psi(\rho), \tag{2}$$

$$\mathbf{b}(r,\theta,z) = \mathbf{t}(\rho(r,\theta,z),\vartheta(r,\theta,z))$$
$$= \big\{ -[\mathbf{i}_r(\theta)\sin(\theta-\vartheta) + \mathbf{i}_\theta(\theta)\cos(\theta-\vartheta)]\sin\psi(\rho) + \mathbf{i}_z\cos\psi(\rho)\big\}\Big|_{\substack{\rho=\rho(r,\theta,z),\\ \vartheta=\vartheta(r,\theta,z)}}, \tag{3}$$

$$\begin{cases} r\sin(\theta-\vartheta)\cos\psi(\rho) + z\sin\psi(\rho) = 0, \\ r\cos(\theta-\vartheta) = \rho, \end{cases} \tag{4}$$

$$\big[\mathbf{t}(\rho',\vartheta'),\mathbf{t}(\rho,\vartheta)\big] = \mathbf{i}_\rho(\vartheta)\cos\psi(\rho')\sin\psi(\rho)$$
$$-\,\mathbf{i}_\rho(\vartheta')\sin\psi(\rho')\cos\psi(\rho) + \mathbf{i}_z\sin(\vartheta-\vartheta')\sin\psi(\rho')\sin\psi(\rho) = 0, \tag{5}$$

$$\big(\mathbf{k}(\rho',\vartheta') - \mathbf{k}(\rho,\vartheta), \big[\mathbf{t}(\rho',\vartheta'),\mathbf{t}(\rho,\vartheta)\big]\big)$$
$$= \cos(\vartheta'-\vartheta)\,\big[\rho'\cos\psi(\rho')\sin\psi(\rho) + \rho\sin\psi(\rho')\cos\psi(\rho)\big]$$
$$-\,\rho'\sin\psi(\rho')\cos\psi(\rho) - \rho\cos\psi(\rho')\sin\psi(\rho) \neq 0. \tag{6}$$

Формулы (2) и (3) выражают в криволинейных координатах поле направлений, задаваемое в точках плоскости Π, и соответствующее ему векторное поле в пространстве $\mathbb{R}^3$, формулы (4) — систему уравнений, определяющих ρ и ϑ как функции криволинейных координат r,θ,z точек пространства $\mathbb{R}^3$. В формулах (5) и (6) условия (8) из [1] на указанные векторное и смешанное произведения выражены в полярных координатах.

Первые два условия из (1) обеспечивают непрерывность поля (2) и его производных всюду в плоскости Π, третье и четвертое — выполнимость условий (5) и (6). Последнее условие обеспечивает (см. ниже) непрерывность производной поля (3) по переменной r при $r=0$.

Векторное поле (3) будет аксиально симметричным при условии, что переменная $\rho = \rho(r,\theta,z)$ и разность $\theta - \vartheta(r,\theta,z)$ являются функциями только переменных r,z. Учитывая это, в формуле (3) и уравнениях системы (4) можно перейти от переменной ϑ к переменной f, полагая $\vartheta = \theta - f(r,z)$. Получим вместо (3) и (4) формулу

$$\mathbf{b}(r,\theta,z) = \big\{ -[\mathbf{i}_r(\theta)\sin f + \mathbf{i}_\theta(\theta)\cos f]\sin\psi(\rho) + \mathbf{i}_z\cos\psi(\rho)\big\}\Big|_{\substack{\rho=\rho(r,z),\\ f=f(r,z)}} \tag{7}$$

и систему уравнений

$$\begin{cases} r\sin f\cos\psi(\rho) + z\sin\psi(\rho) = 0, \\ r\cos f = \rho \end{cases} \tag{8}$$

относительно $\rho \geq 0$ и f из промежутка $(-\pi,\pi]$.

2. Исследуем систему уравнений (8) при более слабых ограничениях на $\psi(\rho)$, чем (1), а именно: пусть $\psi(\rho)$ $(0 \leq \rho < \infty)$ — неубывающая непрерывная функция, $\psi(0) = 0,\ 0 \leq \psi(\rho) < \pi/2$ при $\rho > 0$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма. *При сформулированных ограничениях на $\psi(\rho)$ для любых фиксированных $r > 0$ и $z \in \mathbb{R}$ система (8) имеет единственное решение (ρ, f), причем $f(r,z) \in (-\pi/2, \pi/2)$.*

При $r=0,\ z \in \mathbb{R}$ решения (ρ,f) системы имеют вид $\rho = \rho(0,z) = 0,\ f = f(0,z)$ — произвольное число из полуинтервала $(-\pi,\pi]$.

Доказательство. При $r=0$ утверждение очевидно. Пусть $r>0$. Легко проверяется, что при $r>0,\ z\in\mathbb{R}$ компоненты решения (ρ,f) должны подчиняться ограничениям

$0 < \rho \le r,\ -\pi/2 < f < \pi/2$. Используя это, из системы (8) выводим эквивалентную в указанной области $(0,\infty)\times(-\pi/2,\pi/2)$ систему

$$r^2 - \rho^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \psi(\rho), \tag{9}$$

$$\operatorname{tg} f = -(z/\rho)\operatorname{tg}\psi(\rho). \tag{10}$$

Левая часть уравнения (9), рассматриваемая при заданном r как функция переменной ρ, строго убывает в промежутке $[0,r]$ от r^2 до 0, а правая часть как функция ρ при заданном z возрастает (возможно, нестрого) от 0 до $z^2\operatorname{tg}^2\psi(r)$. Поэтому при любых $r>0$ и $z\in\mathbb{R}$ существует единственное $\rho=\rho(r,z)$, удовлетворяющее уравнению (9) и ограничениям $0<\rho=\rho(r,z)\le r$. В частности, $\rho(r,z)\to 0\equiv\rho(0,z)$.

Наконец, при известном $\rho=\rho(r,z)$ из уравнения (10) однозначно находится f из интервала $(-\pi/2,\pi/2)$, а именно

$$f(r,z) = \operatorname{arctg}[-(z/\rho)\operatorname{tg}\psi(\rho)]\,\Big|_{\rho=\rho(r,z)}. \tag{11}$$

Лемма доказана. □

З а м е ч а н и е 1. Из анализа доказательства леммы нетрудно установить, что компоненты решения $(\rho(r,z), f(r,z))$ системы (8) являются непрерывными функциями своих аргументов на множестве точек $(r,z),\ r>0,\ z\in\mathbb{R}$, если $\psi(\rho)$ непрерывна. Это свойство имеет место и в точках $(0,z)$, если функция $\psi(\rho)$ дифференцируема при $\rho=0$. Тогда функция $f(r,z)$ доопределяется в этих точках по непрерывности: $f(0,z)=\operatorname{arctg}(-z\psi'(0))$. Таким образом, условие существования производной $\psi'(0)$ обеспечивает справедливость формулы (11) и, при непрерывности $\psi(\rho)$, непрерывность функции $f(r,z)$ при всех $r\ge 0,\ z\in\mathbb{R}$.

3. Исследуем вопрос о гладкости решения системы (8). Будем полагать, что $\psi(\rho)$ удовлетворяет условиям (1). Продифференцируем второе уравнение системы (8) по r и z при $r=0$, рассматривая переменные ρ, f как функции r,z. Получим

$$\frac{\partial\rho(r,z)}{\partial r}\Big|_{r=0} = 1, \qquad \frac{\partial\rho(r,z)}{\partial z}\Big|_{r=0} = 0. \tag{12}$$

Производные от f по z и r при $r=0$ найдем, дифференцируя (11) при $r=0$, что дает

$$\frac{\partial f(r,z)}{\partial z}\Big|_{r=0} = 0, \qquad f'_r(0,z) = \lim_{r\to 0}\frac{f(r,z)-f(0,z)}{r} = -z\psi''(0). \tag{13}$$

Здесь при вычислении предела использована дифференцируемость функции $\psi'(\rho)$ при $\rho=0$.

Производные от ρ по переменным r,z при $r>0$ найдем, дифференцируя уравнение (9). Получим

$$\frac{\partial\rho}{\partial r} = \frac{F_{\rho r}}{F}, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial z} = \frac{F_{\rho z}}{F}, \tag{14}$$

где

$$F_{\rho r} = r/\rho\Big|_{\rho=\rho(r,z)}, \qquad F_{\rho z} = -(z/\rho)\operatorname{tg}^2\psi(\rho)\Big|_{\rho=\rho(r,z)}, \tag{15}$$

$$F = 1 + (z^2/\rho)\operatorname{tg}\psi(\rho)[1+\operatorname{tg}^2\psi(\rho)]\psi'(\rho)\,\Big|_{\rho=\rho(r,z)}. \tag{16}$$

Производные от f по переменным r,z при $r>0$ найдем, дифференцируя (11), а затем используя формулы (14)–(16) и тождество

$$1 + [(z/\rho)\operatorname{tg}\psi(\rho)]^2\,\Big|_{\rho=\rho(r,z)} \equiv (r/\rho)^2\,\Big|_{\rho=\rho(r,z)}. \tag{17}$$

В результате получим

$$\frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{F_{fr}}{F}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{F_{fz}}{F}, \tag{18}$$

где
$$F_{fr} = (z/r)\Big\{[1+\operatorname{tg}^2\psi(\rho)]\psi'(\rho) - (1/\rho)\operatorname{tg}\psi(\rho)\Big\}\ \Big|_{\rho=\rho(r,z)}, \tag{19}$$

$$F_{fz} = (1/\rho)\operatorname{tg}\psi(\rho)\ \Big|_{\rho=\rho(r,z)}. \tag{20}$$

В силу (1), (8), (15), (16), (17), (20) в пределе при $r \to 0$ имеем

$$F_{\rho r}/F \to 1, \qquad F_{\rho z}/F \to 0, \qquad F_{fz}/F \to 0.$$

С учетом (12), (14), (13) и (18) это доказывает непрерывность производных $\rho'_r,\ \rho'_z$ и f'_z при $r \geq 0,\ z \in \mathbb{R}$.

Производная $\dfrac{\partial f}{\partial r}$ также поддается доопределению как непрерывная функция при $r \geq 0$, $z \in \mathbb{R}$, а именно
$$\frac{\partial f}{\partial r} = \begin{cases} 0, & r = 0, \\ -F_{fr}/F, & r > 0, \end{cases}$$
так как в силу (1) $\psi''(0) = 0$, а (19) влечет

$$\lim_{r\to 0}(-F_{fr}/F) = -(z/2)\psi''(0).$$

Без наложенного ограничения $\psi''(0) = 0$ производная $f'_r(r,z)$ на оси $r = 0$ при $z \neq 0$ терпела бы разрыв: $f'_r(r,z) - f'_r(0,z) \xrightarrow[x\to 0+0]{} (z/2)\psi''(0)$.

4. Найдем ротор и дивергенцию определенного в (7) гладкого поля $\mathbf{b}$. Для этого обратимся к формулам (31), (32), (21), (34) работы [1] и выразим их в криволинейных координатах с помощью формул, приведенных в начале подразд. 1. При этом при переходе к криволинейным координатам следует учитывать, что теперь $\varphi = \vartheta,\ \psi = \psi(\rho)$, и использовать формулы

$$\mathbf{l} = \mathbf{i}_\rho(\vartheta), \qquad [\mathbf{l},\mathbf{g}] = -\mathbf{i}_\vartheta(\vartheta), \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{k}} = \mathbf{i}_\vartheta(\vartheta)/\rho,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{k}} = \psi'(\rho)\mathbf{i}_\rho(\vartheta), \qquad \left([\mathbf{l},\mathbf{g}], \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{k}}\right) = -1/\rho,$$

$$\left(\mathbf{l}, \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{k}}\right) = \psi'(\rho), \qquad (\mathbf{g}, \operatorname{Rot}\mathbf{t}) = -\cos\psi(\rho)[\psi'(\rho) + (1/\rho)\operatorname{tg}\psi(\rho)],$$

$$(\mathbf{X}-\mathbf{k},\mathbf{t}) = \cos\psi(\rho)[z - r\sin(\theta-\vartheta)\operatorname{tg}\psi(\rho)],$$

$$\left(\mathbf{g}, \left[\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{k}}, \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{k}}\right]\right) = \psi'(\rho)/\rho, \qquad \left([\mathbf{l},\mathbf{g}], \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{k}}\right) = \left(\mathbf{l}, \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{k}}\right) = 0,$$

$$J(\mathbf{X}(r,\theta,z)) = -\cos\psi(\rho)\Big\{1 + (z^2/\rho)\operatorname{tg}\psi(\rho)[1+\operatorname{tg}^2\psi(\rho)]\psi'(\rho)\Big\}\ \Big|_{\rho=\rho(r,z)},$$

$$\vartheta = \theta - f(r,z),$$

$$\cos f = \begin{cases} 1, & r = 0, \\ \rho(r,z)/r, & r > 0, \end{cases} \qquad \sin f = \begin{cases} 0, & r = 0, \\ -(z/r)\operatorname{tg}\psi(\rho(r,z)), & r > 0. \end{cases}$$

Две последние формулы вытекают из (8).

В результате ротор и дивергенция поля $\mathbf{b}$ выражаются формулами (пояснения ниже, см. формулы (24)–(27))
$$\operatorname{rot}\mathbf{b} = B\mathbf{b}, \tag{21}$$

$$B = B(r,z) = \begin{cases} 0, & r = 0, \\ \widetilde{B}(r,z), & r > 0, \end{cases} \tag{22}$$

$$\operatorname{div}\,\mathbf{b} = d(r,z) = \begin{cases} 0, & r = 0, \\ \widetilde{d}(r,z), & r > 0. \end{cases} \tag{23}$$

Функции (22) и (23) суть непрерывные продолжения соответственно функций

$$\widetilde{B}(r,z) = -\left[\psi'(\rho) + (1/\rho)\operatorname{tg}\psi(\rho)\right]\Big|_{\rho=\rho(r,z)}\Big/ F(r,z), \tag{24}$$

$$\widetilde{d}(r,z) = 2(z/\rho)\sin\psi(\rho)\left[1 + \operatorname{tg}^2\psi(\rho)\right]\psi'(\rho)\Big|_{\rho=\rho(r,z)}\Big/ F(r,z), \tag{25}$$

где F как функция переменных r, z определяется формулой (16). В силу доказанной гладкости решения системы (8) при $r \geq 0$ имеем

$$\lim_{r\to 0}\widetilde{B}(r,z) = -2\psi'(0)/\{1 + [z\psi'(0)]^2\} = 0, \tag{26}$$

$$\lim_{r\to 0}\widetilde{d}(r,z) = 2z[\psi'(0)]^2/\{1 + [z\psi'(0)]^2\} = 0. \tag{27}$$

Если

$$\psi'(\rho) + (1/\rho)\operatorname{tg}\psi(\rho) = 0 \quad \text{при} \quad \rho > 0, \qquad \psi(\rho) = 0 \quad \text{при} \quad \rho = 0, \tag{28}$$

то в силу (22), (24), (26) ротор (21) поля $\mathbf{b}$ (см. (7)) будет равен нулю всюду в $\mathbb{R}^3$. Неотрицательная неубывающая функция $\psi(\rho)$ (см. формулы (1)) совместима с условиями (28) только тогда, когда $\psi(\rho) \equiv 0$. Следовательно, с помощью поля направлений (2) нельзя построить новое векторное поле, гладкое и потенциальное в $\mathbb{R}^3$, так как тогда $\mathbf{b}(r,\theta,z) \equiv \mathbf{g}$.

Иначе обстоит дело, если $\psi(\rho)$ — гладкая функция при $\rho \geq 0$, отвечающая условиям (1) и отличная от нуля при $\rho > 0$. Тогда формула (7) определяет гладкое единичное векторное поле, продольно вихревое в $\mathbb{R}^3$. Теми же свойствами обладают поля, полученные из поля (7) посредством замены $\mathbf{b}$ на $-\mathbf{b}$ в каждой точке $\mathbf{X}(r,\theta,z)$ пространства $\mathbb{R}^3$ и/или замены $\psi(\rho(r,z))$ на $-\psi(\rho(r,z))$ в формулах (7), (8), (11), (24), (25). Формулы (23), (25), (27) определяют дивергенцию поля $\mathbf{b}$.

З а м е ч а н и е 2. Если $\psi(\rho)$ — гладкая функция при $\rho \geq 0$, отвечающая условиям (1), и $\psi(\rho) = 0$ при $0 \leq \rho \leq \rho_0$, $\psi(\rho) > 0$ при $\rho > \rho_0$, то формула (7) определяет тогда гладкое единичное векторное поле, которое уже не является продольно вихревым во всем $\mathbb{R}^3$, будучи потенциальным в замкнутой цилиндрической области $r \leq \rho_0$ и продольно вихревым вне этой области.

5. Примером гладкой функции $\psi(\rho)$, удовлетворяющей условиям (1), может служить

$$\psi = \operatorname{arctg}\left[(\Delta/\zeta)y^3 M_{n-3}\Big/\sqrt{P_{2n}}\right], \tag{29}$$

где Δ, ζ — положительные постоянные,

$$y = \rho/\Delta, \tag{30}$$

$M_{n-3} = \sum\limits_{s=0}^{n-3} m_s y^s$, $P_{2n} = \sum\limits_{s=0}^{2n} c_s y^s$ — полиномы с вещественными коэффициентами, у которых $m_{n-3} = 1$, $c_0 = c_{2n} = 1$, $n \geq 3$. Выбор остальных коэффициентов подчиняется требованиям:

(a) $M_{n-3} > 0$ при $y > 0$, $P_{2n} > 0$ при $y \geq 0$;

(b) $m_0 \geq 0$;

(c) $G_{3n-4} := 3M_{n-3}P_{2n} + y\big[M'_{n-3}P_{2n} - (M_{n-3}/2)P'_{2n}\big] \geq 0$ при $y \geq 0$, где штрих означает дифференцирование по y.

Эти требования обеспечивают условия (1) и устанавливаются с использованием формул:

$$\psi\Big|_{\rho=0} = 0, \qquad \psi\Big|_{\rho\to\infty} = \operatorname{arctg}(\Delta/\zeta),$$

$$\frac{d}{d\rho}\operatorname{tg}\psi = \frac{y^2 G_{3n-4}}{\zeta P_{2n}\sqrt{P_{2n}}}, \qquad \frac{d\psi}{d\rho} = \frac{y^2 G_{3n-4}}{\zeta[P_{2n} + (\Delta/\zeta)^2 y^6 M_{n-3}^2]\sqrt{P_{2n}}}.$$

Полином G_{3n-4} в явном виде выражается формулой

$$G_{3n-4} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{3n-4} g_k y^k,$$

а его коэффициенты — формулами

$$g_k = \sum_{s=s_1}^{s_2} (3s + 6 - k) m_s c_{k-s},$$

где $s_1 = 0,\ s_2 = k$ при $0 \le k \le n-3;\ s_1 = 0,\ s_2 = n-3$ при $n-2 \le k \le 2n-1;\ s_1 = k-2n,\ s_2 = n-3$ при $2n \le k \le 3n-4$, а $g_{3n-3} = 0$.

Требование (c) допускает существование и положительных корней уравнения

$$G_{3n-4}(y) = 0,$$

если каждый из них имеет четную кратность.

Зависимость переменной y в (30) (через $\rho = \rho(r,z)$) от переменных $\widetilde{r} = r/\Delta$ и $\widetilde{z}^2 = (z/\zeta)^2$, принимающих значения $\widetilde{r} > 0,\ \widetilde{z} \in \mathbb{R}$, определяется неявно уравнением

$$y^2\Big\{1 + [y^4 \widetilde{z}^2 M_{n-3}^2(y)/P_{2n}(y)]\Big\} - \widetilde{r}^2 = 0,$$

которое получается из уравнения (9) в результате подстановки (29) в (9) и замен $\rho = \Delta y,\ z = \zeta\widetilde{z},\ r = \Delta\widetilde{r}$. В случае $\widetilde{r} = 0$ имеем в силу (4) $y\big|_{\widetilde{r}=0} = 0$. Эта зависимость по теореме о неявных функциях описывается непрерывно дифференцируемой функцией $y = Y(\widetilde{r}, \widetilde{z}^2)$ при $\widetilde{r} \ge 0,\ \widetilde{z} \in \mathbb{R}$, принадлежащей классу алгебраических функций, поскольку $\widetilde{r},\ \widetilde{z}^2,\ y$ удовлетворяют соотношению

$$(\widetilde{r}^2 - y^2)P_{2n}(y) - y^6 \widetilde{z}^2 M_{n-3}^2(y) = 0,$$

левая часть которого есть полином относительно $\widetilde{r}^2,\ \widetilde{z}^2,\ y$. Это соотношение может быть выражено в виде алгебраического уравнения

$$\sum_{k=0}^{2n+2} U_k(\widetilde{r}^2, \widetilde{z}^2) y^k = 0$$

степени $2n+2$ относительно y, коэффициенты которого равны

$$U_k = c_{k-2} - \widetilde{r}^2 c_k \qquad \text{при} \qquad 0 \le k \le 5,$$

$$U_k = c_{k-2} - \widetilde{r}^2 c_k + \widetilde{z}^2 \mu_{k-6} \qquad \text{при} \qquad 6 \le k \le 2n,$$

$$U_{2n+1} = c_{2n+1}, \qquad U_{2n+2} = 1$$

и являются линейными функциями переменных $\widetilde{r}^2,\ \widetilde{z}^2$. Здесь

$$\mu_k = \sum_{s=s_1}^{s_2} m_s m_{k-s},$$

где $s_1 = 0,\ s_2 = k$ при $0 \le k \le n-3;\ s_1 = k-(n-3),\ s_2 = n-3$ при $n-2 \le k \le 2n-6$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** К построению единичных продольно вихревых векторных полей с помощью гладких отображений // Тр. Ин-та математики и механики. Екатеринбург: Ин-т математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, №. 3. С. 82–91.

Верещагин Владимир Пантелеевич
д-р физ.-мат. наук, проф.
Рос. гос. педагог. ун-т, г. Екатеринбург

Поступила 8.04.2008

Субботин Юрий Николаевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-кор. РАН
зав. отд.
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: yunsub@imm.uran.ru

Черных Николай Иванович,
д-р. физ.-мат. наук
зав. отд.
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: Nikolai.Chernykh@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14 № 3 2008

УДК 517

НЕРАВЕНСТВО ВИРТИНГЕРА — СТЕКЛОВА МЕЖДУ НОРМОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ И НОРМОЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ СРЕЗКИ ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ[1]

Е. А. Зёрнышкина

Исследуется точная константа в неравенстве между L_p-средним ($p \geq 0$) 2π-периодической функции с нулевым средним значением и L_q-нормой ($q \geq 1$) положительной срезки ее производной. Получены оценки константы снизу при $0 \leq p \leq \infty$ и сверху при $1 \leq p \leq \infty$ для произвольного $1 \leq q \leq \infty$. Выписаны значения точной константы в случаях $p = 2$, $1 \leq q \leq \infty$ и $p = \infty$, $1 \leq q \leq \infty$.

Ключевые слова: неравенство Виртингера — Стеклова.

1. Введение

Пусть $L^p = L^p(-\pi, \pi)$, $0 < p < \infty$, есть пространство измеримых функций y с суммируемой на интервале $(-\pi, \pi)$ степенью $|y|^p$, $L^\infty = L^\infty(-\pi, \pi)$ — пространство измеримых существенно ограниченных функций на $(-\pi, \pi)$, а $L^0 = L^0(-\pi, \pi)$ — пространство измеримых функций, у которых суммируема функция $\ln_+ |y| = \ln(\max(1, |y|))$. На этих пространствах рассмотрим функционалы

$$\|y\|_{L^p} = \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |y(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 0 < p < \infty,$$

$$\|y\|_{L^\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in (-\pi,\pi)} |y(x)|, \qquad \|y\|_{L^0} = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln |y(x)| dx \right).$$

Если для функции $y \in L^0$ функция $\ln |y|$ не является суммируемой, а точнее, (неположительная) функция $\ln_- |y| = \ln(\min(1, |y|))$ не является суммируемой (например, y обращается в нуль на множестве положительной меры), то в этом случае полагаем $\|y\|_{L^0} = 0$.

Обозначим через W^q пространство абсолютно непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций y, удовлетворяющих условию $y' \in L^q(-\pi, \pi)$, а через W^q_+ — множество абсолютно непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций y, для которых $y'_+ = \max\{0, y'\} \in L^q(-\pi, \pi)$.

Определим три класса $Q^j = Q^j(q)$, $j = 1, 2, 3$, функций y, абсолютно непрерывных на всей числовой оси, 2π-периодических, сужение которых на отрезок $[-\pi, \pi]$ принадлежит пространству W^q и для которых выполняется соответственно свойство

$$\max y + \min y = 0 \quad (\text{для } j = 1), \tag{1.1}$$

$$\exists\, x_0 \in [-\pi, \pi] : \; y(x_0) = 0 \quad (\text{для } j = 2), \tag{1.2}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} y(x) dx = 0 \quad (\text{для } j = 3). \tag{1.3}$$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 08-01-00213) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-1071.2008.1).

Очевидно, справедливы вложения $Q^1 \subset Q^2$ и $Q^3 \subset Q^2$. Аналогичные классы функций $y \in W_+^q$, обладающих свойством (1.1), (1.2) или (1.3), обозначим через Q_+^1, Q_+^2 и Q_+^3 соответственно.

Пусть $K_{p,q}(Q^j)$ — точная (т. е. наименьшая) константа в неравенстве

$$\begin{gathered} \|y\|_{L^p} \le K_{p,q}(Q^j)\|y'\|_{L^q}, \qquad y \in Q^j, \\ 0 \le p \le \infty, \qquad 1 \le q \le \infty, \qquad j = 1,2,3. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Ясно, что имеет место равенство

$$K_{p,q}(Q^j) = \sup\left\{\Phi(y): \ y \in Q^j, \ y \not\equiv 0\right\}, \qquad j = 1,2,3, \tag{1.5}$$

где функционал Φ определяется формулой

$$\Phi(y) = \frac{\|y\|_{L^p}}{\|y'\|_{L^q}}.$$

Неравенствам вида (1.4) на различных классах функций посвящены работы многих авторов — В. Виртингера, Э. Шмидта, Г. Бора, Г. Харди, Дж. Литтльвуда, Б. С.-Надя, Ж. Фавара, Н. И. Ахиезера, В. И. Левина, С. Б. Стечкина, Н. П. Корнейчука и других (см. [1, 2]).

Неравенство (1.4) на классах Q^1, Q^2 (и некоторых других близких классах) изучал Э. Шмидт [3]. Он доказал, что при $0 \le p \le \infty, \ 1 \le q \le \infty$ неравенство (1.4) на классе Q^1 справедливо с точной константой

$$\begin{gathered} K_{p,q}(Q^1) = \frac{\pi}{2} H\left(\frac{1}{p}, \frac{q-1}{q}\right), \qquad p \ne 0; \\ K_{0,q}(Q^1) = \lim_{p\to+0} K_{p,q}(Q^1) = \frac{\pi}{2}\left(G\left(\frac{q-1}{q}\right)\right)^{-1}, \end{gathered} \tag{1.6}$$

где функции $H(u,v)$ и $G(u)$ определяются равенствами

$$G(u) = \left(\frac{e}{u}\right)^u \Gamma(1+u), \qquad G(0) = 1; \qquad H(u,v) = \frac{G(u+v)}{G(u)G(v)}.$$

Отметим, что функция $G(u)$ непрерывна для всех $u \ge 0$.

На классе Q^2 при всех возможных значениях $0 \le p \le \infty, \ 1 \le q \le \infty$ точная константа в неравенстве (1.4) определяется соотношением

$$K_{p,q}(Q^2) = 2K_{p,q}(Q^1).$$

Э. Шмидт [3] описал также множество экстремальных функций неравенства (1.4), т. е. функций, на которых это неравенство обращается в равенство (для классов Q^1 и Q^2). А именно, при $q \ne 1$ экстремальные функции неравенства (1.4) имеют вид $y(x) = c_1 Y_{p,q}(x + c_2)$ в случае Q^1 и $y(x) = c_1 \left|Y_{p,q}\left(x/2 + c_2\right)\right|$ — в случае Q^2, где c_1, c_2 — произвольные константы, а функция $Y_{p,q}$ определена следующим образом. При $p = \infty$, $q \ne 1$ и при $0 \le p \le \infty$, $q = \infty$ функция $Y_{p,q}$ является 2π-периодической кусочно-линейной функцией, график которой на $[-\pi, \pi]$ есть ломаная с вершинами в точках $(\pm\pi, 0)$, $(\pm\pi/2, \pm 1)$. При $0 < p < \infty, \ q \ne 1$ функция $Y_{p,q}$ является решением дифференциального уравнения

$$|Y_{p,q}|^p + \lambda^q |Y'_{p,q}|^q = 1, \tag{1.7}$$

а при $p = 0, \ q \ne 1$ — дифференциального уравнения

$$\ln|Y_{0,q}| + \lambda^q |Y'_{0,q}|^q = 0, \tag{1.8}$$

где

$$\lambda = \frac{1}{4}\left(\int\limits_0^1 \eta^{\frac{1}{1-q}} d\xi\right)^{-1},$$

а $\xi \in [-1,1]$ и $\eta \geq 0$ связаны соотношениями

$$|\xi|^p + |\eta|^{\frac{q}{q-1}} = 1, \quad p \neq 0; \qquad \ln|\xi| + |\eta|^{\frac{q}{q-1}} = 0, \quad p = 0.$$

Функция $Y_{p,q}$ обращается в нуль и достигает экстремальных значений, равных ± 1, в тех же точках, что и $\sin x$. Она также обладает теми же свойствами симметрии, что и $\sin x$; кроме того, для всех значений $x \in [-\pi,\pi]$ знак функции $Y_{p,q}$ совпадает со знаком функции $\sin x$. Производная этой функции обладает свойствами симметрии, обращается в нуль и достигает экстремумов в тех же точках, что и $\cos x$, знак производной совпадает для всех $x \in [-\pi,\pi]$ со знаком $\cos x$.

В случае $q = 1$ неравенство (1.4) строгое — не существует функции из соответствующего класса Q^j, $j = 1, 2$, на которой неравенство обращается в равенство. Неулучшаемость констант $K_{p,1}(Q^1) = \pi/2$ и $K_{p,1}(Q^2) = \pi$ можно обосновать, рассмотрев при $n \to \infty$ последовательность 2π-периодических кусочно-линейных функций с вершинами на $[-\pi,\pi]$ в точках $(\pm 1/n, \pm 1)$, $(\pm\pi \mp 1/n, \pm 1)$, $(\pm\pi, 0)$ для случая $j = 1$ и в точках $(\pm\pi \mp 1/n, 1)$, $(\pm\pi, 0)$ для случая $j = 2$.

На классе Q^3 при $p = q = 2$ точная константа в неравенстве (1.4) равна 1. Равенство достигается на функциях вида $c_1 \sin(x + c_2)$. Неравенство в этом случае обычно называют неравенством Виртингера (см., например, [1]). Но еще в работах 1896–1897 гг. В. А. Стекловым установлена справедливость неравенства (1.4) для непрерывно-дифференцируемых функций, удовлетворяющих условию (1.3) или условию равенства функции нулю на концах отрезка, как одномерный случай неравенства Пуанкаре (см. [4]).

В более общем случае, когда $p = 2$, $1 \leq q \leq \infty$ неравенство (1.4) на классе Q^3 нетрудно получить из неравенства на классе Q^1 (неравенства Шмидта), при этом

$$K_{2,q}(Q^3) = K_{2,q}(Q^1) \tag{1.9}$$

и экстремальными являются функции вида $c_1 Y_{2,q}(x + c_2)$.

Действительно, если функция $y \in Q^3$, то для функции $g(x) = y(x) - c$, где константа c выбирается таким образом, чтобы выполнялось свойство (1.1) (и, следовательно, функция g принадлежит классу Q^1), получаем, что $\|g\|_{L^2} = (\|y\|_{L^2}^2 + c^2)^{1/2} \geq \|y\|_{L^2}$, а $\|g'\|_{L^q} = \|y'\|_{L^q}$. Отсюда следует неравенство $\Phi(g) \geq \Phi(y)$, а значит, и неравенство $K_{2,q}(Q^1) \geq K_{2,q}(Q^3)$. С другой стороны, так как экстремальные в неравенстве (1.4) на классе Q^1 функции обладают свойством (1.3), экстремальная функция $Y_{2,q}$ принадлежит классу Q^3, а значит, $K_{2,q}(Q^3) \geq \Phi(Y_{2,q}) = K_{2,q}(Q^1)$.

При $p = q = \infty$ точная константа $K_{\infty,\infty}(Q^3) = \pi/2$ получена Г. Бором [1]. Случай $p = \infty$, $1 \leq q < \infty$ исследован С. Б. Стечкиным [1]. Точная константа равна

$$K_{\infty,q}(Q^3) = \pi\left(\frac{q-1}{2q-1}\right)^{\frac{q-1}{q}}, \qquad 1 < q < \infty,$$

$$K_{\infty,1}(Q^3) = \lim_{q \to +1} K_{\infty,q}(Q^3) = \pi.$$

Отметим, что $K_{\infty,q}(Q^3) \neq K_{\infty,q}(Q^1)$ при $1 \leq q < \infty$. Неравенство (1.4) при $q \neq 1$ обращается в равенство на функциях вида cY_q, где c — произвольная константа и

$$Y_q(x) = \left|\frac{x}{\pi}\right|^{\frac{q}{q-1}} - \frac{q-1}{2q-1}\,. \tag{1.10}$$

При $q = 1$ неравенство (1.4) строгое, точность константы $K_{\infty,1}(Q^3) = \pi$ можно обосновать, рассмотрев при $\varepsilon \to +0$ семейство функций

$$Y_1(x) = Y_1(x,\varepsilon) = \begin{cases} -\varepsilon, & |x| \le \pi - \varepsilon, \\ 3\pi\Big(\dfrac{|x| - \pi + \varepsilon}{\varepsilon}\Big)^2 - \varepsilon, & \pi - \varepsilon \le |x| \le \pi. \end{cases} \tag{1.11}$$

Некоторые обобщения неравенства Бора приведены в [5]. В частности, при $p = q = 1$ точная константа равна $K_{1,1}(Q^3) = K_{\infty,\infty}(Q^3) = \pi/2$. Экстремальной последовательностью является последовательность 2π-периодических кусочно-линейных функций с вершинами на $[-\pi,\pi]$ в точках $(\pm 1/n, \pm 1)$, $(\pm\pi \mp 1/n, \pm 1)$, $(\pm\pi, 0)$.

При $1 \le p \le \infty,\ q = \infty$ точная константа равна (см. [5])

$$K_{p,\infty}(Q^3) = K_{p,\infty}(Q^1) = \frac{\pi}{2}(p+1)^{-\frac{1}{p}};$$

экстремальной является 2π-периодическая кусочно-линейная функция с вершинами на отрезке $[-\pi,\pi]$ в точках $(\pm\pi, 0)$, $(\pm\pi/2, \pm 1)$.

В настоящей работе нас интересует точная константа $K_{p,q}(Q^j_+)$ в неравенстве

$$\begin{gathered} \|y\|_{L^p} \le K_{p,q}(Q^j_+)\|y'_+\|_{L^q}, \qquad y \in Q^j_+, \\ 0 \le p \le \infty, \quad 1 \le q \le \infty, \qquad j = 3; \end{gathered} \tag{1.12}$$

ее можно записать в виде точной верхней грани

$$K_{p,q}(Q^3_+) = \sup\big\{\Phi_+(y):\ y \in Q^3_+,\ y \not\equiv 0\big\}$$

функционала Φ_+, определяемого формулой

$$\Phi_+(y) = \frac{\|y\|_{L^p}}{\|y'_+\|_{L^q}}\,.$$

Для точной константы в неравенстве (1.12) на классах Q^1_+ и Q^2_+ в работе автора [6] была доказана следующая

Теорема А. *При всех* $0 \le p \le \infty,\ 1 \le q \le \infty$ *справедливо равенство*

$$K_{p,q}(Q^j_+) = 2K_{p,q}(Q^j), \qquad j = 1, 2.$$

При этом экстремальной функции в классе Q^j_+ не существует; однако можно построить экстремальную последовательность, сглаживая соответствующим образом функцию $Y_{p,q;j}$, определенную для $x \in [-\pi,\pi]$ соотношениями

$$Y_{p,q;j}(x) = \begin{cases} Y_{p,q}\left(\dfrac{x}{2}\right), & j = 1, \\ Y_{p,q}\Big(\dfrac{x+\pi}{4}\Big), & j = 2. \end{cases} \tag{1.13}$$

Для точной константы в неравенстве (1.12) на классе Q^3_+ известно (см. [5]), что $K_{p,\infty}(Q^3_+) = 2K_{p,\infty}(Q^3)$ для всех $1 \le p \le \infty$.

Аналогичное равенство можно получить и в случае $q = 1,\ 1 \le p \le \infty$. Действительно, так как для функции $y \in Q^3$ в силу периодичности среднее значение ее производной на периоде равно нулю, то выполняется равенство $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |y'_+(x)|dx = \int_{-\pi}^{\pi} |y'_-(x)|dx$. Отсюда следует, что $Q^3 = Q^3_+$ при $q = 1$, причем верно равенство $\|y'\|_{L^1} = 2\|y'_+\|_{L^1}$, а значит, и равенство $\Phi_+(y) = 2\Phi(y)$. В итоге

$$K_{p,1}(Q^3_+) = \sup_{y \in Q^3_+} \Phi_+(y) = \sup_{y \in Q^3} \Phi_+(y) = 2\sup_{y \in Q^3} \Phi(y) = 2K_{p,1}(Q^3).$$

Основным результатом данной работы является следующее утверждение относительно константы $K_{p,q}(Q^3_+)$.

Теорема 1. *При всех* $0 \le p \le \infty,\ 1 \le q \le \infty$ *справедлива оценка снизу*

$$K_{p,q}(Q^3_+) \ge 2K_{p,q}(Q^1).$$

При всех $1 \le p \le \infty,\ 1 \le q \le \infty$ *справедлива оценка сверху*

$$K_{p,q}(Q^3_+) \le 2K_{p,q}(Q^3).$$

При этом в случаях $p = 2,\ 1 \le q \le \infty$ *и* $p = \infty,\ 1 \le q \le \infty$ *имеет место равенство*

$$K_{p,q}(Q^3_+) = 2K_{p,q}(Q^3).$$

Таким образом, на данный момент известно, что равенство $K_{p,q}(Q^3_+) = 2K_{p,q}(Q^3)$ имеет место в следующих трех случаях: $1 \le p \le \infty,\ q = \infty$; $1 \le p \le \infty,\ q = 1$; $p = \infty,\ 1 \le q \le \infty$; $p = 2,\ 1 \le q \le \infty$.

Экстремальной функции в классе $Q^3_+(q),\ 1 \le q \le \infty$, при $p \ge 1$ не существует. Однако можно построить экстремальную последовательность, сглаживая соответствующим образом функцию $F_{p,q}$, определенную для $x \in [-\pi, \pi]$ соотношениями

$$F_{p,q}(x) = \begin{cases} Y_{2,q}\left(\dfrac{x}{2}\right), & p = 2, \\ Y_q\left(\dfrac{x+\pi}{2}\right), & p = \infty. \end{cases}$$

Для доказательства теоремы 1 сначала будет получена оценка сверху для точной константы в неравенстве вида (1.12) на классе неубывающих на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций (теорема 2), далее — оценка снизу для константы $K_{p,q}(Q^3_+)$ и в последней части — оценка сверху.

2. Неравенство (1.12) для монотонных функций с нулевым средним значением

Пусть $V = V^q \subset W^q$ — класс неубывающих на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций с нулевым средним значением, т. е. обладающих свойством (1.3). Для любой функции из этого класса имеем $y'_+ = y'$. Положим

$$K_{p,q}(V) = \sup\left\{\Phi_+(y):\ y \in V,\quad y \not\equiv 0\right\}.$$

Теорема 2. *При всех* $0 \le p \le \infty, 1 \le q \le \infty$ *справедливо неравенство*

$$K_{p,q}(V) \le 2K_{p,q}(Q^3). \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть y — произвольная функция из класса $V,\ y \not\equiv 0$. В силу свойства (1.3) функция y на отрезке $[-\pi, \pi]$ имеет нуль, который обозначим через x_0. Рассмотрим функцию $\widetilde{y}$, определенную на отрезке $[-2\pi - x_0, 2\pi - x_0]$ следующим образом:

$$\widetilde{y}(x) = \begin{cases} y(-2\pi - x), & x \in [-2\pi - x_0, -\pi], \\ y(x), & x \in [-\pi, \pi], \\ y(2\pi - x), & x \in [\pi, 2\pi - x_0]. \end{cases}$$

Функция $g(x) = \widetilde{y}(2x - x_0)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, на концах отрезка обращается в нуль и удовлетворяет свойству (1.3). Кроме того, $g' \in L^q(-\pi, \pi)$. Значит, функция g принадлежит классу Q^3. Следовательно, для нее справедливо неравенство (1.4), т. е.

$$\|g\|_{L^p} \le K_{p,q}(Q^3)\|g'\|_{L^q}.$$

Нетрудно видеть, что $\|g\|_{L^p} = \|y\|_{L^p}$ и $\|g'\|_{L^q} = 2\|y'_+\|_{L^q}$. Таким образом, для любой функции $y \in V$ выполняется неравенство

$$\Phi_+(y) \le 2K_{p,q}(Q^3),$$

следовательно,

$$K_{p,q}(V) \le 2K_{p,q}(Q^3).$$

Теорема доказана. □

3. Оценка снизу для константы $K_{p,q}(Q^3_+)$

Лемма 1. *При всех* $0 \le p \le \infty,\ 1 \le q \le \infty$ *справедливо неравенство*

$$K_{p,q}(Q^3_+) \ge 2K_{p,q}(Q^1). \tag{3.1}$$

Доказательство. Рассмотрим экстремальную последовательность функций $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ в неравенстве (1.12) на классе Q^1_+, построенную в [6] исходя из функции $Y_{p,q;1}$, определенной формулой (1.13). Среднее значение функций g_n равно нулю, т. е. $g_n \in Q^3_+$, а значит,

$$\Phi_+(g_n) \le K_{p,q}(Q^3_+).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$2K_{p,q}(Q^1) = K_{p,q}(Q^1_+) \le K_{p,q}(Q^3_+).$$

Следствие 1. *При всех значениях параметров* p *и* q, *при которых выполняется равенство* $K_{p,q}(Q^3) = K_{p,q}(Q^1)$, *справедливо неравенство*

$$K_{p,q}(Q^3_+) \ge 2K_{p,q}(Q^3). \tag{3.2}$$

Отсюда, в частности, получаем, учитывая (1.9), оценку

$$K_{2,q}(Q^3_+) \ge 2K_{2,q}(Q^3), \qquad 1 \le q \le \infty. \tag{3.3}$$

В случае $p = \infty$ (отметим, что $K_{\infty,q}(Q^3) \ne K_{\infty,q}(Q^1)$ при $q \ne \infty$) аналогичную неравенству (3.2) оценку для константы $K_{\infty,q}(Q^3_+)$ дает следующая лемма.

Лемма 2. *При всех* $1 \le q \le \infty$ *справедливо неравенство*

$$K_{\infty,q}(Q^3_+) \ge 2K_{\infty,q}(Q^3). \tag{3.4}$$

Доказательство. При $q = 1$ для последовательности 2π-периодических функций Y_1, определенных формулой (1.11), имеем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Phi_+(Y_1) = \lim_{\varepsilon \to 0} 2\Phi(Y_1) = 2K_{\infty,1}(Q^3),$$

откуда следует справедливость неравенства (3.4) для $q = 1$.

Рассмотрим случай $q \ne 1$. Пусть Y_q — функция, экстремальная в соответствующем неравенстве (1.4) на классе $Q^3(q)$ и задаваемая формулой (1.10). Обозначим $a_n = -\pi + \dfrac{1}{nY_q(0)}$, $b_n = \pi + \dfrac{1}{nY_q(\pi)}$ и рассмотрим последовательность периодических функций, определенных на отрезке $[a_n, b_n]$ следующим образом:

$$y_n(x) = \begin{cases} \dfrac{a_n - x}{a_n + \pi} Y_q(0), & x \in [a_n, -\pi], \\[2mm] Y_q\Big(\dfrac{x+\pi}{2}\Big), & x \in [-\pi, \pi], \\[2mm] \dfrac{b_n - x}{b_n - \pi} Y_q(\pi), & x \in [\pi, b_n]. \end{cases}$$

Функция y_n непрерывна, монотонно возрастает на отрезке $[-\pi,\pi]$ и удовлетворяет свойству (1.3), что следует из свойств функции Y_q и выбора a_n, b_n.

Функция $g_n(x) = y_n\left(\dfrac{b_n-a_n}{2\pi}x + \dfrac{b_n+a_n}{2}\right)$ является 2π-периодической абсолютно непрерывной функцией, удовлетворяющей условию (1.3). Нетрудно проверить равенства

$$\|g_n\|_{L^\infty} = \|Y_q\|_{L^\infty},$$

$$\|(g_n')_+\|_{L^q} = \frac{1}{2}\left(\frac{b_n-a_n}{2\pi}\right)^{1-\frac{1}{q}}\|Y_q'\|_{L^q}, \qquad 1 < q \le \infty.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\|(g_n')_+\|_{L^q} = \frac{1}{2}\|Y_q'\|_{L^q}, \qquad 1 < q \le \infty.$$

Переходя в неравенстве $K_{\infty,q}(Q^3_+) \ge \Phi_+(g_n)$ к пределу при $n\to\infty$, получаем

$$K_{\infty,q}(Q^3_+) \ge 2\Phi(Y_q) = 2K_{\infty,q}(Q^3).$$

Лемма доказана. □

4. Доказательство основной теоремы

Следующее утверждение понадобится нам в дальнейшем; его доказательство аналогично доказательству соответствующей леммы в [6].

Лемма 3. *Для любой функции $y\in Q^3_+(q), 1\le q\le\infty$, произвольных p, $0<p\le\infty$, и $\varepsilon>0$ существует функция $P\in Q^3_+(q)$, сужение которой на отрезок $[-\pi,\pi]$ является многочленом и для которой выполняется неравенство*

$$|\Phi_+(y) - \Phi_+(P)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Так как функция y абсолютно непрерывна, то y' суммируема на отрезке $[-\pi,\pi]$. Тогда для произвольного $\delta>0$ существует $N>0$, при котором верно неравенство

$$\|y' - y_N'\|_{L^1} < \frac{\delta}{4\pi},$$

где $y_N'(x) = \max\{y'(x), -N\}$. Функция y_N' принадлежит $L^q(-\pi,\pi)$, так как $y_N' = y_+' + (y_N' - y_+')$, где $y_+'\in L^q(-\pi,\pi)$ и функция $y_N' - y_+'$ ограничена. По теореме Вейерштрасса, примененной к функции y_N' на отрезке $[-\pi,\pi]$, существует многочлен φ такой, что

$$\|y_N' - \varphi\|_{L^q} < \frac{\delta}{8\pi}.$$

По многочлену φ сейчас будет построен многочлен g. Определим вначале производную этого многочлена формулой

$$g'(x) = \varphi(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)dx.$$

С учетом того, что среднее значение на $[-\pi,\pi]$ функции y' как производной периодической функции равно нулю, из неравенства

$$|\varphi(x) - g'(x)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)dx\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(x) - y_N'(x)|dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|y_N'(x) - y'(x)|dx$$

$$\leq \|y'_N - \varphi\|_{L^q} + \|y' - y'_N\|_{L^1} < \frac{\delta}{8\pi} + \frac{\delta}{4\pi} = \frac{3\delta}{8\pi}$$

получаем

$$\|y'_N - g'\|_{L^q} \leq \|y'_N - \varphi\|_{L^q} + \|\varphi - g'\|_{L^q} < \frac{\delta}{8\pi} + \frac{3\delta}{8\pi} = \frac{\delta}{2\pi}.$$

С учетом равенства $y'_+ = (y'_N)_+$ имеем

$$|y'_+ - g'_+| = |(y'_N)_+ - g'_+| = \left|\frac{|y'_N| + y'_N}{2} - \frac{|g'| + g'}{2}\right| \leq \left|\frac{|y'_N| - |g'|}{2}\right| + \left|\frac{y'_N - g'}{2}\right| \leq |y'_N - g'|$$

и, следовательно,

$$\|y'_+ - g'_+\|_{L^q} \leq \|y'_N - g'\|_{L^q} < \frac{\delta}{2\pi} < \delta.$$

В итоге имеем

$$\big|\|y'_+\|_{L^q} - \|g'_+\|_{L^q}\big| \leq \|y'_+ - g'_+\|_{L^q} < \delta.$$

Положим

$$g(x) = \int\limits_{-\pi}^{x} g'(t)dt + y(-\pi), \qquad x \in [-\pi, \pi].$$

Отметим, что поскольку среднее значение функции g' на $[-\pi, \pi]$ равно нулю, то $g(\pi) = g(-\pi)$.

Используя представление $y(x) = \int\limits_{-\pi}^{x} y'(t)dt + y(-\pi)$ и неравенство

$$\|y' - g'\|_{L^1} \leq \|y' - y'_N\|_{L^1} + \|y'_N - g'\|_{L^1} \leq \frac{\delta}{4\pi} + \|y'_N - g'\|_{L^q} < \frac{\delta}{4\pi} + \frac{\delta}{2\pi} = \frac{3\delta}{4\pi},$$

получаем для любого $x \in [-\pi, \pi]$

$$|y(x) - g(x)| = \left|\int\limits_{-\pi}^{x} (y'(t) - g'(t))dt\right| \leq \int\limits_{-\pi}^{x} |y'(t) - g'(t)|dt \leq 2\pi\|y' - g'\|_{L^1} < 2\delta.$$

Таким образом, $\|y - g\|_{L^p} < 2\delta$.

Положим

$$P(x) = g(x) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x)dx.$$

Нетрудно видеть, что среднее значение функции P на отрезке $[-\pi, \pi]$ равно нулю и $P(\pi) = P(-\pi)$. Кроме того, $P' = g'$ и для любого $x \in [-\pi, \pi]$

$$|y(x) - P(x)| = \left|y(x) - g(x) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x)dx\right| = \left|y(x) - g(x) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (y(x) - g(x))dx\right|$$

$$\leq |y(x) - g(x)| + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |y(x) - g(x)|dx < 2\delta + 2\delta = 4\delta.$$

Следовательно, $\|y - P\|_{L^p} < 4\delta$.

При $p \geq 1$ из неравенства треугольника получаем

$$|\|y\|_{L^p} - \|P\|_{L^p}| \leq \|y - P\|_{L^p} < 4\delta.$$

При $p \in (0,1)$ из неравенства $|a+b|^p \le |a|^p + |b|^p$ следует

$$\left| \|y\|^p_{L^p} - \|P\|^p_{L^p} \right| \le \|y-P\|^p_{L^p} < (4\delta)^p.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $f(x) = x^{\frac{1}{p}} - \dfrac{1}{p}\,(x-1)x^{\frac{1}{p}-1}$ при $x \ge 1$. Так как

$$f'(x) = \frac{p-1}{p^2} x^{\frac{1}{p}-2}(x-1) < 0$$

при $x > 1$, то функция $f(x)$ убывает, следовательно, $f(x) \le f(1) = 1$. Отсюда получаем неравенство

$$x^{\frac{1}{p}} - 1 \le \frac{1}{p}(x-1)x^{\frac{1}{p}-1}.$$

Полагая в этом неравенстве $x = \dfrac{a}{b} > 1$ и домножая его на $b^{\frac{1}{p}}$, получаем

$$a^{\frac{1}{p}} - b^{\frac{1}{p}} \le \frac{1}{p}(a-b)a^{\frac{1}{p}-1}.$$

Положим $a = \max\left\{\|y\|^p_{L^p}, \|P\|^p_{L^p}\right\}$ и $b = \min\left\{\|y\|^p_{L^p}, \|P\|^p_{L^p}\right\}$. Имеем

$$\left|\|y\|_{L^p} - \|P\|_{L^p}\right| < \frac{a^{\frac{1}{p}-1}}{p} \left|\|y\|^p_{L^p} - \|P\|^p_{L^p}\right| < \frac{a^{\frac{1}{p}-1}}{p}(4\delta)^p.$$

С учетом неравенства $a \le \|y\|^p_{L^\infty} + (4\delta)^p$ получаем

$$\lim_{\delta \to +0} \|P\|_{L^p} = \|y\|_{L^p},$$

а следовательно,

$$\lim_{\delta \to +0} \Phi_+(P) = \Phi_+(y).$$

Значит, для любого ε можно так подобрать δ, что $|\Phi_+(y) - \Phi_+(P)| < \varepsilon$. Лемма доказана. $\square$

Перейдем к доказательству основной теоремы.

В случае $q = \infty$ справедливость теоремы следует из равенства $K_{p,\infty}(Q^3_+) = 2K_{p,\infty}(Q^3) = 2K_{p,\infty}(Q^1)$, доказанного в [5]. Поэтому далее в доказательстве предполагаем, что $q \ne \infty$.

Из леммы 3 следует, что при нахождении величины $K_{p,q}(Q^3_+)$ верхнюю грань функционала Φ_+ достаточно рассматривать на подмножестве функций из Q^3_+, сужение которых на отрезок $[-\pi,\pi]$ является многочленом. В силу периодичности можем считать, что функция $y \in Q^3_+$, являясь кусочно-полиномиальной на отрезке $[-\pi,\pi]$, равна нулю на концах отрезка.

Построим неубывающую функцию g с нулевым средним значением на отрезке $[-\pi,\pi]$, для которой справедливо неравенство $\Phi_+(g) > \Phi_+(y)$.

Обозначим E^+ и E^- множества точек $x \in (-\pi,\pi)$, для которых функция y принимает положительные и соответственно отрицательные значения. Из того, что среднее значение на отрезке $[-\pi,\pi]$ функции y равно нулю, следует, что эти множества непусты (если $y \not\equiv 0$).

Пусть функция y достигает своего минимального значения m в точке x_m и максимального значения M — в точке x_M. Обозначим a_1 наименьший нуль функции y, для которого $x_m < a_1$, и a_2 — наибольший нуль функции такой, что $a_2 < x_M$. Точки a_1, a_2 найдутся, так как функция y — кусочно-полиномиальная с нулевым средним значением. Рассмотрим непрерывную функцию y_1, определенную следующим образом:

$$y_1(x) = \begin{cases} m, & x \in [\tau_1, x_m - a_1], \\ y(x+a_1), & x \in [x_m - a_1, 0], \\ y(x+a_2), & x \in [0, x_M - a_2], \\ M, & x \in [x_M - a_2, \tau_2], \end{cases}$$

где τ_1 и τ_2 определяются из равенств

$$\int\limits_{E^-} y(x)dx = \int\limits_{\tau_1}^{0} y_1(x)dx, \qquad \int\limits_{E^+} y(x)dx = \int\limits_{0}^{\tau_2} y_1(x)dx. \tag{4.1}$$

Из равенств (4.1) следует, что среднее значение функции y_1 на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$ совпадает со средним значением на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции y и, следовательно, равно нулю. Представим первое равенство в (4.1) в следующем виде:

$$\int\limits_{E^-\setminus[x_m,a_1]} y(x)dx + \int\limits_{x_m}^{a_1} y(x)dx = \int\limits_{\tau_1}^{x_m-a_1} y_1(x)dx + \int\limits_{x_m-a_1}^{0} y_1(x)dx.$$

Так как вторые слагаемые левой и правой части равны, а первое слагаемое в правой части равно $m(x_m - a_1 - \tau_1)$, то в итоге получим следующее соотношение:

$$\int\limits_{E^-\setminus[x_m,a_1]} |y(x)|dx = |m|(x_m - a_1 - \tau_1). \tag{4.2}$$

Аналогично можно показать справедливость равенства

$$\int\limits_{E^+\setminus[a_2,x_M]} y(x)dx = M(\tau_2 - x_M + a_2). \tag{4.3}$$

Отметим, что длина отрезка $[\tau_1, \tau_2]$ меньше 2π. Действительно, выражая τ_1 и τ_2 из равенств (4.2) и (4.3), получим

$$\tau_2 - \tau_1 = x_M - a_2 + \frac{1}{M} \int\limits_{E^+\setminus[a_2,x_M]} y(x)dx + a_1 - x_m + \frac{1}{|m|} \int\limits_{E^-\setminus[x_m,a_1]} |y(x)|dx$$

$$< x_M - a_2 + |E^+| - (x_M - a_2) + (a_1 - x_m) + |E^-| - (a_1 - x_m) = |E^+| + |E^-| = 2\pi.$$

Убедимся, что содержащееся в этой цепочке соотношений неравенство действительно является строгим. Функция y — кусочно-полиномиальная, следовательно, существует множество ненулевой меры, на котором $0 < y(x) < M$. Поэтому

$$\int\limits_{E^+\setminus[a_2,x_M]} y(x)dx < M \left|E^+ \setminus [a_2, x_M]\right| = M \left(|E^+| - (x_M - a_2)\right).$$

И аналогично

$$\int\limits_{E^-\setminus[x_m,a_1]} |y(x)|dx < |m| \left|E^- \setminus [x_m, a_1]\right| = |m| \left(|E^-| - (a_1 - x_m)\right).$$

Нетрудно видеть, что $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} |(y_1'(x))_+|^q dx \le \|y_+'\|_{L^q}^q$. Равенство $\|y\|_{L^\infty} = \|y_1\|_{L^\infty}$ очевидно.

Докажем, что при $1 \le p < \infty$ справедливо неравенство $\|y\|_{L^p}^p \le \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} |y_1(x)|^p dx$. Действительно, используя равенства (4.2) и (4.3), получаем

$$2\pi\|y\|_{L^p}^p = \int\limits_{x_m}^{a_1} |y(x)|^p dx + \int\limits_{a_2}^{x_M} |y(x)|^p dx + \int\limits_{E^-\setminus[x_m,a_1]} |y(x)|^p dx + \int\limits_{E^+\setminus[a_2,x_M]} |y(x)|^p dx$$

$$\leq \int\limits_{x_m-a_1}^{0} |y_1(x)|^p dx + \int\limits_{0}^{x_M-a_2} |y_1(x)|^p dx + |m|^{p-1} \int\limits_{E^-\setminus[x_m,a_1]} |y(x)|dx + M^{p-1} \int\limits_{E^+\setminus[a_2,x_M]} |y(x)|dx$$

$$= \int\limits_{x_m-a_1}^{x_M-a_2} |y_1(x)|^p dx + |m|^p(x_m - a_1 - \tau_1) + M^p(\tau_2 - x_M + a_2)$$

$$= \int\limits_{x_m-a_1}^{x_M-a_2} |y_1(x)|^p dx + \int\limits_{\tau_1}^{x_m-a_1} |m|^p dx + \int\limits_{x_M-a_2}^{\tau_2} M^p dx = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} |y_1(x)|^p dx.$$

Построенная таким образом функция y_1 имеет единственный нуль в точке $x = 0$, положительна при $x \in (0, \tau_2]$ и отрицательна при $x \in [\tau_1, 0)$.

Предположим, что на интервале $(0, x_M - a_2)$ функция y_1 имеет точку локального максимума x_1, $y_1(x_1) = M_1$. Из непрерывности функции y_1 и неравенства $M_1 \leq M = y_1(x_M - a_2)$ следует, что на отрезке $[x_1, x_M - a_2]$ найдется точка x_2 такая, что $y_1(x_2) = M_1$ и для всех $x \in [x_1, x_2]$ справедливо неравенство $y_1(x) \leq M_1$. Рассмотрим функцию y_2, определенную формулой

$$y_2(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in [\tau_1, x_1], \\ M_1, & x \in [x_1, \tau], \\ y_1(x + x_2 - \tau), & x \in [\tau, \tau_2 - x_2 + \tau], \end{cases}$$

где точка τ выбирается таким образом, чтобы $\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2-x_2+\tau} y_2(x)dx = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} y_1(x)dx = 0$. При этом нетрудно видеть, что $\tau \leq x_2$, поэтому длина отрезка, на котором задана функция y_2, не превосходит длины отрезка $[\tau_1, \tau_2]$ и, следовательно, меньше 2π.

Аналогично доказанному выше можно показать справедливость неравенств

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2-x_2+\tau} |y_2(x)|^p dx \geq \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} |y_1(x)|^p dx, \qquad \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2-x_2+\tau} |(y_2'(x))_+|^q dx \leq \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} |(y_1'(x))_+|^q dx.$$

Функция y — кусочно-полиномиальная, следовательно, имеет на отрезке $[-\pi, \pi]$ конечное число интервалов монотонности. Тогда, повторяя эту схему рассуждений также и для промежутков убывания при $x < 0$, за конечное число шагов получим функцию y_N, определенную на некотором отрезке $[a, b]$ (длина которого меньше 2π), с нулевым средним значением и неубывающую на этом отрезке. При этом выполняются неравенства

$$\int\limits_{a}^{b} |y_N(x)|^p dx > \int\limits_{-\pi}^{\pi} |y(x)|^p dx, \qquad \int\limits_{a}^{b} |(y_N'(x))_+|^q dx \leq \int\limits_{-\pi}^{\pi} |y_+'(x)|^q dx.$$

Для функции $g(x) = y_N\left(\dfrac{b-a}{2\pi}x + \dfrac{b+a}{2}\right)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ выполняются равенства

$$\|g\|_{L^\infty} = \|y_N\|_{L^\infty} = \|y\|_{L^\infty},$$

$$\|g\|_{L^p} = \left(\frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b} |y_N(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|g_+'\|_{L^q} = \frac{b-a}{2\pi}\left(\frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b} |(y_N'(x))_+|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

При $1 \le p < \infty$ отсюда следует, что

$$\Phi_+(g) = \frac{\|g\|_{L^p}}{\|g'_+\|_{L^q}} = \frac{2\pi}{(b-a)^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}} \frac{\left(\int\limits_a^b |y_N(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\int\limits_a^b |(y'_N(x))_+|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}}$$

$$\ge \left(\frac{2\pi}{b-a}\right)^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \frac{\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |y(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |y'_+(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} = \left(\frac{2\pi}{b-a}\right)^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \Phi_+(y).$$

В случае $p = \infty$ получаем неравенство

$$\Phi_+(g) \ge \left(\frac{2\pi}{b-a}\right)^{1-\frac{1}{q}} \Phi_+(y).$$

С учетом того, что $b - a < 2\pi$ и $q \ge 1$, при всех $1 \le p \le \infty$ имеют место неравенства

$$\Phi_+(g) \ge \left(\frac{2\pi}{b-a}\right)^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \Phi_+(y) > \Phi_+(y).$$

Так как функция g не убывает на отрезке $[-\pi, \pi]$, то справедливо неравенство

$$\Phi_+(g) \le K_{p,q}(V).$$

Учитывая неравенство $K_{p,q}(V) \le 2K_{p,q}(Q^3)$, доказанное в теореме 2, получаем при $1 \le p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$

$$K_{p,q}(Q^3_+) \le 2K_{p,q}(Q^3). \tag{4.4}$$

При $p = 2$, $p = \infty$ и любом $1 \le q \le \infty$ выполняется равенство $K_{p,q}(Q^3_+) = 2K_{p,q}(Q^3)$, которое получается с учетом доказанной в следствии 1 оценки снизу. Теорема доказана. □

Докажем, что при $1 \le p \le \infty$ в неравенстве (1.12) экстремальной функции, принадлежащей классу $Q^3_+(q), 1 \le q \le \infty$, не существует. Предположим обратное — пусть $Y \in Q^3_+(q)$ есть экстремальная функция. Как было доказано в основной теореме, можно построить определенную на $[-\pi, \pi]$ и монотонную на этом отрезке функцию $\overline{Y}$ с нулевым средним значением, для которой верно неравенство $\Phi_+(\overline{Y}) > \Phi_+(Y)$.

Рассмотрим последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ периодических функций. Положим

$$a_n = -\pi + \frac{1}{n\overline{Y}(-\pi)}, \qquad b_n = \pi + \frac{1}{n\overline{Y}(\pi)}$$

и определим на отрезке $[a_n, b_n]$ функцию y_n соотношениями

$$y_n(x) = \begin{cases} \dfrac{a_n - x}{a_n + \pi}\overline{Y}(-\pi), & x \in [a_n, -\pi], \\ \overline{Y}(x), & x \in [-\pi, \pi], \\ \dfrac{b_n - x}{b_n - \pi}\overline{Y}(\pi), & x \in [\pi, b_n]; \end{cases}$$

продолжим эту функцию периодически с периодом $b_n - a_n$ на всю ось. Функция y_n непрерывна, монотонно возрастает на отрезке $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет свойству (1.3), что следует из свойств функции $\overline{Y}$ и выбора a_n, b_n.

Функция $g_n(x) = y_n\left(\dfrac{b_n - a_n}{2\pi}x + \dfrac{b_n + a_n}{2}\right)$ является 2π-периодической абсолютно непрерывной функцией, удовлетворяющей условию (1.3). Нетрудно проверить равенства

$$\|g_n\|_{L^\infty} = \|\overline{Y}\|_{L^\infty},$$

$$\|g_n\|^p_{L^p} = \frac{1}{b_n - a_n}\left(2\pi\|\overline{Y}\|^p_{L^p} + \frac{1}{n}\,\frac{|\overline{Y}(-\pi)|^{p-1} + |\overline{Y}(\pi)|^{p-1}}{p+1}\right), \qquad 1 \le p < \infty,$$

$$\|(g_n')_+\|_{L^\infty} = \frac{b_n - a_n}{2\pi}\|\overline{Y}'\|_{L^\infty},$$

$$\|(g_n')_+\|_{L^q} = \left(\frac{b_n - a_n}{2\pi}\right)^{1-\frac{1}{q}}\|\overline{Y}'\|_{L^q}, \qquad q \ne \infty.$$

В итоге получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_+(g_n) = \Phi_+(\overline{Y}), \qquad 1 \le p \le \infty, \qquad 1 \le q \le \infty.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N и, значит, функция g_N, для которой выполняется неравенство $\Phi_+(\overline{Y}) - \Phi_+(g_N) < \varepsilon$. Полагая $\varepsilon = \Phi_+(\overline{Y}) - \Phi_+(Y)$, получаем $\Phi_+(Y) < \Phi_+(g_N)$, что противоречит предположению об экстремальности функции Y.

Автор благодарит своего научного руководителя профессора В. В. Арестова за постановку задачи и внимание к работе, а также Е. Е. Бердышеву за внимательное прочтение статьи и ряд ценных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Харди Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г.** Неравенства. М.: ИЛ, 1948. 456 с.
2. **Mitrinoviĉ D.S., Pečariĉ J.E., Fink A.M.** Inequalities involving functions and their integrals and derivatives. Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1991. 587 p.
3. **Schmidt E.** Über die Ungleichung, welche die Integrale über eine Potenz einer Funktion und über eine andere Potenz ihrer Ableitung verbindet // Math. Ann. 1940. Vol. 117. P. 301–326.
4. **Владимиров В.С., Маркуш И.И.** Владимир Андреевич Стеклов — ученый и организатор науки. М.: Наука, 1981. 95 с.
5. **Корнейчук Н.П., Лигун А.А., Доронин В.Г.** Аппроксимация с ограничениями. Киев: Наукова думка, 1982. 252 с.
6. **Зёрнышкина Е.А.** Неравенство Шмидта между нормами функции и положительной срезки ее производной // Изв. Урал. гос. ун-та. 2006. № 44. С. 76–88.

Зёрнышкина Елена Александровна
ст. преподаватель
ОТИ МИФИ (ГУ)
e-mail: E.Zernyshkina@vm.oti.ru

Поступила 1.03.2008

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14 № 3 2008

УДК 517.5

ТОЧНОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЖЕКСОНА В ПРОСТРАНСТВЕ L_2 НА ОТРЕЗКЕ $[-1,1]$ СО СТЕПЕННЫМ ВЕСОМ[1]

В. И. Иванов, Д. В. Чертова, Лю Юнпин

В пространстве L_2 на отрезке $[-1,1]$ со степенным весом $|x|^{2\lambda+1}$, $\lambda \geq -1/2$ определяются полная ортогональная система, величина наилучшего приближения по этой системе, оператор обобщенного сдвига, модуль непрерывности и доказывается точное неравенство Джексона.

Ключевые слова: среднеквадратичное наилучшее приближение, обобщенный сдвиг, модуль непрерывности, оператор Штурма — Лиувилля.

Введение

Пусть $J_\lambda(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка λ, $\lambda \geq -1/2$, $0 < \mu_1 < \ldots < \mu_k < \ldots$ — положительные нули $J_\lambda(x)$,

$$j_\lambda(x) = 2^\lambda \Gamma(\lambda+1)\frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda}, \qquad j_\lambda(0) = 1,$$

— модифицированная функция Бесселя,

$$d\nu_\lambda(x) = |x|^{2\lambda+1}dx,$$

$$L_{2,\lambda}[-1,1] = \left\{ f : [-1,1] \to \mathbb{R} : \ \|f\|_{2,\lambda}^2 = \int_{-1}^{1} |f(x)|^2 d\nu_\lambda(x) < \infty \right\}$$

— гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f,g)_\lambda = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)d\nu_\lambda(x).$$

Аналогично определяется пространство $L_{2,\lambda}[a,b]$ на отрезке $[a,b]$.

Рассмотрим задачу Штурма — Лиувилля

$$(x^{2\lambda+1}y'(x))' + \rho^2 x^{2\lambda+1}y(x) = 0, \qquad y'(0) = y(1) = 0.$$

Ее собственные функции образуют полную ортогональную систему $\Phi_\lambda = \{\varphi_k(x) = j_\lambda(\mu_k x)\}_{k=1}^\infty$ в пространстве $L_{2,\lambda}[0,1]$ (см. [1, 2]). Аппроксимативные свойства этой системы изучались В. А. Абиловым и Ф. В. Абиловым [3]. В работе [4] для наилучших приближений по системе Φ_λ в пространстве $L_{2,\lambda}[0,1]$ доказано точное неравенство Джексона.

Функции $\varphi_k(x)$, $k = 1,2,\ldots$, являются четными аналитическими функциями, и замыкание полиномов по ним в пространстве $L_{2,\lambda}[-1,1]$ совпадает с подпространством четных функций.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 05-01-39005, 06-01-00372) и Национального фонда естественных наук Китая (проект 10471010).

Наша цель — показать, что система $\Psi_\lambda = \{\psi_k(x) = j'_\lambda(\mu_k x)\}_{k=1}^\infty$ является полной ортогональной системой в подпространстве $L_{2,\lambda}[-1,1]$ нечетных функций и доказать точное неравенство Джексона в пространстве $L_{2,\lambda}[-1,1]$ для наилучших приближений по системе $(\Phi_\lambda, \Psi_\lambda)$.

Если $\lambda = -1/2$, то $\mu_k = \pi(k-1/2)$, $\varphi_k(x) = \cos\pi(k-1/2)x$, $\psi_k(x) = \sin\pi(k-1/2)x$, и система

$$(\Phi_{-1/2}, \Psi_{-1/2}) = \{\cos\pi(k-1/2)x, \sin\pi(k-1/2)x\}_{k=1}^\infty$$

является возмущением 2-периодической тригонометрической системы. Точное неравенство Джексона в пространстве L_2 периодических функций доказал Н. И. Черных [5].

Отметим, что точное неравенство Джексона в пространстве L_2 на полупрямой со степенным весом $x^{2\lambda+1}$ было доказано независимо А. Г. Бабенко [6] и А. В. Московским [7]. Оно было перенесено [8] на случай пространства L_2 на прямой с весом $|x|^{2\lambda+1}$.

Условимся писать $A << B$, если $A \le c(\lambda)B$.

1. Полнота и ортогональность системы $(\Phi_\lambda, \Psi_\lambda)$ в $L_{2,\lambda}[-1,1]$

Теорема 1. *При $\lambda \ge -1/2$ система $(\Phi_\lambda, \Psi_\lambda)$ является полной ортогональной системой в пространстве $L_{2,\lambda}[-1,1]$ и выполняются равенства*

$$(\varphi_k, \varphi_k)_\lambda = (\psi_k, \psi_k)_\lambda, \qquad k = 1, 2, \dots \tag{1.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать ортогональность и полноту системы Ψ_λ в пространстве $L_{2,\lambda}[0,1]$.

Для функций $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, выполняются равенства

$$\left(x^{2\lambda+1}\varphi'_k(x)\right)' + \mu_k^2 x^{2\lambda+1}\varphi_k(x) = 0. \tag{1.2}$$

Отсюда

$$\left(x^{2\lambda+1}j'_\lambda(\mu_k x)\right)' + \mu_k x^{2\lambda+1} j_\lambda(\mu_k x) = 0. \tag{1.3}$$

Согласно (1.3) для всех k и l

$$\int\limits_0^1 \psi_k(x)\psi_l(x)d\nu_\lambda(x) = \int\limits_0^1 j'_\lambda(\mu_k x)j'_\lambda(\mu_l x)x^{2\lambda+1}\,dx = \frac{1}{\mu_l}\int\limits_0^1 x^{2\lambda+1}j'_\lambda(\mu_k x)dj_\lambda(\mu_l x)$$

$$= \frac{1}{\mu_l}x^{2\lambda+1}j'_\lambda(\mu_k x)j_\lambda(\mu_l x)\Big|_0^1 - \frac{1}{\mu_l}\int\limits_0^1 j_\lambda(\mu_l x)(x^{2\lambda+1}j'_\lambda(\mu_k x))'dx = \frac{\mu_k}{\mu_l}\int\limits_0^1 j_\lambda(\mu_l x)j_\lambda(\mu_k x)d\nu_\lambda(x).$$

Если $k \ne l$, то получаем ортогональность системы Ψ_λ, а если $k = l$, то получаем равенства (1.1).

Пусть $f(x) \in L_{2,\lambda}[0,1]$ и для всех $k = 1, 2, \dots$

$$\int\limits_0^1 f(x)\psi_k(x)d\nu_\lambda(x) = 0. \tag{1.4}$$

Предположим, что для функции $F(x) = \int\limits_x^1 f(t)dt$ справедливы равенства

$$\int\limits_0^1 f(x)\psi_k(x)d\nu_\lambda(x) = -\mu_k\int\limits_0^1 F(x)\varphi_k(x)d\nu_\lambda(x). \tag{1.5}$$

Тогда из (1.4) для всех $k=1,2,\dots$

$$\int\limits_0^1 F(x)\varphi_k(x)d\nu_\lambda(x)=0,$$

поэтому из полноты системы Φ_λ в пространстве $L_{2,\lambda}[0,1]$ заключаем, что $F(x)=0$ почти всюду. Отсюда и $f(x)=0$ почти всюду.

Остается доказать равенства (1.5). Для $0<\alpha<1$ рассмотрим функции:

$$f_\alpha(x)=\begin{cases} f(x), & \alpha\le x\le 1,\\ 0, & 0\le x<\alpha,\end{cases}\qquad F_\alpha(x)=\int\limits_x^1 f_\alpha(t)\,dt.$$

Для всех $x>0$

$$\lim_{\alpha\to+0} f_\alpha(x)=f(x),\qquad \lim_{\alpha\to+0} F_\alpha(x)=F(x),$$

$$|f_\alpha(x)|\le|f(x)|,\qquad |F_\alpha(x)|\le\int\limits_x^1|f(t)|\,dt. \tag{1.6}$$

Так как $F_\alpha(x)$ — абсолютно непрерывные функции, то согласно (1.3)

$$\int\limits_0^1 f_\alpha(x)\psi_k(x)d\nu_\alpha(x)=\int\limits_0^1 f_\alpha(x)x^{2\lambda+1}j_\alpha'(\mu_kx)\,dx=-\int\limits_0^1 x^{2\lambda+1}j_\lambda'(\mu_kx)dF_\alpha(x)$$

$$=-x^{2\lambda+1}j_\lambda'(\mu_kx)F_\alpha(x)\Big|_0^1+\int\limits_0^1 F_\alpha(x)(x^{2\lambda+1}j_\lambda'(\mu_kx))'\,dx$$

$$=-\mu_k\int\limits_0^1 F_\alpha(x)j_\lambda(\mu_kx)x^{2\lambda+1}\,dx=-\mu_k\int\limits_0^1 F_\alpha(x)\varphi_k(x)d\nu_\lambda(x). \tag{1.7}$$

Так как $f\in L_{2,\lambda}[0,1]$, то

$$\int\limits_0^1|f(x)|x^{2\lambda+1}\,dx<\infty,\qquad \int\limits_0^1\Big(\int\limits_x^1|f(t)|\,dt\Big)x^{2\lambda+1}\,dx=\int\limits_0^1|f(t)|\Big(\int\limits_0^t x^{2\lambda+1}\,dx\Big)\,dt<\infty,$$

поэтому (1.4) вытекает из (1.6), (1.7) и теоремы Лебега об ограниченной сходимости.Теорема доказана. □

Пусть для $k=1,2,\dots$

$$(\varphi_k,\varphi_k)_\lambda=(\psi_k,\psi_k)_\lambda=\frac{1}{d_k}.$$

Любая функция $f\in L_{2,\lambda}[-1,1]$ может быть разложена в ряд Фурье по системе $(\Phi_\lambda,\Psi_\lambda)$:

$$f(x)=\sum_{k=1}^\infty(a_k\varphi_k(x)+b_k\psi_k(x)). \tag{1.8}$$

Коэффициенты Фурье вычисляются по формулам:

$$a_k=a_k(f)=d_k(f,\varphi_k)_\lambda,\qquad b_k=b_k(f)=d_k(f,\psi_k)_\lambda.$$

Равенство Парсеваля имеет вид

$$\|f\|_{2,\lambda}^2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{d_k}\big(|a_k|^2+|b_k|^2\big).$$

Величину наилучшего приближения функции $f\in L_{2,\lambda}[-1,1]$ определим равенством

$$E_n(f)_{2,\lambda}=\min_{\alpha_k,\beta_k}\left\|f(x)-\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\varphi_k(x)+\beta_k\psi_k(x))\right\|_{2,\lambda}. \tag{1.9}$$

Имеем

$$E_n^2(f)_{2,\lambda}=\left\|f(x)-\sum_{k=1}^{n}(a_k\varphi_k(x)+b_k\psi_k(x))\right\|_{2,\lambda}^2=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{d_k}\big(|a_k|^2+|b_k|^2\big). \tag{1.10}$$

Наша цель — получить точную оценку для (1.9) через модуль непрерывности функции. Для определения модуля непрерывности нам необходим оператор обобщенного сдвига [9]. Определим его равенством

$$T^tf(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t)(a_k\varphi_k(x)+b_k\psi_k(x)),\qquad t\in\mathbb{R}. \tag{1.11}$$

Так как $|\varphi_k(t)|\le 1$ [10], то оператор T^t для всех t является ограниченным оператором из $L_{2,\lambda}[-1,1]$ в $L_{2,\lambda}[-1,1]$ и его норма $\|T^t\|=1$. Для записи (1.11) в интегральной форме нам понадобится продолжение функции $f\in L_{2,\lambda}[-1,1]$ на всю прямую.

2. Продолжение функций из $L_{2,\lambda}[-1,1]$

Теорема 2. *Для любых $\lambda\ge -1/2$, $a>1$ и любой функции $f\in L_{2,\lambda}[-1,1]$ ряд Фурье* (1.8) *сходится в пространстве $L_{2,\lambda}[-a,a]$.*

Доказательство. Пусть

$$c_{kl}^1=\frac{1}{\|\varphi_k\|_{2,\lambda}\|\varphi_l\|_{2,\lambda}}\int_{-a}^{a}\varphi_k(x)\varphi_l(x)d\nu_\lambda(x),\qquad c_{kl}^2=\frac{1}{\|\psi_k\|_{2,\lambda}\|\psi_l\|_{2,\lambda}}\int_{-a}^{a}\psi_k(x)\psi_l(x)d\nu_\lambda(x).$$

Доказательство теоремы состоит в проверке ограниченности двух квадратичных форм

$$\sum_{k,l=1}^{\infty}c_{kl}^ia_ka_l,\qquad i=1,2,\qquad \text{при условии}\qquad \sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\le 1.$$

Ограниченность квадратичной формы эквивалентна ограниченности соответствующей билинейной формы. Достаточным условием ограниченности билинейной формы

$$\sum_{k,l=1}^{\infty}c_{kl}a_kb_l\qquad\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\le 1,\qquad \sum_{l=1}^{\infty}b_k^2\le 1\right)$$

является сходимость ряда

$$\sum_{k,l=1}^{\infty}c_{kl}^2<\infty. \tag{2.1}$$

Мы будем использовать известные факты [11] ограниченности билинейных форм Гильберта с коэффициентами

$$\frac{1}{k+l+\beta} \quad \text{при} \quad \beta > -2, \qquad \frac{1}{k-l} \quad \text{при} \quad k \neq l. \tag{2.2}$$

Отметим следующее: если билинейная форма с коэффициентами c_{kl} ограниченная и ограничены последовательности $\{\alpha_k\}, \{\beta_l\}$, то билинейная форма

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} c_{kl}\alpha_k\beta_l a_k b_l \tag{2.3}$$

— также ограниченная.

Воспользовавшись формулами [12, формулы 9.1.30; 9.5.4; 11.4.5]

$$\left(\frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda}\right)' = -\frac{J_{\lambda+1}(x)}{x^\lambda}, \tag{2.4}$$

$$\int_0^1 xJ_\lambda^2(\mu_k x)\,dx = \frac{1}{2}J_{\lambda+1}^2(\mu_k),$$

равенствами (1.1), определением функции $j_\lambda(x)$, получим

$$c_{kl}^i = \frac{2}{|J_{\lambda+1}(\mu_k)||J_{\lambda+1}(\mu_l)|}\int_0^a xJ_{\lambda-1+i}(\mu_k x)J_{\lambda-1+i}(\mu_l x)\,dx, \qquad i = 1, 2. \tag{2.5}$$

Справедливы асимптотические формулы [12, формулы 9.2.1; 9.5.12]

$$\mu_k = \pi\left(k + \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{4}\right) + O\left(\frac{1}{k}\right), \qquad k \to \infty, \tag{2.6}$$

$$J_\alpha(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\cos\left(x - \frac{\pi\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right)\right\} \qquad (\alpha = \lambda, \lambda+1, \quad x \to \infty). \tag{2.7}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}|J_{\lambda+1}(\mu_k)| &= \sqrt{\frac{2}{\pi\mu_k}}\left|\cos\left(\pi(k-1) + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) + O\left(\frac{1}{k}\right)\right| \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi\mu_k}}\left\{1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right\}, \qquad k \to \infty. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Согласно [12, формула 11.3.29] при $k \neq l$

$$\int_0^a xJ_\alpha(\mu_k x)J_\alpha(\mu_l x)dx = \frac{a}{\mu_k^2 - \mu_l^2}\Big\{\mu_k J_{\alpha+1}(\mu_k a)J_\alpha(\mu_l a) - \mu_l J_\alpha(\mu_k a)J_{\alpha+1}(\mu_l a)\Big\}. \tag{2.9}$$

Применяя (2.6), (2.7), получаем

$$\begin{aligned}&\int_0^a xJ_\alpha(\mu_k x)J_\alpha(\mu_l x)dx \\ &= \frac{2}{\pi\sqrt{\mu_k\mu_l}(\mu_k^2 - \mu_l^2)}\Bigg\{\mu_k\cos\left(\mu_k a - \frac{\pi(\alpha+1)}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\mu_l a - \frac{\pi\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &- \mu_l\cos\left(\mu_k a - \frac{\pi\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\mu_l a - \frac{\pi(\alpha+1)}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{(\mu_k+\mu_l)^2}{\mu_k\mu_l}\right)\Bigg\}\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\pi\sqrt{\mu_k\mu_l}(\mu_k^2-\mu_l^2)}\biggl\{\mu_k\Bigl(\cos\Bigl((\mu_k-\mu_l)a-\frac{\pi}{2}\Bigr)+\cos\left((\mu_k+\mu_l)a-\pi(\alpha+1)\right)\Bigr)$$

$$-\mu_l\Bigl(\cos\Bigl((\mu_k-\mu_l)a+\frac{\pi}{2}\Bigr)+\cos\left((\mu_k+\mu_l)a-\pi(\alpha+1)\right)\Bigr)+O\left(\frac{(\mu_k+\mu_l)^2}{\mu_k\mu_l}\right)\biggr\}$$

$$= \frac{2}{\pi\sqrt{\mu_k\mu_l}(\mu_k^2-\mu_l^2)}\biggl\{(\mu_k+\mu_l)\sin(\mu_k-\mu_l)a-(\mu_k-\mu_l)\cos\Bigl((\mu_k+\mu_l)a-\pi\alpha\Bigr)$$

$$+O\left(\frac{(\mu_k+\mu_l)^2}{\mu_k\mu_l}\right)\biggr\} = \frac{2}{\pi\sqrt{\mu_k\mu_l}}\biggl\{\frac{\sin(\mu_k-\mu_l)a}{\mu_k-\mu_l}-\frac{\cos(\mu_k+\mu_l)a}{\mu_k+\mu_l}\cos\pi\alpha$$

$$-\frac{\sin(\mu_k+\mu_l)a}{\mu_k+\mu_l}\sin\pi\alpha+O\left(\frac{\mu_k+\mu_l}{|\mu_k-\mu_l|\mu_k\mu_l}\right)\biggr\}.$$

Тогда при $k\neq l$ из (2.5) имеем

$$c_{kl}^i = 2\biggl\{\frac{\sin(\mu_k-\mu_l)a}{\mu_k-\mu_l}-\frac{\cos(\mu_k+\mu_l)a}{\mu_k+\mu_l}\cos\pi\alpha-\frac{\sin(\mu_k+\mu_l)a}{\mu_k+\mu_l}\sin\pi\alpha$$

$$+O\left(\frac{\mu_k+\mu_l}{|\mu_k-\mu_l|\mu_k\mu_l}\right)\biggr\}\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right)\left(1+O\left(\frac{1}{l}\right)\right),$$

где $\alpha=\lambda$ при $i=1$ и $\alpha=\lambda+1$ при $i=2$.

Так как

$$\mu_k-\mu_l=\pi(k-l)\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right)\left(1+O\left(\frac{1}{l}\right)\right),$$

$$\mu_k+\mu_l=\pi\left(k+l+\lambda-\frac{1}{2}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right)\left(1+O\left(\frac{1}{l}\right)\right),$$

$$\sum_{k\neq l}\frac{(\mu_k+\mu_l)^2}{(\mu_k-\mu_l)^2\mu_k^2\mu_l^2}=2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=k+1}^{\infty}\frac{(\mu_k+\mu_l)^2}{(\mu_l-\mu_k)^2\mu_k^2\mu_l^2}\le 8\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k^2}\sum_{l=k+1}^{\infty}\frac{1}{(\mu_l-\mu_k)^2}<\infty,$$

то ограниченность билинейных форм

$$\sum_{k\neq l}c_{kl}^i a_k b_l, \qquad i=1,2,$$

вытекает из (2.1)–(2.3).

Остается доказать ограниченность последовательности $\{c_{kk}^i\}$. Из (2.9) следует, что

$$2\int_0^a xJ_\alpha^2(\mu_k x)dx=\frac{a}{\mu_k}\Bigl\{J_\alpha(\mu_k a)J_{\alpha+1}(\mu_k a)+\mu_k a(J_\alpha(\mu_k a)J'_{\alpha+1}(\mu_k a)-J'_\alpha(\mu_k a)J_{\alpha+1}(\mu_k a))\Bigr\}.$$

Применяя формулы (см. [12, формулы 9.1.27])

$$J'_\alpha(x)=-J_{\alpha+1}(x)+\frac{\alpha}{x}J_\alpha(x), \qquad J'_{\alpha+1}(x)=J_\alpha(x)-\frac{\alpha+1}{x}J_{\alpha+1}(x),$$

получаем

$$2\int_0^a xJ_\alpha^2(\mu_k x)dx=\frac{a}{\mu_k}\biggl\{J_\alpha(\mu_k a)J_{\alpha+1}(\mu_k a)+\mu_k a\biggl(J_\alpha(\mu_k a)\left(J_\alpha(\mu_k a)-\frac{\alpha+1}{\mu_k a}J_{\alpha+1}(\mu_k a)\right)$$

$$- \Big(- J_{\alpha+1}(\mu_k a) + \frac{\alpha}{\mu_k a} J_\alpha(\mu_k a)\Big) J_{\alpha+1}(\mu_k a)\Big)\Big\}$$

$$= \frac{a}{\mu_k}\Big\{ - 2\alpha J_\alpha(\mu_k a) J_{\alpha+1}(\mu_k a) + \mu_k a (J_\alpha^2(\mu_k a) + J_{\alpha+1}^2(\mu_k a))\Big\}. \tag{2.10}$$

Отсюда и из (2.5)

$$c_{kk}^i = \frac{a}{\mu_k J_{\lambda+1}^2(\mu_k)}\Big\{ - 2\alpha J_\lambda(\mu_k a) J_{\alpha+1}(\mu_k a) + \mu_k a (J_\alpha^2(\mu_k a) + J_{\alpha+1}^2(\mu_k a))\Big\}.$$

Так как согласно (2.7), (2.8)

$$J_{\lambda+1}^2(\mu_k) >> \frac{1}{\mu_k}, \qquad |J_\alpha(\mu_k a)| << \frac{1}{\sqrt{\mu_k a}},$$

то

$$|c_{kk}^i| << a.$$

Теорема доказана. □

Согласно теореме 2 ряд Фурье (1.8) осуществляет естественное продолжение функции $f(x)$ с отрезка $[-1,1]$ на всю прямую. Это продолжение, используемое в дальнейшем, также будем обозначать через $f(x)$. Для любого $a>0$ функция $f(x)\in L_{2,\lambda}[-a,a]$. Теорема 2 для $a=3$ и четных функций была анонсирована в [4]. Доказательство теоремы 2 проведено Д. В. Чертовой.

3. Оператор обобщенного сдвига и модуль непрерывности в $L_{2,\lambda}[-1,1]$

Оператор обобщенного сдвига в пространстве L_2 на полупрямой со степенным весом $x^{2\lambda+1}$, $\lambda>-1/2$, имеет вид [9, 10]

$$T_1^t f(x) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda+1/2)} \int_0^\pi f\big(\sqrt{x^2+t^2-2xt\cos\varphi}\big)\sin^{2\lambda}\varphi\, d\varphi.$$

Формула умножения

$$T_1^t j_\lambda(\rho x) = j_\lambda(\rho t) j_\lambda(\rho x) \tag{3.1}$$

была доказана Л. Гегенбауэром [10]. Распространение оператора обобщенного сдвига на пространство L_2 на прямой со степенным весом $|x|^{2\lambda+1}$, $\lambda>-1/2$, было осуществлено в [8]:

$$T_1^t f(x) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+1/2)} \int_0^\pi \Big\{f(A)(1+B) + f(-A)(1-B)\Big\}\sin^{2\lambda}\varphi d\varphi, \tag{3.2}$$

где

$$A = \sqrt{x^2+t^2-2xt\cos\varphi}, \qquad B = (x - t\cos\varphi)/A. \tag{3.3}$$

Если $|x|\le 1$, то $A\le 1+|t|$ и $\pm A$ может выходить за пределы отрезка $[-1,1]$. Покажем, что если под $f(x)$ вне отрезка $[-1,1]$ понимать ее продолжение в соответствии с теоремой 2, то формула (3.2) дает интегральное представление для оператора обобщенного сдвига T^t (1.11) в пространстве $L_{2,\lambda}[-1,1]$.

Теорема 3. *Если $\lambda>-1/2$, $f\in L_{2,\lambda}[-1,1]$, $t\in\mathbb{R}$, то для оператора обобщенного сдвига* (1.11)

$$T^t f(x) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+1/2)} \int_0^\pi \Big\{f(A)(1+B) + f(-A)(1-B)\Big\}\sin^{2\lambda}\varphi d\varphi, \tag{3.4}$$

где A,B определены в (3.3) *и вне отрезка* $[-1,1]$ $f(x)$ *задается рядом Фурье* (1.8).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (3.1), (1.11)

$$T^t\varphi_k(x)=\varphi_k(t)\varphi_k(x)=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+1/2)}\int\limits_0^\pi \varphi_k(A)\sin^{2\lambda}\varphi\,d\varphi, \tag{3.5}$$

что совпадает с (3.4). Дифференцируя обе части равенства (3.5) по x, получаем

$$T^t\psi_k(x)=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+1/2)}\int\limits_0^\pi \psi_k(A)B\sin^{2\lambda}\varphi\,d\varphi,$$

что также совпадает с (3.4). Значит, (3.4) верно для полиномов по системе $(\Phi_\lambda,\Psi_\lambda)$. Остается показать, что если функция $f\in L_{2,\lambda}[-1,1]$,

$$S_N(x)=\sum_{k=1}^N(a_k\varphi_k(x)+b_k\psi_k(x))$$

— частичная сумма ее ряда Фурье, то при $N\to\infty$

$$\left\|\int\limits_0^\pi\Big\{(f(A)-S_N(A))(1+B)+(f(-A)-S_N(-A))(1-B)\Big\}\sin^{2\lambda}\varphi d\varphi\right\|_{2,\lambda}\to 0. \tag{3.6}$$

Удобно это сделать отдельно для четных и нечетных функций.

Пусть сначала $f(x)$ — четная функция, $t>0$. Нам нужно доказать равенство

$$T^tf(x)=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+1/2)}\int\limits_0^\pi f(A)\sin^{2\lambda}\varphi\;d\varphi. \tag{3.7}$$

Сделав в интеграле (3.7) замену переменной $y=\sqrt{x^2+t^2-2xt\cos\varphi}$, получим

$$\int\limits_0^\pi f(A)\sin^{2\lambda}\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2^{2\lambda-1}}\int\limits_{|x-t|}^{x+t}f(y)V(x,t,y)y^{2\lambda+1}\,dy,$$

где

$$V(x,t,y)=\frac{\{(x+t+y)(x+t-y)(x-t+y)(-x+t+y)\}^{\lambda-1/2}}{(xty)^{2\lambda}}\geq 0.$$

Для (3.6) достаточно доказать неравенство

$$\left(\int\limits_0^1\left(\int\limits_{|x-t|}^{x+t}f(y)V(x,t,y)d\nu_\lambda(y)\right)^2d\nu_\lambda(x)\right)^{1/2}\leq c(t)\left(\int\limits_0^{1+t}f^2(y)d\nu_\lambda(y)\right)^{1/2}. \tag{3.8}$$

Пусть $0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq 1+t$, фиксированное $t>0$,

$$\chi(x,t,y)=\begin{cases}1, & \text{если}\quad |x-t|\leq y\leq x+t,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Имеем

$$\left(\int\limits_0^1\left(\int\limits_{|x-t|}^{x+t}f(y)V(x,t,y)d\nu_\lambda(y)\right)^2d\nu_\lambda(x)\right)^{1/2}=\sup\int\limits_0^1\int\limits_0^{1+t}f(y)g(x)V(x,t,y)\chi(x,t,y)d\nu_\lambda(y)d\nu_\lambda(x),$$

где точная верхняя грань берется по всем функциям $g \in L_{2,\lambda}[0,1]$, для которых

$$\int_0^1 g^2(x)d\nu_\lambda(x) \le 1.$$

Применяя неравенство Коши — Буняковского, получим

$$\int_0^1 \int_0^{1+t} f(y)g(x)V(x,t,y)\chi(x,t,y)d\nu_\lambda(y)d\nu_\lambda(x) \le \Bigg(\int_0^{1+t} f^2(y)\int_0^1 V(x,t,y)\chi(x,t,y)d\nu_\lambda(x)d\nu_\lambda(y)\Bigg)^{1/2}$$

$$\times \Bigg(\int_0^1 g^2(x)\int_0^{1+t} V(x,t,y)\chi(x,t,y)d\nu_\lambda(y)d\nu_\lambda(x)\Bigg)^{1/2}.$$

Поэтому в неравенстве (3.8) можно взять константу $c(t) = \sqrt{c_1(t)c_2(t)}$, где

$$c_1(t) = \sup_{0\le x\le 1} \int_0^{1+t} V(x,t,y)\chi(x,t,y)d\nu_\lambda(y),$$

$$c_2(t) = \sup_{0\le y\le 1+t} \int_0^1 V(x,t,y)\chi(x,t,y)d\nu_\lambda(x).$$

Оценим $c_1(t)$. Имеем

$$I_1 = \int_0^{1+t} V(x,t,y)\chi(x,t,y)d\nu_\lambda(y) = \int_{|x-t|}^{x+t} V(x,t,y)d\nu_\lambda(y)$$

$$= \frac{1}{(xt)^{2\lambda}} \int_{|x-t|}^{x+t} y\Big\{(x+t+y)(x+t-y)(x-t+y)(-x+t+y)\Big\}^{\lambda-1/2}dy.$$

Так как $V(x,t,y),\ \chi(x,t,y)$ симметричны относительно x и t, то можно считать $t \ge x$. Делая в последнем интеграле замену переменной $z = y + x - t$, получим

$$I_1 = \frac{1}{(xt)^{2\lambda}} \int_0^{2x} (z+t-x)\Big\{(z+2t)(2x-z)(z+2(t-x))z\Big\}^{\lambda-1/2}dz$$

$$<< \frac{1}{x^{2\lambda}} \int_0^{2x} \Big\{(2x-z)z\Big\}^{\lambda-1/2}dz << \frac{1}{x^{\lambda+1/2}} \int_0^x z^{\lambda-1/2}dz + \frac{1}{x^{\lambda+1/2}} \int_x^{2x} (2x-z)^{\lambda-1/2}dz << 1.$$

Итак,

$$c_1(t) << 1.$$

Оценим $c_2(t)$. Так как

$$\Big\{(x,y):\ |x-t| \le y \le x+t, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1+t\Big\}$$

$$\subset \Big\{(x,y):\ |y-t| \le x \le y+t, \quad 0 \le x \le 1+2t, \quad 0 \le y \le 1+t\Big\},$$

то, как и при оценке $c_1(t)$,

$$I_2 = \int\limits_0^1 V(x,t,y)\chi(x,t,y)x^{2\lambda+1}dx \le \int\limits_{|y-t|}^{y+t} V(x,t,y)x^{2\lambda+1}dx = \int\limits_{|y-t|}^{y+t} V(y,t,x)x^{2\lambda+1}dx << 1.$$

Отсюда

$$c_2(t) << 1.$$

Значит, (3.8) верно с константой, зависящей только от λ. Равенство (3.7) доказано.

Пусть теперь $f(x)$ — нечетная функция. Нам нужно доказать равенство

$$T^t f(x) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda+1/2)} \int\limits_0^\pi f(A)B\sin^{2\lambda}\varphi\, d\varphi,$$

где A и B определены в (3.3). Оно вытекает из (3.7), так как

$$|B| = \frac{|x-t\cos\varphi|}{A} \le 1. \tag{3.9}$$

Действительно,

$$1-B^2 = 1-\frac{(x-t\cos\varphi)^2}{x^2+t^2-2xt\cos\varphi} = \frac{t^2\sin^2\varphi}{x^2+t^2-2xt\cos\varphi} \ge 0.$$

Теорема доказана. □

Нетрудно убедиться, что при $\lambda = -1/2$

$$T^t f(x) = \frac{1}{2}\{f(x+t)+f(x-t)\}.$$

Отметим некоторые свойства оператора обобщенного сдвига T^t (1.11):

$$\text{если } f(x)\ge 0, \text{ то } T^t f(x) \ge 0; \tag{3.10}$$

$$T^0 f(x) = f(x); \tag{3.11}$$

$$T^t 1 = 1; \tag{3.12}$$

$$T^t\varphi_k(x) = \varphi_k(t)\varphi_k(x), \qquad T^t\psi_k(x) = \varphi_k(t)\psi_k(x); \tag{3.13}$$

$$(T^t f, g)_\lambda = (f, T^t g)_\lambda, \text{ в частности,} \int\limits_{-1}^1 T^t f(x)d\nu_\lambda(x) = \int\limits_{-1}^1 f(x)d\nu_\lambda(x); \tag{3.14}$$

$$\text{если } \delta>0,\ |\rho|+\delta\le 1,\ \mathrm{supp}\, f\subset[-\delta,\delta], \text{ то } \mathrm{supp}\, T^\rho f \subset [-|\rho|-\delta, |\rho|+\delta]. \tag{3.15}$$

Свойство (3.10) вытекает из (3.4) и (3.9). Свойства (3.11), (3.13) вытекают из определения (1.11). Свойство (3.12) вытекает из (3.4). Свойство (3.14) вытекает из (1.11), (3.12) и равенства Парсеваля

$$(f,g)_\lambda = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{d_k}\big(a_k(f)a_k(g)+b_k(f)b_k(g)\big). \tag{3.16}$$

Если $|x| > |\rho|+\delta$, то

$$x^2+\rho^2-2\rho x\cos\varphi \ge x^2+\rho^2-2|\rho||x| = (|x|-|\rho|)^2 > \delta^2,$$

поэтому $A>\delta$, $-A<-\delta$ и $T^\rho f(x) = 0$. Свойство (3.15) доказано.

Для $\lambda > -1/2$ и функции $f \in L_{2,\lambda}[-1,1]$ имеем

$$\Omega^2(t,f)_{2,\lambda} = \int_{-1}^{1} (T_y^t|f(y)-f(x)|^2)\Big|_{y=x} d\nu_\lambda(x)$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda+1/2)} \int_{-1}^{1}\int_{0}^{\pi} \Big\{|f(A)-f(x)|^2(1+B)+|f(-A)-f(x)|^2(1-B)\Big\} \sin^{2\lambda}\varphi d\varphi\ d\nu_\lambda(x).$$

Аналогично для $\lambda = -1/2$

$$\Omega^2(t,f)_{2,-1/2} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \Big\{|f(x+t)-f(x)|^2+|f(x-t)-f(x)|^2\Big\}dx = \int_{-1}^{1}|f(x+t)-f(x)|^2dx.$$

Модуль непрерывности функции $f \in L_{2,\lambda}[-1,1]$ определим равенством

$$\omega(\delta,f)_{2,\lambda} = \sup\big\{\Omega(t,f)_{2,\lambda}\colon\ |t|\le\delta\big\}. \tag{3.17}$$

Согласно (3.14), (3.12), (3.16), (1.8)

$$\Omega^2(t,f)_{2,\lambda} = \int_{-1}^{1} \Big\{T^tf^2(x)+f^2(x)T^t1-2f(x)T^tf(x)\Big\}d\nu_\lambda(x)$$

$$= 2\left\{\int_{-1}^{1} f^2(x)d\nu_\lambda(x) - \int_{-1}^{1} f(x)T^tf(x)d\nu_\lambda(x)\right\} = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{d_k}(1-\varphi_k(t))(a_k^2+b_k^2). \tag{3.18}$$

Отсюда

$$\omega^2(\delta,f)_{2,\lambda} = 2\sup_{|t|\le\delta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{d_k}(1-\varphi_k(t))(a_k^2+b_k^2). \tag{3.19}$$

Следуя Х. П. Рустамову [13], определим другой модуль непрерывности. С помощью оператора обобщенного сдвига определим разностный оператор Δ_t. Если E — единичный оператор, то положим

$$\Delta_tf(x) = (E-T^t)^{1/2}f(x) = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\binom{1/2}{s}(T^t)^sf(x).$$

Модуль непрерывности определим так:

$$\omega_1(\delta,f)_{2,\lambda} = \sup\big\{\|\Delta_tf(x)\|_{2,\lambda}\colon\ |t|\le\delta\big\}.$$

Этот модуль непрерывности использовался в [4, 6, 7].

Так как

$$(T^t)^sf(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k^s(t)(a_k\varphi_k(x)+b_k\psi_k(x)),$$

то

$$\Delta_tf(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{1-\varphi_k(t)}(a_k\varphi_k(x)+b_k\psi_k(x)),$$

и

$$\omega_1^2(\delta,f)_{2,\lambda} = \sup_{|t|\le\delta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{d_k}(1-\varphi_k(x))(a_k^2+b_k^2).$$

Отсюда и из (3.19) вытекает равенство

$$2\omega_1^2(\delta,f)_{2,\lambda} = \omega^2(\delta,f)_{2,\lambda}.$$

4. Точное неравенство Джексона в $L_{2,\lambda}[-1,1]$

Теорема 4. *Для любого* $\lambda \geq -1/2$ *и любой функции* $f \in L_{2,\lambda}[-1,1]$ *справедливо точное неравенство*

$$E_n(f)_{2,\lambda} < \frac{1}{\sqrt{2}}\omega\left(\frac{2\mu_1}{\mu_{n+1}}, f\right)_{2,\lambda}. \tag{4.1}$$

Доказательство. Докажем оценку сверху. Схема доказательства оценки сверху является стандартной и восходит к работе Н. И. Черных [5]. Для полноты проведем соответствующие рассуждения.

Согласно (3.18), (1.10) для $f \in L_{2,\lambda}[-1,1]$

$$\Omega^2(t,f)_{2,\lambda} = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{d_k}(1-\varphi_k(t))(a_k^2+b_k^2)$$

$$\geq 2\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{d_k}(1-\varphi_k(t))(a_k^2+b_k^2) = 2E_n^2(f)_{2,\lambda} - 2\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{d_k}\varphi_k(t)(a_k^2+b_k^2). \tag{4.2}$$

Пусть для функции $W(x) \in L_{2,\lambda}[-1,1]$ выполнены условия:

$$W \text{ — четная неотрицательная функция,} \tag{4.3}$$

$$\operatorname{supp} W \subset [-\delta,\delta], \qquad 0<\delta\leq 1, \tag{4.4}$$

$$a_k(W) \leq 0, \qquad k \geq n+1. \tag{4.5}$$

Такую функцию называют весом. Умножая обе части (4.2) на $W(x)$ и интегрируя, согласно (1.8), (4.3)–(4.5) получаем

$$\int_{-\delta}^{\delta}\Omega^2(t,f)_{2,\lambda}W(t)d\nu_\lambda(t) \geq 2E_n^2(f)_{2,\lambda}\int_{-\delta}^{\delta}W(t)d\nu_\lambda(t) - 2\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{d_k}(a_k^2+b_k^2)\int_{-1}^{1}W(t)\varphi_k(t)d\nu_\lambda(t)$$

$$= 2E_n^2(f)_{2,\lambda}\int_{-\delta}^{\delta}W(t)d\nu_\lambda(t) - 2\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{d_k^2}(a_k^2+b_k^2)a_k(W) \geq 2E_n^2(f)_{2,\lambda}\int_{-\delta}^{\delta}W(t)d\nu_\lambda(t). \tag{4.6}$$

Отсюда и из (3.17) вытекает неравенство Джексона

$$E_n(f)_{2,\lambda} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\left(\int\limits_{-\delta}^{\delta}\Omega^2(t,f)_{2,\lambda}W(t)d\nu_\lambda(t)\right)^{1/2}}{\left(\int\limits_{-\delta}^{\delta}W(t)d\nu_\lambda(t)\right)^{1/2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\omega(\delta,f)_{2,\lambda}. \tag{4.7}$$

Построим вес $W(x)$. Пусть τ_{n+1} — наименьший положительный нуль $\varphi_{n+1}(x) = j_\lambda(\mu_{n+1}x)$. Очевидно, что $\tau_{n+1} = \mu_1/\mu_{n+1}$. Рассмотрим четную неотрицательную функцию

$$V(x) = \begin{cases}\varphi_{n+1}(x), & \text{если} \quad |x| \leq \tau_{n+1},\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Для нее $\operatorname{supp} V \subset [-\tau_{n+1}, \tau_{n+1}]$ и согласно (2.9), (2.4) при $k > n+1$

$$\frac{a_k(V)}{d_k} = \int_{-1}^{1} V(x)\varphi_k(x)d\nu_\lambda(x) = 2\int_0^{\tau_{n+1}} j_\lambda(\mu_k x)j_\lambda(\mu_{n+1}x)d\nu_\lambda(x)$$

$$= \frac{2^{2\lambda+1}\Gamma^2(\lambda+1)}{(\mu_k\mu_{n+1})^\lambda}\int_0^{\tau_{n+1}} xJ_\lambda(\mu_k x)J_\lambda(\mu_{n+1}x)dx$$

$$= \frac{2^{2\lambda+1}\Gamma^2(\lambda+1)}{(\mu_k\mu_{n+1})^\lambda(\mu_k^2-\mu_{n+1}^2)}J_\lambda(\mu_k\tau_{n+1})J_{\lambda+1}(\mu_1) = \frac{2\tau_{n+1}^{2\lambda+1}}{\mu_k^2-\mu_{n+1}^2}\varphi_k(\tau_{n+1})\varphi'_{n+1}(\tau_{n+1}). \tag{4.8}$$

Переходя к пределу в (4.8) при $\mu_k \to \mu_{n+1}$, получим

$$\frac{a_{n+1}(V)}{d_{n+1}} = \frac{\tau_{n+1}^{2\lambda+3}}{\mu_1^2}(\varphi'_{n+1}(\tau_{n+1}))^2. \tag{4.9}$$

Положим $W(x) = T^{\tau_{n+1}}V(x)$. Согласно (3.10), (3.13), (3.15), (4.8), (4.9) $W(x)$ — четная неотрицательная функция, $\operatorname{supp} W \subset [-2\tau_{n+1}, 2\tau_{n+1}]$,

$$a_{n+1}(W) = \frac{\tau_{n+1}^{2\lambda+3}d_{n+1}}{\mu_1^2}\varphi_{n+1}(\tau_{n+1})(\varphi'_{n+1}(\tau_{n+1}))^2 = 0,$$

$$a_k(W) = \frac{2\tau_{n+1}^{2\lambda+1}d_{n+1}}{\mu_k^2-\mu_{n+1}^2}\varphi_k^2(\tau_{n+1})\varphi'_{n+1}(\tau_{n+1}) < 0, \qquad k > n+1, \tag{4.10}$$

так как $\varphi'_{n+1}(\tau_{n+1}) < 0$.

Для веса $W(x)$ выполнены условия (4.3)–(4.5) при $\delta = 2\tau_{n+1}$, и мы получаем неравенство Джексона

$$E_n(f)_{2,\lambda} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\omega(2\tau_{n+1}, f)_{2,\lambda}.$$

Согласно (4.10) равенства в (4.6) возможны только для функций $a\varphi_{n+1}(x) + b\psi_{n+1}(x)$, но для таких функций последнее неравенство в (4.7) строгое, поэтому верно строгое неравенство (4.1).

Докажем оценку снизу. Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим семейство четных функций

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon. \end{cases}$$

Согласно (3.10), (3.18)

$$\Omega^2(t,f)_{2,\lambda} = 2\big\{\|f_\varepsilon\|_{2,\lambda}^2 - (T^t f_\varepsilon, f_\varepsilon)_\lambda\big\} \le 2\|f_\varepsilon\|_{2,\lambda}^2 = 4\int_0^\varepsilon d\nu_\lambda(x) = 4\nu_\lambda(\varepsilon),$$

и для всех $\delta > 0$

$$\omega^2(\delta, f_\varepsilon)_{2,\lambda} \le 4\nu_\lambda(\varepsilon). \tag{4.11}$$

Далее

$$|a_k(f_\varepsilon)| = d_k\left|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi_k(x)d\nu_\lambda(x)\right| \le d_k\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d\nu_\lambda(\varepsilon) = 2d_k\nu_\lambda(\varepsilon)$$

и согласно (1.10)

$$E_n^2(f_\varepsilon)_{2,\lambda} = \|f_\varepsilon\|_{2,\lambda}^2 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{d_k}a_k^2(f_\varepsilon) \ge 2\nu_\lambda(\varepsilon) - 4\sum_{k=1}^n d_k\nu_\lambda^2(\varepsilon) = 2\nu_\lambda\Big(1 - 2\sum_{k=1}^n d_k\nu_\lambda(\varepsilon)\Big).$$

Отсюда (так как $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0}\nu_\lambda(\varepsilon)=0$) и из (4.11) для любого $\delta>0$

$$\sup_{\varepsilon>0}\frac{E_n^2(f_\varepsilon)_{2,\lambda}}{\omega^2(\delta,f_\varepsilon)_{2,\lambda}}\ge\frac{1}{2}\sup_{\varepsilon>0}\left\{1-2\sum_{k=1}^n d_k\nu_\lambda(\varepsilon)\right\}=\frac{1}{2}.$$

Оценка снизу установлена. Теорема доказана. □

Для четных функций теорема 4 была доказана в [4].

Для $\lambda=-1/2$ имеем

$$\bigl(\Phi_{-1/2},\Psi_{-1/2}\bigr)=\bigl\{\cos\pi(k-1/2)x,\sin\pi(k-1/2)x\bigr\}_{k=1}^\infty,\qquad \tau_{n+1}=\frac{1}{2n+1}.$$

Для $\lambda=1/2$, $\mu_k=\pi k$

$$\bigl(\Phi_{1/2},\Psi_{1/2}\bigr)=\left\{\frac{\sin\pi kx}{\pi kx},\frac{\pi kx\cos\pi kx-\sin\pi kx}{(\pi kx)^2}\right\}_{k=1}^\infty,\qquad \tau_{n+1}=\frac{1}{n+1}.$$

Из теоремы 4 получаем следствия.

Следствие 1. *Для любой функции $f\in L_{2,-1/2}[-1,1]$ справедливо точное неравенство*

$$E_n(f)_{2,-1/2}<\frac{1}{\sqrt{2}}\omega\left(\frac{2}{2n+1},f\right)_{2,-1/2}. \tag{4.12}$$

Следствие 2. *Для любой функции $f\in L_{2,1/2}[-1,1]$ справедливо точное неравенство*

$$E_n(f)_{2,1/2}<\frac{1}{\sqrt{2}}\omega\left(\frac{2}{n+1},f\right)_{2,1/2}.$$

Пусть $L_2[-1,1]$ — гильбертово пространство 2-периодических функций с нормой

$$\|f\|_2=\|f\|_{2,-1/2}=\left(\int_{-1}^1 f^2(x)dx\right)^{1/2},$$

$$E_n(f)_2=\min_{a_k,b_k}\left\|f(x)-\sum_{k=0}^n(a_k\cos\pi kx+b_k\sin\pi kx)\right\|_2,$$

$$\omega(\delta,f)_2=\sup\bigl\{\|f(x+t)-f(x)\|_2:|t|\le\delta\bigr\}.$$

Неравенство (4.12) интересно сравнить с неравенством Н. И. Черных в $L_2[-1,1]$:

$$E_n(f)_2<\frac{1}{\sqrt{2}}\omega\left(\frac{1}{n+1},f\right)_2.$$

Отметим, что размерности соответствующих подпространств равны:

$$\dim\mathfrak{L}(\{1,\cos\pi x,\sin\pi x,\dots,\cos\pi nx,\sin\pi nx\})=2n+1,$$

$$\dim\mathfrak{L}(\{cos\pi(x/2),\sin\pi(x/2),\dots,\cos\pi(n-1/2)x,\sin\pi(n-1/2)x\})=2n.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Левитан Б.М., Саргсян И.С.** Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970. 671 с.
2. **Наймарк М.А.** Линейные дифференциальные операторы. 2-е изд. М.: Наука, 1969. 528 с.
3. **Абилов В.А., Абилов Ф.В.** Приближение функций суммами Фурье – Бесселя // Изв. вузов. Сер. Математика. 2001. № 8. С. 3–9.
4. **Liu Y.** Best L_2-approximation of functions on $[0,1]$ with the weight $x^{2\nu+1}$ // Тр. междунар. летн. мат. шк. С. Б. Стечкина по теории функций. Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. С. 180–190.
5. **Черных Н.И.** О неравенстве Джексона в L_2 // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 88. С. 71–74.
6. **Бабенко А.Г.** Точное неравенство Джексона — Стечкина в пространстве $L^2(\mathbb{R}^m)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1998. Т. 5. С. 183–198.
7. **Московский А.В.** Теоремы Джексона в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$ и $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+)$ // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 1997. Т. 3, вып. 1. С. 44–70.
8. **Чертова Д.В.** Теорема Джексона в пространстве L_2 на прямой со степенным весом // Материалы 8-й междунар. Казан. летн. науч. шк.-конф. Казань: Изд-во Казан. мат. о-ва. 2007. Т. 35. С. 267–268.
9. **Левитан Б.М.** Теория операторов обобщенного сдвига. М.: Наука, 1973. 312 с.
10. **Ватсон Г.Н.** Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: ИЛ, 1949. 800 с.
11. **Харди Г.Г., Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г.** Неравенства. М.: ИЛ, 1948. 456 с.
12. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
13. **Рустамов Х.П.** О приближении функций на сфере // Изв. РАН. Сер. мат. 1993. Т. 57, № 5. С. 127–148.

Иванов Валерий Иванович
д-р физ.-мат. наук, проф.
декан мех.-мат. фак.
Тул. гос. ун-т
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Поступила 17.03.2008

Чертова Дарья Вячеславовна
аспирант
Тул. гос. ун-т
e-mail: dasha@lim.ru

Liu Yongping
Prof.
Beijing Normal University (BNU)
School of Mathematical Sciences
e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14 № 3 2008

УДК 517.17

ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНЫЕ ГРАФЫ С УСЛОВИЕМ ХОФФМАНА[1]

В. В. Кабанов, С. В. Унегов

Известно, что если граф имеет в качестве своего минимального собственного значения число -2, то он удовлетворяет условию Хоффмана: для любого порожденного полного двудольного подграфа $K_{1,3}$ (3-лапы) с долями $\{p\}$ и $\{q_1, q_2, q_3\}$ любая вершина, отличная от p и смежная с вершинами q_1 и q_2, смежна с вершиной p, но не смежна с вершиной q_3. В работе доказывается обратное утверждение для вполне регулярных графов, содержащих 3-лапу и удовлетворяющих условию $\mu > 1$.

Ключевые слова: вполне регулярные графы, сильно регулярные графы, графы с наименьшим собственным значением -2.

Введение

В данной статье усиливаются результаты работы авторов [2], где исследован случай сильно регулярных графов.

Всюду далее рассматриваются только конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер, а слово “подграф” означает порожденный подграф, т. е. подграф, две вершины которого смежны в том и только в том случае, если эти вершины смежны в исходном графе.

Через $\Gamma_i(x)$ будем обозначать множество всех вершин графа, находящихся на расстоянии i от вершины x.

Окрестность вершины x, т. е. множество $\Gamma_1(x)$, будем обозначать через $[x]$, а объединение $[x] \cup \{x\}$ через $x^{\perp}$.

Граф называется *регулярным* валентности k, если число вершин в $[x]$ не зависит от выбора вершины x и равно k.

Пересечение $[x] \cap [y]$ для двух различных вершин x и y будем обозначать через $\Lambda(x, y)$, если x и y смежны, и через $M(x, y)$ в противном случае.

Если вершины x и y находятся на расстоянии 2 друг от друга, то подграф, порожденный множеством $M(x, y)$, будем называть *μ-подграфом* вершин x и y. Для удобства множество $M(x, y)$ будем отождествлять с порожденным им μ-подграфом.

Граф Γ называется *вполне регулярным*, если существует четверка чисел (v, k, λ, μ) (параметры Γ) таких, что выполняются следующие условия:

Γ является регулярным валентности k графом на v вершинах;

$|\Lambda(x, y)| = \lambda$ для любых двух смежных вершин x и y;

$|M(x, y)| = \mu$ для любых двух вершин x и y, находящихся на расстоянии 2.

Сильно регулярным графом называется вполне регулярный граф диаметра 2.

m-лапой будем называть полный двудольный граф $K_{1,m}$ с долями порядка 1 и m при $m \geq 2$. Через $\{p; q_1, \ldots, q_m\}$ обозначается m-лапа с долями $\{p\}$ и $\{q_1, \ldots, q_m\}$.

Реберным графом $\mathcal{L}(\Gamma)$ графа Γ будем называть граф, множество вершин которого взаимно однозначно отображается на множество ребер исходного графа Γ так, что две вершины из $\mathcal{L}(\Gamma)$ смежны в том и только в том случае, если смежны соответствующие ребра исходного графа Γ.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 05-01-00046), РФФИ-БРФФИ (проект 08-01-90006) и РФФИ-ГФЕН Китая (проект 08-01-92200).

Говорят, что граф получен переключением графа Γ относительно множества вершин X, если множество его вершин совпадает с множеством вершин графа Γ, а любые две его вершины смежны тогда и только тогда, когда они либо не смежны в исходном графе и ровно одна из них содержится в X, либо смежны в исходном графе и обе содержатся или не содержатся в X.

Реберный граф $\mathcal{L}(K_n)$ полного графа K_n называется треугольным графом и обозначается через $T(n)$. Этот граф является сильно регулярным графом с параметрами $(n(n-1)/2,$ $2(n-2),\ n-2,\ 4)$. Л. С. Чанг и А. Дж. Хоффман в работах [4,6,7] показали, что любой сильно регулярный граф с параметрами треугольного графа изоморфен треугольному графу $T(n)$ за исключением случая $n = 8$, когда кроме графа $T(8)$ существует ровно три графа с теми же параметрами. Эти три графа мы будем называть графами Чанга. Все они могут быть получены из $T(8)$ переключением относительно следующих множеств вершин:

любых четырех попарно не смежных вершин;

любых восьми вершин, порождающих непересекающиеся 3-цикл и 5-цикл;

любых 12 вершин, порождающих реберный граф для 8-цикла со смежными антиподальными вершинами.

Аналогичный результат получил С. С. Шрикханде [9] для реберного графа $\mathcal{L}(K_{n,n})$, называемого решетчатым $(n\times n)$-графом и являющегося сильно регулярным графом с параметрами $(n^2,\ 2n-2,\ n-2,\ 2)$. С. С. Шрикханде показал, что любой сильно регулярный граф с такими параметрами изоморфен решетчатому $(n \times n)$-графу, кроме случая $n = 4$, когда существует еще один граф с такими же параметрами, который мы будем называть графом Шрикханде. Последний можно получить из (4×4)-графа переключением относительно любых восьми вершин, порождающих 8-цикл.

Под матрицей смежности графа Γ будем понимать матрицу $A = (a_{ij})$, строки и столбцы которой перенумерованы вершинами графа Γ, причем $a_{ij} = 1$, если ij является ребром в Γ, и $a_{ij} = 0$ в противном случае. Собственными значениями графа будем называть собственные значения его матрицы смежности.

Для всякого сильно регулярного графа с параметрами (v, k, λ, μ) кроме собственного значения, равного k, есть еще ровно два действительных собственных значения разных знаков [3]. В частности, если -2 является собственным значением сильно регулярного графа, то оно является минимальным собственным значением графа.

Дж. Дж. Зейдель в [8] определил все сильно регулярные графы, для которых -2 является собственным значением. Список таких графов исчерпывается треугольными графами, тремя графами Чанга, решетчатыми $(n \times n)$-графами, графом Шрикханде, дополнительными графами к лестничным графам, графом Шлефли, графом Клебша и графом Петерсена. Определения последних графов можно найти в работе [8].

Будем говорить, что граф Γ удовлетворяет *условию Хоффмана*, если для любой 3-лапы $\{p; q_1, q_2, q_3\}$ из графа Γ любая вершина r, отличная от p и смежная с q_1 и q_2, смежна с вершиной p, но не смежна с вершиной q_3. Очевидно, что условие Хоффмана не тривиально только для тех графов, в которых найдется хотя бы одна 3-лапа и $\mu > 1$.

В работе [6] доказывается, что любой граф (даже не сильно регулярный), имеющий минимальное собственное значение, равное -2, удовлетворяет условию Хоффмана. Пользуясь этим фактом, М. Д. Хестенс и Д. Г. Хигман в работе [5] нашли полный список сильно регулярных графов с минимальным собственным значением -2.

В настоящей работе доказывается, что справедлива следующая

Теорема. *Если граф Γ является вполне регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ), где $\mu > 1$, содержит 3-лапу и удовлетворяет условию Хоффмана, то -2 является минимальным собственным значением графа Γ, а граф Γ является сильно регулярным графом.*

Приводимое в настоящей работе доказательство существенно отличается от доказательства из [2], не опирается на последнее и может быть интересно само по себе.

Среди сильно регулярных графов, для которых -2 является собственным значением, только граф Шрикханде и три графа Чанга содержат 3-лапу и удовлетворяют условию $\mu > 1$. Отсюда и из теоремы очевидным образом вытекает

Следствие. *Если граф Γ является вполне регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ), где $\mu > 1$, содержит 3-лапу и удовлетворяет условию Хоффмана, то Γ является либо графом Шрикханде, либо любым из трех графов Чанга.*

1. Графы, содержащие 3-лапу

В данном разделе будем считать, что граф Γ является вполне регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ), содержит 3-лапу и удовлетворяет условию Хоффмана.

Для произвольной максимальной (по включению) m-лапы $\{p; q_1, \ldots, q_m\}$ из графа Γ, где $m \geq 3$, введем обозначения:

$$Q_i = \Big(\Lambda(q_i, p) \setminus \bigcup_{j \neq i} [q_j]\Big) \cup \{q_i\}, \quad 1 \leq i \leq m; \qquad M_{ij} = M(q_i, q_j) \setminus \{p\}, \quad 1 \leq i < j \leq m.$$

Из определений вытекают следующие два утверждения.

Лемма 1.1. *Окрестность $[p]$ совпадает с объединением*

$$\textstyle\bigcup_{1 \leq i \leq m} Q_i \cup \bigcup_{1 \leq j < k \leq m} M_{jk},$$

и любые два множества из семейства $\{Q_i | 1 \leq i \leq m\} \cup \{M_{jk} | 1 \leq j < k \leq m\}$ не пересекаются.

Лемма 1.2. $|M_{ij}| = \mu - 1, \quad |Q_i| = \lambda - (m-1)(\mu - 1) + 1 \geq 1.$

Следующие два утверждения доказываются аналогично леммам 1.3, 1.4 из [2].

Лемма 1.3. $k = m(\lambda + 1) - \binom{m}{2}(\mu - 1).$

Лемма 1.4. *Если $acbd$ — четырехугольник в графе Γ, то $a^\perp \cup b^\perp = c^\perp \cup d^\perp$.*

Лемма 1.5. *Если $m > 3$, то в графе Γ не содержится четырехугольников.*

Доказательство. Пусть в графе Γ содержится четырехугольник $acbd$. В силу леммы 1.4 имеем $[a] \subseteq b^\perp \cup c^\perp$ и, следовательно, $k \leq 2\lambda + 2$. По лемме 1.3 получим, что $m(\lambda+1) - \binom{m}{2}(\mu - 1) \leq 2\lambda + 2$, или $(m-2)(\lambda+1) \leq \binom{m}{2}(\mu - 1)$. Далее, пользуясь леммой 1.2 и учитывая, что $|Q_i| > 0$, получим неравенство $(m-1)(\mu-1) < \lambda+1 \leq (\mu-1)m(m-1)/(2(m-2))$. Следовательно, $m/(2(m-2)) > 1$, что возможно только при $m = 3$. □

2. Графы, содержащие максимальную 3-лапу

В данном разделе будем полагать, что граф Γ является вполне регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ), содержит максимальную 3-лапу $\{p; q_1, q_2, q_3\}$ и удовлетворяет условию Хоффмана. Тогда $[p] = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup M_{12} \cup M_{13} \cup M_{23}$, при этом $|M_{12}| = |M_{13}| = |M_{23}| = \mu - 1$, $|Q_1| = |Q_2| = |Q_3| = \lambda - 2\mu + 3$ и $k = 3(\lambda - \mu) + 6$.

Лемма 2.1. *Если граф Γ содержит четырехугольник $acbd$, то величина $\lambda - 2\mu + 3$ равна* 1.

Доказательство. Пусть в графе Γ содержится в качестве подграфа некоторый четырехугольник $acbd$. Введем следующие обозначения: $B = M(c,d) \setminus a^{\perp}$, $C = ([c] \setminus B) \setminus a^{\perp}$, $D = ([d] \setminus B) \setminus a^{\perp}$. Заметим, что $|C| = |D| = k - \lambda - 1 - |B|$. По лемме 1.4 множества B, C и D включаются в множество $b^{\perp}$. Более того, окрестность $[b]$ можно представить в виде дизъюнктного объединения $(B \setminus \{b\}) \cup C \cup D \cup M(a,b)$, а значит, $k = |B| - 1 + 2(k - \lambda - 1 - |B|) + \mu$. Учитывая, что $k = 3(\lambda - \mu) + 6$, вычислим количество элементов во множествах B, C и D: $|B| = k - 2\lambda + \mu - 3 = \lambda - 2\mu + 3$, $|C| = |D| = 3(\lambda - \mu) + 6 - \lambda - 1 - (\lambda - 2\mu + 3) = \lambda - \mu + 2$. Если $|B| > 1$, то во множестве B найдется отличная от b вершина b'. Поскольку B является кликой, что вытекает из леммы 1.4, то $\lambda = |\Lambda(b,b')| \geq |B| - 2 + |C| + |D| = \lambda - 2\mu + 3 - 2 + 2(\lambda - \mu + 2) = 3\lambda - 4\mu + 5$. Следовательно, $2\lambda \leq 4\mu - 5$, или $\lambda \leq 2\mu - 5/2$. С другой стороны, по лемме 1.2, $\lambda - 2\mu + 3 \geq 1$, или $\lambda \geq 2\mu - 2$. Полученное противоречие показывает, что $|B| = 1$ и, значит, величина $\lambda - 2\mu + 3$ равна 1. □

Лемма 2.2. *Если $\lambda - 2\mu + 3 = 1$, $\mu > 1$ и $acbd$ — четырехугольник в графе Γ, то $\Gamma_3(a) = \varnothing$.*

Доказательство. Предположим, что $\Gamma_3(a) \neq \varnothing$, и возьмем вершину e из $\Gamma_3(a)$. Пусть $afge$ — 3-путь, соединяющий вершины a и e. Заметим, что в силу условия Хоффмана $M(a,g)$ является полным графом. В то же время μ-подграф $M(a,b)$ содержит две несмежные вершины. Поэтому вершину f всегда можно подобрать так, чтобы она не была смежна с вершиной b. В дальнейшем будем считать, что вершина f не смежна с b.

Предположим, что $g \in [b]$. Тогда $g \in c^{\perp} \cup d^{\perp}$. Для определенности будем полагать, что $g \in [c]$. Докажем, что в μ-подграфе $M(c,e)$ найдется вершина, не смежная с вершиной g. Предположим противное — пусть $M(c,e) \subseteq g^{\perp}$. Тогда $M(c,e) \setminus \{g\} \subseteq \Lambda(c,g)$. С другой стороны, так как $M(a,g)$ является полным графом, $M(a,g) \setminus \{c\} \subseteq \Lambda(c,g)$. Заметив, что $M(a,g) \cap M(c,e) = \varnothing$ и $b \in \Lambda(c,g) \setminus (M(a,g) \cup M(c,e))$, получим неравенство $\mu - 1 \leq \lambda - (\mu - 1) - 1$. Но по условию $\lambda - 2\mu + 3 = 1$, значит, $\mu - 1 \leq (2\mu - 2) - (\mu - 1) - 1$, чего быть не может. Таким образом, в μ-подграфе $M(c,e)$ найдется вершина, не смежная с вершиной g. Однако это, в свою очередь, противоречит выбору вершины $e \in \Gamma_3(a)$ и условию Хоффмана. В результате можно считать, что для любого 3-пути $afge$ вершина g не смежна с b.

Предположим теперь, что $g \in \Gamma_2(b)$. Отметим, что $c \notin \Gamma_2(e)$, иначе найдется 3-путь $acxe$ для некоторой вершины $x \in [b]$. Аналогично $d \notin \Gamma_2(e)$. Стало быть, b не может находиться на расстоянии 2 от e. Кроме того, поскольку $e \in \Gamma_3(a)$, то $e \notin [b]$. Значит, $e \in \Gamma_3(b)$.

Если $\lambda - 2\mu + 3$ равно 1, то окрестность любой вершины p, входящей в 3-лапу $\{p; q_1, q_2, q_3\}$, представляется в виде

$$[p] = \{q_1, q_2, q_3\} \cup M_{12} \cup M_{13} \cup M_{23}. \qquad (*)$$

В силу условия Хоффмана $\big|[a] \cap [b] \cap [g]\big| \leq 1$. Рассмотрим два случая:

1. $[a] \cap [b] \cap [g] = \{x\}$. Так как $\{x; a, b, g\}$ является 3-лапой, то $[x] \subseteq a^{\perp} \cup b^{\perp} \cup \{g\}$ в силу $(*)$. Однако $\mu > 1$, следовательно, в μ-подграфе $M(x,e)$ содержится отличная от g вершина y, которая смежна или с a, или с b. Но тогда $e \in \Gamma_2(a) \cup \Gamma_2(b)$ — противоречие.

2. $[a] \cap [b] \cap [g] = \varnothing$. Поскольку или c, или d попадают в $M(b,f)$, найдется вершина f' из $M(b,g)$, не смежная с вершиной f. Рассмотрим 3-лапу $\{g; e, f, f'\}$. Учитывая представление $(*)$ и тот факт, что μ-подграфы $M(a,g)$ и $M(b,g)$ полные, получим $(M(a,g) \cup M(b,g)) \setminus \{f, f'\} \subseteq M(f,f') \setminus \{g\}$. Значит, $\mu - 1 + \mu - 1 \leq \mu - 1$, или $\mu \leq 1$ — противоречие.

Таким образом, для любого 3-пути $afge$ вершина g не может быть на расстоянии 2 от вершины b. Выходит, что $g \in \Gamma_3(b)$, так как от вершины b до вершины g находится 3-путь $bxfg$, где $x \in \{c,d\}$. А это противоречиво из-за того, что $f \in [a]$, и в ранее рассмотренном случае вершины a и b можно поменять ролями.

В результате $\Gamma_3(a) = \varnothing$. □

Лемма 2.3. *Если $\lambda - 2\mu + 3 = 1$, $\mu > 1$ и $acbd$ — четырехугольник в графе Γ, то граф Γ имеет диаметр 2.*

Доказательство. Пусть $acbd$ — четырехугольник в графе Γ. По лемме 2.2 $|\Gamma_3(a)| = 0$. Поскольку граф Γ вполне регулярен, то для любой вершины x справедливо равенство $|\Gamma_2(x)|\mu = k(k-\lambda-1)$, которое можно получить, вычисляя двумя различными способами количество ребер между окрестностью $[x]$ и дополнением к $x^{\perp}$. Это значит, что для любой вершины x имеем $|\Gamma_3(x)| \leq v-1-k-|\Gamma_2(x)| = v-1-k-|\Gamma_2(a)| = 0$, что доказывает утверждение леммы. □

Следующая лемма доказана в работе [2] (лемма 2.7).

Лемма 2.4. *Если граф* Γ *сильно регулярен и* $\lambda - 2\mu + 3 = 1$, *то минимальное собственное значение графа* Γ *равно* -2.

Доказательство теоремы. Напомним, что *графом Тервиллигера* называется неполный граф, в котором все μ-подграфы имеют одинаковое число вершин и являются полными графами. *Короной* называется полный многодольный граф $K_{1,1,3}$.

Очевидно, что если граф удовлетворяет условию Хоффмана, то в нем не содержится корон. Рассматриваемый граф Γ не является полным графом, и, так как граф Γ вполне регулярен, в нем все μ-подграфы равномощны. Если же помимо этого в графе Γ не содержится четырехугольников, то он будет графом Тервиллигера. В работе [1] доказывается, что $\mu = 1$ для всякого графа Тервиллигера, не содержащего корон и содержащего 3-лапу. Таким образом, рассматриваемый граф Γ обязательно содержит некоторый четырехугольник. Из этого и из леммы 1.5 вытекает, что $m = 3$ для всякой максимальной m-лапы из графа Γ. Теперь, комбинируя результаты лемм 2.1–2.4, приходим к выводу, что граф Γ является сильно регулярным графом, имеющим минимальное собственное значение -2. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кабанов В.В., Махнев А.А., Падучих Д.В.** О графах без корон с регулярными μ-подграфами. II // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 3. С. 375–384.
2. **Кабанов В.В., Унегов С.В.** Сильно регулярные графы с условием Хоффмана // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 3. С. 54–61.
3. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. New York: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
4. **Chang L.C.** Association schemes of partially balanced block designs with parameters $v = 28$, $n_1 = 12$, $n_0 = 15$ and $p^2_{11} = 4$ // Sci. Record. 1950. Vol 4. P. 12–18.
5. **Hestens M.D., Higman D.G.** Rank 3 groups and strongly regular graphs // SIAM-AMS Proc. 1971. Vol. 4. P. 141–159.
6. **Hoffman A.J.** On the uniqueness of the triangular association scheme // Ann. Math. Statist. 1960. Vol. 31. P. 492–497.
7. **Hoffman A.J.** On the exceptional case in a characterization of the arcs of complete graphs // IBM J. Res. Develop. 1960. Vol. 4. P. 487–496.
8. **Seidel J.J.** Strongly regular graphs with $(-1, 1, 0)$ adjacency matrix having eigenvalue 3 // Linear Alg. Appl. 1968. Vol. 1. P. 281–298.
9. **Shrickhande S.S.** The uniqueness of the L_2 association scheme // Ann. Math. Statist. 1959. Vol. 30. P. 781–798.

Поступила 09.09.2008

Кабанов Владислав Владимирович
д-р физ.-мат. наук, проф.
зам. директора
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: vvk@imm.uran.ru

Унегов Степан Валерьевич
математик, аспирант
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: uneg@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14 № 3 2008

УДК 517.518

О СХОДИМОСТИ ЖАДНЫХ АППРОКСИМАНТОВ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ[1]

С. В. Конягин

В работе обсуждаются эффективные версии критерия Коши сходимости в L_p жадных аппроксимантов тригонометрических рядов Фурье.

Ключевые слова: тригонометрический ряд Фурье, жадные аппроксимации.

1. Постановка задач и формулировка результатов

Пусть $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ — одномерный тор, $L(\mathbb{T})$ — пространство интегрируемых по Лебегу функций $\mathbb{T} \to \mathbb{C}$. Каждой функции $f \in L(\mathbb{T})$ сопоставляется ее тригонометрический ряд Фурье

$$f \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)e^{ikx},$$

где

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} f(x)e^{-ikx}dx.$$

Для $1 \le p < \infty$ через $L_p(\mathbb{T})$ обозначается пространство функций $f \in L(\mathbb{T})$, для которых величина

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

является конечной. Для непрерывных функций $f\colon\ \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ обозначим

$$\|f\|_\infty = \max_x |f(x)|.$$

Мы изучаем следующий нелинейный метод суммирования рядов Фурье. Пусть $f \in L(\mathbb{T})$ и $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим множество $\Lambda_m \subset \mathbb{Z}$ со следующими свойствами:

$$\min_{k\in\Lambda_m} |\widehat{f}(k)| \ge \max_{k\notin\Lambda_m} |\widehat{f}(k)|, \qquad |\Lambda_m| = m.$$

Тригонометрические полиномы

$$G_m(f) := S_{\Lambda_m}(f) := \sum_{k\in\Lambda_m} \widehat{f}(k)e^{ikx}$$

называются *жадными аппроксимантами* функции f порядка m относительно тригонометрической системы $\mathcal{T} := \{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Ясно, что жадные аппроксиманты порядка m всегда существуют, но могут быть не единственными.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00208) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-3233.2008.1).

В [1] для $p \neq 2$ и в [2] для $p < 2$ было доказано, что существует функция $f \in L_p(\mathbb{T})$, для которой аппроксиманты $\{G_m(f)\}$ не сходятся в L_p. Далее в [3] было замечено, что метод работы [1] дает больше: (1) существует непрерывная функция f такая, что ни для какого $p > 2$ жадные аппроксиманты не сходятся в $L_p(\mathbb{T})$; (2) существует функция $f \in \bigcap\limits_{1 \le p < 2} L_p(\mathbb{T})$ такая, что $\{G_m(f)\}$ не сходятся по мере. Отметим, что в этих и нижеследующих примерах все числа $|\widehat{f}(k)|$ можно сделать различными, так что жадные аппроксиманты $G_m(f)$ определены однозначно.

В этой работе обсуждается, какие дополнительные условия следует наложить на функцию $f \in L_p(\mathbb{T})$, чтобы обеспечить сходимость жадных аппроксимантов в $L_p(\mathbb{T})$.

Для функции $\alpha\colon W \to W$ и $l \in \mathbb{N}$ через α_l обозначим ее l-ю итерацию. В [4] были доказаны следующие теоремы **A–C** (для $f \in L(\mathbb{T})$ и $m \in \mathbb{N}$ жадные аппроксиманты $G_m(f)$ фиксируются произвольным образом).

Теорема A. *Пусть функция $\alpha\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ строго возрастает. Тогда следующие условия равносильны:*

(a) *существует такое $l \in \mathbb{N}$, что для достаточно большого $m \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$\alpha_l(m) > e^m;$$

(b) *если $f \in C(\mathbb{T})$ и*

$$\left\|G_{\alpha(m)}(f) - G_m(f)\right\|_\infty \to 0 \qquad (m \to \infty),$$

то

$$\|f - G_m(f)\|_\infty \to 0 \qquad (m \to \infty).$$

Теорема B. *Пусть $p = 2q$, $q \in \mathbb{N}$, — четное число, $\delta > 0$. Пусть $f \in L_p(\mathbb{T})$ и пусть функция $\alpha\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такова, что $\alpha(m) > m^{1+\delta}$ для всех m и*

$$\|G_{\alpha(m)}(f) - G_m(f)\|_p \to 0 \qquad (m \to \infty).$$

Тогда

$$\|f - G_m(f)\|_p \to 0 \qquad (m \to \infty).$$

Теорема C. *Для любого $p \in (2, \infty)$ существует функция $f \in L_p(\mathbb{T})$, у которой последовательность $\{G_m(f)\}$ жадных аппроксимантов расходится в $L_p(\mathbb{T})$, но*

$$\|G_{\alpha(m)}(f) - G_m(f)\|_p \to 0 \qquad (m \to \infty)$$

для любой функции $\alpha\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такой, что $m \le \alpha(m) \le m^{1+o(1)}$ при $m \to \infty$.

В настоящей работе мы рассматриваем сходимость жадных аппроксимантов в пространствах $L_p(\mathbb{T})$, включая значения $p < 2$.

Теорема 1. *Пусть $\alpha\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — строго возрастающая функция, для которой существует такое $l \in \mathbb{N}$, что для достаточно большого $m \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $\alpha_l(m) > e^m$. Пусть также $1 \le p < \infty$ и функция $f \in L_p(\mathbb{T})$ такова, что*

$$\left\|G_{\alpha(m)}(f) - G_m(f)\right\|_p \to 0 \qquad (m \to \infty).$$

Тогда

$$\|f - G_m(f)\|_p \to 0 \qquad (m \to \infty).$$

Для функции $f \in L(\mathbb{T})$ и $n \in \mathbb{N}$ обозначим

$$a_n(f) = \inf\{u \geq 0\colon\ |\{k\colon\ |\widehat{f}(k)| > u\}| < n\}.$$

Таким образом, если расположить коэффициенты Фурье функции f в порядке невозрастания абсолютных величин, то $a_n(f)$ будет абсолютной величиной n-го коэффициента. Из теоремы 1 вытекает достаточное условие сходимости жадных аппроксимантов в $L_p(\mathbb{T})$ при $p < 2$.

Следствие 1. *Пусть* $1 \leq p < 2$, $f \in L_p(\mathbb{T})$ *и*

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{m<n\leq e^m} a_n(f)^2 = 0.$$

Тогда

$$\|f - G_m(f)\|_p \to 0 \qquad (m \to \infty).$$

Для $p = 1$ условие на α в теореме 1 является точным. А именно, имеет место

Теорема 2. *Пусть* $\alpha\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *— строго возрастающая функция и при этом для любого натурального* l *найдется сколь угодно большое натуральное* m *такое, что* $\alpha_l(m) < e^m$. *Тогда существует функция* $f \in L(\mathbb{T})$ *с расходящейся в* $L(\mathbb{T})$ *последовательностью* $\{G_m(f)\}$ *жадных аппроксимантов такая, что*

$$\left\|G_{\alpha(m)}(f) - G_m(f)\right\|_1 \to 0 \qquad (m \to \infty).$$

Мы, однако, высказываем гипотезу, что достаточное условие сходимости жадных аппроксимантов, указанное в следствии 1, не является необходимым ни для какого $p < 2$.

2. Доказательство теоремы 1 и следствия 1

Для множества $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ и $l \in \mathbb{N}$ обозначим

$$l\Lambda = \left\{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j : \lambda_1, \dots, \lambda_l \in \Lambda\right\}.$$

Лемма 1. *Для любого* $\sigma > 1$ *найдется число* $A = A(\sigma)$ *такое, что если* $\Lambda \subset \mathbb{Z}$, $|\Lambda| = m$, *то для некоторого* l

$$|(l+1)\Lambda| \leq A^m, \qquad |(l+1)\Lambda| \leq \sigma|l\Lambda|.$$

Доказательство. Пусть n — натуральное число, которое будет выбрано позже, и $L = nm$. Тогда

$$|(L+1)A| \leq \binom{L+m}{m-1} < \binom{(n+1)m}{m} \leq \frac{((n+1)m)^m}{m!} < \frac{((n+1)m)^m e^m}{m^m} = ((n+1)e)^m. \quad (2.1)$$

Значит, существует такое $l \leq L$, что

$$|(l+1)A|/|lA| \leq |(L+1)A|^{1/L} < ((n+1)e)^{1/n}. \quad (2.2)$$

Выберем n так, что правая часть (2.2) меньше σ. Тогда утверждение леммы выполнено в силу (2.1) и (2.2). $\square$

Лемма 2. *Пусть* $\sigma > 1$ *и* $A = A(\sigma)$ *выбрано в соответствии с леммой* 1. *Тогда для любого множества* $\Lambda \subset \mathbb{Z}$, $|\Lambda| = m$, *найдется функция* $f \in L(\mathbb{T})$, *удовлетворяющая следующим условиям*:

(1) $|\widehat{f}(k)| \le 1$ *для любого* $k \in \mathbb{Z}$;

(2) $\widehat{f}(k) = 1$ *для любого* $k \in \Lambda$;

(3) $|\{k : f(k) \neq 0\}| \le A^{2m}$;

(4) $\|f\|_1 \le \sqrt{\sigma}$.

Доказательство. Возьмем l по лемме 1 и положим

$$f(x) = \frac{1}{|l\Lambda|}\Bigl(\sum_{k \in (l+1)\Lambda} e^{ikx}\Bigr)\Bigl(\sum_{k \in l\Lambda} e^{-ikx}\Bigr).$$

Тогда для любого $k \in \mathbb{Z}$ величина $|l\Lambda|\widehat{f}(k)$ равна количеству решений уравнения

$$k = k_1 - k_2, \qquad k_1 \in (l+1)\Lambda, \qquad k_2 \in l\Lambda. \tag{2.3}$$

Так как k_1 однозначно определяется по k и k_2, то для любого k число решений уравнения (2.3) не превосходит $|l\Lambda|$ и, стало быть, $0 \le \widehat{f}(k) \le 1$. При этом если $k \in \Lambda$, то для любого $k_2 \in l\Lambda$ мы имеем $k_1 = k + k_2 \in (l+1)\Lambda$. Следовательно, количество решений уравнения (2.3) равно $|l\Lambda|$ и $\widehat{f}(k) = 1$. Далее,

$$|\{k : f(k) \neq 0\}| \le |(l+1)\Lambda||l\Lambda| \le |(l+1)\Lambda|^2 \le A^{2m}.$$

Наконец, в силу неравенства Коши — Буняковского

$$\|f\|_1 \le \frac{1}{|l\Lambda|}\Bigl\|\sum_{k \in (l+1)\Lambda} e^{ikx}\Bigr\|_2\Bigl\|\sum_{k \in l\Lambda} e^{-ikx}\Bigr\|_2$$

$$= \frac{1}{|l\Lambda|}|(l+1)\Lambda|^{1/2}|l\Lambda|^{1/2} = (|(l+1)\Lambda|/|l\Lambda|)^{1/2} \le \sqrt{\sigma}.$$

Лемма полностью доказана. □

Лемма 2 может быть интерпретирована следующим образом. На m-мерном подпространстве пространства $L(\mathbb{T})$, порожденном функциями e^{ikx}, $k \in \Lambda$, определен тождественный линейный оператор. Тогда его можно продолжить до инвариантного относительно сдвигов оператора $L(\mathbb{T}) \to L(\mathbb{T})$ с нормой $\le \sigma$ и ранга не больше A^{2m}. Если не требовать инвариантности относительно сдвигов, то существование указанного продолжения вытекает из [5].

Следующая лемма является ключевой для доказательства теоремы 1.

Лемма 3. *Для любого* $\sigma > 1$ *найдется число* $B = B(\sigma)$ *такое, что если* $\Lambda \subset \mathbb{Z}$, $|\Lambda| = m$, $p \in [1, \infty)$, *тригонометрический полином* g *и функция* $h \in L_p(\mathbb{T})$ *удовлетворяют условиям* $\{k\colon\ \widehat{g}(k) \neq 0\} \subset \Lambda$, $\sup\limits_k |\widehat{h}(k)| \le B^{-m}\|g\|_p$, *то справедливо неравенство*

$$\|g + h\|_p \ge \|g\|_p/\sigma.$$

Доказательство. Напомним определение свертки функций $F, G \in L(\mathbb{T})$:

$$F * G(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} F(y)G(x-y)\,dy.$$

Мы будем пользоваться следующими хорошо известными свойствами свертки:

$$\widehat{F * G}(k) = \widehat{F}(k)\widehat{G}(k) \qquad \text{для любого} \qquad k \in \mathbb{Z};$$

$$\|F * G\|_p \le \|F\|_1 \|G\|_p.$$

По лемме 2 построим функцию f, для которой

$$\|f * (g+h)\|_p \le \|f\|_1 \|g+h\|_p \le \sqrt{\sigma}\|g+h\|_p. \tag{2.4}$$

С другой стороны, если выбрать B таким образом, что $A^2B^{-1} \le 1 - \sigma^{-1/2}$, мы получаем

$$\|f * (g+h)\|_p \ge \|f * g\|_p - \|f * h\|_p = \|g\|_p - \|f * h\|_p \ge \|g\|_p - \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f * h}(k)|$$

$$= \|g\|_p - \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)||\widehat{h}(k)| \ge \|g\|_p - A^{2m}B^{-m}\|g\|_p\|f * (g+h)\|_p \ge \|g\|_p/\sqrt{\sigma}.$$

Отсюда и из (2.4) вытекает утверждение леммы. □

Теперь мы докажем ослабленную версию теоремы 1.

Лемма 4. *Пусть выполнены предположения теоремы* 1. *Тогда для достаточно большого* m *справедливо неравенство*

$$\|G_m(f)\|_p \le 2\|f\|_p.$$

Доказательство. По условию теоремы 1 найдется такое l, что для функции $\beta = \alpha_{3l}$ и достаточно большого m выполняется неравенство

$$\beta(m) > e^{e^{e^m}}. \tag{2.5}$$

Кроме того,

$$\|G_{\beta(m)}(f) - G_m(f)\|_p \to 0 \qquad (m \to \infty). \tag{2.6}$$

Допустим, что утверждение леммы не выполнено, то есть найдется сколь угодно большое m такое, что

$$\|G_m(f)\|_p > 2\|f\|_p. \tag{2.7}$$

Для $m \in \mathbb{N}$ положим

$$g_1 = G_m(f) = S_{\Lambda_m}(f), \qquad G_{\beta(m)}(f) = S_{\Lambda_{\beta(m)}}(f),$$

$$g_2 = G_{\beta(m)}(f) - G_m(f), \qquad g_3 = f - G_{\beta(m)}(f).$$

Мы имеем

$$f = g_1 + g_2 + g_3 \tag{2.8}$$

и для достаточно большого m в силу (2.6)

$$\|g_2\|_p \le 0.5\|f\|_p. \tag{2.9}$$

Мы воспользуемся следующим результатом: если для любого тригонометрического полинома F такого, что для некоторого непустого конечного множества $\Lambda \subset \mathbb{Z}$

$$\{k:\ \widehat{F}(k) \ne 0\} \subset \Lambda,$$

то справедливо неравенство

$$\|F\|_1 \gg \ln|\Lambda| \min_{k\in\Lambda} |\widehat{F}(k)|$$

(см. [6, 7]). Применим это неравенство к тригонометрическому полиному g_2. Поскольку

$$\Lambda_{\beta(m)}(f) \setminus \Lambda_m(f) \subset \{k:\ \widehat{g}_2(k) \ne 0\},$$

то

$$\min_{\widehat{g}_2(k)\neq 0} |\widehat{g}_2(k)| \ll \|g_2\|_1 \ln^{-1}(\beta(m)-m) \le \|g_2\|_p \ln^{-1}(\beta(m)-m).$$

Следовательно, из неравенств (2.5) и (2.9) следует, что

$$\min_{\widehat{g}_2(k)\neq 0} |\widehat{g}_2(k)| \ll \|f\|_p e^{-e^m}.$$

Далее,

$$\max_{k\notin\Lambda_{\beta(m)}} |\widehat{f}(k)| \le \min_{k\in\Lambda_{\beta(m)}} |\widehat{f}(k)| \le \min_{\widehat{g}_2(k)\neq 0} |\widehat{g}_2(k)| \ll \|f\|_p e^{-e^m}.$$

Следовательно, учитывая предположение (2.7), при достаточно большом m мы можем применить лемму 3 к функциям g_1 и g_3 для $\sigma = 4/3$:

$$\|g_1+g_3\|_p \ge \frac{3}{4}\|g_1\|_p.$$

Учитывая равенство (2.8) и неравенства (2.7) и (2.9), мы получаем

$$\|f\|_p = \|g_1+g_2+g_3\|_p \ge \|g_1+g_3\|_p - \|g_2\|_p > 1.5\|f\|_p - 0.5\|f\|_p = \|f\|_p.$$

Это противоречие завершает доказательство леммы. $\square$

Таким образом, при выполнении условий теоремы 1 установлена ограниченность норм данной последовательности жадных аппроксимантов. Сходимость выводится отсюда с помощью стандартных аргументов. Рассмотрим две функции $f, g \in L(\mathbb{T})$ такие, что при некотором k_0 мы имеем $\widehat{f}(k_0) \neq 0$, $\widehat{g}(k_0) \neq 0$ и $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$ для всех $k \neq k_0$. Рассмотрим жадные аппроксиманты $G_m(f) := S_{\Lambda_m}(f)$, причем m будем считать настолько большим, что

$$\min_{k\in\Lambda_m} |\widehat{f}(k)| < \min\Big(|\widehat{f}(k_0)|, |\widehat{g}(k_0)|\Big).$$

Тогда $k_0 \in \Lambda_m$ и $S_{\Lambda_m}(g)$ является жадным аппроксимантом функции g. Таким образом, каждой последовательности $\{G_m(f)\}$ жадных аппроксимантов функции f соответствует последовательность $\{G_m(g)\}$ жадных аппроксимантов функции g такая, что для достаточно большого m справедливо равенство

$$f - G_m(f) = g - G_m(g).$$

Заменяя конечное число коэффициентов функции, мы приходим к следующей лемме.

Лемма 5. *Пусть функции $f, g \in L(\mathbb{T})$ такие, что*

$$\{k\colon\ \widehat{f}(k) \neq 0\} = \{k\colon\ \widehat{g}(k) \neq 0\}$$

и разность $f-g$ является тригонометрическим полиномом. Тогда каждой последовательности $\{G_m(f)\}$ жадных аппроксимантов функции f соответствует последовательность $\{G_m(g)\}$ жадных аппроксимантов функции g такая, что для достаточно большого m справедливо равенство

$$f - G_m(f) = g - G_m(g).$$

Доказательство теоремы 1. Нам нужно проверить, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $m(\varepsilon) > 0$, что для любого $m > m(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$\|f - G_m(f)\|_p < \varepsilon. \tag{2.10}$$

Мы используем приближение функции f модифицированными суммами Фейера. Для $n \in \mathbb{N}$ обозначим

$$h_n(x) = \frac{n-1}{n}\widehat{f}(0) + \sum_{1\le|k|<n} \frac{n-|k|}{n}\widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Таким образом, тригонометрический полином h_n отличается от n-й суммы Фейера функции f лишь свободным членом. Поскольку полиномы h_n сходятся к функции f в норме пространства L_p при $n \to \infty$, можно найти такое n, что тригонометрический полином $h = h_n$ удовлетворяет условию

$$\|f - h\|_p < \varepsilon/3. \tag{2.11}$$

Функции f и $g = f - h$ удовлетворяют условиям леммы 5. Применяя эту лемму, мы получаем последовательность жадных аппроксимантов функции g. Далее, использовав лемму 4, мы приходим к неравенству

$$\|g - G_m(g)\|_p \le \|g\|_p + 2\|g\|_p = 3\|g\|_p,$$

и из (2.11) вытекает неравенство

$$\|g - G_m(g)\|_p < \varepsilon.$$

Отсюда и из леммы 5 следует, что при достаточно большом m неравенство (2.10) также выполнено. Теорема 1 доказана. □

Доказательство следствия 1. Допустим, что жадные аппроксиманты $G_m(f)$ не сходятся к функции f в $L_p(\mathbb{T})$ при $m \to \infty$. Тогда, слегка варьируя коэффициенты Фурье функции f, можно получить функцию $\widetilde{f}$, ненулевые коэффициенты Фурье которой имеют различные абсолютные величины, с расходящимися в $L_p(\mathbb{T})$ жадными аппроксимантами, и при этом

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{m<n\le e^m} a_n(\widetilde{f})^2 = 0.$$

Таким образом, при доказательстве следствия можно без ограничения общности считать, что ненулевые коэффициенты Фурье функции f имеют различные абсолютные величины. Для такой функции f жадные аппроксиманты $G_m(f)$ определены однозначно. При этом для $m < m'$ мы имеем

$$\|G_{m'}(f) - G_m(f)\|_p \le \|G_{m'}(f) - G_m(f)\|_2 = \left(\sum_{m<n\le m'} a_n(f)^2\right)^{1/2}. \tag{2.12}$$

Пусть $\alpha(m) = [e^m]$. Очевидно, $\alpha_2(m) \ge \alpha(m)+1 > e^m$ для любого m. В силу (2.12) все условия теоремы 1 выполнены. Следовательно,

$$\|f - G_m(f)\|_p \to 0 \qquad (m \to \infty),$$

что и требовалось доказать.

3. Доказательство теоремы 2

Лемма 6. *Для любого $N \in \mathbb{N}$ элементы множества $\{1, \dots, N\}$ можно расположить в виде последовательности $\{k_1, \dots, k_N\}$, так что для некоторого $n \le N$ справедливо неравенство*

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} e^{ik_jx}\right\|_1 \ge C\sqrt{N},$$

где $C > 0$ — абсолютная константа.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для больших N. С помощью полиномов Рудина — Шапиро легко построить полином P, обладающий следующими свойствами:

$$P(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k e^{ikx}, \qquad a_k = \pm 1, \quad k = 1, \dots, N,$$

$$\|P\|_\infty \le \frac{2}{\sqrt{2}-1}\sqrt{N}$$

(см., например, [8, гл. 3, п. 6]). Так как

$$\|P\|_2^2 \le \|P\|_1 \|P\|_\infty,$$

то

$$\|P\|_1 \ge \frac{\sqrt{2}-1}{2}\sqrt{N}.$$

Представим полином P в виде

$$P = P_+ + P_-, \qquad P_+(x) = \sum_{a_k=1} e^{ikx}, \qquad P_-(x) = \sum_{a_k=-1} -e^{ikx}.$$

Тогда

$$\|P_+ - P_-\|_1 = \left\| \sum_{k=1}^{N} e^{ikx} \right\|_1 \ll \ln(N+1),$$

откуда следует, что для достаточно большого N

$$\|P_+\|_1 \ge \frac{1}{2}(\|P\|_1 - \|P_+ - P_-\|_1) \gg \sqrt{N}.$$

Числа $n, k_1, \dots, k_N$ выбираются из условия

$$P_+(x) = \sum_{j=1}^{n} e^{ik_j x}.$$

Лемма доказана. □

Утверждение теоремы 2 очевидно, если $\alpha(m) = m$ для всех $m \in \mathbb{N}$. В противном случае обозначим

$$m_0 = \min\{m\colon\ \alpha(m) > m\}.$$

Так как функция α строго возрастает, то $\alpha(m) > m$ для всех $m \ge m_0$. Построим строго возрастающую последовательность $\{m_j\}$:

$$m_j = \alpha(m_{j-1}), \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Основой доказательства теоремы 2 является следующая лемма, в которой предполагается, что функция α удовлетворяет условиям теоремы 2.

Лемма 7. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся натуральное число J, число $a > 0$ и различные числа $k_1, \dots, k_{m_J}$ такие, что эти числа и тригонометрический полином*

$$Q(x) = \sum_{m=1}^{m_J} a e^{ik_m x}$$

обладают следующими свойствами:

(1) $\|Q\|_1 \le \varepsilon$;

(2) *для любых $j = 1, \dots, J$ и m', m'' таких, что $m_{j-1} \le m' < m'' \le m_j$,*

$$\left\| \sum_{m=m'+1}^{m''} a e^{ik_m x} \right\|_1 \le \varepsilon;$$

(3) *существует такое M, что*

$$\left\| \sum_{m=1}^{M} a e^{ik_m x} \right\|_1 \ge 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим два случая.

1-й с л у ч а й: $\inf_j m_{j+1}/m_j = 1$. Возьмем такое J, что $m_{J+1}/m_J < 1+\delta$, где $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ удовлетворяет указанным ниже условиям. Поскольку функция α строго возрастает, для любого $j \le J$ справедливо неравенство

$$m_j - m_{j-1} < \delta m_J. \tag{3.1}$$

Применив лемму 6 к $N = m_J$, мы получаем соответствующие последовательность чисел $\{k_1, \dots, k_{m_J}\}$ и число $n \le m_J$. Пусть $a = 1/(C\sqrt{m_J})$, где $C > 0$ — константа из леммы 6. Свойство (3) последовательности $\{k_1, \dots, k_{m_J}\}$ и полинома Q выполнено для $M = n$. Проверим свойство (2). Если $j = 1, \dots, J$ и $m_{j-1} \le m' < m'' \le m_j$, то в силу (3.1)

$$\left\| \sum_{m=m'+1}^{m''} a e^{ik_m x} \right\|_1 \le \left\| \sum_{m=m'+1}^{m''} a e^{ik_m x} \right\|_2 < a\sqrt{\delta m_J} = \sqrt{\delta}/C.$$

Значит, свойство (2) имеет место, если $\sqrt{\delta}/C \le \varepsilon$. Наконец,

$$\|Q\|_1 \ll \ln(m_J + 1)/\sqrt{m_J}.$$

Так как $m_J \ge 1/\delta$, то при надлежащем выборе δ мы получаем $\|Q\|_1 \le \varepsilon$. В первом случае лемма доказана.

2-й с л у ч а й: $\inf_j m_{j+1}/m_j = 1 + \delta > 1$. Рассмотрим функцию

$$\phi(u) = \exp\left([\delta u]^{1/3}\right).$$

Найдется такое число $M(\delta)$, что при любом $m > M(\delta)$ выполняется неравенство $\phi(\phi(m)) > e^m$. Пусть $l = l(\varepsilon)$ — натуральное число, удовлетворяющее указанным ниже условиям. По условиям теоремы существует такое $j_1 > l$, что $m_{j_1} > M(\delta)$ и

$$m_{j_1+2l} < e^{m_{j_1}}.$$

В силу выбора $M(\delta)$ мы можем взять $J = j_1 + l$ или $J = j_1 + 2l$ так, чтобы

$$m_J < \exp\left([\delta m_{J-l}]^{1/3}\right). \tag{3.2}$$

Заметим, что

$$J - l \ge j_1 > l. \tag{3.3}$$

Мы будем строить последовательность чисел $\{k_1, \dots, k_{m_J}\}$ в виде сочетания последовательности чисел $\{1, \dots, N\}$, расположенных нерегулярно в соответствии с леммой 6, и регулярной последовательности $\{N+1, N+2, \dots\}$.

Положим $N = l[\delta m_{J-l}]$ и, пользуясь леммой 6, найдем соответствующие последовательность чисел $\{k'_1, \dots, k'_N\}$ и число $n \le N$. Отметим, что для $j = J-l, \dots, j = J-1$ выполнено неравенство

$$m_{j+1} - m_j \ge \delta m_j \ge \delta m_{J-l} \ge N/l.$$

Для $j = J-l, \dots, j = J-1$ и $m_j < m \le m_j + N/l$ положим

$$k_m = k'_{m'}, \qquad m' = (j - J + l)N/l + m - m_j.$$

Отметим, что для указанных чисел m числа m' пробегают множество $\{1, \dots, N\}$. То же самое множество пробегают и числа k_m. Для некоторых чисел $m \in \{1, \dots, m_J\}$ значения k_m пока не определены. Расположим эти числа в возрастающем порядке и в качестве значений k_m будем брать последовательно числа $\{N+1, N+2, \dots\}$. Положим также $a = 2/(C\sqrt{N})$, где $C > 0$ — константа из леммы 6. Отметим, что

$$\|Q\|_1 = a\Big\|\sum_{m=1}^{m_J} e^{ik_m x}\Big\|_1 = a\Big\|\sum_{m=1}^{m_J} e^{imx}\Big\|_1 \ll a(\ln m_J) \le 2(\ln m_J)/(C\sqrt{[\delta m_{J-l}]}).$$

В силу (3.2)

$$\|Q\|_1 \ll [\delta m_{J-l}]^{-1/6}. \tag{3.4}$$

В силу (3.3) можно взять $l = l(\varepsilon)$ настолько большим, чтобы обеспечить выполнение свойства (1) полинома Q.

Для любого $M \le m_J$ имеет место представление

$$Q^M(x) = \sum_{m=1}^{M} ae^{ik_m x} = Q_1^M(x) + Q_2^M(x),$$

где

$$Q_1^M(x) = \sum_{m=1}^{\phi_1(M)} ae^{ik'_m x}, \qquad Q_2^M(x) = \sum_{m=N+1}^{\phi_2(M)} ae^{imx}.$$

Аналогично (3.4) мы получаем

$$\|Q_2^M\|_1 \ll [\delta m_{J-l}]^{-1/6}$$

равномерно по M, поэтому можно взять $l = l(\varepsilon)$ так, чтобы для всех $M \le m_J$ выполнялось неравенство

$$\|Q_2^M\|_1 \le 0.1 \min(\varepsilon, 1). \tag{3.5}$$

Таким образом, при оценке нормы $\|Q^M\|_1$ вклад Q_2^M является пренебрежимо малым.

Возьмем любое $j = 1, \dots, J$ и любые $m_{j-1} \le m' < m'' \le m_j$. По построению $0 \le \phi_1(m'') - \phi_1(m') \le N/l$. Следовательно,

$$\|Q_1^{m''} - Q_1^{m'}\|_1 \le \|Q_1^{m''} - Q_1^{m'}\|_2 \le a\sqrt{N/l} = 2/(C\sqrt{l}).$$

При выполнении неравенства $l = l(\varepsilon) \ge (4/(C\varepsilon))^2$ мы получаем

$$\|Q_1^{m''} - Q_1^{m'}\|_1 \le \varepsilon/2,$$

откуда и из (3.5) вытекает, что

$$\|Q^{m''} - Q^{m'}\|_1 \le \|Q_1^{m''} - Q_1^{m'}\|_1 + \|Q_2^{m''}\|_1 + \|Q_2^{m'}\|_1 < \varepsilon,$$

и (2) доказано.

Наконец, найдется такое M, что $\phi_1(M) = n$. Вновь используя (3.5), мы получаем

$$\Big\|\sum_{m=1}^{M} ae^{ik_m x}\Big\|_1 \ge \|Q_1^M\|_1 - \|Q_2^M\|_1 = a\Big\|\sum_{j=1}^{n} e^{ik_j x}\Big\|_1 - \|Q_2^M\|_1 \ge 2 - 0.1 > 1.$$

Свойство (3) также выполнено. Лемма доказана. □

Для полинома Q, построенного в лемме 7, можно определить жадные аппроксиманты

$$G_m(Q)(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{m=1}^{M} ae^{ik_m x}, & M \le m_J; \\ Q(x), & M > m_J. \end{cases}$$

Мы имеем $\|Q\|_1 \le \varepsilon$. Если $m < m_0$, то $\alpha(m) = m$ по определению m_0, а значит,

$$G_{\alpha(m)}(Q) - G_m(Q) = 0.$$

Это равенство верно и при $m \ge m_J$ вследствие

$$G_{\alpha(m)}(Q) = G_m(Q) = Q.$$

Если $m_0 \le m \le m_{J-1}$, то найдется j такое, что $0 \le j \le J-2$ и $m_{j-1} \le m \le m_{j+1}$. Используя свойство (2), легко получить, что

$$\|G_{\alpha(m)}(Q) - G_m(Q)\|_1 \le 2\varepsilon. \tag{3.6}$$

Если же $m_{J-1} < m < m_J$, то опять в силу свойства (2)

$$\|G_{\alpha(m)}(Q) - G_m(Q)\|_1 = \|G_{m_J}(Q) - G_m(Q)\|_1 \le \varepsilon,$$

т. е. неравенство (3.6) выполняется при любом m. Наконец, в силу свойства (3) мы имеем $\|G_M(f)\|_1 \ge 1$. Полезно отметить также, что свойства (1) и (3) влекут за собой неравенства

$$|a| \le \varepsilon, \qquad m_J \ge 1/\varepsilon. \tag{3.7}$$

Тем самым, мы доказали "полиномиальную версию" теоремы 2, а завершить ее доказательство нетрудно, используя полиномы, построенные в лемме 7.

Для этого мы на основании леммы 7 строим последовательности чисел $\{\varepsilon_\nu\}$, $\{J_\nu\}$, $\{a_\nu\}$ и тригонометрических полиномов

$$Q_\nu(x) = \sum_{m=1}^{m_{J_\nu}} a_\nu e^{ik_m^\nu x} \qquad (\nu \in \mathbb{N}),$$

обладающих следующими свойствами для всех $\nu \in \mathbb{N}$:

(1′) $\|Q_\nu\|_1 \le \varepsilon_\nu$;

(2′) для любых $j = 1, \dots, J_\nu$ и m', m'' таких, что $m_{j-1} \le m' < m'' \le m_j$,

$$\Bigl\| \sum_{m=m'+1}^{m''} a_\nu e^{ik_m^\nu x} \Bigr\|_1 \le \varepsilon_\nu;$$

(3′) существует такое M_ν, что

$$\Bigl\| \sum_{m=1}^{M_\nu} a_\nu e^{ik_m^\nu x} \Bigr\|_1 \ge 1;$$

(4′) числа $k_1^\nu, \dots, k_{m_{J_\nu}}^\nu$ различны.

Из (3.7) следует, что для каждого ν справедливы неравенства

$$|a_\nu| \le \varepsilon_\nu, \qquad m_{J_\nu} \ge 1/\varepsilon_\nu. \tag{3.8}$$

Построение осуществляется последовательно: если $\nu > 1$, то ε_ν выбирается с использованием информации о числах $\varepsilon_{\nu'}$, $J_{\nu'}$, $a_{\nu'}$ и тригонометрических полиномах $Q_{\nu'}$ для $\nu' < \nu$.

Каждый полином Q_ν мы представим в виде суммы полиномов R_ν и S_ν, где

$$R_1 = 0, \qquad S_1 = Q_1,$$

а при $\nu > 1$

$$R_\nu(x) = \sum_{m=1}^{m_{J_{\nu-1}}} a_\nu e^{ik_m^\nu x}, \qquad S_\nu(x) = \sum_{m=m_{J_{\nu-1}}+1}^{m_{J_\nu}} a_\nu e^{ik_m^\nu x}.$$

Выберем ε_ν при $\nu > 1$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\varepsilon_\nu \le \min\Big(a_{\nu-1},\ \frac{1}{2^\nu(m_{J_{\nu-1}+1})}\Big).$$

Используя свойства $(1')$, $(3')$ и неравенство (3.8), мы получаем

$$\|R_\nu\|_1 < \frac{1}{2^\nu}, \qquad \|S_\nu\|_1 \le \frac{1}{2^\nu}, \tag{3.9}$$

$$a_\nu \le a_{\nu-1}. \tag{3.10}$$

Поэтому при любых целых числах $n_1, n_2, \dots$ ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} S_\nu(x) e^{in_\nu x}$$

сходится в $L(\mathbb{T})$. В качестве требуемой функции f возьмем сумму этого ряда. При этом числа $n_1, n_2, \dots$ мы выберем таким образом, чтобы все числа

$$k_j^\nu + n_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \dots,\ \ j = 1, \dots, m_{J_\nu})$$

были различны. Для $\nu \ge 2$ и $m_{J_{\nu-1}} < m \le m_{J_\nu}$ положим

$$G_m(x) = \sum_{\nu' < \nu} S_{\nu'}(x) e^{in_{\nu'} x} + \sum_{m'=m_{J_{\nu-1}}+1}^{m} a_\nu e^{ik_{m'}^\nu x} e^{in_\nu x}.$$

В силу (3.10) G_m являются жадными аппроксимантами функции f. Далее, из свойства (2) вытекает, что для любых $\nu \ge 2$, $j = J_{\nu-1}, \dots, J_\nu - 1$ и m', m'' таких, что $m_{j-1} \le m' < m'' \le m_j$,

$$\|G_{m''} - G_{m'}\| \le \varepsilon_\nu,$$

откуда следует, что

$$\big\|G_{\alpha(m)} - G_m\big\|_1 \to 0 \qquad (m \to \infty).$$

Наконец, для любого $\nu \ge 2$ в силу свойства $(3')$ и (3.9) имеет место неравенство

$$\Big\|G_{M_\nu} - G_{m_{\nu-1}}\Big\|_1 \ge \Big\|\sum_{m=1}^{M_\nu} a_\nu e^{ik_m^\nu x}\Big\|_1 - \|R_\nu\|_1 \ge 1/2.$$

Значит, жадные аппроксиманты G_m не сходятся в $L(\mathbb{T})$. Теорема 2 доказана. $\square$

Отметим, что слегка варьируя коэффициенты Фурье функции f, можно получить удовлетворяющую требованиям теоремы 2 функцию, у которой абсолютные величины коэффициентов Фурье различны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Temlyakov V.N.** Greedy algorithm and m-term trigonometric approximation // J. Constr. Approx. 1998. Vol. 107. P. 569–587.
2. **Cordoba A. and Fernandez P.** Convergence and divergence of decreasing rearranged Fourier series // SIAM J. Math. Anal. 1998. Vol. 29. P. 1129–1139.
3. **Temlyakov V.N.** Nonlinear methods of approximation // Found. Comput. Math. 2003. Vol. 3, no. 1. P. 33–107.
4. **Konyagin S.V. and Temlyakov V.N.** Convergence of greedy approximation II. The trigonometric system // Studia Mathematica. 2003. Vol. 159, no. 2. P. 161–184.
5. **Mascioni V.** On the duality of the uniform approximation property in Banach spaces // Illinois J. Math. 1991. Vol. 35. P. 191–197.
6. **Конягин С.В.** О проблеме Литтлвуда // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1981. Vol. 45. P. 243–265.
7. **McGehee O.C., Pigno L., and Smith B.** Hardy's inequality and the L^1 norm of exponential sums // Ann. Math. 1981. Vol. 113, no. 2. P. 613–618.
8. **Кахан Ж.-П.** Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. М.: Мир, 1976. 204 с.

Конягин Сергей Владимирович
д-р физ.-мат. наук, проф.
МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: konyagin23@gmail.com

Поступила 30.03.2008

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14 № 3 2008

УДК 517.518.2

ОБ ОЦЕНКЕ РАВНОМЕРНОГО УКЛОНЕНИЯ ОТ КЛАССА ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕННОЙ ТРЕТЬЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ[1]

А. В. Мироненко

Рассматривается задача равномерного приближения непрерывной функции на отрезке классом функций с равномерно ограниченной третьей производной. Показано, что не существует линейной оценки величины наилучшего приближения функции этим классом через ее модуль непрерывности третьего порядка. В то же время такая оценка в случае ограничений на первую или вторую производную существует.

Ключевые слова: равномерное приближение, функции с ограниченной производной, гладкие функции, модуль непрерывности.

1. Введение и основной результат

Обозначим пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций через $C[a, b]$ и снабдим его стандартной нормой $\|f\| = \|f\|_{C[a,\, b]} = \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$. Через $AC^{n-1}[a, b]$ обозначим подкласс функций из $C[a, b]$, имеющих абсолютно непрерывную производную порядка $n-1$. Через $\mathcal{D}^n$ обозначим следующий класс функций:

$$\mathcal{D}^n = \left\{ g \in AC^{n-1}[a, b] : \ \left| g^{(n)}(x) \right| \leqslant 1 \text{ всюду, где } g^{(n)} \text{ существует} \right\}.$$

О п р е д е л е н и е. *Величиной наилучшего приближения* (ВНП) функции $f \in C[a, b]$ произвольным классом функций Q называется величина

$$E(f; Q) = \inf_{g \in Q} \|f - g\|.$$

Любая функция $g_* \in Q$, удовлетворяющая условию $\|f - g_*\| = E(f; Q)$, называется *элементом наилучшего приближения* (ЭНП) для функции f в классе функций Q.

В силу замкнутости и локальной компактности класса $\mathcal{D}^n$ для любой непрерывной функции f хотя бы один ЭНП в этом классе всегда существует, но не всегда он единствен.

Пусть $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \subset [a, b]$, обозначим величину наилучшего приближения функции f классом функций Q на этой сетке через

$$E(f; Q; x_1, x_2, \ldots, x_k) = \inf_{g \in Q} \max_{1 \leqslant i \leqslant k} |f(x_i) - g(x_i)|.$$

Обозначим максимальную ВНП функции f классом функций Q на всех k-точечных подмножествах отрезка $[a, b]$ через

$$E_k(f; Q) = \sup_{a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_k \leqslant b} E(f; Q; x_1, x_2, \ldots, x_k).$$

Рассмотрим также максимальную ВНП функции f классом функций Q на всех равномерных k-точечных сетках из отрезка $[a, b]$:

$$U_k(f; Q) = \sup_{\substack{x,\ h \\ a \leqslant x < x + (k-1)h \leqslant b}} E(f; Q; x, x + h, \ldots, x + (k-1)h).$$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 08-01-00325) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-1071.2008.1).

Известно, что в случае классов $\mathcal{D}^1$ и $\mathcal{D}^2$ имеют место следующие линейные оценки ВНП этими классами через локальные ВНП:

Теорема 1. *Пусть* $f \in C[a,b] \setminus \mathcal{D}^1$. *Тогда*

$$E\big(f;\mathcal{D}^1\big) = E_2\big(f;\mathcal{D}^1\big) = U_2\big(f;\mathcal{D}^1\big)\,.$$

Теорема 2. *Пусть* $f \in C[a,b] \setminus \mathcal{D}^2$. *Тогда*

$$\frac{1}{2}E\big(f;\mathcal{D}^2\big) < E_3\big(f;\mathcal{D}^2\big) \leqslant E\big(f;\mathcal{D}^2\big)\,;$$

$$\frac{1}{2}E_3\big(f;\mathcal{D}^2\big) \leqslant U_3\big(f;\mathcal{D}^2\big) \leqslant E_3\big(f;\mathcal{D}^2\big)\,.$$

Теорему 1 можно найти в монографии [1, § 6.2], теорема 2 доказана в работе [2]. Отметим, что в теореме 2 неравенства $E_3\big(f;\mathcal{D}^2\big) \leqslant E\big(f;\mathcal{D}^2\big)$ и $U_3\big(f;\mathcal{D}^2\big) \leqslant E_3\big(f;\mathcal{D}^2\big)$ выполняются по определению, поэтому содержательными являются только левые соотношения.

В работе [3] была доказана точность констант, равных $1/2$, в обоих неравенствах теоремы 2, а в работе [4] показана точность константы $1/4$ в вытекающем из теоремы 2 неравенстве

$$\frac{1}{4}E\big(f;\mathcal{D}^2\big) < U_3\big(f;\mathcal{D}^2\big)\,.$$

Мы рассматриваем вопрос о приближении функций $f \in C[a,b]$ функциями из класса $\mathcal{D}^3$. Следующая теорема показывает, что для этого класса не существует аналога первого неравенства из теоремы 2.

Теорема 3. *Для любого числа* $M > 1$ *существует такая функция* $f \in C[a,b] \setminus \mathcal{D}^3$, *что*

$$E\big(f;\mathcal{D}^3\big) \geqslant M\, E_4\big(f;\mathcal{D}^3\big)\,.$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 3, приведем результат, который является следствием из нее и который можно считать основным результатом данной работы.

Пусть $\omega_m(f,h)$ есть классический модуль непрерывности функции f порядка m:

$$\omega_m(f,h) = \sup\Big\{\, |\Delta_\delta^m(f,x)| :\ \delta \in [0,h],\quad x \in [a, b - m\delta] \Big\},$$

где $\Delta_\delta^m(f,x)$ — конечная разность порядка m с шагом δ в точке x:

$$\Delta_\delta^m(f,x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k f(x + (m-i)\delta).$$

Н. П. Корнейчуком при помощи теоремы 1 было доказано следующее соотношение для класса $\mathcal{D}^1$:

$$E\big(f;\mathcal{D}^1\big) = \frac{1}{2} \sup_{h\in[0,b-a]} \big[\omega_1(f,h) - h\big]. \tag{1}$$

Далее это равенство использовалось им при нахождении точной константы в неравенстве Джексона.

В работах [2] и [4] с помощью теоремы 2 был получен аналог результата (1) для класса $\mathcal{D}^2$:

$$E\big(f;\mathcal{D}^2\big) < \sup_{h\in\left[0,\frac{b-a}{2}\right]} \big[\omega_2(f,h) - h^2\big].$$

Здесь константа 1 в правой части является точной.

Из теоремы 3 с учетом очевидного неравенства $U_4\big(f;\mathcal{D}^3\big) \leqslant E_4\big(f;\mathcal{D}^3\big)$ и доказанного в работе [2] равенства

$$U_{n+1}(f;\mathcal{D}^n) = \frac{1}{2^n} \sup_{h\in\left[0,\frac{b-a}{n}\right]} \big[\omega_n(f,h) - h^n\big]$$

непосредственно следует

Теорема 4. *Для любого числа $M > 1$ существует такая функция $f \in C[a,b] \setminus \mathcal{D}^3$, что*

$$E\big(f; \mathcal{D}^3\big) \geqslant M \sup_{h \in \left[0, \frac{b-a}{3}\right]} \big[\omega_3(f,h) - h^3\big].$$

Теоремы 3 и 4 были анонсированы в [5], в настоящей работе теорема 3 приводится с полным доказательством.

2. Вспомогательные утверждения

О п р е д е л е н и е. Набор точек $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ из промежутка $[a,b]$ назовем (*чебышевским*) *альтернансом* для функции $h \in C[a,b]$, если существует такая константа σ, равная $+1$ или -1, что $h(x_i) = \sigma(-1)^{i+1}\|h\|_{C[a,b]}$.

Приведем общий критерий ЭНП в классе $\mathcal{D}^n$ из работы [6].

Теорема 5. *Пусть $f \in C[a,b] \setminus \mathcal{D}^n$. Для того чтобы функция $g_* \in \mathcal{D}^n$ была ЭНП для функции f в классе $\mathcal{D}^n$, необходимо и достаточно, чтобы*:

(1) *на отрезке $[a,b]$ нашлись точки $t_0 < t_1 < \ldots < t_s$ такие, что выполняются тождества $g_*^{(n)}\Big|_{(t_i,t_{i+1})} \equiv \alpha(-1)^i$, где $|\alpha| = 1$;*

(2) *на отрезке $[t_0,t_s]$ нашелся альтернанс функции $f - g_*$ из $s+n$ точек $\{x_i\}_{i=1}^{s+n}$;*

(3) *выполнялось соотношение* $\operatorname{sign}(f - g_*)(x_1) = \alpha(-1)^n$.

Из этой теоремы видно, что ЭНП на отрезке $[t_0,t_s]$ является идеальным сплайном. Определения понятий сплайна и идеального сплайна можно найти, например, в монографии [1], но для доказательства теоремы 3 они нам не понадобятся.

Через $f[x_0,\ldots,x_n]$ будем обозначать разделённую разность порядка n от функции f, построенную по точкам $x_0,\ldots,x_n$:

$$f[x_0,\ldots,x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{k=0;\ k\neq i}^{n}(x_i - x_k)}.$$

Известно, что для любого полинома p степени n разделённая разность $p[x_0,\ x_1,\ldots,\ x_n]$ совпадает со старшим коэффициентом этого полинома.

Мы будем использовать также лемму, доказанную в работе [2]:

Лемма. *Пусть дан набор точек $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, на котором задана произвольная функция f. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(*a*) *Если $|n!f[x_0,\ldots,x_n]| \leqslant 1$, то $E(f; \mathcal{D}^n; x_0,\ldots,x_n) = 0$.*

(*b*) *Если $|n!f[x_0,\ldots,x_n]| > 1$, то $E(f; \mathcal{D}^n; x_0,\ldots,x_n) > 0$.*

3. Доказательство теоремы 3

Пусть без ограничения общности отрезок $[a,b]$ есть отрезок $[-1,1]$. Построим несколько вспомогательных функций. Функции g_1, g_2 и g определим следующим образом:

$$g_1(x) := \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^2, \qquad g_2(x) := -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^2,$$

$$g(x) := \begin{cases} g_1(x) & \text{при } x \in [-1,0), \\ g_2(x) & \text{при } x \in [0,1]. \end{cases}$$

Отметим, что производная $g^{(3)}$ равна 1 на промежутке $[-1,0)$ и -1 на $(0,1]$, т. е. функция g есть идеальный сплайн третьей степени с единственным узлом в точке 0. По этой же причине $g \in \mathcal{D}^3$. Эскиз графика функции g представлен на рис. 1.

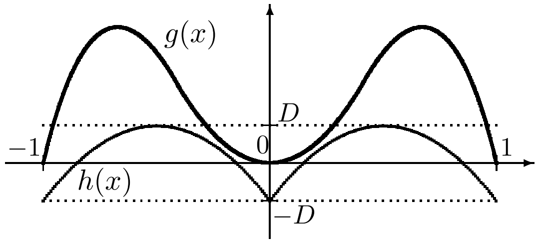


Рис. 1. Функции g и h.

Пусть $D > 0$ — некоторый параметр. Определим две зависящие от него функции h_1 и h_2:

$$h_1(x) := -8D(x+1)x - D,$$
$$h_2(x) := -8D(x-1)x - D.$$

Построим вспомогательную функцию h:

$$h(x) := \begin{cases} h_1(x) & \text{при } x \in [-1,0), \\ h_2(x) & \text{при } x \in [0,1]. \end{cases}$$

Отметим, что это сплайн второй степени дефекта 2 с единственным узлом в точке 0 и $h^{(3)} \equiv 0$ на $[-1,0)$ и $(0,1]$. График функции h представлен на рис. 1.

Определим искомую функцию f (зависящую от параметра D) следующим образом:

$$f := g + h.$$

Согласно теореме 5 при любом положительном значении параметра D функция g является ЭНП для функции f в классе $\mathcal{D}^3$, причем $E\big(f;\mathcal{D}^3\big) = \|f-g\| = \|h\| = D$. Таким образом, для доказательства теоремы нам необходимо для данного числа M подобрать такой параметр D, чтобы выполнялось неравенство

$$E\big(f;\mathcal{D}^3\big) = D \geqslant M\, E_4\big(f;\mathcal{D}^3\big)\,.$$

Положим $D = \dfrac{3^2}{128^2 M^2}$ и покажем, что при таком выборе числа D это неравенство выполняется. Напомним, что в нашем случае

$$E_4\big(f;\mathcal{D}^3\big) = \sup_{-1\leqslant x_1<x_2<x_3<x_4\leqslant 1} E\big(f;\mathcal{D}^3;x_1,x_2,x_3,x_4\big),$$

т. е. для доказательства теоремы надо показать, что неравенство

$$E\big(f;\mathcal{D}^3;x_1,x_2,x_3,x_4\big) \leqslant \frac{1}{M}D \tag{2}$$

справедливо для любых наборов точек вида $-1 \leqslant x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \leqslant 1$.

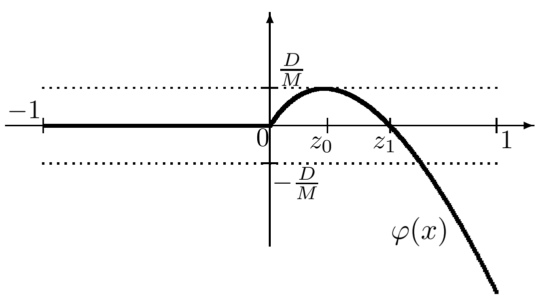


Рис. 2. Функция $\varphi(x)$.

В дальнейшем мы будем несколько раз пользоваться соображениями симметрии в следующем виде: если какое-то утверждение относительно четной функции f справедливо на наборе точек x_1, x_2, x_3, x_4, то оно же справедливо и на наборе точек $-x_4$, $-x_3$, $-x_2$, $-x_1$.

Отметим, что функция $g_1 + h_1$ принадлежит классу $\mathcal{D}^3$, и исследуем уклонение этой функции от функции f на всем отрезке. Обозначим функцию уклонения $f - (g_1 + h_1)$ через φ:

$$\varphi := f - (g_1+h_1) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in [-1,0), \\ (g_2-g_1)+(h_2-h_1) = -\frac{1}{3}x^3 + 16Dx & \text{при } x \in [0,1]. \end{cases} \tag{3}$$

График функции φ схематично изображен на рис. 2. Обозначим точку, в которой достигается максимум функции φ на отрезке $[0,1]$, через z_0, а самый правый ее нуль через z_1. Легко проверить, что

$$z_1 = 4\sqrt{3D}, \qquad z_0 = 4\sqrt{D},$$

$$\varphi(z_0) = -\frac{64}{3}D\sqrt{D} + 64D\sqrt{D} = \frac{128}{3}D\sqrt{D}.$$

Видно, что выполняется неравенство

$$\varphi(x) \leqslant \varphi(z_0) = \frac{128}{3}D\sqrt{D} = \frac{128}{3}D\sqrt{\frac{3^2}{128^2M^2}} = \frac{1}{M}D.$$

Это значит, что на участке $[-1, z_1]$ функция g_1+h_1 приближает функцию f с погрешностью не более чем M/D. Таким образом, при $x_4 \leqslant z_1$ неравенство (2) всегда выполняется. В силу симметрии оно выполняется и при $x_1 \geqslant -z_1$, здесь искомое приближение доставляет функция $g_2 + h_2$.

Нам осталось убедиться в выполнении неравенства (2) только на тех наборах точек $x_1, \dots, x_4$, в которых

$$x_1 < -z_1 \quad \text{и} \quad z_1 < x_4. \tag{4}$$

Покажем, что на таких наборах $E\big(f; \mathcal{D}^3; x_1, x_2, x_3, x_4\big) = 0$, что сразу влечет справедливость (2). В силу леммы для доказательства этого факта достаточно показать, что

$$-\frac{1}{3!} \leqslant f[x_1, \dots, x_4] \leqslant \frac{1}{3!}. \tag{5}$$

Снова рассмотрим функцию $\varphi := f - (g_1 + h_1)$. Поскольку $(g_1 + h_1)[x_1, x_2, x_3, x_4] \equiv \dfrac{1}{3!}$, то (5) эквивалентно соотношению

$$-\frac{2}{3!} \leqslant \varphi[x_1, \dots, x_4] \leqslant 0, \tag{6}$$

и, значит, вместо (5) достаточно установить справедливость утверждения (6) при условии (4).

Сначала рассмотрим случай, когда на отрезке $[-1, 0]$ лежат три точки x_1, x_2 и x_3. Поскольку $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = \varphi(x_3) = 0$, а $\varphi(x_4) < 0$, то по определению разделённой разности имеем

$$\varphi[x_1, \dots, x_4] = \frac{\varphi(x_4)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} < 0.$$

Покажем теперь, что $\varphi[x_1, \dots, x_4] > -1/3$. В самом деле,

$$\varphi[x_1, \dots, x_4] = \frac{-\frac{1}{3}(x_4)^3 + 16Dx_4}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} > -\frac{1}{3} \cdot \frac{(x_4)^3}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)}.$$

Поскольку $x_4 > 0$, а $x_1 < x_2 < x_3 \leqslant 0$, то $\dfrac{(x_4)^3}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} \leqslant 1$. Отсюда следует, что $\varphi[x_1, \dots, x_4] > -1/3$. Таким образом, в случае $x_3 \leqslant 0$ справедливость (6) доказана.

В силу симметрии можно считать, что условие (6) выполняется и при $0 \leqslant x_2 < x_3 < x_4$.

Осталось проверить справедливость соотношения (6) при условии

$$x_1 < -z_1, \qquad z_1 < x_4 \qquad \text{и} \qquad x_2 < 0 < x_3. \tag{7}$$

Введем в рассмотрение два алгебраических полинома третьей степени, интерполирующих функцию φ в точках x_1, x_2 и x_3. Чтобы полностью их определить, положим у первого полинома p_1 старший коэффициент равным 0, а у второго полинома p_2 — равным $-1/3$. Тогда по свойствам разделённой разности получим, что $p_1[x_1, x_2, x_3, x_4] \equiv 0$ и $p_2[x_1, x_2, x_3, x_4] \equiv -1/3$.

Рассмотрим разделённые разности от функций $p_2 - \varphi$ и $\varphi - p_1$. Поскольку в точках x_1, x_2 и x_3 функции p_1, p_2 и φ равны друг другу, то

$$(\varphi - p_1)[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{(\varphi - p_1)(x_4)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)}$$

и

$$(p_2-\varphi)[x_1,x_2,x_3,x_4]=\frac{(p_2-\varphi)(x_4)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}.$$

Отметим, что $(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)>0$, поэтому если в точке x_4 выполняются неравенства

$$p_2(x_4)\leqslant\varphi(x_4)\leqslant p_1(x_4), \tag{8}$$

то справедливы и неравенства

$$-\frac{1}{3}=p_2[x_1,x_2,x_3,x_4]\leqslant\varphi[x_1,\dots,x_4]\leqslant p_1[x_1,x_2,x_3,x_4]=0,$$

а значит, верно и (6). Итак, нужно доказать справедливость неравенства (8) при выполнении условия (7).

Обозначим полином из определения функции φ в (3) через ψ:

$$\psi(x)=-\frac{1}{3}x^3+16Dx.$$

График полинома ψ на отрезке $[-1,0]$ показан на рис. 3 пунктиром, на отрезке $[0,1]$ функция ψ совпадает с φ по построению.

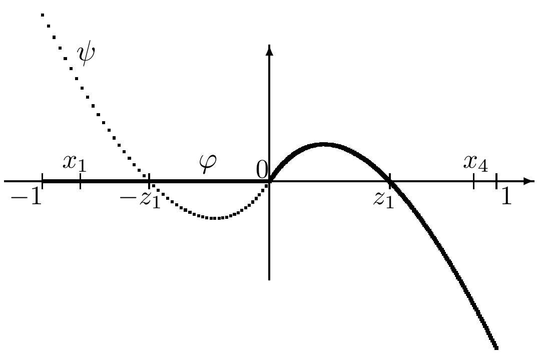


Рис. 3. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Поскольку $\psi(x_4)=\varphi(x_4)$, то вместо соотношения (8) достаточно показать, что справедливо соотношение

$$p_2(x_4)\leqslant\psi(x_4)\leqslant p_1(x_4).$$

Перепишем его в следующем виде:

$$(\psi-p_2)(x_4)\geqslant 0, \tag{9}$$

$$(p_1-\psi)(x_4)\geqslant 0. \tag{10}$$

Докажем, что при выполнении условия (7) выполняются неравенства (9) и (10), что и завершит доказательство теоремы.

Сначала получим полезные соотношения между функциями ψ, p_1 и p_2.

По построению функция $\psi-p_2$ есть полином второй степени, а $p_1-\psi$ есть полином третьей степени со старшим мономом $x^3/3$. Поскольку в силу предположения (7) $x_1<-z_1$, то $p_1(x_1)=p_2(x_1)=0$, откуда

$$(\psi-p_2)(x_1)=\psi(x_1)>0,\qquad (p_1-\psi)(x_1)=-\psi(x_1)<0. \tag{11}$$

Кроме того, на отрезке $[0,1]$ $\psi=\varphi$, поэтому

$$(\psi-p_2)(x_3)=0,\qquad (p_1-\psi)(x_3)=0.$$

Докажем теперь неравенство (9). Для этого покажем, что полином $\psi-p_2$ имеет нуль на отрезке $[x_1,0]$. Рассмотрим два случая: $x_2\in[-z_1,0)$ и $x_2<-z_1$.

В первом случае $(\psi-p_2)(x_2)=\psi(x_2)\leqslant 0$, а в силу (11) имеем $(\psi-p_2)(x_1)>0$, значит, полином $\psi-p_2$ имеет один нуль на $[x_1,x_2]\subset[x_1,0]$.

Во втором случае $x_2<-z_1$. Рассмотрим полином p_2. Ясно, что кроме точек x_1 и x_2 он должен иметь еще один нуль $\overline{x}$, возможно совпадающий с одной из этих точек. Покажем, что $\overline{x}\geqslant -z_1$. В самом деле, пусть это не так, т. е. $\overline{x}<-z_1$. Понятно, что справа от всех своих нулей полином p_2 со старшим коэффициентом $-1/3$ не может быть положительным. Поэтому в данном случае имеем $x_3 > z_1$. Но при всех $x > z_1$

$$p_2(x) = -\frac{1}{3}(x - x_1)(x - x_2)(x - \overline{x}) < -\frac{1}{3}(x - (-z_1))x(x - z_1) = \psi(x),$$

что противоречит условию $p_2(x_3) = \psi(x_3)$.

Итак, во втором случае $\overline{x} \geqslant -z_1$ и для нулей полинома p_2 выполняются неравенства

$$x_1 < x_2 < -z_1 \leqslant \overline{x}.$$

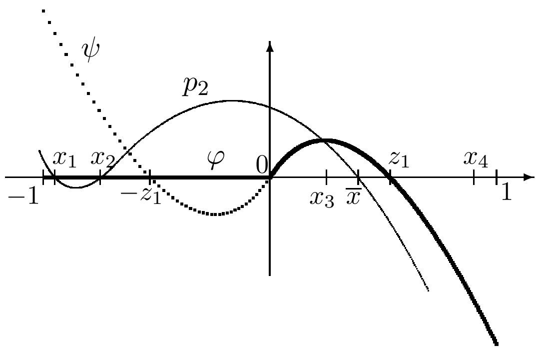


Рис. 4. Полином $p_2(x)$.

Пример такого расположения нулей показан на рис. 4. На отрезке между своими нулями x_2 и $\overline{x}$ полином p_2 положителен, в том числе $p_2(-z_1) > \psi(-z_1) = 0$. Сопоставив это с (11), приходим к выводу, что функция $\psi - p_2$ имеет не менее одного нуля на отрезке $[x_1, -z_1] \subset [x_1, 0]$.

Таким образом, функция $\psi - p_2$ есть полином второй степени, который имеет два простых нуля: один на отрезке $[x_1, 0]$, второй в точке x_3. Поскольку $\psi - p_2 > 0$ в точке x_1, то $\psi - p_2 > 0$ правее x_3, т. е. неравенство (9) доказано.

Докажем справедливость неравенства (10). Если $x_3 \in (0, z_1]$, то $p_1(x_3) = \varphi(x_3) \geqslant 0$. Поскольку p_1 есть полином второй степени и оба его нуля x_1 и x_2 лежат левее x_3, то при всех $x > x_2$ выполняется $p_1(x) \geqslant 0$. Это значит, что $p_1(x_4) \geqslant 0 > \psi(x_4)$, что и дает нам (10) при $x_3 \in (0, z_1]$.

Пусть $x_3 > z_1$. В этом случае $p_1(x_3) < 0$, и поэтому $p_1(x) < 0$ при всех $x > x_2$. Рассмотрим два случая: $x_2 \geqslant -z_1$ и $x_2 < -z_1$.

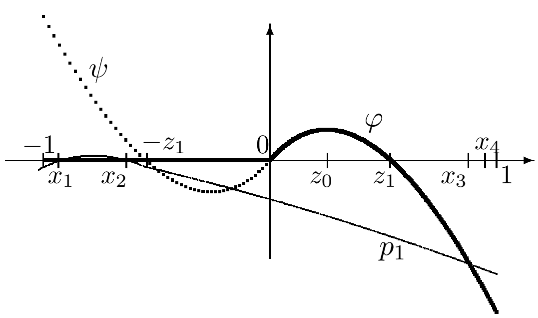


Рис. 5. Полином $p_1(x)$.

Если $x_2 \geqslant -z_1$, то в точке x_2 $(p_1 - \psi)(x_2) = -\psi(x_2) \geqslant 0$. С другой стороны, учитывая (11), имеем $(p_1 - \psi)(x_1) < 0$, поэтому полином $p_1 - \psi$ имеет нуль на $[x_1, x_2]$. Кроме того, поскольку $(p_1 - \psi)(x_2) \geqslant 0$ и $p_1(z_0) < 0 < \psi(z_0)$, то $p_1 - \psi$ имеет еще один нуль на $(x_2, z_0]$. Третий нуль у полинома $p_1 - \psi$ лежит в точке x_3, поэтому правее него $(p_1 - \psi)(x) > 0$, что и приводит нас к (10).

Если же $x_2 < -z_1$ (как это показано на рис. 5), то рассмотрим функции ψ и p_1 на отрезке $[z_0, x_3]$. В точке z_0 выполняется неравенство $p_1' < \psi' = 0$. С другой стороны, поскольку $\psi(x_3) - \psi(z_0) < p_1(x_3) - p_1(z_0)$, то на отрезке $[z_0, x_3]$ найдется точка, в которой $\psi' < p_1'$. Это значит, что на отрезке $[z_0, x_3]$ есть нуль производной $\psi' - p_1'$. Второй нуль полинома $\psi' - p_1'$ лежит между точками $(x_1 + x_2)/2$ и $-z_0$.

Поскольку оба нуля полинома $\psi' - p_1'$ лежат левее точки x_3, то при $x > x_3$ справедливо неравенство $\psi' < p_1'$. Сопоставив его с равенством $\psi(x_3) = p_1(x_3)$, получаем, что при $x > x_3$ справедливо неравенство $\psi < p_1$, а значит, и неравенство (10).

Теорема 3 доказана. □

Автор благодарит В. И. Бердышева за постановку задачи и С. Н. Васильева за помощь в работе над статьей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Корнейчук Н.П.** Точные константы в теории приближения, М.: Наука, 1987. 422 с.
2. **Мироненко А.В.** Оценка величины наилучшего приближения классом функций с ограниченной второй производной // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 4. С. 842–858.
3. **Мироненко А.В.** О точности оценок приближения классом функций с ограниченной второй производной // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 6. С. 1285–1294.
4. **Мироненко А.В.** Приближение классом функций с ограниченной второй производной // Мат. заметки. 2008. Т. 84, № 4. С. 583–594.
5. **Мироненко А.В.** Об оценке равномерного уклонения от класса функций с ограниченной третьей производной // Тр. междунар. летней мат. шк. С. Б. Стечкина по теории функций. Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. С. 93–95.
6. **Мироненко А.В.** Равномерное приближение классом функций с ограниченной производной // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 5. С. 696–712.

Мироненко Александр Васильевич
науч. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: a_mironenko@mail.ru

Поступила 29.02.2008

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14 № 3 2008

УДК 517.5

ИНТЕРПОЛЯЦИОННО-ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ВСПЛЕСКОВ[1]

Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных

На базе всплесков Мейера построены новые системы периодических всплесков и всплесков на всей оси, которые одновременно являются ортогональными и интерполяционными. Получены оценки погрешности аппроксимации такими всплесками различных классов гладких функций.

Ключевые слова: ортогональные базисы всплесков, интерполяционные системы, кратномасштабный анализ.

Теория ортонормированных регулярных всплесков в настоящее время хорошо развита (см., например, [1–3]). Интенсивное развитие этой теории началось в 80-е годы прошлого столетия. Ее основу составляют система вложенных подпространств V_j $(j \in \mathbb{Z})$ пространства $L^2(\mathbb{R})$, ортонормированные базисы $\{\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\varphi(2^j x - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ которых порождены одной функцией $\varphi(x)$, и система подпространств W_j, являющихся ортогональными дополнениями V_j до V_{j+1}. Ортонормированные базисы $\{\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ подпространств W_j также порождены одной функцией — всплеском $\psi(x)$. При этом функция $\psi(x)$ определяется посредством функции $\varphi(x)$. Для построения базисов всплесков периодических функций обычно используется операция периодизации базисов всплесков на всей оси.

Введенные в 1910 г. А. Хааром ортонормированные системы, генерируемые функциями $\varphi(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ и $\psi(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x-1)$, являются простейшими базисами ортонормированных всплесков.

Интерполяционные всплески также появились давно. В работах [4, 5] на основе полиномиальных сплайнов построен базис пространств гладких периодических функций — система интерполяционных периодических всплесков вместе с системой вложенных подпространств V_j $(j \in \mathbb{Z}_+)$ и подпространств W_j — прямых (не ортогональных) дополнений V_j до V_{j+1}, а также исследованы их аппроксимативные свойства. С помощью работы [6] указанные результаты легко переносятся на пространства функций, равномерно непрерывных вместе с соответствующими производными на всей оси. В этих пространствах базисы в V_j и W_j получаются на основе сжатий и сдвигов лишь одной функции, а именно, фундаментального сплайна $L_n(x)$ — сплайна степени n дефекта 1 с узлами в целых точках при n нечетном и в полуцелых при n четном, удовлетворяющего условиям $L_n(s) = \delta_{0,s}$ $(s \in \mathbb{Z})$. При этом в случае нечетного n используется традиционное двоично-рациональное сжатие — растяжение, а при n четном — троично-рациональное, что необходимо для обеспечения в этих случаях вложений $V_j \subset V_{j+1}$ $(j \in \mathbb{Z})$. Точнее, при n — нечетном базисом V_j является система функций $\{L_n(2^j x - k)\colon\ k \in \mathbb{Z}\}$, а базисом W_j — система $\{L_n(2^{j+1}x - 2k + 1)\colon\ k \in \mathbb{Z}\}$. При n — четном, соответственно, $\{L_n(3^j x - k)\colon$ $k \in \mathbb{Z}\}$ — базис пространства V_j, а $\{L_n(3^{j+1}x - 3k + 1),\ L_n(3^{j+1}x - 3k + 2)\colon\ k \in \mathbb{Z}\}$ — базис пространства W_j. По-видимому, для непрерывных функций использование интерполяционных всплесков более предпочтительно. В частности, для таких функций построение интерполяционных всплеск-аппроксимаций проще, чем ортогональных всплеск-проекций, а дискретные всплеск-преобразования (прямое и обратное) выполняются по таким же правилам, что и в ортогональном случае (см., например, [7]).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 08-01-00213, 08-01-00320) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-1071.2008.1).

Представляется полезным построение систем всплесков, которые одновременно являются ортогональными и интерполяционными как всплески Котельникова — Шеннона с функцией $\varphi(x) = (\sin \pi x)/\pi x$. Проблема интерполяционно-ортогональных всплесков затрагивается в [2] со ссылкой, что некоторые результаты в этом направлении получены в [8]. Чтобы целочисленные сдвиги функции $\varphi(x) \in L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ образовывали ортонормированную и одновременно интерполяционную систему, нужно совместить условия[2]

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\omega+k)|^2 = 1, \qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(\omega+k) = 1. \tag{1}$$

В [2] доказано, что таких функций $\varphi(x)$ с компактным носителем не существует.

Мы продолжаем эти исследования, используя функции $\widehat{\varphi}(\omega) = \widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$ мейеровского типа (см., например, [1,10] и имеющуюся там библиографию). Считаем, что $0 \le \widehat{\varphi}(\omega) \le 1$, носитель $\widehat{\varphi}(\omega)$ совпадает с отрезком $[-(1+\varepsilon)/2,\ (1+\varepsilon)/2]$, $0 < \varepsilon \le 1/3$, $\widehat{\varphi}(\omega) = 1$ при $-(1-\varepsilon)/2 \le \omega \le (1-\varepsilon)/2$, $\widehat{\varphi}(\omega)$ — четная, а на промежутке $[(1-\varepsilon)/2,\ (1+\varepsilon)/2]$ функция $\widehat{\varphi}^2(\omega) - 1/2$ — нечетная относительно $\omega = 1/2$. Тогда $\widehat{\varphi}^2(\omega) + \widehat{\varphi}^2(\omega-1) \equiv \widehat{\varphi}^2(\omega) + \widehat{\varphi}^2(1-\omega) \equiv 1$ при $(1-\varepsilon)/2 \le \omega \le (1+\varepsilon)/2$. Такая конструкция использована в [1,9–11]. Будем предполагать, как в [11], что $\widehat{\varphi}'(\omega)$ — функция ограниченной вариации. Ясно, что функция $\widehat{\varphi}(\omega)$ удовлетворяет первому из условий (1). Подправим функцию $\widehat{\varphi}(\omega)$ так, чтобы сохранилось это условие и было выполнено второе из условий (1).

Предложим два способа построения требуемых функций. Пусть $\widehat{\varphi}(\omega)$ — произвольная описанная выше функция мейеровского типа. При первом способе будем искать требуемую функцию $\widehat{\varphi}_1(\omega)$ в следующем виде: $\widehat{\varphi}_1(\omega) = \widehat{\varphi}(\omega) + \alpha(\omega) + i\,(\operatorname{sign}\omega)\beta(\omega)$, где $i^2 = -1$, $\alpha(\omega)$ и $\beta(\omega)$ — четные вещественные на $\mathbb{R}$ функции, их общий носитель есть объединение двух отрезков $[-(1+\varepsilon)/2,\ -(1-\varepsilon)/2]$, $[(1-\varepsilon)/2,\ (1+\varepsilon)/2]$, и каждая из них на этих отрезках неотрицательна и четна относительно точек $\omega = -1/2$, $\omega = 1/2$ соответственно. Ясно, что условия (1) для $\varphi = \varphi_1$ на отрезках $\Delta_k = [-(1-\varepsilon)/2+k,\ (1-\varepsilon)/2+k]$ $(k \in \mathbb{Z})$ выполняются, так как носители функций $\alpha(\omega)$ и $\beta(\omega)$ и их целочисленных сдвигов не содержат точек из Δ_k, а для $\widehat{\varphi}(\omega)$ на промежутках Δ_k условия (1) выполнены. В силу 1-периодичности левых частей равенств (1) с $\varphi = \varphi_1$ выполнение условий (1) осталось удовлетворить лишь на отрезке $[(1-\varepsilon)/2,\ (1+\varepsilon)/2]$ периода $[-(1-\varepsilon)/2,\ (1+\varepsilon)/2]$. Потребуем, чтобы на этом отрезке было выполнено равенство

$$1 = \widehat{\varphi}_1(\omega) + \widehat{\varphi}_1(\omega-1) = \widehat{\varphi}(\omega) + \alpha(\omega) + i\,(\operatorname{sign}\omega)\beta(\omega) + \widehat{\varphi}(\omega-1) + \alpha(\omega-1) + i\,(\operatorname{sign}(\omega-1))\beta(\omega-1),$$

которое с учетом условий четности, наложенных на α и β, превращается в равенство $1 = \widehat{\varphi}(\omega) + \widehat{\varphi}(\omega-1) + 2\alpha(\omega)$. Отсюда

$$\alpha(\omega) = \frac{1 - \widehat{\varphi}(\omega) - \widehat{\varphi}(\omega-1)}{2}. \tag{2}$$

Аналогично, подставляя $\alpha(\omega)$ в выражение для $\widehat{\varphi}_1(\omega)$ и учитывая, что $\widehat{\varphi}(\omega)$ удовлетворяет первому из условий (1), имеем

$$1 = |\widehat{\varphi}_1^2(\omega)|^2 + |\widehat{\varphi}_1(\omega-1)|^2 = \Big(\frac{1 + \widehat{\varphi}(\omega) - \widehat{\varphi}(\omega-1)}{2}\Big)^2 + 2\beta^2(\omega)$$
$$+ \left(\frac{1 - \widehat{\varphi}(\omega) + \widehat{\varphi}(\omega-1)}{2}\right)^2 = 2\beta^2(\omega) + 1 - \widehat{\varphi}(\omega)\widehat{\varphi}(\omega-1).$$

Отсюда

$$\beta(\omega) = \sqrt{\frac{\widehat{\varphi}(\omega)\widehat{\varphi}(\omega-1)}{2}}. \tag{3}$$

[2]Здесь и далее преобразование Фурье $\widehat{f}(\omega)$ для $f \in L(\mathbb{R})$ определяется как $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x\omega}\,dx$ на $L(\mathbb{R})$ и обычным образом распространяется на $L^2(\mathbb{R})$.

Отметим, что обе функции $\alpha(\omega)$ и $\beta(\omega)$ удовлетворяют наложенным на них априори (и уже использованным) ограничениям.

При втором способе $\widehat{\varphi}_2(\omega)$ будем искать в виде $\widehat{\varphi}_2(\omega) = |\widehat{\varphi}(\omega)|^2 + i\,(\operatorname{sign}\omega)\beta(\omega)$, где $\beta(\omega)$ удовлетворяет тем же условиям четности и ограничениям на носитель. Тогда условия (1) достаточно удовлетворить на отрезке $[(1-\varepsilon)/2,\ (1+\varepsilon)/2]$. Здесь имеем

$$\widehat{\varphi}_2(\omega) + \widehat{\varphi}_2(\omega-1) = \widehat{\varphi}^2(\omega) + \widehat{\varphi}^2(\omega-1) + i[\beta(\omega) - \beta(\omega-1)] \equiv 1,$$

и второе условие (1) автоматически выполняется. Далее потребуем, чтобы при $(1-\varepsilon)/2 \le \omega \le (1+\varepsilon)/2$ было

$$1 \equiv |\widehat{\varphi}_2(\omega)|^2 + |\widehat{\varphi}_2(\omega-1)|^2 = |\widehat{\varphi}(\omega)|^4 + \beta^2(\omega) + |\widehat{\varphi}(\omega-1)|^4 + \beta^2(\omega-1)$$

$$= [\widehat{\varphi}^2(\omega) + \widehat{\varphi}^2(\omega-1)]^2 - 2\widehat{\varphi}^2(\omega)\widehat{\varphi}^2(\omega-1) + 2\beta^2(\omega).$$

Отсюда на указанном отрезке

$$\beta(\omega) = \widehat{\varphi}(\omega)\widehat{\varphi}(\omega-1). \tag{4}$$

Функции $\widehat{\varphi}_1(\omega)$ и $\widehat{\varphi}_2(\omega)$ на их носителе $[-(1+\varepsilon)/2,\ (1+\varepsilon)/2]$ можно записать в виде

$$\widehat{\varphi}_1(\omega) = \widehat{\varphi}_1(\omega, \widehat{\varphi})$$

$$= \frac{(1 + \widehat{\varphi}(\omega) - \widehat{\varphi}(\omega-1) - \widehat{\varphi}(\omega+1)) \pm i(\operatorname{sign}\omega)\sqrt{2\widehat{\varphi}(\omega)(\widehat{\varphi}(\omega-1) + \widehat{\varphi}(\omega+1))}}{2}, \tag{5}$$

$$\widehat{\varphi}_2(\omega) = \widehat{\varphi}_2(\omega, \widehat{\varphi}) = \widehat{\varphi}^2(\omega) \pm i(\operatorname{sign}\omega)\widehat{\varphi}(\omega)(\widehat{\varphi}(\omega-1) + \widehat{\varphi}(\omega+1)). \tag{6}$$

Положим

$$\varphi_s(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}_s(\omega) e^{2\pi i\omega x} d\omega \qquad (s = 1, 2). \tag{7}$$

Ясно, что функции $\varphi_s(x)$ вещественные, если порождающая их функция $\widehat{\varphi}(\omega)$ четная.

Отметим, что представления (5), (6) эквивалентны в том смысле, что если функция $\widehat{\varphi}_1(\omega)$ представима в форме (5), то найдется, вообще говоря, другая функция $\widehat{\varphi}(\omega)$ мейеровского типа, с помощью которой $\widehat{\varphi}_1(\omega)$ будет представлена в форме (6). И наоборот. Действительно, обозначим функцию $\widehat{\varphi}(\omega)$ мейеровского типа в (5) через $\widehat{\varphi}(\omega) = \widehat{\varphi}_{1,1}(\omega)$ и положим

$$\widehat{\varphi}_{2,1}(\omega) = \sqrt{\frac{1 + \widehat{\varphi}_{1,1}(\omega) - \widehat{\varphi}_{1,1}(\omega-1) - \widehat{\varphi}_{1,1}(\omega+1)}{2}} \qquad \text{при} \qquad -\frac{1+\varepsilon}{2} \le \omega \le \frac{1+\varepsilon}{2},$$

$\widehat{\varphi}_{2,1}(\omega) = 0$ для $|\omega| \ge (1+\varepsilon)/2$. Легко проверить, что $\widehat{\varphi}_{2,1}(\omega)$ — функция мейеровского типа и для $\widehat{\varphi}_1(\omega)$ справедливо представление (6) с заменой $\widehat{\varphi}(\omega)$ на $\widehat{\varphi}_{2,1}(\omega)$, так как при этом правые части равенств (5) и (6) совпадут: $\widehat{\varphi}_2(\omega, \widehat{\varphi}_{2,1}) = \widehat{\varphi}_1(\omega, \widehat{\varphi})$. Обратно, пусть в (6) $\widehat{\varphi}(\omega) = \widehat{\varphi}_{2,2}(\omega)$ — функция мейеровского типа. Положим

$$\widehat{\varphi}_{1,2}(\omega) = \frac{2\widehat{\varphi}^2_{2,2}(\omega) - 1 + [1 + 4\widehat{\varphi}^2_{2,2}(\omega)(\widehat{\varphi}^2_{2,2}(\omega-1) + \widehat{\varphi}^2_{2,2}(\omega+1))]^{1/2}}{2}$$

при $-(1+\varepsilon)/2 \le \omega \le (1+\varepsilon)/2$, $\widehat{\varphi}_{1,2}(\omega) = 0$ для $|\omega| \ge (1+\varepsilon)/2$. Тогда $\widehat{\varphi}_{1,2}(\omega)$ — функция мейеровского типа, и при подстановке $\widehat{\varphi}_{1,2}(\omega)$ в равенство (5) вместо $\widehat{\varphi}(\omega)$ после очевидных преобразований правая часть (5) преобразуется в правую часть (6): $\widehat{\varphi}_1(\omega, \widehat{\varphi}_{1,2}) = \widehat{\varphi}_2(\omega, \widehat{\varphi})$.

Положим $V_j = V_{s,j} = \Big\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \varphi_s(2^j x - k) \colon\ (c_k) \in l^2(\mathbb{Z}) \Big\}$ $(s = 1, 2)$. Понятие кратномасштабного анализа, введенное И. Мейером [1], можно найти, например, в [3].

Теорема 1. *При целом j и $s=1,2$ система функций $\{2^{-j/2}\varphi_{s,j,k}(x)=\varphi_s(2^jx-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ является одновременно интерполяционной на сетке $\{x_{j,r}=r/2^j:\ r\in\mathbb{Z}\}$ и ортогональной в $L^2(\mathbb{R})$ в том смысле, что*

$$2^{-j/2}\varphi_{s,j,k}(x_{j,r})=\delta_{r,k},\qquad \int\limits_{\mathbb{R}}\varphi_{s,j,k}(x)\overline{\varphi_{s,j,r}}(x)\,dx=\delta_{r,k}\qquad (r,k\in\mathbb{Z}).$$

Последовательность подпространств $\{V_{s,j}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ образует кратномасштабный анализ пространства $L^2(\mathbb{R})$. Функции из $V_{s,j}$ являются непрерывными и ограниченными на $\mathbb{R}$.

Доказательство. Интерполяционность и ортогональность рассматриваемых систем функций следуют (см., например, [2]) из того, что для функций $\varphi_s(x)$ $(s=1,2)$ выполнены условия (1).

Вложенность подпространств $V_{s,j}\subset V_{s,j+1}$ $(j\in\mathbb{Z})$ следует из того, что требуемое для этого (см., например, [3]) равенство $\widehat{\varphi}_s(2\omega)=m_s(\omega)\widehat{\varphi}_s(\omega)$ $(s=1,2)$, где $m_s(\omega)$ — 1-периодическая функция из $L_2[0,1]$, имеет место при

$$m_s(\omega)=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi}_s(2(\omega+\nu)).\tag{8}$$

Остальные требования кратномасштабного анализа следуют из определения $V_{s,j}$ и общей теории всплесков (см., например, [3, теоремы 1.2.9, 1.2.10]).

Непрерывность и ограниченность функций из $V_{s,j}$ следуют из компактности носителя функций $\widehat{\varphi}_s(\omega)$ $(s=1,2)$ и равномерной оценки $|\varphi_s(x)|\le c/(1+x^2)$, получающейся, как в [1, 10, 11], из двукратного интегрирования (7) по частям. Интегрируя по частям, видим, что для обеспечения этой оценки достаточна ограниченность вариации первой производной функции $\widehat{\varphi}_s(\omega)$, вытекающая из условия $\widehat{\varphi}\,'(\omega)\in V(\mathbb{R})$.

Пусть $m_s(\omega)$ представлена формулой (8) и

$$\widehat{\psi}_s(\omega)=e^{i\pi\omega}m_s\Big(\frac{\omega+1}{2}\Big)\widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\qquad (s=1,2).$$

Через $W_{s,j}$ обозначим замыкание в $L^2(\mathbb{R})$ линейной оболочки системы $\{\psi_{s,j,k}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ $(s=1,2)$:

$$W_{s,j}=\Big\{f_j(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}d_k\psi_{s,j,k}(x)\colon\ (d_k)\in l^2(\mathbb{Z})\Big\}.$$

Теорема 2. *Подпространство $W_{s,j}$ является ортогональным дополнением $V_{s,j}$ до $V_{s,j+1}$ $(j\in\mathbb{Z})$, $W_{s,j}\subset L^2(\mathbb{R})\cap C(\mathbb{R})$.*

Утверждение следует из общей теории всплесков (см., например, [3, теоремы 1.3.1, 1.3.7]).

Обозначим через $\Phi_{s,j,k}(x)$ $(j,k\in\mathbb{Z}_+,\ 1\le k\le 2^j)$ тригонометрический полином порядка $[2^{j-1}(1+\varepsilon)]$ ($[y]$ — целая часть числа y, $0<\varepsilon\le 1/3$), получающийся 1-периодизацией функции $2^{j/2}\varphi_s(2^jx-k)$:

$$\Phi_{s,j,k}(x)=\operatorname{Pe}\varphi_{s,j,k}(x):=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\varphi_{s,j,k}(x+\nu),$$

где Pe — оператор 1-периодизации. Имеем $\Phi_{s,0,1}(x)\equiv 1$, $2^{-j/2}\Phi_{s,j,k}(l/2^j)=\delta_{l,k}$.

Обозначим через $\widetilde{V}_{s,j}$ подпространство тригонометрических полиномов, натянутое на свой интерполяционный базис $\{\Phi_{s,j,k}:\ 1\le k\le 2^j\}$ — часть тригонометрических полиномов порядка $[(1+\varepsilon)2^{j-1}]$, содержащая все полиномы порядка не выше $2^{j-1}(1-\varepsilon)$; $\widetilde{V}_{s,0}=\{\text{const}\}$. В силу вложений $\widetilde{V}_{s,j}\subset\widetilde{V}_{s,j+1}$, учитывая равенства $\Phi_{s,j,k}(2l/2^{j+1})=2^{j/2}\delta_{k,l}$, имеем

$$2^{-j/2}\Phi_{s,j,k}(x)=2^{-(j+1)/2}\Phi_{s,j+1,2k}(x)+\sum_{l=1}^{2^j}2^{-j/2}\Phi_{s,j,k}\Big(\frac{2l-1}{2^{j+1}}\Big)2^{-(j+1)/2}\Phi_{s,j+1,2l-1}(x).$$

Отсюда следует, что в качестве прямого дополнения $\widetilde{V}_{s,j}$ до $\widetilde{V}_{s,j+1}$ можно взять подпространство $\widetilde{W}_j = \mathrm{Lin}\{\Phi_{s,j+1,2k-1}(x):\ k \in \mathbb{Z},\ 1 \le k \le 2^j\}$ $(j \in \mathbb{Z}_+)$ с интерполяционным базисом $\{\Phi_{s,j+1,2k-1}:\ k \in \mathbb{Z},\ 1 \le k \le 2^j\}$:

$$\widetilde{V}_{s,j+1} = \widetilde{V}_{s,j} \oplus \widetilde{W}_{s,j} \qquad \Big(w(x) \in \widetilde{W}_{s,j} \Leftrightarrow w(x) = \sum_{k=1}^{2^j} 2^{-(j+1)/2} w\Big(\frac{2k+1}{2^{j+1}}\Big)\Phi_{s,j+1,2k-1}(x)\Big).$$

При $2^j < n \le 2^{j+1}$ положим

$$S_n(f,x;\Phi_s) = \sum_{k=1}^{2^j} f\Big(\frac{k}{2^j}\Big) 2^{-j/2}\Phi_{s,j,k}(x) + \sum_{k=1}^{n-2^j} R_{2^j}\Big(f, \frac{2k-1}{2^{j+1}}\Big)\Phi_{s,j+1,2k-1}(x), \tag{9}$$

где

$$R_{2^j}(f,x) = f(x) - S_{2^j}(f,x;\Phi_s), \qquad S_{2^j}(f,x;\Phi_s) = \sum_{k=1}^{2^j} f\Big(\frac{k}{2^j}\Big)2^{-j/2}\Phi_{s,j,k}(x).$$

Отметим, что $S_n(f,x;\Phi)$ есть частная сумма порядка n ряда

$$f(1) + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{j-1}} d_{j,k}(f) 2^{-j/2}\Phi_{s,j,2k-1}(x),$$

члены которого линейно упорядочены по возрастанию индекса $m = 2^{j-1} + k$ $(j,k \in \mathbb{N},\ 1 \le k \le 2^{j-1})$, где коэффициенты $d_{j,k}(f)$ определяются рекуррентно в соответствии с интерполяционной формулой (9): здесь

$$d_{j,k} = f\Big(\frac{2k-1}{2^j}\Big) - S_{2^{j-1}}\Big(f, \frac{2k-1}{2^j}; \Phi_s\Big) \qquad (S_1(f,x;\Phi_s) \equiv f(1)).$$

В этом смысле систему $\{1, 2^{-j/2}\Phi_{s,j,2k-1}:\ j,k \in \mathbb{N},\ 1 \le k \le 2^{j-1}\}$ будем называть интерполяционным базисом пространства V, если любую функцию из V можно представить таким равномерно сходящимся рядом.

Теорема 3. *Система функций* $\big\{1, 2^{-(j+1)/2}\Phi_{s,j+1,2k-1}:\ j,k \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \le k \le 2^j\big\}$ *образует интерполяционный базис пространств* $\widetilde{C}^{(r)}[0,1]$ *1-периодических функций, непрерывных вместе с производной порядка* r. *Для любой пары натуральных* r, m *существует положительная константа* $C(r,m,\varphi_s) < \infty$ *такая, что для любой* $f \in \widetilde{C}^{(r)}[0,1]$

$$\|f^{(\nu)}(x) - S_n^{(\nu)}(f,x;\Phi)\| \le C(r,m,\varphi_s)\omega_m\Big(f^{(\nu)}, \frac{1}{n}\Big) \qquad (0 \le \nu \le r),$$

где $\omega_m(f,\delta)$ — m*-й модуль гладкости* f *в* $\widetilde{C}[0,1]$ *и* $\|f\|$ — *равномерная норма в* $\widetilde{C}[0,1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из оценки $|\varphi_s(x)| \le C(1+x^2)^{-1}$, как доказано в [10], вытекает, что

$$|2^{-j/2}\Phi_{s,j,k}(x)| \le C(\varepsilon)\Big[2^j\Big|\sin\pi\Big(x - \frac{k}{2^j}\Big)\Big| + 1\Big]^{-2},$$

где $C(\varepsilon)$ зависит только от $\widehat{\varphi}_s(\varepsilon)$. Отсюда и из (9) следует, что

$$|S_{2^j}(f,x;\Phi)| = \Big|\sum_{k=1}^{2^j} f\Big(\frac{k}{2^j}\Big)2^{-j/2}\Phi_{s,j,k}(x)\Big| \le C(\varepsilon)\|f\|\sum_{k=0}^{2^j}\Big[2^j\Big|\sin\pi\Big(x - \frac{k}{2^j}\Big)\Big| + 1\Big]^{-2}.$$

В силу 1-периодичности функции $|\sin \pi x|$, не нарушая общности, достаточно оценить последнюю сумму при $0 \le x \le 1/2^j$. При таких x

$$\sum_{k=1}^{2^j} \Big[2^j \Big|\sin\pi\Big(x - \frac{k}{2^j}\Big)\Big| + 1\Big]^{-2} \le 2 \sum_{k=1}^{2^{j-1}} \Big[2^j \Big|\sin\pi\Big(x - \frac{k}{2^j}\Big)\Big| + 1\Big]^{-2}$$

$$\le 2\Big\{2 + \sum_{k=2}^{2^{j-1}} \Big[2^j \Big|\sin\pi\Big(x - \frac{k}{2^j}\Big)\Big| + 1\Big]^{-2}\Big\} \le 2\Big\{2 + \sum_{k=2}^{2^{j-1}} \Big[2^j \Big|\frac{k}{2^j} - x\Big| + 1\Big]^{-2}\Big\}$$

$$\le 2\Big\{2 + \sum_{k=2}^{2^{j-1}} (k-1)^{-2}\Big\} \le 2\Big\{2 + \sum_{k=2}^{\infty} (k-1)^{-2}\Big\} \le 8,$$

и для нормы $\|S_n\|_C^C$ оператора S_n как оператора из $\widetilde{C}[0,1]$ в $\widetilde{C}[0,1]$ справедливы оценки

$$\|S_n\|_C^C \le 8C(\varepsilon). \tag{10}$$

Тем же условиям гладкости и компактности носителя, что и $\widehat{\varphi}(\omega)$, удовлетворяет функция $(2\pi i\omega)^\nu \widehat{\varphi}(\omega)$. Поэтому существует положительная константа $C_1(\nu,\varepsilon) < \infty$ такая, что

$$\|S_{2^j}^{(\nu)}(f,x;\Phi)\| \le 8C_1(\nu,\varepsilon) 2^{j\nu} \|f\|, \tag{11}$$

где множитель $2^{j\nu}$ возникает из-за ν-кратного дифференцирования функций $2^{-j/2}\varphi(2^j x - k)$. Из (10) и (11) также следует неравенство

$$\|S_n^{(\nu)}(f,x;\Phi)\| \le C_2(\nu,\varepsilon) 2^{\nu(j+1)} \|f\| \qquad (2^j \le n < 2^{j+1}). \tag{12}$$

Далее, в силу свойств функций $\widehat{\varphi}_s$ $(s = 1,2)$ и второго из равенств (1) аналогично тому, как это делается в [10] для ортогональных периодических всплесков, устанавливается, что для тригонометрических полиномов $\tau_{\nu_n}(x)$ порядка $\nu_n = [n(1-\varepsilon)/2]$ справедливы формулы

$$S_n(\tau_{\nu_n}, x; \Phi) = \tau_{\nu_n}(x) \qquad (2^j \le n < 2^{j+1}).$$

А. Л. Гаркави [12] доказал, что для любой $f(x) \in \widetilde{C}^{(r)}[0,1]$ существует тригонометрический полином $t_n(x)$ порядка не выше n такой, что

$$\max_{0\le\nu\le r} \frac{\|f^{(\nu)}(x) - t_n^{(\nu)}(x)\|}{E_n(f^{(\nu)})} \le C(r),$$

где $E_n(f^{(\nu)})$ — величина наилучшего приближения функции $f^{(\nu)}(x)$ полиномами порядка n (в [12] доказано даже больше, а именно, что $C(r) \le (4/\pi^2)\ln p + A$, где A — абсолютная константа, $p = \min(r,n)$). Отсюда и из неравенств (10), (12) типа Лебега следует, что

$$\|f^{(\nu)} - S_n^{(\nu)}(f,x;\Phi)\| \le \|f^{(\nu)} - t_{\nu_n}^{(\nu)} + S_n^{(\nu)}(f - t_{\nu_n}, x; \Phi)\| \le C(r) E_{\nu_n}(f^{(\nu)}) + (2n)^\nu E_{\nu_n}(f). \tag{13}$$

Из (13) и результатов С. Б. Стечкина [13] по прямым теоремам теории наилучших приближений непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами следует утверждение теоремы 3.

В этой и следующей теоремах обобщаются или усиливаются результаты из [5, 9, 10]. Напомним, что мы здесь традиционно (см. [1–3]) положили

$$\widehat{\psi}_s(\omega) = e^{i\pi\omega} \overline{m}_s\Big(\frac{\omega+1}{2}\Big) \widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\omega}{2}\Big), \qquad m_s(\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}_s(2(\omega+k)) \tag{14}$$

и

$$\psi_s(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}_s(\omega) e^{2\pi i\omega x}\, d\omega \qquad (s = 1, 2). \tag{15}$$

Далее $\psi_{s,j,k} = 2^{j/2}\psi_s(2^j x - k)$ $(j, k \in \mathbb{Z})$ и

$$\Psi_{s,j,k}(x) = \text{Ре } \psi_{s,j,k}(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \psi_{s,j,k}(x+\nu) \qquad (j, k \in \mathbb{N},\ 1 \le k \le 2^j).$$

Обозначим через Γ_n $(n \ge 3)$ множество таких пар индексов (j, k), что j, k — натуральные числа, $1 \le k \le 2^j,\ 2^j + k \le n$, и положим

$$S_n(f, x; \Psi_s) = \int\limits_0^1 f(t)\, dt + \sum_{(j,k)\in\Gamma_n} (f, \Psi_{s,j,k})\Psi_{s,j,k}(x).$$

Теорема 4. *Система* $\{\psi_{s,j,k}(x)\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ $(s = 1, 2)$ *является ортонормированным базисом пространства* $L^2(\mathbb{R})$, *а система* $\{2^{-j/2}\psi_{s,j,k}(x)\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ *является интерполяционной на сетке* $\left\{\dfrac{2k-1}{2^{j+1}} :\ \ j, k \in \mathbb{Z}\right\}$. *Система* $\Psi_s = \{1, \Psi_{s,j,k}(x) :\ \ j, k \in \mathbb{N},\ 1 \le k \le 2^j\}$ *является ортонормированным базисом пространств* $\widetilde{C}^{(r)}[0, 1]$ $(r \in \mathbb{Z}_+)$, *и для* $S_n(f, x; \Psi_s)$, $f \in \widetilde{C}^{(r)}[0, 1]$ *в чебышевской норме справедливы оценки*

$$\|f^{(\nu)}(x) - S_n^{(\nu)}(f, x; \Psi_s)\| \le C(r, m, \Psi_s)\omega_m\Big(f^{(\nu)}, \frac{1}{n}\Big) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, r)$$

с конечными константами $C(r, m, \Psi_s)$.

Система $\{2^{-j/2}\Psi_{s,j,k}(x) :\ \ j, k \in \mathbb{N},\ 1 \le k \le 2^j\}$ *также является интерполяционной на сетке* $\left\{\dfrac{2l-1}{2^{j+1}} :\ j \in \mathbb{Z}_+,\ l \in \mathbb{Z}\right\}$.

В силу ограничений на $\widehat{\varphi}_s(\omega)$ утверждения о базисности в теореме 4 и оценки уклонений $f - S_n$ через $E_{\nu_n}(f)$ доказываются стандартным образом [1, 10, 11]. В этом случае справедлив также аналог неравенств (10), (12). С использованием результата А. Л. Гаркави доказательство сформулированного неравенства протекает по той же схеме, что в теореме 3.

Результаты об оценке погрешности аппроксимации из теорем 3, 4 переносятся и на случай аппроксимации функций из $C^{(r)}(\mathbb{R})$, где $C^{(r)}(\mathbb{R})$ — пространство функций, равномерно непрерывных на $\mathbb{R}$ вместе с производными по r-й порядок включительно. Здесь наряду со стандартными методами дополнительно используется полученный А. Ф. Тиманом [14] аналог результата А. Л. Гаркави об одновременной аппроксимации функции и ее производных целыми функциями экспоненциального типа и результат Д. Б. Тананы [15] о неподвижности целых функций экспоненциального типа $\sigma = 2^{j-1}(1-\varepsilon)$ при ортогональном проектировании на пространство V_j.

Выпишем простые формулы для периодических всплесков $\Phi_{s,j,k}$ и $\Psi_{s,j,k}$ через функции $\widehat{\varphi}_s(\omega)$. Положим $\widehat{\theta}_s(\omega) = e^{-i\pi\omega}\widehat{\psi}_s(\omega) = \widehat{\varphi}_s\Big(\dfrac{\omega}{2}\Big)\big(\overline{\widehat{\varphi}}_s(\omega-1) + \overline{\widehat{\varphi}}_s(\omega+1)\big)$. Через $\widehat{\varphi}_s(\omega)$ и $\widehat{\theta}_s(\omega)$, как и для периодизированных всплесков Мейера, просто выражаются тригонометрические полиномы $\Phi_{s,j,k}(x) = \text{Ре } \varphi_{s,j,k}(x)$ и $\Psi_{s,j,k}(x) = \text{Ре } \psi_{s,j,k}(x)$:

$$\Phi_{s,j,k}(x) = 2^{j/2}\sum_{\nu} \widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)e^{-2\pi ik\nu/2^j}e^{2\pi i\nu x},$$

$$\Psi_{s,j,k}(x) = 2^{j/2}\sum_{\nu} \widehat{\theta}_s\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)e^{-2\pi i(k+0.5)\nu/2^j}e^{2\pi i\nu x}.$$

Отметим, что

$$\operatorname{Re}\widehat{\theta}_s(\omega)=\operatorname{Re}\widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\omega}{2}\Big)(\operatorname{Re}\widehat{\varphi}_s(\omega-1)+\operatorname{Re}\widehat{\varphi}_s(\omega+1)),$$

$$\operatorname{Im}\widehat{\theta}_s(\omega)=\pm\Big(\operatorname{Im}\widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\omega}{2}\Big)-\operatorname{Im}\widehat{\varphi}_s(\omega)\Big),$$

для носителей этих функций справедливы представления

$$\operatorname{supp}\operatorname{Re}\widehat{\theta}_s(\omega)=\Big\{\omega:\ \frac{1-\varepsilon}{2}\le|\omega|\le 1+\varepsilon\Big\},$$

$$\operatorname{supp}\operatorname{Im}\widehat{\theta}_s(\omega)=\Big\{\omega:\ \frac{1-\varepsilon}{2}\le|\omega|\le\frac{1+\varepsilon}{2}\ \text{ на }\ 1-\varepsilon\le|\omega|\le 1+\varepsilon\Big\},$$

и, кроме того, $\operatorname{Re}\widehat{\theta}_s(\omega)\equiv 1,\ \operatorname{Im}\widehat{\theta}_s(\omega)\equiv 0$ при $(1+\varepsilon)/2\le|\omega|\le 1-\varepsilon$. Если исходная функция $\widehat{\varphi}(\omega)$ мейеровского типа четная, функция $\operatorname{Re}\widehat{\theta}_s(\omega)$ также будет четной, а $\operatorname{Im}\widehat{\theta}_s(\omega)$ — нечетной и, следовательно, функции $\varphi_{s,j,k}(x),\ \psi_{s,j,k}(x),\ \Phi_{s,j,k}(x)$ и $\Psi_{s,j,k}(x)$ будут вещественными.

К о н к р е т н а я р е а л и з а ц и я. В качестве примера, для которого базисные функции, удовлетворяющие теоремам 1–4, можно выписать явно, возьмем четную функцию $\widehat{\varphi}(\omega)$ мейеровского типа, которая на отрезке $[(1-\varepsilon)/2,\ (1+\varepsilon)/2]$ определяется формулой

$$\widehat{\varphi}(\omega)=\cos\pi\frac{\omega-\dfrac{1-\varepsilon}{2}}{2\varepsilon}.$$

В этом случае из формул (3) и (6) можно получить

$$\varphi_2(x)=\frac{\sin\pi x}{\pi x}\,\frac{\cos\pi\varepsilon x}{1\pm 2\varepsilon x},\qquad \varphi_2(k)=\delta_{k,0}\qquad (k\in\mathbb{Z}),\tag{16}$$

$$\psi_2\Big(x+\frac12\Big)=\frac{\sin\pi x}{\pi x}\Big\{\frac{2\cos\pi x\cos 2\pi x\varepsilon}{4x\varepsilon\pm 1}-\frac{\cos\pi x\varepsilon}{1\pm 2x\varepsilon}\Big\}.\tag{17}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Meyer Y.** Ondelettes. Paris: Hermann, 1990. 215 p.
2. **Добеши И.** Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ “Регуляр. и хаотич. динамика”, 2001. 464 с.
3. **Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А.** Теория всплесков. М.: Физматлит, 2005. 616 с.
4. **Субботин Ю.Н.** О гладком базисе в $C[0,2\pi]$ // Тр. центр. зонального объединения мат. кафедр. Калинин, 1970. Вып. 1. С. 141–144.
5. **Субботин Ю.Н.** Приближение сплайнами и гладкие базисы в $C[0,2\pi]$ // Мат. заметки. 1972. Т. 12, вып. 1. С. 43–51.
6. **Субботин Ю.Н.** О кусочно-полиномиальной интерполяции // Мат. заметки. 1967. Т. 1, вып. 1. С. 63–70.
7. **Donoho D.L.** Interpolating wavelet transforms: preprint. Stanford: Stanford Univ., 1992. 54 p.
8. **Evangelista G.** Wavelet transforms and wave digital filters // Proc. of the internat. conf. on wavelets. Marseille, 1989. P. 396–407.
9. **Новиков И.Я.** Онделетты И. Мейера — оптимальный базис в $C(0,1)$ // Мат. заметки. 1992. Т. 52, вып. 5. С. 88–92.
10. **Offin D., Oskolkov K.** A note on orthonormal polynomial bases and wavelets // Constr. Approx. 1993. Vol. 9. P. 319–325.
11. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Базисы всплесков в пространствах аналитических функций // Тр. МИАН. 1997. Т. 219. С. 340–355.

12. **Гаркави А.Л.** О совместном приближении периодической функции и ее производных тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1960. Т. 24. С. 103–128.
13. **Стечкин С.Б.** О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1951. Т. 15, № 3. С. 219–242.
14. **Тиман А.Ф.** К вопросу об одновременной аппроксимации функции и ее производных на всей числовой оси // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1960. Т. 24. С. 421–430.
15. **Танана Д.Б.** Системы всплесков типа И. Мейера в пространствах $L_p(\mathbb{R})$ // Изв. Урал. ун-та. Сер. Математика и механика. 2006. Т. 44, вып. 9. С. 140–151.

Субботин Юрий Николаевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-кор. РАН
зав. отд.
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: yunsub@imm.uran.ru

Поступила 4.06.2008

Черных Николай Иванович
д-р физ.-мат. наук
зав. отд.
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: Nikolai.Chernykh@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14 № 3 2008

О СКОРОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ МНОГОЧЛЕНАМИ БЕРНШТЕЙНА[1]

С. А. Теляковский

Получены уточнения оценок уклонений многочленов Бернштейна от функций в фиксированной точке и остаточных членов в асимптотических формулах для этих уклонений для дифференцируемых функций.

Ключевые слова: многочлены Бернштейна, скорость приближения, асимптотические оценки.

1. Введение

Работа посвящена уточнению оценок скорости сходимости многочленов Бернштейна от функций в фиксированной точке и уточнению остаточных членов в асимптотических формулах для этих уклонений.

Всюду в работе $f(x)$ считается ограниченной на $[0,1]$ функцией, $\omega(f,\delta)$ обозначает ее модуль непрерывности,

$$B_n(f,x) := \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right)\rho_{n,\nu}(x), \qquad \rho_{n,\nu}(x) := \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu},$$

— многочлены Бернштейна функции f.

Известна оценка Т. Поповичу (см. [1, теорема 1.6.1]) уклонений для непрерывных функций

$$\bigl|f(x) - B_n(f,x)\bigr| \leqslant \frac{5}{4}\,\omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{1.1}$$

Мы показываем в разд. 2, что если иметь в виду уклонение только в одной фиксированной точке, то несколько более точная оценка справедлива при более слабых условиях на функцию f.

В разд. 4 подобным образом уточняется оценка скорости сходимости для функций, имеющих непрерывную производную первого порядка [1, теорема 1.6.2]:

$$\bigl|f(x) - B_n(f,x)\bigr| \leqslant \frac{3}{4\sqrt{n}}\,\omega\left(f', \frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{1.2}$$

Далее в разд. 4 уточняются остаточные члены в асимптотической формуле для уклонений функций, имеющих вторую производную:

$$f(x) - B_n(f,x) = -\frac{x(1-x)}{2n} f''(x) + o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n \to \infty,$$

(Е. В. Вороновская [2]) и в соответствующих формулах для функций, имеющих производные более высокого порядка (С. Н. Бернштейн [3] для производных четного порядка, автор [4] для производных нечетного порядка).

В разд. 3 доказаны вспомогательные утверждения.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00598) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-3810.2008.1).

2. Уточнение теоремы Поповичу

Теорема 1. *Пусть точка* $x_0 \in [0,1]$ *и для функции* $f(x)$ *при всех* t *таких, что точки* x_0+t *принадлежат* $[0,1]$, *имеет место оценка*

$$\big|f(x_0+t)-f(x_0)\big| \leqslant \omega(|t|), \tag{2.1}$$

где $\omega(\delta)$ *— некоторый модуль непрерывности. Тогда для приближений функции* f *в точке* x_0 *многочленами Бернштейна справедливо неравенство*

$$\big|f(x_0)-B_n(f,x_0)\big| \leqslant 2\,\omega\biggl(\sqrt{\frac{x_0(1-x_0)}{n}}\biggr). \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим для $\delta>0$ и произвольной точки x из $[0,1]$

$$\lambda(x,x_0;\delta) := \left[\frac{|x-x_0|}{\delta}\right]. \tag{2.3}$$

В силу (2.1)

$$\big|f(x)-f(x_0)\big| \leqslant \omega(|x-x_0|) \leqslant \omega\big(\delta\,(\lambda(x,x_0;\delta)+1)\big) \leqslant (\lambda(x,x_0;\delta)+1)\,\omega(\delta).$$

Поэтому

$$\big|f(x_0)-B_n(f,x_0)\big| = \biggl|\sum_{\nu=0}^{n}\biggl(f(x_0)-f\Bigl(\frac{\nu}{n}\Bigr)\biggr)\rho_{n,\nu}(x_0)\biggr|$$

$$\leqslant \sum_{\nu=0}^{n}\biggl(\lambda\Bigl(\frac{\nu}{n},x_0;\delta\Bigr)+1\biggr)\omega(\delta)\rho_{n,\nu}(x_0) = \biggl\{\sum_{\nu=0}^{n}\lambda\Bigl(\frac{\nu}{n},x_0;\delta\Bigr)\rho_{n,\nu}(x_0)+1\biggr\}\omega(\delta).$$

Для ν таких, что $|\nu/n-x_0|<\delta$, имеем $\lambda(\nu/n,x_0;\delta)=0$, а если $|\nu/n-x_0|\geqslant\delta$, то ясно, что

$$\lambda\Bigl(\frac{\nu}{n},x_0;\delta\Bigr) \leqslant \frac{1}{\delta^2}\Bigl(\frac{\nu}{n}-x_0\Bigr)^2. \tag{2.4}$$

Используя оценку (2.4) при всех ν и тождество

$$\sum_{\nu=0}^{n}(\nu-nx)^2\rho_{n,\nu}(x) = nx(1-x), \tag{2.5}$$

находим

$$\big|f(x_0)-B_n(f,x_0)\big| \leqslant \biggl\{\frac{1}{\delta^2}\sum_{\nu=0}^{n}\Bigl(\frac{\nu}{n}-x_0\Bigr)^2\rho_{n,\nu}(x_0)+1\biggr\}\omega(\delta) = \biggl(\frac{x_0(1-x_0)}{\delta^2 n}+1\biggr)\omega(\delta). \tag{2.6}$$

Неравенство (2.2) вытекает из (2.6) при

$$\delta = \sqrt{\frac{x_0(1-x_0)}{n}}.$$

Теорема доказана. □

Оценка (2.2) немного улучшает результат из монографии [5, гл. 8, § 4, теорема 2], где подобное неравенство доказано с множителем 5/2 вместо 2.

При $\delta=(\sqrt{n})^{-1}$ из (2.6) следует, что

$$\big|f(x_0)-B_n(f,x_0)\big| \leqslant \big(x_0(1-x_0)+1\big)\,\omega\biggl(\frac{1}{\sqrt{n}}\biggr).$$

Если заменить здесь $x_0(1-x_0)$ на 1/4, то получим оценку (1.1). Такое доказательство этой оценки приведено в [1].

3. Вспомогательные предложения

При рассмотрении уклонений многочленов Бернштейна от дифференцируемых функций будут использоваться следующие утверждения.

Лемма 1. *Пусть x — точка из $(0,1)$ и α — положительное число. Для величин*

$$I_{n,\alpha}(x) := \sum_{\nu=0}^{n} \left|\frac{\nu}{n} - x\right|^{\alpha} \rho_{n,\nu}(x)$$

при

$$n \geqslant \frac{1}{x(1-x)} \tag{3.1}$$

справедлива оценка

$$I_{n,\alpha}(x) \leqslant c(\alpha)\left(\frac{x(1-x)}{n}\right)^{\alpha/2}, \tag{3.2}$$

множитель $c(\alpha)$ в которой зависит только от α.

Для $\alpha \leqslant 2$ при всех n справедлива оценка

$$I_{n,\alpha}(x) \leqslant \left(\frac{x(1-x)}{n}\right)^{\alpha/2}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда α — четное число, пусть $\alpha = 2m$.

Воспользуемся представлением [6, гл. 10, теорема 1.1]

$$\sum_{\nu=0}^{n} \left(\frac{\nu}{n} - x\right)^{2m} \rho_{n,\nu}(x) = \frac{1}{n^{2m}} \sum_{j=1}^{m} a_{j,m}(X) n^j X^j, \tag{3.4}$$

где $X := x(1-x)$ и $a_{j,m}(X)$ — многочлены относительно X степени $m-j$, коэффициенты которых не зависят от n.

Из (3.4) с помощью условия (3.1) получаем

$$I_{n,2m}(x) \leqslant \frac{1}{n^m} \sum_{j=1}^{m} \bigl|a_{j,m}(X)\bigr| \frac{1}{n^{m-j}} X^j \leqslant \frac{1}{n^m} \sum_{j=1}^{m} \bigl|a_{j,m}(X)\bigr| X^m.$$

Отсюда следует оценка (3.2) для четных α, так как сумма

$$\sum_{j=1}^{m} \bigl|a_{j,m}(X)\bigr|$$

мажорируется величиной, зависящей только от m.

Пусть теперь α — произвольное положительное число и $2m$ — наименьшее четное число, превосходящее α. Положим $p = 2m/\alpha$ и q — сопряженное с p число. По неравенству Гёльдера

$$I_{n,\alpha}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \left|\frac{\nu}{n} - x\right|^{\alpha} \rho_{n,\nu}^{1/p}(x)\, \rho_{n,\nu}^{1/q}(x)$$

$$\leqslant \left\{\sum_{\nu=0}^{n} \left|\frac{\nu}{n} - x\right|^{2m} \rho_{n,\nu}(x)\right\}^{1/p} \left\{\sum_{\nu=0}^{n} \rho_{n,\nu}(x)\right\}^{1/q} = I_{n,2m}^{1/p}(x) \leqslant \left\{c(2m)\frac{X^m}{n^m}\right\}^{\alpha/2m}. \tag{3.5}$$

Таким образом, оценка (3.2) установлена в общем случае.

Рассмотрим, наконец, $\alpha \leqslant 2$. При $\alpha = 2$ оценка (3.3) имеет место в силу тождества (2.5). При $\alpha < 2$ полагаем $p = 2/\alpha$ и из (3.5), пользуясь на последнем шаге тождеством (2.5), выводим оценку (3.3).

Лемма доказана. □

Оценки (3.2) и (3.3) уточняют неравенство (9), приведенное в [1, с. 15].

Лемма 2. *Пусть точка $x_0 \in (0,1)$, $X_0 := x_0(1-x_0)$,*

$$J_{n,s}(v,x_0) := \sum_{\nu=0}^{n} \Bigl(\frac{\nu}{n} - x_0\Bigr)^s v\Bigl(\frac{\nu}{n} - x_0\Bigr)\rho_{n,\nu}(x_0), \qquad s = 1,2,\ldots,$$

и для функции $v(t)$ имеет место оценка

$$|v(t)| \leqslant \omega(|t|), \tag{3.6}$$

где $\omega(\delta)$ — некоторый модуль непрерывности. Тогда справедливы оценки:

при $s = 1$ и любом n

$$\bigl|J_{n,1}(v,x_0)\bigr| \leqslant 2\biggl(\frac{X_0}{n}\biggr)^{1/2}\omega\biggl(\sqrt{\frac{X_0}{n}}\biggr); \tag{3.7}$$

если $s = 2,3,\ldots$ и

$$n \geqslant \frac{1}{X_0}, \tag{3.8}$$

то

$$\bigl|J_{n,s}(v,x_0)\bigr| \leqslant C(s)\biggl(\frac{X_0}{n}\biggr)^{s/2}\omega\biggl(\sqrt{\frac{X_0}{n}}\biggr), \tag{3.9}$$

где множитель $C(s)$ зависит только от s.

Доказательство. Пусть $\lambda(x,x_0;\delta)$ — функция, введенная при доказательстве теоремы 1 формулой (2.3). Тогда

$$\omega\biggl(\Bigl|\frac{\nu}{n} - x_0\Bigr|\biggr) \leqslant \biggl(\lambda\Bigl(\frac{\nu}{n}, x_0;\delta\Bigr) + 1\biggr)\omega(\delta) \leqslant \biggl(\frac{1}{\delta}\Bigl|\frac{\nu}{n} - x_0\Bigr| + 1\biggr)\omega(\delta).$$

Поэтому при каждом s

$$\bigl|J_{n,s}(v,x_0)\bigr| \leqslant \Biggl\{\frac{1}{\delta}\sum_{\nu=0}^{n}\Bigl|\frac{\nu}{n} - x_0\Bigr|^{s+1}\rho_{n,\nu}(x_0) + \sum_{\nu=0}^{n}\Bigl|\frac{\nu}{n} - x_0\Bigr|^{s}\rho_{n,\nu}(x_0)\Biggr\}\omega(\delta). \tag{3.10}$$

Положив в (3.10)

$$\delta = \sqrt{\frac{X_0}{n}},$$

при $s = 1$ согласно (3.3) получим (3.7), а при $s \geqslant 2$ согласно (3.2) в силу (3.8) получим (3.9).

Лемма доказана. □

Заметим, что если в (3.10) положить $\delta = (\sqrt{n})^{-1}$ и воспользоваться оценкой (3.3), заменив в ней X_0 на $1/4$, то вместо (3.7) получим

$$\bigl|J_{n,1}(v,x_0)\bigr| \leqslant \frac{3}{4\sqrt{n}}\,\omega\biggl(\frac{1}{\sqrt{n}}\biggr). \tag{3.11}$$

4. Приближение дифференцируемых функций

Сначала рассмотрим приближение функций, имеющих в исследуемой точке первую производную.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ имеет в точке $x_0 \in [0,1]$ производную первого порядка и при всех t таких, что точки x_0+t принадлежат $[0,1]$, справедливо представление*

$$f(x_0+t) = f(x_0) + f'(x_0)t + v(t)t, \tag{4.1}$$

для функции $v(t)$ в котором выполняется оценка

$$|v(t)| \leqslant \omega(|t|), \tag{4.2}$$

где $\omega(\delta)$ — некоторый модуль непрерывности. Тогда для приближений f в точке x_0 многочленами Бернштейна имеет место оценка

$$\bigl|f(x_0) - B_n(f,x_0)\bigr| \leqslant 2\sqrt{\frac{x_0(1-x_0)}{n}}\,\omega\biggl(\sqrt{\frac{x_0(1-x_0)}{n}}\biggr). \tag{4.3}$$

Доказательство. Пользуясь представлением (4.1), находим

$$f(x_0) - B_n(f,x_0) = \sum_{\nu=0}^{n}\biggl(f(x_0) - f\Bigl(\frac{\nu}{n}\Bigr)\biggr)\rho_{n,\nu}(x_0)$$

$$= -\sum_{\nu=0}^{n}\biggl\{\Bigl(\frac{\nu}{n}-x_0\Bigr)f'(x_0) + \Bigl(\frac{\nu}{n}-x_0\Bigr)v\Bigl(\frac{\nu}{n}-x_0\Bigr)\biggr\}\rho_{n,\nu}(x_0)$$

$$= -\sum_{\nu=0}^{n}\Bigl(\frac{\nu}{n}-x_0\Bigr)v\Bigl(\frac{\nu}{n}-x_0\Bigr)\rho_{n,\nu}(x_0). \tag{4.4}$$

Отсюда согласно (3.7) следует неравенство (4.3).

Теорема доказана. □

Заметим, что если при оценке суммы из правой части (4.4) вместо (3.7) применить (3.11), то получим оценку (1.2).

В [4, теорема 1] доказано, что если $f(x)$ имеет в точке x_0 первую производную, то

$$f(x_0) - B_n(f,x_0) = o\biggl(\frac{1}{\sqrt{n}}\biggr), \qquad n\to\infty.$$

Этот результат можно вывести из оценки (4.3). В самом деле, из существования производной $f'(x_0)$ следует, что функция $v(t)$ из (4.1) стремится к нулю при $t\to 0$. Значит, существует модуль непрерывности $\omega(\delta)$, для которого выполняется оценка (4.2). Можно, например, построить функцию

$$V(\eta) := \sup_{|t|\leqslant\eta}|v(t)|, \qquad \eta>0,$$

и положить (см. [7, § 1])

$$\omega(\delta) := \delta\inf_{0<\eta\leqslant\delta}\frac{V(\eta)}{\eta}.$$

Отметим еще, что если функция $f(x)$ имеет на $[0,1]$ непрерывную производную, то в качестве функции $\omega(\delta)$ в теореме 2 можно взять модуль непрерывности этой производной. Это следует из того, что согласно формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(x_0+t) = f(x_0) + f'(x_0)t + (f'(x_0+\theta t) - f'(x_0))t, \qquad 0<\theta<1.$$

Таким образом, если производная $f'(x)$ непрерывна на [0, 1], то

$$|f(x) - B_n(f,x)| \leqslant 2\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\omega\left(f', \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right).$$

Подобная оценка с некоторой абсолютной постоянной в качестве числового множителя в правой ее части приведена в [6, гл. 10, теорема 3.2].

Уточним теперь остаточные члены в асимптотических формулах для уклонений многочленов Бернштейна от функций, имеющих в точке старшую производную.

Пусть

$$T_{n,j}(x) := \sum_{\nu=0}^{n} (\nu - nx)^j \rho_{n,\nu}(x), \qquad j = 1, 2, \ldots$$

Функция $T_{n,j}(x)$ является многочленом относительно x и n, степень которого как многочлена относительно n равна $[j/2]$, а старший коэффициент равен [1, теорема 1.5.1]

$$\frac{(2j)!}{j!}\left(\frac{x(1-x)}{2}\right)^j.$$

Теорема 3. *Пусть функция $f(x)$ имеет в точке $x_0 \in [0,1]$ производную в смысле Пеано порядка $s \geqslant 2$, т. е. (поскольку $f(x)$ — ограниченная функция) при всех t таких, что точки $x_0 + t$ принадлежат $[0,1]$, справедливо представление*

$$f(x_0 + t) = \sum_{j=0}^{s} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) t^j + \frac{1}{s!} v(t) t^s, \tag{4.5}$$

где $v(t) \to 0$ при $t \to 0$. Если $\omega(\delta)$ — такой модуль непрерывности, что

$$|v(t)| \leqslant \omega(|t|),$$

то для приближений функции f в точке x_0 многочленами Бернштейна имеют место оценки:

для $s = 2$ и любом n

$$f(x_0) - B_n(f, x_0) = -\frac{x_0(1-x_0)}{2n} f''(x_0) + O\left(\frac{x_0(1-x_0)}{n}\omega\left(\sqrt{\frac{x_0(1-x_0)}{n}}\right)\right); \tag{4.6}$$

для $s \geqslant 3$ при

$$n \geqslant \frac{1}{x_0(1-x_0)} \tag{4.7}$$

$$f(x_0) - B_n(f, x_0) = -\sum_{j=2}^{2i-1} \frac{T_{n,j}(x_0)}{j!\, n^j} f^{(j)}(x_0) - \frac{1}{i!}\left(\frac{x_0(1-x_0)}{2}\right)^i \frac{1}{n^i} f^{(2i)}(x_0)$$

$$+ O\left(\left(\frac{x_0(1-x_0)}{n}\right)^{s/2} \omega\left(\sqrt{\frac{x_0(1-x_0)}{n}}\right)\right) + O\left(\frac{(x_0(1-x_0))^{(s-1)/2}}{n^{(s+1)/2}}\right), \tag{4.8}$$

где $i = [s/2]$. Числовые множители в остаточных членах оценок (4.6) и (4.8) не зависят от n, а в (4.6) — и от x_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно представлению (4.5) и тождеству $T_{n,1}(x) = 0$ имеем

$$f(x_0) - B_n(f, x_0) = \sum_{\nu=0}^{n} \left(f(x_0) - f\left(\frac{\nu}{n}\right)\right)\rho_{n,\nu}(x_0)$$

$$
= -\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{j!}\Big(\frac{\nu}{n}-x_0\Big)^j f^{(j)}(x_0)\,\rho_{n,\nu}(x_0) - \sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{s!}\Big(\frac{\nu}{n}-x_0\Big)^s v\Big(\frac{\nu}{n}-x_0\Big)\rho_{n,\nu}(x_0)
$$

$$
= -\sum_{j=2}^{s}\frac{T_{n,j}(x_0)}{j!\,n^j} f^{(j)}(x_0) - \sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{s!}\Big(\frac{\nu}{n}-x_0\Big)^s v\Big(\frac{\nu}{n}-x_0\Big)\rho_{n,\nu}(x_0). \tag{4.9}
$$

В силу оценки (3.9) последняя сумма правой части равенства (4.9) мажорируется первым остаточным членом формулы (4.8), который при $s=2$ совпадает с остаточным членом формулы (4.6). Это доказывает оценку (4.6).

Переходим к $s \geqslant 3$. Прежде всего преобразуем множитель при $f^{(2i)}(x_0)$ в сумме из правой части (4.9).

Пользуясь представлением (3.4), выражением коэффициента при n^i многочлена $T_{n,2i}(x_0)$ и оценкой (4.7), получаем

$$
-\frac{T_{n,2i}(x_0)}{(2i)!\,n^{2i}} = -\frac{1}{(2i)!\,n^{2i}}\frac{(2i)!}{i!}\Big(\frac{x_0(1-x_0)}{2}\Big)^i n^i + O\bigg(\frac{1}{n^{2i}}\Big|\sum_{j=1}^{i-1} a_{j,i}(X_0)n^j X_0^j\Big|\bigg)
$$

$$
= -\frac{1}{i!\,n^i}\Big(\frac{x_0(1-x_0)}{2}\Big)^i + O\bigg(\frac{1}{n^{i+1/2}}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{n^{i-1/2-j}}X_0^j\bigg)
$$

$$
= -\frac{1}{i!\,n^i}\Big(\frac{x_0(1-x_0)}{2}\Big)^i + O\bigg(\frac{1}{n^{i+1/2}}X_0^{i-1/2}\bigg).
$$

Таким образом, второй остаточный член формулы (4.8) позволяет заменить в (4.9) множитель при $f^{(2i)}(x_0)$ на

$$
-\frac{1}{i!n^i}\Big(\frac{x_0(1-x_0)}{2}\Big)^i,
$$

и для четных s теорема доказана.

Остается оценить множитель при $f^{(s)}(x_0)$ в (4.9) для нечетных s. В этом случае $s = 2i+1$.

Воспользуемся представлением [6, гл. 10, теорема 1.1]

$$
\sum_{\nu=0}^{n}(\nu - nx)^{2m+1}\rho_{n,\nu}(x) = (1-2x)\sum_{j=1}^{m} b_{j,m}(X)n^j X^j, \tag{4.10}
$$

где $X := x(1-x)$ и $b_{j,m}(X)$ — многочлены степени $m-j$, коэффициенты которых не зависят от n.

Из (4.10), пользуясь условием (4.7), находим

$$
\bigg|\frac{T_{n,2i+1}(x_0)}{(2i+1)!\,n^{2i+1}}\bigg| \leqslant \frac{1}{(2i+1)!\,n^{2i+1}}\sum_{j=1}^{i}\big|b_{j,i}(X_0)\big|n^j X_0^j = O\bigg(\frac{1}{n^{i+1}}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{n^{i-j}}X_0^j\bigg) = O\bigg(\frac{1}{n^{i+1}}X_0^i\bigg).
$$

Значит, при нечетных s слагаемое с $f^{(s)}(x_0)$ в (4.9) мажорируется вторым остаточным членом формулы (4.8).

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Lorentz G.G.** Bernstein polynomials. 2nd ed. New York: Chelsea Publ. Comp., 1986. 134 p.
2. **Вороновская Е.В.** Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна // Докл. АН СССР. Сер. А. 1932. Т. 4. С. 79–85.
3. **Bernstein S.** Complément à l’article de E. Voronovskaya “Détermiation de la forme asymptotique de l’approximation des fonctions par les polynomes de M. S. Bernstein” // Докл. АН СССР. Сер. А. 1932. Т. 4. С. 86–92.

4. **Теляковский С.А.** О приближении дифференцируемых функций многочленами Бернштейна и многочленами Канторовича // Тр. МИАН. 2008. Т. 260. С. 289–296.
5. **Дзядык В.К.** Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1972. 512 с.
6. **DeVore R.A., Lorentz G.G.** Constructive approximation. Berlin: Springer–Verlag, 1993. 449 p.
7. **Бари Н.К., Стечкин С.Б.** Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. 1956. Т. 5. С. 483–522.

Сергей Александрович Теляковский
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
МИАН
e-mail: sergeytel@mtu-net.ru

Поступила 13.02.2008

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14 № 3 2008

УДК 517.9

УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

И. Г. Царьков

Изучаются условия на дифференциальное уравнение, при которых возможно оценить уклонение некоторых его непрерывных решений друг от друга в равномерной метрике, зная их уклонения на сетке.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, однозначная разрешимость.

Введение

В названии статьи мы используем термин *однозначная разрешимость*. Под этим термином мы подразумеваем возможность по дополнительной информации о решениях некорректной задачи Дирихле (т. е. в случае, когда, вообще говоря, нет ни единственности, ни существования этих решений) однозначно различить (разделить) эти решения. Под термином *устойчивость однозначной разрешимости* мы подразумеваем возможность приближенного разделения этих решений в случае, когда само уравнение содержит некоторую ошибку и/или граничные условия задачи Дирихле заданы с некоторой погрешностью.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — компактная область с липшицевой границей $\partial\Omega$, являющаяся замыканием своей внутренности Ω_0. Рассмотрим отображение $F:\ \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и функции $\varphi_i, \tau_i : \Omega \to \mathbb{R}$, принадлежащие пространству $L_q(\Omega)$ при $q \in (1, +\infty]$, где τ_i — гармоническая функция на Ω_0. Изучим две квазилинейные неоднородные задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u_i = F(x, u_i) + \varphi_i(x) & \text{на } \Omega_0, \\ u = \tau_i & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \qquad (i = 1, 2). \tag{1.i}$$

Наша цель состоит в следующем: при определенных условиях на функцию F, которые, вообще говоря, не обеспечивают ни единственности, ни существования в этих задачах, по дополнительной информации о решениях $u_i \in W_2^1(\Omega)$ (считая, что они существуют) оценить их уклонение друг от друга в равномерной метрике. Здесь мы будем предполагать, что решения непрерывны. В качестве дополнительной информации о решениях u_i $(i = 1, 2)$ будем рассматривать их значения на сетке. Отметим, что из доказанных ниже утверждений, в частности, вытекает, что если значения решений на некоторой конечной сетке одинаковы при условии совпадения функций φ_1 и φ_2 (или при условии, когда $\varphi_1 = \varphi_2$ и $\tau_1 = \tau_2$), то эти решения совпадают на Ω.

Далее мы изучим устойчивость однозначной разрешимости для нелинейности вида $F(x, u, \nabla u)$, где $F = F(x, u, p)$ — отображение $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. Затем изучим аналогичную задачу для уравнения теплопроводности.

Через $W_p^r(\Omega)$ мы будем обозначать соболевское пространство с нормой $\|\cdot\|_{W_p^r(\Omega)}$, а через $H_p^r(\Omega)$ — пространство Никольского с полунормой $\|\cdot\|_{H_p^r(\Omega)}$. Относительно функции F в дальнейшем будем предполагать, что она удовлетворяет условию Каратеодори (т. е. измерима по x для всех оставшихся переменных и непрерывна по этим переменным при почти всех $x \in \Omega$) и для каждого x ограничена на любом компактном множестве оставшихся аргументов.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 06-01-00160).

1. Случай нелинейности вида $F(x,u)$

В этом разделе будем рассматривать следующие условия на F:

(a) $n \geqslant 2$;

(b) $q > n/2,\quad \varphi_i \in L_q(\Omega),\quad \tau_i \in L_\infty(\Omega),\ i = 1, 2$, и $\tau_1 - \tau_2 \in W_q^2(\Omega)$;

(c) найдутся функции $r(x) \in L_\eta(\Omega)\ \ (\eta > n/2)\,,\ \ \lambda \in L_1(\Omega)$ и $\mu_1, \mu_2 \in C(\mathbb{R}_+)$ такие, что $|F(x,u)| \leqslant \lambda(x)\mu_1(|u|)$, и для любых $(x,u_1),(x,u_2) \in \Omega\times\mathbb{R}$, и $v = \max\{|u_i| : \ i = 1, 2\}$ выполнено неравенство

$$|F(x,u_1) - F(x,u_2)| \leqslant r(x)\mu_2(v)|u_1 - u_2|;$$

(d) найдется число $k \geqslant 0$ такое, что для всех $(x,u) \in \Omega\times\mathbb{R} : |u| \geqslant k$ выполнено неравенство

$$F(x,u)\,\mathrm{sign}(u) \geqslant -D|u| + c(x),$$

где $c : \Omega \to \mathbb{R}$ — некоторая функция из $L_q(\Omega)$, а D — некоторое число из полуинтервала $[0, \gamma^{-2})$ и γ — наименьшая константа в неравенстве Фридрихса, т. е.

$$\gamma = \sup\left\{ \frac{\|u\|_{L_2(\Omega)}}{\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}} \,\middle|\, u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),\ u \neq 0 \right\}.$$

Здесь $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ — замыкание финитных в Ω бесконечно дифференцируемых функций относительно нормы пространства Соболева $W_2^1(\Omega)$.

Положим $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2,\ \tau = \tau_1 - \tau_2,\ \theta = u_1 - u_2$.

Лемма 1. *Пусть выполняются условия* (a)–(d) *и* u_i *— обобщенные решения из класса* $W_2^1(\Omega)$ *задач* (1.i), *непрерывные на* Ω. *Тогда найдется константа* $E > 0$, *которая зависит только от* $(1 - D\gamma^2),\ \|c\|_{L_q(\Omega)},\ q,\ k,\ \Omega$ *и* $\max\{\|\tau_1\|_{L_\infty(\Omega)},\ \|\tau_2\|_{L_\infty(\Omega)}\}$ *и для которой выполнено неравенство*

$$|F(x,u_1(x)) - F(x,u_2(x))| \leqslant Er(x)|\theta(x)|$$

для всех $x \in \Omega$.

Доказательство. В силу [1, гл. 4, § 7, теорема 7.5] найдутся числа $A_i > 0$, которые зависят только от $(1 - D\gamma^2),\ \|c\|_{L_q(\Omega)},\ q,\ k,\ \Omega,\ \|\tau_i\|_{L_\infty(\Omega)}$ и для которых выполнено неравенство $\|u_i\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant A_i\ (i = 1, 2)$. Пусть $E = \max\{\mu_2(u) :\ u \in [0, A]\}$, где $A = \max\{A_1, A_2\}$. Тогда

$$|F(x,u_1(x)) - F(x,u_2(x))| \leqslant r(x)\mu_2(v(x))|\theta(x)| \leqslant Er(x)|\theta(x)|$$

для всех $x \in \Omega$, где $v = \max\{|u_1|, |u_2|\}$. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Пусть* $\rho > 1$ *и* $\alpha, \beta > 0$. *Тогда для числа* $\nu = \alpha^{-1}(\beta + n/\rho) < 1$ *существует константа* $P > 0$ *такая, что для любой функции* $\psi \in H_\rho^\alpha(\Omega)$ *верно неравенство*

$$\|\psi\|_{H_\infty^\beta(\Omega)} \leqslant P\Big(\|\psi\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\psi\|^\nu_{H_\rho^\alpha(\Omega)}\|\psi\|^{1-\nu}_{L_\infty(\Omega)}\Big).$$

Доказательство. Существуют числа $h_0, C > 0$, зависящие только от ν, ρ и Ω, такие, что $\forall h \in (0, h_0]$

$$\|\psi\|_{H_\infty^\beta(\Omega)} \leqslant Ch^{1-\nu}\|\psi\|_{H_\rho^\alpha(\Omega)} + Ch^{-\nu}\|\psi\|_{L_\rho(\Omega)}$$

(см. [2]). Если $\|\psi\|_{H_\rho^\alpha(\Omega)} = 0$, то утверждение леммы следует из этого неравенства.

Пусть $\|\psi\|_{H^\alpha_\rho(\Omega)} \neq 0$. Рассмотрим сначала случай, когда $h = \dfrac{\|\psi\|_{L_\rho(\Omega)}}{\|\psi\|_{H^\alpha_\rho(\Omega)}} < h_0$. Тогда имеем

$$\|\psi\|_{H^\beta_\infty(\Omega)} \leqslant C\|\psi\|_{H^\alpha_\rho(\Omega)} \left(\frac{\|\psi\|_{L_\rho(\Omega)}}{\|\psi\|_{H^\alpha_\rho(\Omega)}}\right)^{1-\nu} + C\|\psi\|_{L_\rho(\Omega)} \left(\frac{\|\psi\|_{L_\rho(\Omega)}}{\|\psi\|_{H^\alpha_\rho(\Omega)}}\right)^{-\nu}$$

$$= 2C\|\psi\|^\nu_{H^\alpha_\rho(\Omega)}\|\psi\|^{1-\nu}_{L_\rho(\Omega)} \leqslant 2C(\mathrm{mes}\ \Omega)^{(1-\nu)/\rho}\|\psi\|^\nu_{H^\alpha_\rho(\Omega)}\|\psi\|^{1-\nu}_{L_\infty(\Omega)}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\dfrac{\|\psi\|_{L_\rho(\Omega)}}{\|\psi\|_{H^\alpha_\rho(\Omega)}} \geqslant h_0$. Тогда $h_0\|\psi\|_{H^\alpha_\rho(\Omega)} \leqslant \|\psi\|_{L_\rho(\Omega)}$ и

$$\|\psi\|_{H^\beta_\infty(\Omega)} \leqslant Ch_0^{1-\nu}\|\psi\|_{H^\alpha_\rho(\Omega)} + Ch_0^{-\nu}\|\psi\|_{L_\rho(\Omega)} \leqslant 2Ch_0^{-\nu}\|\psi\|_{L_\rho(\Omega)}$$

$$\leqslant 2Ch_0^{-\nu}(\mathrm{mes}\ \Omega)^{1/\rho}\|\psi\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\|\psi\|_{H^\beta_\infty(\Omega)} \leqslant P\big(\|\psi\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\psi\|^\nu_{H^\alpha_\rho(\Omega)}\|\psi\|^{1-\nu}_{L_\infty(\Omega)}\big),$$

где $P = 2Ch_0^{-\nu}(\mathrm{mes}\ \Omega)^{1/\rho} + 2C(\mathrm{mes}\ \Omega)^{(1-\nu)/\rho}$. Лемма доказана. $\square$

Пусть функция $g\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$ является решением задачи: $\triangle g = \varphi$, $g\,|_{\partial\Omega} = \tau$. Тогда

$$(\theta - g)(y) = \int\limits_\Omega G(x,y)(F(x,u_1(x)) - F(x,u_2(x)))dx,$$

где G — функция Грина, отвечающая нулевым граничным условиям. Из свойств интеграла типа потенциала и леммы 1 следует, что $\theta(y) - g(y)$ принадлежит классу $A_3\|\theta\|_{L_\infty(\Omega)}\mathrm{Lip}\ \beta$ для некоторых $\beta \in (0,1)\colon\ \ \eta > n/(2-\beta)$ и $A_3 > 0$, зависящих только от $\eta, E, \|r\|_{L_\eta(\Omega)}$ и Ω. Кроме того, $\|\theta - g\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant A_4\|\theta\|_{L_\infty(\Omega)}$, где $A_4 > 0$ зависит от тех же параметров, что и A_3. Пусть функции g_1 и g_2 такие, что

$$\begin{cases} \Delta g_1 = 0 & \text{на } \Omega_0, \\ g_1 = \tau & \text{на } \partial\Omega \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} \Delta g_2 = \varphi(x) & \text{на } \Omega_0, \\ g_2 = 0 & \text{на } \partial\Omega. \end{cases}$$

В этом случае $g = g_1 + g_2$ и $\tau \equiv g_1 \in H^2_q(\Omega)$. В силу леммы 2 найдется константа $P_1 > 0$, зависящая только от Ω, β, q и такая, что $\|g_2\|_{H^\beta_\infty(\Omega)} \leqslant P_1\big(\|g_2\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\varphi\|^\nu_{L_q(\Omega)}\|g_2\|^{1-\nu}_{L_\infty(\Omega)}\big)$, где $\nu = (\beta + n/q)/2$.

Определим величину

$$Q = Q(\tau,\beta) = \begin{cases} \dfrac{\|\tau\|_{H^\beta_\infty(\Omega)}}{\|\tau\|_{L_\infty(\Omega)}}, & \text{если } \|\tau\|_{L_\infty(\Omega)} \neq 0, \\ 0, & \text{если } \|\tau\|_{L_\infty(\Omega)} = 0. \end{cases}$$

Отметим, что в силу леммы 2 имеем $\|\tau\|_{H^\beta_\infty(\Omega)} \leqslant P\big(\|\tau\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\tau\|^\nu_{H^\alpha_q(\Omega)}\|\tau\|^{1-\nu}_{L_\infty(\Omega)}\big)$, и, следовательно,

$$Q \leqslant P + P\bigg(\frac{\|\tau\|_{H^\alpha_q(\Omega)}}{\|\tau\|_{L_\infty(\Omega)}}\bigg)^\nu, \qquad \text{где} \quad \nu = (\beta + n/q)/2.$$

Далее Γ обозначает произвольную конечную ε-сеть для компакта Ω, содержащуюся в Ω, иными словами Γ есть *относительная ε-сеть* для компакта Ω.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (a)–(d), $\eta \geqslant q$, $\beta \in (0,1]$, $\nu = (\beta + n/\eta)/2 < 1$ *и* u_i *— обобщенные решения из класса* $W_2^1(\Omega)$ *задач* $(1.i)$, *непрерывные на* Ω. *Тогда найдутся константы* $\mathcal{P}, \varepsilon_0 > 0$, *зависящие только от* Q, β, $(1 - D\gamma^2)$, $\|c\|_{L_q(\Omega)}$, q, η, k, Ω *и* $\max\{\|\tau_1\|_{L_\infty(\Omega)}, \|\tau_2\|_{L_\infty(\Omega)}\}$ *и такие, что для любых* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *и (относительной)* ε*-сети* Γ *для* Ω *условие* $u_1|_\Gamma = u_2|_\Gamma$ *влечет неравенство* $\|u_1 - u_2\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \mathcal{P}\|\varphi\|_{L_q(\Omega)}\varepsilon^{\beta/\nu}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу принципа максимума и определения числа Q верны соотношения

$$\|\tau\|_{H^\beta_\infty(\Omega)} \leqslant Q\|\tau\|_{L_\infty(\Omega)} = Q\|\tau|_{\partial\Omega}\|_{L_\infty(\partial\Omega)} \leqslant Q\|\theta\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Следовательно,

$$\|\theta\|_{H^\beta_\infty(\Omega)} \leqslant \|\theta - g\|_{H^\beta_\infty(\Omega)} + \|g_2\|_{H^\beta_\infty(\Omega)} + \|g_1\|_{H^\beta_\infty(\Omega)}$$
$$\leqslant A_3\|\theta\|_{L_\infty(\Omega)} + P_1\big(\|g_2\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\varphi\|^\nu_{L_q(\Omega)}\|g_2\|^{1-\nu}_{L_\infty(\Omega)}\big) + \|\tau\|_{H^\beta_\infty(\Omega)}.$$

Так как в силу принципа максимума

$$\|g_1\|_{L_\infty(\Omega)} = \|\tau\|_{L_\infty(\Omega)} = \|\tau|_{\partial\Omega}\|_{L_\infty(\partial\Omega)} \leqslant \|\theta\|_{L_\infty(\Omega)},$$

$$\|g_2\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \|\theta - g\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\theta\|_{L_\infty(\Omega)} + \|g_1\|_{L_\infty(\Omega)}$$
$$\leqslant A_4\|\theta\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\theta\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\tau\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant (A_4 + 2)\|\theta\|_{L_\infty(\Omega)},$$

то

$$\|\theta\|_{H^\beta_\infty(\Omega)} \leqslant A_5\big(\|\theta\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\varphi\|^\nu_{L_q(\Omega)}\|\theta\|^{1-\nu}_{L_\infty(\Omega)}\big),$$

где $A_5 = A_3 + P_1(A_4 + 2) + Q + P_1(A_4 + 2)^{1-\nu}$. Положим $\mathcal{P} = (2A_5)^{1/\nu}$, $\varepsilon_0 = (2A_5)^{-1/\beta}$ и рассмотрим произвольное число $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и ε-сеть Γ для Ω с условием $\theta|_\Gamma = 0$. Покажем, что верно неравенство $\|\theta\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \mathcal{P}\|\varphi\|_{L_q(\Omega)}\varepsilon^{\beta/\nu}$. Действительно, поскольку расстояние от точки максимума модуля функции θ до ближайшего нуля из Γ не больше ε, то

$$\|\theta\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant A_5\left(\|\theta\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\varphi\|^\nu_{L_q(\Omega)}\|\theta\|^{1-\nu}_{L_\infty(\Omega)}\right)\varepsilon^\beta$$

(так как $\theta \in A_5\mathrm{Lip}\,\beta$). Поэтому $\|\theta\|^\nu_{L_\infty(\Omega)} \leqslant A_5\big(\|\theta\|^\nu_{L_\infty(\Omega)} + \|\varphi\|^\nu_{L_q(\Omega)}\big)\varepsilon^\beta$, и, учитывая, что $A_5\|\theta\|^\nu_{L_\infty(\Omega)}\varepsilon^\beta \leqslant \|\theta\|^\nu_{L_\infty(\Omega)}/2$, получаем

$$\|\theta\|^\nu_{L_\infty(\Omega)} \leqslant 2A_5\|\varphi\|^\nu_{L_q(\Omega)}\varepsilon^\beta, \qquad \text{т. е.} \qquad \|\theta\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \mathcal{P}\|\varphi\|_{L_q(\Omega)}\varepsilon^{\beta/\nu}.$$

Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е 1. Если $\eta = +\infty$, то можно взять $\beta = 1$ и $\nu = 1/2$. Тогда неравенство примет вид

$$\|u_1 - u_2\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \mathcal{P}\|\varphi\|_{L_q(\Omega)}\varepsilon^2.$$

З а м е ч а н и е 2. На самом деле можно доказать оценки:

$$\|u_1 - u_2\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \mathcal{P}\|\varphi\|_{L_q(\Omega)}\varepsilon^\beta + 2\max_\Gamma|(u_1 - u_2) - \tau| + 2\|\tau\|_{L_\infty(\Omega)},$$

$$\|(u_1 - u_2) - \tau\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \mathcal{P}(\|\varphi\|_{L_q(\Omega)} + \|\tau\|_{L_\infty(\Omega)})\varepsilon^\beta + 2\max_\Gamma|(u_1 - u_2) - \tau|,$$

где $\mathcal{P}$ и ε_0 уже не зависят от Q (зависят только от β, $(1 - D\gamma^2)$, $\|c\|_{L_q(\Omega)}$, q, η, k, Ω и $\max\{\|\tau_1\|_{L_\infty(\Omega)}, \|\tau_2\|_{L_\infty(\Omega)}\}$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $g_2(y) = \displaystyle\int_\Omega G(x,y)\varphi(x)dx$, где G — функция Грина, отвечающая нулевым граничным условиям, то $\|g_2\|_{H^\beta_\infty(\Omega)} \leqslant A_4\|\varphi\|_{L_q(\Omega)}$. Тогда

$$\|\theta - \tau\|_{H^\beta_\infty(\Omega)} = \|\theta - g_1\|_{H^\beta_\infty(\Omega)} \leqslant \|\theta - g\|_{H^\beta_\infty(\Omega)} + \|g_2\|_{H^\beta_\infty(\Omega)} \leqslant A_3\|\theta\|_{L_\infty(\Omega)} + A_4\|\varphi\|_{L_q(\Omega)}.$$

Поэтому
$$\|\theta-\tau\|_{L_\infty(\Omega)}-\max_\Gamma|\theta-\tau|\leqslant(A_3\|\theta\|_{L_\infty(\Omega)}+A_4\|\varphi\|_{L_q(\Omega)})\varepsilon^\beta,$$
и если $\varepsilon_0=(2A_3)^{-1/\beta}$ и $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, то
$$\frac{1}{2}\|\theta\|_{L_\infty(\Omega)}-\|\tau\|_{L_\infty(\Omega)}-\max_\Gamma|\theta-\tau|\leqslant A_4\|\varphi\|_{L_q(\Omega)}\varepsilon^\beta,$$
откуда
$$\|\theta\|_{L_\infty(\Omega)}\leqslant 2A_4\|\varphi\|_{L_q(\Omega)}\varepsilon^\beta+2\|\tau\|_{L_\infty(\Omega)}+2\max_\Gamma|\theta-\tau|.$$
Аналогично,
$$\|\theta-\tau\|_{L_\infty(\Omega)}-\max_\Gamma|\theta-\tau|\leqslant(A_3(\|\tau\|_{L_\infty(\Omega)}+\|\theta-\tau\|_{L_\infty(\Omega)})+A_4\|\varphi\|_{L_q(\Omega)})\varepsilon^\beta$$
и, следовательно,
$$\frac{1}{2}\|\theta-\tau\|_{L_\infty(\Omega)}-\max_\Gamma|\theta-\tau|\leqslant(A_3\|\tau\|_{L_\infty(\Omega)}+A_4\|\varphi\|_{L_q(\Omega)})\varepsilon^\beta.$$
Поэтому
$$\|\theta-\tau\|_{L_\infty(\Omega)}\leqslant 2(A_3+A_4)(\|\varphi\|_{L_q(\Omega)}+\|\tau\|_{L_\infty(\Omega)})+2\max_\Gamma|\theta-\tau|.$$
□

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (a)–(d), $\eta\geqslant q$, $\beta\in(0,1]$, $\nu=(\beta+n/\eta)/2<1$ *и* u_i *— обобщенные решения из класса* $W_2^1(\Omega)$ *задач* $(1.i)$, *непрерывные на* Ω. *Тогда найдутся константы* $\mathcal{P},\varepsilon_0>0$, *зависящие только от* β, $(1-D\gamma^2)$, $\|c\|_{L_q(\Omega)}$, q, η, k, Ω *и* $\max\{\|\tau_1\|_{L_\infty(\Omega)},\|\tau_2\|_{L_\infty(\Omega)}\}$ *и такие, что для любого* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ *и всякой* (*относительной*) ε-*сети* Γ *для* Ω *условие* $u_1|_\Gamma=u_2|_\Gamma$ *влечет неравенство*
$$\|u_1-u_2\|_{L_\infty(\Omega)}\leqslant\mathcal{P}(\|\varphi\|^\nu_{L_q(\Omega)}+\|\tau\|^\nu_{W_q^2(\Omega)})^{1/\nu}\varepsilon^{\beta/\nu}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 2
$$\|\tau\|_{H_\infty^\beta(\Omega)}\leqslant P\big(\|\tau\|_{L_\infty(\Omega)}+\|\tau\|^\nu_{H_q^\alpha(\Omega)}\|\tau\|^{1-\nu}_{L_\infty(\Omega)}\big)\leqslant P\big(\|\theta\|_{L_\infty(\Omega)}+\|\tau\|^\nu_{H_q^\alpha(\Omega)}\|\theta\|^{1-\nu}_{L_\infty(\Omega)}\big);$$
тогда
$$\|\theta\|_{H_\infty^\beta(\Omega)}\leqslant\|\theta-g\|_{H_\infty^\beta(\Omega)}+\|g_2\|_{H_\infty^\beta(\Omega)}+\|g_1\|_{H_\infty^\beta(\Omega)}$$
$$\leqslant A_3\|\theta\|_{L_\infty(\Omega)}+P_1\big(\|g_2\|_{L_\infty(\Omega)}+\|\varphi\|^\nu_{L_q(\Omega)}\|g_2\|^{1-\nu}_{L_\infty(\Omega)}\big)+\|\tau\|_{H_q^\beta(\Omega)}$$
$$\leqslant(A_3+P_1(A_4+2))\|\theta\|_{L_\infty(\Omega)}+P_1(A_4+2)^{1-\nu}\|\varphi\|^\nu_{L_q(\Omega)}\|\theta\|^{1-\nu}_{L_\infty(\Omega)}+P\big(\|\theta\|_{L_\infty(\Omega)}+\|\tau\|^\nu_{H_q^\alpha(\Omega)}\|\theta\|^{1-\nu}_{L_\infty(\Omega)}\big)$$
$$\leqslant A_6\big(\|\theta\|_{L_\infty(\Omega)}+(\|\varphi\|^\nu_{L_q(\Omega)}+\|\tau\|^\nu_{H_q^\alpha(\Omega)})\|\theta\|^{1-\nu}_{L_\infty(\Omega)}\big),$$
где $A_6=A_3+P_1(A_4+2)+P_1(A_4+2)^{1-\nu}+P$. Положим $\varepsilon_0=(2A_6)^{-1/\beta},\mathcal{P}=(2A_6)^{1/\nu}$. Рассуждая так же, как и в доказательстве предыдущей теоремы, мы получим, что для всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ из условия $\theta|_\Gamma=0$ вытекает, что $\|\theta\|_{L_\infty(\Omega)}\leqslant\mathcal{P}(\|\varphi\|^\nu_{L_q(\Omega)}+\|\tau\|^\nu_{W_q^2(\Omega)})^{1/\nu}\varepsilon^{\beta/\nu}$. Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е 3. Если $\eta=+\infty$, то можно взять $\beta=1$ и $\nu=1/2$. Тогда неравенство примет вид
$$\|u_1-u_2\|_{L_\infty(\Omega)}\leqslant\mathcal{P}(\|\varphi\|^\nu_{L_q(\Omega)}+\|\tau\|^\nu_{W_q^2(\Omega)})^{1/\nu}\varepsilon^2.$$

2. Устойчивость однозначной разрешимости для нелинейности вида $F(x, u, \nabla u)$

Рассмотрим для $i = 1, 2$ следующие задачи Дирихле:

$$\left\{\begin{array}{ll} \Delta u_i(x) = F(x, u_i(x), \nabla u_i(x)) + \varphi_i(x) & \text{на } \Omega_0, \\ u_i = \tau_i & \text{на } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{2.i}$$

Будем предполагать, что $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — компактная область и $\partial\Omega$ имеет гладкость C^2; функции $\varphi_i, \tau_i, u_i\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$ принадлежат соответственно классам $L_q(\Omega)$, $W_q^2(\Omega)$ и $W_q^2(\Omega)$ с $q > n$.

Рассмотрим следующие условия на отображение $F = F(x, u, p)\colon\ \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

(a$'$) для всех $(x, u, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ верно неравенство $|F(x, u, p)| \leqslant b(x, u)(1 + |p|^\alpha)$, где $\alpha = 2 - n/q > 1$, а функция $b(x, u)$ измерима по x при всех u и непрерывна по u почти при всех x; $b(x) = b_M(x) = \sup_{|u| \le M} b(x, u) \in L_q(\Omega)\ \ \forall M > 0$;

(b$'$) найдется число $k_0 \geqslant 0$, для которого $F(x, u, p)u \geqslant -\mu_0 p^2 - Du^2 - \psi(x)$ для всех (x, u, p) из $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ с $|u| \geqslant k_0$. При этом $0 \leqslant \mu_0 < 1$, $\psi \in L_r(\Omega)$, $r > n(\mu_0 + 1)/2$, $D\gamma^2(1 + \mu_0) < 1$ (γ — точная константа в неравенстве Фридрихса);

(c$'$) для любых $(x, u, p_i) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ таких, что $|u| \leqslant M,\ |p_i| \leqslant M\ (i = 1, 2)$, верно неравенство

$$|F(x, u, p_1) - F(x, u, p_2)| \leqslant k_M(x)|p_1 - p_2|,$$

где $k = k_M$ — некоторая функция из $L_2(\Omega)$. Для любых $(x, u_i, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ таких, что $|u_i| \leqslant M,\ |p| \leqslant M\ (i = 1, 2)$, верно неравенство

$$|F(x, u_1, p) - F(x, u_2, p)| \leqslant K_M(x)|u_1 - u_2|,$$

где $K = K_M$ — некоторая функция из $L_\eta(\Omega)$, $\eta > 1$ и $\eta \geqslant q/2$;

(d$'$) для любого $M > 0$ найдется число $A = A(M) > 0$ такое, что выполняется неравенство $\operatorname{sign} t\,(F(x, u + t, p) - F(x, u, p)) \geqslant -A|t|$ для всех $t \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$ и любых $u \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^n$ с $|u| \leqslant M,\ |p| \leqslant M$.

Положим

$$Q = Q(\tau) = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\|\nabla\tau\|_{L_\infty(\Omega)}}{\|\tau\|_{L_\infty(\Omega)}}, & \text{если } \|\tau\|_{L_\infty(\Omega)} \neq 0, \\ 0, & \text{если } \|\tau\|_{L_\infty(\Omega)} = 0. \end{array}\right.$$

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (a$'$)–(d$'$), $s = \min\{2, \eta\}$, $\beta \in (0, 1]$, $\beta + n/s < 2$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \in L_s(\Omega)$, $\tau = \tau_1 - \tau_2 \in W_q^2(\Omega)$ *и* u_i *— обобщенные решения из класса* $W_q^2(\Omega)$ *задач* (2.i), *непрерывные на* Ω. *Тогда*

(1) *найдутся константы* $\mathcal{P}, \varepsilon_0 > 0$, *зависящие только от*

$$Q,\ \beta,\ (1 - (\mu_0 + 1)D\gamma^2),\ \mu_0,\ q,\ \Omega,\ \|\psi\|_{L_r(\Omega)},\ \eta \quad \text{и} \quad \max_{i=1,2}\{\|\tau_i\|_{L_\infty(\Omega)}, \|\varphi_i\|_{L_q(\Omega)}\}$$

и такие, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *и всякой (относительной)* ε*-сети* Γ *для* Ω *условие* $u_1|_\Gamma = u_2|_\Gamma$ *влечет неравенство*

$$\|u_1 - u_2\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \mathcal{P}\|\varphi\|_{L_s(\Omega)}\varepsilon^\beta;$$

(2) *найдутся константы* $\mathcal{P}, \varepsilon_0 > 0$, *зависящие только от*

$$\beta,\ (1 - (\mu_0 + 1)D\gamma^2),\ \mu_0,\ q,\ \Omega,\ \|\psi\|_{L_r(\Omega)},\ \eta \quad \text{и} \quad \max_{i=1,2}\{\|\tau_i\|_{L_\infty(\Omega)},\ \|\varphi_i\|_{L_q(\Omega)}\}$$

и такие, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *и всякой (относительной)* ε*-сети* Γ *для* Ω *условие* $u_1|_\Gamma = u_2|_\Gamma$ *влечет неравенство*

$$\|u_1 - u_2\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \mathcal{P}\big(\|\varphi\|_{L_s(\Omega)} + \|\tau\|_{W_q^2(\Omega)}\big)\varepsilon^\beta.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу [1, гл. 4, § 7, теорема 7.5] существует число $A>0$, которое зависит только от

$$M:=\max_{i=1,2}\{\|\tau_i\|_{L_\infty(\Omega)},\ \|\varphi_i\|_{L_q(\Omega)}\},\ (1-(\mu_0+1)D\gamma^2),\ \mu_0,\ q,\ \Omega,\ \|\psi\|_{L_r(\Omega)}$$

и для которого выполняется неравенство $\|u_i\|_{L_\infty(\Omega)}\leqslant A$. В [3] показано, что найдется константа $E_2>0$, зависящая только от $\|b_A\|_{L_q(\Omega)}$, M, Ω и такая, что $\|u_i\|_{W_q^2(\Omega)}\leqslant E_2$ $(i=1,2)$. Из теоремы вложения вытекает, что существует константа $N>0$, зависящая только от Ω, E_1, E_2 и такая, что $\|u_i\|_{L_\infty(\Omega)}+\|\nabla u_i\|_{L_\infty(\Omega)}\leqslant N$.

Пусть

$$\begin{cases} \Delta w(x)=F(x,u_1(x),\nabla u_1(x))-F(x,u_2(x),\nabla u_2(x)) & \text{на } \Omega_0,\\ w=0 & \text{на } \partial\Omega,\end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\widehat{\theta}(x)=F(x,u_1(x),\nabla u_1(x))-F(x,u_2(x),\nabla u_2(x))+\varphi(x) & \text{на } \Omega_0,\\ \widehat{\theta}=0 & \text{на } \partial\Omega,\end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta g_1=0 & \text{на } \Omega_0,\\ g_1=\tau & \text{на } \partial\Omega\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \Delta g_2=\varphi(x) & \text{на } \Omega_0,\\ g_2=0 & \text{на } \partial\Omega,\end{cases}$$

т. е. w, $\widehat{\theta}$, g_1 и g_2 — решения соответствующих задач.

Можно, как и ранее, считать, что $\tau\equiv g_1$. Пусть $\theta=u_1-u_2=\widehat{\theta}+g_1$. Тогда верны соотношения:

$$-\int\limits_\Omega \nabla w\nabla\widehat{\theta}dx=\int\limits_\Omega \widehat{\theta}(x)\triangle w(x)dx=\int\limits_\Omega (F(x,u_1(x),\nabla u_1(x))-F(x,u_2(x),\nabla u_2(x)))\widehat{\theta}(x)dx$$

$$=\int\limits_\Omega (F(x,u_1(x),\nabla u_1(x))-F(x,u_2(x),\nabla u_1(x)))\widehat{\theta}(x)dx$$

$$+\int\limits_\Omega (F(x,u_2(x),\nabla u_1(x))-F(x,u_2(x),\nabla u_2(x)))\widehat{\theta}(x)dx$$

$$\geqslant-\int\limits_\Omega A|\theta(x)||\widehat{\theta}(x)|dx-\int\limits_\Omega k_N(x)|\widehat{\theta}(x)||\nabla\theta(x)|dx.$$

Следовательно,

$$\|\nabla\widehat{\theta}\|^2_{L_2(\Omega)}\leqslant\|\nabla\widehat{\theta}\|_{L_2(\Omega)}\|\nabla g_2\|_{L_2(\Omega)}+\int\limits_\Omega A|\widehat{\theta}|^2dx+\int\limits_\Omega A|\widehat{\theta}||g_1|dx$$

$$+\int\limits_\Omega k_N(x)|\widehat{\theta}(x)||\nabla\widehat{\theta}(x)|dx+\int\limits_\Omega k_N(x)|\widehat{\theta}(x)||\nabla g_1(x)|dx.$$

По теореме вложения существует константа $\kappa_s>0$, зависящая только от Ω и s и такая, что $\|g_2\|_{L_{s'}(\Omega)}\leqslant\kappa_s\|\nabla g_2\|_{L_2(\Omega)}$, где $s'=s/(s-1)$. Кроме того,

$$\|\nabla g_2\|^2_{L_2(\Omega)}=\int\limits_\Omega |\nabla g_2|^2dx=-\int\limits_\Omega g_2\Delta g_2dx\leqslant\int\limits_\Omega |g_2||\varphi|dx$$

$$\leqslant\|\varphi\|_{L_s(\Omega)}\|g_2\|_{L_{s'}(\Omega)}\leqslant\kappa_s\|\varphi\|_{L_s(\Omega)}\|\nabla g_2\|_{L_2(\Omega)}.$$

Следовательно, $\|\nabla g_2\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \kappa_s \|\varphi\|_{L_s(\Omega)}$. Отсюда

$$\|\nabla\widehat{\theta}\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \|\nabla\widehat{\theta}\|_{L_2(\Omega)}\kappa_s\|\varphi\|_{L_s(\Omega)} + A\|\widehat{\theta}\|^2_{L_2(\Omega)} + \|k_N\|_{L_2(\Omega)}\|\widehat{\theta}\|_{L_\infty(\Omega)}\|\nabla\widehat{\theta}\|_{L_2(\Omega)}$$

$$+ A\|\widehat{\theta}\|_{L_2(\Omega)}\|g_1\|_{L_2(\Omega)} + \|k_N\|_{L_2(\Omega)}\|\widehat{\theta}\|_{L_2(\Omega)}\|\nabla g_1\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \|\nabla\widehat{\theta}\|_{L_2(\Omega)}\big(\kappa_s\|\varphi\|_{L_s(\Omega)}$$

$$+ \|k_N\|_{L_2(\Omega)}\|\widehat{\theta}\|_{L_\infty(\Omega)} + A\gamma\|g_1\|_{L_2(\Omega)} + \|k_N\|_{L_2(\Omega)}\gamma\|\nabla g_1\|_{L_\infty(\Omega)}\big) + A\|\widehat{\theta}\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Если

$$\|\nabla\widehat{\theta}\|^2_{L_2(\Omega)} \geqslant 2A\|\widehat{\theta}\|^2_{L_2(\Omega)},$$

то

$$\frac{1}{2}\|\nabla\widehat{\theta}\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant A_1\|\nabla\widehat{\theta}\|_{L_2(\Omega)}\big(\|\varphi\|_{L_s(\Omega)} + \|\widehat{\theta}\|_{L_\infty(\Omega)} + \|g_1\|_{L_2(\Omega)} + \|\nabla g_1\|_{L_\infty(\Omega)}\big),$$

где $A_1 = \kappa_s + \|k_N\|_{L_2(\Omega)}(1+\gamma) + A\gamma$. Следовательно,

$$\|\nabla\widehat{\theta}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant 2A_1\big(\|\varphi\|_{L_s(\Omega)} + \|\widehat{\theta}\|_{L_\infty(\Omega)} + \|g_1\|_{L_2(\Omega)} + \|\nabla g_1\|_{L_\infty(\Omega)}\big).$$

Если $\|\nabla\widehat{\theta}\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant 2A\|\widehat{\theta}\|^2_{L_2(\Omega)}$, то $\|\nabla\widehat{\theta}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \sqrt{2A}\|\widehat{\theta}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \sqrt{2A\operatorname{mes}\Omega}\,\|\widehat{\theta}\|_{L_\infty(\Omega)}$.
Таким образом,

$$\|\nabla\widehat{\theta}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant A_2\big(\|\varphi\|_{L_s(\Omega)} + \|\widehat{\theta}\|_{L_\infty(\Omega)} + \|g_1\|_{L_2(\Omega)} + \|\nabla g_1\|_{L_\infty(\Omega)}\big),$$

где $A_2 = 2A_1 + \sqrt{2A\operatorname{mes}\Omega}$. Из неравенств

$$\|\nabla\theta\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|\nabla\widehat{\theta}\|_{L_2(\Omega)} + \|\nabla g_1\|_{L_2(\Omega)}, \qquad \|\widehat{\theta}\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \|\theta\|_{L_\infty(\Omega)} + \|g_1\|_{L_\infty(\Omega)}$$

вытекает оценка

$$\|\nabla\theta\|_{L_2(\Omega)} \leqslant (A_2+1)\big(\|\varphi\|_{L_s(\Omega)} + \|\theta\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\tau\|_{W^2_q(\Omega)} + \|\nabla g_1\|_{L_\infty(\Omega)}\big).$$

По теореме вложения имеем

$$\|\nabla g_1\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant A_3(\|g_1\|_{L_\infty(\Omega)} + \|g_1\|_{W^2_q(\Omega)}),$$

где $A_3 > 0$ зависит только от Ω и q. Учитывая, что $\|g_1\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \sqrt{\operatorname{mes}\Omega}\|g_1\|_{L_\infty(\Omega)}$, и применяя принцип максимума $\|g_1\|_{L_\infty(\Omega)} = \|\,\tau|_{\partial\Omega}\,\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \|\theta\|_{L_\infty(\Omega)}$, получим

$$\|\nabla\theta\|_{L_2(\Omega)} \leqslant A_4\big(\|\varphi\|_{L_s(\Omega)} + \|\theta\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\tau\|_{W^2_q(\Omega)}\big),$$

где $A_4 > 0$ зависит только от Ω, A_3 и A_2.

Имеют место оценки

$$\|F(x,u_1(x),\nabla u_1(x)) - F(x,u_2(x),\nabla u_1(x))\|_{L_\eta(\Omega)} \leqslant \|K_N\|_{L_\eta(\Omega)}\|\theta\|_{L_\infty(\Omega)},$$

$$\|F(x,u_2(x),\nabla u_1(x)) - F(x,u_2(x),\nabla u_2(x))\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|k_N\|_{L_2(\Omega)}\|\nabla\theta\|_{L_2(\Omega)},$$

т. е.

$$\|F(x,u_1(x),\nabla u_1(x)) - F(x,u_2(x),\nabla u_2(x))\|_{L_s(\Omega)} \leqslant A_5\big(\|\varphi\|_{L_s(\Omega)} + \|\theta\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\tau\|_{W^2_q(\Omega)}\big),$$

где $A_5 > 0$ зависит только от Ω, A_4, $\|K_N\|_{L_\eta(\Omega)}$, $\|k_N\|_{L_2(\Omega)}$.

Поскольку

$$\widehat{\theta}(y) = \int\limits_\Omega G(x,y)\Big(F(x,u_1(x),\nabla u_1(x)) - F(x,u_2(x),\nabla u_2(x))\Big)dx + \int\limits_\Omega G(x,y)\varphi(x)dx,$$

где G — функция Грина, отвечающая нулевым граничным условиям, то из предыдущих неравенств и свойств интеграла типа потенциала вытекает, что

$$\|\widehat{\theta}\|_{H^\beta_\infty(\Omega)} \leqslant A_6\big(\|\varphi\|_{L_s(\Omega)} + \|\theta\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\tau\|_{W^2_q(\Omega)}\big),$$

где $A_6 > 0$ зависит только от Ω, A_5. Учитывая, что

$$\|g_1\|_{H^\beta_\infty(\Omega)} \leqslant A_7\big(\|g_1\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\nabla g_1\|_{L_\infty(\Omega)}\big),$$

где $A_7 > 0$ зависит только от β, Ω, мы получим, что

$$\|\theta\|_{H^\beta_\infty(\Omega)} \leqslant \|\widehat{\theta}\|_{H^\beta_\infty(\Omega)} + \|g_1\|_{H^\beta_\infty(\Omega)} \leqslant A_8\big(\|\varphi\|_{L_s(\Omega)} + \|\theta\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\tau\|_{W^2_q(\Omega)}\big)$$

и $A_8 > 0$ зависит только от A_7, A_3 и A_6. Пусть $\varepsilon_0 = (2A_8)^{-1/\beta}$. Тогда для произвольных $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и ε-сети Γ для Ω условие $\theta|_\Gamma \equiv 0$ влечет неравенство

$$\|\theta\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant A_8\varepsilon^\beta\big(\|\varphi\|_{L_s(\Omega)} + \|\theta\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\tau\|_{W^2_q(\Omega)}\big),$$

и, следовательно,

$$\|\theta\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant 2A_8\big(\|\varphi\|_{L_s(\Omega)} + \|\tau\|_{W^2_q(\Omega)}\big)\varepsilon^\beta.$$

Аналогично из оценки $\|\nabla g_1\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant Q\|g_1\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant Q\|\theta\|_{L_\infty(\Omega)}$ вытекает неравенство $\|\nabla\theta\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \widetilde{A}_4\big(\|\varphi\|_{L_s(\Omega)} + \|\theta\|_{L_\infty(\Omega)}\big)$, где $\widetilde{A}_4 > 0$ зависит только от Q и A_2. Далее, повторяя предыдущие рассуждения, мы придем к оценке $\|\theta\|_{H^\beta_\infty(\Omega)} \leqslant \widetilde{A}_8\big(\|\varphi\|_{L_s(\Omega)} + \|\theta\|_{L_\infty(\Omega)}\big)$. Выбирая затем $\varepsilon_0 = (2A_8)^{-1/\beta}$, для произвольных $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и ε-сети Γ для Ω из условия $\theta|_\Gamma \equiv 0$ мы получим, что $\|\theta\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant 2\widetilde{A}_8\|\varphi\|_{L_s(\Omega)}\varepsilon^\beta$. Теорема доказана.

3. Устойчивость однозначной разрешимости для квазилинейного уравнения теплопроводности

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная замкнутая область с гладкой границей $\partial\Omega$, $\Omega_0 = \Omega\setminus\partial\Omega$. Для произвольных чисел $T > 0$ и $\tau \in [0, T]$ определим множество $\omega_\tau = \Omega \times [0, \tau]$, $\omega^0_\tau = \Omega_0 \times (0, \tau]$, боковую границу $S_\tau = \partial\Omega \times (0, \tau]$, сечение $\Omega_\tau = \Omega_0 \times \{\tau\}$ и $\Sigma_\tau = S_\tau \sqcup \Omega$. Рассмотрим для $i = 1, 2$ следующие задачи:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial t}u_i(x,t) + \Delta u_i(x,t) = F(x,t,u_i(x,t)) + \varphi_i(x,t) & \text{на } \omega^0_T, \\ u_i(x,0) = u^0_i(x) & \text{на } \Omega, \\ u_i(x,t) = 0 & \text{на } S_T, \end{cases} \tag{3.i}$$

где $\varphi_i \in L_{q,r}(\omega_T)$, $u^0_i \in L_\infty(\Omega)$, $u^0_i\big|_{\partial\Omega} \equiv 0$ $(i = 1, 2)$.

Для этих задач будем исследовать обобщенные решения в классе функций $V^{1,0}_2(\omega_T)$, где $V^{1,0}_2(\omega_T)$ — банахово пространство, состоящее из элементов, непрерывных по t в норме $L_2(\Omega)$, с нормой $\|u\| = \max\limits_{t\in[0,T]} \|u(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L_2(\omega_T)}$.

Рассмотрим следующие условия на нелинейность $F\colon\ \omega_T \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

(a$''$) $|F(x,t,u)| \leqslant C|u|^{\overline{\gamma}} + g(x,t)$ на ω_T, где $g \in L_{q,r}(\omega_T)$ и $\overline{\gamma} \in [0, 1 + 4/n]$, $1/r + n/2q \leqslant 1 + n/4$, $r, q \geqslant 1$;

(b$''$) найдется число $k_0 \geqslant 0$, для которого выполнено неравенство $F(x,t,u)\operatorname{sign} u \geqslant |u|g_0(x,t)$ при всех $(x,t,u) \in \omega_T \times \mathbb{R}\colon\ |u| \geqslant k_0$, где $g_0 \in L_{q_0,r_0}(\omega_T)$. При этом $\vartheta_0 = 1/r_0 + n/(2q_0) \in (0,1)$ при $n \geqslant 2$ и $\vartheta_0 \in (1/2, 1)$ при $n = 1$;

(c$''$) для каждого числа $M \geqslant 0$ найдется функция $k_M(x,t) \in L_l(\omega_T)$, для которой верно неравенство $|F(x,t,a_1) - F(x,t,a_2)| \leqslant k_M(x,t)|a_1 - a_2|$ для всех $(x,t,a_i) \in \omega_T \times \mathbb{R}$ таких, что $|a_i| \leqslant M$ $(i = 1, 2)$.

По-прежнему

$$Q = Q(\tau,\beta) = \begin{cases} \dfrac{\|\tau\|_{H^\beta_\infty(\Omega)}}{\|\tau\|_{L_\infty(\Omega)}}, & \text{если } \|\tau\|_{L_\infty(\Omega)} \neq 0,\\ 0, & \text{если } \|\tau\|_{L_\infty(\Omega)} = 0. \end{cases}$$

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* (a$''$)–(c$''$), $\beta \in (0,1]$, $\beta + n/l < \alpha \leqslant 2 - 2/l$; $\nu = \alpha^{-1}(\beta + n/l)$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \in L_l(\omega_T)$, $u^0 = u^0_1 - u^0_2 \in H^\alpha_l(\Omega)$, $A := \max\limits_{i=1,2}\big\{\|u^0_i\|_{H^\alpha_l(\Omega)}, \|\varphi_i\|_{L_{q,r}(\omega_T)}\big\}$ *и* u_i *— обобщенные решения из класса* $V^{1,0}_2(\omega_T)$ *задач* (3.i), *непрерывные на* ω_T. *Тогда*

(1) *найдутся константы* $\mathcal{P}, \varepsilon_0 > 0$, *зависящие только от*

$$\beta,\ \|g\|_{L_{q,r}(\omega_T)},\ \|g_0\|_{L_{q_0,r_0}(\omega_T)},\ n,\ q,\ r,\ q_0,\ r_0,\ l,\ \Omega,\ T,\ C,\ k_0,\ A$$

и такие, что для любого $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ *и всякой* (*относительной*) ε-*сети* Γ *для* Ω_τ *для некоторого* $\tau \in [0,T]$ *из условия* $u_1|_\Gamma = u_2|_\Gamma$ *вытекает неравенство*

$$\|u_1 - u_2\|_{L_\infty(\omega_T)} \leqslant \mathcal{P}\left(\|\varphi\|^\nu_{L_l(\omega_T)} + \|u^0\|^\nu_{H^\alpha_l(\Omega)}\right)^{1/\nu} \varepsilon^{\beta/\nu};$$

(2) *найдутся константы* $\mathcal{P}, \varepsilon_0 > 0$, *зависящие только от*

$$Q \text{ и } \beta,\ \|g\|_{L_{q,r}(\omega_T)},\ \|g_0\|_{L_{q_0,r_0}(\omega_T)},\ n,\ q,\ r,\ q_0,\ r_0,\ l,\ \Omega,\ T,\ C,\ k_0,\ A$$

и такие, что для любого $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ *и всякой* (*относительной*) ε-*сети* Γ *для* Ω_τ *для некоторого* $\tau \in [0,T]$ *из условия* $u_1|_\Gamma = u_2|_\Gamma$ *вытекает неравенство*

$$\|u_1 - u_2\|_{L_\infty(\omega_T)} \leqslant \mathcal{P}\|\varphi\|_{L_l(\omega_T)}\varepsilon^{\beta/\nu}.$$

Доказательство. Пусть $s = \alpha/2 + 1/l$. В силу [4, гл. 4, § 2, теорема 2.1] найдется число $M > 0$, зависящее только от

$$\|g\|_{L_{q,r}(\omega_T)},\ \|g_0\|_{L_{q_0,r_0}(\omega_T)},\ n,\ q,\ r,\ q_0,\ r_0,\ l,\ \Omega,\ T,\ C,\ k_0,\ A$$

такое, что $\|u_i\|_{L_\infty(\omega_T)} \leqslant M$. Пусть $g = g_1$ и $g = g_2$ — решения соответственно задач

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial t}g + \Delta g = 0 & \text{на } \omega_T,\\ g(x,0) = -u^0(x) & \text{на } \Omega,\\ g(x,t) = 0 & \text{на } S_T \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial t}g + \Delta g = -\varphi & \text{на } \omega_T,\\ g(x,0) = 0 & \text{на } \Omega,\\ g(x,t) = 0 & \text{на } S_T. \end{cases}$$

Положим $\theta = u_1 - u_2$, $g = g_1 + g_2$, $\widehat{\theta} = \theta + g$. Отметим, что из принципа максимума $\|g_1\|_{L_\infty(\omega_T)} = \|u^0\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \|\theta\|_{L_\infty(\omega_T)}$. Кроме того,

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial t}\widehat{\theta} + \Delta\widehat{\theta} = F(x,t,u_1(x,t)) - F(x,t,u_2(x,t)) & \text{на } \omega_T,\\ \widehat{\theta} = 0 & \text{на } \Sigma_T \end{cases}$$

и

$$|F(x,t,u_1(x,t)) - F(x,t,u_2(x,t))| \leqslant k_M(x,t)|\theta| \leqslant k_M(x,t)\|\theta\|_{L_\infty(\omega_T)}.$$

Следовательно,

$$\|F(x,t,u_1) - F(x,t,u_2)\|_{L_l(\omega_T)} \leqslant \|k_M\|_{L_l(\omega_T)}\|\theta\|_{L_\infty(\omega_T)}.$$

По теореме вложения (см. [5]) верны оценки

$$\|\widehat{\theta}\|_{W^{2,1}_l(\omega_T)} \leqslant E\|k_M\|_{L_l(\omega_T)}\|\theta\|_{L_\infty(\omega_T)}, \qquad \|\widehat{\theta}\|_{L_\infty(\omega_T)} \leqslant E\|\theta\|_{L_\infty(\omega_T)},$$

где $E>0$ зависит только от Ω, T, s, l. Аналогично $\|g_2\|_{W_l^{2s,s}(\omega_T)}\leqslant E\|\varphi\|_{L_l(\omega_T)}$. Кроме того,

$$\|g_2\|_{L_\infty(\omega_T)}\leqslant\|\widehat{\theta}\|_{L_\infty(\omega_T)}+\|\widehat{\theta}-g_2\|_{L_\infty(\omega_T)}\leqslant E\|\theta\|_{L_\infty(\omega_T)}+\|\widehat{\theta}-g_2\|_{L_\infty(\omega_T)}$$

$$\leqslant E\|\theta\|_{L_\infty(\omega_T)}+\|\theta\|_{L_\infty(\omega_T)}+\|g_1\|_{L_\infty(\omega_T)}=(E+1)\|\theta\|_{L_\infty(\omega_T)}+\|u^0\|_{L_\infty(\Omega)}\leqslant(E+2)\|\theta\|_{L_\infty(\omega_T)}.$$

По теореме вложения (см. [2]) $g_2(\cdot,\tau)\in H_l^\alpha(\Omega)$ для всех $\tau\in[0,T]$, и найдется константа $E_1>0$, зависящая только от T, Ω, l, E и такая, что $\|g_2(\cdot,\tau)\|_{H_l^\alpha(\Omega)}\leqslant E_1\|g_2\|_{W_l^{2s,s}(\omega_T)}\leqslant E_1E\|\varphi\|_{L_l(\omega_T)}$, $\|\widehat{\theta}(\cdot,\tau)\|_{H_l^\alpha(\Omega)}\leqslant E_1\|\widehat{\theta}\|_{W_l^{2s,s}(\omega_T)}\leqslant E_1E\|k_M\|_{L_l(\omega_T)}\|\theta\|_{L_\infty(\omega_T)}$. В силу леммы 2

$$\|g_2(\cdot,\tau)\|_{H_\infty^\beta(\Omega)}\leqslant P\big(\|g_2(\cdot,\tau)\|_{L_\infty(\Omega)}+\|g_2(\cdot,\tau)\|^\nu_{H_l^\alpha(\Omega)}\|g_2(\cdot,\tau)\|^{1-\nu}_{L_\infty(\Omega)}\big)$$

$$\leqslant P(1+E_1E)\big(\|g_2(\cdot,\tau)\|_{L_\infty(\Omega)}+\|\varphi\|^\nu_{L_l(\omega_T)}\|g_2(\cdot,\tau)\|^{1-\nu}_{L_\infty(\Omega)}\big)$$

$$\leqslant P(1+E_1E)(E+2)\big(\|\theta\|_{L_\infty(\omega_T)}+\|\varphi\|^\nu_{L_l(\omega_T)}\|\theta\|^{1-\nu}_{L_\infty(\omega_T)}\big).$$

Аналогично, $\|\widehat{\theta}(\cdot,\tau)\|_{H_\infty^\beta(\Omega)}\leqslant P(1+E_1E\|k_M\|_{L_l(\omega_T)})(E+2)\|\theta\|_{L_\infty(\omega_T)}$.

Разберем утверждение (1). В силу теоремы вложения

$$\|g_1(\cdot,\tau)\|_{H_l^\alpha(\Omega)}\leqslant E_1\|g_1\|_{W_l^{2s,s}(\omega_T)}\leqslant E_1E\|u^0\|_{H_l^\alpha(\omega_T)},$$

а по лемме 2

$$\|g_1(\cdot,\tau)\|_{H_\infty^\beta(\Omega)}\leqslant P\big(\|g_1(\cdot,\tau)\|_{L_\infty(\Omega)}+\|g_1(\cdot,\tau)\|^\nu_{H_l^\alpha(\Omega)}\|g_1(\cdot,\tau)\|^{1-\nu}_{L_\infty(\Omega)}\big)$$

$$\leqslant P(1+E_1E)\big(\|\theta\|_{L_\infty(\omega_T)}+\|u^0\|^\nu_{H_l^\alpha(\Omega)}\|\theta\|^{1-\nu}_{L_\infty(\omega_T)}\big).$$

Следовательно,

$$\|\theta\|_{H_l^\beta(\Omega)}\leqslant\|\widehat{\theta}\|_{H_l^\beta(\Omega)}+\|g_2\|_{H_l^\beta(\Omega)}+\|g_1\|_{H_l^\beta(\Omega)}$$

$$\leqslant E_3\big(\|\theta\|_{L_\infty(\Omega)}+(\|\varphi\|^\nu_{L_l(\omega_T)}+\|u^0\|^\nu_{H_l^\alpha(\Omega)})\|\theta\|^{1-\nu}_{L_\infty(\Omega)}\big),$$

где $E_3=3P(1+E_1E+E_1E\|k_M\|_{L_l(\omega_T)})(E+2)$. Выберем такое $\tau\in[0,T]$, чтобы $\|\theta(\cdot,\tau)\|_{L_\infty(\Omega)}\leqslant\|\theta\|_{L_\infty(\omega_T)}$, и положим $\varepsilon_0=(2E_3)^{-1/\beta},\mathcal{P}=(2E_3)^{1/\nu}$. Пусть Γ — ε-сеть для Ω_τ, где $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, для которой $\theta|_\Gamma\equiv0$. Тогда расстояние от точки $x_0\in\Omega_\tau$ такой, что $|\theta(x_0,\tau)|=\|\theta\|_{L_\infty(\omega_T)}$, до ближайшего нуля функции $\theta(\cdot,\tau)$ не превосходит ε, и, следовательно,

$$\|\theta\|_{L_\infty(\omega_T)}=|\theta(x_0,\tau)|\leqslant E_3\big(\|\theta\|_{L_\infty(\Omega)}+(\|\varphi\|^\nu_{L_l(\omega_T)}+\|u^0\|^\nu_{H_l^\alpha(\Omega)})\|\theta\|^{1-\nu}_{L_\infty(\Omega)}\big)\varepsilon^\beta.$$

Учитывая, что $\varepsilon^\beta E_3\leqslant1/2$, получаем неравенство

$$\|\theta\|_{L_\infty(\omega_T)}\leqslant2E_3(\|\varphi\|^\nu_{L_l(\omega_T)}+\|u^0\|^\nu_{H_l^\alpha(\Omega)})\|\theta\|^{1-\nu}_{L_\infty(\Omega)}\varepsilon^\beta,$$

и, следовательно,

$$\|\theta\|_{L_\infty(\omega_T)}\leqslant\mathcal{P}(\|\varphi\|^\nu_{L_l(\omega_T)}+\|u^0\|^\nu_{H_l^\alpha(\Omega)})^{1/\nu}\varepsilon^{\beta/\nu}.$$

Разберем утверждение (2). Поскольку

$$\|u^0\|_{H_l^\alpha(\Omega)}\leqslant Q\|u^0\|_{L_\infty(\Omega)}\leqslant Q\|\theta\|_{L_\infty(\Omega)},$$

то $\|g_1\|_{H_l^\beta(\Omega)}\leqslant E_1EQ\|\theta\|_{L_\infty(\Omega)}$ и, следовательно,

$$\|\theta\|_{H_l^\beta(\omega_T)}\leqslant E_4\big(\|\theta\|_{L_\infty(\omega_T)}+\|\varphi\|^\nu_{L_l(\omega_T)}\|\theta\|^{1-\nu}_{L_\infty(\omega_T)}\big),$$

где $E_4 > 0$ зависит только от Q, P, E, E_1, $\|k_M\|_{L_l(\omega_T)}$. Выбирая τ так же, как и выше, а $\varepsilon_0 = (2E_4)^{-1/\beta}$, $\mathcal{P} = (2E_4)^{1/\nu}$, получим, что $\|\theta\|_{L_\infty(\omega_T)} \leqslant \mathcal{P}\|\varphi\|_{L_l(\omega_T)}\varepsilon^{\beta/\nu}$, где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\theta|_\Gamma \equiv 0$, Γ — произвольная ε-сеть для Ω_τ. Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е 4. Пусть $\theta = u_1 - u_2$, $\tau \in [0, T]$, а v удовлетворяет условию

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial t}v + \Delta v = 0 & \text{на } \omega_T, \\ v(x,0) = u^0(x) & \text{на } \Omega, \\ v(x,t) = 0 & \text{на } S_T, \end{cases}$$

т. е. $v = -g_1$. Тогда при τ таком, что $\|\theta(\cdot,\tau)\|_{L_\infty(\Omega)} = \|\theta\|_{L_\infty(\omega_T)}$, верно неравенство

$$\|\theta\|_{L_\infty(\omega_T)} \leqslant \mathcal{P}\|\varphi\|_{L_l(\omega_T)}\varepsilon^\beta + 2\max_\Gamma|(\theta - v)(\cdot,\tau)| + 2\|v(\cdot,\tau)\|_{L_\infty(\Omega)},$$

а при τ, для которого $\|(\theta - v)(\cdot,\tau)\|_{L_\infty(\Omega)} = \|\theta - v\|_{L_\infty(\omega_T)}$, верно неравенство

$$\|\theta - v\|_{L_\infty(\omega_T)} \leqslant \mathcal{P}(\|\varphi\|_{L_l(\omega_T)} + \|v(\cdot,\tau)\|_{L_\infty(\Omega)})\varepsilon^\beta + 2\max_\Gamma|(\theta - v)(\cdot,\tau)|,$$

где $\mathcal{P}$ и ε_0 уже не зависят от Q (зависят только от β, $\|g\|_{L_{q,r}(\omega_T)}$, $\|g_0\|_{L_{q_0,r_0}(\omega_T)}$, n, q, r, q_0, r_0, l, Ω, T, C, k_0, A). Отметим также, что в силу принципа максимума $\|v(\cdot,\tau)\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \|u^0\|_{L_\infty(\Omega)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теорем вложения

$$\|g_2(\cdot,\tau)\|_{H^\beta_\infty(\Omega)} \leqslant \widetilde{E}\|g_2\|_{W^{2s,s}_l(\omega_T)} \leqslant \widetilde{E}E\|\varphi\|_{L_l(\omega_T)},$$

где $\widetilde{E} > 0$ зависит только от T, Ω, l, β. Как мы уже показали, для любого числа $\tau \in [0, T]$ верны неравенства

$$\|\widehat{\theta}(\cdot,\tau)\|_{H^\beta_\infty(\Omega)} \leqslant P(1 + E_1E\|k_M\|_{L_l(\omega_T)})(E + 2)\|\theta\|_{L_\infty(\omega_T)},$$

$$\begin{aligned} \|(\theta - v)(\cdot,\tau)\|_{H^\beta_\infty(\Omega)} &= \|(\theta + g_1)(\cdot,\tau)\|_{H^\beta_\infty(\Omega)} = \|(\widehat{\theta} - g_2)(\cdot,\tau)\|_{H^\beta_\infty(\Omega)} \\ &\leqslant \|\widehat{\theta}(\cdot,\tau)\|_{H^\beta_\infty(\Omega)} + \|g_2(\cdot,\tau)\|_{H^\beta_\infty(\Omega)} \leqslant A\big(\|\theta\|_{L_\infty(\omega_T)} + \|\varphi\|_{L_l(\omega_T)}\big), \end{aligned}$$

где $A = \widetilde{E}E + P(1 + E_1E\|k_M\|_{L_l(\omega_T)})(E + 2)$. Отсюда вытекает, что

$$\|(\theta - v)(\cdot,\tau)\|_{L_\infty(\Omega)} - \max_\Gamma|(\theta - v)(\cdot,\tau)| \leqslant A\big(\|\theta\|_{L_\infty(\omega_T)} + \|\varphi\|_{L_l(\omega_T)}\big)\varepsilon^\beta.$$

Выберем $\varepsilon_0 = (2A)^{-1/\beta}$ и рассмотрим произвольные $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и ε-сеть Γ для Ω_τ. Тогда

$$\|\theta(\cdot,\tau)\|_{L_\infty(\Omega)} - \|v(\cdot,\tau)\|_{L_\infty(\Omega)} - \max_\Gamma|(\theta - v)(\cdot,\tau)| \leqslant A\|\theta\|_{L_\infty(\omega_T)}\varepsilon^\beta + A\|\varphi\|_{L_l(\omega_T)}\varepsilon^\beta,$$

следовательно, когда τ такое, что $\|\theta(\cdot,\tau)\|_{L_\infty(\Omega)} = \|\theta\|_{L_\infty(\omega_T)}$, верно неравенство

$$\frac{1}{2}\|\theta(\cdot,\tau)\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant A\|\varphi\|_{L_l(\omega_T)}\varepsilon^\beta + \|v(\cdot,\tau)\|_{L_\infty(\Omega)} + \max_\Gamma|(\theta - v)(\cdot,\tau)|,$$

т. е.

$$\|\theta(\cdot,\tau)\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant 2A\|\varphi\|_{L_l(\omega_T)}\varepsilon^\beta + 2\|v(\cdot,\tau)\|_{L_\infty(\Omega)} + 2\max_\Gamma|(\theta - v)(\cdot,\tau)|.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \|(\theta - v)(\cdot,\tau)\|_{L_\infty(\Omega)} - \max_\Gamma|(\theta - v)(\cdot,\tau)| &\leqslant A\big(\|\theta\|_{L_\infty(\omega_T)} + \|\varphi\|_{L_l(\omega_T)}\big)\varepsilon^\beta \\ &\leqslant A\big(\|\theta - v\|_{L_\infty(\omega_T)} + \|v\|_{L_\infty(\omega_T)} + \|\varphi\|_{L_l(\omega_T)}\big)\varepsilon^\beta. \end{aligned}$$

Поэтому для τ такого, что $\|(\theta - v)(\cdot,\tau)\|_{L_\infty(\Omega)} = \|\theta - v\|_{L_\infty(\omega_T)}$, верно неравенство

$$\|(\theta - v)(\cdot,\tau)\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant 2A(\|v\|_{L_\infty(\omega_T)} + \|\varphi\|_{L_l(\omega_T)})\varepsilon^\beta + \max_\Gamma|(\theta - v)(\cdot,\tau)|.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. 2-е изд. М.: Наука, 1973. 576 с.
2. **Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.** Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 480 с.
3. **Похожаев С.И.** Об уравнениях вида $\Delta u = f(x, u, Du)$ // Мат. сб. 1980. Т. 113, № 2. С. 324–338.
4. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
5. **Солонников В.А.** Априорные оценки для уравнений второго порядка параболического типа // Тр. МИАН. 1964. Т. 70. С. 133–212.

Царьков Игорь Германович
д-р физ.-мат. наук, проф.
Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова
e-mail: tsar@mech.math.msu.su

Поступила 7.02.2008

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14 № 3 2008

УДК 519.6

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА МАРШРУТИЗАЦИИ С ВНУТРЕННИМИ ПОТЕРЯМИ[1]

А. А. Ченцов, А. Г. Ченцов, П. А. Ченцов

Рассматривается экстремальная задача маршрутизации перемещений с ограничениями в виде условий предшествования и дополнительными (внутренними) потерями, связанными с пребыванием “траектории” на целевых множествах.

Ключевые слова: маршрут, трасса, условия предшествования.

Введение

Работа посвящена исследованию одной весьма общей задачи маршрутизации перемещений по конечной системе множеств. Предполагается, однако, что пребывание на упомянутых множествах сопряжено с некоторыми потерями (затратами). Эти потери могут быть связаны с решением каких-то внутренних задач, выполнением некоторых работ. Допускается, что такие потери могут вносить ощутимый вклад в общие затраты, включающие обычно плату за перемещение между множествами.

В связи с постановками такого рода отметим серию обзорных статей [1–3], посвященных методам решения хорошо известной задачи коммивояжера (ЗК). Важно, однако, заметить, что в [1] рассматривается также широкий круг задач практического характера, связанных идейно с ЗК, но содержащих вместе с тем существенные особенности. Одна из постановок, обсуждаемых в [1], соответствует ЗК с выбором (см. [4–6]), или обобщенной ЗК (более общие дискретно-непрерывные экстремальные задачи маршрутизации исследовались в статьях [7–11] и др.); еще одна относится к так называемой задаче курьера (см. [1] и имеющуюся там библиографию). В связи с развитием двух упомянутых направлений отметим [12–16], где рассматривались задачи о посещении конечной системы множеств и еще более общие задачи о перемещении по сечениям многозначных отображений (см. [15]), осложненные условиями предшествования, которые в идейном отношении соответствуют задаче курьера [1] (см. также обобщенную задачу развозки в [17, 18]).

В настоящей работе рассматривается еще одно осложняющее обстоятельство, обусловленное пребыванием на множествах, подлежащих посещению. Имеется в виду возможность перемещения по множествам, в которых есть точки посещения. В статье предлагается подход к построению оптимального решения, базирующийся на нестандартной версии метода динамического программирования; будет рассмотрена также краткая схема жадного алгоритма.

1. Постановка задачи

Сначала введем ряд обозначений общего характера. Через $\{x\}$ обозначаем одноэлементное множество, содержащее объект x. Символ $\triangleq$ обозначает равенство по определению. Как обычно [19], $\{x; y\}$ — неупорядоченная пара объектов x и y, а (x, y) — упорядоченная пара этих объектов. Семейством называем множество, все элементы которого — множества. Если

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 06-01-00414, 07-01-96088, 08-08-00981).

H — множество, то семейство всех его конечных подмножеств, включая пустое, обозначаем через $\mathrm{FIN}(H)$. Для всяких множеств U, V имеем $U \times V = \{(u,v) :\ u \in U,\ v \in V\}$. Если U, V и W — непустые множества,

$$f :\ U \times V \longrightarrow W, \quad z \in U \times V \quad \text{и} \quad z = (u,v), \quad \text{где} \quad u \in U, \quad v \in V,$$

то, как обычно, $f(u,v) \triangleq f(z)$, что соответствует естественному правилу экономии скобок.

Через $\mathbb{N}$ (через $\mathbb{R}$) обозначаем множество всех натуральных (вещественных) чисел, $[0,\infty[\triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \mid \xi \geq 0\}$. Пусть $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$; при $k \in \mathbb{N}_0$ и $l \in \mathbb{N}_0$ полагаем

$$\overline{k,l} \triangleq \{i \in \mathbb{N}_0 \mid (k \leq i) \,\&\, (i \leq l)\}$$

(в случае $l < k$, который не исключается, очевидно, $\overline{k,l} = \varnothing$).

Всюду в дальнейшем фиксируем число $N \in \mathbb{N},\ N \geq 2$, непустое множество X, точку $x^0 \in X$ и кортеж

$$(M_i)_{i \in \overline{1,N}} :\ \overline{1,N} \longrightarrow \mathrm{FIN}(X) \backslash \{\varnothing\}. \tag{1.1}$$

Далее предполагаем, что $x^0, M_1, \ldots, M_N$ таковы, что

$$\Big(x^0 \notin \bigcup_{i=1}^{N} M_i\Big) \& \Big(M_{i_1} \cap M_{i_2} = \varnothing \ \ \forall i_1 \in \overline{1,N} \ \ \forall i_2 \in \overline{1,N} \setminus \{i_1\}\Big). \tag{1.2}$$

Разумеется,

$$M_j \times M_j \in \mathrm{FIN}(X \times X) \backslash \{\varnothing\} \quad \forall j \in \overline{1,N}. \tag{1.3}$$

В связи с (1.3) отметим, что в дальнейшем нам часто потребуется использовать специальные обозначения для компонент упорядоченных пар. Если h — произвольная упорядоченная пара, т. е. $h = (u,v)$ для некоторых (определяемых единственным образом) объектов u и v, то через $\mathrm{pr}_1(h)$ и $\mathrm{pr}_2(h)$ обозначаем соответственно первую и вторую компоненты $h :\ \mathrm{pr}_1(h) = u,\ \mathrm{pr}_2(h) = v$; если $h \in H_1 \times H_2$, где $H_1,\ H_2$ — множества, то $\mathrm{pr}_1(h) \in H_1$ и $\mathrm{pr}_2(h) \in H_2$.

Через $\mathbb{P}$ обозначаем множество всех перестановок в $\overline{1,N}$; если $\alpha \in \mathbb{P}$, то через α^{-1} обозначаем перестановку, обратную к $\alpha :\ \alpha^{-1} \in \mathbb{P}$, и при этом

$$\alpha(\alpha^{-1}(k)) = \alpha^{-1}(\alpha(k)) = k \quad \forall k \in \overline{1,N}. \tag{1.4}$$

Перестановки $\alpha \in \mathbb{P}$ называем также (полными) маршрутами; далее будут рассматриваться и частичные маршруты, связанные с посещением не всех, вообще говоря, целевых множеств из произвольных “начальных” состояний $x \in X$.

Предметом нашего рассмотрения будет задача организации перемещений вида

$$x^0 \longrightarrow (z_1 \in M_{\alpha(1)} \times M_{\alpha(1)}) \longrightarrow \ldots \longrightarrow (z_N \in M_{\alpha(N)} \times M_{\alpha(N)}), \tag{1.5}$$

где $\alpha \in \mathbb{P}$, причем конкретный выбор маршрута α может быть стеснен ограничениями в виде условий предшествования, для чего фиксируем множество

$$\mathbf{K} \in \mathrm{FIN}(\overline{1,N} \times \overline{1,N}), \tag{1.6}$$

которое интерпретируем как заданное множество упорядоченных пар индексов (случай $\mathbf{K} = \varnothing$, соответствующий отсутствию ограничений, не исключается).

Всюду в дальнейшем для элементов $\mathbf{K}$ предполагаем выполненным следующее

У с л о в и е 1.1. $\forall K \in \mathrm{FIN}(\mathbf{K}) \backslash \{\varnothing\} \ \ \exists h \in K :\ \mathrm{pr}_1(h) \neq \mathrm{pr}_2(\tilde{h}) \ \ \forall \tilde{h} \in K.$

Коль скоро $\{\tilde{z}\} \in \mathrm{FIN}(\mathbf{K})$ при $\tilde{z} \in \mathbf{K}$, имеем очевидное свойство

$$\mathrm{pr}_1(z) \neq \mathrm{pr}_2(z) \qquad \forall z \in \mathbf{K}.$$

Мы рассматриваем пары $z \in \mathbf{K}$ (подобно [12–16]) как условия предшествования, обязывающие к посещению множества $M_{\mathrm{pr}_1(z)}$ раньше, чем $M_{\mathrm{pr}_2(z)}$ с возможным (если это выгодно) посещением по пути каких-то других целевых множеств. В этой связи отметим, что

$$\mathbb{A} \stackrel{\triangle}{=} \{\alpha \in \mathbb{P} \mid \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_1(l)) < \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_2(l)) \;\; \forall l \in \mathbf{K}\} \tag{1.7}$$

есть множество всех допустимых (полных) маршрутов; см. по этому поводу (1.4). Более подробное обсуждение см. в [12–16].

Для каждого $i \in \overline{1,N}$ фрагмент $z_i \in M_{\alpha(i)} \times M_{\alpha(i)}$ в (1.5) связан с выполнением некоторой работы, которую будем называть внутренней и оценивать соответствующими затратами; удобно добавить пару $z_0 = (x^0, x^0)$ и рассматривать кортеж $(z_i)_{i \in \overline{0,N}}$ как трассу, или траекторию движения вдоль маршрута α. При этом перемещения

$$z_0 \longrightarrow z_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow z_{N-1} \longrightarrow z_N$$

рассматриваем как внешние перемещения (внешние работы).

Считаем заданными оценочные функции

$$\mathbf{c} : X \times X \longrightarrow [0, \infty[; \tag{1.8}$$

$$c_i : \;\; X \times X \longrightarrow [0, \infty[, \qquad i = \overline{1,N}; \tag{1.9}$$

$$\mathbf{f} : X \longrightarrow [0, \infty[. \tag{1.10}$$

Функция (1.8) используется для оценивания внешних перемещений (с одного множества на другое). Функции $c_1, \ldots, c_N$ (1.9) “работают” на множествах $M_1, \ldots, M_N$ соответственно, но по соображениям технического характера мы продолжаем их с $M_i \times M_i$ на $X \times X$, доопределяя, например, нулем. Функция (1.10) оценивает терминальное состояние трассы.

Отметим две содержательные задачи, приводящие к данной модели.

В первой задаче в рамках модели точки множеств M_j рассматриваются как города в задаче коммивояжера. Перемещения (1.5) можно интерпретировать следующим образом: стартуя из x^0, исполнитель достигает города $\mathrm{pr}_1(z_1) \in M_{\alpha(1)}$ и рассматривает его в качестве базы внутренней ЗК с фиксацией города $\mathrm{pr}_2(z_1) \in M_{\alpha(1)}$ в качестве последнего пункта на $M_{\alpha(1)}$, после чего начинается перемещение по $M_{\alpha(2)}$, где также решается внутренняя ЗК, и т.д. Без потери качества можно ограничиться оптимальным решением внутренних задач, так как для внешних перемещений важны лишь две точки X, определяющие вход в множество и выход из него. В этом случае функции (1.9) — это матрицы экстремумов внутренних ЗК с заданными краевыми условиями.

Другая содержательная задача состоит в следующем: каждое множество M_j (см. (1.1)) может рассматриваться как система портов на острове I_j; для внешних (морских) перемещений пригодны только порты — точки в M_j. В этом случае (1.8) служит для определения стоимости морских путешествий с острова на остров. В то же время бывает необходимо посетить не только порт на острове I_j, но и некоторый другой пункт $m_j \in I_j$, а тогда c_j в (1.9) оценивает стоимость сухопутных перемещений

$$\mathrm{pr}_1(z) \longrightarrow m_j \longrightarrow \mathrm{pr}_2(z),$$

где $z \in M_j \times M_j$, $x = \mathrm{pr}_1(z)$ — порт прибытия, $y = \mathrm{pr}_2(z)$ — порт отправления. Пара $z = (x, y)$ полностью определяет “сухопутные” затраты.

Теперь сформулируем рассматриваемую задачу в общем виде. Она состоит в выборе маршрута $\alpha \in \mathbb{A}$ и системы перемещений — трассы (1.5) (в пределах, определенных перестановкой α) с целью минимизации совокупных затрат

$$\sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(z_i), \mathrm{pr}_1(z_{i+1})) + \sum_{i=1}^{N} c_{\alpha(i)}(z_i) + \mathbf{f}(\mathrm{pr}_2(z_N)) \in [0, \infty[, \tag{1.11}$$

где z_0 здесь и в дальнейшем по соображениям симметрии определяется в виде упорядоченной пары $z_0 \stackrel{\triangle}{=} (x^0, x^0)$, т. е. так же, как $z_1, \ldots, z_N$.

2. Экстремальная задача маршрутизации и метод динамического программирования

Используем обозначения разд. 1; введем также ряд новых обозначений. Если $k \in \mathbb{N}_0$, то через $\mathfrak{X}_k$ условимся обозначать множество всех кортежей

$$(z_i)_{i\in\overline{0,k}}: \ \overline{0,k} \longrightarrow X \times X.$$

Пусть $\widetilde{\mathfrak{X}} \stackrel{\triangle}{=} \mathfrak{X}_N$; если $\alpha \in \mathbb{P}$, то полагаем

$$\mathfrak{Z}[\alpha] \stackrel{\triangle}{=} \Big\{(z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \widetilde{\mathfrak{X}} \mid (z_0 = (x^0, x^0))\,\&\,(z_j \ \in M_{\alpha(j)} \times M_{\alpha(j)} \ \forall j \in \overline{1,N})\Big\}; \tag{2.1}$$

(2.1) рассматриваем как множество всех трасс (траекторий), возможных при фиксации маршрута α. Разумеется,

$$\mathfrak{Z}[\alpha] \in \mathrm{FIN}(\widetilde{\mathfrak{X}})\backslash\{\varnothing\} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{P}.$$

В целях более краткого описания зависимости, определяемой в (1.11), введем при каждом $\alpha \in \mathbb{P}$ отображение

$$\mathfrak{C}_\alpha: \ \widetilde{\mathfrak{X}} \longrightarrow [0, \infty[\tag{2.2}$$

посредством условия: если $(z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \widetilde{\mathfrak{X}}$, то

$$\mathfrak{C}_\alpha((z_i)_{i\in\overline{0,N}}) \stackrel{\triangle}{=} \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(z_i), \mathrm{pr}_1(z_{i+1})) + \sum_{i=1}^{N} c_{\alpha(i)}(z_i) + \mathbf{f}(\mathrm{pr}_2(z_N)). \tag{2.3}$$

В (2.2), (2.3) мы намеренно используем принцип расширения, определяя $\mathfrak{C}_\alpha$ не только для трасс из $\mathfrak{Z}[\alpha]$. Из (2.1) следует, однако, что при выборе любой трассы $(z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{Z}[\alpha]$ во второй сумме в (2.3) используются лишь значения сужений функций $c_{\alpha(i)}$ на множества $M_{\alpha(i)} \times M_{\alpha(i)}$ при каждом $i \in \overline{1,N}$. Это соответствует содержательному смыслу понятия внутренних потерь. В терминах множества

$$\mathbf{S} \stackrel{\triangle}{=} \Big\{(\lambda, (z_i)_{i\in\overline{0,N}}) \in \mathbb{A} \times \widetilde{\mathfrak{X}} \mid \ (z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{Z}[\lambda]\Big\} \tag{2.4}$$

всех допустимых решений (пар маршрут-трасса) основная задача имеет вид

$$\mathfrak{C}_\lambda((z_i)_{i\in\overline{0,N}}) \longrightarrow \min, \quad (\lambda, (z)_{i\in\overline{0,N}}) \in \mathbf{S}. \tag{2.5}$$

Уместно включить, однако, данную задачу в систему *укороченных* задач, позволяющих сконструировать функцию Беллмана.

Введем некоторые обозначения. Пусть $\mathfrak{N} \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{FIN}(\overline{1,N})\backslash\{\varnothing\}$; тогда $\mathbf{N} \stackrel{\triangle}{=} \mathfrak{N} \cup \{\varnothing\} = \mathrm{FIN}(\overline{1,N})$. Если $K \in \mathbf{N}$, то через $|K|$ обозначаем количество элементов K; при $K \in \mathfrak{N}$ имеем $|K| \in \overline{1,N}$, $|\varnothing| \stackrel{\triangle}{=} 0$. Если $K \in \mathfrak{N}$, то через $(\mathrm{bi})[K]$ обозначаем множество всех биекций $\overline{1,|K|}$ на K; тогда $(\mathrm{bi})[\overline{1,N}] = \mathbb{P}$. Пусть

$$\Sigma[K] \stackrel{\triangle}{=} \{l \in \mathbf{K} \mid (\mathrm{pr}_1(l) \in K)\ \&\ (\mathrm{pr}_2(l) \in K)\} \quad \forall K \in \mathfrak{N}. \tag{2.6}$$

Предложение 2.1. *Если $K \in \mathfrak{N}$, то $K \setminus \{\mathrm{pr}_2(l) : \ l \in \Sigma[K]\} \in \mathfrak{N}$.*

Доказательство следует из условия 1.1.

В терминах (2.6) определяем с учетом предложения 2.1 оператор $\mathbf{I}$, действующий в $\mathfrak{N}$, по правилу (см. также [12–16])

$$\mathbf{I}(K) \stackrel{\triangle}{=} K \setminus \{\mathrm{pr}_2(h) : \ h \in \Sigma[K]\} \quad \forall K \in \mathfrak{N}. \tag{2.7}$$

В терминах $\mathbf{I}$ конструируем специальные множества биекций (частичных маршрутов): если $K \in \mathfrak{N}$, то (см. [12–16])

$$(\mathbf{I}\text{-bi})[K] \stackrel{\triangle}{=} \Big\{\alpha \in (\text{bi})[K] |\ \alpha(m) \in \mathbf{I}(\{\alpha(i):\ i \in \overline{m, |K|}\})\ \ \forall m \in \overline{1, |K|}\Big\}. \tag{2.8}$$

Как следует из результатов работ [12–16],

$$(\mathbf{I}\text{-bi})[K] \neq \varnothing \quad \forall K \in \mathfrak{N}. \tag{2.9}$$

Из (2.9) следует, в частности, что $(\mathbf{I}\text{-bi})[\overline{1,N}] \neq \varnothing$, причем (см. [12–14]) справедливо равенство

$$\mathbb{A} = (\mathbf{I}\text{-bi})[\overline{1,N}]. \tag{2.10}$$

Из (2.9), (2.10) вытекает важное свойство совместности основной задачи “по дискретной компоненте”:

$$\mathbb{A} \neq \varnothing. \tag{2.11}$$

Как следствие имеем из (2.4) и (2.11), что $\mathbf{S} \neq \varnothing$; итак, ограничения задачи (2.5) совместны. Тогда

$$\mathbf{V} \stackrel{\triangle}{=} \min_{(\lambda,(z_i)_{i\in\overline{0,N}})\in\mathbf{S}} \mathfrak{C}_\lambda((z_i)_{i\in\overline{0,N}}) = \min_{\alpha\in\mathbb{A}} \ \min_{(z_i)_{i\in\overline{0,N}}\in\mathfrak{Z}[\alpha]} \mathfrak{C}_\alpha((z_i)_{i\in\overline{0,N}}) \in [0,\infty[\tag{2.12}$$

(значение основной задачи). Для последующего введения укороченных задач полагаем $\mathbb{X}_K \stackrel{\triangle}{=} \mathfrak{X}_{|K|}\ \ \forall K \in \mathfrak{N}$. Если $x \in X$, $K \in \mathfrak{N}$ и $\alpha \in (\text{bi})[K]$, то

$$\mathfrak{Z}(x,K,\alpha) \stackrel{\triangle}{=} \Big\{(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}} \in \mathbb{X}_K |\ (z_0 = (x,x))\,\&\,(z_j \in M_{\alpha(j)} \times M_{\alpha(j)}\ \ \forall j \in \overline{1,|K|})\Big\} \in \text{FIN}(\mathbb{X}_K)\backslash\{\varnothing\}. \tag{2.13}$$

Если $K \in \mathfrak{N}$ и $\alpha \in (\text{bi})[K]$, то определяем функцию

$$\widetilde{\mathfrak{C}}_K^{(\alpha)}:\ \mathbb{X}_K \longrightarrow [0,\infty[\tag{2.14}$$

по следующему правилу: если $(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}} \in \mathbb{X}_K$, то

$$\widetilde{\mathfrak{C}}_K^{(\alpha)}\left((z_i)_{i\in\overline{0,|K|}}\right) \stackrel{\triangle}{=} \sum_{i=0}^{|K|-1} \mathbf{c}(\text{pr}_2(z_i), \text{pr}_1(z_{i+1})) + \sum_{i=1}^{|K|} c_{\alpha(i)}(z_i) + \mathbf{f}(\text{pr}_2(z_{|K|})). \tag{2.15}$$

Действие отображения (2.14), (2.15) можно рассматривать, в частности, когда

$$(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}} \in \mathfrak{Z}(x,K,\alpha),$$

где $x \in X$ и $K \in \mathfrak{N}$. В этом случае эффективно оцениваются внутренние потери, поскольку во втором слагаемом в правой части (2.15) используются только значения сужений функций $c_{\alpha(i)}$ на $M_{\alpha(i)} \times M_{\alpha(i)}$ при каждом $i \in \overline{1,|K|}$. Отметим, что (см. (2.9), (2.13))

$$v(x,K) \stackrel{\triangle}{=} \min_{\alpha\in(\mathbf{I}\text{-bi})[K]} \ \min_{(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}}\in\mathfrak{Z}(x,K,\alpha)} \widetilde{\mathfrak{C}}_K^{(\alpha)}\left((z_i)_{i\in\overline{0,|K|}}\right) \in [0,\infty[\quad \forall x \in X\ \ \forall K \in \mathfrak{N}. \tag{2.16}$$

Разумеется, (2.16) можно рассматривать как значение некоторой (укороченной) задачи, подобной (2.5), но касающейся посещения меньшего, вообще говоря, числа целевых множеств в условиях ограничений, определяемых в терминах оператора $\mathbf{I}$. Легко видеть, что $\mathfrak{Z}[\alpha] = \mathfrak{Z}(x^0,\overline{1,N},\alpha)\ \ \forall \alpha \in \mathbb{P}$ (принимаем во внимание, что $\mathbb{P} = (\text{bi})[\overline{1,N}]$). С учетом (2.10) имеем

$$\mathbf{V} = v(x^0, \overline{1,N}). \tag{2.17}$$

Условимся также о следующем соглашении:

$$v(x,\varnothing) \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{f}(x) \quad \forall x \in X. \tag{2.18}$$

Тем самым определена функция Беллмана (функция значений укороченных задач)

$$(x,K) \longmapsto v(x,K):\ X \times \mathbf{N} \longrightarrow [0,\infty[,$$

согласующаяся с основной задачей (см. (2.17)) и удовлетворяющая естественному краевому условию (2.18).

Теорема 2.1. *Если* $x \in X$ *и* $K \in \mathfrak{N}$, *то*

$$v(x,K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in M_j \times M_j} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z) + v(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})]. \tag{2.19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае $|K| = 1$ обоснование (2.19) практически очевидно; ограничимся рассмотрением случая $|K| \in \overline{2,N}$. Тогда $K \setminus \{j\} \in \mathfrak{N} \ \ \forall j \in \mathbf{I}(K)$. С учетом (2.16) выберем такие $\mathbf{a} \in (\mathbf{I}\text{-bi})[K]$ и $(y_i)_{i\in\overline{0,|K|}} \in \mathfrak{Z}(x,K,\mathbf{a})$, что

$$v(x,K) = \widetilde{\mathfrak{C}}_K^{(\mathbf{a})}\left((y_i)_{i\in\overline{0,|K|}}\right). \tag{2.20}$$

Для $T \stackrel{\triangle}{=} K \setminus \{\mathbf{a}(1)\}$ имеем $|T| = |K| - 1$; $\mathbf{a}(1) \in \mathbf{I}(K)$. При этом

$$\bar{a} \stackrel{\triangle}{=} (\mathbf{a}(i+1))_{i\in\overline{1,|T|}} \in (\mathbf{I}\text{-bi})[T]. \tag{2.21}$$

Пусть $u_j \stackrel{\triangle}{=} y_{j+1} \ \ \forall j \in \overline{0,|T|}$; тогда $(u_i)_{i\in\overline{0,|T|}} \in \mathbb{X}_T$, причем $u_0 = y_1 \in M_{\mathbf{a}(1)} \times M_{\mathbf{a}(1)}$. Пусть

$$\left(\widetilde{u}_0 \stackrel{\triangle}{=} (\mathrm{pr}_2(u_0), \mathrm{pr}_2(u_0))\right) \ \& \ \left(\widetilde{u}_j \stackrel{\triangle}{=} u_j \ \ \forall j \in \overline{1,|T|}\right).$$

Тогда кортеж $(\widetilde{u}_i)_{i\in\overline{0,|T|}} \in \mathbb{X}_T$ обладает свойством

$$\widetilde{\mathfrak{C}}_T^{(\bar{a})}\left((u_i)_{i\in\overline{0,|T|}}\right) = \widetilde{\mathfrak{C}}_T^{(\bar{a})}\left((\widetilde{u}_i)_{i\in\overline{0,|T|}}\right), \tag{2.22}$$

причем $(\widetilde{u}_i)_{i\in\overline{0,|T|}} \in \mathfrak{Z}(\mathrm{pr}_2(y_1), T, \bar{a})$. Последнее означает в силу (2.16), что

$$v(\mathrm{pr}_2(y_1), T) \le \widetilde{\mathfrak{C}}_T^{(\bar{a})}\left((\widetilde{u}_i)_{i\in\overline{0,|T|}}\right). \tag{2.23}$$

С учетом (2.16), (2.20) и (2.22) имеем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
v(x,K) &= \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(y_0), \mathrm{pr}_1(y_1)) + c_{\mathbf{a}(1)}(y_1) + \sum_{i=1}^{|T|} \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(y_i), \mathrm{pr}_1(y_{i+1})) + \sum_{i=2}^{|K|} c_{\mathbf{a}(i)}(y_i) + \mathbf{f}(\mathrm{pr}_2(y_{|K|}))\\
&= \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(y_0), \mathrm{pr}_1(y_1)) + c_{\mathbf{a}(1)}(y_1) + \sum_{i=1}^{|T|} \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(u_{i-1}), \mathrm{pr}_1(u_i)) + \sum_{i=2}^{|K|} c_{\mathbf{a}(i)}(u_{i-1}) + \mathbf{f}(\mathrm{pr}_2(u_{|T|}))\\
&= \mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(y_1)) + c_{\mathbf{a}(1)}(y_1) + \sum_{j=0}^{|T|-1} \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(u_j), \mathrm{pr}_1(u_{j+1})) + \sum_{j=1}^{|T|} c_{\mathbf{a}(j+1)}(u_j) + \mathbf{f}(\mathrm{pr}_2(u_{|T|}))\\
&= \mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(y_1)) + c_{\mathbf{a}(1)}(y_1) + \widetilde{\mathfrak{C}}_T^{(\bar{a})}\left((u_j)_{j\in\overline{0,|T|}}\right) = \mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(y_1)) + c_{\mathbf{a}(1)}(y_1) + \widetilde{\mathfrak{C}}_T^{(\bar{a})}\left((\widetilde{u}_j)_{j\in\overline{0,|T|}}\right).
\end{aligned} \tag{2.24}$$

С учетом (2.23) и (2.24) получаем неравенство

$$\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(y_1)) + c_{\mathbf{a}(1)}(y_1) + v(\mathrm{pr}_2(y_1), T) \leq v(x, K). \tag{2.25}$$

По выбору $\mathbf{a}$ имеем включение $\mathbf{a}(1) \in \mathbf{I}(K)$; кроме того, $y_1 \in M_{\mathbf{a}(1)} \times M_{\mathbf{a}(1)}$. Из (2.25) вытекает поэтому следующее неравенство

$$\min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in M_j \times M_j} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z) + v(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})] \leq v(x, K). \tag{2.26}$$

Выберем $q \in \mathbf{I}(K)$ и $h \in M_q \times M_q$, для которых при $Q \stackrel{\triangle}{=} K \setminus \{q\}$ выполняется равенство

$$\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(h)) + c_q(h) + v(\mathrm{pr}_2(h), Q) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in M_j \times M_j} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z) + v(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})]; \tag{2.27}$$

при этом $|Q| = |K| - 1 \in \overline{1, N-1}$. Далее, используя (2.16), подберем такие $\beta \in (\mathbf{I}\text{-bi})[Q]$ и $(h_i^*)_{i \in \overline{0, |Q|}} \in \mathfrak{Z}(\mathrm{pr}_2(h), Q, \beta)$, что

$$v(\mathrm{pr}_2(h), Q) = \widetilde{\mathfrak{C}}_Q^{(\beta)} \left((h_i^*)_{i \in \overline{0, |Q|}} \right). \tag{2.28}$$

Определяем отображение $\rho : \overline{1, |K|} \longrightarrow K$ по правилу

$$(\rho(1) \stackrel{\triangle}{=} q) \ \& \ (\rho(j) \stackrel{\triangle}{=} \beta(j-1) \quad \forall j \in \overline{2, |K|}).$$

Легко видеть, что $\rho \in (\mathbf{I}\text{-bi})[K]$. Пусть кортеж $(\widetilde{h}_i^*)_{i \in \overline{0, |Q|}} \in \mathbb{X}_Q$ определяется условиями

$$\left(\widetilde{h}_0^* \stackrel{\triangle}{=} h \right) \ \& \ \left(\widetilde{h}_i^* = h_i^* \ \ \forall i \in \overline{1, |Q|} \right).$$

С учетом (2.28) получаем теперь равенство

$$v(\mathrm{pr}_2(h), Q) = \sum_{i=0}^{|Q|-1} \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\widetilde{h}_i^*), \mathrm{pr}_1(\widetilde{h}_{i+1}^*)) + \sum_{i=1}^{|Q|} c_{\beta(i)}(\widetilde{h}_i^*) + \mathbf{f}(\mathrm{pr}_2(\widetilde{h}_{|Q|}^*)). \tag{2.29}$$

Конструируем кортеж $(h_i^\natural)_{i \in \overline{0, |K|}} \in \mathbb{X}_K$ по следующему правилу:

$$\left(h_0^\natural \stackrel{\triangle}{=} (x, x) \right) \ \& \ \left(h_j^\natural \stackrel{\triangle}{=} \widetilde{h}_{j-1}^* \ \ \forall j \in \overline{1, |K|} \right);$$

тогда $(h_i^\natural)_{i \in \overline{0, |K|}} \in \mathfrak{Z}(x, K, \rho)$. Как следствие получаем неравенство

$$v(x, K) \leq \widetilde{\mathfrak{C}}_K^{(\rho)} \left((h_i^\natural)_{i \in \overline{0, |K|}} \right). \tag{2.30}$$

Как легко проверить, используя (2.29),

$$\widetilde{\mathfrak{C}}_K^{(\rho)} \left((h_i^\natural)_{i \in \overline{0, |K|}} \right) = \mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(h)) + c_q(h) + \sum_{i=0}^{|Q|-1} \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\widetilde{h}_i^*), \mathrm{pr}_1(\widetilde{h}_{i+1}^*))$$
$$+ \sum_{i=1}^{|Q|} c_{\beta(i)}(\widetilde{h}_i^*) + \mathbf{f} \left(\mathrm{pr}_2(\widetilde{h}_{|Q|}^*) \right) = \mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(h)) + c_q(h) + v(\mathrm{pr}_2(h), Q).$$

Отсюда ввиду (2.30)

$$v(x, K) \leq \mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(h)) + c_q(h) + v(\mathrm{pr}_2(h), Q). \tag{2.31}$$

Принимая во внимание (2.27) и (2.31), получаем неравенство, противоположное (2.26), чем и завершается проверка (2.19). $\square$

3. Усеченная реализация функции Беллмана

Последующая процедура базируется на соотношении (2.19), которое имеет смысл уравнения Беллмана. Построение всей функции Беллмана — процедура чрезвычайно трудоемкая, и мы рассматриваем ее только на идейном уровне. Позднее будет приведена более экономичная процедура на основе усеченной версии метода динамического программирования.

Если $s \in \overline{0, N}$, то через $\mathbf{N}_s$ обозначаем семейство всех множеств $K \in \mathbf{N}$, для каждого из которых $|K| = s$. В частности, $\mathbf{N}_0 = \{\varnothing\}$ (одноэлементное семейство). Подобным образом полагаем для всякого $s \in \overline{1, N}$, что $\mathfrak{N}_s$ есть семейство всех множеств $K \in \mathfrak{N}$ таких, что $|K| = s$. Ясно, что $\mathbf{N}_s = \mathfrak{N}_s \ \ \forall s \in \overline{1, N}$. Если $s \in \overline{0, N}$, то отображение

$$(x, K) \longmapsto v(x, K) : \ X \times \mathbf{N}_s \longrightarrow [0, \infty[\tag{3.1}$$

обозначаем через V_s; $V_s(x, K) = v(x, K) \ \ \forall x \in X \ \forall K \in \mathbf{N}_s$. В частности, V_0 действует (см. (3.1)) из $X \times \mathbf{N}_0 = X \times \{\varnothing\}$ в $[0, \infty[$ по правилу $V_0(x, \varnothing) = \mathbf{f}(x) \ \ \forall x \in X$. Тем самым введены слои функции Беллмана V_s. Если $k \in \overline{0, N}$, то через $\mathbb{F}_k$ обозначаем множество всех отображений из $X \times \mathbf{N}_k$ в $[0, \infty[$. Тогда

$$(V_s)_{s \in \overline{0, N}} \in \prod_{s=0}^{N} \mathbb{F}_s. \tag{3.2}$$

Построение кортежа (3.2) можно осуществлять на основе теоремы 2.1. Действительно, функция V_0 известна. Пусть $m \in \overline{0, N-1}$ и уже построен кортеж

$$(V_i)_{i \in \overline{0, m}} \in \prod_{i=0}^{m} \mathbb{F}_i.$$

При этом $\mathbf{N}_{m+1} = \mathfrak{N}_{m+1} \subset \mathfrak{N}$, а тогда по теореме 2.1 для любого $x \in X$ и любого $K \in \mathbf{N}_{m+1}$

$$V_{m+1}(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \ \min_{z \in M_j \times M_j} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z) + V_m(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})] \tag{3.3}$$

(учитываем, конечно, что при $K \in \mathbf{N}_{m+1}$ и $j \in \mathbf{I}(K)$ непременно $K \setminus \{j\} \in \mathbf{N}_m$ и, кроме того, $\mathrm{pr}_2(z) \in X$ при $z \in M_j \times M_j$; в итоге $(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in X \times \mathbf{N}_m$). Посредством (3.3) определяется V_{m+1}. После конечного числа шагов (этапов), подобных переходу $V_m \longrightarrow V_{m+1}$, весь кортеж (3.2) будет построен и, в частности, будет определено значение (см. (2.17)) основной задачи

$$\mathbf{V} = V_N(x^0, \overline{1, N}) \in [0, \infty[. \tag{3.4}$$

Данная процедура, однако, осложняется трудностями вычислительного характера. В этой связи рассмотрим усеченную версию метода динамического программирования, следуя [20]. Пусть

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &\stackrel{\triangle}{=} \{K \in \mathfrak{N} \mid \forall z \in \mathbf{K} \ (\mathrm{pr}_1(z) \notin K) \ \vee \ (\mathrm{pr}_2(z) \in K)\} \\ &= \{K \in \mathfrak{N} \mid \forall z \in \mathbf{K} \ (\mathrm{pr}_1(z) \in K) \Longrightarrow (\mathrm{pr}_2(z) \in K)\}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Множества из семейства (3.5) можно рассматривать как допустимые списки заданий; они согласуются с логикой построения пар — элементов множества $\mathbf{K}$. В [20] установлено, что $\forall K \in \mathcal{G} \ \forall k \in \mathbf{I}(K)$

$$(K \setminus \{k\} \in \mathfrak{N}) \Longrightarrow (K \setminus \{k\} \in \mathcal{G}) \tag{3.6}$$

— свойство согласованности списков из семейства (3.5) с оператором $\mathbf{I}$. Само семейство (3.5) удобно разбить на слои, полагая

$$\mathcal{G}_k \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{G} \cap \mathfrak{N}_k \quad \forall k \in \overline{1, N}. \tag{3.7}$$

Из (3.6), (3.7) вытекает следующее свойство, характеризующее возможность сохранения допустимости списка заданий при “движении” на такт вперед:

$$K \setminus \{k\} \in \mathcal{G}_{s-1} \quad \forall s \in \overline{2,N} \quad \forall K \in \mathcal{G}_s \quad \forall k \in \mathbf{I}(K). \tag{3.8}$$

Ясно, что $\overline{1,N} \in \mathcal{G}_N$; с другой стороны, для множества $\mathbf{K}_1 \triangleq \{\mathrm{pr}_1(z) :\ z \in \mathbf{K}\}$ имеем

$$\mathcal{G}_1 = \{\{t\} :\ t \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1\}. \tag{3.9}$$

Мы охарактеризовали “крайние” случаи семейств (3.7): $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_N$. В связи с (3.9) введем множество

$$\mathbf{M} \triangleq \bigcup_{i \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1} M_i \in \mathrm{FIN}(X) \setminus \{\varnothing\} \tag{3.10}$$

(свойство $\mathbf{M} \neq \varnothing$ следует из (2.11)). Напомним свойство, установленное в [20]: если $k \in \overline{1,N}$, то для числа $N-k+1 \in \overline{1,N}$ имеем

$$\{\alpha(i) :\ i \in \overline{k,N}\} \in \mathcal{G}_{N-k+1} \quad \forall \alpha \in \mathbb{A}. \tag{3.11}$$

С учетом (2.11), (3.11) и ранее установленных свойств семейств $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_N$ (см., в частности, (3.5)) получаем

$$\mathcal{G}_s \neq \varnothing \quad \forall s \in \overline{1,N}. \tag{3.12}$$

Итак (см. (3.12)), существуют допустимые списки заданий любой мощности в пределах от 1 до N. Напомним процедуру сужения слоев пространства позиций [20], полагая сначала, что для всяких $s \in \overline{1,N-1}$ и $K \in \mathcal{G}_s$

$$\mathcal{J}_s(K) \triangleq \{i \in \overline{1,N} \setminus K \mid \{i\} \cup K \in \mathcal{G}_{s+1}\}; \tag{3.13}$$

в терминах (3.13) имеем конкретные продолжения допустимых списков заданий

$$(K \in \mathcal{G}_s) \Longrightarrow (\{j\} \cup K \in \mathcal{G}_{s+1}),$$

где $j \in \mathcal{J}_s(K)$. С учетом (3.13) конструируем слои

$$D_s \triangleq \bigcup_{K \in \mathcal{G}_s} \Big\{(x,K) :\ x \in \bigcup_{i \in \mathcal{J}_s(K)} M_i\Big\} \quad \forall s \in \overline{1,N-1}; \tag{3.14}$$

$$\Big(D_0 \triangleq \mathbf{M} \times \{\varnothing\} = \mathbf{M} \times \mathbf{N}_0\Big) \ \&\ \Big(D_N \triangleq \{(x^0, \overline{1,N})\}\Big); \tag{3.15}$$

D_0 и D_N — “крайние” слои в пространстве позиций. Имеем [20] $D_s \neq \varnothing \ \ \forall s \in \overline{0,N}$. Поэтому при всяком выборе $s \in \overline{0,N}$ множество $D_s \subset X \times \mathbf{N}_s$ непусто. Определяя

$$\mathcal{V}_s \triangleq (V_s(x,K))_{(x,K) \in D_s}, \tag{3.16}$$

получаем отображение $\mathcal{V}_s$: $D_s \longrightarrow [0,\infty[$. Разумеется, $\mathcal{V}_l(x,K) = v(x,K)\ \forall l \in \overline{0,N}\ \forall (x,K) \in D_l$. С использованием построений [20] получаем, что

$$(y, K \setminus \{j\}) \in D_{s-1} \quad \forall s \in \overline{1,N} \quad \forall (x,K) \in D_s \quad \forall j \in \mathbf{I}(K) \quad \forall y \in M_j. \tag{3.17}$$

Из (3.17) следует, что при $s \in \overline{1,N}$, $(x,K) \in D_s$, $j \in \mathbf{I}(K)$ и $y \in M_j$ определены значения $\mathcal{V}_{s-1}(y, K \setminus \{j\}) \in [0,\infty[$, т. е. соответствующие значения усеченной функции Беллмана. В результате при $s \in \overline{1,N}$ и $(x,K) \in D_s$ можно вычислить значение (см. (3.16), (3.17))

$$\begin{aligned} &\min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in M_j \times M_j} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z) + \mathcal{V}_{s-1}(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})] \\ &= \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in M_j \times M_j} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z) + v(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})]. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Теперь, уже с учетом теоремы 2.1 и (3.16), получаем следующее утверждение.

Предложение 3.1. *Если $s \in \overline{1,N}$ и $(x,K) \in D_s$, то справедливо равенство*

$$\mathcal{V}_s(x,K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in M_j \times M_j} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z) + \mathcal{V}_{s-1}(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})].$$

Полезно дополнить предложение 3.1 очевидными следствиями (3.16), (3.4):

$$\Big(\mathcal{V}_0(x,\varnothing) = \mathbf{f}(x) \ \ \forall x \in \mathbf{M}\Big) \& \Big(\mathcal{V}_N(x^0, \overline{1,N}) = \mathbf{V}\Big). \tag{3.19}$$

Теперь с учетом (3.19) и предложения 3.1 мы реализуем построение функций $\mathcal{V}_i,\ i \in \overline{0,N}$, не использующее никакой информации о значениях функции Беллмана для позиций, не лежащих в пределах слоев (3.14), (3.15). Последнее обстоятельство определяет более экономичную вычислительную схему реализации метода динамического программирования.

Действительно, функция $\mathcal{V}_0$ нам известна. Пусть $m \in \overline{0, N-1}$, и уже построены функции $\mathcal{V}_0, \ldots, \mathcal{V}_m$. Построим функцию $\mathcal{V}_{m+1}$. Для этого заметим, что $m+1 \in \overline{1,N}$, а $\mathcal{V}_{m+1}$ определена на D_{m+1} (см. (3.14), (3.15)). При этом согласно (3.17)

$$(y, K \setminus \{j\}) \in D_m \quad \forall (x,K) \in D_{m+1} \quad \forall j \in \mathbf{I}(K) \quad \forall y \in M_j.$$

Следовательно, мы располагаем значениями $\mathcal{V}_m(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})$ при всяком выборе $(x,K) \in D_{m+1}$, $j \in \mathbf{I}(K)$ и $z \in M_j \times M_j$. Определены, стало быть, значения

$$\min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in M_j \times M_j} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z) + \mathcal{V}_m(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})] \in [0, \infty[\ \ \forall (x,K) \in D_{m+1}.$$

Более того, из предложения 3.1 получаем, что $\forall (x,K) \in D_{m+1}$

$$\mathcal{V}_{m+1}(x,K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in M_j \times M_j} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z) + \mathcal{V}_m(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})]. \tag{3.20}$$

После конечного числа шагов (этапов), базирующихся на (3.20) и предложении 3.1, мы построим все функции $\mathcal{V}_i,\ i \in \overline{0,N}$, и определим глобальный экстремум $\mathbf{V}$ (см. (3.19)).

4. Построение оптимального решения

Полагая завершенным процесс построения функций $\mathcal{V}_i,\ i \in \overline{0,N}$, рассмотрим вопрос о нахождении оптимальной пары маршрут-трасса. В силу (3.19) и предложения 3.1 имеем (см. также (3.15)) равенство

$$\mathbf{V} = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})} \min_{z \in M_j \times M_j} [\mathbf{c}(x^0, \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z) + \mathcal{V}_{N-1}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{j\})], \tag{4.1}$$

где учтено (3.17), (3.18) и то, что $(x^0, \overline{1,N}) \in D_N$; полагаем $\mathbf{z}_0 \triangleq (x^0, x^0)$ и выбираем индекс $\mathbf{i}_1 \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$, а также точку $\mathbf{z}_1 \in M_{\mathbf{i}_1} \times M_{\mathbf{i}_1}$, для которых (см. (4.1))

$$\mathbf{V} = \mathbf{c}(x^0, \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}_1)) + c_{\mathbf{i}_1}(\mathbf{z}_1) + \mathcal{V}_{N-1}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_1), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}). \tag{4.2}$$

В силу (3.17) $(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_1), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}) \in D_{N-1}$; тогда, используя предложение 3.1, имеем

$$\mathcal{V}_{N-1}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_1), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\})$$

$$= \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\})} \min_{z \in M_j \times M_j} [\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_1), \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z) + \mathcal{V}_{N-2}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1; j\})]. \tag{4.3}$$

С учетом (4.3) выбираем $\mathbf{i}_2 \in \mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_1\})$ и $\mathbf{z}_2 \in M_{\mathbf{i}_2}\times M_{\mathbf{i_2}}$, для которых справедливо равенство

$$\mathcal{V}_{N-1}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_1),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_1\}) = \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_1),\mathrm{pr}_1(\mathbf{z}_2)) + c_{\mathbf{i}_2}(\mathbf{z}_2) + \mathcal{V}_{N-2}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_2),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_1;\mathbf{i}_2\}). \quad (4.4)$$

При этом $(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_2),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:\ k\in\overline{1,2}\}) = (\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_2),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_1;\mathbf{i}_2\})\in D_{N-2}$. Заметим, что из (4.2), (4.4) вытекает равенство

$$\mathbf{V} = \sum_{j=0}^{1}\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_j),\mathrm{pr}_1(\mathbf{z}_{j+1})) + \sum_{j=1}^{2} c_{\mathbf{i}_j}(\mathbf{z}_j) + \mathcal{V}_{N-2}\left(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_2),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_j:\ j\in\overline{1,2}\}\right). \quad (4.5)$$

Тогда $(\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,2}}:\ \overline{1,2}\longrightarrow\overline{1,N},\ \ (\mathbf{z}_j)_{j\in\overline{0,2}}:\ \overline{0,2}\longrightarrow X\times X$.

Пусть теперь вообще $r\in\overline{2,N}$, и уже построены кортежи

$$(\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,r}}:\ \overline{1,r}\longrightarrow\overline{1,N}, \quad (4.6)$$

$$(\mathbf{z}_j)_{j\in\overline{0,r}}:\ \overline{0,r}\longrightarrow X\times X, \quad (4.7)$$

удовлетворяющие следующим условиям:

(1′) $(\mathbf{z}_0 = (x^0,x^0))\,\&\,(\mathbf{z}_j\in M_{\mathbf{i}_j}\times M_{\mathbf{i}_j}\quad \forall j\in\overline{1,r})$;

(2′) $\mathbf{i}_k\neq\mathbf{i}_l\quad \forall k\in\overline{1,r}\quad \forall l\in\overline{1,r}\setminus\{k\}$;

(3′) $(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_j),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:\ k\in\overline{1,j}\})\in D_{N-j}\quad \forall j\in\overline{1,r}$;

(4′) $\mathbf{i}_j\in\mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:\ k\in\overline{1,j-1}\})\quad \forall j\in\overline{1,r}$;

(5′) $\mathcal{V}_{N-j+1}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_{j-1}),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:\ k\in\overline{1,j-1}\}) = \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_{j-1}),\mathrm{pr}_1(\mathbf{z}_j)) + c_{\mathbf{i}_j}(\mathbf{z}_j) + \mathcal{V}_{N-j}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_j),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:\ k\in\overline{1,j}\})\quad \forall j\in\overline{1,r}$;

(6′) $\mathbf{V} = \sum\limits_{j=0}^{r-1}\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_j),\mathrm{pr}_1(\mathbf{z}_{j+1})) + \sum\limits_{j=1}^{r} c_{\mathbf{i}_j}(\mathbf{z}_j) + \mathcal{V}_{N-r}\left(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_r),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:\ k\in\overline{1,r}\}\right)$.

При $r=2$ условия (1′)–(6′) очевидным образом выполняются. Рассмотрим отдельно два оставшихся случая: $r=N$ и $r\in\overline{2,N-1}$.

Пусть $r=N$. Согласно (4.6), (4.7) имеем кортежи

$$(\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,N}}:\ \overline{1,N}\longrightarrow\overline{1,N}, \qquad (\mathbf{z}_j)_{j\in\overline{0,N}}:\ \overline{0,N}\longrightarrow X\times X,$$

для которых выполнены условия (1′)–(6′) при $r=N$. В частности, из (2′) легко следует, что $(\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,N}}\in\mathbb{P}$. Как следствие имеем

$$\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:\ k\in\overline{1,j-1}\} = \{\mathbf{i}_k:\ k\in\overline{j,N}\}\qquad \forall j\in\overline{1,N}$$

и согласно (4′) $\mathbf{i}_j\in\mathbf{I}(\{\mathbf{i}_k:\ k\in\overline{j,N}\})\ \ \forall j\in\overline{1,N}$. Последнее означает (см. (2.7)–(2.10)), что

$$(\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,N}}\in\mathbb{A}. \quad (4.8)$$

В свою очередь, из (1′) следует включение

$$(\mathbf{z}_j)_{j\in\overline{0,N}}\in\mathfrak{Z}[(\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,N}}]. \quad (4.9)$$

Из (2.4), (4.8) и (4.9) вытекает, что

$$\Big((\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,N}},(\mathbf{z}_j)_{j\in\overline{0,N}}\Big)\in\mathbf{S}. \quad (4.10)$$

В силу (3′) $(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_N),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:\ k\in\overline{1,N}\}) = (\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_N),\varnothing)\in D_0$, а тогда в силу (3.19)

$$\mathcal{V}_{N-r}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_r),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:\ k\in\overline{1,r}\}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}_N).$$

Из $(6')$, последнего равенства и (2.3) получаем

$$\mathfrak{C}_{(\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,N}}}\Big((\mathbf{z}_j)_{j\in\overline{0,N}}\Big)=\mathbf{V},$$

что, в свою очередь, означает оптимальность решения (4.10). Итак, случай $r=N$ соответствует решению основной экстремальной задачи.

Пусть теперь $r\in\overline{2,N-1}$ и, следовательно, $r+1\in\overline{3,N}$ (рассматриваемый случай возможен только при $N\geq 3$). В силу $(3')$

$$(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_r),\widetilde{M})\in D_{N-r}, \tag{4.11}$$

где $\widetilde{M}\triangleq\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:\ k\in\overline{1,r}\}$. Из (3.17) для $N-(r+1)\in\overline{0,N-3}$ имеем

$$(y,\widetilde{M}\setminus\{j\})\in D_{N-(r+1)}\quad\forall j\in\mathbf{I}(\widetilde{M})\quad\forall y\in M_j. \tag{4.12}$$

Следовательно, мы располагаем вычисленным ранее массивом значений

$$\mathcal{V}_{N-(r+1)}(y,\widetilde{M}\setminus\{j\})\in[0,\infty[,\quad j\in\mathbf{I}(\widetilde{M}),\quad y\in M_j.$$

Более того, в силу предложения 3.1, применяемого для $s=N-r\in\overline{1,N-2}$, имеем (см. (4.11))

$$\mathcal{V}_{N-r}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_r),\widetilde{M})=\min_{j\in\mathbf{I}(\widetilde{M})}\ \min_{z\in M_j\times M_j}[\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_r),\mathrm{pr}_1(z))+c_j(z)+\mathcal{V}_{N-(r+1)}(\mathrm{pr}_2(z),\widetilde{M}\setminus\{j\})]. \tag{4.13}$$

С учетом (4.13) выбираем индекс $\mathbf{i}_{r+1}\in\mathbf{I}(\widetilde{M})$ и упорядоченную пару

$$\mathbf{z}_{r+1}\in M_{\mathbf{i}_{r+1}}\times M_{\mathbf{i}_{r+1}}$$

так, что при этом справедливо равенство

$$\mathcal{V}_{N-r}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_r),\widetilde{M})=\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_r),\mathrm{pr}_1(\mathbf{z}_{r+1}))+c_{\mathbf{i}_{r+1}}(\mathbf{z}_{r+1})+\mathcal{V}_{N-(r+1)}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_{r+1}),\widetilde{M}\setminus\{\mathbf{i}_{r+1}\}). \tag{4.14}$$

По определению $\widetilde{M}$ имеем включение $\mathbf{i}_{r+1}\in\mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:\ k\in\overline{1,r}\})$, а тогда из (4.14) получаем

$$\begin{gathered}\mathcal{V}_{N-r}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_r),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:\ k\in\overline{1,r}\})=\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_r),\mathrm{pr}_1(\mathbf{z}_{r+1}))\\ +c_{\mathbf{i}_{r+1}}(\mathbf{z}_{r+1})+\mathcal{V}_{N-(r+1)}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_{r+1}),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:\ k\in\overline{1,r+1}\}).\end{gathered} \tag{4.15}$$

В силу (2.7) $\mathbf{i}_k\neq\mathbf{i}_{r+1}\ \ \forall k\in\overline{1,r}$. Рассмотрим свойства продолженных кортежей

$$(\mathbf{i}_k)_{k\in\overline{1,r+1}}:\ \overline{1,r+1}\longrightarrow\overline{1,N},\qquad(\mathbf{z}_i)_{i\in\overline{0,r+1}}:\ \overline{0,r+1}\longrightarrow X\times X. \tag{4.16}$$

Отметим прежде всего, что согласно (4.12) имеем по выбору $\mathbf{i}_{r+1}$ и $\mathbf{z}_{r+1}$ включение

$$\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_{r+1}),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:\ k\in\overline{1,r+1}\}\big)\in D_{N-(r+1)}. \tag{4.17}$$

С учетом $(1')$ по выбору $\mathbf{z}_{r+1}$ получаем

$$(1'')\ \ \Big(\mathbf{z}_0=(x^0,x^0)\Big)\&\Big(\mathbf{z}_j\in M_{\mathbf{i}_j}\times M_{\mathbf{i}_j}\ \ \forall j\in\overline{1,r+1}\Big).$$

Из $(2')$ по выбору $\mathbf{i}_{r+1}$ имеем

$$(2'')\ \ \mathbf{i}_k\neq\mathbf{i}_l\quad\forall k\in\overline{1,r+1}\quad\forall l\in\overline{1,r+1}\setminus\{k\}.$$

Из $(3')$ и (4.17) получаем с очевидностью

$$(3'')\ \ \Big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_j),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:\ k\in\overline{1,j}\}\Big)\in D_{N-j}\quad\forall j\in\overline{1,r+1}.$$

Из $(4')$ имеем по выбору $\mathbf{i}_{r+1}$ свойство

$$(4'') \ \ \mathbf{i}_j \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_k: \ k \in \overline{1,j-1}\}) \quad \forall j \in \overline{1,r+1}.$$

Далее, из $(5')$ и (4.15) вытекает с очевидностью

$$(5'') \ \ \mathcal{V}_{N-j+1}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_{j-1}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_k: \ k \in \overline{1,j-1}\}) = \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_{j-1}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}_j)) + c_{\mathbf{i}_j}(\mathbf{z}_j)$$
$$+\mathcal{V}_{N-j}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_j), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_k: \ k \in \overline{1,j}\}) \quad \forall j \in \overline{1,r+1}.$$

Наконец, из $(6')$ и (4.15) получаем свойство

$$(6'') \ \ \mathbf{V} = \sum_{j=0}^{r} \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_j), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}_{j+1})) + \sum_{j=1}^{r+1} c_{\mathbf{i}_j}(\mathbf{z}_j) + \mathcal{V}_{N-(r+1)}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_{r+1}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_k: \ k \in \overline{1,r+1}\}).$$

Итак, когда $r \in \overline{2,N-1}$, каждый из кортежей (4.6), (4.7) продолжается на один шаг (этап) до кортежей (4.16) с сохранением всех основных свойств: свойства $(1')$–$(6')$ преобразуются в $(1'')$–$(6'')$. После конечного числа таких (регулярных) шагов мы получим ситуацию, подробно рассмотренную для $r = N$, т. е. найдем оптимальное решение основной задачи.

5. Вычислительный эксперимент

Рассмотренный в данной работе алгоритм решения задачи последовательного обхода множеств был реализован в виде программы для ПЭВМ, написанной на языке программирования C++ (была использована его версия Borland C++ Builder 6.0) и работающей в операционной системе семейства Windows, начиная с Windows 95. Вычислительная часть программного кода реализована в отдельном от интерфейса пользователя потоке. Для решения задачи на плоскости (когда $X \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) имеется возможность графического представления множеств, а также маршрута и трассы с возможностью увеличения отдельных участков графика; программа позволяет сохранять график движения по множествам в файле формата Bmp.

Для проведения вычислительного эксперимента использовался компьютер Notebook с процессором Intel CoreDuo T2500 с частотой 2 ГГц и объемом оперативной памяти 1 Гб с установленной операционной системой Windows XP Professional SP2.

Рассматриваем задачу на плоскости. Для удобства представления исходных данных и результатов работы программы будем задавать множества $M_i, \ i \in \overline{1,N}$, в виде сеток, которые получаем посредством откладывания на окружностях заданного радиуса по 12 точек на равных угловых расстояниях, начиная от точки с нулевой угловой координатой. Таким образом каждое множество M_i однозначно определяется центром $O_i \in \mathbb{R}^2$ и радиусом $R_i \in \mathbb{R}, \ i \in \overline{1,N}$.

В качестве функции $\mathbf{c}$ затрат на движение между множествами будем использовать евклидово расстояние; c_j определяется всякий раз суммированием удвоенных евклидовых расстояний от точки входа в M_j до O_j и от O_j до точки выхода из $M_j, \ j \in \overline{1,N}$; $\mathbf{f}$ определяется евклидовым расстоянием до x^0.

Пусть начальная точка x^0 совпадает с началом координат. Множества $M_i, \ i \in \overline{1,N}$, где $N = 27$, заданы координатами центров O_i:

$$O_1 = (20,0); \quad O_2 = (50,0); \quad O_3 = (85,0); \quad O_4 = (0,-25); \quad O_5 = (0,-60);$$
$$O_6 = (0,-85); \quad O_7 = (-15,0); \quad O_8 = (-40,0); \quad O_9 = (-75,0); \quad O_{10} = (0,22);$$
$$O_{11} = (0,50); \quad O_{12} = (0,80); \quad O_{13} = (30,40); \quad O_{14} = (30,80); \quad O_{15} = (80,80);$$
$$O_{16} = (70,40); \quad O_{17} = (50,-40); \quad O_{18} = (30,-60); \quad O_{19} = (80,-40);$$
$$O_{20} = (65,-80); \quad O_{21} = (-30,-25); \quad O_{22} = (-35,-70); \quad O_{23} = (-70,-40);$$
$$O_{24} = (-70,-80); \quad O_{25} = (-30,40); \quad O_{26} = (-75,50); \quad O_{27} = (-50,75)$$

и радиусами окружностей R_i:

$$R_1 = R_6 = R_7 = R_{10} = R_{21} = 8;$$
$$R_3 = R_{12} = R_{14} = R_{17} = R_{24} = R_{26} = 10;$$
$$R_5 = R_8 = R_{11} = R_{15} = R_{18} = R_{19} = R_{23} = R_{27} = 12;$$
$$R_2 = R_4 = R_9 = R_{13} = R_{16} = R_{20} = R_{22} = R_{25} = 15.$$

Также заданы точки посещения, соответствующие множествам $M_j,\ j = \overline{1, N}$; см. разд. 1. Пусть их координаты совпадают с координатами центров окружностей, указанных выше. Напомним, что наша задача заключается в том, чтобы, выйдя из начального пункта x^0, посетить все множества следующим образом: прийти в точку "входа" в M_j (мы называем ее портом прибытия), переместиться в точку "сухопутного" посещения в множестве M_j, затем перейти в точку "выхода" из M_j (мы дали ей название порта отправления). После посещения всех множеств требуется вернуться в начальную точку x^0. Кроме того, пусть заданы следующие пары индексов, играющие роль условий предшествования ($\mathbf{K} = \{(p_i, q_i) :\ i \in \overline{1, n}\}$, где $n = 25$):

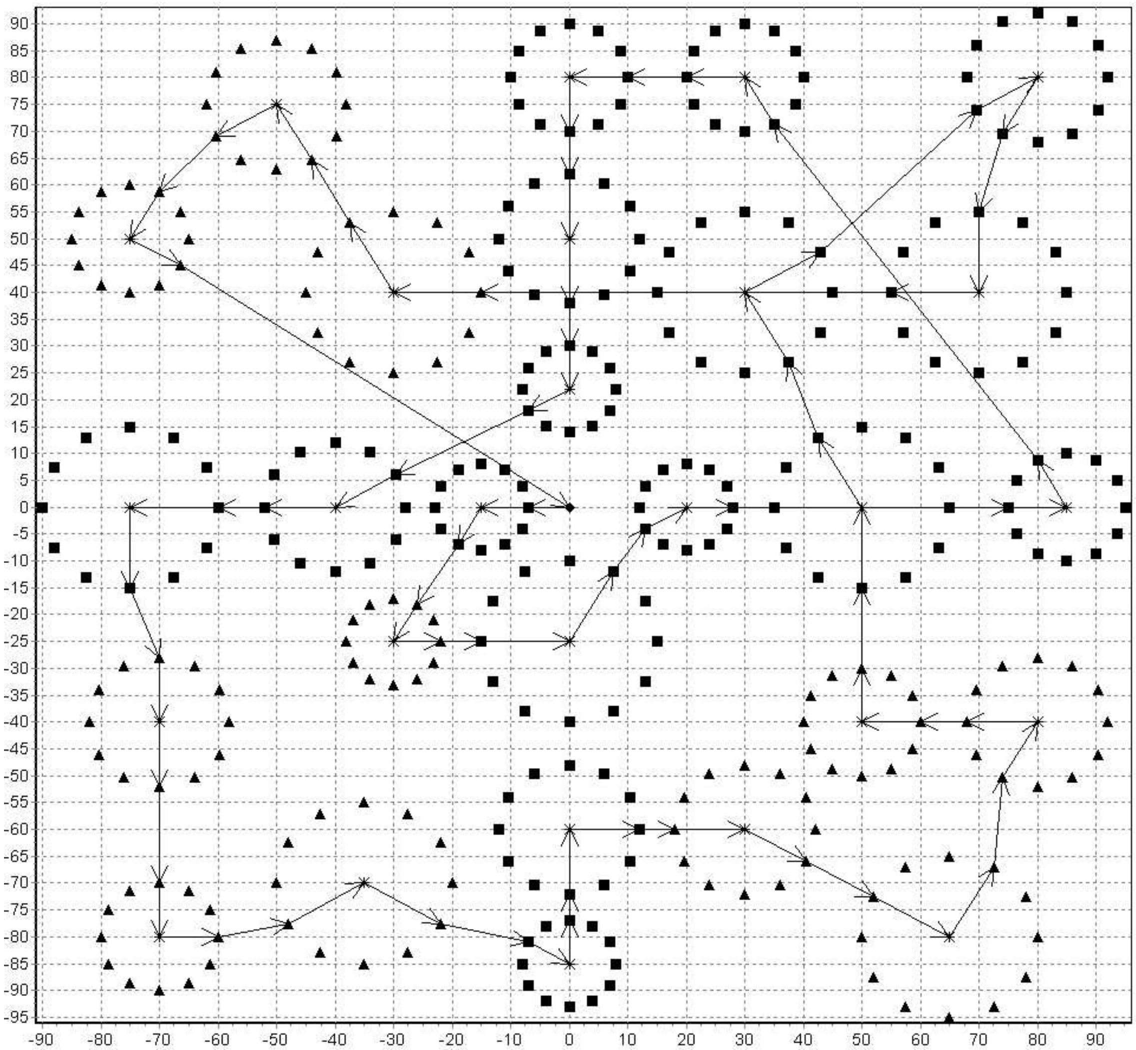
$$p_1 = 1,\ q_1 = 10;\ p_2 = 12,\ q_2 = 2;\ p_3 = 2,\ q_3 = 13;\ p_4 = 13,\ q_4 = 15;$$
$$p_5 = 6,\ q_5 = 16;\ p_6 = 15,\ q_6 = 16;\ p_7 = 18,\ q_7 = 27;\ p_8 = 9,\ q_8 = 27;$$
$$p_9 = 10,\ q_9 = 9;\ p_{10} = 11,\ q_{10} = 19;\ p_{11} = 20,\ q_{11} = 19;\ p_{12} = 25,\ q_{12} = 26;$$
$$p_{13} = 23,\ q_{13} = 22;\ p_{14} = 21,\ q_{14} = 20;\ p_{15} = 24,\ q_{15} = 22;\ p_{16} = 14,\ q_{16} = 16;$$
$$p_{17} = 7,\ q_{17} = 10;\ p_{18} = 8,\ q_{18} = 2;\ p_{19} = 1,\ q_{19} = 9;\ p_{20} = 14,\ q_{20} = 26;$$
$$p_{21} = 2,\ q_{21} = 27;\ p_{22} = 3,\ q_{22} = 6;\ p_{23} = 3,\ q_{23} = 19;\ p_{24} = 18,\ q_{24} = 17;$$
$$p_{25} = 14,\ q_{25} = 25.$$

Результаты счета. Величина совокупных затрат равна 1853.578. Маршрут и трасса (перемещения между множествами обозначены двойными стрелками, а внутренние перемещения по множествам — обычными) имеют вид

$$x^0 = (0,0) \Rightarrow (-7,0) \in M_7 \to (-15,0) \to (-19,-6.93) \in M_7$$
$$\Rightarrow (-26,-18.07) \in M_{21} \to (-30,-25) \to (-22,-25) \in M_{21}$$
$$\Rightarrow (-15,-25) \in M_4 \to (0,-25) \to (7.50,-12.01) \in M_4$$
$$\Rightarrow (13.07,-4) \in M_1 \to (20,0) \to (28,0) \in M_1 \Rightarrow (75,0) \in M_3 \to (85,0) \to (80,8.66) \in M_3$$
$$\Rightarrow (35,71.34) \in M_{14} \to (30,80) \to (20,80) \in M_{14} \Rightarrow (10,80) \in M_{12} \to (0,80) \to (0,70) \in M_{12}$$
$$\Rightarrow (0,62) \in M_{11} \to (0,50) \to (0,38) \in M_{11} \Rightarrow (0,30) \in M_{10} \to (0,25) \to (-6.93,18) \in M_{10}$$
$$\Rightarrow (-29.61,6) \in M_8 \to (-40,0) \to (-52,0) \in M_8$$
$$\Rightarrow (-60,0) \in M_9 \to (-75,0) \to (-75,-15) \in M_9$$
$$\Rightarrow (-70,-28) \in M_{23} \to (-70,-40) \to (-70,-52) \in M_{23}$$
$$\Rightarrow (-70,-70) \in M_{24} \to (-70,-80) \to (-60,-80) \in M_{24}$$
$$\Rightarrow (-47.99,-77.50) \in M_{22} \to (-35,-70) \to (-22.01,-77.50) \in M_{22}$$
$$\Rightarrow (-6.93,-81) \in M_6 \to (0,-85) \to (-0,-77) \in M_6$$
$$\Rightarrow (-0,-72) \in M_5 \to (0,-60) \to (12,-60) \in M_5$$
$$\Rightarrow (18,-60) \in M_{18} \to (30,-60) \to (40.39,-66) \in M_{18}$$
$$\Rightarrow (52.01,-72.50) \in M_{20} \to (65,-80) \to (72.50,-67.01) \in M_{20}$$
$$\Rightarrow (74,-50.39) \in M_{19} \to (80,-40) \to (68,-40) \in M_{19}$$
$$\Rightarrow (60,-40) \in M_{17} \to (50,-40) \to (50,-30) \in M_{17}$$
$$\Rightarrow (50,-15) \in M_2 \to (50,0) \to (42.50,12.99) \in M_2$$
$$\Rightarrow (37.50,27.01) \in M_{13} \to (30,40) \to (42.99,47.50) \in M_{13}$$
$$\Rightarrow (69.61,74) \in M_{15} \to (80,80) \to (74,69.61) \in M_{15}$$
$$\Rightarrow (70,55) \in M_{16} \to (70,40) \to (55,40) \in M_{16}$$
$$\Rightarrow (-15,40) \in M_{25} \to (-30,40) \to (-37.50,52.99) \in M_{25}$$
$$\Rightarrow (-44,64.61) \in M_{27} \to (-50,75) \to (-60.39,69) \in M_{27}$$
$$\Rightarrow (-70,58.66) \in M_{26} \to (-75,50) \to (-66.34,45) \in M_{26}.$$

Время вычисления составило 55 мин. 11 сек.

График маршрута и трассы приведен на рисунке; при этом маршрут как совокупность индексов множеств, чтобы не усложнять график, отождествляется с набором соответствующих множеств. Пункты посещения обозначены звездочками.



Маршрут и трасса обхода множеств.

6. Жадный алгоритм

В настоящем разделе мы конструируем эвристический алгоритм решения основной задачи на основе традиционного правила “иди в ближайший город” в терминологии задачи коммивояжера, применение которого, однако, осложнено условиями предшествования. Ограничимся здесь изложением схемы на содержательном уровне, существенно используя (2.10).

Итак, полагаем $\mathbf{z}^{(0)} \stackrel{\triangle}{=} (x^0, x^0)$, после чего рассматриваем задачу

$$\mathbf{c}(x^0, \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z) \longrightarrow \min, \quad j \in \mathbf{I}(\overline{1,N}), \quad z \in M_j \times M_j.$$

Выбираем $\mathbf{j}_1 \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$ и $\mathbf{z}^{(1)} \in M_{\mathbf{j}_1 \times \mathbf{j}_1}$, для которых

$$\mathbf{c}(x^0, \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(1)})) + c_{\mathbf{j}_1}(\mathbf{z}^{(1)}) = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})} \min_{z \in M_j \times M_j} [\mathbf{c}(x^0, \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z)]. \tag{6.8}$$

Рассмотрим позицию $(\mathbf{j}_1, \mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)})) \in \overline{1,N} \times X$; выбираем $\mathbf{j}_2 \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\})$ и $\mathbf{z}^{(2)} \in M_{\mathbf{j}_2} \times M_{\mathbf{j}_2}$, для которых

$$\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(2)})) + c_{\mathbf{j}_2}(\mathbf{z}^{(2)}) = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\})} \min_{z \in M_j \times M_j} [\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z)]. \tag{6.9}$$

Далее процесс выбора повторяется (учитываем, что $\mathbf{I}$ действует в $\mathfrak{N}$). Пусть вообще $r \in \overline{2,N}$ и уже построены два кортежа

$$(\mathbf{z}^{(k)})_{k \in \overline{0,r}} : \ \overline{0,r} \longrightarrow X \times X, \tag{6.10}$$

$$(\mathbf{j}_k)_{k \in \overline{1,r}} : \ \overline{1,r} \longrightarrow \overline{1,N}, \tag{6.11}$$

обладающие следующими свойствами:

(1) $\big(\mathbf{z}^{(0)} = (x^0, x^0)\big) \,\&\, \big(\mathbf{z}^{(k)} \in M_{\mathbf{j}_k} \times M_{\mathbf{j}_k} \quad \forall k \in \overline{1,r}\big)$;

(2) $\mathbf{j}_k \in \mathbf{I}\big(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_s : s \in \overline{1,k-1}\}\big) \quad \forall k \in \overline{1,r}$;

(3) $\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(t-1)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(t)})) + c_{\mathbf{j}_t}(\mathbf{z}^{(t)})$
$= \min\limits_{k \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_l :\ l \in \overline{1,t-1}\})} \min\limits_{z \in M_k \times M_k} [\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(t-1)}), \mathrm{pr}_1(z)) + c_k(z)] \quad \forall t \in \overline{1,r}.$

Возможен один из следующих двух случаев: $r < N$ и $r = N$. Рассмотрим каждый случай отдельно.

Пусть $r < N$, т. е. $r \in \overline{2, N-1}$. Тогда $\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_s :\ s \in \overline{1,r}\} \in \mathfrak{N}$ и как следствие $\mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_s : s \in \overline{1,r}\}) \in \mathfrak{N}$. Выбираем $\mathbf{j}_{r+1} \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_s :\ s \in \overline{1,r}\})$ и $\mathbf{z}^{(r+1)} \in M_{\mathbf{j}_{r+1}} \times M_{\mathbf{j}_{r+1}}$ так, что

$$\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(r)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(r+1)})) + c_{\mathbf{j}_{r+1}}(\mathbf{z}^{(r+1)}) = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_s :\ s \in \overline{1,r}\})} \min_{z \in M_j \times M_j} [\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(r)}), \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z)].$$

Теперь мы располагаем парой кортежей

$$(\mathbf{z}^{(k)})_{k \in \overline{0,r+1}} : \ \overline{0, r+1} \longrightarrow X \times X, \qquad (\mathbf{j}_k)_{k \in \overline{1,r+1}} : \ \overline{1, r+1} \longrightarrow \overline{1,N},$$

для которых выполнены три условия, подобные (1)–(3) :

(1*) $\big(\mathbf{z}^{(0)} = (x^0, x^0)\big) \,\&\, \big(\mathbf{z}^{(k)} \in M_{\mathbf{j}_k} \times M_{\mathbf{j}_k} \quad \forall k \in \overline{1, r+1}\big)$;

(2*) $\mathbf{j}_k \in \mathbf{I}\big(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_s :\ s \in \overline{1,k-1}\}\big) \quad \forall k \in \overline{1, r+1}$;

(3*) $\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(t-1)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(t)})) + c_{\mathbf{j}_t}(\mathbf{z}^{(t)})$
$= \min\limits_{k \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_l :\ l \in \overline{1,t-1}\})} \min\limits_{z \in M_k \times M_k} [\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(t-1)}), \mathrm{pr}_1(z)) + c_k(z)] \quad \forall t \in \overline{1, r+1}.$

Мы смогли продолжить каждый из кортежей (6.10), (6.11) с сохранением всех основных свойств: условия (1)–(3) преобразуются в (1*)–(3*).

Пусть $r = N$. Тогда (6.10) и (6.11) определяют “полные” кортежи — отображения соответственно из $\overline{0,N}$ (из $\overline{1,N}$) в $X \times X$ (в $\overline{1,N}$). Из свойства (2) вытекает, в частности, что $\mathbf{j}_k \in \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_s :\ \ s \in \overline{1,k-1}\}$ $\forall k \in \overline{1,N}$; последнее означает инъективность и, стало быть, биективность рассматриваемого варианта (6.11): $(\mathbf{j}_k)_{k \in \overline{1,N}} \in \mathbb{P}$. Из свойства (1) и (2.1) имеем (в данном случае) включение $(\mathbf{z}^{(k)})_{k \in \overline{1,N}} \in \ \mathfrak{Z}[(\mathbf{j}_k)_{k \in \overline{1,N}}]$.

Предложение 6.1. *Маршрут* $(\mathbf{j}_k)_{k \in \overline{1,N}}$ *допустим*: $(\mathbf{j}_k)_{k \in \overline{1,N}} \in \mathbb{A}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Коль скоро $\eta \stackrel{\triangle}{=} (\mathbf{j}_k)_{k \in \overline{1,N}} \in \mathbb{P}$, то

$$\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_s :\ s \in \overline{1,k-1}\} = \{\mathbf{j}_s :\ s \in \overline{k,N}\} \quad \forall k \in \overline{1,N}.$$

Тогда из (2) имеем (в рассматриваемом случае $r = N$), что

$$\mathbf{j}_k \in \mathbf{I}(\{\mathbf{j}_s :\ s \in \overline{k, N}\}) \quad \forall k \in \overline{1, N}. \tag{6.12}$$

В силу (2.7) и (6.12) получаем, что $\eta \in (\mathbf{I}\text{-bi})[\overline{1, N}]$, а тогда $\eta \in \mathbb{A}$ в силу (2.10). □

Будем предполагать, что $X, M_1, \ldots, M_N$ и x^0 удовлетворяют соглашениям разд. 6, касающимся плоской задачи ($X \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$); считаем заданными $n \in \mathbb{N}$, а также индексы $p_i, q_i,\ i \in \overline{1, n}$. Множество $\mathbf{K}$ из (1.6) по-прежнему задается в виде $\mathbf{K} = \{(p_i, q_i) :\ i \in \overline{1, n}\}$, где $n \in \mathbb{N}$, причем постулируется, что для всякого непустого множества $K,\ K \subset \overline{1, n}\ \ \exists s \in K :\ p_s \neq q_j\ \forall j \in K$. Это предположение обеспечивает справедливость условия 1.1.

На основе изложенной схемы жадного алгоритма построена программа для ПЭВМ.

Рассматривалось решение задачи при $N = 74,\ x^0 = (30, 22)$; множества $M_i,\ i \in \overline{1, N}$, представляют собой совокупности точек, расположенных на окружностях (здесь аналогия с разд. 6). Точки занумерованы (первая точка — крайняя правая точка окружности, остальные с равным шагом расположены на окружности, нумерация против часовой стрелки). На каждой окружности размещено 12 точек. Множества $M_i,\ i \in \overline{1, N}$, описаны тройками значений — x-координата, y-координата и радиус:

$$\begin{gathered}
M_1 = (105, 49, 10),\ M_2 = (48, 88, 16),\ M_3 = (108, 91, 18),\ M_4 = (78, 152, 15),\\
M_5 = (41, 206, 16),\ M_6 = (130, 148, 18),\ M_7 = (179, 82, 24),\ M_8 = (239, 49, 18),\\
M_9 = (234, 150, 12),\ M_{10} = (177, 171, 18),\ M_{11} = (95, 205, 12),\ M_{12} = (141, 224, 12),\\
M_{13} = (74, 258, 13),\ M_{14} = (219, 220, 11),\ M_{15} = (126, 277, 12),\ M_{16} = (183, 289, 25),\\
M_{17} = (276, 101, 13),\ M_{18} = (322, 39, 27),\ M_{19} = (288, 164, 25),\ M_{20} = (271, 235, 13),\\
M_{21} = (357, 104, 21),\ M_{22} = (33, 307, 12),\ M_{23} = (83, 323, 25),\ M_{24} = (30, 393, 21),\\
M_{25} = (129, 370, 18),\ M_{26} = (76, 420, 17),\ M_{27} = (185, 355, 26),\ M_{28} = (162, 422, 15),\\
M_{29} = (249, 379, 26),\ M_{30} = (271, 289, 18),\ M_{31} = (311, 334, 10),\ M_{32} = (324, 271, 11),\\
M_{33} = (330, 204, 13),\ M_{34} = (363, 161, 21),\ M_{35} = (395, 295, 17),\ M_{36} = (358, 362, 26),\\
M_{37} = (411, 216, 17),\ M_{38} = (299, 416, 11),\ M_{39} = (421, 133, 17),\ M_{40} = (413, 43, 15),\\
M_{41} = (445, 258, 19),\ M_{42} = (441, 345, 20),\ M_{43} = (413, 411, 10),\ M_{44} = (488, 174, 28),\\
M_{45} = (484, 61, 19),\ M_{46} = (526, 109, 17),\ M_{47} = (545, 37, 20),\ M_{48} = (504, 247, 16),\\
M_{49} = (498, 304, 19),\ M_{50} = (483, 366, 11),\ M_{51} = (461, 408, 17),\ M_{52} = (529, 408, 14),\\
M_{53} = (539, 347, 22),\ M_{54} = (545, 207, 11),\ M_{55} = (551, 261, 16),\ M_{56} = (560, 152, 12),\\
M_{57} = (577, 82, 9),\ M_{58} = (591, 135, 9),\ M_{59} = (581, 190, 8),\ M_{60} = (592, 221, 13),\\
M_{61} = (590, 285, 10),\ M_{62} = (597, 337, 11),\ M_{63} = (572, 386, 12),\ M_{64} = (356, 241, 11),\\
M_{65} = (351, 421, 18),\ M_{66} = (611, 26, 19),\ M_{67} = (628, 86, 27),\ M_{68} = (634, 161, 22),\\
M_{69} = (644, 237, 25),\ M_{70} = (645, 314, 19),\ M_{71} = (625, 374, 12),\ M_{72} = (600, 421, 11),\\
M_{73} = (648, 410, 20),\ M_{74} = (155, 29, 16).
\end{gathered}$$

На выбор маршрута наложены следующие ограничения (условия предшествования): для каждой из $n\,(= 15)$ пар (p_i, q_i) индексов множеств

$$\begin{gathered}
(7, 74),\ (6, 10),\ (13, 19),\ (44, 34),\ (42, 68),\ (27, 29),\ (45, 40),\\
(36, 33),\ (53, 51),\ (18, 8),\ (66, 67),\ (63, 61),\ (70, 71),\ (31, 16),\ (21, 39)
\end{gathered}$$

множество, задаваемое первым индексом, необходимо посещать раньше множества, задаваемого вторым.

Функция стоимости перехода между множествами — евклидово расстояние между точками, функция стоимости на множествах — сумма евклидовых расстояний до центра от точки входа и точки выхода. По завершении обхода следует вернуться в точку старта; поэтому $\mathbf{f}$ — функция евклидова расстояния до точки x^0.

Результаты счета. Величина затрат равна 7561.072; найденный маршрут описывается тройками — номер множества, индекс точки входа, индекс точки выхода:

$$(x^0), (2; 5, 6), (1; 8, 6), (3; 4, 6), (4; 4, 7), (11; 5, 7), (5; 1, 7), (13; 5, 6), (22; 3, 7), (23; 7, 6),$$
$$(15; 8, 7), (12; 9, 7), (6; 10, 6), (10; 6, 7), (14; 6, 7), (20; 7, 6), (30; 4, 6), (32; 7, 6), (64; 8, 7), (37; 8, 6),$$
$$(41; 5, 7), (35; 3, 7), (31; 2, 7), (36; 6, 7), (38; 3, 7), (65; 7, 6), (43; 7, 6), (42; 9, 7), (50; 6, 7), (52; 6, 7),$$
$$(63; 8, 6), (53; 11, 7), (49; 11, 7), (48; 9, 6), (54; 8, 7), (59; 8, 6), (56; 11, 6), (58; 7, 6), (57; 10, 7), (46; 2, 7),$$
$$(45; 11, 7), (40; 12, 7), (21; 3, 6), (17; 1, 6), (9; 3, 6), (19; 6, 7), (33; 6, 7), (39; 8, 7), (44; 6, 7), (34; 1, 6),$$
$$(18; 10, 6), (8; 2, 6), (7; 2, 6), (74; 10, 7), (16; 4, 6), (27; 5, 6), (25; 2, 6), (26; 3, 7), (24; 12, 6), (28; 7, 6),$$
$$(29; 8, 6), (51; 7, 6), (72; 7, 6), (73; 7, 6), (62; 11, 7), (61; 10, 6), (55; 12, 6), (60; 8, 7), (69; 7, 6), (68; 10, 7),$$
$$(66; 10, 6), (47; 2, 7), (67; 6, 7), (70; 4, 6), (71; 4, 6), (x^0).$$

Время вычисления меньше секунды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.** Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 3–34.
2. **Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.** Задача коммивояжера. Точные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 10. С. 3–29.
3. **Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.** Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 11. С. 3–26.
4. **Henry-Labordere A.L.** The record-balancing problem: a dynamic programming solution of a generalized traveling salesman problem // R.I.R.O. 1969. Vol. 3, no. 2. P. 43–49.
5. **Laporte G., Nobert Y.** Generalized traveling salesman problem through n sets of nodes: an integer programming approach // INFOR. 1983. Vol. 21, no. 1. P. 61–75.
6. **Лейтен А.К.** Некоторые модификации задачи коммивояжера // Тр. ВЦ Тарт. ун-та. 1973. Вып. 28. С. 44–58.
7. **Коротаева Л.Н., Сесекин А.Н., Ченцов А.Г.** Об одной модификации метода динамического программирования в задаче последовательного сближения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1989. Т. 29, № 8. С. 1107–1113.
8. **Коротаева Л.Н., Назаров Э.М., Ченцов А.Г.** Об одной задаче о назначениях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33, № 4. С. 483–494.
9. **Ченцов А.А., Ченцов А.Г.** О решении задачи маршрутной оптимизации методом динамического программирования // Автоматика и телемеханика. 1998. № 9. С. 117–129.
10. **Ченцов А.А., Ченцов А.Г.** К вопросу о решении задачи последовательного обхода множеств с использованием “незамкнутой” задачи коммивояжера // Автоматика и телемеханика. 2002. № 11. С. 151–166.
11. **Chentsov A.A., Chentsov A.G.** Dynamic programming method in the generalized traveling salesman problem: The influence of inexact calculations // Math. Comput. Modelling. 2001. Vol. 33. P. 801–819.
12. **Ченцов А.Г., Ченцов П.А.** Маршрутизация с условиями предшествования (задача курьера): метод динамического программирования // Вестн. УГТУ-УПИ. 2004. № 15. С. 148–151.
13. **Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А.** Об одном обобщении задачи курьера // Алгоритмы и програм. средства парал. вычислений. Екатеринбург: УрО РАН, 2004. Вып. 8. С. 178–235.
14. **Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А.** Обобщенная версия задачи курьера // Математический и прикладной анализ: сб. науч. тр. Тюмень: Изд-во Тюмен. гос. ун-та, 2005. Вып. 2. С. 238–280.
15. **Ченцов А.Г.** О структуре одной экстремальной задачи маршрутизации с ограничениями в виде условий предшествования // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. 2006. № 1. С. 127–150.
16. **Ченцов А.Г.** Экстремальные задачи маршрутизации с ограничениями // Изв. Ин-та математики и информатики / Удмурт. гос. ун-т. 2006. Вып. 3. С. 163–166.
17. **Плотинский Ю.М.** Общая задача развозки // Автоматика и телемеханика. 1973. № 6. С. 100–104.
18. **Меламед И.И., Плотинский Ю.М.** Эвристический алгоритм решения обобщенной задачи развозки // Автоматика и телемеханика. 1979. № 12. С. 167–172.

19. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
20. **Ченцов А.А., Ченцов А.Г.** О реализации метода динамического программирования в обобщенной задаче курьера // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 3. С. 136–160.

Поступила 21.02.2008

Ченцов Алексей Александрович
канд. физ.-мат. наук
гл. программист

Ченцов Александр Георгиевич
чл.-кор. РАН
зав. отд.

Ченцов Павел Александрович
канд. физ.-мат. наук
гл. программист
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

N. Yu. Antonov. **On the Almost Everywhere Convergence of Sequences of Multiple Rectangular Fourier Sums.**

Keywords: multiple trigonometric Fourier series, almost everywhere convergence.

In the case when a sequence of d-dimensional vectors $\mathbf{n}_k = (n_k^1, n_k^2, \ldots, n_k^d)$ with nonnegative integer coordinates satisfies the condition

$$n_k^j = \alpha_j m_k + O(1), \qquad k \in \mathbb{N}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant d,$$

where $\alpha_1, \ldots, \alpha_d > 0$, $m_k \in \mathbb{N}$, and $\lim_{k\to\infty} m_k = \infty$, under some conditions on the function $\varphi\colon\ [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, it is proved that, if the trigonometric Fourier series of any function from $\varphi(L)([-\pi,\pi))$ converges almost everywhere, then, for any $d \in \mathbb{N}$ and all $f \in \varphi(L)(\ln^+ L)^{d-1}([-\pi,\pi)^d)$, the sequence $S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x})$ of the rectangular partial sums of the multiple trigonometric Fourier series of the function f, as well as the corresponding sequences of partial sums of all of its conjugate series, converges almost everywhere. Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 3. P. 3–18.

A. G. Babenko and Yu. V. Kryakin. **Integral Approximation of the Characteristic Function of an Interval by Trigonometric Polynomials.**

Keywords: integral and uniform approximation of functions by polynomials, canonical sets.

We prove that the value $E_{n-1}(\chi_h)_L$ of the best integral approximation of the characteristic function χ_h of an interval $(-h,h)$ on the period $[-\pi,\pi)$ by trigonometric polynomials of degree at most $n-1$ is expressed in terms of zeros of the Bernstein function $\cos\bigl\{nt - \arccos[(2q-(1+q^2)\cos t)/(1+q^2-2q\cos t)]\bigr\}$, $t \in [0,\pi]$, $q \in (-1,1)$. Here, the parameters q, h, and n are connected in a special way; in particular, $q = \sec h - \tan h$ for $h = \pi/n$. Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 3. P. 19–37.

V. M. Badkov. **Asymptotic Behavior of the Maximal Zero of a Polynomial Orthogonal on a Segment with a Nonclassical Weight.**

Keywords: orthogonal polynomials, nonclassical weight, asymptotic behavior of maximal zero.

Let $\{p_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ be a system of algebraic polynomials orthonormal on the segment $[-1,1]$ with a weight $p(t)$; let $\{x_{n,\nu}^{(p)}\}_{\nu=1}^{n}$ be zeros of a polynomial $p_n(t)$ ($x_{n,\nu}^{(p)} = \cos\theta_{n,\nu}^{(p)}$; $0 < \theta_{n,1}^{(p)} < \theta_{n,2}^{(p)} < \ldots < \theta_{n,n}^{(p)} < \pi$). It is known that, for a wide class of weights $p(t)$ containing the Jacobi weight, the quantities $\theta_{n,1}^{(p)}$ and $1 - x_{n,1}^{(p)}$ coincide in order with n^{-1} and n^{-2}, respectively. In the present paper, we prove that, if the weight $p(t)$ has the form $p(t) = 4(1-t^2)^{-1}\{\ln^2[(1+t)/\ (1-t)] + \pi^2\}^{-1}$, then the following asymptotic formulas are valid as $n \to \infty$:

$$\theta_{n,1}^{(p)} = \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\ln(n+1)}}\left[1 + O\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right)\right],$$

$$x_{n,1}^{(p)} = 1 - \frac{1}{n^2\ln(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^2\ln^2(n+1)}\right).$$

Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 3. P. 38–42.

N. V. Baidakova. **On Some Interpolation Third-Degree Polynomials on a Three-Dimensional Simplex.**

Keywords: multidimensional interpolation, finite element method.

The interpolation problem under consideration is connected with the finite element method in $\mathbb{R}^3$. In most cases, when finite elements are constructed by means of the partition of a given domain in $\mathbb{R}^2$ into triangles and interpolation of the Hermite or Birkhoff type, the sine of the smallest angle of the triangle appears in the denominators of the error estimates for the derivatives. In the case of $\mathbb{R}^m$ ($m \geqslant 3$), the ratio of the radius of the inscribed sphere to the diameter of the simplex is used as an analog of this characteristic. This makes it necessary to impose constraints on the triangulation of the domain. The recent investigations by a number of authors reveal that, in the case of triangles, the smallest angle in the error estimates for some interpolation processes can be replaced by the middle or the greatest one, which makes it possible to weaken the triangulation requirements. There are fewer works of this kind for $m \geqslant 3$, and the error estimates are given there in terms of other characteristics of the simplex. In this paper, methods are suggested for constructing an interpolation third-degree polynomial on a simplex in $\mathbb{R}^3$. These methods allow one to obtain estimates in terms of a new characteristic of a rather simple form and weaken the triangulation requirements. Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 3. P. 43–57.

V. A. Belonogov. **On Irreducible Characters of the Group S_n That Are Semiproportional on A_n or $S_n \setminus A_n$. II**

Keywords: symmetric groups, alternating groups, irreducible characters, semiproportionality.

In the author's previous paper, the hypothesis that the alternating groups A_n have no pairs of semiproportional irreducible characters is reduced to a hypothesis concerning the problem of describing the pairs of irreducible characters of the symmetric group S_n that are semiproportional on one of the sets A_n or $S_n \setminus A_n$. In this hypothesis, properties of such a pair of characters are expressed in terms of Young's diagrams corresponding to these characters. The theorem proved in this paper allows one to exclude from consideration some stages of the verification of this hypothesis. Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 3. P. 58–68.

V. I. Berdyshev. **Two Methods of Characterizing the Visibility of a Moving Point.**

Keywords: navigation of a moving object, characterization of the visibility of an object, directional differentiability.

Two methods are presented of determining the visibility (observability) of an object moving in space with an obstacle that hinders the motion and the perception of the object by an observer. The first method is based on taking into account the distance from the object to all possible observers. The second method uses not only the distance but also the size of the circular cone with the vertex at the observation point that contains a spherical neighborhood of the object. The directional differentiability of the functions characterizing the visibility of the object is established. The calculation of the derivatives is reduced to an extremal problem, for which "refinement" theorems are given. Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 3. P. 69–81.

A. A. Chentsov, A. G. Chentsov,P. A. Chentsov. **Extremal Routing Problem with Internal Losses.**

Keywords: route, path, precedence conditions.

An extremal routing problem with constraints in the form of precedence conditions and with additional (internal) losses related to the trajectory staying within the goal sets is considered. Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 3. P. 183–200.

N. I. Chernykh, Yu. N. Subbotin. **Interpolating–Orthogonal Wavelet Systems.**

Keywords: orthogonal bases of wavelets, interpolation systems, multiresolution analysis.

Based upon Meyer wavelets, new systems of periodic wavelets and wavelets on the whole axis are constructed; these systems are orthogonal and interpolating simultaneously. Estimates of the errors of approximation of different classes of smooth functions by these wavelets are obtained. Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 3. P. 153–161.

N. I. Chernykh, Yu. N. Subbotin, V. P. Vereshchagin. **On the Construction of Unit Longitudinal–Vortex Vector Fields with the Use of Smooth Mappings.**

Keywords: scalar, vector, and tensor fields; curl.

A solution is given for the problem of constructing a unit vector field collinear to the field of its curl. The solution is based on the use of a suitably parametrized orthogonal transformation of a unit vector field that is potential in $\mathbb{R}^3$. The result is stated in the theorem that contains the recipe for constructing the required field. Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 3. P. 82–91.

N. I. Chernykh, Yu. N. Subbotin, V. P. Vereshchagin. **Longitudinal–Vortex Unit Vector Fields from the Class of Axially Symmetric Fields.**

Keywords: scalar, vector, and tensor fields; axially symmetric fields.

In the paper, we construct unit vector fields belonging to the class of smooth axially symmetric fields that are longitudinal–vortex in the whole space $\mathbb{R}^3$. Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 3. P. 98–111.

V. I. Ivanov, D. V. Chertova, Liu Yondpind. **The Sharp Jackson Inequality in the Space L_2 on the Segment $[-1, 1]$ with the Power Weight.**

Keywords: mean square best approximation, generalized shift, modulus of continuity, the Sturm–Liouville operator.

In the space L_2 on the segment $[-1, 1]$ with the power weight $|x|^{2\lambda+1}$, $\lambda \geq -1/2$, we define a complete orthogonal system, the value of the best approximation with respect to this system, the operator of generalized shift, and the modulus of continuity and prove the sharp Jackson inequality. Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 3. P. 112–126.

V. V. Kabanov, S. V. Unegov. **Amply Regular Graphs with Hoffman's Condition.**

Keywords: amply regular graphs, strongly regular graphs, graphs with the minimal eigenvalue -2.

It is known that, if the minimal eigenvalue of a graph is -2, then the graph satisfies Hoffman's condition: for any generated complete bipartite subgraph $K_{1,3}$ (a 3-claw) with parts $\{p\}$ and $\{q_1, q_2, q_3\}$, any vertex distinct from p and adjacent to the vertices q_1 and q_2 is adjacent to p but not adjacent to q_3. We prove the converse statement for amply regular graphs containing a 3-claw and satisfying the condition $\mu > 1$. Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 3. P. 127–131.

S. V. Konyagin. **On the Convergence of Greedy Approximants of Trigonometric Fourier Series.**

Keywords: trigonometric Fourier series, greedy approximations.

Efficient versions of the Cauchy criterion for the convergence in L_p of greedy approximants of trigonometric Fourier series are discussed. Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 3. P. 132–144.

A. V. Mironenko. **On the Estimate of the Uniform Deviation from the Class of Functions with Bounded Third Derivative.**

Keywords: uniform approximation, functions with bounded derivatives, smooth functions, modulus of continuity

The problem of the uniform approximation of a continuous function on a closed interval by a class of functions with a uniformly bounded third derivative is considered. It is shown that the value of best approximation of a function by this class cannot be estimated linearly in terms of its third-order modulus of continuity. At the same time, such estimates exist for classes with bounded first or second derivatives. Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 3. P. 145–152.

S. A. Telyakovskii. **On the Rate of Approximation of Functions by the Bernstein Polynomials.**

Keywords: Bernstein polynomials, approximation rate, asymptotic estimates.

The estimates are refined for the deviations of the Bernstein polynomials from functions at a fixed point and for the remainders in the asymptotic formulas for these deviations for differentiable functions. Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 3. P. 162–169.

I. G. Tsar'kov. **Stability of the Unique Solvability for Some Differential Equations.**

Keywords: differential equations, unique solvability.

Conditions on a differential equation are studied under which it is possible to estimate the deviation of some of its continuous solutions from each other in the uniform metric given their deviations on a grid. Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 3. P. 170–182.

E. A. Zernyshkina.

The Wirtinger–Steklov Inequality between the Norm of a Periodic Function and the Norm of the Positive Cutoff of Its Derivative.

Keywords: Wirtinger–Steklov inequality.

We study the sharp constant in the inequality between the L_p-mean ($p \geqslant 0$) of a 2π-periodic function with zero mean value and the L_q-norm ($q \geqslant 1$) of the positive cutoff of its derivative. We obtain estimates of the constant from below for $0 \leqslant p \leqslant \infty$ and from above for $1 \leqslant p \leqslant \infty$ for an arbitrary $1 \leqslant q \leqslant \infty$. We write out the values of the sharp constant in the cases $p = 2,\ 1 \leqslant q \leqslant \infty$ and $p = \infty,\ 1 \leqslant q \leqslant \infty$. Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 3. P. 99–111.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 14 № 3 2008

Учредитель
Учреждение Российской академии наук
Институт математики и механики Уральского отделения РАН

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–30115 от 31 октября 2007 г.

ISSN 0134–4889

Редактор Е. Г. Понизовкина
Технический редактор Н. Н. Моргунова

Отв. за выпуск Л. В. Петрак, В. В. Шевченко

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 12.11.08. Формат $60 \times 84^1/_8$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 25. Уч.-изд. л. 20,4. Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620219, Екатеринбург, ул. С.Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, д.17, офис 226