РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

# ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14, № 2 2008

Российская академия наук

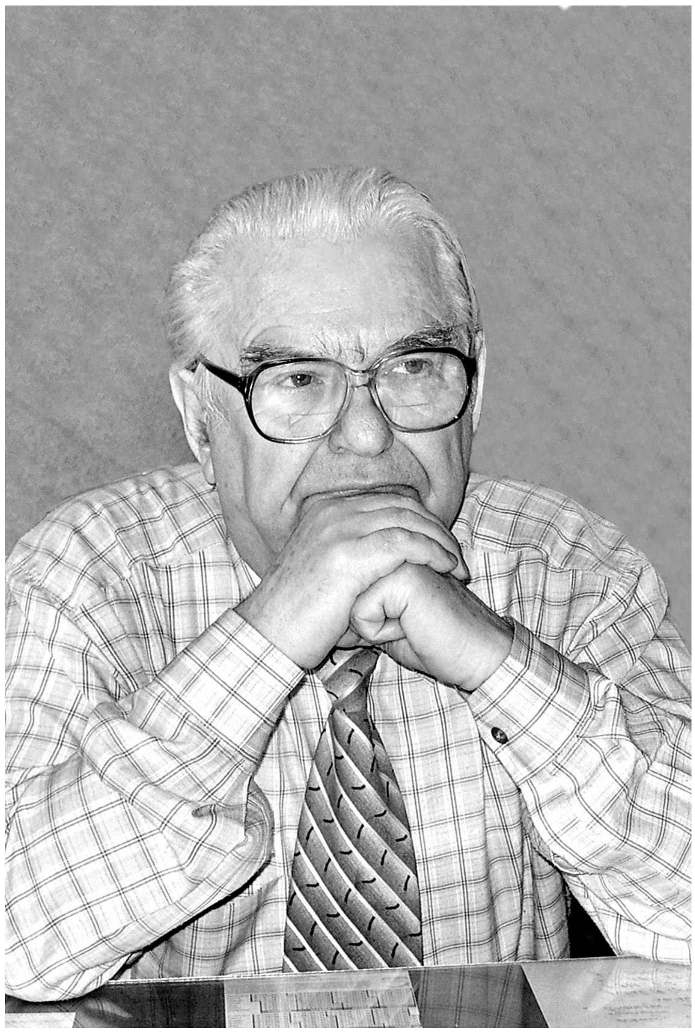
Уральское отделение

# ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 14, № 2 2008 Апрель–Июнь

Основан в 1973 г.
Выходит 4 раза в год

ISSN 0134–4889



## СОДЕРЖАНИЕ

### Математическое программирование



### Алгебра и топология



### Дифференциальные уравнения

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14 № 2 2008

# К 75-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ИВАНА ИВАНОВИЧА ЕРЕМИНА

22 января 2008 г. исполнилось 75 лет выдающемуся российскому математику академику И.И. Еремину.

Иван Иванович родился в 1933 г. в деревне Равнец Ишимского района Уральской (ныне Тюменской) области в крестьянской семье. В 1956 г. окончил физико-математический факультет Пермского государственного университета. Там же начал свою научную деятельность под руководством крупного ученого-алгебраиста профессора С.Н.Черникова, творческий союз с которым продолжался долгие годы.

По результатам своих первых работ по теории групп и теории линейных неравенств И.И. Еремин в 1959 г. защитил кандидатскую диссертацию и стал доцентом кафедры алгебры и геометрии Пермского университета.

В 1961 г. И.И.Еремин возглавил лабораторию линейного программирования в Свердловском отделении Математического института им. В.А. Стеклова, несколько позже преобразованную в отдел математического программирования Института математики и механики УрО РАН. В 1967 г. защитил докторскую диссертацию по теории и методам математического программирования. В 1991 г. избран членом-корреспондентом Российской академии наук, а в 2000 — действительным членом РАН.

И.И. Еремин является всемирно известным ученым в области математической оптимизации и исследования операций, а также их приложений в экономике и управлении. Его результаты в этих областях являются общепризнанными и во многом определяют направление развития современных разделов теории оптимизации.

Прежде всего следует отметить фундаментальный вклад И.И. Еремина в развитие метода штрафных функций для задач условной оптимизации. Именно им впервые была обоснована эквивалентная сводимость задач линейного и выпуклого программирования к задачам оптимизации без ограничений (метод точных штрафных функций, основанный на применении классической функции Еремина — Зангвилла). При изучении свойств сходимости метода штрафных функций основной упор был сделан на развитии оценочного подхода. Полученные им точные оценки скорости сходимости важны как с количественной, так и с качественной точек зрения. Именно в работах И.И. Еремина впервые была явно показана тесная связь метода штрафных функций и теории двойственности в математическом программировании.

Широко известны глубокие результаты И.И. Еремина по нестационарным процессам математического программирования и оптимизации иерархических систем. Им предложен обширный класс методов фейеровского типа для решения систем линейных и выпуклых неравенств, а также соответствующих задач оптимизации. И.И. Еремин ввел понятие несобственной (противоречивой) задачи математического программирования, исследование которой привело к появлению нового направления в теории оптимизации и экономико-математического анализа. Им впервые построена каноническая теория двойственности для несобственных задач математического программирования и разработаны методы аппроксимации (оптимальной коррекции) данных задач.

Исследованию проблемы двойственности, которая является по сути ядром теории оптимизации, И.И. Еремин всегда придавал первостепенное значение. Им предложена схема симметричной двойственности для лексикографических задач линейной оптимизации, сформулирована и обоснована теорема симметричной двойственности для задачи Парето-последовательного программирования. Ему принадлежат базовые конструкции формирования двойственности для задачи кусочно-линейного программирования (в том числе несобственной).

Наряду с фундаментальными исследованиями большое внимание И.И. Еремин всегда уделял различным прикладным проектам. Он возглавлял и лично участвовал в осуществлении ряда крупных работ, таких как "Оптимизация топливно-энергетического баланса Уральского региона", "Оптимальное объемно-календарное планирование Уральского завода тяжелого машиностроения", задачи медицинской диагностики, разработка современного программного и информационного обеспечения для решения задач оптимизации и др.

И.И. Еремин является автором более чем 200 научных работ, в том числе 11 монографий. Среди его учеников член-корреспондент РАН, 5 докторов и 13 кандидатов наук. Созданная Иваном Ивановичем и возглавляемая им уже более 40 лет уральская школа по математическому программированию и распознаванию образов широко известна в стране и за рубежом.

Большую научную работу И.И. Еремин на протяжении многих лет успешно сочетает с педагогической деятельностью, будучи профессором (с 1970 г.) Уральского госуниверситета. В 1996 г. он создал и возглавил кафедру математической экономики УрГУ. Его лекции по математическому программированию всегда отличались удачным сочетанием строгости, математической глубины с широтой охвата материала и оригинальностью изложения. На основе прочитанных курсов лекций им издан целый ряд учебников и учебных пособий по математическому программированию, которые широко известны среди специалистов.

И.И. Еремин — высокоавторитетный организатор науки. Он избран председателем Ассоциации математического программирования — общественно-научной организации, призванной всемерно содействовать развитию теории и практики математической оптимизации. И.И. Еремин возглавляет оргкомитет традиционной научной конференции "Методы математического программирования". Он входит в состав нескольких советов по защитам диссертаций, участвует в работе редколлегий ряда отечественных и зарубежных математических журналов.

За успешную научную и общественную деятельность И.И. Еремин в 1983 г. награжден орденом "Знак Почета", в 2004 — орденом "Дружба".

Свой юбилей И.И. Еремин встретил полным творческой энергии, планов и устремлений. Редколлегия "Трудов ИММ" сердечно поздравляет Ивана Ивановича с 75-летием и желает ему крепкого здоровья и новых успехов в его деятельности.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14 № 2 2008

УДК 517.988.68

# СЕДЛОВАЯ ЗАДАЧА И ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ КАК ЕДИНАЯ СИСТЕМА[1]

**А. С. Антипин**

Рассматриваются параметрическая задача выпуклого программирования и линейная задача оптимизации на выпуклом множестве как единая система задач. Изучаются свойства такой системы. Обсуждается сфера ее приложения. Предлагаются методы ее решения. Обосновывается сходимость методов.

## 1. Постановка общей задачи

Рассмотрим систему задач оптимизации, одна из которых — седловая задача, порожденная выпуклым программированием, а другая — задача оптимизации на выпуклом множестве [1,2]

$$p^*, w^* \in \mathrm{ArgSdl}\{f(w) \mid g(w) \leq y^*,\ w \in W_0\}, \tag{1}$$

$$y^* \in \mathrm{ArgMax}\{\langle p^*, y\rangle \mid y \in Y\}. \tag{2}$$

Здесь $f(w)$ — скалярная, а $g(w)$ — векторная функция, причем $f(w)$ и каждая компонента функции $g(w)$ — выпуклые, $p \in \mathbb{R}^m_+$ — положительный ортант, $W_0 \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m_+$ — выпуклые замкнутые множества, в частности $Y$ — многогранное ограниченное множество. В этом случае (2) — задача линейного программирования. Теория задач линейного программирования с различных точек зрения детально изложена в [3,4].

В (1) требуется выбрать вектор правой части функциональных ограничений $y = y^*$ такой, чтобы двойственное решение этой задачи, т.е. вектор $p = p^*$ порождал задачу (2), в которой линейный функционал $\langle p^*, y\rangle$, $y \in Y$ достигал бы максимума в точке $y = y^* \in Y$. Термин *прямое и двойственное решение задачи* (1) означает, что седловая точка функции Лагранжа этой задачи

$$L(p, w, y^*) = f(w) + \langle p, g(w) - y^*\rangle, \qquad p \geq 0, \qquad w \in W_0, \tag{3}$$

где $y^* \geq 0$ — параметр, удовлетворяет системе неравенств

$$f(w^*) + \langle p, g(w^*) - y^*\rangle \leq f(w^*) + \langle p^*, g(w^*) - y^*\rangle \leq f(w) + \langle p^*, g(w) - y^*\rangle \tag{4}$$

при всех $p \geq 0$, $w \in W_0$. Система (1), (2) является базовой для знаменитой задачи экономического равновесия Эрроу—Дебре [5] для случая, когда потребитель и производитель состоят из одного участника каждый. Эта конструкция может независимо рассматриваться как математическая модель для описания балансовых взаимоотношений типа “спрос равен предложению” для потребителей и производителей разного уровня [2]. Система (1), (2) может также трактоваться как одна из форм обратных задач оптимизации [6].

Детализируем одну из возможных интерпретаций модели (1), (2). Будем трактовать ее как модель оптового рынка двух участников. Первый участник (2) передает второму (1) вектор ресурсов $y = y^* \in Y$; второй участник, являющийся производителем некоторого товара, передает первому вектор цен $p = p^* \geq 0$ (они же — множители Лагранжа). Цены играют роль

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00619) и Программы поддержки ведущих научных школ (НШ-5073.2008.1).

обратных связей. А именно, если оптимум $w^* \in W_0$ сильно лимитируется $i$-м ограничением $y_i^*$, то $i$-й множитель Лагранжа $p_i$ достаточно велик, а это значит, что ресурс дефицитен и, следовательно, потребность в нем значительна. Сумма $\langle p^*, y\rangle$ при максимизации будет расти в значительной степени за счет $i$-го слагаемого $y_i^*$, потому что его весовой коэффициент достаточно велик. Другими словами, в системе (1), (2) автоматически стимулируется производство наиболее дефицитных продуктов.

Используя функцию Лагранжа, задачу полезно переформулировать в другой форме, а именно, в виде системы, состоящей из задачи оптимизации и двух вариационных неравенств:

$$\begin{gathered} w^* \in \operatorname{Arg\,min}\{f(w) + \langle p^*,\, g(w) - y^*\rangle \mid w \in W_0\}, \\ \langle p - p^*,\, g(w^*) - y^*\rangle \le 0 \qquad \forall\, p \ge 0, \\ \langle y - y^*,\, p^*\rangle \le 0 \qquad \forall\, y \in Y. \end{gathered} \tag{5}$$

Поскольку первое вариационное неравенство определено на положительном ортанте, то оно распадается на два соотношения, которые представляют собой задачу дополнительности. Чтобы убедиться в этом, достаточно сначала положить в нем $p = 0$, а затем $p = 2p^*$, тогда

$$\langle p^*,\, g(w^*) - y^*\rangle = 0, \qquad g(w^*) - y^* \le 0. \tag{6}$$

Условия (6) дают возможность показать, что из (5) следует (1), (2), т.е. что обе постановки эквивалентны.

С другой стороны, оба вариационных неравенства из (5) можно рассматривать как необходимые и достаточные условия для задачи проектирования вектора на выпуклое замкнутое множество. В этом случае система (5) эквивалентна системе вида

$$\begin{gathered} w^* \in \operatorname{arg\,min}\{f(w) + \langle p^*,\, g(w) - y^*\rangle \mid w \in W_0\}, \\ p^* = \pi_+(p^* + \alpha\,(g(w^*) - y^*)), \\ y^* = \pi_{_Y}(y^* + \alpha\, p^*). \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь $\pi$ — оператор проектирования некоторого вектора на некоторое множество [7]. В нашем случае это — положительный ортант или множество $Y$. Уравнения с операторами проектирования относятся к уравнениям фейеровского типа, детально исследованым в [8].

Точка $w^*, p^*$ системы (5) является решением седловой задачи (1). Однако возникает вопрос, является ли полное решение этой задачи, т.е. вектор $p^*, w^*, y^*$, в свою очередь седловой точкой некоторой седловой функции. Чтобы ответить на этот вопрос, введем седловую функцию трех переменных

$$\mathcal{L}(p, w, y) = f(w) + \langle p,\, g(w) - y\rangle, \qquad p \ge 0, \qquad w \in W_0, \qquad y \in Y, \tag{8}$$

где $w \in W_0$, $y \in Y$ будем трактовать как прямые переменные, а $p \ge 0$ — как двойственные.

Представим задачу (2) в форме

$$\langle p^*, y\rangle \le \langle p^*, y^*\rangle \qquad \forall\, y \in Y, \tag{9}$$

и сопоставим ее с правым неравенством системы (4). Нетрудно видеть, что обе задачи можно записать в виде неравенства

$$f(w^*) + \langle p^*,\, g(w^*) - y^*\rangle \le f(w) + \langle p^*,\, g(w) - y\rangle \tag{10}$$

для всех $w \in W_0$, $y \in Y$. Действительно, используя сепарабельную структуру функции $f(w) + \langle p^*,\, g(w) - y\rangle$, положим сначала $w = w^*$ в (10), тогда получим (9), затем, положив $y = y^*$, получим правое неравенство (4). Если теперь левое неравенство (4) записать вместе с (10), то получим утверждение, что решение системы (1), (2) — седловая точка функции (8):

$$\mathcal{L}(p, w^*, y^*) \le \mathcal{L}(p^*, w^*, y^*) \le \mathcal{L}(p^*, w, y) \qquad \forall\, p \ge 0, \qquad \forall\, w \in W_0, \qquad \forall\, y \in Y. \tag{11}$$

Наоборот, пусть $p^*, w^*, y^*$ — седловая точка функции $\mathcal{L}(p, w, y)$. Тогда из правого неравенства (11) с учетом (6) имеем

$$f(w^*) \le f(w) + \langle p^*,\, g(w) - y\rangle \qquad \forall\, w \in W_0, \qquad \forall\, y \in Y.$$

Если подчинить переменную $w \in W_0$ ограничению $\langle p^*,\, g(w) - y\rangle \le 0$, то вышеприведенное неравенство сводится к задаче оптимизации функции $f(w)$ на $w \in W_0$ плюс одно скалярное ограничение

$$f(w^*) \le f(w), \qquad \langle p^*,\, g(w) - y\rangle \le 0 \qquad \forall\, w \in W_0, \qquad \forall\, y \in Y.$$

Если учесть (6), то полученная задача, верная для всех $y \in Y$, сводится к задаче вида

$$f(w^*) \le f(w), \qquad g(w) - y \le 0 \qquad \forall\, w \in W_0, \qquad \forall\, y \in Y.$$

В частности, при $y = y^*$ получаем задачу (1)

$$f(w^*) \le f(w), \qquad g(w) \le y^*, \qquad \forall\, w \in W_0.$$

Если теперь в левом неравенстве (11) положить $w = w^*$, то получим

$$\langle p^*, y\rangle \le \langle p^*, y^*\rangle \qquad \forall\, y \in Y.$$

Таким образом, доказана

**Теорема 1.** *Пусть функции $f(w)$, $g(w)$ и множества $W_0$, $Y$ замкнуты и выпуклы, причем $Y$ — ограниченное множество. Тогда системы задач (1), (2) и (11) эквивалентны.*

## 2. Прямой экстрапроксимальный метод

Перепишем систему неравенств (11) в виде

$$w^*,\, y^* \in \arg\min\{f(w) + \langle p^*,\, g(w) - y\rangle \;\mid\; w \in W_0,\; y \in Y\},$$

$$\langle p - p^*,\, g(w^*) - y^*\rangle \le 0 \qquad \forall\, p \ge 0.$$

Целевая функция первой задачи этой системы является сепарабельной и потому распадается на две независимые подзадачи вида (см. рассуждения между формулами (10) и (11))

$$f(w^*) + \langle p^*,\, g(w^*)\rangle \le f(w) + \langle p^*,\, g(w)\rangle \qquad \forall\, w \in W_0,$$

$$\langle p^*, y\rangle \le \langle p^*, y^*\rangle \qquad \forall\, y \in Y.$$

С учетом проведенной декомпозиции исходную систему можно представить в форме

$$w^* \in \operatorname{Arg\,min}\{f(w) + \langle p^*, g(w)\rangle \;\mid\; w \in W_0\};$$

$$y^* = \pi_Y(y^* + \alpha\, p^*);$$

$$p^* = \pi_+(p^* + \alpha\,(g(w^*) - y^*)).$$

Чтобы придать экстремальному отображению этой системы свойство “быть нерасширяющим оператором” в области его определения, разумно его регуляризовать и записать в эквивалентной форме проксимального оператора:

$$\begin{gathered} w^* \in \arg\min\Big\{\frac{1}{2}\,|w-w^*|^2+\alpha\,(f(w)+\langle p^*, g(w)\rangle) \;\;|\;\; w\in W_0\Big\}; \\ y^* = \pi_{_Y}(y^*+\alpha\, p^*); \\ p^* = \pi_+(p^*+\alpha\,(g(w^*)-y^*)). \end{gathered} \tag{12}$$

Если бы правая часть этой системы уравнений как оператор обладала свойством потенциальности (например, как градиентный процесс), то метод простой итерации

$$\begin{gathered} w^{n+1} \in \arg\min\Big\{\frac{1}{2}\,|w-w^n|^2+\alpha\,(f(w)+\langle p^n,\, g(w)-y^n\rangle) \;\;|\;\; w\in W_0\Big\}, \\ y^{n+1} = \pi_{_Y}(y^n+\alpha\, p^n), \\ p^{n+1} = \pi_+(p^n+\alpha\,(g(w^n)-y^n)) \end{gathered}$$

сходился бы к решению (12). Однако выше мы имеем дело не с потенциальной системой, поэтому для решения (12) используем прямой и двойственный экстрапроксимальные методы [9–11], которые можно рассматривать как методы простой итерации, управляемые с помощью обратной связи; последнюю реализуют прогнозные или предварительные шаги [12, 13].

*Прямой метод*:

$$\begin{gathered} \bar y^n = \pi_{_Y}(y^n+\alpha\, p^n); \\ \bar w^n \in \arg\min\Big\{\frac{1}{2}\,|w-w^n|^2+\alpha\,(f(w)+\langle p^n, g(w)\rangle) \;\;|\;\; w\in W_0\Big\}; \\ p^{n+1} = \pi_+(p^n+\alpha\,(g(\bar w^n)-\bar y^n)); \\ y^{n+1} = \pi_{_Y}(y^n+\alpha\, p^{n+1}); \\ w^{n+1} \in \arg\min\Big\{\frac{1}{2}\,|w-w^n|^2+\alpha\,(f(w)+\langle p^{n+1}, g(w)\rangle) \;\;|\;\; w\in W_0\Big\}. \end{gathered} \tag{13}$$

Чтобы доказать сходимость прямого процесса (13), используем неравенство вида

$$\frac{1}{2}\,|z^*-x|^2+\alpha_n\, f(z^*) \le \frac{1}{2}\,|z-x|^2+\alpha_n\, f(z) - \frac{1}{2}\,|z-z^*|^2 \qquad \forall z\in Z, \tag{14}$$

которому подчинена любая функция вида $1/2\,|z-x|^2+\alpha_n\, f(z)$, где $f(z)$ — выпуклая, не обязательно дифференцируемая функция, определенная на выпуклом множестве $Z$, где $z\in Z$ и $z^*$ — точка минимума функции $\varphi(z) = 1/2\,|z-x|^2+\alpha_n\, f(z)$ на $Z$ для любого $x$ [11].

Поскольку целевые функции процесса (13) имеют структуру (14), то этот процесс может быть записан в эквивалентной форме:

$$\begin{gathered} |\bar w^n-w^n|^2+2\,\alpha\, f(\bar w^n)+2\,\alpha\,\langle p^n,\, g(\bar w^n)\rangle \\ \le |w-w^n|^2+2\,\alpha\, f(w)+2\,\alpha\,\langle p^n,\, g(w)\rangle - |w-\bar w^n|^2, \end{gathered} \tag{15}$$

и

$$\begin{gathered} |w^{n+1}-w^n|^2+2\,\alpha\, f(w^{n+1})+2\,\alpha\,\langle p^{n+1},\, g(w^{n+1})\rangle \\ \le |w-w^n|^2+2\,\alpha\, f(w)+2\,\alpha\,\langle p^{n+1},\, g(w)\rangle - |w-w^{n+1}|^2. \end{gathered} \tag{16}$$

Операторные уравнения процесса (13), согласно [7], представим в форме вариационных неравенств:

$$\langle \bar y^n-y^n-\alpha\, p^n,\, y-\bar y^n\rangle \ge 0 \qquad \forall\, y\in Y; \tag{17}$$

$$\langle y^{n+1} - y^n - \alpha\, p^{n+1},\, y - y^{n+1}\rangle \geq 0 \qquad \forall\, y \in Y; \tag{18}$$

$$\langle p^{n+1} - p^n - \alpha\,(g(\bar{w}^n) - \bar{y}^n),\, p - p^{n+1}\rangle \geq 0 \qquad \forall\, p \geq 0. \tag{19}$$

Для доказательства сходимости рассматриваемого метода нам понадобится условие Липшица для векторной функции $g(w)$, которое запишем в форме

$$|g(w + h) - g(h)| \leq |g||h| \tag{20}$$

для всех $w + h \in W_0$, $h \in \mathbb{R}^n$, где $|g|$ — константа Липшица.

Оценим отклонение векторов $\bar{w}^n$ и $w^{n+1}$ на каждом шаге процесса (13). С этой целью положим в неравенствах (15) и (16) значения $w = w^{n+1}$ и $w = w^n$ соответственно, тогда

$$|\bar{w}^n - w^n|^2 + 2\,\alpha\, f(\bar{w}^n) + 2\,\alpha\,\langle p^n,\, g(\bar{w}^n)\rangle$$

$$\leq |w^{n+1} - w^n|^2 + 2\,\alpha\, f(w^{n+1}) + 2\,\alpha\,\langle p^n,\, g(w^{n+1})\rangle - |w^{n+1} - \bar{w}^n|^2,$$

$$|w^{n+1} - w^n|^2 + 2\,\alpha\, f(w^{n+1}) + 2\,\alpha\,\langle p^{n+1},\, g(w^{n+1})\rangle$$

$$\leq |\bar{w}^n - w^n|^2 + 2\,\alpha\, f(\bar{w}^n) + 2\,\alpha\,\langle p^{n+1},\, g(\bar{w}^n)\rangle - |\bar{w}^n - w^{n+1}|^2.$$

Сложим полученные неравенства

$$|\bar{w}^n - w^{n+1}|^2 \leq \alpha\,\langle p^{n+1} - p^n,\, g(\bar{w}^n) - g(w^{n+1})\rangle.$$

С учетом (20) окончательно получим

$$|\bar{w}^n - w^{n+1}| \leq \alpha\,|g|\,|p^{n+1} - p^n|. \tag{21}$$

Оценим отклонение векторов $\bar{y}^n$ и $y^{n+1}$ на каждом шаге процесса (13)

$$|\bar{y}^n - y^{n+1}| \leq \alpha\,|p^{n+1} - p^n|. \tag{22}$$

Докажем теорему о сходимости метода (13).

**Теорема 2.** *Если решение равновесной задачи* (1), (2) *существует, функции* $f(w)$, $g(w)$ *выпуклы, функция* $g(w)$ *подчинена условию Липшица* (20) *и* $W_0$, $Y$ *— выпуклые замкнутые множества, то последовательность* $p^n, w^n, y^n$ *прямого экстрапроксимального метода* (13) *с параметром* $\alpha$*, удовлетворяющим условию* $0 < \alpha < 1\,/\,\sqrt{2\,(|g|^2 + 1)}$*, сходится монотонно по норме к одному из решений задачи, т.е.* $p^n, w^n, y^n \to p^*, w^*, y^*$ *при* $n \to \infty$ *для всех* $p^0, w^0, p^0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $w = w^*$ в (16) и $w = w^{n+1}$ в (15), тогда

$$|w^{n+1} - w^n|^2 + 2\,\alpha\, f(w^{n+1}) + 2\,\alpha\,\langle p^{n+1},\, g(w^{n+1})\rangle$$

$$\leq |w^* - w^n|^2 + 2\,\alpha\, f(w^*) + 2\,\alpha\,\langle p^{n+1},\, g(w^*)\rangle - |w^{n+1} - w^*|^2$$

и

$$|\bar{w}^n - w^n|^2 + 2\,\alpha\, f(\bar{w}^n) + 2\,\alpha\,\langle p^n,\, g(\bar{w}^n)\rangle$$

$$\leq |w^{n+1} - w^n|^2 + 2\,\alpha\, f(w^{n+1}) + 2\,\alpha\,\langle p^n,\, g(w^{n+1})\rangle - |\bar{w}^n - w^{n+1}|^2.$$

Сложив полученные неравенства с тождеством

$$\langle p^{n+1},\, g(\bar{w}^n)\rangle - \langle p^{n+1},\, g(\bar{w}^n)\rangle = 0,$$

получим

$$|w^{n+1} - w^*|^2 + |w^{n+1} - \bar{w}^n|^2 + |\bar{w}^n - w^n|^2$$

$$+\, 2\,\alpha\,\big(\langle p^n,\, g(\bar{w}^n)\rangle - \langle p^{n+1},\, g(\bar{w}^n)\rangle - \langle p^n,\, g(w^{n+1})\rangle + \langle p^{n+1},\, g(w^{n+1})\rangle\big)$$

$$+\,2\,\alpha\,(f(\bar w^n)-f(w^*)+2\,\alpha\,\big(\langle p^{n+1},\,g(\bar w^n)\rangle-\langle p^{n+1},\,g(w^*)\rangle\big)\le|w^n-w^*|^2,$$

или

$$|w^{n+1}-w^*|^2+|w^{n+1}-\bar w^n|^2+|\bar w^n-w^n|^2+2\,\alpha\,\langle p^n-p^{n+1},\,g(\bar w^n)-g(w^{n+1})\rangle$$
$$+\,2\,\alpha\,(f(\bar w^n)-f(w^*))+2\,\alpha\,\big(\langle p^{n+1},\,g(\bar w^n)\rangle-\langle p^{n+1},\,g(w^*)\rangle\big)\le|w^n-w^*|^2.$$

Положим $w=\bar w^n$ в правом неравенстве (4), тогда

$$f(w^*)+\langle p^*,\,g(w^*)\rangle\le\langle f(\bar w^n)+\langle p^*,\,g(\bar w^n)\rangle.$$

Сложим два последних неравенства

$$|w^{n+1}-w^*|^2+|w^{n+1}-\bar w^n|^2+|\bar w^n-w^n|^2+2\,\alpha\,\langle p^n-p^{n+1},\,g(\bar w^n)-g(w^{n+1})\rangle$$
$$+\,2\,\alpha\,\langle p^{n+1}-p^*,\,g(\bar w^n)-g(w^*)\rangle\le|w^n-w^*|^2. \tag{23}$$

С учетом (21) оценим четвертое слагаемое в (23)

$$|w^{n+1}-w^*|^2+|w^{n+1}-\bar w^n|^2+|\bar w^n-w^n|^2$$
$$-\,2\,(\alpha\,|g|)^2|p^n-p^{n+1}|^2+2\,\alpha\,\langle p^{n+1}-p^*,\,g(\bar w^n)-g(w^*)\rangle\le|w^n-w^*|^2. \tag{24}$$

Далее получим аналогичную оценку для итерации по переменной $p\ge 0$ из (13). Для этого в неравенстве (19) положим $p=p^*$, в левом неравенстве (4) — $p=p^{n+1}$, затем сложим оба неравенства

$$\langle p^{n+1}-p^n,\,p^*-p^{n+1}\rangle-\alpha\,\langle g(\bar w^n)-\bar y^n,\,p^*-p^{n+1}\rangle+\alpha\,\langle g(w^*)-y^*,\,p^*-p^{n+1}\rangle\ge 0,$$

или

$$-\,2\,\langle p^{n+1}-p^n,\,p^*-p^{n+1}\rangle-2\,\alpha\,\langle g(w^*)-g(\bar w^n),\,p^*-p^{n+1}\rangle-2\,\alpha\,\langle\bar y^n-y^*,\,p^*-p^{n+1}\rangle\le 0. \tag{25}$$

Сложим неравенства (24) и (25)

$$|w^{n+1}-w^*|^2+|w^{n+1}-\bar w^n|^2+|\bar w^n-w^n|^2-2\,(\alpha\,|g|)^2\,|p^n-p^{n+1}|^2$$
$$-\,2\,\langle p^{n+1}-p^n,\,p^*-p^{n+1}\rangle-2\,\alpha\,\langle\bar y^n-y^*,\,p^*-p^{n+1}\rangle\le|w^n-w^*|^2. \tag{26}$$

К неравенству (26) вернемся позже, а сейчас получим аналогичные оценки для итераций по переменной $y\in Y$. Положим $y=y^*$ в (18) и $y=y^{n+1}$ в (17)

$$\langle y^{n+1}-y^n,\,y^*-y^{n+1}\rangle-\alpha\,\langle p^{n+1},\,y^*-y^{n+1}\rangle\ge 0,$$
$$\langle\bar y^n-y^n,\,y^{n+1}-\bar y^n\rangle-\alpha\,\langle p^n,\,y^{n+1}-\bar y^n\rangle\ge 0.$$

Сложим оба неравенства, прибавив при этом к сумме ноль в форме

$$\alpha\,\langle p^{n+1},\,\bar y^n\rangle-\alpha\,\langle p^{n+1},\,\bar y^n\rangle=0.$$

Тогда

$$\langle y^{n+1}-y^n,\,y^*-y^{n+1}\rangle+\langle\bar y^n-y^n,\,y^{n+1}-\bar y^n\rangle$$
$$-\,\alpha\,\langle p^{n+1},\,y^*-y^{n+1}\rangle-\alpha\,\langle p^n,\,y^{n+1}-\bar y^n\rangle+\alpha\,\langle p^{n+1},\,\bar y^n\rangle-\alpha\,\langle p^{n+1},\,\bar y^n\rangle\ge 0.$$

Отсюда

$$\langle y^{n+1}-y^n,\,y^*-y^{n+1}\rangle+\langle\bar y^n-y^n,\,y^{n+1}-\bar y^n\rangle$$
$$+\,\alpha\,\langle p^n,\,\bar y^n\rangle-\alpha\,\langle p^{n+1},\,\bar y^n\rangle-\alpha\,\langle p^n,\,y^{n+1}\rangle+\alpha\,\langle p^{n+1},\,y^{n+1}\rangle+\alpha\,\langle p^{n+1},\,\bar y^n-y^*\rangle\ge 0.$$

Положим $y=\bar y^n$ в (5), тогда

$$\langle\bar y^n-y^*,\,p^*\rangle\le 0.$$

Сложим две последние оценки

$$2\,\langle y^{n+1}-y^n,\,y^*-y^{n+1}\rangle + 2\,\langle \bar y^n - y^n,\,y^{n+1}-\bar y^n\rangle$$
$$+\,2\,\alpha\,\langle p^n - p^{n+1},\,\bar y^n - y^{n+1}\rangle + 2\,\alpha\,\langle p^{n+1}-p^*,\,\bar y^n - y^*\rangle \ge 0. \tag{27}$$

Сложим оценки (26) и (27), тогда

$$|w^{n+1}-w^*|^2 + |w^{n+1}-\bar w^n|^2 + |\bar w^n - w^n|^2 - 2\,(\alpha\,|g|)^2\,|p^n - p^{n+1}|^2$$
$$-\,2\,\langle y^{n+1}-y^n,\,y^*-y^{n+1}\rangle - 2\,\langle \bar y^n - y^n,\,y^{n+1}-\bar y^n\rangle$$
$$-\,2\,\langle p^{n+1}-p^n,\,p^*-p^{n+1}\rangle - 2\,\alpha\,\langle p^n-p^{n+1},\,\bar y^n - y^{n+1}\rangle \le |w^n - w^*|^2. \tag{28}$$

Оценим восьмое слагаемое левой части (28), используя (22),

$$|\langle p^n - p^{n+1},\,\bar y^n - y^{n+1}\rangle| \le |p^n - p^{n+1}|\,|\bar y^n - y^{n+1}| \le \alpha\,|p^n - p^{n+1}|^2. \tag{29}$$

Далее, используя тождество

$$|x_1 - x_3|^2 = |x_1 - x_2|^2 + 2\,\langle x_1 - x_2,\,x_2 - x_3\rangle + |x_2 - x_3|^2 \tag{30}$$

и оценку (29), преобразуем шестое и восьмое слагаемые из (28) следующим образом:

$$|w^{n+1}-w^*|^2 + |w^{n+1}-\bar w^n|^2 + |\bar w^n - w^n|^2 - 2\,(\alpha\,|g|)^2\,|p^n - p^{n+1}|^2$$
$$-\,2\,\langle y^{n+1}-y^n,\,y^*-y^{n+1}\rangle + |y^{n+1}-\bar y^n|^2 + |\bar y^n - y^n|^2 - |y^{n+1}-y^n|^2$$
$$-\,2\,\langle p^{n+1}-p^n,\,p^*-p^{n+1}\rangle - 2\,\alpha^2\,|p^{n+1}-p^n|^2 \le |w^n - w^*|^2. \tag{31}$$

Далее, используя еще раз тождество (30), разложим пятое и девятое слагаемое из (31), тогда

$$|w^{n+1}-w^*|^2 + |w^{n+1}-\bar w^n|^2 + |\bar w^n - w^n|^2 - 2\,(\alpha\,|g|)^2\,|p^n - p^{n+1}|^2$$
$$+\,|y^{n+1}-y^*|^2 + |y^{n+1}-y^n|^2 + |y^{n+1}-\bar y^n|^2 + |\bar y^n - y^n|^2 - |y^{n+1}-y^n|^2 + |p^{n+1}-p^*|^2$$
$$+\,|p^{n+1}-p^n|^2 - 2\,\alpha^2\,|p^{n+1}-p^n|^2 \le |w^n - w^*|^2 + |y^n - y^*|^2 + |p^n - p^*|^2.$$

Отсюда

$$|w^{n+1}-w^*|^2 + |y^{n+1}-y^*|^2 + |p^{n+1}-p^*|^2 + (1 - 2\,\alpha^2\,(|g|+1))\,|p^{n+1}-p^n|^2$$
$$+\,|w^{n+1}-\bar w^n|^2 + |\bar w^n - w^n|^2 + |y^{n+1}-\bar y^n|^2 + |\bar y^n - y^n|^2$$
$$\le |w^n - w^*|^2 + |y^n - y^*|^2 + |p^n - p^*|^2. \tag{32}$$

Просуммируем последнее неравенство от $n = 0$ до $n = N$:

$$|w^{N+1}-w^*|^2 + |y^{N+1}-y^*|^2 + |p^{N+1}-p^*|^2 + d\sum_{k=0}^{k=N}|p^{k+1}-p^k|^2$$
$$+\sum_{k=0}^{k=N}(|w^{k+1}-\bar w^k|^2 + |\bar w^k - w^k|^2 + |y^{k+1}-\bar y^k|^2 + |\bar y^k - y^k|^2)$$
$$\le |w^0 - w^*|^2 + |y^0 - y^*|^2 + |p^0 - p^*|^2,$$

где $d = 1 - 2\,\alpha^2\,(|g|+1) > 0$. Из полученного неравенства следует ограниченность траектории

$$|w^{N+1}-w^*|^2 + |y^{N+1}-y^*|^2 + |p^{N+1}-p^*|^2 \le |w^0 - w^*|^2 + |y^0 - y^*|^2 + |p^0 - p^*|^2,$$

а также сходимость рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty}|p^{k+1}-p^k|^2<\infty,\qquad \sum_{k=0}^{\infty}|w^{k+1}-\bar w^k|^2<\infty,\qquad \sum_{k=0}^{\infty}|\bar w^{k}-w^k|^2<\infty,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}|y^{k+1}-\bar y^k|^2<\infty,\qquad \sum_{k=0}^{\infty}|\bar y^{k}-y^k|^2<\infty$$

и, следовательно, стремление к нулю величин

$$|p^{n+1}-p^n|^2\to 0,\qquad |w^{n+1}-\bar w^n|^2\to 0,\qquad |\bar w^{n}-w^n|^2\to 0,$$

$$|y^{n+1}-\bar y^n|^2\to 0,\qquad |\bar y^{n}-y^n|^2\to 0,\qquad n\to\infty.$$

Так как последовательность $p^n, w^n, y^n$ ограничена, то существует элемент $p', w', y'$ такой, что $p^{n_i}\to p'$, $w^{n_i}\to w'$, $y^{n_i}\to y'$ при $n_i\to\infty$, и при этом

$$|p^{n_i+1}-p^{n_i}|^2\to 0,\quad |w^{n_i+1}-\bar w^{n_i}|^2\to 0,\quad |\bar w^{n_i}-w^{n_i}|^2\to 0,\quad |y^{n_i+1}-\bar y^{n_i}|^2\to 0,\quad |\bar y^{n_i}-y^{n_i}|^2\to 0.$$

Перейдя к пределу $(n_i\to\infty)$в неравенстве (13), получим

$$y'=\pi_+(y'+\alpha\, p');$$

$$p'=\pi_+(p'+\alpha\,(g(w')-y'));$$

$$f(w')+\langle p',\, g(w')\rangle\le f(w)+\langle p',\, g(w)\rangle$$

для всех $w\in\Omega$.

Поскольку эти соотношения эквивалентны (7), то $w'=w^*\in\Omega^*$, $p'=p^*\ge 0$, $y'=y^*\in Y$, т.е. любая предельная точка последовательности $p^n, w^n, y^n$ является решением задачи. Условие монотонности убывания величины $|w^n-w^*|+|p^n-p^*|+|y^n-y^*|$ обеспечивает единственность предельной точки, т.е. сходимость $p^n\to p^*$, $w^n\to w^*$, $y^n\to y^*$ при $n\to\infty$.

Теорема доказана.

## 3. Двойственный экстрапроксимальный метод

Наряду с прямым методом, рассмотренным в предыдущем разделе, систему (12) можно решить, используя идею двойственного экстрапроксимального подхода [9–13]. Выпишем формулы этого метода.

*Двойственный метод*:

$$\begin{gathered}\bar p^n=\pi_+(p^n+\alpha\,(g(w^n)-y^n));\\ y^{n+1}=\pi_{_Y}(y^n+\alpha\,\bar p^n);\\ w^{n+1}\in\arg\min\Big\{\frac12\,|w-w^n|^2+\alpha\,(f(w)+\langle\bar p^n,\, g(w)\rangle)\ \ |\ \ w\in W_0\Big\};\\ p^{n+1}=\pi_+(p^n+\alpha\,(g(w^{n+1})-y^{n+1})).\end{gathered}\tag{33}$$

Если в исходной задаче (1), (2) множество $Y$ состоит из одной точки $y^*$, то итеративные формулы по переменной $y$ отсутствуют. В этом случае мы получаем формулы процесса для решения задачи выпуклого программирования (1) или вычисления седловой точки функции (3). Если же, наоборот, задача выпуклого программирования отсутствует, то процесс (33) содержит формулы только по переменной $y$, и этот подпроцесс сходится к решению задачи (2), т.е. к вычислению граничной точки множества $Y$, которая является опорной для линейного функционала $\langle p^*,\, y\rangle$, $y\in Y$, где $p^*$ — априори заданный вектор.

Представим процесс (33) в форме системы неравенств:

$$\langle \bar p^n - p^n - \alpha\,(g(w^n) - y^n),\, p - \bar p^n\rangle \geq 0 \qquad \forall\, p \geq 0; \tag{34}$$

$$\langle y^{n+1} - y^n - \alpha\,\bar p^n,\, y - y^{n+1}\rangle \geq 0 \qquad \forall\, y \in Y; \tag{35}$$

$$|w^{n+1} - w^n|^2 + 2\,\alpha\, f(w^{n+1}) + 2\,\alpha\,\langle \bar p^n,\, g(w^{n+1})\rangle$$

$$\leq |w - w^n|^2 + 2\,\alpha f(w) + 2\,\alpha\,\langle \bar p^n,\, g(w)\rangle - |w - w^{n+1}|^2 \qquad \forall\, w \in W_0; \tag{36}$$

$$\langle p^{n+1} - p^n - \alpha\,(g(w^{n+1}) - y^{n+1}),\, p - p^{n+1}\rangle \geq 0 \qquad \forall\, p \geq 0. \tag{37}$$

Получим оценки отклонения векторов $\bar p^n$ и $p^{n+1}$ друг от друга. Сопоставляя первое и последнее уравнения из (33), получим

$$|\bar p^n - p^{n+1}| = \alpha\,|g(w^n) - y^n - g(w^{n+1}) + y^{n+1}|. \tag{38}$$

Докажем теорему о сходимости метода (33).

**Теорема 3.** *Если решение равновесной задачи* (1), (2) *существует, функции* $f(w)$, $g(w)$ *выпуклы, функция* $g(w)$ *подчинена условию Липшица* (20) *и* $W_0, Y$ *— выпуклые замкнутые множества, то последовательность* $p^n, w^n, y^n$ *двойственного экстрапроксимального метода* (33) *с параметром* $\alpha$, *удовлетворяющим условию* $0 < \alpha < \min\{1\,/\,(2\,|g|), 1\,/\,2\}$, *сходится монотонно по норме к одному из решений задачи, т.е.* $p^n, w^n, y^n \to p^*, w^*, y^*$ *при* $n \to \infty$ *для всех* $p^0, w^0, p^0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $w = w^*$ в (36) и $w = w^{n+1}$ в правом неравенстве (4), тогда

$$|w^{n+1} - w^n|^2 + 2\,\alpha f(w^{n+1}) + 2\,\alpha\,\langle \bar p^n,\, g(w^{n+1})\rangle$$

$$\leq |w^* - w^n|^2 + 2\,\alpha f(w^*) + 2\,\alpha\,\langle \bar p^n,\, g(w^*)\rangle - |w^* - w^{n+1}|^2$$

и

$$f(w^*) + \langle p^*,\, g(w^*)\rangle \leq f(w^{n+1}) + \langle p^*,\, g(w^{n+1})\rangle.$$

Сложим полученные неравенства

$$|w^{n+1} - w^*|^2 + |w^{n+1} - w^n|^2 + 2\,\alpha\,\langle \bar p^n - p^*,\, g(w^{n+1}) - g(w^*)\rangle \leq |w^n - w^*|^2. \tag{39}$$

Рассмотрим неравенства по переменной $y \in Y$. Положим $y = y^*$ в неравенстве (35) и $y = y^{n+1}$ в (5), тогда

$$\langle y^{n+1} - y^n - \alpha\,\bar p^n,\, y^* - y^{n+1}\rangle \geq 0$$

и

$$\langle y^{n+1}) - y^*,\, -p^*\rangle \geq 0.$$

Сложим оба неравенства

$$2\,\langle y^{n+1} - y^n,\, y^* - y^{n+1}\rangle + 2\,\alpha\,\langle p^* - \bar p^n,\, y^* - y^{n+1}\rangle \geq 0. \tag{40}$$

Сложим (39) и (40), тогда

$$|w^{n+1} - w^*|^2 + |w^{n+1} - w^n|^2 + 2\,\alpha\,\langle \bar p^n - p^*,\, g(w^{n+1}) - y^{n+1} - g(w^*) + y^*\rangle$$

$$- 2\,\langle y^{n+1} - y^n,\, y^* - y^{n+1}\rangle \leq |w^n - w^*|^2. \tag{41}$$

Теперь рассмотрим неравенства по переменной $p$. Положим $p = p^*$ в неравенстве (37) и $p = p^{n+1}$ в (34), тогда

$$\langle p^{n+1} - p^n - \alpha\,(g(w^{n+1}) - y^{n+1}),\, p^* - p^{n+1}\rangle \geq 0,$$

$$\langle \bar p^n - p^n - \alpha\,(g(w^n) - y^n),\, p^{n+1} - \bar p^n\rangle \ge 0.$$

Сложим полученные неравенства

$$\langle p^{n+1} - p^n,\, p^* - p^{n+1}\rangle + \langle \bar p^n - p^n,\, p^{n+1} - \bar p^n\rangle - \alpha\,\langle g(w^{n+1}) - y^{n+1},\, p^* - p^{n+1}\rangle$$

$$+\,\alpha\,\langle g(w^{n+1}) - g(w^n) - y^{n+1} + y^n,\, p^{n+1} - \bar p^n\rangle - \alpha\,\langle g(w^{n+1}) - y^{n+1},\, p^{n+1} - \bar p^n\rangle \ge 0.$$

Третье и пятое слагаемые сложим, а четвертое в этом неравенстве оценим с помощью (38), тогда

$$\langle p^{n+1} - p^n,\, p^* - p^{n+1}\rangle + \langle \bar p^n - p^n,\, p^{n+1} - \bar p^n\rangle$$

$$-\,\alpha\,\langle g(w^{n+1}) - y^{n+1},\, p^* - \bar p^n\rangle + \alpha^2\,|g(w^{n+1}) - g(w^n) - y^{n+1} + y^n|^2 \ge 0.$$

Положим $p = \bar p^n$ в левом неравенстве (4)

$$-\,\langle \bar p^n - p^*,\, g(w^*) - y^*\rangle \ge 0.$$

Сложим два последних неравенства

$$2\,\langle p^{n+1} - p^n,\, p^* - p^{n+1}\rangle + 2\,\langle \bar p^n - p^n,\, p^{n+1} - \bar p^n\rangle + 2\,\alpha^2\,|g(w^{n+1}) - g(w^n) - y^{n+1} + y^n|^2$$

$$-\,2\,\alpha\,\langle g(w^{n+1}) - y^{n+1} - g(w^*) + y^*,\, p^* - \bar p^n\rangle \ge 0. \qquad (42)$$

И, наконец, сложим оценки (41) и (42)

$$|w^{n+1} - w^*|^2 + |w^{n+1} - w^n|^2$$

$$-\,2\,\langle p^{n+1} - p^n,\, p^* - p^{n+1}\rangle - 2\,\langle \bar p^n - p^n,\, p^{n+1} - \bar p^n\rangle - 2\,\langle y^{n+1} - y^n,\, y^* - y^{n+1}\rangle$$

$$-\,2\,\alpha^2\,|g(w^{n+1}) - g(w^n) - y^{n+1} + y^n|^2 \le |w^n - w^*|^2.$$

Используя тождество (30), преобразуем третье, четвертое и пятое слагаемые

$$|w^{n+1} - w^*|^2 + |w^{n+1} - w^n|^2 + |p^{n+1} - p^*|^2 + |p^{n+1} - p^n|^2 + |y^{n+1} - y^*|^2 + |y^{n+1} - y^n|^2$$

$$+\,|p^{n+1} - \bar p^n|^2 + |\bar p^n - p^n|^2 - |p^{n+1} - p^n|^2 - 2\,\alpha^2\,|g(w^{n+1}) - g(w^n) - y^{n+1} + y^n|^2$$

$$\le |w^n - w^*|^2 + |p^n - p^*|^2 + |y^n - y^*|^2. \qquad (43)$$

Последний член в левой части этого неравенства оценим, используя неравенство $2\,\langle x, y\rangle \le |x|^2 + |y|^2$ и оценку (20),

$$|g(w^{n+1}) - g(w^n) - y^{n+1} + y^n|^2$$

$$= |g(w^{n+1}) - g(w^n)|^2 + 2\,\langle g(w^{n+1}) - g(w^n),\, y^n - y^{n+1}\rangle + |y^n - y^{n+1}|^2$$

$$\le 2\,|g|^2\,|w^{n+1} - w^n|^2 + 2\,|y^{n+1} - y^n|^2.$$

Перепишем еще раз (43), используя полученную оценку,

$$|w^{n+1} - w^*|^2 + |p^{n+1} - p^*|^2 + |y^{n+1} - y^*|^2 + d_1\,|w^{n+1} - w^n|^2 + d_2\,|y^{n+1} - y^n|^2$$

$$+\,|p^{n+1} - \bar p^n|^2 + |\bar p^n - p^n|^2 \le |w^n - w^*|^2 + |p^n - p^*|^2 + |y^n - y^*|^2, \qquad (44)$$

где $d_1 = 1 - 4\,\alpha^2\,|g|^2 > 0$, $d_2 = 1 - 4\,\alpha^2 > 0$. Оба условия выполняются, если $0 < \alpha < \min\{1\,/\,2\,|g|, 1\,/\,2\}$. В этом случае все слагаемые левой части (44) положительны и полученное неравенство аналогично (32). Заключительная часть доказательства может быть проведена по аналогии с теоремой 1.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Антипин А.С.** Методы решения систем задач выпуклого программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27, № 3. С. 368–376.
2. **Антипин А.С.** О моделях взаимодействия предприятий-производителей, предприятий-потребителей и транспортной системы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 10. С. 105–113.
3. **Еремин И.И.** Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: Изд-во "Екатеринбург", 1999.
4. **Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю.** Линейное программирование. М.: Факториал Пресс, 2003.
5. **Полтерович В.М.** Экономическое равновесие и хозяйственный механизм. М.: Наука, 1990.
6. **Антипин А.С.** Обратная задача оптимизации // Экономико-математический энциклопедический словарь. М.: Большая российская энциклопедия, 2003. С. 346–347.
7. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
8. **Васин В.В., Еремин И.И.** Операторы и итерационные процессы фейеровского типа (теория и приложения). М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2005.
9. **Антипин А.С.** Экстраполяционные методы вычисления седловой точки функции Лагранжа экстремальных отображений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1986. Т. 1, № 1. С. 150–151.
10. **Антипин А.С.** Управляемые проксимальные дифференциальные системы для решения седловых задач // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 11. С. 1846–1861.
11. **Антипин А.С.** Равновесное программирование: проксимальные методы // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1997. Т. 1, № 1. С. 150–151.
12. **Антипин А.С.** Экстрапроксимальный метод решения равновесных и игровых задач // Журн. вычисл. математки и мат. физики. 2005. Т. 45, № 11. С. 1969–1990.
13. **Антипин А.С.** Экстрапроксимальный метод решения равновесных и игровых задач со связанными переменными // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2005. Т. 45, № 12. С. 2102–2111.

Поступила 11.01.2008

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14 № 2 2008

УДК 519.653.4

# ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ ЗАДАЧИ И ДВОЙСТВЕННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ[1]

**Н. Н. Астафьев**

Для задач линейного программирования, матричных игр, чебышевских мер систем аффинных функций определяются противоположные задачи (тех же классов). Предлагается их совместный анализ с использованием аппарата двойственности.

## Введение

Для задач математического программирования ключевую роль в аналитическом и вычислительном исследовании играет аппарат двойственности. Источником разработки этого аппарата можно считать линейное программирование (ЛП), матричные игры и основополагающие результаты из теории линейных неравенств: леммы Гордана и Фаркаша (см., напр., [1–3]). Исчерпывающее развитие аппарат двойственности получил в работах И. И. Еремина (см. [1]). Этот аппарат удачно моделирует категорию двойственности (единство инициально противоположных двух начал, например, в экономике: производство и цены). Ниже излагается попытка рассмотреть в рамках этого двуединства некие противоположные задачи для этих отдельно взятых начал в рамках ЛП.

## 1. Противоположные задачи в матричных играх

Пусть $X$ и $Y$ — единичные симплексы из $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно (игроки $X$ и $Y$); $A = (a_{ij})_{m\times n}$ — матрица выигрышей для игрока $X$ (проигрышей для $Y$). Задача

$$v = \max_X \min_Y \sum_{i,j}^{m,n} a_{ij}x_iy_j$$

— задача гарантированного выигрыша для $X$ (никакого риска). Задача

$$v^* = \min_Y \max_X \sum_{i,j}^{m,n} a_{ij}x_iy_j$$

задает гарантированный среди возможных проигрыш для $Y$.

Рассмотрим противоположную ситуацию: $A$ — матрица выигрышей для $Y$ и проигрышей для $X$. Аналогичные постановки приводят к задачам:

$$w = \min_X \max_Y \sum_{i,j}^{m,n} a_{ij}x_iy_j \quad \text{для} \quad X; \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 07-01-00399) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-2081.2008.1).

$$w^* = \max_Y \min_X \sum_{i,j}^{m,n} a_{ij} x_i y_j \quad \text{для} \quad Y. \tag{2}$$

Заметим, что на задачу (1) в случае, когда матрица $A$ — выигрыши для $X$, можно смотреть как на “осторожный риск”, аналогично — на задачу (2). Отметим, что каждая пара $\{v; v^*\}$, $\{w; w^*\}$ связана двойственным переходом. Задачи определения значений $\{v; w\}$ назовем парой *противоположных* задач, т.е. полученных одна из другой заменой операций оптимизации на противоположные (аналогично для пары $\{v^*; w^*\}$).

Нетрудно привести примеры для случаев, когда $w > v$ или $w < v$ (аналогично, для пары $\{v^*; w^*\}$). Положим

$$f(y) = \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j, \qquad y \in \mathbb{R}^n; \qquad w^0 = \min\{f(y) \mid y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Справедливо

**Утверждение 1.** *Если* $w^0 = 0$, *то* $v^* \geq w^*$.

## 2. Постановка противоположных задач в линейном программировании

Как известно, задача ЛП

$$v^+ = \max\{(c, x) \mid Ax \leq b\} \tag{3}$$

в случае совместности ограничений сводится к задаче

$$v^+ = \max_x \min_{u \geq 0} \{\Phi(x, u) = (c, x) - (u, Ax - b)\}, \tag{4}$$

где $\Phi(x, u)$ — функция Лагранжа. Перейдя в задаче (4) к противоположной, т.е. сменив операции на противоположные, получим задачу $v^- = \min\limits_x \max\limits_{u \geq 0} \Phi(x, u)$ или задачу

$$v^- = \min\{(c, x) \mid Ax \geq b\} \tag{5}$$

в случае ее совместности. Отметим, что если в задаче (3) ввести ограничение $x \geq 0$ в операцию “$\max\limits_{x \geq 0}$”, то получим противоположную задачу (5) с условием $x \geq 0$. Для этого случая получаем следующие интерпретации:

(1) найти наибольшую выгоду $v^+$ от производства $x$ в рамках ресурсов $b$ — лучший вариант;

(2) найти минимальную выгоду $v^-$ от производства при использовании ресурсов не меньше, чем запас $b$ — худший вариант.

Двойственные задачи для них имеют вид соответственно:

$$(v^-)^* = \max\{(b, u) \mid uA = c,\ u \geq 0\}, \qquad (v^+)^* = \min\{(b, u) \mid uA = c,\ u \geq 0\}. \tag{6}$$

Интерпретация последних задач, например, для транспортной задачи может быть представлена в следующем виде: найти перевозки с максимальной и минимальной стоимостями и оценить этим реальные перевозки (для заказчика — задача на “min”, для исполнителя — на “max”).

Рассмотрим постановки понятия решения для пары противоположных транспортных задач, соответствующих форме (6). Выпишем многогранники решений задач на “max” и на “min” (в векторной форме): $\overline{X} = \mathrm{co}\,\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_s\}$ и $\underline{X} = \mathrm{co}\,\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$. Пары $\bar{x}_i, \underline{x}_j$ — вершины для $\overline{X}; \underline{X}$. В качестве общего решения можно взять решение задачи в игровой постановке на $\mathrm{co}\,\{\overline{X}; \underline{X}\}$, но такой подход имеет свой недостаток: решения не “полностью” учитывают все вершины. Рассмотрим матрицу $A = (a_{ij})$, составленную из колонок $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_s, \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$. Нетрудно убедиться в содержательности интерпретации матриц $AA^TA$ и $\widetilde{A} = (\tilde{a}_{ij} = (a_{\bullet i}, a_{\bullet j}) - (a_{\bullet i}, a_{\bullet i}))$, где $a_{\bullet i}$ и $a_{\bullet j}$ — $i$-я и $j$-я колонки матрицы $A$. В качестве совместного общего решения для пары противоположных задач (6) предлагается взять решение матричной игры для одной из приведенных матриц $AA^TA$, $\widetilde{A}$.

В силу теоремы двойственности приведем очевидное

**Утверждение 2.** *Для противоположных задач* (4) *и* (5) *при конечности их значений имеет место* $v^- \geq v^+$.

## 3. Противоположные постановки чебышевских мер для систем линейных неравенств

Для системы аффинных функций $\{(a_{i\bullet}, x) - b_i \ (i \in \overline{1,m})\}$ рассмотрим две симметрично-противоположные задачи:

$$v(b) = \min_x \max_i \{(a_{i\bullet}, x) - b_i\}$$

и

$$w(b) = \max_x \min_i \{(a_{i\bullet}, x) - b_i\}.$$

Здесь и ниже $b = (b_1, \ldots, b_m)$, $a_{i\bullet} = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$. Очевидно, что $v(b) = -w(-b)$ — свойство симметричности. Отметим, что при фиксированном $b$ функция $f^{\cup}(x) = \max\limits_i \{(a_{i\bullet}, x) - b_i\}$ — выпуклая кусочно-линейная, а функция $f^{\cap}(x) = \min\limits_i \{(a_{i\bullet}, x) - b_i\}$ — вогнутая кусочно-линейная. Выписанные задачи соответственно сводятся к двум противоположным задачам ЛП:

$$v(b) = \min\{t \mid (a_{i\bullet}, x) - b_i \leq t \ (i \in \overline{1,m})\}; \tag{7}$$

$$w(b) = \max\{t \mid (a_{i\bullet}, x) - b_i \geq t \ (i \in \overline{1,m})\}. \tag{8}$$

Задачу (7) для несовместной системы $Ax \leq b$ исследовал И. И. Еремин [1].

Выпишем для задач (7, 8) соответствующие им двойственные задачи:

$$v^*(b) = \max\{(-b, u) \mid (a_{\bullet j}, u) = 0, \ (e, u) = 1, \ u \geq 0 \ (i \in \overline{1,m})\},$$

$$w^*(b) = \min\{(-b, u) \mid (a_{\bullet j}, u) = 0, \ (e, u) = 1, \ u \geq 0 \ (i \in \overline{1,m})\};$$

здесь $a_{ij} = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})$. Заметим, что ограничения в этих двойственных задачах совпадают.

**Утверждение 3.** *Возможны только альтернативы*:

(a) $\forall\, b \in \mathbb{R}^n$ *значения* $v(b)$ *и* $w(b)$ *конечны и* $v(b) \geq w(b)$;

(b) $\forall\, b \in \mathbb{R}^n$ *имеют место соотношения* $v(b) = -\infty$ *и* $w(b) = +\infty$.

Отметим, что при альтернативе (a) можно включить в исходные задачи ограничения на $x$, при этом сохраняется выполнение этой альтернативы. Заметим также, что значение $v(b) > 0$ характеризует чебышевскую меру несовместности системы $Ax \leq b$, а значение $v(b) \leq 0$ — глубину ее совместности. Аналогичное заключение справедливо и для системы $Ax \geq b$ и значения $w(b)$.

## 4. Двойственная регуляризация функции Лагранжа для задачи линейного программирования и противоположные задачи

Как отмечалось выше, использование для задачи ЛП функции Лагранжа $\Phi(x, u)$ предполагает совместность системы $Ax \leq b$. Положим

$$U_k = \left\{u \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; (u, e^n) = k, \quad u_j \geq 0\right\} \qquad (k > 0, \ e^n = [1, \ldots, 1] \in \mathbb{R}^n)$$

и рассмотрим регуляризованную задачу:

$$\bar{v} = \min_{k} \max_{x} \min_{U_k} \Phi(x, u). \tag{9}$$

Нетрудно проверить, например, переходом к двойственной задаче (для внутренней задачи), что эта задача сводится к следующей:

$$\bar{v} = \min_{k>0} \max\{(c, x) + k\,t \mid Ax + te^m \le b\}, \tag{10}$$

где $e^m = (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^m$.

Для задачи (9) выпишем противоположную задачу:

$$\underline{v} = \max_{k>0} \min_{x} \max_{U_k} \Phi(x, u) = \max_{k>0} \min\{(c, x) + k\,t \mid Ax + te^m \ge b\}.$$

Сформулируем задачу ЛП и ей противоположную:

$$\max\{(c, x) \mid Ax \le e^m\} = \underline{k};$$

$$\min\{(c, x) \mid Ax \ge e^m\} = \bar{k}.$$

Обозначим через $f(k)$ значение внутренней задачи (на “max”) в задаче (10). Тогда $\bar{v} = \min\limits_{k>0} f(k)$. Обозначим

$$v = \max\{(c, x) \mid Ax \le b\}. \tag{11}$$

**Утверждение 4.** *Имеет место неравенство* $\bar{k} \ge \underline{k}$ *и значение* $f(k)$ *конечно для* $\underline{k} \le k \le \bar{k}$, *при этом, если* $-\infty < v < +\infty$, *то* $\bar{v} = v = f(k)$ *для* $k = \sum\limits_{i=1}^{n} \bar{u}_i$, *где* $(\bar{u}_1, \ldots \bar{u}_m)$ *— решение задачи, двойственной к* (11).

## 5. Противоположные задачи линейного программирования с параметрами

Рассмотрим задачу ЛП с несколькими целевыми функциями $c_{j\bullet}$ $(j \in \overline{1, s})$ и многовариантным вектором ресурсов $b_{\bullet j}$ $(j \in \overline{1, k})$, причем совместность по отдельно взятому варианту ресурсов не предполагается.

Рассмотрим задачу

$$L : v^+ = \max_{\alpha} \min_{\lambda} \max_{x} \Big\{ \Big( \sum_{j}^{s} \lambda_j c_{j\bullet},\, x \Big) \;\Big|\; Ax \le \sum_{j}^{k} b_{\bullet j} \alpha_j \Big\};$$

здесь и ниже $\lambda_j$,$\alpha_j$ — неотрицательные параметры, $\sum\limits_{j}^{k} \alpha_j = 1 = \sum\limits_{j}^{s} \lambda_j$. Нетрудно проверить, что задача $L$ сводится к задаче ЛП вида

$$v^+ = \max \Big\{ x_0 \;\Big|\; Ax \le \sum_{j}^{k} b_{\bullet j} \alpha_j,\ x_0 \le (c_{j\bullet}, x)\ (j \in \overline{1, s}) \Big\} \tag{12}$$

(для этого достаточно осуществить последовательные переходы к двойственным задачам). Выпишем для исходной задачи $L$ противоположную задачу (т.е. сменим операции на противоположные):

$$L^- : v^- = \min_{\alpha} \max_{\lambda} \min_{x} \Big\{ \Big( \sum_{j}^{s} \lambda_j c_{j\bullet},\, x \Big) \;\Big|\; Ax \ge \sum_{j}^{k} b_{\bullet j} \alpha_j \Big\}.$$

Эта задача сводится аналогичным образом к задаче ЛП, которая будет противоположной по отношению к задаче (12) (см. разд. 2).

## 6. Противоположные задачи для матриц (собственные числа)

Приведем утверждение из книги [5], иллюстрирующее постановку противоположных задач. *Пусть $A = (a_{ij})_{n\times n} \geq 0$ и матрица $A$ неразложима. Тогда справедливы соотношения*

$$\min_{x>0}\max_{i}\{(a_{i\bullet}, x)\,/\,x_i\} = \lambda^0 = \max_{x>0}\min_{i}\{(a_{i\bullet}, x)\,/\,x_i\},$$

*где $\lambda^0 > 0$ — собственное число Фробениуса, и решением противоположных задач справа и слева этого соотношения служит правый собственный вектор $x$.*

## 7. Двойственная регуляризация задачи линейного программирования в исходном пространстве

Выше приводилась процедура двойственной регуляризации задачи ЛП, записанной через ее функцию Лагранжа (см. разд. 4). Ниже аналогичная процедура приводится для задачи ЛП [6] вида:

$$L : \max\{(c, x) \mid Ax \leq b\},$$

здесь $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Выберем разностороннюю систему векторов $\{l_{\bullet j} \in \mathbb{R}^n,\ j \in \overline{1, n+1}\,\}$, т.е. $\operatorname{cone}\{l_{\bullet j},\ j \in \overline{1, n+1}\,\} = \mathbb{R}^n$. Рассмотрим задачу

$$L(t) : \max\{(c, x) \mid Ax \leq b,\ x \in t\operatorname{cone}\{l_{\bullet j},\ j \in \overline{1, n+1}\,\}\} = v(t).$$

Расписав условие $x \in t\operatorname{cone}\{l_{\bullet j},\ j \in \overline{1, n+1}\,\}$ через систему линейных неравенств, перейдем к двойственной задаче с параметром $t$

$$L^*(t) : \min\Big\{u_0 \;\Big|\; u_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i\,[(a_{i\bullet}, tl_{\bullet j}) - b_i] \geq (c, tl_{\bullet j}),\ u_i \geq 0\ (j \in \overline{1, n+1}\,;\ i \in \overline{1, m}\,)\Big\} = v^*(t).$$

Выписанное семейство задач $L^*(t)$ является устойчивым ($t \to +\infty$) по значению и решению двойственной задачи (в случае ее разрешимости) [6]:

$$L^* : \min\{(b, u) \mid A^T u = c^T,\ u \geq 0\}.$$

Отметим, что процедура двойственной регуляризации через функцию Лагранжа была изложена фактически для двойственной задачи (с переменной $u$).

## 8. Интерпретационный подход противоположных постановок для балансовой модели Леонтьева

Применим вышеизложенные подходы к балансовой модели Леонтьева “затраты-выпуск”:

$$(E - A)x = c, \qquad x \geq 0;$$

здесь $A = (a_{ij}) \geq 0$, $E$ — единичная матрица размерности $n \times n$, векторы $x$, $c$ — из пространства $\mathbb{R}^n_+$. Матрица в этой модели называется *продуктивной*, если для некоторого вектора (потребления) $c > 0$ найдется решение $x \geq 0$ — вектор производства ($a_{ij}$ — количество $i$-го продукта, затрачиваемое на производство единицы $j$-го продукта). Приведем интерпретацию известного факта из теории матриц [5] для этой модели (см. разд. 6; считаем, что $A > 0$).

Положим:

$h_i(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ — затраты $i$-го ресурса на вектор производства $x^T = (x_1, \ldots, x_n)$ $(i \in \overline{1,n})$;

$h_i(x)\,/\,x_i$ — удельные (относительные) затраты $i$-го продукта на вектор производства $x$;

$\max\limits_i\{h_i(x)\,/\,x_i\}$ — самый затратный продукт для вектора $x$;

$\min\limits_i\{h_i(x)\,/\,x_i\}$ — наименее затратный продукт для вектора $x$;

$\underline{h} = \min\limits_{x>0}\max\limits_i\{h_i(x)\,/\,x_i\}$ — искомое производство $x$ с минимальным значением самого затратного продукта;

$\bar{h} = \max\limits_{x>0}\min\limits_i\{h_i(x)\,/\,x_i\}$ — искомое производство $x$ с максимальным значением наименее затратного продукта.

Получили две противоположные задачи, решение которых реализуется на $x^0 > 0$ — правом собственном векторе Фробениуса ($Ax^0 = \lambda^0 x^0$, $0 < \lambda^0 < 1$). Итак, $\underline{h} = \lambda^0 = \bar{h} = h_i(x^0)\,/\,x_i^0$, $i \in \overline{1,n}$.

Предложим еще одну интерпретацию. Положим $k_i = 1\,/\,x_i^0$, $i \in \overline{1,n}$ и $K$ — диагональная матрица с элементами $k_i > 0$. Пусть $A(K) = (\tilde{a}_{ij}) = KAK^{-1}$; $e = (e_1, \ldots, e_n)$ — система единиц измерения для $A = (a_{ij})$. Пусть $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ — новая система единиц измерения (той же продукции) и $e_i = k_i e'_i$.

Тогда $\tilde{a}_{ij} = a_{ij}k_i\,/\,k_j$, т.е. $A(K)$ — матрица удельных затрат в системе единиц $e'$. Таким образом для продуктивной матрицы $A$ существуют такие единицы измерения с переходными коэффициентами $1\,/\,x_i^0$, в которых все суммы по строкам удельных затрат одинаковы и равны $\lambda^0 < 1$, причем совпадение сумм по всем строкам возможно только в этих единицах. Аналогичные противоположные задачи можно рассмотреть по колонкам, при этом интерпретация идет по ценам и в терминах левого собственного вектора.

Дальнейшее применение к балансовой модели свяжем с рассмотрением противоположных систем: 1) $(E - A)x \leq 0$ и 2) $(E - A)x \geq 0$ ($A$ продуктивна). По лемме Фаркаша конус неравенств-следствий для системы 1 задается выражением $C = \{y = (E - A^T)u,\ u \geq 0\}$. Очевидно, конус решений системы 2 задается формулой $K^{\geq} = \{y = (E - A)^{-1}x,\ x \geq 0\}$.

**Утверждение 5.** *Для продуктивной матрицы $A$ справедливо $K^{\leq} \subset C$.*

Действительно, это следует из того, что в данном случае $(E - A)^{-1} \geq 0$, т.е. $K^{\leq} \subset \mathbb{R}^n_+$, а система $(E - A^T)u = y$, $u \geq 0$ разрешима для $\forall\, y \in \mathbb{R}^n$ ($\forall\, k$, $A^T$ продуктивна).

Рассмотрим далее систему: $(E - A^T)u = (E - A)^{-1}x$, $u \geq 0$, $x \geq 0$. Эта система по $u$ и $x$ разрешима для любого $x \geq 0$. Отсюда следует, что система $(E - A)(E - A^T)u = x$, $u \geq 0$ разрешима для любого $x \geq 0$. Положим $\bar{A} = A + A^T - AA^T$ — симметричная матрица. На основе отмеченного справедливо

**Утверждение 6** (аналог продуктивности для $\bar{\boldsymbol{A}}$). *Если $A$ продуктивна, то*

(1) $\forall\, x \geq 0$ *совместна система* $(E - \bar{A})y = x$, $y \geq 0$;

(2) $\exists\,(E\bar{A})^{-1} = B^T B > 0$;

(3) *если* $\bar{A} \geq 0$, *то* $\bar{A}$ *продуктивна*;

(4) $E - \bar{A}$ *положительно определена.*

Положим $\bar{B} = E + AA^T$, $\tilde{A} = A + A^T$ — симметричные матрицы. Будем считать, что $\bar{B}$ — матрица производства, $\tilde{A}$ — матрица затрат.

Для них, очевидно, справедливо

**Утверждение 7.** *Если $A$ продуктивна, то модель Неймана $\bar{B}x - \tilde{A}x \geq c$, $x \geq 0$ продуктивна, т.е. разрешима для $\forall\, c \geq 0$.*

З а м е ч а н и е. Пусть $A$ — квадратная обратимая матрица. Тогда

(a) система $A^T x - A^{-1} y = 0$, $x \geq 0$, $y > 0$ совместна;

(b) система $AA^T x = y$, $x \geq 0$, $y > 0$ совместна;

(c) конус неравенств-следствий системы $Ax \leq 0$ пересекается с конусом решений противоположной системы $Ax \geq 0$ по ненулевому вектору.

Это замечание легко следует из леммы Гордана [3, 6], при этом пункт (c) характеризует "обусловленность" систем неравенств.

Приведем еще один пример симметризации в модели Леонтьева. Отметим, что операции $AA^T$ и $A + A^T$ предметно не интерпретируются и не сохраняют свойство продуктивности. Положим $\tilde{a}_{ij} = a_{ij} a_{ji}$ — относительный показатель затрат $i$-го продукта на единицу $i$-го продукта опосредованно через $j$, $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) = A \circ A^T$, где знак "$\circ$" — адамарово произведение матриц. Отметим, что $\tilde{A}$ инвариантна относительно единиц измерения.

**Утверждение 8.** *Если $A$ продуктивна, то $\tilde{A}$ продуктивна и $(E - \tilde{A})$ положительно определена.*

Действительно, нетрудно проверить, что сумма элементов в $i$-й строке матрицы $\tilde{A}$ равна $i$-му диагональному элементу матрицы $A^2$, причем все они строго меньше единицы: $(E - \tilde{A})$ симметрична и все ее главные миноры положительны, следовательно, $\tilde{A}$ положительно определена. Отметим, что $A \circ A^T$ может быть получена в терминах классического умножения матриц.

З а м е ч а н и е о двойственных и противоположных задачах линейного программирования. Пусть в задаче ЛП

$$\max\{(c, x) \mid Ax \leq b\}$$

ранг матрицы $A$ равен $n$. Рассмотрим для этой задачи все подзадачи размерности $n$, для которых их значения совпадают со значениями задач, им противоположных. Тогда минимальное из этих значений в случае разрешимости исходной задачи совпадает со значением исходной задачи. Это минимальное значение может быть использовано для корректировки исходной задачи в случае ее несобственности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Еремин И.И.** Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: Изд-во "Екатеринбург", 1999.
2. Линейные неравенства и смежные вопросы / под ред. Г. Куна, А. Таккера. М.: ИЛ, 1959.
3. **Черников С.Н.** Линейные неравенства. М.: Наука, 1968.
4. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
5. **Хорн Р.** Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
6. **Астафьев Н.Н.** Линейные неравенства и выпуклость. М.: Наука, 1982.


Поступила 25.03.2008

Том 14 № 2 2008

УДК 519.8

# АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНЫЙ АЛГОРИТМ ОТЫСКАНИЯ ОДНОГО И ДВУХ РЕБЕРНО НЕПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ МАРШРУТОВ КОММИВОЯЖЕРА МАКСИМАЛЬНОГО ВЕСА В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

**Э. Х. Гимади**

В статье представлен приближенный полиномиальный алгоритм $\mathcal{A}$ для решения задачи отыскания одного и двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов (маршрутов коммивояжера) максимального веса в полном взвешенном неориентированном графе в многомерном евклидовом пространстве. Приводится обоснование асимптотической точности алгоритма.

## Введение

Как известно, задача коммивояжера на максимум в $k$-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$ является $NP$-трудной при $k > 2$ [5]. Более двадцати лет тому назад для ее решения А.И. Сердюковым [1] был представлен приближенный алгоритм (далее будем его называть алгоритмом $\mathcal{A}C$), гарантирующий получение асимптотически точного решения за время $O(n^3)$, где $n$ — число заданных точек в $\mathbb{R}^k$. Более простая версия этого алгоритма изложена в [2]. В работе [3] была предложена другая схема алгоритма, которая на определенных подклассах евклидовой задачи коммивояжера на максимум дает лучшие оценки асимптотической точности приближенного решения. С более полной информацией по задачам коммивояжера на максимум можно ознакомиться в [4].

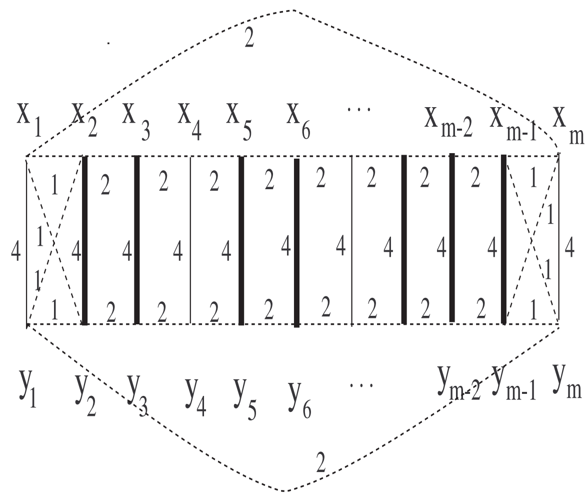
В настоящей статье представлен приближенный полиномиальный алгоритм $\mathcal{A}$ для решения задачи отыскания как одного, так и двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов (маршрутов коммивояжера) максимального веса в полном взвешенном неориентированном графе в многомерном евклидовом пространстве.

При построении алгоритма $\mathcal{A}$ мы будем существенно опираться на идеи алгоритма $\mathcal{A}C$. Отправной точкой в $\mathcal{A}C$ является построение максимального взвешенного паросочетания $\mathcal{M}^*$ в $\mathbb{R}^k$, которое представляется в виде совокупности $\{I_1, \ldots, I_\mu\}$ прямолинейных интервалов (отрезков), $\mu = \lfloor n/2 \rfloor$. После упорядочения интервалов по убыванию весов последние $t$ интервалов объявляются легкими, остальные — тяжелыми (число $t$ выбирается специальным образом). Путем дублирования ребер $\mathcal{M}^*$ получается максимальное взвешенное цикловое накрытие $S$ заданных в $\mathbb{R}^k$ точек (вершин неориентированного графа) двухвершинными циклами. Накрытие $S$ состоит из подмножества $S_1$ двухвершинных тяжелых циклов и подмножества $S_2$ двухвершинных легких циклов.

Далее $S_1$ за $\mu - 2t - 1$ шагов модифицируется в $\widetilde{S}_1$ методом склеивания циклов. На каждом шаге в текущем (модифицированном) множестве $\widetilde{S}_1$ (в начале $\widetilde{S}_1 = S_1$) выбирается такая система из $t$ интервалов, что в каждом цикле содержится не более одного такого интервала. В выбранной системе ищется пара интервалов с наименьшим углом между ними. Затем циклы, содержащие эти интервалы, склеиваются в один. По окончанию $\mu - 2t - 1$ шагов процедуры склейки получаем цикловое накрытие, включающее в себя множество $\widetilde{S}_1$ из $(t-1)$ модифицированных циклов и множество $S_2$, состоящее из легких 2-циклов. Далее полученное цикловое

[1]Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (проекты 08-01-00516 и 07-07-00022).

накрытие используется для построения мультиграфа $\overline{G}$ (см. рис. ниже), включающего в себя все ребра $I_j = (x_j, y_j)$, $j = 1, \ldots, \mu$, паросочетания $\mathcal{M}^*$ с кратностью 4 (тяжелые ребра изображены толстыми линиями, легкие — тонкими), а также дополнительные ребра (изображены пунктиром) с кратностью 2, за исключением 8 дополнительных ребер (кратности 1), смежных с легкими интервалами $I_1$ или $I_\mu$. Ребра мультиграфа $\overline{G}$ изображены вместе с кратностью их вхождения.




Мультиграф $\overline{G}$ покрывается четырьмя гамильтоновыми циклами $H_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ (по-разному в случае четного и нечетного $\mu$). В качестве приближенного решения выбирается гамильтонов обход с наибольшим весом среди $H_1, H_2, H_3, H_4$. При этом каждый из обходов включает в себя все ребра паросочетания $\mathcal{M}^*$.

Определяющий факт для доказательства асимптотической точности $\mathcal{AC}$ дается следующей леммой.

**Лемма 1** [1]. *Пусть в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$ с фиксированной размерностью $k$ задано произвольное множество из $t$ прямолинейных отрезков. Тогда наименьший угол между двумя отрезками из этого множества ограничен сверху константой $\alpha(k,t)$ такой, что $\alpha(k,t) \to 0$ при $t \to \infty$, при этом*

$$\sin^2 \frac{\alpha(k,t)}{2} \le \frac{\gamma_k}{t^{2/(k-1)}}, \tag{1}$$

*где константа $\gamma_k$ не зависит от числа отрезков.*

Ниже используется модификация более простой версии алгоритма решения задачи коммивояжера на максимум в многомерном евклидовом пространстве [2]. В отличие от $\mathcal{AC}$, в этой версии алгоритма сразу строится единственный гамильтонов обход, причем независимо от четности числа $\mu$. Заметим, что если в $\mathcal{AC}$ маршрут коммивояжера выбирается из четырех обходов, каждый из которых включает в себя все ребра максимального паросочетания $\mathcal{M}^*$, то в предлагаемом ниже алгоритме $\mathcal{A}$ строится гамильтонов цикл $H_1$ (он же решение задачи одного коммивояжера), не содержащий ни одного ребра максимального паросочетания.

Этот факт по существу используется для приближенного решения задачи отыскания в графе $G$ двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов максимального суммарного веса. После нахождения первого гамильтонова цикла $H_1$ алгоритмом $\mathcal{A}$ строится второй гамильтонов цикл $H_2$, реберно непересекающийся с первым. Показано, что алгоритм $\mathcal{A}$ дает асимптотически точные решения как задачи одного коммивояжера, так и задачи отыскания двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов максимального веса. Временная сложность алгоритма $\mathcal{A}$ определяется трудоемкостью отыскания максимального паросочетания $\mathcal{M}^*$ (напр., посредством алгоритма Габова [6]) и равна $O(n^3)$.

## 1. Описание алгоритма $\mathcal{A}$

Дан полный неориентированный $n$-вершинный граф $G = (V, E)$ с весами ребер — расстояниями между вершинами в $k$-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$. Вес ребра $e = (u, v) \in E$ обозначим через $w(u, v)$, вес подмножества ребер $\widetilde{E} \subset E$ — через $W(\widetilde{E})$. Целью $\mathcal{A}$ является отыскание подмножества ребер $\widetilde{E} \subset E$, состоящего из двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов $H_1$ и $H_2$. В начале алгоритма $\widetilde{E} = \varnothing$.

Обозначим через $\mathcal{M}^* = \{I_1, \ldots, I_\mu\}$ совокупность интервалов (ребер) максимального взвешенного паросочетания в $G$; $\mu = \lfloor n/2 \rfloor$; вес интервала $I_j$ обозначим через $w(I_j)$.

Пусть в $\mathcal{M}^*$ выделено $t \leq \mu/2$ самых легких по весу интервалов, остальные интервалы — тяжелые. Подмножество тяжелых интервалов обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}^*} \subset \mathcal{M}^*$. Очевидно, что суммарный вес тяжелых интервалов удовлетворяет неравенству

$$W(\widetilde{\mathcal{M}^*}) \geq W(\mathcal{M}^*)\Big(1 - \frac{t}{\mu}\Big). \tag{2}$$

Два интервала (ребра) называем *смежными* (относительно текущего множества $\widetilde{E}$), если имеется ребро $e \in \widetilde{E}$, связывающее концевые вершины этих интервалов. Последовательность тяжелых интервалов, в которой каждые два соседних интервала смежны, назовем *интервальной цепью* (далее $I$-цепью). Один из крайних интервалов такой цепи объявляем *ведущим*, другой — *ведомым.* Две $I$-цепи называем *смежными* (относительно текущего множества $\widetilde{E}$), если смежна пара их крайних интервалов. Будем называть *$\alpha$-цепью* такую $I$-цепь из тяжелых интервалов, что угол между любыми двумя соседними интервалами в этой цепи не превышает числа $\alpha$.

Опишем приближенный алгоритм $\mathcal{A}$ при фиксированном параметре $t \leq n/4$.

В описании алгоритма $\mathcal{A}$ участвуют следующие две процедуры:

$\mathcal{PM}(\widetilde{E})$ — для представления совокупности $\widetilde{\mathcal{M}^*}$ тяжелых интервалов в виде последовательности из $t$ $I$-цепей;

$\mathcal{PH}(\widetilde{E}, \mathcal{S})$ — для построения очередного гамильтонова цикла.

*АЛГОРИТМ $\mathcal{A}$*

*Начало работы алгоритма $\mathcal{A}$.*

**Этап 1.** *Построение максимального паросочетания $\mathcal{M}^*$ и его разбиение на множества легких и тяжелых интервалов.*

**Шаг 1.1.** Отыскивается паросочетание $\mathcal{M}^* = \{I_1, \ldots, I_\mu\}$ максимального веса.

**Шаг 1.2.** В $\mathcal{M}^*$ выделяется $t$ легких интервалов и оставшиеся $(\mu - t)$ тяжелых.

**Этап 2.** *Построение первого гамильтонова цикла $H_1$.*

**Шаг 2.1.** Посредством процедуры $\mathcal{PM}(\varnothing)$ подмножество $\widetilde{\mathcal{M}^*} \subset \mathcal{M}^*$ тяжелых интервалов представляется в виде циклической последовательности $\{C_1, \ldots, C_t\}$ из $t$ $I$-цепей.

**Шаг 2.2.** Легкие интервалы произвольно расставляются по одному между каждой последовательной парой $I$-цепей. В результате имеем последовательность $\mathcal{S}_1$ из несмежных чередующихся $I$-цепей и легких интервалов:

$$\mathcal{S}_1 = \{C_1, I_{\nu_1}, C_2, I_{\nu_2}, \ldots, C_t, I_{\nu_t}\}.$$

**Шаг 2.3.** Согласно процедуре $\mathcal{PH}(\varnothing, \mathcal{S}_1)$ строится первый гамильтонов цикл $H_1$.

**Этап 3.** *Построение второго гамильтонова цикла $H_2$, реберно непересекающегося с $H_1$.*

**Шаг 3.1.** Посредством процедуры $\mathcal{PM}(H_1)$ подмножество $\widetilde{\mathcal{M}^*} \subset \mathcal{M}^*$ тяжелых интервалов представляется в виде новой циклической последовательности $I$-цепей $\{C_1, \ldots, C_t\}$, где $C_i = (I_{\nu_{i-1}+1}, \ldots, I_{\nu_i - 1})$, $i = 1, 2, \ldots, t$.

**Шаг 3.2.** Легкие интервалы вставляются между каждой последовательной парой построенных $I$-цепей (по одному легкому интервалу, не смежному ближайшим крайним интервалам цепей, между которыми этот легкий интервал вставляется).

Последовательно выполняем действия в пунктах (a), (b) и (c).

(a) Строим двудольный граф $\grave{G} = (\grave{V}, \grave{U}; \grave{E})$ с равными долями $|\grave{V}| = |\grave{U}| = t$. Здесь $\grave{V} = \{\grave{v}_i \mid i = 1, \ldots, t\}$, где вершина $\grave{v}_i$ состоит из пары крайних интервалов $I_{\nu_i - 1} \in C_i$ и $I_{\nu_i + 1} \in C_{i+1}$ (напомним, что $\nu_t = \mu$, $I_{t+1} = I_1$, $C_{\mu+1} = C_1$); $\grave{U} = \{\grave{u}_j \mid j = 1, \ldots, t\}$ — множество вершин, соответствующих легким интервалам в $\mathcal{M}^*$; $\grave{E}$ — подмножество ребер $\{(\grave{v}_i, \grave{u}_j) \in \grave{V} \times \grave{U}\}$ таких, что легкий интервал, соответствующий вершине $\grave{u}_j$, не смежен (относительно множества ребер $H_1$) ни с одним из тяжелых интервалов $I_{\nu_i - 1}$ и $I_{\nu_i + 1}$, входящих в вершину $\grave{v}_i$.

(b) В графе $\grave{G}$ находим максимальное (по числу ребер) паросочетание $\grave{\mathcal{M}}$.

(c) Легкие интервалы расставляются по одному между каждой последовательной парой $I$-цепей согласно паросочетанию $\grave{\mathcal{M}}$. В результате имеем последовательность $\mathcal{S}_2$ из несмежных чередующихся $I$-цепей и легких интервалов:

$$\mathcal{S}_2 = \{C_1, I_{\nu_1}, C_2, I_{\nu_2}, \ldots, C_t, I_{\nu_t}\}.$$

**Шаг 3.3.** Посредством процедуры $\mathcal{PH}(\mathcal{H}_1, \mathcal{S}_2)$ строится второй гамильтонов цикл $H_2$, реберно не пересекающийся с $H_1$.

*Конец работы алгоритма $\mathcal{A}$.*

На выходе алгоритма получены два реберно непересекающиеся гамильтонова цикла $H_1$ и $H_2$.

*ПРОЦЕДУРА $\mathcal{PM}(\widetilde{E})$*

*Начало процедуры $\mathcal{PM}(\widetilde{E})$.*

В начале процедуры каждый из $(\mu - t)$ тяжелых интервалов множества $\widetilde{\mathcal{M}^*}$ представляет из себя одноэлементную $I$-цепь.

*Общий шаг процедуры.*

Находим пару несмежных (относительно множества $\widetilde{E}$) $I$-цепей с наименьшим углом между их ведущими интервалами.
Объединяем найденные цепи в одну $I$-цепь, назначив один из крайних интервалов объединенной цепи в качестве ведущего.

Общий шаг повторяем, пока не получим последовательность $\{C_1, \ldots, C_t\}$ из $t$ $I$-цепей, состоящих из тяжелых интервалов. Считаем последовательность циклической, т.е. после $I$-цепи $C_t$ следует $I$-цепь $C_1$.
Пусть тяжелые интервалы в $I$-цепях занумерованы так, что $C_i = \{I_{\nu_{i-1}+1}, \ldots, I_{\nu_i - 1}\}$, $1 \le i \le t$, где $\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_t$ — номера легких интервалов ($\nu_0 = 0,\ \nu_t = \mu$).

*Конец процедуры $\mathcal{PM}(\widetilde{E})$.*

*ПРОЦЕДУРА* $\mathcal{PH}(\widetilde{E}, \mathcal{S})$

*Начало процедуры* $\mathcal{PH}(\widetilde{E}, \mathcal{S})$.
(Сначала опишем процедуру $\mathcal{PH}(\widetilde{E}, \mathcal{S})$ в предположении четного $n$. В конце процедуры указывается ее модификация на случай нечетного $n$.)

Дана последовательность интервалов максимального паросочетания $\mathcal{M}^* = \{I_1, I_2, \ldots, I_\mu\}$ согласно их расположению в последовательности $\mathcal{S}$ чередующихся $I$-цепей и легких интервалов, где $I_j = (x_j, y_j),\ j = 1, \ldots, \mu$.
Строим в графе $G$ частичный тур $T$, состоящий из концевых вершин интервала $I_\mu = (x_\mu, y_\mu)$ и двух непересекающихся $(\mu - 1)$-вершинных цепей.

**Шаг 1** (начальный): полагаем $T = x_\mu \cup y_\mu;\ u_1 := x_1;\ v_1 := y_1;\ j = 2$.

**Шаг 2** (общий): $1 < j < \mu$.
Если
$$w(u_{j-1}, x_j) + w(v_{j-1}, y_j) \geq w(u_{j-1}, y_j) + w(v_{j-1}, x_j),$$
то полагаем $u_j = x_j;\ v_j = y_j$; иначе $u_j = y_j;\ v_j = x_j$. К множеству $T$ добавляем пару ребер
$$T = T \cup (u_{j-1}, u_j) \cup (v_{j-1}, v_j).$$

**Шаг 3.** Увеличиваем $j$ на 1. При $j < \mu$ идем на общий шаг, иначе идем на следующий шаг 4.

**Шаг 4.** Получен частичный тур, состоящий из концевых вершин легкого интервала $I_\mu = (x_\mu, y_\mu)$ и двух непересекающихся цепей $(u_1, u_2, \ldots, u_{\mu-1})$ и $(v_1, v_2, \ldots, v_{\mu-1})$
$$T = \{(u_1, u_2, \ldots, u_{\mu-1})\} \cup \{(v_1, v_2, \ldots, v_{\mu-1})\} \cup \{x_\mu\} \cup \{y_\mu\}.$$

Замыкаем полученный тур в $2\mu$-вершинный цикл без использования интервалов $I_1, I_{\mu-1}$ и $I_\mu$. Для этого к $T$ добавляем одну из следующих четырех пар двузвенных цепочек с наибольшим суммарным весом (обозначим его через $\Delta W$): 1) $(u_1, y_\mu, v_1)$, $(u_{\mu-1}, x_\mu, v_{\mu-1})$; 2) $(u_1, x_\mu, v_1)$, $(u_{\mu-1}, y_\mu, v_{\mu-1})$; 3) $(u_1, x_\mu, v_{\mu-1})$, $(v_1, y_\mu, u_{\mu-1})$; 4) $(u_1, y_\mu, v_{\mu-1})$, $(v_1, x_\mu, u_{\mu-1})$.

З а м е ч а н и е. В случае четного $n$ полученный цикл является гамильтоновым.

При нечетном $n$ имеется вершина $x_0$, не попавшая в $\mathcal{M}^*$. Гамильтонов цикл получим, заменив ребро $(x, y)$ в построенном $(n-1)$-вершинном цикле на пару ребер $(x_0, x)$ и $(x_0, y)$ таким образом, что ни одно из этих ребер не принадлежит множеству $\widetilde{E}$.

*Конец процедуры* $\mathcal{PH}(\widetilde{E}, \mathcal{S})$.

Описание алгоритма $\mathcal{A}$ закончено полностью.

## 2. Анализ алгоритма $\mathcal{A}$ и обоснование асимптотической точности

Из описания алгоритма $\mathcal{A}$ видно, что его временная сложность, равная $O(n^3)$, определяется трудоемкостью алгоритма нахождения в полном взвешенном графе паросочетания $\mathcal{M}^*$ максимального веса (см., напр., [6]).

В отличие от алгоритма $\mathcal{AC}$ гамильтонов цикл $H_1$, построенный алгоритмом $\mathcal{A}$, не содержит ни одного ребра максимального паросочетания $\mathcal{M}^*$, найденного в начале работы алгоритма. Это позволяет повторно использовать интервалы $\mathcal{M}^*$ при построении гамильтонова цикла $H_2$, реберно не пересекающегося с $H_1$. Заметим, что по построению второй гамильтонов цикл $H_2$ также не содержит ребер максимального паросочетания $\mathcal{M}^*$.

Перейдем к анализу точности алгоритма $\mathcal{A}$.

**Лемма 2.** *Суммарный вес*

$$\Delta W = \max \begin{cases} w(u_1, y_\mu) + w(y_\mu, v_1) + w(u_{\mu-1}, y_\mu) + w(y_\mu, v_{\mu-1}); \\ w(u_1, x_\mu) + w(x_\mu, v_1) + w(u_{\mu-1}, y_\mu) + w(y_\mu, v_{\mu-1}); \\ w(u_1, x_\mu) + w(x_\mu, v_{\mu-1}) + w(v_1, y_\mu) + w(y_\mu, u_{\mu-1}); \\ w(u_1, y_\mu) + w(y_\mu, v_{\mu-1}) + w(v_1, x_\mu) + w(x_\mu, u_{\mu-1}) \end{cases}$$

*ребер, дополняющих тур $T$ до $2\mu$-вершинного цикла, удовлетворяет неравенству*

$$\Delta W \geq w(I_1) + w(I_{\mu-1}). \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\Delta W \geq \frac{1}{4}\Big\{\Big(w(u_1, y_\mu) + w(y_\mu, v_1) + w(u_{\mu-1}, y_\mu) + w(y_\mu, v_{\mu-1})\Big)$$

$$+ \Big(w(u_1, x_\mu) + w(x_\mu, v_1) + w(u_{\mu-1}, y_\mu) + w(y_\mu, v_{\mu-1})\Big)$$

$$+ \Big(w(u_1, x_\mu) + w(x_\mu, v_{\mu-1}) + w(v_1, y_\mu) + w(y_\mu, u_{\mu-1})\Big)$$

$$+ \Big(w(u_1, y_\mu) + w(y_\mu, v_{\mu-1}) + w(v_1, x_\mu) + w(x_\mu, u_{\mu-1})\Big)\Big\}$$

$$= \frac{\Big(w(u_{\mu-1}, x_\mu) + w(x_\mu, v_{\mu-1})\Big) + \Big(w(u_{\mu-1}, y_\mu) + w(y_\mu, v_{\mu-1})\Big)}{2}$$

$$+ \frac{\Big(w(u_1, x_\mu) + w(x_\mu, v_1)\Big) + \Big(w(u_1, y_\mu) + w(y_\mu, v_1)\Big)}{2} \geq w(I_1) + w(I_{\mu-1}).$$

Лемма доказана.

**Лемма 3.** *Пусть даны два интервала $I = (x, y)$, $I' = (x', y')$ в $\mathbb{R}^k$ и $\alpha \leq \pi/2$ — угол между ними. Тогда для величины*

$$\Delta(I, I') = \max\big\{w(x, x') + w(y, y'); w(x, y') + w(y, x')\big\}$$

*— максимума суммы весов ребер, посредством которых эти два интервала могут быть склеены в 4-цикл, выполнено неравенство*

$$\Delta(I, I') \geq \max\Big\{w(I); w(I'); \Big(w(I) + w(I')\Big)\cos\frac{\alpha}{2}\Big\}. \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Путем параллельного переноса интервалов $I = (x, y)$ и $I' = (x', y')$ строим треугольник $ABC$ с углом $\angle B = (\pi - \alpha) \geq \pi/2$ между сторонами $AB$ и $BC$, где $|AB| = w(I)$, $|BC| = w(I')$.

Справедливы неравенства:

$$\Delta(I, I') \geq \frac{w(x, x') + w(y, y') + w(x, y') + w(y, x')}{2}$$

$$\geq \begin{cases} 0,5\Big(w(x, x') + w(y, x')\Big) + 0,5\Big(w(y, y') + w(x, y')\Big) \geq w(I); \\ 0,5\Big(w(x, x') + w(x, y')\Big) + 0,5\Big(w(y, y') + w(y, x')\Big) \geq w(I'). \end{cases}$$

С учетом очевидного неравенства $\Delta(I, I') \geq |AC|$ и теоремы косинусов имеем:

$$\Delta(I, I') \geq |AC| = \sqrt{w^2(I) + w^2(I') + 2\,w(I)\,w(I')\cos\alpha}$$

$$= \sqrt{\left(\Big(w(I) + w(I')\Big)\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\Big(w(I) - w(I')\Big)\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2} \geq \Big(w(I) + w(I')\Big)\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Лемма доказана.

**Лемма 4.** *Вес гамильтонова обхода $H_1$ удовлетворяет неравенству*

$$W(H_1) \geq 2W(\mathcal{M}^*)\left(1 - \frac{t}{\mu}\right)\cos\frac{\alpha(k,t)}{2},$$

*где угол $\alpha(k,t)$ определен соотношением* (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем вес гамильтонова обхода $H_1$ в виде $W(H_1) = W(E_1) + W(E_2)$, где $E_1$ — множество ребер обхода с концевыми вершинами, принадлежащими разным тяжелым интервалам паросочетания $\mathcal{M}^*$; $E_2$ — множество ребер обхода, имеющих общую вершину с легким интервалом. Обозначим угол между интервалами $I_j$ и $I_{j+1}$ через $\alpha_j$.

Заметим, что каждый раз при поиске в процедуре $\mathcal{PM}(\varnothing)$ пары $I$-цепей с наименьшим углом между их ведущими интервалами число этих интервалов не меньше $t$. Поэтому угол $\alpha_j$ между двумя тяжелыми интервалами $I_j$ и $I_{j+1}$ не превосходит величины $\alpha(k,t)$, определяемой соотношением (1), а сами $I$-цепи на выходе процедуры $\mathcal{PM}(\varnothing)$ являются $\alpha(k,t)$-цепями.

Оценим снизу веса $W(E_1)$ и $W(E_2)$ с учетом неравенств (3), (4) и $\cos\alpha_j \geq \cos\alpha(k,t)$, $j = 1, \ldots, \mu$:

$$W(E_1) = \Delta W + \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=\nu_{i-1}+1}^{\nu_i-2}\Delta(I_j, I_{j+1})$$

$$\geq w(I_1) + w(I_{\mu-1}) + \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=\nu_{i-1}+1}^{\nu_i-2}\Big(w(I_j) + w(I_{j+1})\Big)\cos\frac{\alpha_j}{2}$$

$$\geq w(I_1) + w(I_{\mu-1}) + \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=\nu_{i-1}+1}^{\nu_i-2}\Big(w(I_j) + w(I_{j+1})\Big)\cos\frac{\alpha(k,t)}{2}$$

$$\geq \left(2W(\widetilde{\mathcal{M}^*}) - \sum_{i=1}^{t}\Big(w(I_{\nu_i-1}) + w(I_{\nu_i+1})\Big)\right)\cos\frac{\alpha(k,t)}{2}\,;$$

$$W(E_2) = \sum_{i=1}^{t}\Delta(I_{\nu_i-1}, I_{\nu_i}) + \sum_{i=1}^{t}\Delta(I_{\nu_i}, I_{\nu_i+1})$$

$$\geq \sum_{i=1}^{t}\max\big\{w(I_{\nu_i-1}), w(I_{\nu_i})\big\} + \sum_{i=1}^{t}\max\big\{w(I_{\nu_i}), w(I_{\nu_i+1})\big\} \geq \sum_{i=1}^{t}\Big(w(I_{\nu_i-1}) + w(I_{\nu_i+1})\Big).$$

В последнем неравенстве учтено, что $I_{\nu_1}, \ldots, I_{\nu_\mu}$ — легкие интервалы.

Отсюда, суммируя $W(E_1)$ и $W(E_2)$ с учетом неравенства (2), для веса гамильтонова цикла $H_1$ имеем

$$W(H_1) \geq \left(2W(\widetilde{\mathcal{M}^*}) - \sum_{i=1}^{t}\Big(w(I_{\nu_i-1}) + w(I_{\nu_i+1})\Big)\right)\cos\frac{\alpha(k,t)}{2} + \sum_{i=1}^{t}\max\big\{w(I_{\nu_i}), w(I_{\nu_i+1})\big\}$$

$$\geq 2W(\widetilde{\mathcal{M}^*})\cos\frac{\alpha(k,t)}{2} \geq 2W(\mathcal{M}^*)\left(1 - \frac{t}{\mu}\right)\cos\frac{\alpha(k,t)}{2}\,.$$

Лемма доказана.

**Лемма 5.** *Пусть $H^*$ — длина гамильтонова цикла максимального веса в задаче одного коммивояжера с расстояниями в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$. Справедливо неравенство*

$$\frac{W(\mathcal{M}^*)}{W(H^*)} \geq \frac{\mu}{n}.$$

Доказательство. Если $n$ четно, то $n = 2\mu$, и утверждение следует из очевидного неравенства $2W(\mathcal{M}^*) \geq W(H^*)$.

Рассмотрим случай нечетного $n$. Пусть $H^* = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ — последовательность сцепленных ребер гамильтонова цикла, имеющего максимальный вес в графе $G$. Из ребер гамильтонова цикла $H^*$ сформируем $n$ максимальных (по числу ребер) паросочетаний

$$\mathcal{M}_i = \bigcup_{j=1}^{\mu} e_{1+(i+2j-3)\mathrm{mod}(n)}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Просуммируем веса $W(\mathcal{M}_i)$ паросочетаний, $i = 1, \ldots, n$. Каждое ребро цикла $H^*$ представлено в этой сумме $\mu$ раз. Поэтому справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{n} W(\mathcal{M}_i) = \mu W(H^*),$$

и с учетом неравенств $W(\mathcal{M}_i) \leq W(\mathcal{M}^*)$, $i = 1, \ldots, n$, получим

$$nW(\mathcal{M}^*) \geq \mu W(H^*).$$

Лемма доказана.

**Лемма 6.** *Для веса гамильтонова обхода $H_1$ справедлива оценка точности*

$$\frac{W(H_1)}{W(H^*)} \geq 1 - \frac{2t+1}{n} - \frac{\gamma_k}{t^{2/(k-1)}}.$$

Доказательство. С учетом лемм 4 и 5 имеем

$$\frac{W(H_1)}{W(H^*)} \geq \frac{2\mu}{n}\left(1 - \frac{t}{\mu}\right)\cos\frac{\alpha(k,t)}{2} = \frac{2(\mu - t)}{n}\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha(k,t)}{2}}$$
$$\geq \left(1 - \frac{2t+1}{n}\right)\left(1 - \sin^2\frac{\alpha(k,t)}{2}\right) \geq 1 - \frac{2t+1}{n} - \sin^2\frac{\alpha(k,t)}{2}.$$

Наконец, из леммы 1 следует

$$\frac{W(H_1)}{W(H^*)} \geq 1 - \frac{2t+1}{n} - \frac{\gamma_k}{t^{2/(k-1)}}.$$

Лемма доказана.

**Теорема 1.** *Алгоритм $\mathcal{A}$ при $t^* = \lceil n^{(k-1)/(k+1)} \rceil$ находит асимптотически точное решение задачи одного коммивояжера на максимум в графе $G$ с расстояниями между вершинами в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$.*

Доказательство. Подставив величину параметра $t^*$ в оценку точности алгоритма $\mathcal{A}$, получим

$$\frac{W(H_1)}{W(H^*)} \geq 1 - \frac{2t^*+1}{n} - \frac{\gamma_k}{(t^*)^{2/(k-1)}} \geq 1 - \frac{2n^{(k-1)/(k+1)}+3}{n} - \frac{\gamma_k}{n^{2/(k+1)}}$$
$$\geq 1 - \frac{(2+\gamma_k)}{n^{2/(k+1)}} - \frac{3}{n} \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теорема доказана.

**Лемма 7.** *Наименьший угол между ведущими интервалами в ходе работы процедуры $\mathcal{PM}(H_1)$ не превышает величины $\alpha(k, t/2)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При отыскании пары несмежных (относительно гамильтонова цикла $H_1$) $I$-цепей число цепей не меньше $t$. Поэтому число независимых (несмежных) ведущих интервалов не меньше, по крайней мере, величины $t/2$, откуда следует, что наименьший угол между ведущими интервалами в ходе работы процедуры не превышает величины $\alpha(k, t/2)$.

Лемма доказана.

Таким образом, $I$-цепи $\{C_1, \ldots, C_t\}$ на выходе процедуры $\mathcal{PM}(H_1)$ являются $\alpha(k, t/2)$-цепями.

**Лемма 8.** *Вес гамильтонова обхода $H_2$, построенного алгоритмом $\mathcal{A}$, удовлетворяет неравенству*

$$W(H_2) \geq 2W(\mathcal{M}^*)\left(1 - \frac{t}{\mu}\right)\cos\frac{\alpha(k, t/2)}{2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проводится аналогично утверждению леммы 4 для веса гамильтонова обхода $H_1$, но с отличием в оценке величины наименьшего угла между ведущими интервалами цепей согласно лемме 7.

Из неравенства $W(H_1^* \cup H_2^*) \leq 2W(H^*)$ и леммы 5 следует

**Лемма 9.** *Пусть $H_1^* \cup H_2^*$ — оптимальное решение задачи отыскания двух реберно не пересекающихся гамильтоновых циклов максимального суммарного веса на графе $G$ с расстояниями в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$. Справедливо неравенство*

$$\frac{W(H_1^* \cup H_2^*)}{W(\mathcal{M}^*)} \leq \frac{2n}{\mu}.$$

Из лемм 5 и 8 следует

**Лемма 10.** *Суммарный вес $W(H_1 \cup H_2)$ реберно непересекающихся гамильтоновых циклов, построенных алгоритмом $\mathcal{A}$, удовлетворяет неравенству*

$$W(H_1 \cup H_2) \geq 2W(\mathcal{M}^*)\left(1 - \frac{t}{\mu}\right)\left(\cos\frac{\alpha(k,t)}{2} + \cos\frac{\alpha(k, t/2)}{2}\right).$$

**Лемма 11.** *Алгоритм $\mathcal{A}$ решает задачу отыскания двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов максимального суммарного веса на графе $G$ с расстояниями в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$ с оценкой точности*

$$\frac{W(H_1 \cup H_2)}{W(H_1^* \cup H_2^*)} \geq \frac{\mu - t}{n}\left(2 - \sin^2\frac{\alpha(k,t)}{2} - \sin^2\frac{\alpha(k, t/2)}{2}\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из лемм 9 и 10 имеем

$$\frac{W(H_1 \cup H_2)}{W(H_1^* \cup H_2^*)} \geq \frac{\mu - t}{n}\left(\cos\frac{\alpha(k,t)}{2} + \cos\frac{\alpha(k, t/2)}{2}\right) \geq \frac{\mu - t}{n}\left(2 - \sin^2\frac{\alpha(k,t)}{2} - \sin^2\frac{\alpha(k, t/2)}{2}\right).$$

Лемма доказана.

**Теорема 2.** *Алгоритм $\mathcal{A}$ при $t^* = \lceil n^{(k-1)/(k+1)} \rceil$ находит асимптотически точное решение задачи двух реберно непересекающихся маршрутов на максимум в графе $G$ с расстояниями между вершинами в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставив величину параметра $t^*$ в оценку точности алгоритма $\mathcal{A}$, с учетом соотношения (1) получим

$$\frac{W(H_1 \cup H_2)}{W(H_1^* \cup H_2^*)} \geq \frac{\mu - t^*}{n}\left(2 - \sin^2\frac{\alpha(k,t^*)}{2} - \sin^2\frac{\alpha(k,t^*/2)}{2}\right)$$

$$\geq \left(1 - \frac{2t^*+1}{n}\right)\left(1 - \sin^2\frac{\alpha(k,t^*/2)}{2}\right) \geq 1 - \frac{2t^*+1}{n} - \sin^2\frac{\alpha(k,t^*/2)}{2}$$

$$\geq 1 - \frac{2n^{(k-1)/(k+1)}+3}{n} - \frac{\gamma_k 2^{\frac{2}{k-1}}}{n^{2/(k+1)}} \geq 1 - \frac{\beta_k}{n^{2/(k+1)}} \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

где константа $\beta_k$ зависит только от размерности $k$ пространства $\mathbb{R}^k$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В качестве направления дальнейших исследований было бы целесообразно получить аналогичные результаты, используя идеи построения алгоритма из работы [3], который на определенных подклассах евклидовой задачи коммивояжера дает лучшие оценки асимптотической точности приближенного решения. Кроме того, было бы интересно установить условия асимптотической точности решения для задачи отыскания более чем двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Сердюков А.И.** Асимптотически точный алгоритм для задачи коммивояжера на максимум в евклидовом пространстве // Методы целочисленной оптимизации (Управляемые системы). Новосибирск, 1987. Вып. 27. С. 79–87.
2. **Гимади Э.Х.** Новая версия асимптотически точного алгоритма решения евклидовой задачи коммивояжера // Методы оптимизации и их приложения: Тр. XII Байкальской междунар. конф. Иркутск, 2001. Т. 1. С. 117–124.
3. **Бабурин А.Е., Гимади Э.Х.** Об асимптотической точности одного алгоритма решения задачи коммивояжера на максимум в евклидовом пространстве // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. Новосибирск, 2002. Т. 9, № 4. С. 23–32.
4. **Barvinok A.A., Gimadi E.Kh., and Serdyukov A.I.** The maximum TSP // The traveling salesman problem and its variations / ed. by A. Punnen and G. Gutin. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. P. 585–608.
5. **Fekete S. P.** Simplicity and hardness of the maximum traveling salesman problem under geometric distances: Tech. Rep. 98.329. Köln: Center for Applied Computer Science, 2006.
6. **Gabow H. N.** An efficient reduction technique for degree-constrained subgraph and bidirected network flow problems // Proc. of the 15th annual ACM symposium on theory of computing. New York: ACM, 1983. P. 448–456.
7. **Baburin A.E., Gimadi E.Kh.** Certain generalization of the maximum traveling salesman problem // J. of Appl. and Industr. Mathematics. 2007. Vol. 1, no. 4. P. 418–423.


Поступила 18.02.08

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14 № 2 2008

УДК 519.854

# НАХОЖДЕНИЕ ПРОЕКЦИИ ЗАДАННОЙ ТОЧКИ НА МНОЖЕСТВО РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

**А. И. Голиков, Ю. Г. Евтушенко**

Рассматривается задача нахождения проекции точек на множество решений прямой и двойственной задач линейного программирования. Такая задача сводится к однократному решению задачи минимизации новой вспомогательной функции, начиная с некоторого порогового значения коэффициента штрафа. Получены оценки этого порогового значения. Приводятся результаты сравнения программной реализации предложенного метода с некоторыми известными коммерческими и исследовательскими пакетами решения задач линейного программирования.

## Введение

Большие задачи линейного программирования (ЛП), как правило, имеют не единственное решение. Различные методы решения задач ЛП (симплекс-метод, метод внутренних точек, метод квадратичной штрафной функции) дают возможность получать различные решения в случае неединственности (см., напр., [1, 2]). Так, симплекс-метод дает решение, которое принадлежит вершине многогранного множества. Методы внутренней точки сходятся к решению, в котором выполнено условие строгой дополняющей нежесткости. Метод внешней квадратичной функции дает возможность найти точное нормальное решение.

В данной работе используется метод решения задачи ЛП, близкий к методу квадратичной штрафной функции и модифицированной функции Лагранжа. Его применение к двойственной задаче дает возможность получить точную проекцию заданной точки на множество решений прямой задачи ЛП в результате однократной безусловной оптимизации вспомогательной кусочно-квадратичной функции при конечном значении коэффициента штрафа. Аналогично показано, как, применяя вспомогательную квадратичную функцию к прямой задаче, при конечном значении коэффициента штрафа, получить точную проекцию заданной точки на множество решений двойственной задачи ЛП. Применение обобщенного метода Ньютона для максимизации введенных вспомогательных функций дает возможность находить решения для задач ЛП с очень большим числом переменных (несколько миллионов) при умеренном числе ограничений (несколько тысяч). В работе предложен несколько не стандартный вид квадратичного (кусочно-квадратичного) штрафа для задач ЛП и приведены оценки порогового значения коэффициента штрафа, начиная с которого в результате однократной максимизации находится точная проекция заданной точки на множество решений задачи ЛП.

## 1. Постановка задач и вспомогательные результаты

Пусть задана прямая задача ЛП в стандартной форме

$$f_* = \min_{x \in X} c^\top x, \qquad X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0_n\}. \tag{$P$}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00619), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-5073.2008.1) и Программы фундаментальных исследований ОМН РАН № 3 (проект 3.14).

Двойственная к ней имеет вид

$$f_* = \max_{u \in U} b^\top u, \qquad U = \{u \in \mathbb{R}^m : A^\top u \le c\}. \tag{$D$}$$

Здесь $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ и $b \in \mathbb{R}^m$ заданы, $x$ — вектор прямых переменных, а $u$ — двойственных, через $0_i$ обозначен $i$-мерный нулевой вектор.

Предположим, что множество решений $X_*$ прямой задачи $(P)$ непусто, следовательно, множество решений $U_*$ двойственной задачи $(D)$ также непусто. Необходимые и достаточные условия оптимальности (условия Куна—Таккера) для задач $(P)$ и $(D)$ запишем в виде

$$Ax_* - b = 0_m, \qquad x_* \ge 0_n, \qquad D(x_*)v_* = 0_n, \tag{1}$$

$$v_* = c - A^\top u_* \ge 0_n. \tag{2}$$

Здесь в ограничения двойственной задачи $(D)$ введен неотрицательный вектор дополнительных переменных $v = c - A^\top u \ge 0_n$. Через $D(z)$ обозначается диагональная матрица, у которой $i$-й диагональный элемент есть $i$-я компонента вектора $z$.

Функция Лагранжа для задач $(P)$ и $(D)$ имеет вид

$$L(x, u) = c^\top x + u^\top (b - Ax).$$

Если $x_* \in X_*$, $u_* \in U_*$, то для любых $x \in \mathbb{R}^n_+$, $u \in \mathbb{R}^m$ справедливы неравенства

$$L(x_*, u) \le L(x_*, u_*) \le L(x, u_*).$$

Рассмотрим задачи нахождения проекции $\hat{x}_*$ заданной точки $\hat{x}$ на множество решений $X_*$ прямой задачи $(P)$ и проекции $\hat{u}_*$ заданной точки $\hat{u}$ на множество решений $U_*$ двойственной задачи $(D)$ соответственно

$$\frac{1}{2}\,\|\hat{x}_*\|^2 = \min_{x \in X_*} \frac{1}{2}\,\|x - \hat{x}\|^2, \qquad X_* = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ c^\top x = f_*,\ x \ge 0_n\}, \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}\,\|\hat{u}_*\|^2 = \min_{u \in U_*} \frac{1}{2}\,\|u - \hat{u}\|^2, \qquad U_* = \{u \in \mathbb{R}^m : A^\top u \le c,\ b^\top u = f_*\}. \tag{4}$$

Здесь и ниже используется евклидова норма векторов, $f_*$ — оптимальное значение целевой функции исходной задачи ЛП.

Для этих задач введем функции Лагранжа

$$L^1(x, p, \beta) = \frac{1}{2}\,\|x - \hat{x}\|^2 + p^\top (b - Ax) + \beta\,(c^\top x - f_*),$$

$$L^2(u, y, \alpha) = \frac{1}{2}\,\|u - \hat{u}\|^2 + y^\top (A^\top u - c) + \alpha\,(f_* - b^\top u).$$

Здесь $p \in \mathbb{R}^m$, $\beta \in \mathbb{R}^1$ и $y \in \mathbb{R}^n_+$, $\alpha \in \mathbb{R}^1$ — множители Лагранжа соответственно для задач (3) и (4).

Двойственные задачи к (3) и (4) имеют вид

$$\max_{p \in \mathbb{R}^m} \max_{\beta \in \mathbb{R}^1} \min_{x \in \mathbb{R}^n_+} L^1(x, p, \beta), \tag{5}$$

$$\max_{y \in \mathbb{R}^n_+} \max_{\alpha \in \mathbb{R}^1} \min_{u \in \mathbb{R}^m} L^2(u, y, \alpha). \tag{6}$$

Запишем условия Куна—Таккера для задачи (3)

$$x - \hat{x} - A^{\top} p + \beta\, c \geq 0_n, \qquad D(x)(x - \hat{x} - A^{\top} p + \beta\, c) = 0_n, \qquad x \geq 0_n, \tag{7}$$

$$Ax = b, \qquad c^{\top} x = f_*. \tag{8}$$

Условия Куна—Таккера для задачи (4) имеют вид

$$u - \hat{u} + Ay - \alpha\, b = 0_m, \tag{9}$$

$$A^{\top} u - c \leq 0_n, \qquad D(y)(A^{\top} u - c) = 0_n, \qquad y \geq 0_n, \qquad f_* - b^{\top} u = 0.$$

Легко проверить, что формулы (7) эквивалентны выражению

$$x = (\hat{x} - A^{\top} p - \beta\, c)_+, \tag{10}$$

где $a_+$ обозначает вектор $a$, у которого все отрицательные компоненты заменены на нули. Эта формула дает решение внутренней задачи минимизации в задаче (5). Из (9) получаем решение внутренней задачи минимизации в (6)

$$u = \hat{u} + \alpha\, b - Ay. \tag{11}$$

Подставляя (10) в функцию Лагранжа $L^1(x, p, \beta)$ и (11) в функцию Лагранжа $L^2(u, y, \alpha)$, получаем двойственные функции соответственно для задач (5) и (6)

$$\hat{L}^1(p, \beta) = b^{\top} p - \frac{1}{2}\, \|(\hat{x} + A^{\top} p - \beta\, c)_+\|^2 - \beta f_* + \frac{1}{2}\, \|\hat{x}\|^2,$$

$$\hat{L}^2(y, \alpha) = -c^{\top} y - \hat{u}^{\top}(\alpha\, b - Ay) - \frac{1}{2}\, \|\alpha\, b - Ay\|^2 + \alpha f_*.$$

Функция $\hat{L}^1(p, \beta)$ вогнута, кусочно-квадратична и непрерывно дифференцируема по своим переменным $p$ и $\beta$. Функция $\hat{L}^2(y, \alpha)$ вогнута, квадратична и дважды непрерывно дифференцируема по своим аргументам.

Двойственные задачи (5) и (6) соответственно сводятся к решению внешних задач максимизации

$$\max_{p \in \mathbb{R}^m} \max_{\beta \in \mathbb{R}^1} \hat{L}^1(p, \beta), \tag{12}$$

$$\max_{y \in \mathbb{R}^n_+} \max_{\alpha \in \mathbb{R}^1} \hat{L}^2(y, \alpha). \tag{13}$$

Решив задачу (12), найдем оптимальные $p$ и $\beta$. После их подстановки в (10) получаем решение $\hat{x}_*$ задачи (3), т.е. проекцию точки $\hat{x}$ на множество решений прямой задачи ЛП $(P)$. Необходимые и достаточные условия оптимальности для задачи (12) имеют вид

$$\hat{L}^1_p(p, \beta) = b - A(\hat{x} + A^{\top} p - \beta\, c)_+ = b - Ax = 0_m,$$

$$\hat{L}^1_\beta(p, \beta) = c^{\top}(\hat{x} + A^{\top} p - \beta\, c)_+ - f_* = c^{\top} x - f_* = 0,$$

где $x$ определен формулой (10). Эти условия выполнены тогда и только тогда, когда $x \in X_*$ и $x = \hat{x}_*$.

Решив задачу (13), найдем оптимальные $y$ и $\alpha$, после их подстановки в (11) получим решение $\hat{u}_*$ задачи (4), т.е. проекцию заданной точки $\hat{u}$ на множество решений двойственной задачи ЛП $(D)$. Приведем необходимые и достаточные условия оптимальности для задачи (13):

$$\hat{L}^2_y(y, \alpha) = -c + A^{\top}(\hat{u} + \alpha\, b - Ay) = -c + A^{\top} u \leq 0_n,$$

$$D(y)(-c + A^{\top}(\hat{u} + \alpha\, b - Ay)) = D(y)(-c + A^{\top} u) = 0_n, \qquad y \geq 0_n,$$

$$\hat{L}^2_\alpha(y, \alpha) = -b^{\top}(\hat{u} + \alpha\, b - Ay) + f_* = -b^{\top} u + f_* = 0.$$

Здесь вектор $u$ определен формулой (11). Эти условия оптимальности выполнены тогда и только тогда, когда $u \in U_*$ и $u = \hat{u}_*$.

К сожалению, задачи безусловной оптимизации (12) и (13) содержат неизвестную априори величину $f_*$ — оптимальное значение целевой функции задачи ЛП. Однако эти задачи можно упростить, избавившись от этого недостатка. Для этого вместо (12) предлагается решать следующую упрощенную задачу безусловной максимизации:

$$I_1 = \max_{p \in \mathbb{R}^m} S^1(p, \beta, \hat{x}), \tag{14}$$

где скаляр $\beta$ фиксирован, $\hat{x}$ — точка, проекцию которой на множество $X_*$ мы ищем, а функция $S^1(p, \beta, \hat{x})$ определена следующим образом:

$$S^1(p, \beta, \hat{x}) = b^\top p - \frac{1}{2}\,\|(\hat{x} + A^\top p - \beta\, c)_+\|^2.$$

Вместо (13) также будем решать следующую упрощенную задачу максимизации на положительном ортанте:

$$I_2 = \max_{y \in \mathbb{R}^n_+} S^2(y, \alpha, \hat{u}), \tag{15}$$

где скаляр $\alpha$ фиксирован, а функция $S^2(y, \alpha, \hat{u})$ определена следующим образом:

$$S^2(y, \alpha, \hat{u}) = -c^\top y + \hat{u}^\top A y - \frac{1}{2}\,\|\hat{u} + \alpha\, b - Ay\|^2.$$

Легко проверить, что задача (14) является двойственной к следующей задаче строго выпуклого программирования:

$$I_1' = \min_{x \in X} \left\{ \beta\, c^\top x + \frac{1}{2}\,\|x - \hat{x}\|^2 - \frac{1}{2}\,\|\hat{x}\|^2 \right\}, \qquad X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \ge 0_n\}. \tag{16}$$

Из необходимых и достаточных условий оптимальности для задачи (14)

$$S^1_p(p, \beta, \hat{x}) = b - A(\hat{x} + A^\top p - \beta\, c)_+ = 0_m \tag{17}$$

следуют необходимые и достаточные условия оптимальности для задачи (16). Действительно, перепишем (17) как

$$x = (\hat{x} + A^\top p - \beta\, c)_+, \qquad b - Ax = 0_m. \tag{18}$$

Условия (18) можно представить в виде

$$\beta c + x - \hat{x} - A^\top p \ge 0_n, \qquad D(x)(\beta\, c + x - \hat{x} - A^\top p) = 0, \qquad x \ge 0_n, \tag{19}$$

$$b - Ax = 0_m, \tag{20}$$

т.е. приходим к условиям Куна — Таккера для задачи (16). Верно и обратное утверждение, согласно которому из условий Куна — Таккера (19), (20) следуют необходимые и достаточные условия оптимальности (17) для задачи (14). Итак, при любом фиксированном $\beta$ решение $x(\beta)$ задачи квадратичного программирования (16) и решение $p(\beta)$ задачи безусловной максимизации (14) связаны между собой формулой

$$x(\beta) = (\hat{x} + A^\top p(\beta) - \beta c)_+. \tag{21}$$

Ниже будет показано, что если задача ЛП разрешима, то существует такое $\beta_*$, что при любом $\beta \ge \beta_*$ имеем $x(\beta) = \hat{x}_*$, т.е. из (21) получаем проекцию $\hat{x}_*$ точки $\hat{x}$ на множество решений $X_*$ прямой задачи ЛП $(P)$.

Аналогично задача максимизации на положительном ортанте (15) является двойственной к следующей задаче строго выпуклого программирования

$$I_2' = \min_{u \in U} \Big\{ -\alpha\, b^\top u + \frac{1}{2}\, \|u - \hat{u}\|^2 + \alpha\, \hat{u}^\top b \Big\}, \qquad U = \{u \in \mathbb{R}^m : A^\top u \le c\}. \tag{22}$$

Из необходимых и достаточных условий оптимальности для задачи (15)

$$-c + A^\top (\hat{u} + \alpha\, b - Ay) \le 0_n, \qquad D(y)(-c + A^\top(\hat{u} + \alpha\, b - Ay)) = 0, \qquad y \ge 0_n$$

следуют условия Куна — Таккера для задачи (22)

$$u - \hat{u} + Ay - \alpha\, b = 0_m,$$

$$A^\top u - c \le 0_n, \qquad D(y)(A^\top u - c) = 0_n, \qquad y \ge 0_n$$

и наоборот. При любом фиксированном $\alpha$ решение $u(\alpha)$ задачи квадратичного программирования (22) и решение $y(\alpha)$ задачи максимизации (15) связаны между собой соотношением

$$u(\alpha) = \hat{u} + \alpha\, b - Ay(\alpha). \tag{23}$$

Аналогично ниже будет показано, что если задача ЛП разрешима, то существует такое $\alpha_*$, что при любом $\alpha \ge \alpha_*$ имеем $u(\alpha) = \hat{u}_*$, т.е. по формуле (23) получаем проекцию $\hat{u}_*$ точки $\hat{u}$ на множество решений $U_*$ двойственной задачи ЛП $(D)$.

## 2. Проекция точки на множество решений прямой задачи ЛП

Сначала рассмотрим задачу (14) и ее связь с прямой задачей ЛП $(P)$. Заметим, что в отличие от задачи (3), двойственная к ней задача (12) имеет не единственное решение. Естественно возникает вопрос о нахождении среди всех решений задачи (12) минимального значения $\beta_*$ множителя Лагранжа $\beta$. Тогда в двойственной задаче (12), как будет показано в теореме 1, можно зафиксировать $\beta \ge \beta_*$ и решать задачу максимизации двойственной функции $\hat{L}^1(p, \beta)$ только по переменным $p$, т.е. решать задачу (14). При этом пара $[p, \beta]$ является решением задачи (12), тройка $[\hat{x}_*, p, \beta]$ — седловая точка задачи (3), в которой нормальное решение $\hat{x}_*$ задачи $(P)$ определяется по формуле (10).

Для нахождения минимального $\beta$ обратимся к условиям Куна — Таккера для задачи (3), которые для этой задачи являются необходимыми и достаточными условиями оптимальности. Без потери общности предположим, что первые $l$ компонент вектора $\hat{x}_*$ строго больше нуля. В соответствии с этим предположением представим векторы $\hat{x}_*$, $\hat{x}$, $c$ и матрицу $A$ в виде

$$\hat{x}_*^\top = [\hat{x}_*^{l\,\top}, \hat{x}_*^{d\,\top}], \qquad \hat{x}^\top = [\hat{x}^{l\,\top}, \hat{x}^{d\,\top}], \qquad c^\top = [c^{l\,\top}, c^{d\,\top}], \qquad A = [A_l \,|\, A_d], \tag{24}$$

где $\hat{x}_*^l > 0_l$, $\hat{x}_*^d = 0_d$, $d = n - l$.

В соответствии с разбиением (24) оптимальный вектор дополнительных переменных $v_*$ из условий Куна — Таккера (1), (2) для задач $(P)$ и $(D)$ представим в виде $v_*^\top = [v_*^{l\,\top}, v_*^{d\,\top}]$. Тогда согласно условию дополняющей нежесткости $x_*^\top v_* = 0$, $x_* \ge 0_n$, $v_* \ge 0_n$ выражение (2) запишется в виде

$$v_*^l = c^l - A_l^\top u_* = 0_l, \tag{25}$$

$$v_*^d = c^d - A_d^\top u_* \ge 0_d. \tag{26}$$

С использованием обозначений (24) необходимые и достаточные условия оптимальности (7), (8) для задачи (3) можно переписать в развернутом виде

$$\hat{x}_*^l = \hat{x}^l + A_l^\top p - \beta c^l > 0_l, \tag{27}$$

$$\hat{x}_*^d = 0_d, \qquad \hat{x}^d + A_d^\top p - \beta c^d \le 0_d, \tag{28}$$

$$A_l \hat{x}_*^l = b, \qquad c^{l\,\top} \hat{x}_*^l = f_*. \tag{29}$$

Среди решений системы (27)–(29) найдем такие множители Лагранжа $[p, \beta]$, что $\beta$ является минимальным, т.е. приходим к задаче линейного программирования

$$\beta_* = \inf_{\beta \in \mathbb{R}^1} \inf_{p \in \mathbb{R}^m} \{\beta : A_l^\top p - \beta\, c^l = \hat{x}_*^l - \hat{x}^l,\ A_d^\top p - \beta c^d \leq -\hat{x}^d\}. \tag{30}$$

Ограничения в этой задаче совместны, но целевая функция может быть не ограничена снизу. В этом случае будем полагать $\beta_* = \gamma$, где $\gamma$ — некоторое число.

Как будет доказано ниже в теореме 1, если система уравнений в (30) однозначно разрешима относительно $p$, то величина $\beta_*$ представима в виде

$$\beta_* = \begin{cases} \max\limits_{i \in \sigma} \dfrac{(\hat{x}^d + A_d^\top (A_l A_l^\top)^{-1} A_l (\hat{x}_*^l - \hat{x}^l))^i}{(v_*^d)^i}, & \text{если} \quad \sigma \neq \varnothing, \\ \gamma > -\infty, & \text{если} \quad \sigma = \varnothing. \end{cases} \tag{31}$$

Здесь введено индексное множество $\sigma = \{l + 1 \leq i \leq n : (v_*^d)^i > 0\}$ и $\gamma$ — произвольное число.

**Теорема 1.** *Пусть множество решений $X_*$ задачи $(P)$ непусто. Тогда при любом $\beta \geq \beta_*$, где $\beta_*$ задается формулой (30), пара $[p(\beta), \beta]$, где $p(\beta)$ — решение задачи безусловной максимизации (14) или, что то же самое, решение системы $A(\hat{x} + A^\top p - \beta c)_+ = b$, определяет проекцию $\hat{x}_*$ заданной точки $\hat{x}$ на множество решений $X_*$ прямой задачи $(P)$ по формуле*

$$\hat{x}_* = (\hat{x} + A^\top p(\beta) - \beta c)_+. \tag{32}$$

*Если дополнительно ранг матрицы $A_l$, соответствующий ненулевым компонентам вектора $\hat{x}_*$, равен $m$, то $\beta_*$ определяется по формуле (31), а точное решение двойственной задачи $(D)$ находится в результате решения задачи безусловной максимизации (14) по формуле*

$$u_* = \frac{1}{\beta}\,(p(\beta) - (A_l A_l^\top)^{-1} A_l (\hat{x}_* - \hat{x}^l)). \tag{33}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $X_* \neq \varnothing$ ограничения в задаче (30) совместны. Если целевая функция в задаче (30) ограничена, то найдем ее решение $(p(\beta_*), \beta_*)$, если не ограничена, то в качестве $(p(\beta_*), \beta_*)$ возьмем любую допустимую точку. Из условий (27)–(29) следует, что $p(\beta_*)$ есть решение задачи (14), пара $[p(\beta_*), \beta_*]$ является решением задачи (12), тройка $[\hat{x}_*, p(\beta_*), \beta_*]$ — седловая точка задачи (3), в которой проекция $\hat{x}_*$ заданной точки $\hat{x}$ на множество решений задачи $(P)$ определяется в соответствии с формулой (10):

$$\hat{x}_* = (\hat{x} + A^\top p(\beta_*) - \beta_* c)_+.$$

Покажем, что при любом $\beta$ больше найденного $\beta_*$ существует решение $p(\beta)$ задачи (14) и проекция $\hat{x}_*$ находится из формулы (32), т.е. что пара $[p(\beta_*) + \delta p, \beta_* + \delta\beta]$ при любом приращении $\delta\beta > 0$ удовлетворяет условиям (27), (28). Для этого достаточно показать, что совместна система

$$\delta\beta > 0, \qquad A_l^\top \delta p - \delta\beta c^l = 0_l, \qquad A_d^\top \delta p - \delta\beta c^d \leq 0_d. \tag{34}$$

Воспользуемся теоремой Моцкина об альтернативах для однородных линейных систем, которая утверждает, что всегда совместна либо система

$$Cx > 0_m, \qquad Dx \geq 0_m, \qquad Fx = 0_m, \tag{35}$$

либо система

$$C^\top z_1 + D^\top z_2 + F^\top z_3 = 0_n, \qquad z_1 \geq 0_m, \qquad \|z_1\| \neq 0, \qquad z_2 \geq 0_m.$$

Перепишем систему (34) в обозначениях системы (35), т.е. положим

$$C = [0_m^\top \mid 1], \qquad D = [-A_d^\top \mid c^d], \qquad F = [A_l^\top \mid c^l], \qquad x^\top = [\delta p^\top, \delta\beta].$$

Предположим, что система (34) несовместна, тогда совместна система

$$-A_d z_2 + A_l z_3 = 0_m,$$
$$z_1 + {c^d}^\top z_2 - {c^l}^\top z_3 = 0,$$
$$z_1 > 0, \qquad z_2 \geq 0_n.$$

Эту систему можно записать в виде

$$-A_d z_2 + A_l z_3 = 0_m, \tag{36}$$

$$-{c^d}^\top z_2 + {c^l}^\top z_3 > 0, \tag{37}$$

$$z_2 \geq 0_n. \tag{38}$$

Совместная система (36)–(38) в соответствии с теоремой об альтернативах неоднородных линейных систем имеет несовместную альтернативную систему

$$-A_d^\top u \geq -c^d \tag{39}$$

$$A_l^\top u = c^l. \tag{40}$$

Приходим к противоречию, так как система (39), (40) имеет решение $u_* \in U_*$ по предположению теоремы о разрешимости исходной задачи ЛП. Следовательно, при любом $\delta\beta > 0$ существует такое $\delta p$, что пара $[p(\beta_*)+\delta p, \beta_* + \delta\beta]$ является решением задачи (12), $[p(\beta_*)+\delta p]$ — решением задачи (14) при фиксированном параметре $\beta = \beta_* + \delta\beta$ и проекция $\hat{x}_*$ находится из (32).

Если выполнено предположение теоремы о том, что матрица $A_l$ имеет полный ранг $m$ и $l \geq m$, то в (27) линейная система уравнений относительно неизвестных $p$ совместна и единственное решение $p$ этой системы дается формулой

$$p(\beta) = (A_l A_l^\top)^{-1} A_l (\hat{x}_*^l - \hat{x}^l + \beta c^l). \tag{41}$$

Подставляя эту формулу в (28), получаем неравенство

$$q \leq \beta z, \tag{42}$$

где введены обозначения $q = \hat{x}^d + A_d^\top (A_l A_l^\top)^{-1} A_l (\hat{x}_*^l - \hat{x}^l)$ и $z = c^d - A_d^\top (A_l A_l^\top)^{-1} A_l c^l$.

Если $p$ определено согласно (41) и $\beta$ удовлетворяет неравенству (42), то пара $[p, \beta]$ является решением двойственной задачи (12). Легко найти минимальное значение $\beta$, при котором выполнено неравенство (42), т.е. получается аналитическое решение задачи (30).

Из (25) следует, что $u_* = (A_l A_l^\top)^{-1} A_l c^l$. Подставляя это выражение в (26), получаем $v_*^d = z \geq 0_d$. Естественно ввести индексное множество: $\sigma = \{l+1 \leq i \leq n : (v_*^d)^i > 0\}$. Если $\sigma = \varnothing$, то (42) выполнено при любом $\beta$. Неравенство (42) имеет место при любом $\beta \geq \beta_*$, где

$$\beta_* = \begin{cases} \max\limits_{i \in \sigma} \dfrac{q^i}{(v_*^d)^i}, & \text{если} \quad \sigma \neq \varnothing, \\ \gamma > -\infty, & \text{если} \quad \sigma = \varnothing, \end{cases}$$

и $\gamma$ — произвольное число. Итак, можно решать упрощенную задачу безусловной максимизации (14). Ее решение одновременно дает решение двойственной задачи (12). Далее, используя формулу (10), получаем проекцию $\hat{x}_*$ заданной точки $\hat{x}$ на множество решений $X_*$ задачи $(P)$.

Из (41) и (25) следует, что решение задачи $(D)$ выражается через решение $p(\beta)$ задачи (14) при $\beta \geq \beta_*$ по формуле (33).

Теорема доказана.

Теорема 1 позволяет заменить задачу (12), содержащую априори неизвестное число $f_*$, на задачу (14), в которой вместо этого числа фигурирует полуинтервал $[\beta_*, +\infty)$, что существенно проще с вычислительной точки зрения.

Отметим, что значение $\beta_*$, найденное из решения задачи линейного программирования (30) или формулы (31), может быть отрицательным. Это означает, что для прямой задачи $(P)$ проекция точки $\hat{x}$ на множество ее решений $X_*$ совпадает с проекцией этой точки на допустимое множество $X$.

Следующая теорема утверждает, что если известна какая-нибудь точка $x_* \in X_*$, то можно получить решение двойственной задачи $(D)$ после однократного решения задачи безусловной максимизации (14).

**Теорема 2.** *Пусть множество решений $X_*$ задачи ЛП $(P)$ непусто. Тогда для любых $\beta > 0$ и $\hat{x} = x_* \in X_*$ точное решение двойственной задачи $(D)$ находится по формуле $u_* = p(\beta)/\beta$, где $p(\beta)$ — решение задачи безусловной максимизации* (14).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если исходная задача ЛП разрешима, то при любом фиксированном $\beta$ разрешимы взаимно двойственные задачи (16) и (14). Пусть $p(\beta)$ — решение задачи (14) при $\hat{x} = x_* \in X_*$ и любом $\beta > 0$. Легко видеть, что тогда $x_*$ есть решение задачи (16). Действительно, два первых члена целевой функции задачи (16) принимают свое минимальное значение $\beta f_* + 0$ на допустимом множестве $X$. Тогда согласно формуле (21) решения задач безусловной максимизации (14) и квадратичного программирования (16) связаны между собой выражением $x_* = (x_* + A^\top p(\beta) - \beta c)_+$. Это выражение эквивалентно следующим условиям:

$$\beta c - A^\top p(\beta) \geq 0_n, \qquad x_* \geq 0_n, \qquad D(x_*)(\beta c - A^\top p(\beta)) = 0_n. \tag{43}$$

Обозначим $u_* = p(\beta)/\beta$. Тогда с учетом того, что $x_* \in X$, из (43) получим

$$c - A^\top u_* \geq 0_n, \qquad x_* \geq 0_n, \qquad D(x_*)(c - A^\top u_*) = 0, \qquad Ax_* = b.$$

Отсюда следует, что $[x_*, u_*]$ — точка Куна — Таккера для задачи ЛП и $u_* = p(\beta)/\beta$ есть решение двойственной задачи $(D)$.

Теорема доказана.

Для иллюстрации работы теорем 1 и 2 обратимся к методу внешнего квадратичного штрафа, примененному к двойственной задаче $(D)$, т.е. рассмотрим задачу

$$\max_{p \in \mathbb{R}^m} \Big\{ b^\top p - \frac{1}{2} \, \|(A^\top p - \beta c)_+\|^2 \Big\}. \tag{44}$$

Такой вид задачи для метода внешнего штрафа был введен в [3,4]. Оказывается, можно получить точное решение $u_*$ двойственной задачи $(D)$, не устремляя в (44) коэффициент штрафа $\beta$ к $+\infty$. Если в задаче (44) коэффициент штрафа $\beta \geq \beta_*$, то согласно теореме 1 по формуле (32), в которой $\hat{x} = 0_n$, находим нормальное решение $\tilde{x}_*$ прямой задачи $(P)$. Согласно теореме 2 далее следует решить задачу безусловной максимизации при любом $\beta > 0$:

$$\max_{p \in \mathbb{R}^m} \Big\{ b^\top p - \frac{1}{2} \, \|(\tilde{x}_* + \beta(A^\top p - \beta c))_+\|^2 \Big\}. \tag{45}$$

Используя ее решение $p(\beta)$, получаем решение $p(\beta)/\beta = u_* \in U_*$ двойственной задачи $(D)$. Отметим, что задача (45) не сложнее, чем задача (44). Таким образом, решая только две задачи безусловной максимизации, можно получить точное нормальное решение прямой и некоторое точное решение двойственной задач ЛП, если в задаче (44) взять коэффициент штрафа $\beta \geq \beta_*$, а в задаче (45) — любой положительный коэффициент $\beta$.

Для одновременного решения прямой и двойственной задач ЛП можно использовать следующий итерационный процесс [5]:

$$x_{k+1} = (x_k + A^\top p_{k+1} - \beta c)_+, \tag{46}$$

где произвольный параметр $\beta > 0$ фиксирован, а вектор $p_{k+1}$ определяется из решения следующей задачи безусловной максимизации:

$$p_{k+1} \in \arg\max_{p \in \mathbb{R}^m} \Big\{ b^\top p - \frac{1}{2} \|(x_k + A^\top p - \beta c)_+\|^2 \Big\}. \tag{47}$$

**Теорема 3.** *Пусть множество решений $X_*$ прямой задачи $(P)$ непусто. Тогда при любом $\beta > 0$ и при любой начальной точке $x_0$ итерационный процесс* (46), (47) *сходится к $x_* \in X_*$ за конечное число шагов $\omega$. Формула $u_* = p_{\omega+1}/\beta$ дает точное решение двойственной задачи $(D)$.*

Этот итерационный процесс является конечным и дает точное решение прямой задачи $(P)$ и точное решение двойственной задачи $(D)$. Отметим, что при использовании этого метода не требуется знать пороговое значение коэффициента штрафа. Но если выбранное значение коэффициента меньше порогового значения, то методом за конечное число шагов находится некоторое решение прямой задачи, а не проекция начальной точки на множество решений прямой задачи ЛП. Заметим, что $x_\omega = x_* \in X_*$ является проекцией точки $x_{\omega-1}$ на множество решений $X_*$ задачи $(P)$.

## 3. Проекция точки на множество решений двойственной задачи ЛП

Теперь рассмотрим задачу (15) и установим ее связь с двойственной задачей ЛП $(D)$. Задача (13), двойственная к (4), в отличие от последней имеет не единственное решение. Рассмотрим вопрос о нахождении среди всех решений двойственной задачи (13) минимального значения $\alpha_*$ множителя Лагранжа $\alpha$. Тогда, как будет показано ниже, в двойственной задаче (13) можно зафиксировать $\alpha \geq \alpha_*$ и решать задачу максимизации двойственной функции $\hat{L}^2(y, \alpha)$ только по переменным $y$, т.е. решать задачу (15). Обозначим это решение через $y(\alpha)$. Тогда пара $[y(\alpha), \alpha]$ является решением задачи (13), тройка $[\hat{u}_*, y(\alpha), \alpha]$ — седловая точка задачи (4) и проекция $\hat{u}_*$ заданной точки $\hat{u}$ на множество решений задачи $(D)$ находится в соответствии с (11).

Без ограничения общности будем считать, что матрица $A$ представима в блочном виде $A = [\ B \mid N\ ]$ в соответствии с разбиением вектора дополнительных переменных $v_* = c - A^\top \hat{u}_*$ ограничений двойственной задачи $(D)$, вычисленного в решении $\hat{u}_*$ задачи (4), на нулевые $v_*^B = c^B - B^\top \hat{u}_* = 0_k$ и положительные $v_*^N = c^N - N^\top \hat{u}_* > 0_r$ компоненты, где $r = n - k$. В соответствии с этим разбиением вектор $c$, решение $x_*$ прямой задачи $(P)$ и множитель Лагранжа $y$ представляются в виде

$$c^\top = [\ c^{B^\top}, c^{N^\top}], \qquad x_*^\top = [\ x_*^{B^\top}, x_*^{N^\top}], \qquad y = [\ y^{B^\top}, y^{N^\top}].$$

Учитывая это разбиение, условия Куна—Таккера (9) для задачи (4) перепишем в следующем более детализированном виде:

$$v_*^B = c^B - B^\top \hat{u}_* = 0_k, \qquad y^B \geq 0_k, \tag{48}$$

$$v_*^N = c^N - N^\top \hat{u}_* > 0_r, \qquad y^N = 0_r, \tag{49}$$

$$\hat{u}_* - \hat{u} - \alpha b + B y^B = 0_m, \tag{50}$$

$$b^\top \hat{u}_* = f_*. \tag{51}$$

Среди решений системы (48)–(51) найдем такие множители Лагранжа $[y,\alpha]$, что $\alpha$ является минимальным, т.е. эти множители Лагранжа являются решением следующей задачи линейного программирования:

$$\alpha_* = \inf_{\alpha\in\mathbb{R}^1} \inf_{y^B\in\mathbb{R}^k} \{\alpha : By^B - \alpha b = \hat{u} - \hat{u}_*,\ y^B \geq 0_k\}. \tag{52}$$

В этой задаче ограничения совместны, но целевая функция может быть не ограничена снизу. В этом случае будем полагать $\alpha_* = \gamma$, где $\gamma$ — некоторое число.

Ниже при некоторых дополнительных предположениях об исходной задаче ЛП в теореме 3 устанавливается формула для $\alpha_*$. При этом предполагается, что прямая задача ЛП $(P)$ имеет единственное, быть может, вырожденное решение $x_*$. В этом решении $x_*^L > 0_l$ — совокупность положительных компонент, $l \leq m$. В случае невырожденного решения $l = m$. Обозначим индексное множество, соответствующее положительным компонентам вектора $x_*$, через $I_*^L$. Если $x_*$ — вырожденное решение, то двойственная задача ЛП $(D)$ имеет не единственное решение, и в точке $[x_*, \hat{u}_*]$, где $\hat{u}_*$ — проекция $u_*$ на множество $U_*$, выполнены условия Куна—Таккера для задачи $(P)$, которые в подробной записи имеют вид:

$$\begin{aligned}
&v_*^L = c^L - B_L^\top \hat{u}_* = 0_l, \qquad x_*^L > 0_l;\\
&v_*^S = c^S - B_S^\top \hat{u}_* = 0_s, \qquad x_*^S = 0_s;\\
&v_*^N = c^N - N^\top \hat{u}_* > 0_r, \quad\ \ x_*^N = 0_r;\\
&B_L x_*^L = b.
\end{aligned}$$

Здесь матрица $B = [\ B_L \mid B_S\ ]$ представлена в соответствии с разбиением вектора $x_*^B$ на положительные $x_*^L > 0_l$ и нулевые $x_*^S = 0_s$ компоненты, $l + s = k \leq m$, $r = n - r$. В силу единственности решения $x_*$ матрица $B$ состоит из $k \leq m$ линейно независимых столбцов, т.е. ее ранг равен $k$.

Для дальнейшего потребуется вектор $\eta \in \mathbb{R}^k$, определенный следующим образом: $\eta = (B^\top B)^{-1}(c^B - B^\top \hat{u})$. Заметим, что если $k = m$, то вектор $\eta$ легко приводится к виду $\eta = B^{-1}(\hat{u}_* - \hat{u})$. Кроме того, определим следующую величину:

$$\alpha_* = \begin{cases} \max\limits_{i\in I_*^L} \dfrac{(\eta^L)^i}{(x_*^L)^i}, & \text{если} \quad I_*^L \neq \varnothing, \\ \gamma > -\infty, & \text{если} \quad I_*^L = \varnothing, \end{cases} \tag{53}$$

где $\gamma$ — произвольное число.

**Теорема 4.** *Пусть множество решений $U_*$ задачи $(D)$ непусто. Тогда при любом $\alpha \geq \alpha_*$, где $\alpha_*$ задается формулой (52), пара $[y(\alpha), \alpha]$, где $y(\alpha)$ — решение задачи максимизации на положительном ортанте (15), определяет проекцию $\hat{u}_*$ заданной точки $\hat{u}$ на множество решений $U_*$ двойственной задачи $(D)$ по формуле*

$$\hat{u}_* = \hat{u} + \alpha b - Ay(\alpha). \tag{54}$$

*Пусть дополнительно ранг матрицы $B$, соответствующий нулевым компонентам вектора дополнительных переменных $v_*^B = c^B - B^\top \hat{u}_* = 0_k$, вычисленных в нормальном решении $\hat{u}_*$, равен $k \leq m$. Тогда при любом $\alpha \geq \alpha_*$, где $\alpha_*$ определяется формулой (53), пара $[y(\alpha), \alpha]$, где $y(\alpha)$ — решение задачи (15) — имеет вид*

$$y(\alpha) = \begin{bmatrix} y^B \\ y^N \end{bmatrix}, \qquad y^B = \begin{bmatrix} y^L \\ y^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_*^L - \eta^L \\ -\eta^S \end{bmatrix} \geq 0_k, \qquad y^N = 0_r,$$

*определяет проекцию $\hat{u}_*$ точки $\hat{u}$ на множество решений двойственной задачи $(D)$ по формуле (54).*

Доказательство первого утверждения теоремы 4 совершенно аналогично доказательству первого утверждения теоремы 1, а потому здесь не приводится.

Докажем второе утверждение. Вектор $\hat{u}_*$ является единственным решением задачи (4), и существуют такие множители Лагранжа $y \in \mathbb{R}^n_+$, $\alpha \in \mathbb{R}^1$, что точка $[\ \hat{u}_*, y, \alpha\ ]$ удовлетворяет условиям Куна—Таккера для задачи (4):

$$\begin{gathered} D(y)v_* = 0_n, \qquad v_* = c - A^\top \hat{u}_* \geq 0_n, \qquad y \geq 0_n, \\ \hat{u}_* - \hat{u} - \alpha b + Ay = 0_m, \qquad b^\top \hat{u}_* = f_*. \end{gathered} \tag{55}$$

Множители Лагранжа $y$ и $\alpha$ не единственны и при дополнительном предположении теоремы можно найти минимальный множитель $\alpha_*$, при котором однозначно определяется множитель $y(\alpha_*)$, одновременно являющийся и решением задачи (15). Обратимся к более детальной записи (48)–(51) условий Куна—Таккера (55). Решая систему уравнений (48) и (50), получим

$$y^B = \alpha (B^\top B)^{-1} B^\top b - \eta \geq 0_k, \tag{56}$$

$$\hat{u}_* = \hat{u} + \alpha M b + B\eta.$$

Здесь $M = I - B(B^\top B)^{-1} B^\top$ — матрица проектирования и, так как вектор $b$ лежит в пространстве столбцов матрицы $B_L$, то $Mb = 0_m$. Так как матрица $B$ состоит из линейно независимых столбцов, то существует только один вектор $\eta = \begin{bmatrix} \eta^L \\ \eta^S \end{bmatrix}$ такой, что $\hat{u}_* - \hat{u} = B\eta = B_L\eta^L + B_S\eta^S$. Покажем, что $-\eta^S \geq 0_s$. Из условия $Bx^B_* = b$ следует

$$x^B_* = (B^\top B)^{-1} B^\top b = \begin{bmatrix} x^L_* \\ x^S_* \end{bmatrix} \begin{matrix} > 0_l, \\ = 0_s. \end{matrix} \tag{57}$$

В (56) множитель Лагранжа $\alpha$ должен быть таким, чтобы $y^B \geq 0_k$. С учетом (57) из (56) получаем

$$y^B = \begin{bmatrix} y^L \\ y^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x^L_* - \eta^L \\ -\eta^S \end{bmatrix} \geq 0_k.$$

Отсюда следует, что $\eta^S \leq 0_s$ и на $\alpha$ следует наложить условие $\alpha \geq \alpha_*$, где $\alpha_*$ удовлетворяет условию (53). При фиксированном $\alpha \geq \alpha_*$ вектор $y(\alpha)$ однозначно определяется из условий Куна—Таккера (55) и является единственным решением задачи (15). Пара $[y(\alpha), \alpha]$ — решение задачи (13), тройка $[\hat{u}_*, y(\alpha), \alpha]$ — седловая точка задачи (4), нормальное решение $\hat{u}_*$ задачи $(D)$ находится в соответствии с (11), т.е. приходим к формуле (54).

Теорема доказана.

Заметим, что и в этом случае величина порогового значения $\alpha_*$ может быть отрицательной. Это бывает, когда проекция точки на множество решений задачи $(D)$ совпадает с проекцией этой точки на допустимое множество задачи $(D)$. Также имеется аналог теоремы 2. Если известна какая-нибудь точка $u_* \in U_*$, то можно получить решение прямой задачи $(P)$ после однократного решения задачи максимизации (15).

**Теорема 5.** *Пусть множество решений $U_*$ задачи ЛП $(D)$ непусто. Тогда для любых $\alpha > 0$ и $\hat{u} = u_* \in U_*$ точное решение прямой задачи $(P)$ находится по формуле $x_* = y(\alpha)/\alpha$, где $y(\alpha)$ — точка, доставляющая максимум функции $S^2(y, \alpha, u_*)$ на $\mathbb{R}^n_+$.*

Для одновременного решения двойственной и прямой задач ЛП можно использовать следующий итерационный процесс, при котором не требуется знать пороговое значение $\alpha_*$:

$$u_{k+1} = u_k + \alpha b - A y_{k+1}. \tag{58}$$

Здесь параметр $\alpha$ фиксирован, а вектор $y_{k+1}$ определяется из решения следующей задачи минимизации на положительном ортанте:

$$y_{k+1} \in \arg\min_{y \in \mathbb{R}^n_+} \left\{ c^\top y + u_k^\top A y + \frac{1}{2} \|\alpha b - Ay\|^2 \right\}.$$

Этот итерационный процесс является конечным и дает точное решение прямой задачи $(P)$ и точное решение двойственной задачи $(D)$.

**Теорема 6.** *Пусть множество решений $U_*$ двойственной задачи $(D)$ непусто. Тогда при любом $\alpha > 0$ и при любой начальной точке $u_0$ итерационный процесс (58) сходится к $u_* \in U_*$ за конечное число шагов $\nu$. Формула $x_* = y_{\nu+1}/\alpha$ дает точное решение прямой задачи $(P)$.*

Заметим, что $u_\nu = u_* \in U_*$ является проекцией точки $u_{\nu-1}$ на множество решений $U_*$ задачи $(D)$.

## 4. Обобщенный метод Ньютона и вычислительный эксперимент

Безусловная максимизация в (14) может выполняться любым методом, например, методом сопряженного градиента. Но, как показал О. Мангасарьян, для безусловной оптимизации кусочно-квадратичной функции особенно эффективен обобщенный метод Ньютона [6, 7]. Приведем краткое описание обобщенного метода Ньютона и результаты численного эксперимента решения задач ЛП большой размерности.

Максимизируемая функция $S^1(p, \beta, \hat{x})$ в задаче (14) является вогнутой кусочно-квадратичной и дифференцируемой. Для этой функции обычная матрица Гессе не существует. Действительно, градиент

$$S^1_p(p, \beta, \hat{x}) = b - A(\hat{x} + A^\top p - \beta c)_+$$

функции $S^1(p, \beta, \hat{x})$ недифференцируем. Но для этой функции можно определить обобщенную матрицу Гессе, которая является симметричной отрицательно полуопределенной $(m \times m)$-матрицей следующего вида:

$$\partial^2_p S^1(p, \beta, \hat{x}) = -AD^\sharp(z)A^\top,$$

где через $D^\sharp(z)$ обозначена диагональная $(n \times n)$-матрица с $i$-м диагональным элементом $z^i$, равным 1, если $(\hat{x} + A^\top p - \beta c)^i > 0$, и равным 0, если $(\hat{x} + A^\top p - \beta c)^i \le 0$, $i = 1, \ldots, n$. Так как обобщенная матрица Гессе может быть вырожденной, используется следующее модифицированное ньютоновское направление:

$$-(\partial^2_p S^1(p, \beta, \hat{x}) - \delta I_m)^{-1} S^1_p(p, \beta, \hat{x}),$$

где $\delta$ — малая положительная величина (обычно при расчетах полагалось $\delta = 10^{-4}$) и $I_m$ — единичная матрица порядка $m$.

В этом случае модифицированный метод Ньютона имеет вид

$$p_{s+1} = p_s - (\partial^2_p S^1(p_s, \beta, \hat{x}) - \delta I_m)^{-1} S^1_p(p_s, \beta, \hat{x}).$$

Критерий окончания его работы полагался следующим:

$$\|p_{s+1} - p_s\| \le \mathrm{tol}.$$

О. Мангасарьян исследовал сходимость обобщенного метода Ньютона для безусловной оптимизации подобной вогнутой кусочно-квадратичной функции с выбором шага по правилу Армихо. Доказательство конечной глобальной сходимости обобщенного метода Ньютона для безусловной оптимизации кусочно-квадратичной функции можно найти в [6, 7].

Решались сгенерированные случайным образом задачи ЛП с большим числом неотрицательных переменных (до нескольких десятков миллионов) и средним числом ограничений-равенств (до нескольких тысяч), т.е. имело место $n \gg m$.

Итак, задавались числа $m$ и $n$, определяющие количество строк и столбцов матрицы $A$, и $\rho$ — плотность заполнения матрицы $A$ ненулевыми элементами. В частности, значение $\rho = 1$ означает, что случайным образом генерировались все элементы матрицы $A$, а значение $\rho = 0.01$ указывает, что в матрице $A$ генерировалися только 1% элементов, а остальные полагались равными нулю. Элементы матрицы $A$ определялись случайным образом из интервала [-50, +50]. Решение $x_*$ прямой задачи ($P$) и решение $u_*$ двойственной задачи ($D$) генерировались следующим образом. Полагалось, что в векторе $x_*$ содержится $n-3m$ нулевых компонент, а остальные компоненты выбирались случайным образом из интервала [0,10]. Половина компонент вектора $u_*$ полагалась равными нулю, а остальные выбирались случайным образом из интервала [-10,10]. Решения $x_*$ и $u_*$ использовались для вычисления коэффициентов целевой функции $c$ и правых частей $b$ задачи ЛП ($P$). Векторы $b$ и $c$ определялись по формулам

$$b = Ax_*, \qquad c = A^\top u_* + \xi,$$

если $x^{*i} > 0$, то $\xi^i = 0$, если $x^{*i} = 0$, то компонента $\xi^i$ выбиралась случайным образом из интервала

$$0 \le \gamma^i \le \xi^i \le \theta^i.$$

В приведенных ниже результатах расчетов считалось, что все $\gamma^i = 1$ и $\theta^i = 10$. Заметим, что при близких к нулю $\gamma^i$ величина $\xi^i = (c - A^\top u_*)^i = (v_*^d)^i$ может также оказаться очень малой величиной. Согласно формуле (31) априори неизвестная величина $\beta_*$ может быть очень большой. Тогда сгенерированная задача ЛП может оказаться труднорешаемой.

Предлагаемый метод решения прямой и двойственной задач ЛП, сочетающий итеративный процесс (46), (47) и обобщенный метод Ньютона, реализован в системе MATLAB. Для вычислений использовался компьютер с процессором Pentium-4, тактовой частотой 2.6 ГГц, оперативной памятью 1 Гб. Численные эксперименты со случайно сгенерированными задачами ЛП показали высокую эффективность метода при решении задач ЛП с большим числом неотрицательных переменных (решались задачи до 50 миллионов переменных) и средним числом ограничений-равенств (до 5 тысяч). Время решения таких задач составляло от нескольких десятков секунд до полутора часов. Высокая эффективность этих расчетов объясняется тем, что основная вычислительная трудность предлагаемого метода приходится на решение вспомогательной задачи безусловной максимизации, которая решается обобщенным методом Ньютона. Ее размерность определяется количеством ограничений типа равенств, число которых существенно меньше, чем число неотрицательных переменных в исходной задаче ЛП.

В приведенной ниже таблице даны результаты расчетов тестовых задач с помощью программы EGM, реализующей на MATLABе метод (46), (47), и с помощью доступных нам зарубежных коммерческих и исследовательских пакетов. Все задачи решались на компьютере Celeron 2.02 GHz с оперативной памятью 1.0 Gb. Для сравнения использовались пакеты BPMPD v.2.3 (метод внутренней точки) [8], MOSEK v.2.0 (метод внутренней точки) [9] и широко распространенный коммерческий пакет CPLEX v.6.0.1 (метод внутренней точки и симплекс-метод). Следует отметить работу [10], в которой представлены результаты вычислительного эксперимента решения больших задач ЛП с параллелепипедными ограничениями на переменные с использованием обобщенного метода Ньютона.

В таблице указаны размерности $m$, $n$ и $\rho$ — плотность ненулевых элементов матрицы $A$, $T$ — время решения задачи ЛП в секундах, в столбце Iter — количество итераций (для программы EGM указано общее число решенных систем линейных уравнений в методе Ньютона при решении задач (47)). Везде полагалось $\beta = 1$. Эта величина превышала пороговое значение $\beta_*$, и поэтому в результате решения задачи ЛП с помощью программы EGM была получена проекция нуля (начальная точка $\hat{x} = 0_n$) на множество решений прямой задачи ЛП, т.е. нормальное решение. В качестве критерия точности решения задачи ЛП вычислялись чебышевские нормы векторов невязок:

$$\Delta_1 = \|Ax - b\|_\infty, \qquad \Delta_2 = \|(A^\top u - c)_+\|_\infty, \qquad \Delta_3 = |c^\top x - b^\top u|.$$

В третьей строке таблицы даны результаты расчетов задач ЛП с пятью миллионами неотрицательных переменных, тысячей ограничений, однопроцентной заполненностью матрицы $A$ ненулевыми элементами. Время расчетов по программе EGM составило 16 мин. В четвертой строке приведены результаты в случае, когда задача имела 1000 ограничений, матрица $A$ была полностью заполнена и $n = 10^5$. Время расчетов составило 44 мин. Обе задачи были решены с высокой точностью (нормы невязок не превосходили $7.1 \times 10^{-7}$). Обе эти задачи не удалось решить другими пакетами.

Т а б л и ц а

**Вычислительный эксперимент**

| $m \times n \times \rho$ | Solver | T, sec | Iter. | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | $\Delta_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $500 \times 10^4 \times 1$ | EGM (MATLAB) | 55.0 | 12 | $1.5 \cdot 10^{-8}$ | $1.8 \cdot 10^{-12}$ | $1.2 \cdot 10^{-7}$ |
| | BPMPD (Interior point) | 37.4 | 23 | $2.3 \cdot 10^{-10}$ | $1.8 \cdot 10^{-11}$ | $1.1 \cdot 10^{-10}$ |
| | MOSEK (Interior point) | 87.2 | 6 | $9.7 \cdot 10^{-8}$ | $3.8 \cdot 10^{-9}$ | $1.6 \cdot 10^{-6}$ |
| | CPLEX (Interior point) | 80.3 | 11 | $1.8 \cdot 10^{-8}$ | $1.1 \cdot 10^{-7}$ | 0.0 |
| | CPLEX (Simplex) | 61.8 | 8308 | $8.6 \cdot 10^{-4}$ | $1.9 \cdot 10^{-10}$ | $7.2 \cdot 10^{-3}$ |
| $3000 \times 10^4 \times 0.01$ | EGM (MATLAB) | 155.4 | 11 | $6.1 \cdot 10^{-10}$ | $3.4 \cdot 10^{-13}$ | $3.6 \cdot 10^{-8}$ |
| | BPMPD (Interior point) | 223.5 | 14 | $4.6 \cdot 10^{-9}$ | $2.9 \cdot 10^{-10}$ | $3.9 \cdot 10^{-9}$ |
| | MOSEK (Interior point) | 42.6 | 4 | $3.1 \cdot 10^{-8}$ | $1.2 \cdot 10^{-8}$ | $3.7 \cdot 10^{-8}$ |
| | CPLEX (Interior point) | 69.9 | 5 | $1.1 \cdot 10^{-6}$ | $1.3 \cdot 10^{-7}$ | 0.0 |
| | CPLEX (Simplex) | 1764.9 | 6904 | $3.0 \cdot 10^{-3}$ | $8.1 \cdot 10^{-9}$ | $9.3 \cdot 10^{-2}$ |
| $1000 \times (5 \times 10^6) \times 0.01$ | EGM (MATLAB) | 1007.5 | 10 | $3.9 \cdot 10^{-8}$ | $1.4 \cdot 10^{-13}$ | $6.1 \cdot 10^{-7}$ |
| $1000 \times 10^5 \times 1$ | EGM (MATLAB) | 2660.8 | 8 | $2.1 \cdot 10^{-7}$ | $1.4 \cdot 10^{-12}$ | $7.1 \cdot 10^{-7}$ |

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И.И.** Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: Изд-во “Екатеринбург”, 1999.
2. **Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю.** Линейное программирование. М.: Факториал Пресс, 2003.
3. **Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.** Отыскание нормальных решений в задачах линейного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Т. 40, № 12. С. 1766–1786.
4. **Kanzow C., Qi H., Qi L.** On the minimum norm solution of linear programs // J. of Optimizat. Theory and Appl. 2003. Vol. 116. P. 333–345.
5. **Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г., Моллаверди Н.** Применение метода Ньютона к решению задач линейного программирования большой размерности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 9. С. 1564–1573.

6. **Mangasarian O.L.** A finite Newton method for classification // Optimizat. Meth. and Software. 2002. Vol. 17. P. 913–930.
7. **Mangasarian O.L.** A Newton method for linear programming // J. of Optimizat. Theory and Appl. 2004. Vol. 121. P. 1–18.
8. **Meszaros Cs.** The BPMPD interior point solver for convex quadratic programming problems // Optimizat. Meth. and Software. 1999. Vol. 11–12. P. 431–449.
9. **Andersen E.D., Andersen K.D.** The MOSEK interior point optimizer for linear programming: an implementation of homogeneous algorithm. High performance optimization. New York: Kluwer, 2000. P. 197–232.
10. **Попов Л.Д.** Квадратичная аппроксимация штрафных функций при решении задач линейного программирования большой размерности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 2. С. 206–221.

Поступила 25.01.08

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14 № 2 2008

УДК 519.8

# ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

**М. В. Девятерикова, А. А. Колоколов, А. П. Колосов**

В работе развивается подход к решению задач целочисленного программирования с интервальными данными, основанный на использовании возможностей изменения релаксационного множества задачи. Это демонстрируется на алгоритме перебора $L$-классов для решения дискретной задачи планирования производства. Приводятся описание предложенного алгоритма и ряда его модификаций, а также результаты вычислительного эксперимента на сериях задач из библиотеки OR-Library и со случайными исходными данными. Рассматриваемый подход применяется для получения приближенных решений указанной задачи в обычной постановке.

## Введение

Во многих случаях исходные данные прикладных задач дискретной оптимизации известны с определенной погрешностью, в частности, принадлежат некоторым интервалам. Подобный характер исходной информации может быть использован для повышения эффективности алгоритмов их решения. Имеются различные подходы к анализу и решению интервальных задач. Например, робастный [9] и "гибкий" [12] подходы применяются для задач, у которых интервальные данные содержатся в целевой функции, а параметрический анализ [6] — когда интервальные данные связаны с релаксационным множеством задачи целочисленного линейного программирования (ЦЛП).

Для исследования задач целочисленного программирования, построения и анализа алгоритмов, основанных на релаксации условия целочисленности, был предложен и развит метод регулярных разбиений [3]. С использованием этого метода исследована сложность решения ряда задач, изучена структура релаксационных множеств, введены новые классы отсечений, построены оценки числа итераций для ряда известных алгоритмов целочисленного программирования, разработаны новые алгоритмы. Значительное число результатов получено на основе $L$-разбиения, в частности, предложен метод перебора $L$-классов для решения указанных задач.

В [4] метод перебора $L$-классов был модифицирован для задачи о рюкзаке с интервальными данными в правой части линейных ограничений, там же исследовалась возможность использования предложенного подхода с целью получения приближенных решений задачи в обычной постановке.

В настоящей работе рассмотренный в [4] модифицированный вариант метода перебора $L$-классов применен к многомерной дискретной задаче планирования производства с интервальными данными в матрице и правой части линейных ограничений, проведены экспериментальные исследования. Предложены и реализованы алгоритмы перебора $L$-классов для интервальной задачи с булевыми переменными. Описаны некоторые способы повышения эффективности алгоритмов, в том числе с использованием унимодулярных преобразований пространства.

## 1. Постановки задач

Дискретная задача планирования производства может быть сформулирована следующим образом. Пусть имеется $n$ типов изделий и $m$ типов требуемых для их производства ресурсов. Обозначим через $c_j$ прибыль, получаемую от единицы изделия $j$, $j = 1, \ldots, n$, а через $b_i$ — доступное количество ресурса $i$, $i = 1, \ldots, m$. Величина $a_{ij}$ определяет затраты ресурса $i$ на выпуск единицы изделия $j$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Требуется найти целочисленный план $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, удовлетворяющий требованиям по имеющимся ресурсам и максимизирующий суммарную прибыль от реализации изделий. Математическая модель задачи имеет вид

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{1.1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \qquad i = 1, \ldots, m; \tag{1.2}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad x_j \in \mathbb{Z}, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{1.3}$$

Эта задача известна также как многомерная задача о рюкзаке [13]. При замене условия (1.3) на $x_j \in \{0, 1\}$ задача называется булевой задачей о рюкзаке.

Данная задача и ее варианты широко используются для моделирования большого числа практических задач, таких как выбор проектов, распределение капитала [11], расположение предметов в системах сборки по заказу [7] и др.

Указанные задачи о рюкзаке являются $NP$-трудными [1, 10], поэтому большое внимание уделяется разработке алгоритмов для их приближенного решения.

В данной работе рассматривается дискретная задача планирования производства с интервальными данными, которая является обобщением постановки, приведенной в [8].

Будем предполагать, что запасы ресурсов $b_i$, $i = 1, \ldots, m$, а также затраты ресурсов $a_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ заданы некоторыми интервалами. Обозначим

$$M(a^1, \ldots, a^n, b) = \Big\{x \in \mathbb{R}_+^n : \ \sum_{j=1}^{n} a^j x_j \leqslant b\Big\},$$

где $b,\ a^j \in \mathbb{R}_+^m$, $j = 1, \ldots, n$. Положим

$$M_1 = M(\widetilde{a}^1, \ldots, \widetilde{a}^n, \widetilde{b}), \qquad M_2 = M(a^1, \ldots, a^n, b),$$

где $\widetilde{b} \leqslant b$, $\widetilde{a}^j \geqslant a^j$, $j = 1, \ldots, n$. Из условий, налагаемых на $a^j$, $\widetilde{a}^j$, $b$, $\widetilde{b}$, непосредственно следует, что $M_1 \subseteq M_2$.

Интервальная дискретная задача планирования производства состоит в отыскании точки $z^* \in \mathbb{Z}^n$, удовлетворяющей условиям:

(1) $z^* \in M_2$;

(2) $f(z^*) \geqslant f(z)$ для всех $z \in M_1 \cap \mathbb{Z}^n$.

Легко видеть, что точка $z^*$ является оптимальным решением задачи ЦЛП

$$f(x) \to \max, \qquad x \in (\overline{M} \cap \mathbb{Z}^n)$$

для некоторого $\overline{M}$ такого, что $M_1 \subseteq \overline{M} \subseteq M_2$, причем $\overline{M} = M(\overline{a}^1, \ldots, \overline{a}^n, \overline{b})$ для определенных значений $\overline{a}^j$ и $\overline{b}$ таких, что $a^j \leqslant \overline{a}^j \leqslant \widetilde{a}^j$, $\widetilde{b} \leqslant \overline{b} \leqslant b$. Допустимым решением интервальной задачи будем считать любую целочисленную точку, лежащую во множестве $M_2$.

Необходимо отметить, что интервальная задача также является $NP$-трудной (если множества $M_1$ и $M_2$ совпадают, то она превращается в задачу в обычной постановке).

Сформулированная задача будет рассмотрена не только как самостоятельный объект исследования, но и как инструмент нахождения приближенного решения дискретной задачи планирования производства с фиксированными исходными данными. Представляется вероятным, что процесс решения задачи некоторыми алгоритмами существенно сокращается, если исходные данные задачи имеют интервальный характер.

В следующих параграфах показано применение метода перебора $L$-классов для решения рассматриваемой интервальной задачи.

## 2. Метод перебора $L$-классов

Метод перебора $L$-классов [3] был предложен для решения общей задачи целочисленного линейного программирования в следующей постановке:

$$f(x) \to \max, \qquad x \in (M \cap \mathbb{Z}^n), \tag{2.1}$$

где $M$ — выпуклое многогранное множество в $\mathbb{R}^n$. Данный метод основан на $L$-разбиении пространства $\mathbb{R}^n$, которое можно определить следующим образом. Точки $x, y \in \mathbb{R}^n$ $(x \succ y)$ называются *$L$-эквивалентными*, если не существует отделяющей их точки $z \in \mathbb{Z}^n$ такой, что $x \succeq z \succeq y$. Здесь $\succ$, $\succeq$ — символы лексикографического сравнения. Эквивалентные точки образуют классы $L$-разбиения, которые называются *$L$-классами*. Разбиение произвольного множества $X$ на $L$-классы называется *$L$-структурой* этого множества и обозначается $X/L$. $L$-разбиение обладает важными свойствами, которые используются в работе.

(1) Любой дробный $L$-класс $V \in \mathbb{R}^n/L$ может быть представлен в виде

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x_1 = a_1, \ldots, x_{r-1} = a_{r-1}, \ a_r < x_r < a_r + 1\},$$

где $a_j$ — некоторые целые числа, $j = 1, \ldots, r$; число $r$ называется *рангом* $L$-класса, $1 \leqslant r \leqslant n$.

(2) Пусть $X$, $X'$ — непустые множества в $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что $X$ лексикографически больше $X'$ $(X \succ X')$, если $x \succ x'$ для всех $x \in X$ и $x' \in X'$. Это отношение является линейным порядком на фактор-пространстве $\mathbb{R}^n/L$. Если $X$ — ограниченное множество, то $X/L$ можно записать как

$$X/L = \{V_1, \ldots, V_p\}, \qquad V_i \succ V_{i+1}, \qquad i = 1, \ldots, p-1.$$

Рассмотрим идею метода перебора $L$-классов для решения задачи (2.1). Основной шаг алгоритма заключается в переходе от одного $L$-класса релаксационного множества $M$ к следующему за ним в порядке лексикографического убывания и с учетом рекордного значения целевой функции. Алгоритм порождает последовательность $S$ точек $x^{(t)} \in M$, обладающую свойствами:

(1) $x^{(t)} \succ x^{(t+1)}$, $t = 1, 2, \ldots$ ;

(2) все точки $x^{(t)}$ принадлежат различным $L$-классам;

(3) если множество $M \cap \mathbb{Z}^n$ непусто, то последовательность $S$ содержит подпоследовательность целых точек $Q = \{z^{(t_k)}, \ k = 1, \ldots, q\}$ такую, что $f(z^{(t)}) > f(z^{(t_k)})$, как только $t > t_k$.

Процесс перебора $L$-классов можно начинать с лексикографически максимальной точки $x^{(1)} \in M$, если она существует. Текущие точки $x^{(t)}$ строятся посредством решения вспомогательных подзадач линейного программирования (ЛП). Поиск лексикографического максимума для этих задач может быть осуществлен, например, с помощью лексикографического двойственного симплекс-метода. Алгоритм завершает работу, когда не удается найти очередной $L$-класс. В случае, если задача разрешима, лучшее из найденных целочисленных решений является оптимальным. Если множество $M$ ограничено, то за конечное число шагов алгоритм либо находит оптимум, либо устанавливает, что задача не имеет решения.

## 3. Алгоритм перебора *L*-классов для дискретной задачи планирования производства с интервальными данными

Рассмотрим общую схему алгоритма перебора $L$-классов, предложенную в [4], для решения задачи планирования производства с интервальными данными (алгоритм $LCEM$), которая является модификацией базового алгоритма перебора $L$-классов (обозначим его $LCE$).

Из определения решения дискретной задачи планирования производства с интервальными данными следует, что в качестве ее решения, например, можно взять оптимальное решение задачи

$$f(x) \to \max, \qquad x \in (M_1 \cap \mathbb{Z}^n), \tag{3.1}$$

либо задачи

$$f(x) \to \max, \qquad x \in (M_2 \cap \mathbb{Z}^n). \tag{3.2}$$

Следовательно, задачу с интервальными данными можно решать стандартным алгоритмом $LCE$ (либо другим алгоритмом ЦЛП), однако в нем не учитывается специфика задачи, позволяющая ускорить процесс решения.

Работа алгоритма $LCEM$ начинается с множества $M_1$. Отличие модифицированного алгоритма от стандартного заключается в следующем. Если подзадача ЛП на шаге 4 или на шаге 5 неразрешима, то $LCEM$ пытается решить указанную задачу, но уже с множеством $\widehat{M}$ таким, что $M_1 \subseteq \widehat{M} \subseteq M_2$, причем $\widehat{M}$ выбирается, если это возможно, как наименьшее множество, при котором указанные задачи имеют решения. Смысл данной процедуры состоит в том, чтобы быстрее найти новую целую точку, улучшить рекорд и тем самым ускорить процесс решения. В остальном алгоритм $LCEM$ работает так же, как и $LCE$. Если множество $M_2$ содержит те же целые точки, что и $M_1$, то алгоритм $LCEM$ находит оптимальное решение задачи (3.1). В случае $M_1 = M_2$ алгоритм $LCEM$ совпадает со стандартным алгоритмом перебора $L$-классов.

Далее без ограничения общности будем считать, что все исходные данные целочисленные.

*Алгоритм 1* (Алгоритм LCEM).

(1) Решить задачу ЛП, соответствующую задаче (3.1).
Если ее решение целочисленное, то процесс завершается.
Иначе за начальное значение рекорда взять $rec = -\infty$ и перейти на шаг 2.

(2) Решить задачу ЛП, соответствующую задаче (3.2).
Если ее решение целочисленное, то процесс завершается.
Иначе перейти на шаг 3.

(3) Найти $x' = \operatorname{lexmax} M_2$.
Если $x' \in \mathbb{Z}^n$, вычислить новый рекорд $rec = f(x')$ и перейти на шаг 5.
В случае $x' \notin \mathbb{Z}^n$ перейти на шаг 4.

(4) Поиск следующего $L$-класса (ход “вниз”).
Пусть $x'' = x'$. Найти $p = \min\{j:\ x''_j \neq \lfloor x''_j \rfloor,\ j = 1, \ldots, n\}$.
Решить задачу ЛП:
найти $x' = \operatorname{lexmax}\{x \in M_1:\ f(x) \geqslant rec + 1,\ x_1 = x''_1, \ldots, x_{p-1} = x''_{p-1},\ x_p \leqslant \lfloor x''_p \rfloor\}$.
Возможны следующие случаи:
1. Если подзадача не имеет решений, то перейти на шаг 6.
2. Если получено $x' \in \mathbb{Z}^n$, обновить рекорд $rec = f(x')$,
положить $p = n + 1,\ x'' = x'$, перейти на шаг 5.
3. Иначе перейти на шаг 4.

(5) Поиск следующего $L$-класса (ход “вверх”).
Положить $\varphi = \max\{j:\ j \leqslant p - 1,\ x''_\varphi > 0\}$.
Если такого номера $\varphi$ нет, перейти на шаг 8, иначе решить задачу ЛП:

найти $x' = \text{lexmax}\,\{x \in M_1 : \ f(x) \geqslant rec + 1,\ x_1 = x''_1, \ldots, x_{\varphi-1} = x''_{\varphi-1},\ x_\varphi \leqslant x''_\varphi - 1\}$.
Возможны следующие случаи:
1. Если подзадача не имеет решений, то перейти на шаг 7.
2. Если получено $x' \in \mathbb{Z}^n$, то обновить рекорд $rec = f(x')$, положить $p = n + 1, x'' = x'$, перейти на шаг 5.
3. Иначе перейти на шаг 4.

(6) Поиск следующего $L$-класса (ход “вниз”).
Найти по возможности меньшее по включению $\widehat{M}$, при котором задача: найти $x' = \text{lexmax}\,\{x \in \widehat{M} \subseteq M_2 : f(x) \geqslant rec + 1,\ x_1 = x''_1, \ldots, x_{p-1} = x''_{p-1},\ x_p \leqslant \lfloor x''_p \rfloor\}$ разрешима.
Имеются следующие случаи:
1. Если такого $\widehat{M}$ не существует и $p = 1$, то перейти на шаг 8.
2. Если такого $\widehat{M}$ не существует и $p > 1$, то перейти на шаг 5.
3. Если получено $x' \in \mathbb{Z}^n$, обновить рекорд $rec = f(x')$, положить $p = n + 1,\ x'' = x'$, перейти на шаг 5.
4. Иначе перейти на шаг 4.

(7) Поиск следующего $L$-класса (ход “вверх”).
Найти по возможности меньшее по включению $\widehat{M}$, при котором задача: найти $x' = \text{lexmax}\,\{x \in \widehat{M} \subseteq M_2 : f(x) \geqslant rec + 1,\ x_1 = x''_1, \ldots, x_{\varphi-1} = x''_{\varphi-1},\ x_\varphi \leqslant x''_\varphi - 1\}$ разрешима.
Возможны следующие случаи:
1. Если такого $\widehat{M}$ не существует и $\varphi = 1$, то перейти на шаг 8.
2. Если такого $\widehat{M}$ не существует и $\varphi > 1$, то положить $p = \varphi$ и перейти на шаг 5.
3. Если получено $x' \in \mathbb{Z}^n$, то обновить рекорд $rec = f(x')$, положить $p = n + 1,\ x'' = x'$, перейти на шаг 5.
4. Иначе перейти на шаг 4.

(8) Алгоритм заканчивает работу. Лучшая из найденных целочисленных точек является решением интервальной задачи.

Шаги 1, 2 и 3 алгоритма являются предварительными и выполняются один раз. Основные итерации алгоритма осуществляются на шагах 4–7. Переход на шаг 8 происходит, когда перебор $L$-классов окончен.

Алгоритм $LCEM$ находит решение интервальной дискретной задачи планирования производства. Это следует из того, что значение целевой функции, найденное алгоритмом $LCEM$ для интервальной задачи, не меньше, чем значение целевой функции, найденное алгоритмом $LCE$ для задачи (3.1), а также того факта, что алгоритм $LCE$ находит оптимальное решение задачи (3.1).

С целью улучшения рекорда в рассматриваемом алгоритме можно периодически строить допустимые решения задачи путем использования специальной процедуры округления представителей дробных $L$-классов.

Кроме того, следует отметить, что в качестве начального значения рекорда можно взять не $rec = -\infty$, а значение целевой функции, вычисленное для некоторого “округления” оптимального решения задачи линейного программирования, соответствующей (3.2).

Порядок переменных существенно влияет на эффективность алгоритма. В частности, на практике хорошо показал себя алгоритм, в котором базисные переменные упорядочены по невозрастанию оптимальных значений переменных задачи ЛП, соответствующей (3.2), а небазисные — по неубыванию их оценок, полученных в строке целевой функции оптимальной симплексной таблицы указанной задачи. При этом сначала располагаются базисные переменные, затем — небазисные.

В алгоритме предусмотрены процедуры, использование которых позволяет присваивать некоторым переменным значение 0 и исключать их из дальнейшего рассмотрения. Кроме того, для задачи с булевыми переменными имеются аналогичные приемы для фиксирования части переменных со значением 1.

Для ускорения процесса алгоритм $LCEM$ применялся в два этапа: на первом решалась задача с частью переменных, что позволило быстро найти достаточно хорошее приближенное решение, а на втором — задача со всеми имеющимися переменными с учетом полученного рекорда. Кроме того, после каждой итерации метода перебора $L$-классов использовалось несколько отсечений Гомори.

С целью повышения эффективности алгоритма нами также применялись унимодулярные преобразования пространства. Пусть $x,\, y \in \mathbb{R}^n$, $u_{ij} \in \mathbb{Z}$, $i,\, j = 1, \ldots, n$. Рассмотрим преобразование координат $U$:

$$U = (u_{ij}), \qquad i,\, j = 1, \ldots, n, \qquad y = Ux.$$

Преобразование $U$ называется *унимодулярным*, если $\det U = \pm 1$.

Необходимо подчеркнуть, что целочисленная решетка инвариантна относительно любого унимодулярного преобразования пространства. Кроме того, такие преобразования сохраняют неизменными площади фигур и объемы тел. Использование унимодулярных преобразований позволяет ускорять процесс решения задач ЦЛП, повышать устойчивость задач и алгоритмов [2, 5].

Отметим, что унимодулярное преобразование может привести к тому, что для новых переменных не будет выполняться условие их неотрицательности. Этого можно избежать, если дополнительно производить сдвиг координат на некоторый целочисленный вектор. В этом случае можно для любого унимодулярного преобразования подобрать такую величину сдвига, чтобы выполнялось условие $y_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, n$.

В алгоритме $LCEM$ для ускорения процесса решения использовалось следующее преобразование:

$$\begin{aligned} &y_1 = -x_1 - \ldots - x_n + C, \\ &y_2 = x_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y_n = x_n, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $C$ — достаточно большое целое число, которое добавляется с целью выполнения условия $y_1 \geqslant 0$. Отметим, что в этом случае целочисленная решетка также является инвариантной. Применение данного преобразования во многих случаях позволило сократить время работы алгоритма $LCEM$.

## 4. Алгоритмы приближенного решения

Используя технику решения рассматриваемой задачи с интервальными данными, можно разрабатывать алгоритмы приближенного решения для дискретной задачи планирования производства с фиксированными исходными данными. Для задачи (2.1) рассмотрим два приближенных алгоритма, в основе которых лежит алгоритм $LCEM$. Оба алгоритма основаны на сужении релаксационного множества.

В первом алгоритме (обозначим его $LCEM1$) используется изменение правой части линейных ограничений задачи (2.1). Здесь $M_2 = M = M(a^1, \ldots, a^n, b)$, $M_1 = M(a^1, \ldots, a^n, \tilde{b})$, где $\tilde{b} = (1-\varepsilon)\, b$, $\varepsilon > 0$. Во втором алгоритме (обозначим его $LCEM2$) для получения сужения множества $M$ изменяются элементы матрицы линейных ограничений. Здесь $M_2 = M(a^1, \ldots, a^n, b)$, $M_1 = M(\tilde{a}^1, \ldots, \tilde{a}^n, b)$, где $\tilde{a}^j = (1+\varepsilon^j)\, a^j$, $\varepsilon^j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, n$. При решении задачи этими алгоритмами могут пропускаться некоторые $L$-классы множества $M$, в том числе и целые точки. Поэтому для получения хорошего приближенного решения $\varepsilon$ и $\varepsilon_j$, $j = 1, \ldots, n$, должны выбираться достаточно малыми.

Таким образом, при указанном выборе множеств $M_1$ и $M_2$ решение интервальной задачи можно рассматривать как приближенное решение задачи (2.1) и, наоборот, алгоритмы $LCEM1$

и $LCEM2$ — как алгоритмы решения интервальной задачи и как алгоритмы приближенного решения дискретной задачи планирования производства (2.1).

В следующем параграфе будут рассмотрены результаты вычислительного эксперимента для алгоритмов $LCEM1$ и $LCEM2$ при решении многомерной дискретной задачи планирования производства в целочисленной и булевой постановках.

## 5. Результаты вычислительного эксперимента

Предложенные алгоритмы перебора $L$-классов были реализованы на языке C++ и тестировались на ЭВМ Pentium-4 HT (тактовая частота процессора 2.8 ГГц).

Цель эксперимента состояла в том, чтобы изучить поведение алгоритмов $LCEM1$ и $LCEM2$ при решении дискретной задачи планирования производства с интервальными данными в целочисленной и булевой постановках, а также исследовать возможности использования предложенных алгоритмов для нахождения приближенного решения дискретной задачи планирования производства с фиксированными данными.

Алгоритм $LCEM1$ тестировался на двух классах задач. Первый класс состоял из серий задач с целочисленными переменными, порожденных случайным образом. Каждая серия включала 30 задач одинаковой размерности. При этом $n$ менялось в пределах от 40 до 1500, а $m$ — от 10 до 300, $c_j$, $a_{ij} \in [1, 10]$, $j = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, m$. Вектор правой части строился по формуле $b_i = \left[\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\right)/2\right]$, $i = 1, \ldots, m$, и некоторыми другими способами. Значение параметра $\varepsilon$ принималось равным 0.01 и 0.02. Для задач с $n \geqslant 300$ значение $\varepsilon$ составляло 0.001 и 0.002.

Второй класс — задачи с булевыми переменными из библиотеки OR-Library [14]. Это трудные задачи, для многих из которых известны только рекордные значения целевой функции. В данном классе $n$ менялось в пределах от 100 до 500, $m$ — от 5 до 30, значения $a_{ij}$, $c_j$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, в основном лежали в интервале $[500, 800]$, $b_i$ — в интервале $[15000, 120000]$, $i = 1, \ldots, m$.

В таблицах представлены среднее время решения в секундах и средняя погрешность по сериям задач.

Далее используются следующие обозначения:

$N$ — номер серии задач;

$t^*$ — время решения задачи (1.1)–(1.3) алгоритмом $LCE$;

$t^*_U$ — время решения задачи (1.1)–(1.3) алгоритмом $LCE$ с использованием унимодулярного преобразования (3.3);

$t_\varepsilon$ — время решения интервальной задачи алгоритмом $LCEM$ при заданном значении $\varepsilon$;

$\widetilde{t}_\varepsilon$ — время получения алгоритмом $LCE$ решения, которое не хуже решения, найденного алгоритмом $LCEM1$ или $LCEM2$;

$\delta_\varepsilon = (f(z^*) - f(z_\varepsilon))/f(z^*)$, где $z^*$ — оптимальное решение исходной задачи, $z_\varepsilon$ — приближенное решение при заданном значении $\varepsilon$.

Эксперимент показал, что задачи с интервальными данными в правой части при $n$, значительно большем $m$ ($n \gg m$) решались алгоритмом $LCEM1$ заметно быстрее, чем задачи в стандартной постановке (см. табл. 1). Время решения интервальных задач по сравнению с временем решения задач в стандартной постановке было в среднем в 14 раз меньше для $\varepsilon = 0.01$ и более чем в 130 раз меньше для $\varepsilon = 0.02$. Кроме того, для нахождения допустимого решения задачи (1.1)–(1.3), которое было бы не хуже решения, найденного алгоритмом $LCEM1$, алгоритму $LCE$ в среднем требовалось времени в 1.3 раза больше в случае $\varepsilon = 0.01$ и в 3.2 раза больше при $\varepsilon = 0.02$. При этом в эксперименте относительное отклонение приближенного значения целевой функции от оптимального в большинстве случаев не превышало величины $\varepsilon$ (относительного изменения правой части системы ограничений).

В таблице 2 представлены результаты вычислительного эксперимента для задач размерности $n \geqslant 300$. Время решения интервальных задач в среднем в 31 раз меньше, чем время решения задач в стандартной постановке для $\varepsilon = 0.001$ и в 87 раз — для $\varepsilon = 0.002$. Кроме того, для нахождения допустимого решения задачи (1.1)–(1.3), которое было бы не хуже решения, найденного алгоритмом $LCEM1$, алгоритму $LCE$ в среднем требовалось времени в 3.5 раза больше в случае $\varepsilon = 0.001$ и в 2.4 раза больше при $\varepsilon = 0.002$.

При $m > n$ алгоритм $LCEM1$ работал на задачах со случайными данными заметно хуже, однако и в этом случае среднее время решения интервальных задач было меньше времени решения задач с фиксированными исходными данными (см. табл. 3).

В таблице 4 представлены результаты приближенного решения серий задач из библиотеки OR-Library алгоритмом $LCEM1$ при $\varepsilon = 0.005$ и $\varepsilon = 0.01$. Столбец таблицы Problem ID содержит кодовое название данного семейства задач в библиотеке. Из таблицы видно, что задачи решались достаточно быстро, причем $\delta_\varepsilon \leqslant \varepsilon$ для всех серий. Следует также отметить, что и в этом случае среднее время решения интервальных задач было значительно меньше, чем задач в обычной постановке.

Т а б л и ц а 1

**Результаты эксперимента для интервальных задач со случайными данными ($n \gg m,\ \varepsilon = 0.01,\ 0.02$)**

| N | $m*n$ | $t^*$ | $t^*_U$ | $t_{0.01}$ | $\widetilde{t}_{0.01}$ | $t_{0.02}$ | $\widetilde{t}_{0.02}$ | $\delta_{0.01}$ | $\delta_{0.02}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 20*100 | 7.6 | 4.4 | 4.9 | 1.1 | 1.9 | 0.7 | 0.011 | 0.016 |
| 2 | 10*150 | 4.2 | 3.3 | 0.4 | 0.4 | 0.0 | 0.0 | 0.008 | 0.013 |
| 3 | 20*150 | 35.0 | 21.3 | 5.3 | 5.7 | 0.7 | 2.1 | 0.008 | 0.015 |
| 4 | 10*200 | 5.4 | 4.4 | 0.2 | 0.5 | 0.1 | 0.1 | 0.007 | 0.010 |
| 5 | 20*200 | 114.0 | 62.0 | 4.2 | 9.2 | 0.3 | 2.4 | 0.009 | 0.014 |

Т а б л и ц а 2

**Результаты эксперимента для интервальных задач со случайными данными ($n \gg m,\ \varepsilon = 0.01,\ 0.02$)**

| N | $m*n$ | $t^*$ | $t^U$ | $t_{0.001}$ | $\widetilde{t}_{0.001}$ | $t_{0.002}$ | $\widetilde{t}_{0.002}$ | $\delta_{0.001}$ | $\delta_{0.002}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10*1000 | 43.6 | 55.8 | 4.1 | 18.8 | 1.1 | 6.3 | 0.001 | 0.001 |
| 2 | 10*300 | 18.1 | 13.4 | 17.3 | 11.3 | 7.6 | 8.1 | 0.001 | 0.002 |
| 3 | 10*500 | 31.0 | 22.9 | 13.9 | 15.2 | 4.4 | 11.1 | 0.001 | 0.002 |
| 4 | 10*1500 | 79.2 | 64.4 | 0.6 | 5.9 | 0.3 | 0.1 | 0.001 | 0.001 |
| 5 | 15*300 | 71.1 | 65.8 | 61.1 | 40.8 | 39.0 | 28.2 | 0.001 | 0.002 |

Т а б л и ц а 3

**Результаты эксперимента для интервальных задач со случайными данными ($n < m$)**

| N | $m*n$ | $t^*$ | $t^U$ | $t_{0.01}$ | $\widetilde{t}_{0.01}$ | $t_{0.02}$ | $\widetilde{t}_{0.02}$ | $\delta_{0.01}$ | $\delta_{0.02}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 300*40 | 10.3 | 21.34 | 11.3 | 1.8 | 11.0 | 1.4 | 0.013 | 0.023 |
| 2 | 100*50 | 16.4 | 14.9 | 13.9 | 2.5 | 8.7 | 1.8 | 0.015 | 0.021 |
| 3 | 200*50 | 36.4 | 49.7 | 26.6 | 4.6 | 21.0 | 3.9 | 0.014 | 0.020 |
| 4 | 300*50 | 62.4 | 70.5 | 41.7 | 7.4 | 30.7 | 6.2 | 0.015 | 0.021 |

Таблица 4

**Результаты эксперимента для задач OR Library**

| Problem ID | $m * n$ | $t_{LCEM1}$ | $\varepsilon$ | $\delta_\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|
| mknapcb1 | $5 * 100$ | 3.3 | 0.010 | 0.003 |
| mknapcb2 | $5 * 250$ | 7.0 | 0.005 | 0.004 |
| mknapcb3 | $5 * 500$ | 6.6 | 0.005 | 0.003 |
| mknapcb4 | $10 * 100$ | 28.0 | 0.010 | 0.006 |
| mknapcb5 | $10 * 250$ | 24.7 | 0.010 | 0.004 |
| mknapcb6 | $10 * 500$ | 8.3 | 0.010 | 0.004 |
| mknapcb7 | $30 * 100$ | 690.0 | 0.010 | 0.006 |

В таблице 5 представлены результаты эксперимента по решению серий случайно сгенерированных задач с булевыми переменными алгоритмом $LCEM2$. В этих задачах $n$ менялось в пределах от 50 до 150, $m$ — от 10 до 150. Через $J \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ обозначим множество столбцов задачи, данные в которых задаются интервалом. Для столбцов $j \in J$ значения элементов лежат в интервале $[a_{ij}, a_{ij} \cdot (1 + \varepsilon_j)]$, $i = 1, \dots, m$. Как правило, в этих сериях задачи в интервальной постановке также решались в несколько раз быстрее, чем задачи в обычной постановке, однако вопрос о способе выбора изменяемых элементов матрицы для эффективного поиска приближенного решения пока остается открытым.

Таблица 5

**Результаты эксперимента для задач с интервальными данными в матрице коэффициентов ограничений**

| N | $m * n$ | $J$ | $\varepsilon$ | $t^*$ | $t_\varepsilon$ | $\widetilde{t}$ | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $20 * 100$ | 1, …, 5 | 0.05 | 13.0 | 8.0 | 0.1 | 0.0030 |
| 2 | $10 * 150$ | 83, …, 97 | 0.3 | 21.0 | 13.0 | 1.0 | 0.0004 |
| 3 | $20 * 150$ | 65, …, 73 | $0.15 \div 0.35$ | 81.0 | 23.0 | 0.2 | 0.0040 |
| 4 | $150 * 50$ | 1, …, 5 | 0.09 | 255.0 | 33.0 | 0.4 | 0.0130 |

Полученные результаты показывают перспективность предложенного подхода для решения дискретных задач планирования производства с интервальными исходными данными, а также для получения приближенных решений этих задач в обычной постановке. Следует также отметить, что рассматриваемый подход может использоваться для других задач и алгоритмов целочисленного линейного программирования. В частности, начаты исследования по применению данного подхода в методе ветвей и границ.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
2. **Девятерикова М.В., Колоколов А.А., Колосов А.П.** Унимодулярные преобразования и некоторые алгоритмы целочисленного программирования // Дискретная оптимизация и исследование операций: Материалы росс. конф. (Владивосток, 7–14 сентября 2007 г.). Новосибирск: ИМ СО РАН, 2007. С. 124.
3. **Колоколов А.А.** Регулярные разбиения и отсечения в целочисленном программировании // Сиб. журн. исследования операций. 1994. № 2. С. 18–39.
4. **Колоколов А.А., Девятерикова М.В.** Алгоритмы перебора $L$-классов для задачи о рюкзаке с интервальными данными: Препринт. Омск: Изд-во ОмГУ, 2001.

5. **Колоколов А.А., Колосов А.П.** Анализ некоторых алгоритмов целочисленного программирования с использованием $L$-разбиения // Информ. бюлл. Ассоциации мат. программирования. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. № 11. С. 186.
6. **Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т.** Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев: Наукова думка, 1995.
7. **Akcay Y., Xu S.H.** Joint inventory replenishment and component allocation optimization in an assemble-to-order system // Management Science. 2004. No. 50. P. 99–116.
8. **Devyaterikova M.V., Kolokolov A.A.** L-class enumeration algorithms for some interval production planning problem // Proc. of 12th IFAC symposium on information control problems in manufacturing INCOM'2006. Saint-Etienne: Elsevier Science, 2006. Vol. 3. P. 9–13.
9. **Kouvelis P., Yu G.** Robust discrete optimization and its applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997.
10. **Lin E. Y.-H.** A bibliographical survey on some well-known non-standard knapsack problems // INFOR. 1998. Vol. 36, no. 4. P. 274–317.
11. **Lu L.L., Chiu S.Y., Cox L.A.** Optimal project selection: stochastic knapsack with finite time horizon // Operations Research. 1999. No. 50. P. 645–650.
12. **Manjoub A., Mihelic J., Rapine C., Robic B.** k-center problem with uncertainty: flexible approach // Proc. of discrete optimization methods in production and logistics (DOM-2004). Omsk, 2004. P. 75–80.
13. **Martello S., Toth P.** Knapsack problems: algorithms and computer implementations. New York: Wiley, 1990.
14. http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/orlib/mknapinfo.html.

Поступила 03.03.08

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14 № 2 2008

УДК 519.6

# АВТОРСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ПО ПРОБЛЕМАТИКЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В РЕТРОСПЕКТИВЕ[1]

**И. И. Еремин**

В 2001 году был опубликован Информационный бюллетень №9 Ассоциации математического программирования, в котором содержались аннотации приоритетных результатов в области математического программирования. В бюллетене были представлены 22 автора, в число которых входил автор статьи. Были отмечены следующие его результаты: 1) открытие точных штрафных функций; 2) разработка конструкций двойственности (а также теорем двойственности) для несобственных, лексикографических, парето-лексикографических, дизъюнктивных и других задач. В статье излагаются результаты автора, содержащиеся в указанном бюллетене. Приведены также координаты и аннотации некоторых книг и статей последних лет, в которых автор продолжает разработку соответствующей проблематики.

## 1. Минимизация выпуклой кусочно-линейной функции с использованием субградиентов

Для задачи $\min\limits_{(x)} d(x),\ d(x) = \max\limits_{j=1,\dots,m} [(a_j, x) - b_j]^+$, поставленной в соответствие системе линейных неравенств вида $(a_j, x) \le b_j,\ j = 1, \dots, m$, строится итерационный процесс

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k d(x_k)\, a_{j_k};$$

здесь $\alpha_k \ge 0$, $\alpha_k \to 0$, $\sum\limits_{(k)} \alpha_k = +\infty$; $j_k : d(x_k) = [(a_{j_k}, x_k) - b_{j_k}]^+$; $\gamma^+ = \max\{0, \gamma\}$. Доказывается сходимость процесса к точке минимума функции $d(x)$.

Процесс относится к задаче отыскания решений (или квазирешений) произвольной системы линейных неравенств над пространством $\mathbb{R}^n$ [1]. Результат распространен на случай систем выпуклых неравенств [2].

## 2. Метод точных и квадратичных штрафных функций в выпуклом программировании

Пусть

$$P : \max \Big\{ f(x) \mid f_j(x) \le 0,\ j \in J_1 \cup J_2 \Big\}$$

— разрешимая задача выпуклого программирования с условием регулярности в той или иной форме. Задаче $P$ ставится в соответствие задача

$$P_t(R) : \sup \Big\{ f(x) - \sum_{j \in J_1} R_j\, [f_j^+(x)]^t \mid f_j(x) \le 0,\ j \in J_2 \Big\},$$

где $R_j > 0$, $j \in J_1$, $t = 1, 2$. Если $\bar u \ge 0$ — вектор двойственных оценок, отвечающих неравенствам системы ограничений с номерами $j \in J_1$, то:

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 07-01-00399, 06-01-0380) и программы поддержки ведущих научных школ (НШ-2081.2008.1).

(a) если $R \geq \bar{u}$, то при $t = 1$ $\operatorname{opt} P = \operatorname{opt} P_1(R)$; если $R > \bar{u}$, то $\operatorname{Arg} P = \operatorname{Arg} P_1(R)$;
(b) при $t = 2$ имеет место оценка $|\operatorname{opt} P - \operatorname{opt} P_2(R)| \leq \sum\limits_{j \in J_1} \dfrac{\bar{u}_j}{4R_j}$ при любом $R > 0$ [3–5].

Распространение на случай штрафной функции вида

$$f(x) - \sum_{j \in J_1} R_j \, \|F_j^+(x)\|_j^t,$$

где $\{F_j(x)\}_1^{m_0}$ — фрагменты разбиения вектора левых частей системы ограничений, имеется в книге [6]. Случай штрафной функции более общего вида

$$f(x) - P\left(R_1 \, \|F_1^+(x)\|_1^{t_1}, \ldots, R_k \, \|F_k^+(x)\|_k^{t_k}\right),$$

где $t_j \geq 1$, $j = 1, \ldots, m$, $P(z)$ — выпуклая на $\mathbb{E}_+^k$ функция со свойствами $P(0) = 0$, $P(z) > 0$ для $z \geq 0$, $z \neq 0$, был рассмотрен в работе [7], при этом теоремы приведенного выше типа формулировались для общих задач математического программирования над произвольным вещественным пространством в предположении существования седла для функции Лагранжа, поставленной в соответствие исходной задаче.

П р и м е ч а н и е. В 1967 году результат типа (a), но в более слабой формулировке, был опубликован Зангвиллом [8]:

пусть $P : \min\{f(x) \mid g_i(x) \geq 0, \ i = 1, \ldots, m\}$ — разрешимая задача выпуклого программирования и $x^*$ — ее оптимальный вектор; если $\exists\, x^0 : g_i(x^0) > 0$, $\forall\, i$, то при

$$t > \frac{f(x^0) - f(x^*) + 1}{\min\limits_{(i)} g_i(x^0)}$$

справедливо включение

$$\operatorname{Arg}\min\Big\{ f(x) - t\sum_{i=1}^{m} \min\{0, g_i(x)\}\Big\} \subset \operatorname{Arg} P.$$

## 3. Скаляризация задач последовательной (лексикографической) оптимизации с точной идентификацией оптимального множества

Пусть $K(l)$ — класс выпуклых кусочно-линейных функций, определенных на топологическом векторном пространстве $\mathbb{X}$, $\{f_j(x)\}_1^m \subset K(l)$, $f_0(x)$ — непрерывная выпуклая функция. Зафиксируем упорядочение этих функций, например: $m, m-1, \ldots, 1, 0$ и сформулируем задачу последовательного (лексикографического) программирования как *заключительную* из серии задач

$$P_s : \min\{f_{m-s+1}(x) \mid x \in \operatorname{Arg}(P_{s-1})\}, \qquad s = 1, \ldots, m, m+1;$$

здесь $\operatorname{Arg}(P_0) := M$ — заданное выпуклое полиэдральное множество. Задаче $P_{\text{lex}}$ $(:= P_{m+1})$ поставим в соответствие задачу

$$P : \min\Big\{ f_0(x) + \sum_{j=1}^{m} r_j f_j(x) \mid x \in M\Big\}.$$

**Утверждение** [9]. *Пусть задача $P_{\text{lex}}$ разрешима. Тогда существует область конструктивно определяемых параметров $r_j > 0$ таких, что* $\operatorname{Arg} P_{\text{lex}} = \operatorname{Arg} P$.

## 4. Двухступенные задачи оптимизации и регуляризация по Тихонову [6, 9]

Выпишем частный случай задачи предыдущего пункта, а именно:

$$\min\{\Omega(x) \mid x \in \mathrm{Arg} P_l\}, \tag{1}$$

где $P_l : \min\{f_0(x) \mid f_j(x) \le 0,\ j = 1, \ldots, l\}$ (здесь имеют место переобозначения). С (1) свяжем задачу

$$\min\{f_0(x) + \alpha\,\Omega(x) \mid x \in M_0\}, \tag{2}$$

где $M_0 = \{x \mid f_j(x) \le 0,\ j = 1, \ldots, m\}$. Пусть $\{f_j(x)\}_0^m \subset K(l)$, $\Omega(x)$ — равномерно выпуклая на $M_0$ функция.

**Утверждение.** *Если $u_0$ — двойственная оценка неравенства $f_0(x) \le \mathrm{opt} P_l$ в задаче $\min\{\Omega(x) \mid x \in M_0,\ f_0(x) \le \mathrm{opt} P_l\}$ (эквивалентной задаче (1)), то $\mathrm{Arg}(1) = \mathrm{Arg}(2)$ при любом $0 < \alpha < (|u_0| + \varepsilon)^{-1}$; здесь $\varepsilon$ — любое как угодно малое положительное число.*

П р и м е ч а н и е. Если $X = \mathbb{R}^n$, $\Omega(x) = \|x\|^2$, $f_j(x) = (a_j, x) - b_j$ $(j = 0, \ldots, m)$, то (2) — задача регуляризации (по Тихонову) задачи линейного программирования, дающая ее нормальное (минимальное по норме) решение с обеспечением устойчивости (свойства разрешимости) по всей системе данных $\{a_j, b_j\}_0^m$ исходной задачи (в предположении условия Слейтера: $\exists\, p$, $(a_j, p) - b_j < 0$, $j = 1, \ldots, m$).

## 5. Симметричная двойственность для задач последовательного линейного программирования

Пусть $L_{\mathrm{lex}}$ — задача $P_{\mathrm{lex}}$ из разд. 3, но в линейной постановке и с параметрическим заданием правых частей системы линейных ограничений, т.е. (в матричной записи)

$$L_p : \max\nolimits_p \left\{ \left[ \begin{array}{c} C^T x \\ (c_0, x) \end{array} \right] \,\middle|\, Ax \le b_0 + Br,\ x \ge 0 \right\};$$

здесь $C = [c_1, \ldots, c_k]$, $c_i \in \mathbb{R}^n$, $B = b_1, \ldots, b_l]$, $b_j \in \mathbb{R}^m$, $R^l \ni r \ge 0$, $p$ — некоторая перестановка индексов $\{s\}_0^k$ при одном лишь допущении, что 0 стоит на последнем месте. Символ $p$ в записи задачи $L_p$ задает порядок функций в последовательной оптимизации: $p = (i_1, \ldots, i_k, 0)$. Задаче $L_p$ ставится в соответствие симметрично двойственная задача

$$L_q^* : \min\nolimits_q \left\{ \left[ \begin{array}{c} B^T u \\ (b_0, u) \end{array} \right] \,\middle|\, A^T u \ge c_0 + CR,\ u \ge 0 \right\},$$

где $R^k \ni R \ge 0$, $q = (j_1, \ldots, j_l, 0)$. Задачам $L_p$ и $L_q^*$ поставим в соответствие скаляризованные задачи:

$$L_{p,\mathrm{scal}} : \max\{(c_0, x) + (C\bar{R}, x) \quad | \quad Ax \le b_0 + Br,\ x \ge 0\},$$

$$L_{q,\mathrm{scal}}^* : \min\{(b_0, u) + (B\bar{r}, u) \quad | \quad A^T u \ge c_0 + CR,\ u \ge 0\}$$

(векторы $\bar{R}$ и $\bar{r}$ имеют размерность векторов $R$ и $r$).

**Теорема.** *Пусть задачи $L_{ij} : \max\{(c_i, x) \mid Ax \le b_j,\ x \ge 0\}$ $(i = 0, \ldots, k;\ j = 0, \ldots, l)$ разрешимы. Существует непустая область конструктивно определяемых значений параметров $r \ge 0$ и $R \ge 0$ таких, что*

$$\mathrm{Arg} L_p = \mathrm{Arg} L_{p,\mathrm{scal}}\Big|_{\overline{R} = R} \ne \varnothing,$$

$$\mathrm{Arg} L_q^* = \mathrm{Arg} L_{q,\mathrm{scal}}^*\Big|_{\bar{r} = r} \ne \varnothing.$$

Задачи $L_{p,\mathrm{scal}}$ и $L_{q,\mathrm{scal}}^*$ взаимно двойственны в классическом смысле, поэтому их оптимальные значения совпадают [10–12].

Перенос рассмотренной двойственности на ситуацию парето-лексикографических задач оптимизации, в частности в предположениях несобственности, реализован в работах [13–15].

## 6. Двойственность для несобственных задач линейного программирования [6, 16, 17]

Пусть системы ограничений прямой $L : \sup\{(c,x) \mid Ax \le b,\ x \ge 0\}$ и двойственной $L^*$ : $\inf\{(b,u) \mid A^T u \ge c,\ u \ge 0\}$ задач ЛП произвольным образом разбиты на подсистемы вида $A_j x \le b^j$, $j = 0,\ldots,m_0$ и $B_i^T u \ge c^i$, $i = 0,\ldots,n_0$ соответственно, при этом предполагается, что $M_0 := \{x \ge 0 \mid A_0 x \le b^0\} \ne \varnothing$ и $M_0^* := \{u \ge 0 \mid B_0^T u \ge c^0\} \ne \varnothing$. Построим задачи

$$P : \sup\Big\{F(x) := (c,x) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j \,\|(A_j x - b^j)^+\|_j \;\Big|\; x \in M_0,\ \|x^i\|_i \le r_i,\ i = 1,\ldots,n_0\Big\}$$

и

$$P^{\#} : \inf\Big\{F^{\#}(u) := (b,u) + \sum_{i=1}^{n_0} r_i \,\|(c_i - B_i^T u)^+\|_i^* \;\Big|\; u \in M_0^{\#},\ \|u^j\|_j^* \le R_j,\ j = 1,\ldots,m_0\Big\};$$

здесь $\{u^j\}$ и $\{x^i\}$, а также $\{b_j\}$ и $\{c^i\}$ — разрезы векторов $u$ и $x$, а также $b$ и $c$ на подвекторы, соответствующие разрезу матрицы $A$ на горизонтальные и вертикальные подматрицы $A_j$ и $B_i$; $\{\|\cdot\|_j\}_1^{m_0}$ и $\{\|\cdot\|_i\}_1^{n_0}$ — наборы норм в пространствах соответствующей размерности, монотонных вместе со своими сопряженными нормами $\{\|\cdot\|_j^*\}$, $\{\|\cdot\|_i^*\}$; $\{R_j, r_i\}_1^{m_0,n_0}$ — неотрицательные параметры.

**Теорема.** *Пусть $L$ — произвольная задача ЛП (без предположения разрешимости), $r_i$ и $R_j$ выбраны из условий $M(r,R) := \{x \in M_0 \mid \|x^i\|_i < r_i,\ i = 1,\ldots,n_0\} \ne \varnothing$ и $M^{\#}(r,R) := \{u \in M_0^* \mid \|u^j\|_j^* < R_j,\ j = 1,\ldots,m_0\} \ne \varnothing$. Тогда*

(a) *если* ($\#$) *— правило перехода от $P$ к $P^{\#}$, то $(P^{\#})^{\#} = P$ (взаимная двойственность);*

(b) $x \in M(r,R)$ & $u \in M^{\#}(r,R) \Rightarrow F(x) \le F^{\#}(u)$;

(c) $\mathrm{opt}P = \mathrm{opt}P^{\#}$;

(d) *если* $\sup$ *в $P$ достигается, то* $\inf$ *в $P^{\#}$ также достигается.*

## 7. Фейеровские методы в линейном и выпуклом программировании [18–20]

В основу метода поиска точки из некоторого допустимого (или эффективного) множества $M \subset \mathbb{R}^n$ может быть положена идея линейной разделимости текущей точки $x_k$ вычислительного процесса и множества $M$ с последующей релаксацией относительно разделяющей гиперплоскости $H_k = \{x \mid l_k(x) := (a_k, x) - \alpha_k = 0\}$. Если $l_k(x_k) > 0$, $l_k(x) \le 0$, $\forall\, x \in M$, то в качестве очередного приближения $x_{k+1}$ можно взять проекцию $\pi_{P_k}(x_k)$ элемента $x_k$ на полупространство $P_k = \{x \mid l_k(x) \le 0\}$, т.е.

$$x_{k+1} = \pi_{P_k}(x_k) = x_k - \lambda \,\frac{l_k^+(x)}{\|a_k\|^2}\, a_k$$

с релаксационным коэффициентом $\lambda \in (0,2)$. Таким образом сгенерированная последовательность $\{x_k\}$ при регулярном построении гиперплоскостей $H_k$ будет сходиться к точке $\bar{x} \in M$.

Дадим конкретные реализации для задачи решения конечных систем выпуклых неравенств:

$$f_j(x) \le 0, \qquad j = 1,\ldots,m,$$

с множеством решений $M$. Полагая

$$\varphi_j(x) = \Big\{x - \lambda_j \,\frac{f_j^+(x)}{\|h_j\|^2}\, h_j \;\Big|\; h_j \in \partial f_j(x)\Big\}, \qquad \lambda_j \in 0,2), \qquad j = 1,\ldots,m,$$

образуем точечно-множественные отображения

$$\Psi_1(x) = \varphi_1 \dots \varphi_m(x); \qquad \Psi_2(x) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \varphi_j(x), \ \text{ где } \ \alpha_j > 0, \qquad \sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1;$$

$$\Psi_3(x) = x - \lambda_{jx} \frac{f_{jx}^{+}(x)}{\|h_{jx}\|^2} h_{jx}, \ \text{ где } \ j_x : \max_{(j)} f_j^{+}(x) = f_{j_k}^{+}(x).$$

**Теорема.** *При любом начальном $x_0$ последовательность, индуктивно порожденная соотношением $x_{k+1} \in \Psi_s(x_k)$, сходится к элементу из $M$ (для каждого $s = 1, 2, 3$).*

Точечно-множественные итерационные отображения $\Psi_s(x)$ обладают свойствами:

$$\Psi_s(y) = y, \qquad \forall\, y \in M; \qquad \|z - y\| < \|x - y\|, \qquad \forall\, y \in M, \qquad \forall\, x \notin M, \qquad \forall\, z \in \Psi_s(x).$$

Такие отображения называются *$M$-фейеровскими.*

В [20, гл. II] рассмотрены теория фейеровских отображений и ее применение к решению задач линейного и выпуклого программирования.

## 8. Кусочно-линейные функции и задачи альтернативного (дизъюнктивного) программирования [21–23]

Кусочно-линейные непрерывные функции ($k$-функции) имеют несколько стандартных представлений, например,

$$|Ax - b|_{\max} - |Bx - d|_{\max}, \qquad \min_{(i)} |A_i x - b^i|_{\max},$$

где $|z|_{\max} = \max\limits_j z_j$. Эти функции допускают конструктивную алгебру, дающую возможность любую задачу кусочно-линейного программирования привести к стандартному виду:

$$\max\{(c, x) \mid \min_{j=1,\dots,m} |A_j x - b^j|_{\max} \le 0, \ x \ge 0\}. \tag{3}$$

Ее допустимая область задается объединением $M = \bigcup\limits_{j=1}^{m} M_j$, $M_j = \{x \ge 0 \mid A_j x \le b^j\}$. Задаче (3) поставим в соответствие три объекта:

1. $$\max_{j: M_j^* \ne \varnothing} \min\{(b^j, u) \mid A_j^T u \ge c, \ u \ge 0\}, \tag{3$^*$}$$

где $M_j^* = \{u \ge 0 \mid A_j^T u \ge c, \ u \ge 0\}$; выше предполагается, что размерность векторов $A_j x - b^j$ одинакова;

2. $L_\cup(x, u) = (c, x) - \min\limits_{(j)}(u_j, A_j x - b^j)$ — дизъюнктивная функция Лагранжа, отвечающая задаче (3);

3. $F_R(x) = (c, x) - \min\limits_{(j)}(R_j, (A_j x - b^j)^+)$ — точная штрафная функция, отвечающая задаче (3).

**Теорема.** (a) *Если задача* (3) *разрешима и $M_j \ne \varnothing\ \forall\, j$, то функция $L_\cup(x, u)$ обладает седлом.*
(b) *Если задача* (3) *разрешима, то двойственная к ней задача* (3)$^*$ *также разрешима и их оптимальные значения совпадают.*
(c) *Пусть задача* (3) *разрешима, $\forall\, j : M_j \ne \varnothing$; $\bar u_j \in \operatorname{Arg} L_j^*$, где $L_j^*$ — задача, двойственная к $L_j : \max\{(c,\ x) \mid A_j x \le b^j,\ x \ge 0\}$. Если $R_j \ge R_0\, \bar u_j$, $R_0 > 1$, то оптимальные значения и оптимальные множества задач* (3) *и $\max\limits_{x \ge 0} F_R(x)$ совпадают.*

## 9. Развитие проблематики, приведенной выше

Ниже следует список некоторых работ автора и аннотаций к ним, которые выполнены в период 2001–2007 годов и развивают проблематику, данную в разд. 1–8.

**9.1.** *Двойственность в линейной оптимизации.* Екатеринбург: УрО РАН, 2001.

Книга посвящена вопросам теории двойственности для линейных залач оптимизации, а именно двойственности для стандартных задач линейного программирования, несобственных, лексикографических, парето-лексикографических и дизъюнктивных. Двойственность является базовой идеей теории математического, в частности, линейного, программирования, позволяющей на ее основе осуществлять конструктивный анализ моделей оптимизации.

**9.2.** *Синтез фейеровских отображений с несовпадающими пространствами их образов* // Докл. РАН. 2001. Т. 378, № 1. С. 11–13.

Рассматриваются методы синтеза $M$-фейеровских отображений, $M \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n_m} \times \mathbb{R}^s$, по системе $M_i$-фейеровских отображений, $M_i \subset \mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}^s$. Построенные методы синтеза применяются к решению континуальных систем выпуклых неравенств со спецификой как в структуре систем, так и в структуре их переменных. Метод демонстрируется на примере вогнуто-выпуклой игры двух лиц с нулевой суммой, редуцируемой к континуальной системе выпуклых неравенств специального вида.

**9.3.** *About disjunctive optimization* //in: Semi-infinite programming. Netherlands: Kluwer Academic Publishers / Ed. by M.Á. Goberna and M.A. López. 2001. P. 45–58.

In this paper we investigate the problems of disjunctive programming with an infinite array of components forming a feasible set (as their union). The investigation continues a theme of the author's articles and describes original conceptual approach to (a) analysis of saddle point problems for disjunctive Lagrangian functions, (b) analysis of dual relations for disjunctive programming problems and (c) technique of equivalent (on argument) reduction of such problems to the problems of unconstrained optimization.

**9.4.** *Theory of linear optimization.* Ser. Inverse and ill-posed problems. Utrecht: VSP, 2002.

*Содержание:*

Chapter IV. PROBLEMS OF SUCCESSIVE LINEAR PROGRAMMING AND DUALITY

28. The scheme of duality formation in linear successive programming. 29. Solvability conditions for lexicographic optimization problems. 30. The duality theorem. 31. Reduction of lexicographic optimization problems to system of linear inequalities. 32. Lexicographic duality for improper LP problem — the special case. 33. Duality for improper LP problems in lexicographic interpretation. 34. Symmetric duality for the Pareto optimization problem.

Chapter V. STABILITY AND WELL-POSEDNESS OF LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS

35. Necessary definitions and auxiliary results. 36. Stability of the linear programming problem. 37. Well-posedness of linear programming problems. 38. The Tikhonov regularization of linear programming problems.

Chapter VI. METHODS OF PROJECTION IN LINEAR PROGRAMMING

39. Fejér mappings and their properties. 40. Basic constructions of Fejér mappings for algebraic polyhedrons. 41. Decomposition and parallelizing of Fejér processes. 42. Randomization of Fejér processes. 43. Fejér processes and inconsistent systems of linear inequalities. 44. Fejér processes for regularized LP problems.

Chapter VII. PIECEWISE LINEAR FUNCTIONS AND PROBLEMS OF DISJUNCTIVE PROGRAMMING

45. Introductory considerations. 46. Sigma-extensions of linear functional spaces. 47. The problem on the saddle point of the disjunctive Lagrange function. 48. Piecewise linear functions and systems of piecewise linear inequalities. 49. The problem of piecewise linear programming. 50. Duality for improper problems of piecewise linear programming. 51. The method of exact penalty functions for the problem of piecewise linear programming. 52. Questions of polyhedral separability.

Appendix. ELEMENTS OF CONVEX ANALYSIS AND CONVEX PROGRAMMING

A1. Convex sets and convex functions. A2. Subdifferentiability of convex functions. A3. The problem of convex programming. A4. The theorem on marginal values. A5. The penalty function method for problems of nonlinear programming. A6. An estimate of deviation with respect to the argument in the asymptotic penalty method.

**9.5.** *Fejér processes for infinite systems of convex inequalities* // Proc. of the Steklov Inst. of Math. Suppl. 1. 2002. P. S32–S51.

The paper deals with mathematical tools of Fejér maps for construction of iterative procedures for solution of infinite (in particular, continual) systems of convex inequalities in $\mathbb{R}^n$.

**9.6.** *Симметричная двойственность для лексикографической задачи линейного программирования* // Экономико-математический энциклопедический словарь. М.: Издательский дом “ИНФРА-М”; Большая Российская энциклопедия, 2003. С. 113–114.

**9.7.** *Фейеровские процессы: синтез и рандомизация* // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2004. Т. 10, № 2. С. 58–68.

Рассматриваются итерационные процессы фейеровского типа, сходящиеся к одной из неподвижных точек фейеровского оператора. Предложен метод синтеза оператора по системе фейеровских отображений с различными пространствами их образов. Такой прием позволяет повысить эффективность итерационных методов для сильно структурированных систем линейных и выпуклых неравенств. Рассмотрены также варианты рандомизированных процессов, порождаемых вероятностными фейеровскими отображениями.

**9.8.** *Идентификация штрафных констант в методах точных штрафных функций* // Докл. РАН. 2005. Т. 402, № 6. С. 737–739.

Работа посвящена вопросам характеризации штрафных санкций в методах точных штрафных функций, имеющих фундаментальное значение в математическом программировании. Сформулированные теоремы дают исчерпывающий ответ о связях между выбором штрафных констант и этому выбору соответствующих свойств исходной задачи. В рамках рассматриваемых вопросов затрагиваются как разрешимые, так и неразрешимые задачи. В качестве аппарата выступает теория двойственности в математическом программировании.

**9.9.** *Операторы и итерационные процессы фейеровского типа (теория и приложения)*, в соавторстве с В.В. Васиным. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2005.

В книге дано систематическое изложение конструктивных итерационных методов решения некоторых классов задач, порождаемых операторами фейеровского (квазисжимающего) типа. Круг исследуемых проблем включает линейные и нелинейные некорректные задачи (операторные уравнения первого рода) с априорными ограничениями, системы линейных и выпуклых неравенств, собственные и несобственные задачи линейного и выпуклого программирования.

**9.10.** *Теория двойственности в линейной оптимизации.* Челябинск: Южно-Уральский госуниверситет, 2005.

Книга посвящена вопросам теории двойственности для линейных задач оптимизации, а именно: двойственность для стандартных задач линейного программирования, несобственных, лексикографических, парето-лексикографических и дизъюнктивных.

**9.11.** *Прямо-двойственные фейеровские методы для задач квадратичного программирования* // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 1. С. 86–97.

Рассматривается $S$-*технология*, реализующая редукцию выпуклых задач квадратичного программирования к решению систем линейных и одного выпуклого неравенств. К последним применяется тот или иной вариант фейеровского метода. Решается, в частности, вопрос о конструктивной отделимости выпуклых полиэдральных множеств слоем наибольшей толщины. Этот алгоритм играет важную роль в задачах дискриминантного анализа.

**9.12.** *Итеративная отделимость непересекающихся многогранников* // Тр. междунар. семинара. Екатеринбург: Изд-во УрГУ, 2006. Т. 2. С. 16–24.

Рассматривается задача разделения двух непересекающихся многогранников слоем наибольшей толщины. Вычислительная схема решения задачи состоит в ее редукции к системе линейных и одного выпуклого неравенства, последняя решается путем применения к ней фейеровского процесса. Возможность указанной редукции основывается на теореме двойственности в выпуклом программировании. В целом же сформулированная цепочка действий названа $S$-*технологией*. Разделимость непересекающихся многогранников слоем наибольшей толщины играет важную роль для задач дискриминантного анализа в распознавании образов.

**9.13.** *Фейеровские методы сильной отделимости выпуклых полиэдральных множеств* // Изв. вузов. Математика. 2006. № 12(535). С. 33–43.

Предлагается метод редукции задач выпуклого квадратичного программирования (в разных постановках) к некоторой конструктивно задаваемой системе линейных и одного выпуклого неравенства, а для решения последней подключается фейеровский процесс. Редукция осуществляется путем формирования симметрической системы неравенств, являющейся результатом объединения ограничений прямой и двойственной задач и одного неравенства, связывающего их целевые функции. Далее эта система упрощается за счет гауссовских исключений. В целом сформулированный процедурный процесс в работе назван $S$-технологией.

По схеме $S$-технологии предложены методы решения общих задач квадратично-выпуклого программирования, а также задачи отделимости непересекающихся выпуклых полиэдров слоем максимальной толщины при разных заданиях этих полиэдров, а именно: при задании либо системами линейных неравенств, либо выпуклыми оболочками конечного числа точек. Рассмотрен и смешанный вариант. В статье указывается на области приложимости рассмотренных алгоритмов.

**9.14.** *Линейная оптимизация и системы линейных неравенств.* М.: изд. центр "Академия", 2007.

Книга посвящена анализу линейных моделей оптимизации: линейному программированию с одним и многими критериями, последовательной и несобственной оптимизации. Сквозным образом исследуются вопросы двойственности для всех рассматриваемых типов задач. Рассмотрены также проблемы устойчивости и методы проектирования решения задач оптимизации.

**9.15.** *Методы распараллеливания фейеровских процессов* // Тр. междунар. конф. "Параллельные вычислительные технологии" (ПаВТ'2007). Челябинск: Южно-Уральский госуниверситет, 2007. Т. 1. С. 24–27.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Еремин И.И.** Итеративный метод для чебышевских приближений несовместных систем линейных неравенств // Докл. АН СССР. 1962. Т. 143, № 6. С. 1254–1256.
2. **Еремин И.И.** О системах неравенств с выпуклыми функциями в левых частях // Известия АН СССР. Сер. математическая. 1966. Т. 306, № 2. С. 265–278.
3. **Еремин И.И.** О методе "штрафов" в выпуклом программировании // Тез. докл. междунар. конгресса математиков. Москва, 1966. Тетрадь № 14. С. 34.
4. **Еремин И.И.** Метод "штрафов" в выпуклом программировании // Докл. АН СССР. 1967. Т. 173, № 4. С. 748–751.
5. **Еремин И.И.** О методе "штрафов" в выпуклом программировании // Кибернетика. 1967. № 4. С. 63–68.
6. **Еремин И.И.** Противоречивые модели оптимального планирования. М.: Наука, 1988.
7. **Еремин И.И.** К методу штрафов в математическом программировании // Докл. АН СССР. 1996. Т. 346, № 4. С. 459–461.
8. **Zangwill W.I.** Non-linear programming via penalty function // Management Sci. 1967. No. 13(5). P. 344–358.
9. **Еремин И.И.** О задачах последовательного программирования // Сиб. мат. журн. 1973. Т. 14, № 1. С. 53–63.
10. **Еремин И.И.** Симметричная двойственность для задач последовательного линейного программирования // Докл. АН СССР. 1991. Т. 317, № 5. С. 1045–1048.
11. **Еремин И.И.** Лексикографическая двойственность для несобственных задач линейного и квадратичного программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 1. С. 178–191.
12. **Еремин И.И.** Двойственность для парето-последовательных задач линейной оптимизации // Изв. вузов. Математика. 1993. № 12(379). С. 3–10.
13. **Еремин И.И.** Парето-последовательная задача линейной оптимизации и двойственность // Докл. РАН. 1994. Т. 334, № 2. С. 141–143.
14. **Еремин И.И.** Двойственность для парето-последовательных задач линейного программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1995. Т 3. С. 245–260.
15. **Еремин И.И.** Двойственность для несобственных задач паретовской и лексикографической линейной оптимизации // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1996. Т. 4. С. 322–336.
16. **Еремин И.И.** Двойственность для несобственных задач линейного и выпуклого программирования // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256, № 2. С. 272–276.
17. **Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983.
18. **Еремин И.И.** Релаксационный метод решения систем неравенств с выпуклыми функциями в левых частях // Докл. АН СССР. 1965. Т. 160, № 5. С. 994–996.
19. **Еремин И.И.** О системах неравенств с выпуклыми функциями в левых частях // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1966. Т. 30. Вып. 2. С. 265–278.
20. **Еремин И.И., Мазуров В.Д.** Нестационарные процессы математического программирования. М.: Наука, 1979.
21. **Еремин И.И.** Некоторые вопросы кусочно-линейного программирования // Изв. вузов. Математика. 1997. № 12(427). С. 49–61.
22. **Еремин И.И.** Сигма-кусочные функции и задачи дизъюнктивного программирования // Докл. РАН. 1998. Т. 358, № 5. С. 588–590.
23. **Еремин И.И.** Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: Изд-во "Екатеринбург", 1999.


Поступила 17.02.2008

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14 № 2 2008

УДК 519.854

# ПРЯМОЙ МЕТОД НЬЮТОНА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ПОЛУОПРЕДЕЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

**В. Г. Жадан**

Рассматривается линейная задача полуопределенного программирования. Для ее решения предлагается прямой метод Ньютона, который является обобщением прямого барьерно-ньютоновского метода для задач линейного программирования. Исследуются свойства метода и доказывается его локальная сходимость.

## Введение

Задачи линейной оптимизации являются одними из основных в математическом программировании, и им постоянно уделяется огромное внимание. Большой вклад в теорию и методы решения таких задач внес И. И. Еремин [1]. В настоящей работе рассматривается линейная задача полуопределенного программирования, в которой переменными являются симметричные положительно полуопределенные матрицы. За последние годы был получен ряд значительных результатов, касающихся как существования и единственности решений линейных задач данного вида, так и численных методов нахождения их решений (см., напр., [2–4]).

В [5] для решения линейной задачи полуопределенного программирования (в дальнейшем просто задача полуопределенного программирования) был предложен метод внутренней точки, который является обобщением разработанного ранее в [6] барьерно-проективного метода для задач линейного программирования. Метод является прямым, двойственные переменные в нем выбираются из условия уменьшения невязки ограничений типа равенства по определенному закону. Была доказана локальная сходимость непрерывного и дискретного вариантов метода. Так как данный метод относится к классу градиентных методов, скорость его сходимости оказывается лишь линейной.

В настоящей работе рассматривается метод, который обладает более высокой, чем линейная, скоростью сходимости. В отличие от метода из [5], где по существу с помощью метода простой итерации решается уравнение, описывающее условие дополняющей нежесткости, здесь для этой цели используется метод Ньютона.

В разделе 1 настоящей работы приводится постановка задачи полуопределенного программирования. В разделе 2 рассматривается вопрос о выборе двойственных переменных. Итерационный процесс прямого метода Ньютона строится в разд. 3, в разд. 4 доказывается его локальная сходимость. Через $\mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n)$, или просто $D(a)$, в работе обозначается диагональная матрица с компонентами вектора $a = [a_1, \ldots, a_n]$ на диагонали, через $\mathrm{diag}\, A$ — диагональ матрицы $A$. Символ $\otimes$ используется для обозначения произведения матриц по Кронекеру. Угловые скобки служат для обозначения обычного евклидова скалярного произведения. Вектор-столбец, состоящий из прямой суммы столбцов матрицы $M$, обозначается $\mathrm{vec}\, M$. Если матрица $M$ — симметричная, то с ней также связывается вектор-столбец $\mathrm{vech}\, M$, в который помещаются последовательно сверху вниз столбцы матрицы $M$, но не полностью, а только их части, начинающиеся с диагонального элемента.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00608а), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-5073.2008.1) и Программы фундаментальных исследований ОМН РАН № 3 (проект 3.14).

## 1. Задача полуопределенного программирования

Пусть $\mathcal{S}^n$ обозначает пространство симметричных матриц порядка $n$. Пусть, кроме того, $\mathcal{S}^n_+$ и $\mathcal{S}^n_{++}$ — подмножества из $\mathcal{S}^n$, состоящие соответственно из положительно полуопределенных и положительно определенных матриц. Множество $\mathcal{S}^n_+$ является конусом в $\mathcal{S}^n$, множество $\mathcal{S}^n_{++}$ — его внутренностью. Для указания на то, что матрица $M \in \mathcal{S}^n$ положительно полуопределена (положительно определена), будем пользоваться также неравенством $M \succeq 0$ ($M \succ 0$). Конус $\mathcal{S}^n_+$ не является полиэдральным, его размерность равняется так называемому "треугольному числу" $k_\triangle(n) = n(n+1)/2$.

Скалярное (внутреннее) произведение двух матриц $L$ и $M$ из $\mathcal{S}^n$ определяется как след матрицы $L^TM$ и обозначается

$$L \bullet M = \mathrm{tr}\,(L^TM) = \sum_{i,j=1}^{n} l_{ij}m_{ij},$$

где $l_{ij}$ и $m_{ij}$ — $(ij)$-элементы соответственно матриц $L$ и $M$. Если $L$ и $M$ — две положительно полуопределенные матрицы, то $L \bullet M \geq 0$ и $L \bullet M = 0$ в том и только том случае, когда $LM = ML = 0_{nn}$. Более того, согласно теореме Фейера (о следе), матрица $M \in \mathcal{S}^n$ положительно полуопределена тогда и только тогда, когда $M \bullet L \geq 0$ для всех $L \succeq 0$, т.е. конус $\mathcal{S}^n_+$ является *самосопряженным.*

Рассмотрим задачу полуопределенного программирования следующего вида:

$$\begin{array}{rcll} \min\ C \bullet X, & & & \\ A_i \bullet X & = & b^i, & \quad i = 1, \ldots, m, \\ X & \succeq & 0, & \end{array} \tag{1}$$

где матрицы $C$, $X$ и $A_i$, $1 \leq i \leq m$, принадлежат множеству $\mathcal{S}^n$. Если от всех матриц дополнительно потребовать, чтобы они были диагональными, то (1) переходит в обычную задачу линейного программирования.

Двойственной к (1) является задача

$$\begin{array}{rcl} \max\ \langle b, u \rangle, & & \\ \sum\limits_{i=1}^{m} u^i A_i + V & = & C, \\ V & \succeq & 0, \end{array} \tag{2}$$

в которой $b = (b^1, \ldots, b^m)^T \in \mathbb{R}^m$, $V \in \mathcal{S}^n$. Предполагается, что задача (1) имеет решение и что матрицы $A_i$, $1 \leq i \leq m$, линейно независимы.

Обозначим допустимые множества в прямой и двойственной задачах соответственно $\mathcal{F}_P$ и $\mathcal{F}_D$, т.е.

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}_P & = & \left\{ X \in \mathcal{S}^n_+ :\ A_i \bullet X = b^i, \quad i = 1, \ldots, m \right\}, \\ \mathcal{F}_D & = & \left\{ u \in \mathbb{R}^m :\ C - \sum\limits_{i=1}^{m} u^i A_i \succeq 0 \right\}. \end{array}$$

Обозначим также

$$f_* = \inf_{X \in \mathcal{F}_P} C \bullet X, \qquad f^* = \sup_{u \in \mathcal{F}_D} \langle b, u \rangle.$$

Для любых $X \in \mathcal{F}_P$ и $u \in \mathcal{F}_D$ выполняется неравенство *слабой двойственности*: $\langle b, u \rangle \leq C \bullet X$. Если $f_* = f^*$, то говорят, что задачи (1) и (2) находятся в *совершенной двойственности* (однако при этом одно из значений $f_*$ или $f^*$ может не достигаться). В случае, когда

$\langle b, u\rangle = C \bullet X$ для некоторых $X \in \mathcal{F}_P$ и $u \in \mathcal{F}_D$, имеет место *строгая двойственность*. Условия регулярности ограничений Слейтера позволяют гарантировать существование строгой двойственности (см., напр., [4]).

**Теорема 1.** *Пусть в задачах* (1) *и* (2) *выполнено условие регулярности ограничений Слейтера, т.е. множества*

$$\mathcal{F}_P^0 = \left\{X \in \mathcal{S}^n_{++}:\ A_i \bullet X = b^i, \quad i = 1, \ldots, m\right\},$$

$$\mathcal{F}_D^0 = \left\{u \in \mathbb{R}^m:\ C - \sum_{i=1}^m u^i A_i \succ 0\right\}$$

*непусты. Тогда* $f_* = f^*$ *и существуют решения обеих задач.*

Если $X_*$ и $[u_*, V_*]$ — оптимальные решения соответственно задач (1) и (2), то $X_* \bullet V_* = 0$. Но для матриц $X_*$ и $V_* \in \mathcal{S}^n_+$ данное равенство выполняется тогда и только тогда, когда $X_* V_* = V_* X_* = 0_{nn}$. Отсюда следует, что оптимальные матрицы $X_*$ и $V_*$ коммутируют. Поэтому найдется ортогональная матрица $Q$ такая, что

$$X_* = Q\,\mathrm{Diag}\,(\eta_*)Q^T, \qquad V_* = Q\,\mathrm{Diag}\,(\theta_*)Q^T, \tag{3}$$

где $\eta_* = [\eta_*^1, \ldots, \eta_*^n]$ и $\theta_* = [\theta_*^1, \ldots, \theta_*^n]$ — собственные значения матриц $X_*$ и $V_*$, соответственно. Для самих собственных значений $\eta_*^i$ и $\theta_*^i$ выполняется *условие дополнительности*: $\eta_*^i \theta_*^i = 0$, $1 \le i \le n$. *Условие строгой дополнительности* означает, что для каждого $1 \le i \le n$ одно из значений $\eta_*^i$ или $\theta_*^i$ строго положительно. В этом случае решения $X_*$ и $V_*$ называют *строго комплементарными.*

В отличие от задач линейного программирования, для которых если существуют оптимальные решения, то существуют и строго комплементарные оптимальные решения, для задач полуопределенного программирования данное свойство не всегда выполняется.

## 2. Выбор двойственных переменных

Пусть $X$ и $V$ — симметричные матрицы. Обозначим через $X * V$ их симметризованное произведение

$$X * V = \frac{1}{2}\left(XV + VX\right).$$

**Утверждение 1.** *Для матриц* $X \in \mathcal{S}^n_+$ *и* $V \in \mathcal{S}^n_+$ *равенство* $X * V = 0_{nn}$ *возможно в том и только том случае, когда* $XV = VX = 0_{nn}$.

Доказательство. Достаточность очевидна. Покажем необходимость.
Пусть $X * V = 0$. Тогда $XV = -(XV)^T$, следовательно, матрица $XV$ — кососимметричная. У вещественной кососимметричной матрицы на диагонали расположены нулевые элементы, поэтому $X \bullet V = \mathrm{tr}(XV) = 0$. Так как $X \succeq 0$ и $V \succeq 0$, отсюда заключаем, что $XV = VX = 0_{nn}$. □

Возьмем теперь в качестве $V$ матрицу

$$V = V(u) = C - \sum_{i=1}^m u^i A_i, \tag{4}$$

где $u = [u^1, \ldots, u^m]^T$ — вектор двойственных переменных. Выберем вектор $u$ таким образом, чтобы выполнялось условие

$$A_i \bullet (X * V(u)) = \tau\left(A_i \bullet X - b^i\right), \qquad 1 \le i \le m, \tag{5}$$

где $\tau > 0$ — некоторый параметр. После подстановки (4) в (5) приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно вектора $u$:

$$A_i \bullet \left[X * \left(C - \sum_{j=1}^{m} u^j A_j\right)\right] = \tau \left(A_i \bullet X - b^i\right), \qquad 1 \le i \le m.$$

Данная система может быть переписана следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{m} \left[A_i \bullet (X * \mathcal{A}_j)\right] u^j = A_i \bullet (X * C) + \tau \left(b^i - A_i \bullet X\right), \quad 1 \le i \le m. \tag{6}$$

Пусть $\mathcal{A}$ — $(mn \times n)$-матрица, составленная из матриц $A_i$, $1 \le i \le m$,

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}.$$

Пусть, кроме того,

$$\Gamma(X) = \mathcal{A} \bullet (X * \mathcal{A}^T).$$

Матрица $\Gamma(X)$ — квадратная симметричная порядка $m$, ее $(i, j)$-й элемент равняется

$$\left(\mathcal{A} \bullet (X * \mathcal{A}^T)\right)_{ij} = A_i \bullet (X * A_j) = A_j \bullet (X * A_i) = \left(\mathcal{A} \bullet (X * \mathcal{A}^T)\right)_{ji}.$$

Обозначим также через $\mathcal{A} \bullet X$ и $\mathcal{A} \bullet (X * C)$ $m$-мерные векторы. Их $i$-е элементы равны соответственно

$$(\mathcal{A} \bullet X)^i = A_i \bullet X, \qquad (\mathcal{A} \bullet (X * C))^i = A_i \bullet (X * C).$$

В этих обозначениях систему (6) можно представить в следующем матричном виде:

$$\Gamma(X) u = \mathcal{A} \bullet (X * C) + \tau \left(b - \mathcal{A} \bullet X\right).$$

Если у матрицы $\Gamma(X)$ существует обратная, то отсюда находим

$$u = u(X) = \Gamma^{-1}(X) \left[\mathcal{A} \bullet (X * C) + \tau \left(b - \mathcal{A} \bullet X\right)\right]. \tag{7}$$

Поэтому

$$V(X) = V(u(X)) = C - \mathcal{A}^T \left\{ \left[\Gamma^{-1}(X) \left(\mathcal{A} \bullet (X * C) + \tau \left(b - \mathcal{A} \bullet X\right)\right)\right] \otimes I_n \right\}. \tag{8}$$

Рассмотрим условия, при которых матрица $\Gamma(X)$ оказывается невырожденной. Пусть $A$, $B$ и $X$ — произвольные матрицы из $\mathcal{S}^n$, причем матрица $X$ положительно определена. Положим $X^{1/2}$ — корень квадратный из $X$, т.е. $X = X^{1/2} X^{1/2}$. Тогда, учитывая симметричность всех матриц,

$$\begin{aligned} A \bullet (X * B) &= A \bullet ((X^{1/2} X^{1/2}) * B) \\ &= \mathrm{tr}\,(A X^{1/2} X^{1/2} B + A B X^{1/2} X^{1/2}) / 2 \\ &= [\mathrm{tr}\,(X^{1/2} B A X^{1/2}) + \mathrm{tr}\,(X^{1/2} A B X^{1/2})] / 2 \\ &= [\mathrm{tr}\,(\overline{B}^T \overline{A}) + \mathrm{tr}\,(\overline{A}^T \overline{B})] / 2, \end{aligned}$$

где введены обозначения: $\overline{A} = A X^{1/2}$, $\overline{B} = B X^{1/2}$. Поэтому $A \bullet (X * B) = \mathrm{tr}\,(\overline{A}^T * \overline{B})$ или $A \bullet (X * B) = (\overline{A} \bullet \overline{B} + \overline{B} \bullet \overline{A})/2$. Поскольку $\overline{A} \bullet \overline{B} = \overline{B} \bullet \overline{A}$, то

$$A \bullet (X * B) = \overline{A} \bullet \overline{B} = \overline{B} \bullet \overline{A}.$$

Согласно сказанному выше, $(i,j)$-й элемент матрицы $\Gamma(X)$ представим в виде $\overline{A}_i \bullet \overline{A}_j$, поэтому $\Gamma$ является матрицей Грама. Для существования обратной к ней матрицы необходимо и достаточно, чтобы матрицы $\overline{A}_i$, $1 \le i \le m$, были линейно независимы.

Обратимся к конусу положительно полуопределенных матриц $\mathcal{S}^n_+$. Положим

$$\mathcal{M}_r = \{X \in \mathcal{S}^n : \ \mathrm{rank}\ X = r\}, \qquad \mathcal{M}^+_r = \mathcal{S}^n_+ \bigcap \mathcal{M}_r.$$

Тогда границы конуса $\mathcal{S}^n_+$ и его внутренность могут быть представлены как

$$\partial \mathcal{S}^n_+ = \mathcal{M}^+_0 \bigcup \cdots \bigcup \mathcal{M}^+_{n-1}, \qquad \mathrm{int}\, \mathcal{S}^n_+ = \mathcal{M}^+_n.$$

Пусть $X$ — произвольная допустимая матрица из $\mathcal{F}_P$ и $\mathrm{rank}\ X = r$. Предположим также, что для $X$ имеет место разложение

$$X = Q\, \mathrm{Diag}\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0)\, Q^T, \tag{9}$$

где $Q$ — ортогональная матрица. Касательное пространство к $\mathcal{M}_r$ в $X$ определяется следующим образом [7]:

$$\mathcal{T}_X = \left\{ Q \begin{bmatrix} G & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix} Q^T : \ G \in \mathcal{S}^r \right\}.$$

Обозначим также

$$\mathcal{N}_{\mathcal{A}} = \{Y \in \mathcal{S}^n : \ A_i \bullet Y = 0, \ 1 \le i \le m\}$$

и приведем определение невырожденной точки для прямой задачи (1), следуя [8].

Определение 1. Точка $X \in \mathcal{F}_P$ называется *невырожденной*, если $\mathcal{T}_X + \mathcal{N}_{\mathcal{A}} = \mathcal{S}^n$.

Можно привести характеристику того, что $X \in \mathcal{F}_P$ является невырожденной точкой, используя представление (9). А именно, пусть $Q_1$ и $Q_2$ — подматрицы матрицы $Q$, состоящие соответственно из первых $r$ и последующих $n-r$ столбцов $Q$. Тогда $X$ будет будет невырожденной точкой $\mathcal{F}_P$ в том и только том случае, когда матрицы

$$B_i = \begin{bmatrix} Q_1^T A_i Q_1 & Q_1^T A_i Q_2 \\ Q_2^T A_i Q_1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad 1 \le i \le m, \tag{10}$$

линейно независимы. Если $X \in \mathcal{F}_P$ — невырожденная точка, причем $\mathrm{rank}\ X = r$, то необходимо, чтобы выполнялось неравенство $m \le k_\triangle(n) - k_\triangle(n-r)$.

**Утверждение 2.** *Пусть точка $X \in \mathcal{F}_P$ является невырожденной, тогда матрица* $\Gamma(X)$ *неособая.*

Доказательство. Как отмечено выше, достаточно показать, что матрицы $\overline{A}_i = A_i X^{1/2}$, $1 \le i \le m$, линейно независимы.

Пусть, от противного, матрицы $\overline{A}_i$ линейно зависимы. Тогда найдутся числа $c_1, \ldots, c_m$, не все равные нулю и такие, что

$$\sum_{i=1}^m c_i A_i X^{1/2} = \Bigl(\sum_{i=1}^m c_i A_i\Bigr) X^{1/2} = 0_{nn}. \tag{11}$$

Предположим, что матрица $X$ имеет ранг $r$, и пусть $\lambda$ — вектор, составленный из собственных значений матрицы $X$, первые $r$ из которых строго положительны, а последующие $n-r$ равны нулю. Пусть, кроме того, для $X$ имеет место представление (9). Тогда $X^{1/2} = QD^{1/2}(\lambda)Q^T$.

Равенство (11) может быть переписано в виде

$$Q\Bigl(\sum_{i=1}^m c_i Q^T A_i Q\Bigr) D^{1/2}(\lambda) Q^T = 0_{nn}. \tag{12}$$

Так как $Q$ — ортогональная матрица, то (12) выполняется в том и только том случае, когда

$$\Big(\sum_{i=1}^{m} c_i Q^T A_i Q\Big) D^{1/2}(\lambda) = 0_{nn}.$$

Отсюда следует, что существуют такие $c_1, \ldots, c_m$, не равные нулю одновременно, для которых левая $(n \times r)$-подматрица матрицы

$$\overline{Q} = \sum_{i=1}^{m} c_i Q^T A_i Q \tag{13}$$

является нулевой.

Используя представление (9), разобьем матрицы $Q^T A_i Q$ на блоки:

$$Q^T A_i Q = \left[\begin{array}{cc} Q_1^T A_i Q_1 & Q_1^T A_i Q_2 \\ Q_2^T A_i Q_1 & Q_2^T A_i Q_2 \end{array}\right], \qquad 1 \le i \le m.$$

В силу невырожденности точки $X$ и (10) матрицы

$$\left[\begin{array}{cc} Q_1^T A_i Q_1 & Q_1^T A_i Q_2 \\ Q_2^T A_i Q_1 & 0 \end{array}\right], \qquad 1 \le i \le m,$$

линейно независимы. Но тогда линейно независимыми должны быть $(n \times r)$-матрицы:

$$\left[\begin{array}{c} Q_1^T A_i Q_1 \\ Q_2^T A_i Q_1 \end{array}\right], \qquad 1 \le i \le m.$$

Поэтому не существует коэффициентов $c_1, \ldots, c_m$, обращающих левую $(n \times r)$-подматрицу матрицы (13) в нулевую матрицу. $\square$

Задачу (1) назовем *невырожденной*, если все точки $X$, принадлежащие множеству $\mathcal{F}_P$, не вырождены. Тогда в силу непрерывности существует некоторая окрестность множества $\mathcal{F}_P$, для точек из которой матрица $\Gamma(X)$ будет неособая и, следовательно, вектор $V(X)$ полностью определен. Ниже везде предполагается, что задача (1) является невырожденной.

## 3. Итерационный процесс

В [5] для решения задачи (1) предлагалось отыскивать предельные при $t \to +\infty$ точки решения задачи Коши

$$\frac{dX}{dt} = -X * V(X), \qquad X_0 = X(0) \in \mathcal{S}^n_{++}. \tag{14}$$

Матрица $X \in \mathcal{F}_P$ такая, что $X * V(X) = 0_{nn}$, является стационарной точкой для этой системы. В силу (5) для ограничений типа равенства

$$g^i(X) = b^i - A_i \bullet X = 0, \qquad 1 \le i \le m, \tag{15}$$

выполняется

$$\frac{dg^i(X)}{dt} = -\Big\langle \operatorname{vec} A_i, \operatorname{vec}\Big(\frac{dX}{dt}\Big)\Big\rangle = A_i \bullet (X * V(X)) = -\tau g^i(X), \qquad 1 \le i \le m. \tag{16}$$

Поэтому $g^i(X) \to 0$ при $t \to +\infty$ для каждого $1 \le i \le m$. Итерационный процесс для отыскания стационарных точек строился путем интегрирования системы (14) по схеме Эйлера.

В настоящей работе вместо (14) предлагается искать решение матричного уравнения

$$F(X) = X * V(X) = 0_{nn} \tag{17}$$

методом Ньютона. Как следует из (5), любое решение данного уравнения удовлетворяет одновременно равенствам (15). Если найденное решение $X$ будет таким, что $X \succeq 0$ и $V = V(X) \succeq 0$, то тем самым будет получено решение задачи (1).

**Утверждение 3.** *Пусть для задач* (1) *и* (2) *имеет место строгая двойственность. Пусть, кроме того, $X_*$ — невырожденное решение задачи* (1), $[u_*, V_*]$ — *решение двойственной задачи* (2). *Тогда $X_*$ удовлетворяет уравнению* (17) *и $V_* = V(X_*)$.*

Доказательство. Из условия строгой двойственности следует, что для матриц $X_*$ и

$$V_* = C - \sum_{i=1}^{m} u_*^i A_i$$

выполняется равенство $X_* \bullet V_* = 0$. Поэтому $X_*$ и $V_*$ коммутируют и $X_* V_* = V_* X_* = 0_{nn}$. Таким образом, выполняется равенство

$$X_* \Big( C - \sum_{i=1}^{m} u_*^i A_i \Big) = 0_{nn}. \tag{18}$$

С другой стороны, вектор $u = u(X_*)$ должен удовлетворять системе уравнений

$$\mathcal{A} \bullet \Big[ X_* * \Big( C - \sum_{i=1}^{m} u^i A_i \Big) \Big] = 0. \tag{19}$$

Так как по предположению $X_*$ — невырожденное решение задачи (1), то, согласно утверждению 2, данная система имеет единственное решение. Но точка $u = u_*$ в силу (18) удовлетворяет (19). Поэтому $u(X_*) = u_*$. Отсюда следует, что для матрицы $V(X_*)$, в которой $u(X_*) = u_*$, выполнено $V(X_*) * X_* = 0_{nn}$. Таким образом, $X_*$ — решение уравнения (17). □

Обозначим через $F_X(X)$ матрицу Якоби матричной функции $F(X) = X * V(X)$ в точке $X$. Согласно [9], ее удобно определять следующим образом:

$$F_X(X) = \frac{\partial \operatorname{vec} F(X)}{\partial (\operatorname{vec} X)^T}.$$

Матрица $F_X(X)$ является квадратной порядка $n^2$. Удобно нумеровать ее строки и столбцы не обычными цифрами из натурального ряда, а последовательностью пар индексов $(i, j)$, соответствующих индексам элементов из vec $X$, т.е. набором

$$J = \{(1,1), \ldots, (n,1), (1,2), \ldots, (n,2), \ldots, (1,n), \ldots, (n,n)\}. \tag{20}$$

Тогда в матрице $F_X(X)$ в позиции $(i,j) \times (p,q)$ стоит производная $\partial F_{ij} / \partial X_{pq}$.

Так как $F(X)$ — симметричная матричная функция от симметричного матричного аргумента, то среди столбцов и строк матрицы $F_X(X)$ имеются одинаковые. Если взять матрицу Якоби

$$F_X^{\triangle}(X) = \frac{\partial \operatorname{vech} F(X)}{\partial (\operatorname{vech} X)^T},$$

то она связана с $F_X(X)$ соотношением [10]:

$$F_X^{\triangle}(X) = \mathcal{L}_n F_X(X) \mathcal{D}_n. \tag{21}$$

Здесь $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{D}_n$ — элиминационная и дуплицирующая матрицы, соответственно.

Матрица $\mathcal{L}_n$ имеет размер $k_{\triangle}(n) \times n^2$, матрица $\mathcal{D}_n$ — размер $n^2 \times k_{\triangle}(n)$. Матрица $\mathcal{D}_n$ для квадратной симметричной матрицы $X$ порядка $n$ осуществляет преобразование $\mathcal{D}_n \operatorname{vech} X = \operatorname{vec} X$. Матрица $\mathcal{L}_n$, напротив, действует на произвольную квадратную матрицу $X$ порядка $n$ таким образом, что $\mathcal{L}_n \operatorname{vec} X = \operatorname{vech} X$.

Обратимся теперь к набору из $k_{\triangle}(n)$ пар индексов, которые имеют вид, аналогичный (20), но соответствующий нумерации вектора vech $X$, т.е. набору

$$J_{\triangle} = \{(1,1), (2,1), \ldots, (n,1), (2,2), \ldots, (n,2), \ldots, (n, n-1), (n,n)\}.$$

Тогда единичную матрицу порядка $k_\triangle(n)$ можно представить как совокупность единичных ортов размера $k_\triangle(n)$, в которых единица располагается на месте $(i,j)$-го элемента, $(i,j) \in J_\triangle$. Такие единичные орты будем обозначать $e_{(i,j)}$. Пусть, кроме того, $e_i$ обозначает $i$-й единичный орт матрицы $I_n$.

Матрица $\mathcal{L}_n$ определяется единственным образом и имеет полный ранг. Ее явное представление следующее:

$$\mathcal{L}_n = \sum_{(i,j)\in J_\triangle} e_{(i,j)} \otimes e_j^T \otimes e_i^T.$$

Таким образом, матрица $\mathcal{L}_n$ есть $(0,1)$-матрица и полуортогональная, т.е. $\mathcal{L}_n\mathcal{L}_n^T = I_{k_\triangle(n)}$. Общее число единиц в ней равно $k_\triangle(n)$, каждый ее столбец содержит ровно одну единицу, каждая строка — не более одной единицы.

Матрица $\mathcal{D}_n$ также имеет полный ранг, в явном виде она записывается следующим образом:

$$\mathcal{D}_n = \Big[ \sum_{(i,j)\in J_\triangle} e_{(i,j)} \left(\mathrm{vec}\,(E_{ij})\right)^T \Big]^T,$$

где $E_{ij} = e_ie_j^T + e_je_i^T$, если $i \neq j$, и $E_{ii} = e_ie_i^T$. Согласно определению матриц $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{D}_n$ имеет место равенство $\mathcal{L}_n\mathcal{D}_n = I_{k_\triangle(n)}$.

Матричное уравнение (17) эквивалентно векторному уравнению

$$\mathrm{vech}\, F(X) = 0_{k_\triangle(n)}. \tag{22}$$

Применим теперь метод Ньютона для решения уравнения (22). Ньютоновское направление $\mathrm{vech}\,(X_{k+1} - X_k)$ на $k$-й итерации удовлетворяет условию

$$\mathrm{vech}\, F(X_k) + F_X^\triangle(X_k)\,\mathrm{vech}\,(X_{k+1} - X_k) = 0_{k_\triangle(n)}.$$

Откуда, если матрица $F_X^\triangle(X_k)$ невырожденная, получаем

$$\mathrm{vech}\, X_{k+1} = \mathrm{vech}\, X_k - [F_X^\triangle(X_k)]^{-1}\mathrm{vech}\, F(X_k)$$

или, с учетом равенства (21),

$$\mathrm{vech}\, X_{k+1} = \mathrm{vech}\, X_k - [\mathcal{L}_nF_X(X_k)\mathcal{D}_n]^{-1}\mathrm{vech}\, F(X_k). \tag{23}$$

Все матрицы $X_k$, $X_{k+1}$ и $F(X_k)$ должны быть симметричными. Так как $\mathcal{L}_n\mathcal{D}_n = I_{k_\triangle(n)}$, то после умножения левой и правой части (23) на матрицу $\mathcal{D}_n$ получаем результат

$$\mathrm{vec}\, X_{k+1} = \mathrm{vec}\, X_k - \mathcal{D}_n[\mathcal{L}_nF_X(X_k)\mathcal{D}_n]^{-1}\mathcal{L}_n\mathrm{vec}\, F(X_k). \tag{24}$$

Пусть $\mathcal{W}$ и $X$ — симметричные квадратные матрицы соответственно порядков $n^2$ и $n$. Обозначим через $\mathcal{W}_{(i,j)}$ строку матрицы $\mathcal{W}$ с номером $(i,j) \in J$. Пусть $W_{(i,j)}$ — соответствующая этой строке симметричная квадратная матрица порядка $n$, т.е. $\mathcal{W}_{(i,j)} = \mathrm{vec}\, W_{(i,j)}$. Квадратную матрицу порядка $n$ такую, что ее $(i,j)$-й элемент есть $W_{(i,j)} \bullet X$, будем обозначать через $\mathcal{W} \bullet X$. Итерационный процесс (24) с использованием введенных обозначений может быть записан в следующей матричной форме:

$$X_{k+1} = X_k - \{\mathcal{D}_n[\mathcal{L}_nF_X(X_k)\mathcal{D}_n]^{-1}\mathcal{L}_n\} \bullet F(X_k). \tag{25}$$

Найдем явный вид матрицы Якоби $F_X(X)$. Для упрощения записи положим

$$X^{\otimes} = \frac{1}{2}\left[(X \otimes I_n) + (I_n \otimes X)\right], \qquad V^{\otimes} = \frac{1}{2}\left[(V \otimes I_n) + (I_n \otimes V)\right].$$

Имеет место следующий результат.

**Утверждение 4.** *Матрица Якоби $F_X(X)$ для матричной функции $F(X)$ имеет вид*

$$F_X(X) = V^{\otimes}(X) + X^{\otimes} V_X(X). \tag{26}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференциал произведения двух матричных функций $XV(X)$ равен

$$d(XV(X)) = (dX)V(X) + XdV(X).$$

В векторной форме это соотношение запишется в виде

$$d\,(\mathrm{vec}\,(XV(X)) = \mathrm{vec}\,(d(XV(X)) = \mathrm{vec}\,((dX)V(X)) + \mathrm{vec}\,(XdV(X)).$$

Тогда на основании формулы $\mathrm{vec}\,(ABC) = (C^T \otimes A)\,\mathrm{vec}\,B$, имеющей место для любых матриц $A$, $B$ и $C$, для которых определено их произведение $ABC$, получаем

$$d\,(\mathrm{vec}\,(XV(X)) = (V^T(X) \otimes I_n)\,d\ \mathrm{vec}\ X + (I_n \otimes X)\,\mathrm{vec}\,(dV(X)). \tag{27}$$

Но по определению первого дифференциала

$$\mathrm{vec}\,(d(XV(X)) = (XV(X))_X\,d\,\mathrm{vec}\ X.$$

Подставляя данное равенство в (27), приходим к

$$d\,(\mathrm{vec}\,(XV(X)) = [(V^T(X) \otimes I_n) + (I_n \otimes X)V_X(X)]\,d\ \mathrm{vec}\ X.$$

Таким образом,

$$(XV(X))_X = (V(X) \otimes I_n) + (I_n \otimes X)V_X(X). \tag{28}$$

Здесь учтено, что матрица $V(X)$ симметричная.

Аналогичным образом может быть показано, что

$$(V(X)X)_X = (X \otimes I_n)V_X(X) + (I_n \otimes V(X)). \tag{29}$$

Из (28) и (29) следует (26). □

Согласно (4)

$$V_X(X) = -\sum_{i=1}^{m} (\mathrm{vec}\ A_i)\,u^i_X(X). \tag{30}$$

Каждый правый сомножитель $u^i_X(X)$ в (30) является $n^2$-мерной вектор-строкой, $(p,q)$-й элемент которой есть частная производная $\partial u^i/\partial X_{pq}$. Здесь $(p,q) \in J$. Пусть $u_X(X)$ — матрица Якоби вектор-функции $u(X)$ размером $m \times n^2$, составленная из строк $u^i_X(X)$, $1 \le i \le m$. Пусть, кроме того, $\mathcal{A}_{\mathrm{vec}}$ есть $m \times n^2$ матрица, $i$-й строкой которой является вектор $\mathrm{vec}\,A_i$. Тогда матрицу (30) можно записать в виде

$$V_X(X) = -\mathcal{A}^T_{\mathrm{vec}}\,u_X(X). \tag{31}$$

Таким образом, вычисление $V_X(X)$ сводится к вычислению матрицы Якоби $u_X(X)$.

**Утверждение 5.** *Пусть точка $X$ является невырожденной. Тогда*

$$u_X(X) = (\mathcal{A}_{\mathrm{vec}}\,X^{\otimes}\mathcal{A}^T_{\mathrm{vec}})^{-1}(\mathcal{A}_{\mathrm{vec}}V^{\otimes} - \tau\mathcal{A}_{\mathrm{vec}}). \tag{32}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируя равенства (5), получаем

$$d\,[A_i \bullet (X * V(X))] = \tau\, d\,(A_i \bullet X)\,, \qquad 1 \le i \le m, \tag{33}$$

или, учитывая симметричность матриц $A_i$, $X$ и $V$,

$$\frac{1}{2}\left\{d\ \mathrm{tr}\,(A_i X V) + d\ \mathrm{tr}\,(A_i V X)\right\} = \tau\, d\ \mathrm{tr}\,(A_i X), \qquad 1 \le i \le m.$$

Согласно правилам дифференцирования

$$d\ \mathrm{tr}\,(A_i X V) = \mathrm{tr}\ d\,(A_i X V) = \mathrm{tr}\,(A_i\, dX\, V) + \mathrm{tr}\,(A_i X\, dV). \tag{34}$$

Но

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\,(A_i\, dX\, V) &= (\mathrm{vec}\ A_i)^T\, \mathrm{vec}\,(d\,X\,V) \\ &= (\mathrm{vec}\ A_i)^T (V^T \otimes I_n)\, d\ \mathrm{vec}\ X \\ &= (\mathrm{vec}\ A_i)^T (V \otimes I_n)\, d\ \mathrm{vec}\ X. \end{aligned} \tag{35}$$

Для второго слагаемого в правой части (34) получаем таким же образом

$$\mathrm{tr}\,(A_i\, X\, dV) = (\mathrm{vec}\ A_i)^T (I_n \otimes X) V_X(X)\, d\ \mathrm{vec}\ X. \tag{36}$$

Если обозначить через $\phi(X)$ скалярную функцию от матричного аргумента $\phi(X) = \mathrm{tr}\ (A_i X V(X))$, то из (34)–(36) приходим к ее матрице Якоби:

$$\phi_X(X) = (\mathrm{vec}\ A_i)^T \left[(V \otimes I_n) + (I_n \otimes X) V_X(X)\right].$$

Аналогично, если взять функцию $\psi(X) = \mathrm{tr}\,(A_i V X)$, то ее матрица Якоби имеет вид

$$\psi_X(X) = (\mathrm{vec}\ A_i)^T \left[(I_n \otimes V) + (X \otimes I_n)\, V_X(X)\right].$$

Для правой части равенства (33) находим

$$d\ \mathrm{tr}\,(A_i X) = \mathrm{tr}\ d\,(A_i X) = \mathrm{tr}\,(A_i dX) = (\mathrm{vec}\ A_i)^T d\ \mathrm{vec}\ X,$$

откуда следует, что матрица Якоби для скалярной функции $\varphi(X) = \mathrm{tr}\,(A_i X)$ есть просто $\varphi_X(X) = (\mathrm{vec}\ A_i)^T$.

Приравнивая теперь матрицы Якоби от левой и правой части (5), получаем

$$(\mathrm{vec}\ A_i)^T \left[(V^{\otimes} + X^{\otimes} V_X(X)\right] = \tau\, (\mathrm{vec}\ A_i)^T,$$

где $1 \le i \le m$. Объединим все эти равенства в одно с помощью матрицы $\mathcal{A}_{\mathrm{vec}}$. Имеем

$$\mathcal{A}_{\mathrm{vec}} \left[V^{\otimes} + X^{\otimes} V_X(X)\right] = \tau \mathcal{A}_{\mathrm{vec}}. \tag{37}$$

Согласно (30) $V_X(X) = -\mathcal{A}_{\mathrm{vec}}^T\, u_X(X)$. Подставляя данное выражение в (37), получаем

$$\Gamma(X)\, u_X(X) = \mathcal{A}_{\mathrm{vec}} V^{\otimes} - \tau\, \mathcal{A}_{\mathrm{vec}}, \tag{38}$$

где через $\Gamma(X)$ обозначена матрица $\Gamma(X) = \mathcal{A}_{\mathrm{vec}}\, X^{\otimes} \mathcal{A}_{\mathrm{vec}}^T$. Если матрица $\Gamma(X)$ неособая, то из (38) приходим к (32). $\square$

В формуле (38) матрица $\Gamma(X)$ квадратная порядка $m$. Она может быть записана в виде (7). Действительно, так как

$$(I_n \otimes X)\, \mathrm{vec}\ A_i = \mathrm{vec}\,(X A_i), \qquad (X \otimes I_n)\, \mathrm{vec}\ A_i = \mathrm{vec}\,(A_i X),$$

то ее $(i, j)$-й элемент равен

$$\Gamma_{i,j} = (\mathrm{vec}\ A_i)^T\, \mathrm{vec}\,(X * A_j) = A_i \bullet (X * A_j).$$

Отсюда следует (7). Поэтому в невырожденной допустимой точке $X \in \mathcal{F}_P$ согласно утверждению 2 матрица $\Gamma(X)$ должна быть неособой.

Для сокращения записи введем обозначение

$$\mathcal{P}(X^{\otimes}) = X^{\otimes}\mathcal{A}_{\text{vec}}^T \left(\mathcal{A}_{\text{vec}}\, X^{\otimes}\mathcal{A}_{\text{vec}}^T\right)^{-1} \mathcal{A}_{\text{vec}}.$$

Тогда на основании утверждений 4 и 5 и формулы (31) приходим к выводу, что матрица Якоби функции $F_X(X)$ имеет вид

$$F_X(X) = \left[I_{n^2} - \mathcal{P}(X^{\otimes})\right] V^{\otimes} + \tau\, \mathcal{P}(X^{\otimes}). \tag{39}$$

Объединяя формулы (8), (25) и (39), приходим к следующему итерационному процессу метода Ньютона:

$$X_{k+1} = X_k - \left[\mathcal{D}_n \Lambda^{-1}(X_k)\mathcal{L}_n\right] \bullet F(X_k), \tag{40}$$

где $X_0 \in S^n$ и

$$\Lambda(X) = \mathcal{L}_n \left\{\left[I_{n^2} - \mathcal{P}(X^{\otimes})\right] V^{\otimes} + \tau\, \mathcal{P}(X^{\otimes})\right\} \mathcal{D}_n, \tag{41}$$

$$F(X) = X * \Big\{C - \mathcal{A}^T\big\{\big[\left(\mathcal{A}_{\text{vec}}\, X^{\otimes}\mathcal{A}_{\text{vec}}^T\right)^{-1}\left(\mathcal{A}\bullet(X * C) + \tau\,(b - \mathcal{A}\bullet X)\right)\big] \otimes I_n\big\}\Big\}.$$

Непрерывный вариант метода Ньютона описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dX}{dt} = -\gamma \left[\mathcal{D}_n \Lambda^{-1}(X)\mathcal{L}_n\right] \bullet F(X). \tag{42}$$

Здесь $X(0) \in S^n$, $\gamma > 0$ — некоторый параметр.

## 4. Свойства метода и локальная сходимость

Введем в рассмотрение матрицу $\mathcal{N}_n = \left(I_{k_{\triangle}(n)} + \mathcal{K}_n\right)/2$, где $\mathcal{K}_n$ — коммутационная матрица. Для каждой квадратной матрицы $M$ порядка $n$ матрица $\mathcal{K}_n$ совершает преобразование $\mathcal{K}_n \operatorname{vec} M = \operatorname{vec} M^T$. Матрица $\mathcal{N}_n$ в явном виде может быть записана как

$$\mathcal{N}_n = \frac{1}{2}\Big(I_{n^2} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (e_i e_j^T) \otimes (e_j e_i^T)\Big).$$

Данная матрица является симметричной и идемпотентной. На каждую квадратную матрицу $M$ порядка $n$ она действует следующим образом:

$$\mathcal{N}_n \operatorname{vec} M = \operatorname{vec} M^S,$$

где $M^S = \left(M + M^T\right)/2$ — симметричная часть матрицы $M$. Таким образом, если матрица $M$ симметричная, то $\operatorname{vec} M$ не меняется под действием матрицы $\mathcal{N}_n$. Имеет место равенство $\mathcal{D}_n\mathcal{L}_n\mathcal{N}_n = \mathcal{N}_n$ (см. [10]).

Так как $F(X)$ является симметричной матричной функцией, то в матрице Якоби $F_X(X)$ строки с номерами $(i,j)$ и $(j,i)$, $i \neq j$, совпадают. Это означает, что каждому столбцу матрицы $F_X(X)$ соответствует симметричная матрица, т.е. каждый столбец есть прямая сумма столбцов симметричной матрицы. Поэтому $F_X(X) = \mathcal{N}_n F_X(X)$ и, следовательно, для матрицы $\Lambda(X)$ наряду с (41) справедливо представление

$$\Lambda(X) = \mathcal{L}_n\mathcal{N}_n\Big\{[I_{n^2} - \mathcal{P}(X^{\otimes})]V^{\otimes} + \tau\, \mathcal{P}(X^{\otimes})\Big\}\mathcal{D}_n.$$

Если теперь умножить матрицу $\mathcal{A}_{\rm vec}$ на матрицу $\mathcal{D}_n\Lambda(X)$ справа, то в силу вышесказанного получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\rm vec}\,\mathcal{D}_n\Lambda(X) &= \mathcal{A}_{\rm vec}\,\mathcal{D}_n\mathcal{L}_n\mathcal{N}_n\bigl\{[I_{n^2}-\mathcal{P}(X^{\otimes})]\,V^{\otimes}+\tau\,\mathcal{P}(X^{\otimes})\bigr\}\mathcal{D}_n\\ &= \mathcal{A}_{\rm vec}\,\mathcal{N}_n\bigl\{[I_{n^2}-\mathcal{P}(X^{\otimes})]\,V^{\otimes}+\tau\,\mathcal{P}(X^{\otimes})\bigr\}\mathcal{D}_n\\ &= \mathcal{A}_{\rm vec}\bigl\{[I_{n^2}-\mathcal{P}(X^{\otimes})]\,V^{\otimes}+\tau\,\mathcal{P}(X^{\otimes})\bigr\}\mathcal{D}_n\\ &= \tau\,\mathcal{A}_{\rm vec}\,\mathcal{D}_n.\end{aligned}$$

Отсюда следует равенство

$$\mathcal{A}_{\rm vec}\,\mathcal{D}_n = \tau\,\mathcal{A}_{\rm vec}\,\mathcal{D}_n\Lambda^{-1}(X). \tag{43}$$

На основании (43) приходим к заключению, что

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\rm vec}\,\mathcal{D}_n\Lambda^{-1}(X)\,\mathcal{L}_n{\rm vec}\,F(X) &= \mathcal{A}_{\rm vec}\,\mathcal{D}_n\mathcal{L}_n{\rm vec}\,F(X)\,/\,\tau\\ &= \mathcal{A}_{\rm vec}\,\mathcal{D}_n\mathcal{L}_n\,\mathcal{N}_n{\rm vec}\,F(X)\,/\,\tau\\ &= \mathcal{A}_{\rm vec}\,{\rm vec}\,F(X)\,/\,\tau.\end{aligned}$$

Но согласно (5)

$$\mathcal{A}_{\rm vec}\,{\rm vec}\,F(X) = \tau\,(\mathcal{A}\bullet X - b)\,.$$

Тем самым нами получен следующий результат.

**Утверждение 6.** *Вдоль траекторий системы* (42) *выполняются равенства*:

$$\frac{dg^i(X)}{dt} = -\left\langle {\rm vec}\,A_i, {\rm vec}\left(\frac{dX}{dt}\right)\right\rangle = \gamma\,\langle{\rm vec}\,A_i, \mathcal{D}_n\Lambda^{-1}(X)\,\mathcal{L}_n{\rm vec}\,F(X)\rangle = -\gamma\,g^i(X), \tag{44}$$

*где* $1\le i\le m$.

Таким образом, производные по времени ограничений (44), вычисленные в силу системы (42), совпадают с (16), если взять $\gamma=\tau$.

Итерационный процесс (40) строился в предположении, что матрица $\Lambda(X)=F_X^{\triangle}(X)$ невырожденная. Поэтому для того, чтобы итерационный процесс был определен, необходимо, чтобы она была невырожденной в некоторой области, содержащей решение задачи (1). Как показано в [5], имеет место следующий результат.

**Лемма 1.** *Пусть для прямой и двойственной задач* (1) *и* (2) *имеет место строгая двойственность, причем их решения $X_*$ и $V_*$ строго комплементарны. Пусть, кроме того, точка $X_*$ есть вершина множества $\mathcal{F}_P$. Тогда матрица $F_X^{\triangle}(X_*)$ невырожденная.*

Если матрица $F_X^{\triangle}(X)$ невырожденная в решении задачи $X_*$, то в силу непрерывности это свойство сохранится и в некоторой окрестности $X_*$. Тогда итерационный процесс (40) полностью определен и обладает локальной сходимостью.

**Теорема 2.** *Пусть выполнены предположения леммы* 1. *Тогда метод* (40) *локально сходится к $X_*$ со сверхлинейной скоростью. Если отображение $F_X^{\triangle}(X)$ удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности $X_*$, то скорость сходимости квадратичная.*

Доказательство. Для обоснования локальной сходимости процесса (40) фактически следует доказать, что локально сходится процесс (23). Сходимость же процесса (23) следует из утверждения леммы 1 и из [11, теорема 10.2.2]. □

Вид матрицы $\Lambda(X)$ при $X=X_*$ упрощается. Действительно, так как симметричные матрицы $X_*$ и $V_*$ коммутируют, то, как несложно убедиться с помощью равенства

$$(A\otimes B)\,(C\otimes D) = (AC)\otimes(BD)\,, \tag{45}$$

имеющего место для любых матриц $A$, $B$, $C$ и $D$, для которых существуют произведения $AC$ и $BD$, матрицы $X_*^{\otimes}$ и $V_*^{\otimes}$ также коммутируют. Поэтому найдется ортогональная матрица $H$ порядка $n^2$ такая, что

$$X_*^{\otimes} = HD(\lambda_*)H^T, \qquad V_*^{\otimes} = HD(\mu_*)H^T, \tag{46}$$

где $\lambda_*$ и $\mu_*$ — $n^2$-мерные векторы, состоящие из собственных значений соответственно матриц $X_*^{\otimes}$ и $V_*^{\otimes}$. Все эти собственные значения в силу симметричности матриц $X_*^{\otimes}$ и $V_*^{\otimes}$ вещественны.

Используя представление (3), получаем на основании формулы (45)

$$\begin{aligned} X_* \otimes I_n &= \left(QD(\eta_*)Q^T\right) \otimes I_n = ((QD(\eta_*)) \otimes I_n)\left(Q^T \otimes I_n\right) \\ &= (Q \otimes I_n)(D(\eta_*) \otimes I_n)\left(Q^T \otimes I_n\right). \end{aligned}$$

Аналогичным образом находим

$$I_n \otimes X_* = (I_n \otimes Q)(I_n \otimes D(\eta_*))\left(I_n \otimes Q^T\right).$$

Поэтому

$$X_*^{\otimes} = \left[(Q \otimes I_n)(D(\eta_*) \otimes I_n)\left(Q^T \otimes I_n\right) + (I_n \otimes Q)(I_n \otimes D(\eta_*))\left(I_n \otimes Q^T\right)\right]/2.$$

Отметим, что матрица $Q^T \otimes I_n$ является обратной к матрице $Q \otimes I_n$, а матрица $I_n \otimes Q^T$ — обратной к матрице $I_n \otimes Q$.

Обозначим

$$D^{\otimes}(\eta_*) = [D(\eta_*) \otimes I_n + I_n \otimes D(\eta_*)]/2, \qquad \eta_*^{\otimes} = \mathrm{Diag}\,(D^{\otimes}(\eta_*))$$

и покажем, что компоненты вектора $\eta_*^{\otimes}$ являются собственными значениями матрицы $X_*^{\otimes}$.

**Утверждение 7.** *Для матрицы $X_*^{\otimes}$ справедливо разложение*

$$X_*^{\otimes} = (Q \otimes Q)D(\eta_*^{\otimes})(Q^T \otimes Q^T), \tag{47}$$

*где $Q \otimes Q$ — ортогональная матрица.*

Доказательство. Так как симметричные матрицы $X_* \otimes I_n$ и $I_n \otimes X_*$ коммутируют, то ортогональную матрицу $H$ в разложении (46) можно взять такую, что

$$X_* \otimes I_n = HD(\lambda_1)H^T, \qquad I_n \otimes X_* = HD(\lambda_2)H^T,$$

где $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — $n^2$-мерные векторы, состоящие из собственных значений соответственно матриц $X_* \otimes I_n$ и $I_n \otimes X_*$. Отсюда следует представление

$$X_*^{\otimes} = HD\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)H^T,$$

т.е. $\lambda_* = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$.

Если положить $H = Q \otimes Q$, то $H^T = Q^T \otimes Q^T$ и

$$HH^T = (Q \otimes Q)\left(Q^T \otimes Q^T\right) = (QQ^T) \otimes (QQ^T) = I_n \otimes I_n = I_{n^2}.$$

Следовательно, матрица $H$ — ортогональная. Имеем:

$$\begin{aligned} H^T(I_n \otimes X_*)H &= (Q^T \otimes Q^T)(I_n \otimes X_*)(Q \otimes Q) \\ &= \left(Q^T \otimes (Q^T X_*)\right)(Q \otimes Q) \\ &= (Q^T Q) \otimes (Q^T X_* Q) \\ &= I_n \otimes D(\eta_*). \end{aligned}$$

Аналогично получаем: $H^T(X_* \otimes I_n)H = D(\eta_*) \otimes I_n$.

Матрицы $D(\eta_*) \otimes I_n$ и $I_n \otimes D(\eta_*)$ — диагональные. Поэтому данную ортогональную матрицу $Q \otimes Q$ можно взять в качестве $H$. Отсюда следует справедливость разложения (47). □

Аналогичным образом доказывается следующее утверждение.

**Утверждение 8.** *Для матрицы* $V_*^{\otimes}$ *справедливо разложение*

$$V_*^{\otimes} = (Q \otimes Q) D(\theta_*^{\otimes})(Q^T \otimes Q^T), \tag{48}$$

*где* $\theta_*^{\otimes} = \mathrm{Diag}\,(D^{\otimes}(\eta_*)),\quad D^{\otimes}(\theta_*) = [D(\theta_*) \otimes I_n + I_n \otimes D(\theta_*)]\,/\,2.$

После подстановки выражений (47) и (48) в $F_X^{\triangle}(X_*)$ получаем

$$F_X^{\triangle}(X_*) = \mathcal{L}_n \mathcal{N}_n (Q \otimes Q) \left\{ \left[ I_{n^2} - \mathcal{G}(\eta_*^{\otimes}) \right] D(\theta_*^{\otimes}) + \tau \mathcal{G}(\eta_*^{\otimes}) \right\} (Q^T \otimes Q^T) \mathcal{D}_n. \tag{49}$$

В (49) матрица $\mathcal{G}(\eta_*^{\otimes})$ имеет вид

$$\mathcal{G}(\eta_*^{\otimes}) = D(\eta_*^{\otimes})(Q^T \otimes Q^T)\, \mathcal{A}_{\mathrm{vec}}^T \left[ \mathcal{A}_{\mathrm{vec}}\, (Q \otimes Q) D(\eta_*^{\otimes})(Q^T \otimes Q^T) \mathcal{A}_{\mathrm{vec}}^T \right]^{-1} \mathcal{A}_{\mathrm{vec}}\, (Q \otimes Q).$$

В заключение отметим, что предположение о невырожденности задачи можно ослабить, потребовав, чтобы условие невырожденности выполнялось лишь в некоторой окрестности решения (в том числе и в недопустимых точках).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Еремин И.И.** Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: Изд-во “Екатеринбург”, 1999.
2. Handbook of semidefinite programming /eds. H. Wolkowicz, R. Saigal, L. Vandenberghe. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000.
3. **Laurent M., Rendle F.** Semidefinite programming and integer programming // Discrete optimization. Handbooks in operations research and management science / eds. K. Aardal, G. Nemhauser, R. Weismantel. Amsterdam: Elsevier, 2005.
4. **Klerk E., de.** Aspects of semidefinite programming. Interior point algorithms and selected applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2004.
5. **Бабынин М.С., Жадан В.Г.** Барьерно-проективный метод для полуопределенного программирования. Сообщения по прикладной математике. М.: ВЦ РАН, 2007.
6. **Evtushenko Yu., Zhadan V.** Stable barrier-projection and barrier-newton methods in linear programming // Comput. Optimiz. and Appl. 1994. Vol. 3. P. 289–304.
7. **Арнольд В.И.** О матрицах, зависящих от параметров // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26. Вып. 2(158). С. 101–114.
8. **Alizadeh F., Haeberly J.-P.F., Overton M.L.** Complementarity and nondegeneracy in semidefinite programming // Math. Programming. Ser. B. 1997. Vol. 7, no. 2. P. 129–162.
9. **Магнус Я.Р., Нейдеккер Ч.** Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике. М.: Физматлит, 2002.
10. **Magnus J.R., Neudecker H.** The elimination matrix: some lemmas and applications // SIAM J. Alg. Disc. Meth. 1980. Vol. 1, no. 4. P. 422–449.
11. **Ортега Дж., Рейнболдт В.** Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.


Поступила 10.01.2008

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14 № 2 2008

УДК 519.2+621.391

# ПРОБЛЕМА OFF-LINE ОБНАРУЖЕНИЯ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИ ПОВТОРЯЮЩЕГОСЯ ФРАГМЕНТА В ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ[1]

**А. В. Кельманов**

Рассматривается нетрадиционный — комбинаторный — подход к решению проблемы апостериорного (off-line) помехоустойчивого обнаружения повторяющегося фрагмента в числовой последовательности. Изложены результаты по исследованию сложности, систематизации и обоснованию алгоритмов решения дискретных экстремальных задач, к которым в рамках комбинаторного подхода сводятся некоторые возможные варианты этой проблемы в случае, когда повторы квазипериодичны, а помеха аддитивна.

## Введение

Объектом исследования в данной работе являются проблемы оптимизации в задачах анализа данных и распознавания образов. Рассматриваются дискретные экстремальные задачи, к которым сводятся некоторые варианты проблемы апостериорного (off-line) помехоустойчивого обнаружения повторяющегося фрагмента в числовой последовательности в случае, когда помеха аддитивна, а повторы квазипериодичны, т.е. интервал между двумя последовательными фрагментами или повторами неодинаков, а лишь ограничен сверху и снизу некоторыми константами. Цель работы — изложение результатов по изучению сложности, систематизации и исследованию алгоритмов решения этих оптимизационных задач.

Некоторые из возможных содержательных задач, которые редуцируются к рассматриваемым в работе экстремальным задачам, состоят в следующем. Пусть, напр., на целочисленном отрезке заданы значения некоторой функции. Требуется найти “похожие” по некоторому критерию отрезки этой функции, имеющие одинаковую длину. Сходная с этой задача заключается в апостериорной проверке (тестировании) случайной последовательности конечной длины на наличие в этой последовательности “похожих” участков одинаковой размерности. Близкие к этим содержательные задачи возникают в приложениях, связанных с анализом и распознаванием массивов зашумленных структурированных данных (числовых последовательностей, временных рядов, сигналов) — результатов измерения (отображения) каких-либо характеристик (состояний) изучаемых объектов или явлений различной природы. Эти данные включают повторяющиеся, чередующиеся или перемежающиеся информационно важные блоки — фрагменты одинаковой размерности, в случае, когда места расположения этих фрагментов в массиве неизвестны. Ситуации, в которых требуется решение таких задач, характерны, в частности, для электронной разведки и дистанционного зондирования, геофизики и биометрики, медицинской и технической диагностики, обработки изображений и речевых сигналов, радиолокации, гидроакустики, телекоммуникации, криминалистики, поиска по мультимедийным базам данных, обработки результатов эксперимента и др. (см., напр., [1] и цитированные там работы). Сущность проблемы состоит в обнаружении информационно важных фрагментов в зашумленных массивах данных. В данной работе рассматривается простейший случай этой проблемы, когда информационные фрагменты повторяются.

[1]Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (проекты 06-01-00058 и 07-07-00022).

## 1. Подходы к решению проблемы

Существует четыре базовых статистических подхода к решению проблемы. Они опираются на комбинации двух способов обработки данных — последовательного (on-line) и апостериорного (off-line) — с двумя вариантами формализации содержательной проблемы: в виде либо задачи оценивания, либо задачи проверки гипотез. В основе этих подходов лежат классические методы, предложенные и развитые в широко известных фундаментальных работах.

Хорошо изученными и традиционными являются три подхода, которые опираются на последовательный и апостериорный способы обработки данных в сочетании с формализацией содержательной проблемы в форме задачи оценивания, а также последовательный способ обработки данных в комбинации с формулировкой проблемы в виде задачи проверки гипотез. Четвертый подход, опирающийся на формализацию содержательной проблемы в виде задачи проверки гипотез в сочетании с off-line обработкой данных, не является традиционным. Он редко применяется на практике при помехоустойчивом компьютерном анализе структурированных данных из-за нетривиальных математических проблем комбинаторного плана, которые возникают при его реализации. Об этих проблемах и их истоках сказано ниже. Здесь лишь отметим, что именно этот нетрадиционный подход, который назван комбинаторным, изучается в данной работе.

Традиционные подходы к проблеме обнаружения состоят в последовательном или поэтапном способе ее решения (см. [2–15] и цитированные там работы). В случае on-line обработки данных при реализации этих подходов применяются методы: 1) последовательного оценивания (оптимальной фильтрации) с целью очистки данных от помех), 2) последовательной проверки гипотез с использованием процедур обнаружения разладки (скачкообразного изменений свойств) случайной последовательности. В случае off-line обработки данных исходную задачу разбивают на подзадачи и решают в два этапа: 1) апостериорное оценивание (фильтрация помех), 2) последовательное или апостериорное принятие решения, т.е. обнаружение по очищенным данным.

Известный недостаток традиционных подходов заключается в том, что в общем случае они не гарантируют оптимальности решения по совокупности всех накопленных данных, несмотря на получение оптимума для каждой из последовательно решаемых подзадач или на каждом из последовательно выполняемых этапов. Если модели данных и помех фиксированы, то ошибка, возникшая при решении предыдущей подзадачи или на предыдущем этапе, в общем случае не может быть исправлена или уменьшена при решении последующей подзадачи или на следующем этапе. Ошибка принятия решения или оценивания по подмножеству данных (когда данные обрабатываются по мере их поступления) в общем случае не может быть меньше ошибки обработки по совокупности всех данных. Результат оптимизации, найденный по условным экстремумам, вычисленным на последовательно выполняемых этапах обработки данных, в общем случае может не совпадать с глобальным экстремумом.

Традиционные подходы ориентированы на получение результата с наименьшими временными затратами. Достоинство этих подходов состоит в том, что они позволяют конструировать так называемые “быстрые” алгоритмы, поскольку при реализации традиционных подходов трудоемкие, затратные в вычислительном плане проблемы комбинаторной оптимизации, как правило, не возникают. Решение задачи условной оптимизации критерия на каждом из последовательных этапов обычно находится стандартными малотрудоемкими алгоритмами. Временные затраты обычно зависят линейно от размера входа задачи.

Напротив, рассматриваемый в данной работе нетрадиционный — комбинаторный — подход потенциально более точен и трудоемок, так как изначально ориентирован на поиск оптимального решения по совокупности всех имеющихся (накопленных) данных. Этот подход редко применяется в приложениях (здесь речь идет лишь об алгоритмах с доказуемыми оценками точности, а не о широко распространенных эвристических технологиях), так как его реализация напрямую связана с решением специфических задач комбинаторной оптимизации, к которым сводится поиск экстремума критерия качества решения (напр., максимизация функционала правдоподобия). По этой причине данный подход называется комбинаторным. Он состоит в совместном (одновременном) решении указанных выше подзадач, т.е. решение в рамках этого подхода ищется без разбивки задачи на подзадачи или на этапы.

## 2. Формальная постановка проблемы

Числовой последовательностью, включающей *квазипериодически* повторяющийся ненулевой информационный фрагмент размерности $q$ , называется последовательность, общий член которой задается следующей формулой:

$$x_n = \sum_{m \in \mathbb{M}} u_{n-n_m}, \qquad n = 0, \ldots, N-1, \tag{1}$$

где $u_{n-n_m} = 0$, если $n - n_m \neq 0, \ldots, q-1$, $\|(u_0, \ldots, u_{q-1})\| \neq 0$, $\mathbb{M} = \{1, \ldots, M\}$, $(n_1, \ldots, n_{_M}) \in \Omega$, причем

$$\Omega = \bigcup_{M=M_{\min}}^{M_{\max}} \Omega_{_M}; \tag{2}$$

здесь

$$\Omega_{_M} = \Omega_{_M}(N, N^-, N^+, T_{\min}, T_{\max}, q) = \{(n_1, \ldots, n_{_M})\colon 0 \le n_1 \le N^+ \le N - q;$$
$$0 \le N^- \le n_{_M} \le N - q;\ 0 < q \le T_{\min} \le n_m - n_{m-1} \le T_{\max} \le N - q,\ m = 2, \ldots, M\}, \tag{3}$$

а $M_{\min}$ и $M_{\max}$ находятся из решения системы неравенств, входящих в определение множества $\Omega_{_M}$, в которой $N^-$, $N^+$, $T_{\min}$ и $T_{\max}$ — целые числа.

Набор $U = (u_0, \ldots, u_{q-1}) \in \mathbb{R}^q$ называется *информационным вектором*, последовательность его компонент — *информационной последовательностью.* Набор $(x_{n_m}, \ldots, x_{n_m+q-1})$, $m \in \mathbb{M}$, элементов последовательности $x_n$, $n = 0, \ldots, N-1$, совпадающий с вектором $U$, называется *информационным фрагментом.* В формуле (1) переменная $m$ обозначает порядковый номер информационного фрагмента, переменная $n_m$, $m \in \mathbb{M}$, задает номер $n$ в последовательности $x_n$, $n = 0, \ldots, N-1$, который соответствует началу $m$-го фрагмента, а переменная $M = |\mathbb{M}|$ обозначает число информационных фрагментов в этой последовательности. Если обозначить $X = (x_0, \ldots, x_{_{N-1}})$, то легко видеть, что $X = X(n_1, \ldots, n_{_M}, U)$.

Формула (2) определяет множество всевозможных наборов начальных номеров информационных фрагментов. В этой формуле $M_{\min}$ и $M_{\max}$ обозначают минимальное и максимальное число информационных фрагментов. Переменные $N^-$ и $N^+$ в формуле (3) задают краевые условия на начальные номера первого и последнего информационных фрагментов последовательности, а $T_{\min}$ и $T_{\max}$ — минимальный и максимальный интервалы между двумя последовательными информационными фрагментами. Ограничение $T_{\min} \le n_m - n_{m-1} \le T_{\max} \le N-q$, $m = 2, \ldots, M$, называется условием квазипериодичности повторов информационного фрагмента. Неравенство $q \le T_{\min}$ — условием, запрещающим перекрытие (наложение) фрагментов.

Как показано в [16], необходимым и достаточным условием совместности системы ограничений, входящих в определения (2) и (3), является выполнение неравенства $\lfloor (N-q)/T_{\min} \rfloor \le \lfloor (N^- - N^+ + T_{\max} - 1)/T_{\max} \rfloor$. Всюду далее считается, что это неравенство выполнено (в противном случае модель последовательности и формулировка проблемы некорректны). При этом $M_{\max} = \lfloor (N-q)/T_{\min} \rfloor + 1$, а $M_{\min} = \lfloor (N^- - N^+ + T_{\max} - 1)/T_{\max} \rfloor + 1$, если $N^- > N^+$, и $M_{\min} = 1$, если $N^- \le N^+$ (см. [16–19]).

Рассмотрим аддитивную модель помех (или ошибок наблюдения). Доступным для обработки (наблюдения) будем считать вектор $Y = X + E$ , где $E$ — вектор помехи. Предположим, что векторы $X$ и $E$ независимы. В статистической трактовке проблемы будем считать, что $E \in \Phi_{0,\sigma^2 I}$, где $\Phi_{0,\sigma^2 I}$ — нормальное распределение с параметрами $(0, \sigma^2 I)$, $I$ — единичная матрица. Проблема обнаружения состоит в том, чтобы по заданному (наблюдаемому) вектору $Y$ найти набор $(n_1, \ldots, n_{{}_M})$ начальных номеров информационных фрагментов.

Уточнение формулировок вариантов проблемы обнаружения приводится далее. В этих формулировках выделен специальный случай задания множеств (2) и (3), соответствующий распространенной на практике ситуации, когда значения $N^-$, $N^+$, $T_{\min}$ и $T_{\max}$ неизвестны. Из (2) видно, что в этой ситуации достаточно положить $N^+ = T_{\max} = N - q$, $N^- = 0$, $T_{\min} = q$, т.е. доопределить неизвестные переменные через их допустимые предельные значения. Этот важный случай далее называется предельным. Для этого случая $\Omega_{{}_M} = \Omega_{{}_M}(N, 0, N-q, q, N-q, q)$ и $\Omega = \Omega(N, 0, N-q, q, N-q, q)$, т.е. множества (2) и (3) полностью определяются только размерностями $N$ и $q$ векторов $Y$ и $U$. При этом $M_{\min} = 1$, а $M_{\max} = \lfloor (N-q)/q \rfloor + 1$.

## 3. Обнаружение фрагмента как задача проверки гипотез о среднем

Возможны четыре варианта проблемы обнаружения. Они образуются в результате комбинирования допустимых случаев задания исходных данных о векторе $U$ (он может быть известен или неизвестен) и о числе $M$ повторов фрагмента в последовательности (оно также может быть известно или неизвестно). Для этих вариантов определим множества допустимых векторов $X$. В случае, когда $M$ известно, имеем пару допустимых множеств

$$\Theta_{{}_M}(U) = \{X : X = X(n_1, \ldots, n_{{}_M}|U),\ (n_1, \ldots, n_{{}_M}) \in \Omega_{{}_M}\}, \qquad M \in [M_{\min}, M_{\max}],$$

$$\Theta_{{}_M} = \{X : X = X(n_1, \ldots, n_{{}_M}, U),\ (n_1, \ldots, n_{{}_M}) \in \Omega_{{}_M},\ U \in \mathbb{R}^q,\ 0 < \|U\|^2 < \infty\},$$
$$M \in [M_{\min}, M_{\max}],$$

при известном и неизвестном векторе $U$. Если $M$ неизвестно, то имеем другую пару множеств, соответствующих случаям известного и неизвестного вектора $U$, а именно:

$$\Theta(U) = \{X : X = X(n_1, \ldots, n_{{}_M}|U),\ (n_1, \ldots, n_{{}_M}) \in \Omega\},$$

$$\Theta = \{X : X = X(n_1, \ldots, n_{{}_M}, U),\ (n_1, \ldots, n_{{}_M}) \in \Omega,\ U \in \mathbb{R}^q,\ 0 < \|U\|^2 < \infty\}.$$

Из условий задачи следует, что $Y \in \Phi_{X,\sigma^2 I}$, где $X = X(n_1, \ldots, n_{{}_M}, U)$ — неизвестный параметр распределения, который согласно (1) однозначно определяется набором $(n_1, \ldots, n_{{}_M})$ и вектором $U$. Этот параметр в зависимости от варианта задания исходных данных может принадлежать одному из четырех определенных выше допустимых множеств. Поэтому каждый из возможных вариантов проблемы обнаружения состоит в выборе гипотезы о среднем $X$ случайного вектора $Y$. Таким образом, имеем следующие варианты проблемы обнаружения.

1. *Обнаружение заданного повторяющегося фрагмента при известном числе повторов* [17]. Этот вариант проблемы состоит в выборе гипотезы из совокупности

$$\{H_{{}_M}(n_1, \ldots, n_{{}_M}|U),\ (n_1, \ldots, n_{{}_M}) \in \Omega_{{}_M}\} = \{Y \in \Phi_{X,\sigma^2 I};\ X \in \Theta_{{}_M}(U)\},$$

в которой элементом является гипотеза

$$H_{{}_M}(n_1, \ldots, n_{{}_M}|U) = \{Y \in \Phi_{X,\sigma^2 I};\ X = X(n_1, \ldots, n_{{}_M}|U)\}, \qquad (n_1, \ldots, n_{{}_M}) \in \Omega_{{}_M}.$$

2. *Обнаружение заданного повторяющегося фрагмента при неизвестном числе повторов* [18]. В этом варианте проблемы требуется выбрать гипотезу из множества

$$\{H(n_1, \ldots, n_{{}_M}|U),\ (n_1, \ldots, n_{{}_M}) \in \Omega\} = \{Y \in \Phi_{X,\sigma^2 I};\ X \in \Theta(U)\},$$

элементы которого имеют вид

$$H(n_1, \ldots, n_{{}_M}|U) = \{Y \in \Phi_{X,\sigma^2 I};\ X = X(n_1, \ldots, n_{{}_M}|U)\}, \qquad (n_1, \ldots, n_{{}_M}) \in \Omega.$$

3. *Обнаружение неизвестного повторяющегося фрагмента при заданном числе повторов* [19]. Этот вариант проблемы заключается в выборе гипотезы из семейства

$$\{H_{M}(n_1,\ldots,n_{M}),\ (n_1,\ldots,n_{M})\in\Omega_M\}=\{Y\in\Phi_{X,\sigma^2 I};\ X\in\Theta_{M})\},$$

элементом которого является гипотеза

$$H_{M}(n_1,\ldots,n_{M})=\{Y\in\Phi_{X,\sigma^2 I};\ X=X(U|n_1,\ldots,n_{M}),\ U\in\mathbb{R}^q,\ 0<\|U\|^2<\infty\},$$

$$(n_1,\ldots,n_{M})\in\Omega_{M}.$$

4. *Обнаружение неизвестного повторяющегося фрагмента при неизвестном числе повторов* [19]. Этот вариант состоит в выборе гипотезы из совокупности

$$\{H(n_1,\ldots,n_{M}),\ (n_1,\ldots,n_{M})\in\Omega\}=\{Y\in\Phi_{X,\sigma^2 I};\ X\in\Theta\},$$

элементы которой задаются следующим образом:

$$H(n_1,\ldots,n_{M})=\{Y\in\Phi_{X,\sigma^2 I};\ X=X(U|n_1,\ldots,n_{M}),\ U\in\mathbb{R}^q,\ 0<\|U\|^2<\infty\},$$

$$(n_1,\ldots,n_{M})\in\Omega.$$

Из определения (2) следует: 1) $|\Omega_{M}|=O[(N-q+1)(T_{\max}-T_{\min}+1)^{M-1}]$; 2) если $T_{\max}$, $T_{\min}$ и $q$ фиксированы, то $M$ — кусочно-постоянная возрастающая функция от $N$. Поэтому если $T_{\max}\neq T_{\min}$, то мощности множеств $\Omega_{M}$ и $\Omega$, а также семейств $\Theta_{M}(U)$, $\Theta(U)$, $\Theta_{M}$, $\Theta$ параметров и соответствующих им совокупностей проверяемых гипотез растут в лучшем случае экспоненциально при увеличении как размерности $N$ вектора $X$, так и числа $M$ фрагментов в последовательности его компонент. Следовательно, простой перебор гипотез из этих совокупностей нереален. Указанный экспоненциальный рост является ключевой проблемой при реализации комбинаторного подхода в виде вычислительных алгоритмов.

## 4. Критерии решения проблемы

Поскольку начальные номера искомых фрагментов, составляющие набор $(n_1,\ldots,n_{M})$, считаются неизвестными детерминированными величинами, априорное распределение на каждом из множеств допустимых гипотез оказывается неопределенным. В этой ситуации для решения проблемы воспользуемся критерием максимального правдоподобия. Рассматривая вектор $Y$ как выборку единичного объема из распределения $\Phi_{X,\sigma^2 I}$, найдем логарифм функционала правдоподобия

$$\mathcal{L}_{Y}(X(n_1,\ldots,n_{M},U),\sigma^2 I)=-\frac{N}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\|Y-X(n_1,\ldots,n_{M},U)\|^2.$$

Из этой формулы видно, что все рассматриваемые варианты задачи максимально правдоподобного обнаружения можно переформулировать в виде задач минимизации функционала

$$S(X(n_1,\ldots,n_{M},U))=\|Y-X(n_1,\ldots,n_{M},U)\|^2$$

— суммы квадратов уклонений на соответствующих множествах $\Theta_{M}(U)$, $\Theta(U)$, $\Theta_{M}$ и $\Theta$ допустимых векторов $X(\cdot)$. В этой формулировке проблемы обнаружения требование гауссовости помехи или ошибки наблюдения, очевидно, является излишним.

## 5. Редуцированные экстремальные задачи

Положим $Y_n = (y_n, \ldots, y_{n+q-1})$, $n = 0, \ldots, N-q$. Раскрывая квадрат нормы разности векторов и используя (1), найдем

$$S(X(n_1, \ldots, n_M, U)) = \|Y\|^2 - \sum_{m \in \mathbb{M}} \{2(Y_{n_m}, U) - \|U\|^2\}. \tag{4}$$

Первый член в правой части выражения (4) — константа. Следовательно, возможные варианты задачи обнаружения сводятся к максимизации второго члена этого выражения.

Рассмотрим случай, когда информационный вектор задан как образец. Второй член правой части (4) представим в виде

$$\sum_{m \in \mathbb{M}} \{2(Y_{n_m}, U) - \|U\|^2\} = 2 \sum_{m \in \mathbb{M}} (Y_{n_m}, U) - M\|U\|^2. \tag{5}$$

Если число $M$ повторов известно, то второй член правой части (5) — константа, поэтому имеем следующую дискретную экстремальную задачу.

З а д а ч а 1. Обнаружение заданного повторяющегося фрагмента при известном числе повторов.

*Дано*: вектор $Y \in \mathbb{R}^N$, вектор $U \in \mathbb{R}^q$, целые числа $M$, $T_{\min}$, $T_{\max}$, $N^-$ и $N^+$ (напомним, что в предельном случае задание значений переменных $T_{\min}$, $T_{\max}$, $N^-$ и $N^+$ не требуется).

*Найти*: набор $(n_1, \ldots, n_M) \in \Omega_M(N, N^-, N^+, T_{\min}, T_{\max}, q)$ такой, что

$$\sum_{m \in \mathbb{M}} (Y_{n_m}, U) \to \max .$$

**Теорема 1.** *Задача* 1 *эффективно разрешима за время* $O[M(T_{\max} - T_{\min} + q)(N - q + 1)]$, *если числа* $T_{\min}$, $T_{\max}$, $N^-$ *и* $N^+$ *заданы, и за время* $O(MN^2)$ *в предельном случае* (*когда эти числа не заданы как входные данные*).

Конструктивное (алгоритмическое) доказательство этого результата приведено в [17].

В случае неизвестного числа $M$ повторов второй член в правой части выражения (5) не является константой, поэтому имеем следующую редуцированную экстремальную задачу.

З а д а ч а 2. Обнаружение заданного повторяющегося фрагмента при неизвестном числе повторов.

*Дано*: вектор $Y \in \mathbb{R}^N$, вектор $U \in \mathbb{R}^q$, целые числа $T_{\min}$, $T_{\max}$, $N^-$ и $N^+$ (в предельном случае эти числа не заданы).

*Найти*: набор $(n_1, \ldots, n_M) \in \Omega(N, N^-, N^+, T_{\min}, T_{\max}, q)$ и число $M$ такие, что

$$\sum_{m \in \mathbb{M}} \{2(Y_{n_m}, U) - \|U\|^2\} \to \max .$$

**Теорема 2.** *Задача* 2 *разрешима за полиномиальное время с временной сложностью* $O[(T_{\max} - T_{\min} + q)(N - q + 1)]$, *если числа* $T_{\min}$, $T_{\max}$, $N^-$ *и* $N^+$ *заданы, и с временной сложностью* $O(N^2)$ *в предельном случае.*

Конструктивное доказательство этого результата приведено в [18].

Если информационный вектор $U$ не задан (как образец), то, учитывая независимость набора $(n_1, \ldots, n_M)$ и вектора $U$, минимум правой части (4) по вектору $U$ легко находится аналитически [19]. Этот минимум равен $\|Y\|^2 - 1/M \| \sum_{m \in \mathbb{M}} Y_{n_m}\|^2$. Отсюда получаем следующие две экстремальные задачи для случая, когда информационный вектор неизвестен.

З а д а ч а 3. Обнаружение неизвестного повторяющегося фрагмента при известном числе повторов.

*Дано*: вектор $Y \in \mathbb{R}^N$, целые числа $M$, $T_{\min}$, $T_{\max}$, $N^-$ и $N^+$ (в предельном случае числа $T_{\min}$, $T_{\max}$, $N^-$ и $N^+$ не заданы).

*Найти*: набор $(n_1, \ldots, n_{_M}) \in \Omega_{_M}(N, N^-, N^+, T_{\min}, T_{\max}, q)$ такой, что

$$\| \sum_{m \in \mathbb{M}} Y_{n_m} \| \to \max .$$

**Теорема 3.** *Задача* 3 *в общем случае NP-трудна.*

Доказательство теоремы приведено в [19]. Там же установлены очевидные эффективно разрешимые случаи этой задачи: 1) $M = 1, 2$; 2) $T_{\max} - T_{\min} = 1$. В этой же работе обоснован приближенный алгоритм решения задачи, имеющий временную сложность $O[M(T_{\max} - T_{\min} + q)(N - q + 1)]$, если числа $T_{\min}$, $T_{\max}$, $N^-$ и $N^+$ заданы, и $O(MN^2)$, если эти числа неизвестны. К сожалению, гарантированные оценки точности для этого алгоритма пока не установлены.

**Теорема 4.** *Задача* 3 *в предельном случае решается с гарантированной относительной погрешностью, не превышающей* $(q-1)/8l^2$*, за время* $O[Nq(q+M)(2l+1)^{q-1}]$*, где* $l = l(N)$ *— произвольная неограниченно растущая функция от* $N$.

Доказательство теоремы и алгоритм решения задачи, реализующий вполне полиномиальную аппроксимационную схему, приведены в [20].

З а д а ч а 4. Обнаружение неизвестного повторяющегося фрагмента при неизвестном числе повторов [19].

*Дано*: вектор $Y \in \mathbb{R}^N$, целые числа $T_{\min}$, $T_{\max}$, $N^-$ и $N^+$ (в предельном случае эти числа не заданы как входные данные).

*Найти*: набор $(n_1, \ldots, n_{_M}) \in \Omega(N, N^-, N^+, T_{\min}, T_{\max}, q)$ и число $M$ такие, что

$$\frac{1}{M} \| \sum_{m \in \mathbb{M}} Y_{n_m} \|^2 \to \max .$$

Статус сложности этой задачи окончательно не выяснен. Скорее всего, эта задача NP-трудна, как и задача 3. Гипотеза о NP-трудности задачи 4 остается неподтвержденной несколько лет. Если в этой задаче снять ограничения на квазипериодичность фрагментов и на запрет их перекрытия, то задача становится NP-трудной, а в варианте верификации свойств — NP-полной. Этот результат получен в соавторстве с А. В. Пяткиным и готовится к публикации. Окончание исследования сложности этой задачи — дело ближайшей перспективы.

## Заключение

Экстремальные задачи, рассмотренные в данной работе, являются простейшими в семействе всевозможных задач, к которым сводится реализация комбинаторного подхода к анализу и распознаванию зашумленных числовых последовательностей, включающих какие-либо квазипериодические структуры над информационными фрагментами. Это семейство в настоящее время включает несколько сотен элементов [21]. Масштабность проблемы построения алгоритмов для решения задач из этого семейства можно оценить, заглянув в Интернете на сайт по адресу http://math.nsc.ru/~serge/qpsl/. Здесь лишь отметим, что для многих задач из указанного семейства статус вычислительной сложности остается невыясненным и какие-либо алгоритмы с оценками для их решения неизвестны. Значимость изложенных в данной работе результатов состоит в том, что они как базовые позволяют устанавливать доказуемый статус алгоритмической сложности других труднорешаемых задач из этого семейства с использованием техники полиномиальной сводимости [22].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Kel'manov A.V., Jeon B.** A posteriori joint detection and discrimination of pulses in a quasiperiodic pulse train // IEEE Transactions on Signal Processing. 2004. Vol. 52, no. 3. P. 1–12.
2. **Wald A.** Sequential analysis. New York: Wiley, 1947.
3. **Van Trees H.L.** Detection, estimation, and modulation theory. Part I. New York: Wiley, 1968.
4. **Helstrom C.W.** Elements of signal detection and estimation. New York: Prentice-Hall, 1979.
5. **Anderson B.D. and Moore J.D.** Optimal filtering. New York: Prentice-Hall, 1995.
6. **Никифоров И.В.** Последовательное обнаружение изменения свойств временных рядов. М.: Наука, 1983.
7. **Жиглявский А.А., Красковский А.Е.** Обнаружение разладки случайных процессов в задачах радиотехники. Л.: ЛГУ, 1988.
8. Обнаружение изменения свойств сигналов и динамических систем / под ред. М. Бассвиля, А. Вилски, А. Банвениста и др. М.: Мир, 1989.
9. **Клигене Н., Телькснис Л.** Методы обнаружения моментов изменения свойств случайных процессов // Автоматика и телемеханика. 1983. № 10. С. 5–56.
10. **Торговицкий И.Ш.** Методы определения момента изменения вероятностных характеристик случайных величин // Зарубежная радиоэлектроника. 1976. № 1. С. 3–52.
11. **Дарховский Б.С.** О двух задачах оценивания моментов изменения вероятностных характеристик случайной последовательности // Теория вероятностей и ее применения. 1984. Т. 29. Вып. 3. С. 464–473.
12. **Дарховский Б.С.** Непараметрический метод оценивания интервалов однородности случайной последовательности // Теория вероятностей и ее применения. 1985. Т. 30. Вып. 4. С. 795–799.
13. **Бродский Б.Е., Дарховский Б.С.** Сравнительный анализ некоторых непараметрических методов скорейшего обнаружения момента "разладки" случайной последовательности // Теория вероятностей и ее применения. 1990. Т. 35. Вып. 4. С. 655–668.
14. **Дарховский Б.С.** Ретроспективное обнаружение "разладки" в некоторых моделях регрессионного типа // Теория вероятностей и ее применения. 1995. Т. 40. Вып. 4. С. 898–903.
15. **Gini F., Farina A., Greco M.** Selected list of references on radar signal processing // IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems. 2001. Vol. 37, no. 1. P. 329–359.
16. **Кельманов А.В., Михайлова Л.В.** Совместное обнаружение в квазипериодической последовательности заданного числа фрагментов из эталонного набора и ее разбиение на участки, включающие серии одинаковых фрагментов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 1. С. 172–189.
17. **Кельманов А.В., Хамидуллин С.А.** Апостериорное обнаружение заданного числа одинаковых подпоследовательностей в квазипериодической последовательности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2001. Т. 41, № 5. С. 807–820.
18. **Kel'manov A.V., Khamidullin S.A., Okol'nishnikova L.V.** A posteriori detection of identical subsequences in a quasiperiodic sequence // Pattern Recognition and Image Analysis. 2002. Vol. 12, no. 4. P. 438–447.
19. **Гимади Э.Х., Кельманов А.В., Кельманова М.А., Хамидуллин С.А.** Апостериорное обнаружение в числовой последовательности квазипериодического фрагмента при заданном числе повторов // Сиб. журн. индустр. математики. 2006. Т. 9, № 1(25). С. 55–75.
20. **Бабурин А.Е., Гимади Э.Х., Глебов Н.И., Пяткин А.В.** Задача отыскания подмножества векторов с максимальным суммарным весом // Дискр. анализ и исследование операций. Сер. 2. 2007. Т. 14, № 1. С. 32–42.
21. **Кельманов А.В.** О некоторых полиномиально разрешимых и NP-трудных задачах анализа и распознавания последовательностей с квазипериодической структурой // Математические методы распознавания образов: Сб. докл. XIII всерос. конф. М.: МАКС Пресс, 2007. С. 261–264.
22. **Garey M.R., Johnson D.S.** Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness. San Francisco: Freeman, 1979.


Поступила 03.03.08

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14 № 2 2008

УДК 519.8

# ЗАДАЧИ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ, СВЯЗАННЫЕ С ПОЛИЭДРАЛЬНОЙ КОМИТЕТНОЙ ОТДЕЛИМОСТЬЮ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ[1]

**Вл. Д. Мазуров, М. Ю. Хачай, М. И. Поберий**

В работе исследуется вычислительная и аппроксимационная сложность задачи о минимальном аффинном разделяющем комитете, а также некоторых ее важных специальных случаев.

## Введение

Голосование решающих правил — основной метод принятия решений. Это метод согласования интересов, например, голосование коллектива экспертов, голосование признаков, ранжирование. Фактически свободный рынок осуществляет голосование по ценам товаров. Неправильная процедура голосования ведет к большим потерям. Между тем выбор процедуры — серьезная научная проблема. Один из подходов к ее решению связан с методом комитетов в распознавании и оптимизации.

Причем нельзя заранее выделить некоторую универсальную процедуру голосования. Основные проблемы таковы:

(1) выбор эффективной или оптимальной процедуры голосования;

(2) защита от манипуляций при голосовании.

Выбор оптимального решающего правила — одна из сложных задач математического программирования, причем в условиях эволюции материала обучения мы получаем нестационарные процессы оптимизации (см. [1]). Заметим также, что применение комитетов связано с кусочно-линейными функциями и задачами дизъюнктивного программирования, теория которых, включающая изучение двойственности, построена И. И. Ереминым (см. [2]).

При голосовании формируется выбор вариантов решений, каждый участник дает информацию о предпочтительных вариантах, затем исходя из этих данных по определенным правилам вырабатывается коллективное решение. Это операция агрегирования индивидуальных решений. Она чревата противоречиями. Мы предложили и обосновали общий принцип избежания противоречий в коллективных решениях — прецедентно-классификационный подход. Кроме того, комитеты снимают проблему выбора класса решающих правил. Более того, комитеты предполагают предварительный отбор членов из всего пространства возможных векторов по определенным правилам. Так, при недостаточных выборках сначала можно построить совокупность решающих правил, минимизирующих эмпирический риск, а потом из них сформировать комитетное решение.

Однако первоначальным поводом для введения комитетов были так называемые ассоциативные машины, предложенные Н. Нильсоном для решения задач распознавания образов. Нужен был метод их настройки на правильное распознавание информации и ее свойств. Нильсон ввел для этого понятие комитета систем линейных неравенств. В более общем виде различные

[1]Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (проекты 07-01-00399 и 07-07-00168), программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-2081.2008.1) и Фонда содействия отечественной науке.

виды обобщений понятия решения на случай несовместных задач появились в екатеринбургской школе распознавания. Комитеты, $p$-комитеты и комитетные конструкции вообще успешно используются в задачах обобщенного существования, неформализованных и несобственных задачах оптимизации, задачах диагностики и прогнозирования в экономике и медицине.

Наряду с обобщающей способностью алгоритмов распознавания с середины 1980-х гг. исследователей интересуют вопросы оценки вычислительной сложности связанных с процедурой обучения комбинаторных задач. К сожалению, в подавляющем большинстве такие задачи труднорешаемы. Поэтому поиск их полиномиально разрешимых подклассов (равно как и обоснование их труднорешаемости), а также разработка полиномиальных приближенных алгоритмов решения таких задач, несомненно, остаются актуальными и в настоящее время. Исследуемые в данной работе модификации задачи о минимальном по числу элементов разделяющем аффинном комитете для конечных множеств (MASC) тесно связаны одновременно с задачей обучения простейшего классического персептрона и задачей о полиэдральной отделимости множеств, являясь, по сути, частными случаями обеих задач.

Классическим персептроном обычно [3] называется двухслойная нейронная сеть без скрытых слоев, с $q$ входами и одним выходом. Функция активации $i$-го нейрона имеет вид

$$f_i(x) = \begin{cases} 1, & c_i^T x - d_i > 0, \\ -1, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{1}$$

Фактически персептрон реализует отображение

$$F(\,\cdot \mid (c_1, d_1), \ldots, (c_{q+1}, d_{q+1})) : \mathbb{Q}^n \to \{-1, 1\},$$

параметризованное парами $(c_1, d_1), \ldots, (c_{q+1}, d_{q+1})$. Персептрон $F$ называется *корректным* на выборке

$$(a_1, \ldots, a_{m_1}, b_1, \ldots, b_{m_2}), \tag{2}$$

если

$$\begin{aligned} F(a_i) &= 1 \qquad (i \in \mathbb{N}_{m_1}), \\ F(b_j) &= -1 \qquad (j \in \mathbb{N}_{m_2}), \end{aligned}$$

где $\mathbb{N}_k = \{1, \ldots, k\}$.

Процедуре обучения (настройки весов сети по заданной выборке) может быть сопоставлено несколько комбинаторных задач.

*Задача “Обучение (загрузка) персептрона”.* Заданы натуральное число $q$ и выборка (2). Существует ли корректный на выборке персептрон с не более чем $q$ входными нейронами?

*Задача “Оптимальный корректный персептрон” (OCP).* Задана обучающая выборка (2). Требуется определить параметры корректного на данной выборке персептрона с наименьшим числом входов.

Известны следующие результаты.

**Теорема 1** (Блюм, Ривест [4]). *Задача обучения персептрона $NP$-полна и остается таковой при произвольном фиксированном $q \geq 2$.*

**Теорема 2** (Lin, Vitter [5]). *Задача OCP $NP$-трудна.*

Как будет показано ниже, задача о минимальном аффинном разделяющем комитете — частный случай задачи OCP, когда параметры $c_{q+1} = [1, \ldots, 1]^T$ и $d_{q+1} = 0$ выходного нейрона фиксированы, что соответствует голосованию по правилу простого большинства. Другие задачи, специализацией которых является задача о минимальном разделяющем комитете, относятся к вычислительной геометрии и связаны с построением оптимальных кусочно-линейных разделяющих поверхностей для множеств с пересекающимися выпуклыми оболочками. Приведем их возможные формулировки, следуя [6]. Каждой гиперплоскости $H \subset \mathbb{R}^n$, $H = \{x : c^T x = d\}$, сопоставим предикат $\Pi[H] : \mathbb{R}^n \to \{\text{true}, \text{false}\}$ по правилу, аналогичному правилу (1):

$$\Pi[H](x) = \begin{cases} \text{true}, & c^T x - d > 0, \\ \text{false}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Зададимся множествами $A$, $B$ и булевой функцией $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_k)$. Будем говорить, что гиперплоскости $H_1, \ldots, H_k$ разделяют множества $A$ и $B$ по правилу $\varphi$, если

$$\begin{aligned} \varphi(\Pi[H_1](a), \ldots, \Pi[H_k](a)) &= \text{true} \qquad (a \in A), \\ \varphi(\Pi[H_1](b), \ldots, \Pi[H_k](b)) &= \text{false} \qquad (b \in B). \end{aligned}$$

Рассмотрим следующие комбинаторные задачи.

*Задача “k-полиэдральная отделимость при заданной булевой формуле”.* Заданы конечные множества $A$, $B \subset \mathbb{Q}^n$, $A = \{a_1, \ldots, a_{m_1}\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_{m_2}\}$ и булева функция $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_k)$. Существуют ли гиперплоскости $H_1, \ldots, H_k$, разделяющие множества $A$ и $B$ по правилу $\varphi$?

В случае, когда правило разделения $\varphi$ заранее не известно, может быть сформулирована более общая задача.

*Задача “(свободная)* $k$-полиэдральная отделимость”. Заданы конечные множества $A$, $B \subset \mathbb{Q}^n$, $A = \{a_1, \ldots, a_{m_1}\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_{m_2}\}$, и число $k \in \mathbb{N}$. Существуют ли гиперплоскости $H_1, \ldots, H_k$, разделяющие множества $A$ и $B$ по правилу: для каждой пары $(a, b)$, $a \in A$, $b \in B$ найдется номер $j = j(a, b)$ такой, что $\Pi[H_j](a) = \text{true}$ и $\Pi[H_j](b) = \text{false}$?

Как показано в [6], последняя задача имеет положительный ответ тогда и только тогда, когда для множеств $A$ и $B$ найдется подходящая формула $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_k)$, при которой предыдущая задача также обладает положительным ответом.

Результат проведенного в работе [6] исследования вычислительной сложности сформулированных выше задач приведен в следующей теореме.

**Теорема 3** (Megiddo [6]).

(1) *Обе задачи NP-полны и остаются труднорешаемыми при произвольном фиксированном* $k \geq 2$.

(2) *Задача о свободной $k$-полиэдральной отделимости остается NP-полной при произвольном фиксированном* $n > 1$.

(3) *Задача о свободной $k$-полиэдральной отделимости при произвольных фиксированных $k$ и $n$ полиномиально разрешима.*

Легко видеть, что задача о минимальном аффинном разделяющем комитете (MASC) является частным случаем оптимизационного варианта задачи о $k$-полиэдральной отделимости при заданной монотонной булевой функции, принимающей значение true тогда и только тогда, когда большинство ее аргументов также принимает значение true.

К сожалению, задача MASC, как и описанные выше задачи, в общем случае труднорешаема [7,8]. В данной работе обсуждается несколько новых результатов, касающихся вычислительной сложности и аппроксимируемости задачи MASC и ряда ее специальных случаев.

## 1. Задача о минимальном аффинном разделяющем комитете (MASC)

О п р е д е л е н и е 1. Конечная последовательность $Q = (f_1, \ldots, f_q)$ функций $f_i(x) = c_i^T x - d_i$ называется аффинным комитетом, разделяющим множества $A$, $B \subset \mathbb{R}^n$, если выполнено условие

$$|\{i \in \mathbb{N}_q : f_i(a) > 0\}| \;>\; \frac{q}{2} \qquad (a \in A),$$
$$|\{i \in \mathbb{N}_q : f_i(b) < 0\}| \;>\; \frac{q}{2} \qquad (b \in B).$$

При этом $q$ называется числом элементов (членов) комитета $Q$.

Как известно [9], множества $A$ и $B$ отделимы аффинным комитетом тогда и только тогда, когда $A \cap B = \varnothing$. Тем не менее по ряду причин особый интерес представляют разделяющие комитеты с наименьшим (для данных множеств) числом элементов, называемые *минимальными.*

*Задача "Минимальный аффинный разделяющий комитет"* (*MASC*). Заданы множества $A$, $B \subset \mathbb{Q}^n$, $A = \{a_1, \ldots, a_{m_1}\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_{m_2}\}$. Требуется указать аффинный комитет с наименьшим числом элементов, разделяющий множества $A$ и $B$.

Следующее утверждение характеризует вычислительную сложность задачи в общем случае.

**Теорема 4** [7, 8]. *Задача MASC NP-трудна и остается труднорешаемой при условии* $A \cup B \subset \{x \in \{0,1,2\}^n : \|x\|_2 \le 2\}$.

Традиционный подход к исследованию $NP$-трудных задач комбинаторной оптимизации предполагает, в частности, разработку полиномиальных приближенных алгоритмов решения задачи MASC. В работе [8] описан один приближенный алгоритм решения данной задачи, обладающий точностью $O\left(\frac{m}{n}\right)$, и доказана

**Теорема 5.** *Если справедлива гипотеза* $P \ne NP$, *то задача MASC не принадлежит классу Apx — классу задач комбинаторной оптимизации, обладающих полиномиальными алгоритмами с постоянной точностью.*

В следующем разделе настоящей статьи приведены новые результаты, уточняющие результат теоремы 5.

## 2. Аппроксимируемость задачи MASC

В данном разделе обосновывается нижняя оценка порога эффективной аппроксимируемости задачи MASC. Методика доказательства, как и для теоремы 5, базируется на полиномиальной сводимости к задаче MASC известной $NP$-трудной задачи о раскраске в $k$ цветов 2-цветного 3-однородного гиперграфа. Как показано в [10], данная задача остается труднорешаемой при произвольном фиксированном $k \ge 3$.

**Теорема 6.** *Если* $NP \not\subset DTIME(2^{\mathrm{poly}(\log n)})$, *существует такая константа* $D > 0$, *что произвольный полиномиальный приближенный алгоритм задачи MASC обладает точностью большей, чем* $D \log\log\log m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть условие частной задачи о раскраске задается конечным гиперграфом $\Gamma = (\mathbb{N}_n, H)$, в котором $H \ne \varnothing$ и $|h| = 3$ для каждого ребра $h \in H$. По условию, гиперграф $\Gamma$ — двуцветный, т.е. существует такая функция $\varphi_0 : \mathbb{N}_n \to \{1, 2\}$, что

$$(\forall\, h \in H) \Rightarrow (|\varphi_0(h)| > 1).$$

Функция $\varphi_0$ индуцирует такое разбиение $V_1 \dot\cup V_2 = \mathbb{N}_n$, что

$$(\forall\, h \in H) \Rightarrow ((h \cap V_1 \neq \varnothing) \wedge (h \cap V_2 \neq \varnothing)).$$

К сожалению, ни множества $V_1$ и $V_2$, ни определяющее их отображение $\varphi_0$ неизвестны. Требуется для заданного $k \geq 3$ указать раскраску $\varphi : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_k$ гиперграфа $\Gamma$.

По аналогии с методикой, описанной в работе [8], сопоставим данной частной задаче о раскраске подходящую частную задачу MASC, для чего зададимся множествами $A$, $B \subset \mathbb{Q}^n$, определяемыми по правилу

$$A = \{3e_i : i \in \mathbb{N}_n\}, \qquad B = \{e_i + e_j + e_k : \{i, j, k\} \in H\},$$

через $e_i$ обозначив $i$-й орт пространства $\mathbb{Q}^n$.

Нетрудно убедиться в справедливости следующих утверждений:

(1) $\mathrm{conv}(A) \cap \mathrm{conv}(B) \neq \varnothing$, следовательно, множества $A$ и $B$ не могут быть разделены гиперплоскостью, и минимальный аффинный разделяющий (эти множества) комитет содержит более 1 элемента;

(2) множества $A$ и $B$ отделимы комитетом из трех элементов. В самом деле, определим линейные функции $f_i(x) = c_i^T x$, задав координаты векторов $c_i$ по правилу

$$c_{1j} = \begin{cases} 1, & j \in V_1, \\ -3, & j \in V_2, \end{cases} \qquad c_{2j} = \begin{cases} 1, & j \in V_2, \\ -3, & j \in V_1, \end{cases} \qquad c_3 = [1, \ldots, 1]^T.$$

По построению, справедливы неравенства

$$\begin{array}{lll} f_1(3e_i) > 0, & f_3(3e_i) > 0 & (i \in V_1), \\ f_2(3e_i) > 0, & f_3(3e_i) > 0 & (i \in V_2), \\ \multicolumn{2}{r}{\left.\begin{array}{r} f_1(e_i + e_j + e_k) < 0, \\ f_2(e_i + e_j + e_k) < 0 \end{array}\right\}} & (\{i, j, k\} \in H), \end{array}$$

значит, последовательность $Q = (f_1, f_2, f_3)$ по определению является аффинным комитетом, разделяющим $A$ и $B$.

Пусть далее $Q = (f_1, \ldots, f_{2s+1})$, $f_i(x) = c_i^T x - d_i$, — произвольный комитет, разделяющий множества $A$ и $B$. В силу критерия существования аффинного разделяющего комитета можно без ограничения общности полагать, что $2s+1 \leq |A \cup B| \leq \binom{n}{3} + n$. Убедимся в том, что комитет индуцирует раскраску исходного гиперграфа $\Gamma$ в $t$ цветов, где

$$1 \leq t \leq \left\{ n, \binom{2s+1}{s+1} \right\}.$$

По определению комитета каждому номеру $j \in \mathbb{N}_n$ соответствует подмножество (возможно, не единственное) $I(j) \subset \mathbb{N}_{2s+1}$, $|I(j)| = s + 1$ такое, что

$$f_i(3e_j) > 0 \qquad (i \in I(j)).$$

Произведем последовательный перебор вершин $\Gamma$ и построим разбиение $V_1 \dot\cup \ldots \dot\cup V_t = \mathbb{N}_n$ согласно следующему алгоритму.

**Шаг 1.** Положить $V_1 := \{1\}$, $I_1 := I(1)$, $t, j := 1$.

**Шаг 2.** Если $j = n$, STOP, иначе — перейти на шаг 3.

**Шаг 3.** Положить $j := j + 1$ и $k := 1$.

**Шаг 4.** Пока $k \leq t$, повторять шаги 5–6.

**Шаг 5.** Если $I(j) = I_k$, положить $V_k := V_k \cup \{j\}$ и перейти на шаг 2.

**Шаг 6.** $k := k + 1$.

**Шаг 7.** Определить $t := t + 1$, $V_t := \{j\}$ и $I_t := I(j)$.

**Шаг 8.** Перейти на шаг 2.

Очевидно, данное построение (равно как и все описанные выше) может быть произведено за время, ограниченное сверху полиномом от $n$. Построенное в результате разбиение задает искомую раскраску (в $t$ цветов). Для обоснования ее корректности убедимся в том, что множество $H$ не содержит монохромных ребер. В самом деле, пусть от противного найдутся такие ребро $h \in H$ и номер $r \in \mathbb{N}_t$, что $h \subset V_r$. Без ограничения общности можно полагать $h = \{1, 2, 3\}$ и $r = 1$. Тогда по построению для произвольного $p \in I(1)$ справедливы неравенства

$$3c_p^T e_i + d_p > 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

и, следовательно,

$$c_p^T(e_1 + e_2 + e_3) + d_p > 0.$$

С другой стороны, поскольку $Q$ — разделяющий комитет для множеств $A$ и $B$, с необходимостью найдется номер $p_0 \in I(1)$, для которого

$$c_{p_0}^T(e_1 + e_2 + e_3) + d_{p_0} < 0.$$

Найденное противоречие подтверждает корректность раскраски.

Далее, пусть задача MASC обладает приближенным полиномиальным алгоритмом с точностью $r = r(m)$. Здесь, как обычно, $r$ — натуральнозначная функция натурального аргумента — мощности множества $A \cup B$. Без ограничения общности можно полагать $r = 2\rho + 1$. Из доказанного выше утверждения (2) следует, что результатом применения его к сформулированной выше частной задаче будет разделяющий комитет из не более чем $3r = 6\rho + 3$ элементов, что повлечет построение (за полиномиальное время) раскраски гиперграфа $\Gamma$ в $t$ цветов, где

$$t \leq \min\left\{n, \binom{6\rho + 3}{3\rho + 2}\right\}.$$

Далее возможны два варианта в зависимости от того, на каком из двух элементов будет достигаться минимум.

(1) Пусть $\binom{6\rho + 3}{3\rho + 2} \geq n$, тогда, воспользовавшись верхней оценкой для биномиального коэффициента, имеем

$$2^{6\rho+3} \geq \binom{6\rho + 3}{3\rho + 2} \geq n,$$

откуда $\rho \geq D_1 \log n$ (для подходящей константы $D_1 > 0$).

(2) Остановимся на более интересном случае, при котором $t = \binom{6\rho + 3}{3\rho + 2} < n$. Согласно [10], при условии $NP \not\subset DTIME(2^{\mathrm{poly}(\log n)})$ найдется константа $C > 0$ такая, что $t > C\sqrt[3]{\log\log n}$, следовательно,

$$2^{6\rho+3} \geq \binom{6\rho + 3}{3\rho + 2} > C\sqrt[3]{\log\log n},$$

откуда $\rho > D_2 \log\log\log n$ (для некоторой константы $D_2$). Учитывая, что в условиях теоремы $m = O(n^3)$, получим для подходящей константы $D > 0$ искомое неравенство

$$r > \rho > D \log\log\log m.$$

Теорема доказана.

## 3. Труднорешаемость задачи MASC в пространствах фиксированной размерности

Известно, что многие $NP$-трудные в общем случае задачи комбинаторной оптимизации становятся полиномиально (или псевдополиномиально) разрешимыми при дополнительных ограничениях: при фиксации размерности пространства, числа ограничений и т.п. Например, общая задача целочисленного линейного программирования, сформулированная в пространстве фиксированной размерности, полиномиально разрешима.

С другой стороны, известно (см., напр., [11]), что задача MASC, заданная в одномерном пространстве, также может быть решена за полиномиальное время. До настоящего времени открытым оставался вопрос о вычислительной сложности данной задачи в пространствах большей размерности. В данном разделе показывается, что задача MASC остается $NP$-трудной, будучи сформулированной в пространстве $\mathbb{Q}^n$ при произвольном фиксированном $n > 1$. Для обоснования этого факта, очевидно, достаточно показать труднорешаемость задачи на плоскости.

*Задача о комитетной отделимости конечных множеств на плоскости* ($PASC$). Заданы множества $A, B \subset \mathbb{Q}^2$, $A = \{a_1, \dots, a_{m_1}\}$, $B = \{b_1, \dots, b_{m_2}\}$, и число $t \in \mathbb{N}$. Существует ли аффинный комитет $Q$, разделяющий множества $A$, $B$ и состоящий из не более чем $t$ элементов?

Нетрудно убедиться в том, что задача PASC принадлежит классу $NP$. Цель данного раздела состоит в обосновании полиномиальной сводимости к ней известной $NP$-полной задачи о покрытии конечного множества точек плоскости множеством прямых (PC) и, как следствие, принадлежности задачи PASC классу $NP$-полных задач.

О п р е д е л е н и е 2. Множество прямых $L = \{l_1, \dots, l_s\}$, $l_j = \{x \in \mathbb{R}^2 : c_j^T x = d_j\}$, где $c_j \neq 0$, называется покрытием множества $P = \{p_1, \dots, p_k\} \subset \mathbb{R}^2$, если для каждой точки $p \in P$ найдется прямая $l = l(p) \in L$ такая, что $p \in l$.

*Задача о покрытии прямыми конечного множества на плоскости* ($PC$). Заданы множество $P = \{p_1, \dots, p_k\} \subset \mathbb{Z}^2$ и число $s \in \mathbb{N}$. Существует ли покрытие $L$ множества $P$, не превосходящее по мощности $s$?

**Теорема 7** (Megiddo, Tamir [12]). *Задача $PC$ $NP$-полна в сильном смысле.*

Договоримся использовать следующие обозначения:
$B(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}$ — круг радиуса $\varepsilon$ с центром в $x_0$; $\operatorname{aff} P$ — аффинная оболочка множества $P$; $\dim \operatorname{aff} P$ — размерность аффинного (линейного) многообразия $\operatorname{aff} P$.

Нам потребуется следующее утверждение, приводимое с доказательством ввиду его важности для дальнейших построений.

**Утверждение 1** (Megiddo, Tamir [12]). *Пусть заданы множество $P = \{p_1, \dots, p_k\} \subset \mathbb{Z}^2$, числа $\rho = \max\{\|p\|_2 : p \in P\}$, $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{1}{6(2\rho+1)}\right)$ и непустое подмножество $J \subset \mathbb{N}_k$. Для существования прямой $l = l(J)$ такой, что*

$$B(p_j, \varepsilon) \cap l \neq \varnothing \qquad (j \in J), \tag{3}$$

*необходимо и достаточно выполнения условия* $\dim \operatorname{aff}\{p_j : j \in J\} \leq 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость утверждения при $|J| \leq 2$ очевидна, поэтому далее при доказательстве полагаем, что $|J| \geq 3$. Достаточность может быть доказана непосредственной проверкой. Остановимся на доказательстве необходимости. Пусть $l$ — произвольная прямая, удовлетворяющая условию (3) для некоторого подмножества $J$. Предположим от противного, что точки $p_j$, $j \in J$ не лежат на одной прямой. Тогда найдутся числа $j_1, j_2, j_3 \in J$ (без ограничения общности полагаем $j_1 = 1$, $j_2 = 2$ и $j_3 = 3$) такие, что $\dim \operatorname{aff}\{p_1, p_2, p_3\} = 2$. По условию для подходящих векторов $w_j = [\xi_j, \eta_j]^T$ выполняются соотношения

$$p_j + w_j \in B(p_j, \varepsilon) \cap l \qquad (j \in \{1, 2, 3\}).$$

Введя обозначение $p_j = [x_j, y_j]^T$, имеем по выбору $w_j$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 + \xi_1 & x_2 + \xi_2 & x_3 + \xi_3 \\ y_1 + \eta_1 & y_2 + \eta_2 & y_3 + \eta_3 \end{vmatrix} = 0.$$

С другой стороны, $|\Delta| \geq |\Delta_0| - 12\rho\varepsilon - 6\varepsilon^2$, где

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \geq 1,$$

в силу целочисленности и предположения о неколлинеарности точек $p_1, p_2$ и $p_3$, откуда

$$|\Delta| \geq 1 - 12\rho\varepsilon - 6\varepsilon^2 \geq 1 - 6(2\rho + 1)\varepsilon > 0$$

по выбору $\varepsilon$. Найденное противоречие завершает доказательство необходимости условия и утверждения в целом.

Пусть далее условие частной задачи PC задается множеством $P = \{p_1, \ldots, p_k\} \subset \mathbb{Z}^2$ и числом $s \in \mathbb{N}$. Определим числа $\rho$ и $\varepsilon$ по формулам

$$\rho = \max\{\|p\|_2 : p \in P\}, \qquad \varepsilon = \frac{1}{6(2\rho + 1) + 1}. \tag{4}$$

Зафиксируем вектор $\sigma$, $\|\sigma\|_2 = 1$, так, чтобы для любого $\{i, j\} \in \mathbb{N}_k$ отрезки $[p_i - \varepsilon\sigma,\ p_i + \varepsilon\sigma]$ и $[p_j - \varepsilon\sigma,\ p_j + \varepsilon\sigma]$ не лежали на одной прямой. Сопоставим исходной задаче PC частную задачу PASC с условием: $A = P$, $B = (P - \varepsilon\sigma) \cup (P + \varepsilon\sigma)$ и $t = 2s + 1$ (см. рис. 1).

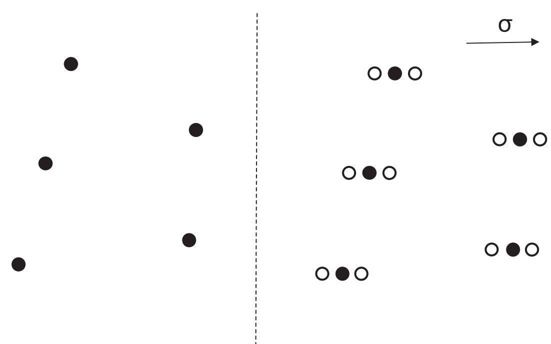



Рис. 1. К схеме сведения задачи PC к задаче PASC.

Легко убедиться в том, что описанные выше действия могут быть произведены за время, ограниченное сверху полиномом от длины записи условия задачи PC. Для завершения обоснования полиномиальной сводимости достаточно показать, что задача PC и поставленная ей в соответствие задача PASC имеют положительные или отрицательные ответы одновременно. Другими словами, что множество $P$ обладает покрытием из не более чем $s$ прямых тогда и только тогда, когда соответствующие ему множества $A$ и $B$ отделимы аффинным комитетом, число элементов которого не превосходит $2s + 1$.

**Теорема 8.** *Множество $P = \{p_1, \ldots, p_k\} \subset \mathbb{Z}^2$ обладает покрытием из $s$ прямых тогда и только тогда, когда множества $A = P$ и $B = (P - \varepsilon\sigma) \cup (P + \varepsilon\sigma)$ отделимы аффинным комитетом из $2s + 1$ элемента.*

Доказательство. 1. Пусть $L = \{l_1, \ldots, l_s\}$ — покрытие множества $P$. Каждой прямой $l_j = \{x \in \mathbb{R}^2 : c_j^T x = d_j\}$ сопоставим подмножества $A(j) = P(j) = P \cap l_j$ и $B(j) = (P(j) - \varepsilon\sigma) \cup (P(j) + \varepsilon\sigma)$. Без ограничения общности можно полагать, что $A(j) \neq \varnothing$ и для каждой точки $a \in A(j)$ справедливо неравенство

$$(c_j^T(a - \varepsilon\sigma) - d_j)(c_j^T(a + \varepsilon\sigma) - d_j) < 0. \tag{5}$$

Зафиксируем число $0 < \delta_j < \varepsilon$ и зададим функции $f_{2j-1}$ и $f_{2j}$ формулами

$$f_{2j-1}(x) = c_j^T x - d_j + \delta_j, \qquad f_{2j}(x) = -c_j^T x + d_j + \delta_j \tag{6}$$

так, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{cases} f_{2j-1}(a - \varepsilon\sigma) \cdot f_{2j}(a - \varepsilon\sigma) < 0, \\ f_{2j-1}(a + \varepsilon\sigma) \cdot f_{2j}(a + \varepsilon\sigma) < 0 \end{cases} \qquad (a \in A(j)). \tag{7}$$

В силу справедливости неравенства (5) такое построение возможно. Очевидно, что наряду с неравенствами (7) по выбору $\varepsilon$ также будут выполнены неравенства

$$\begin{array}{lll} f_{2j-1}(a) > 0, & f_{2j}(a) > 0 & (a \in A(j)), \\ f_{2j-1}(x) \cdot f_{2j}(x) < 0 & & (x \in A \cup B \setminus (A(j) \cup B(j)). \end{array}$$

По построению последовательность функций $(f_1, \ldots, f_{2s})$ обладает свойством

$$\begin{array}{ll} |\{k : f_k(a) > 0\}| \geq s + 1 & (a \in A), \\ |\{k : f_k(b) < 0\}| = s & (b \in B). \end{array}$$

Дополнив ее произвольной аффинной функцией $f_0$, удовлетворяющей условиям

$$f_0(x) < 0 \qquad (x \in A \cup B), \tag{8}$$

непротиворечивым ввиду конечности множества $A \cup B$, получим искомый комитет

$$Q = (f_0, f_1, \ldots, f_{2s+1}),$$

разделяющий множества $A$ и $B$ (см. рис. 2).

2. Множество $P$, очевидно, обладает покрытием, состоящим из не более чем $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ прямых. Обозначим через $s$ мощность его минимального (по числу элементов) покрытия. Покажем, что сопоставленные множеству $P$ согласно описанной выше схеме множества $A$ и $B$ не могут быть отделимы аффинным комитетом с числом элементов $q < 2s + 1$.

Пусть $Q = (f_1, \ldots, f_q)$, $f_i(x) = c_i^T(x) - d_i$, — произвольный комитет аффинных функций, разделяющий множества $A$ и $B$. По определению комитета для каждой точки $a \in A$ найдутся подходящие номера $i_1 = i_1(a)$ и $i_2 = i_2(a)$ такие, что

$$f_{i_1}(a) > 0, \qquad f_{i_1}(a + \varepsilon\sigma) < 0, \tag{9}$$

$$f_{i_2}(a) > 0, \qquad f_{i_2}(a - \varepsilon\sigma) < 0. \tag{10}$$

Введем следующие обозначения: для $a \in A$ через $I_1(a)$ обозначим множество всех номеров $i_1$, удовлетворяющих условию (9); аналогично, через $I_2(a)$ обозначим множество номеров $i_2$, удовлетворяющих условию (10). Далее, определим множества $I_1$ и $I_2$ равенствами

$$I_1 = \bigcup_{a \in A} I_1(a), \qquad I_2 = \bigcup_{a \in A} I_2(a).$$

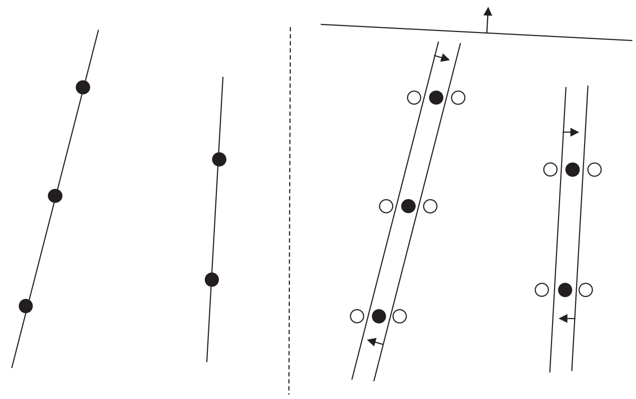


Рис. 2. Построение разделяющего комитета по заданному покрытию.

По доказанному $I_1$, $I_2 \neq \varnothing$, и в силу (9)–(10) справедливы неравенства

$$c_i^T \sigma < 0 \quad (i \in I_1), \qquad c_i^T \sigma > 0 \quad (i \in I_2),$$

следовательно, $I_1 \cap I_2 = \varnothing$.

Для произвольного номера $i \in I_1$ введем обозначение $A'(i) = \{a \in A : i \in I_1(a)\}$. По построению для каждого $a \in A'(i)$ прямая $f_i(x) = 0$ пересечет отрезок $[a, a + \varepsilon\sigma]$. Следовательно, в силу утверждения 1 и по выбору $\varepsilon$ $\dim \operatorname{aff} A'(i) = 1$. Поскольку $\bigcup\limits_{i \in I_1} A'(i) = A = P$, то $|I_1| \geq s$ по выбору $s$. Аналогично обосновывается неравенство $|I_2| \geq s$. Таким образом,

$$q \geq |I_1| + |I_2| \geq 2s. \tag{11}$$

Нетрудно убедиться в справедливости более сильного неравенства $q \geq 2s + 1$. В самом деле, в противном случае комитет $Q$ из $2s$ элементов путем исключения произвольного элемента может быть преобразован в аффинный комитет, разделяющий множества $A$ и $B$ и состоящий из $2s - 1$ члена (см., напр., [11]), что противоречит (11).

Теорема доказана.

**Следствие 1.** *Задача PASC $NP$-полна в сильном смысле. Задача ASC (задача об аффинном разделяющем комитете в виде задачи распознавания свойства), сформулированная в пространстве фиксированной размерности $n > 1$, также $NP$-полна в сильном смысле.*

**Следствие 2.** *Задача MASC, сформулированная в $\mathbb{Q}^n$ при произвольном фиксированном $n > 1$, $NP$-трудна.*

## 4. Случай общего положения

При доказательстве трудноразрешаемости задачи о комитетной отделимости конечных множеств на плоскости (PASC) существенно использовалась вырожденность разделяемых множеств. Аналогичный результат может быть получен и при дополнительном условии общности положения разделяемых множеств.

О п р е д е л е н и е 3. Говорят, что множество $D \subset \mathbb{R}^n$, $|D| > n$, находится в общем положении, если для каждого подмножества $D' \subseteq D$ мощности $n+1$ справедливо соотношение $\dim \operatorname{aff} D' = n$.

В частности, конечное подмножество плоскости находится в общем положении, если никакие три его точки не лежат на одной прямой. Договоримся подзадачу задачи PASC, условие которой задается множествами $A$ и $B$ так, что множество $A \cup B$ находится в общем положении, называть задачей PASC-GP.

Пусть далее условие задачи PC по аналогии с предыдущим разделом задано $k$-элементным множеством $P$ целочисленных точек и натуральным числом $s$, а числа $\rho$ и $\varepsilon$ определены по формуле (4). Зафиксируем векторы $\sigma$ и $\tau$ так, что $\|\sigma\|_2 = 1$, $\|\tau\|_2 = 1$, $\sigma \perp \tau$ и для любых $\{i, j\} \subset \mathbb{N}_k$ отрезки $[p_i - \varepsilon\sigma, p_i + \varepsilon\sigma]$ и $[p_j - \varepsilon\sigma, p_j + \varepsilon\sigma]$, $[p_i - \varepsilon\tau, p_i + \varepsilon\tau]$ и $[p_j - \varepsilon\tau, p_j + \varepsilon\tau]$ не лежат на одной прямой. Задаче PC поставим в соответствие частную задачу PASC-GP с условием $A = \left\{p \pm \dfrac{\varepsilon(p)}{M}\tau : p \in P\right\}$, $B = \{p \pm \varepsilon(p)\sigma : p \in P\}$ и $t = 2s + 1$ (см. рис. 3).

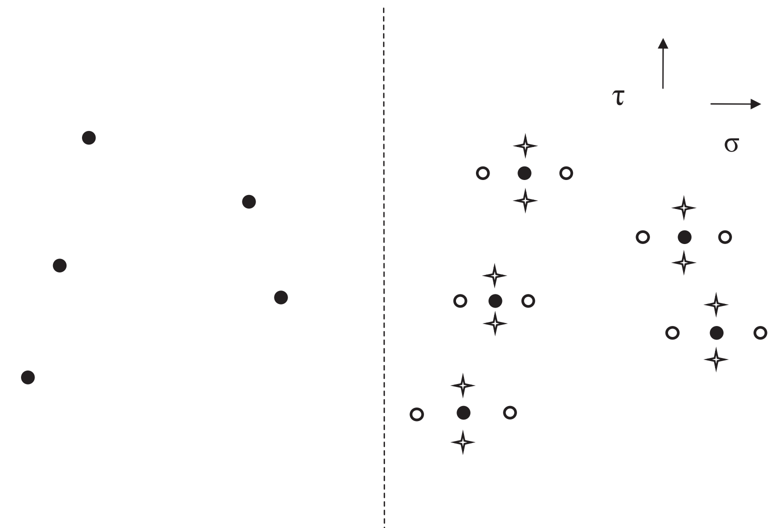



Рис. 3. Схема сведения задачи PC к задаче PASC-GP.

Числа $\varepsilon(p) \in (0, \varepsilon)$ и $M > 0$ выберем так, чтобы выполнялось условие

$$\max_{p\in P} \frac{\varepsilon(p)}{M} < \min_{p\in P} \varepsilon(p),$$

и множество $A \cup B$ находилось в общем положении.

Как и ранее, переход от задачи PC к задаче PASC-GP может быть осуществлен за полиномиальное время. Схема обоснования полиномиальной сводимости задачи PC к сопоставленной ей задаче PASC-GP аналогична схеме доказательства теоремы 8.

**Теорема 9.** *Множество $P = \{p_1, \ldots, p_k\} \subset \mathbb{Z}^2$ обладает покрытием из $s$ прямых в том и только в том случае, когда соответствующие ему множества $A = \left\{p \pm \dfrac{\varepsilon(p)}{M}\tau : p \in P\right\}$ и $B = \{p \pm \varepsilon(p)\sigma : p \in P\}$ отделимы аффинным комитетом из $2s + 1$ элемента.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Рассмотрим произвольное покрытие прямыми $L$ множества $P$. Каждой прямой $l_j \in L$ сопоставим подмножество $P(j) = P \cap l_j$ и подмножества $A(j) \subset A$ и $B(j) \subset B$, индуцируемые $P(j)$. Для каждой точки $p \in P(j)$ соответствующие ей элементы $p - \varepsilon(p)\sigma$ и $p + \varepsilon(p)\sigma$ множества $B(j)$ удовлетворяют неравенству, аналогичному (5), т.е. лежат по разные стороны от прямой $l_j$. Выберем число $\delta_j$ из условия

$$\max_{p\in P} \frac{\varepsilon(p)}{M} < \delta_j < \min_{p\in P} \varepsilon(p)$$

так, чтобы функции $f_{2j-1}$ и $f_{2j}$, задаваемые равенствами (6), удовлетворяли неравенствам

$$\left.\begin{aligned}
&f_{2j-1}(p-\varepsilon(p)\sigma)\cdot f_{2j}(p-\varepsilon(p)\sigma)<0,\\
&f_{2j-1}(p+\varepsilon(p)\sigma)\cdot f_{2j}(p+\varepsilon(p)\sigma)<0,\\
&f_{2j-1}\Big(p-\frac{\varepsilon(p)}{M}\tau\Big)\cdot f_{2j}\Big(p-\frac{\varepsilon(p)}{M}\tau\Big)>0,\\
&f_{2j-1}\Big(p+\frac{\varepsilon(p)}{M}\tau\Big)\cdot f_{2j}\Big(p+\frac{\varepsilon(p)}{M}\tau\Big)>0
\end{aligned}\right\}\quad (p\in P(j)).$$

По выбору $\varepsilon$ для всех точек $x\in(A\cup B)\setminus(A(j)\cup B(j))$ выполняется

$$f_{2j-1}(x)\cdot f_{2j}(x)<0. \tag{12}$$

Полученная последовательность функций $(f_1,\dots,f_{2s})$, дополненная произвольной аффинной функцией $f_0$, удовлетворяющей условию (8), образует искомый комитет, разделяющий множества $A$ и $B$ и состоящий из $2s+1$ элемента (см. рис. 4).

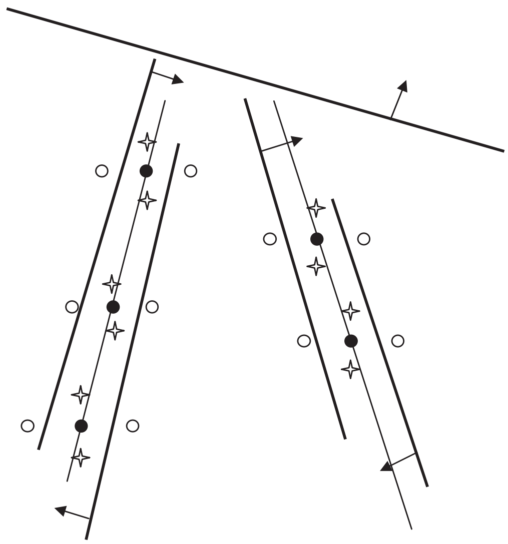


Рис. 4. Построение разделяющего комитета по заданному покрытию.

2. Пусть $Q=(f_1,\dots,f_q)$ — комитет аффинных функций, разделяющий множества $A$ и $B$. По определению комитета для каждой точки $p\in P$ и каждой пары точек $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$ и $(4,1)$ (см. рис. 5) найдется подходящий член комитета, правильно классифицирующий эту пару.

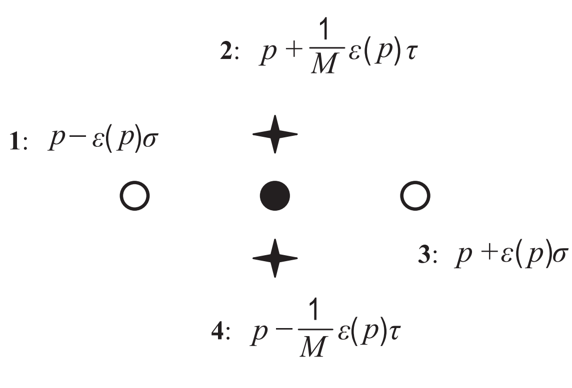



Рис. 5. Нумерация точек.

Пусть $f(x) = c^T x - d$ — член комитета, верно классифицирующий точки $p - \varepsilon(p)\sigma$ и $p + \dfrac{\varepsilon(p)}{M}\tau$ для некоторого $p \in P$, т.е. такой, что

$$
\begin{aligned}
f(p + \frac{\varepsilon(p)}{M}\tau) &= c^T p + \frac{\varepsilon(p)}{M}\, c^T \tau - d > 0,\\
f(p - \varepsilon(p)\sigma) &= c^T p - \varepsilon(p)\, c^T \sigma - d < 0,
\end{aligned}
$$

откуда

$$
c^T\Big(\sigma + \frac{1}{M}\tau\Big) > 0. \tag{13}
$$

Убедимся в том, что для произвольного $p' \in P$ функция $f$ не может правильно классифицировать точки $p' + \varepsilon(p')\sigma$ и $p' - \dfrac{\varepsilon(p')}{M}\tau$. В самом деле, справедливость неравенств

$$
\begin{aligned}
f(p' - \frac{\varepsilon(p')}{M}\tau) &= c^T p' - \frac{\varepsilon(p')}{M}\, c^T \tau - d > 0,\\
f(p' + \varepsilon(p')\sigma) &= c^T p' + \varepsilon(p')\, c^T \sigma - d < 0
\end{aligned}
$$

влечет

$$
c^T\Big(\sigma + \frac{1}{M}\tau\Big) < 0,
$$

что противоречит (13).

Для каждой точки $p \in P$ через $I_1(p)$ обозначим множество индексов прямых, правильно классифицирующих пару $(1,2)$, а через $I_2(p)$ — множество индексов прямых, верно классифицирующих пару $(3,4)$.

Далее, полагаем

$$
I_1 = \bigcup_{p \in P} I_1(p), \qquad I_2 = \bigcup_{p \in P} I_2(p).
$$

По доказанному множества $I_1$ и $I_2$ не пусты и $I_1 \cap I_2 = \varnothing$. Для произвольного $i \in I_1$ рассмотрим множество $P'(i) = \{p \in P : i \in I_1(p)\}$. Очевидно, $\bigcup\limits_{i \in I_1} P'(i) = P$. По построению прямая $f_i(x) = 0$ пересекает окрестность $B(p, \varepsilon)$ каждой точки $p \in P'(i)$. Откуда в силу утверждения 1 и выбора $\varepsilon$ имеем $\dim \operatorname{aff} P'(i) \le 1$. Тем самым множество $P$ обладает покрытием из $|I_1|$ прямых, следовательно, $|I_1| \ge s$ по выбору $s$.

Аналогично доказывается, что $|I_2| \ge s$. Таким образом,

$$
q \ge |I_1| + |I_2| \ge 2s. \tag{14}
$$

Проведя рассуждение, завершающее доказательство теоремы 8, получим искомое неравенство $q \ge 2s + 1$.

Теорема доказана.

**Следствие 3.** *Задача PASC-GP $NP$-полна в сильном смысле. Задача ASC, сформулированная в пространстве фиксированной размерности $n > 1$ при дополнительном условии общности положения разделяемых множеств, также $NP$-полна в сильном смысле.*

## Заключение

Как показано в данной работе, задача о минимальном аффинном разделяющем комитете является труднорешаемой не только в общем случае, но и в пространствах произвольной фиксированной размерности, большей единицы. При этом, как следует из раздела 4, причина труднорешаемости не связана с вырожденностью разделяемых множеств. Как показано в работе, задача MASC трудно аппроксимируема в общем случае, что, впрочем, не исключает возможности ее эффективной аппроксимации в пространствах фиксированной размерности. Вопрос о существовании таких приближенных алгоритмов на данный момент остается открытым.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Еремин И. И., Мазуров Вл. Д.** Нестационарные процессы математического программирования. М.: Наука, 1979.
2. **Еремин И.И.** Системы линейных неравенств и линейная оптимизация. Екатеринбург: УрО РАН, 2007.
3. **Rosenblatt F.** Analytic techniques for the study of neural nets // IEEE Trans. on Appl. and Industry. 1964. Vol. 83, no. 74. P. 285–292.
4. **Blum A. L., Rivest R. L.** Training a 3-node neural network is NP-complete // Neural Networks. 1992. Vol. 5. P. 117–127.
5. **Lin J. H., Vitter J. S.** Complexity results on learning by neural nets // Machine Learning. 1991. Vol. 6. P. 211–230.
6. **Megiddo N.** On the complexity of polyhedral separability // Discrete and Computational Geometry. 1988. No. 3. P. 325–337.
7. **Хачай М. Ю.** О вычислительной сложности задачи о минимальном комитете и смежных задач // Докл. РАН. 2006. Т. 406, № 6. С. 742–745.
8. **Хачай М. Ю.** О вычислительной и аппроксимационной сложности задачи о минимальном аффинном разделяющем комитете // Таврический вестник информатики и математики. 2006. № 1. С. 34–43.
9. **Мазуров Вл. Д.** Комитеты систем неравенств и задача распознавания // Кибернетика. 1971. № 3. С. 140–146.
10. **Dinur I., Regev O., Smyth C.** The hardness of 3-uniform hypergraph coloring // Proc. of the 43rd Ann. IEEE symposium on foundations of computer science. Vancouver, 2002.
11. **Mazurov Vl. D., Khachai M. Yu., Rybin A. I.** Committee constructions for solving problems of selection, diagnostics and prediction // Proc. of the Steklov Inst. of Math. Suppl. 1. 2002. P. S67–S101.
12. **Megiddo N., Tamir A.** On the complexity of locating linear facilities in the plane // Operations research letters. 1982. Vol. 1, no. 5. P. 194–197.


Поступила 28.02.08

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14 № 2 2008

УДК 519.658.4

# ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ БАРЬЕРНЫХ ФУНКЦИЙ В ЛИНЕЙНОМ И ВЫПУКЛОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ[1]

**Л. Д. Попов**

Для решения задач линейного и выпуклого программирования предложена оригинальная модификация метода логарифмических барьерных функций, основанная на идее параметрического смещения ограничений исходной задачи подобно тому, как это реализовано в методе множителей Вержбицкого — Хестенса — Пауэлла для обычной квадратичной штрафной функции (последний известен также как метод модифицированных функций Лагранжа). Приведены описание метода, обоснование его сходимости и результаты численных экспериментов.

## Введение

Большинство итерационных методов решения задач математического программирования основано на идее замены исходной задачи с ограничениями конечной или бесконечной серией задач более простых, без ограничений, но зависящих от некоторого параметра, быть может, векторного. Варьируя в ходе расчетов значения этого параметра, добиваются того, чтобы решения исходной и упрощенной задач совпали бы точно или асимптотически. Именно так обстоит дело с классическими методами штрафных и барьерных функций, модифицированных функций Лагранжа, внутренней точки, нагруженного функционала и целым рядом других [1–9]. При этом эффективность конкретной реализации зависит от того, насколько легко и точно может быть решена упрощенная задача и насколько быстро текущие значения параметра могут быть выведены на оптимальный уровень. К сожалению, указанные факторы часто действуют в противоположных направлениях (например, слишком быстрый рост штрафного параметра у обычной квадратичной штрафной функции негативно влияет на обусловленность матриц ее вторых производных и др.).

В данной работе предпринята попытка построения такого метода, в котором противоречия между отмеченными выше факторами были бы существенно смягчены. В основу его конструкции положена классическая логарифмическая барьерная функция [10,11]. В последнюю добавлены параметры, отвечающие за специфическое смещение ограничений исходной задачи подобно тому, как это делается в методе множителей Вержбицкого — Хестенса — Пауэлла [12,13] для квадратичной штрафной функции. Для оптимальной настройки введенных параметров предложена оригинальная схема. Как и в методе множителей, она опирается на теорию двойственности и состоит из серии шагов минимизации барьерной функции, в ходе выполнения которых значения введенных параметров корректируются. Включение в обычную конструкцию параметров позволило фиксировать традиционный штрафной коэффициент на некотором среднем уровне, что обеспечивает определенную стабильность чисел обусловленности матриц вторых производных минимизируемой функции в окрестности решения при применении методов минимизации второго порядка. Также упрощается проблема выбора начальной точки вычислительного процесса и отпадает необходимость в ряде строгих предположений относительно исходной задачи, обычных при применении штрафных функций барьерного типа.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 07-01-00399) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-2081.2008.1).

Работа содержит описание метода, обоснование его сходимости и результаты численных экспериментов.

## 1. Модифицированная функция логарифмического барьера

Рассмотрим задачу выпуклого программирования: найти

$$\bar{\gamma} = \inf \{ f_0(x) : f_i(x) \le 0 \ (i = 1, \dots, m), \ x \in \mathbb{R}^n \}; \tag{1}$$

здесь $\mathbb{R}^n$ — $n$-мерное евклидово пространство (вещественное) и функции $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ выпуклы и дифференцируемы, $i = 0, 1, \dots, m$.

Пусть оптимальное значение задачи (1) конечно и $\bar{x}$ — ее единственный оптимальный вектор. Предполагая выполненным условие регулярности Слейтера[2]

$$\exists \, x_{SL} : \max_{1 \le i \le m} f_i(x_{SL}) = -\rho < 0,$$

выпишем классические соотношения Куна — Таккера

$$f_i(\bar{x}) \le 0, \qquad \bar{y}_i \, f_i(\bar{x}) = 0 \qquad (i = 1, \dots, m), \tag{2}$$

$$\nabla_x \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{y}) = \nabla f_0(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{y}_i \nabla f_i(\bar{x}) = 0, \tag{3}$$

$$\bar{y} = [\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m] \ge 0, \tag{4}$$

которым этот вектор должен удовлетворять. Здесь $\mathcal{L}(x, y) = f_0(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} y_i f_i(x)$ — функция Лагранжа задачи (1) и $\bar{y} = [\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m] \ge 0$ — вектор множителей Лагранжа, являющийся решением двойственной задачи

$$\bar{\gamma} = \underline{\gamma} = \sup_{y \ge 0} \inf_x \mathcal{L}(x, y). \tag{5}$$

Построение новой функции барьера начнем с конструкции

$$B(x, y) = f_0(x) - \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{m} \ln(1 - \tau \, y_i f_i(x)),$$

включающей в себя наряду с постоянным штрафным коэффициентом $\tau > 0$ вектор двойственных переменных $y = [y_1, \dots, y_m] \ge 0$. Заметим, что формально $B(x, y)$ можно рассматривать как обычную барьерную функцию для исходной задачи со специальным образом ослабленными ограничениями

$$\inf \{ f_0(x) : f_i(x) \le (\tau y_i)^{-1} \ (i = 1, \dots, m), \ x \in \mathbb{R}^n \}. \tag{6}$$

В силу единственности решения исходной задачи, условий выпуклости и условия Слейтера задача (6) также разрешима, регулярна, и множество ее оптимальных планов ограничено. В соответствии с общей теорией [11] это позволяет утверждать, что по крайней мере для всех $y \in \mathbb{R}^m_{++} = \{ y \in \mathbb{R}^m : y = [y_1, \dots, y_m] > 0 \}$ существуют такие $x(y) \in \mathbb{R}^n$, что

$$B(x(y), y) = \min_x B(x, y) > -\infty.$$

[2]В дальнейшем предположения относительно исходной задачи будут частично усилены.

При этом выполняется критерий оптимальности

$$\nabla_x B(x(y), y) = \nabla f_0(x(y)) + \sum_{i=1}^{m} \frac{y_i}{1 - \tau\, y_i f_i(x(y))} \nabla f_i(x(y)) = 0.$$

В частности, в силу (2)–(4)

$$\nabla_x B(\bar{x}, \bar{y}) = \nabla f_0(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\bar{y}_i}{1 - \tau\, \bar{y}_i f_i(\bar{x})} \nabla f_i(\bar{x}) = \nabla f_0(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{y}_i \nabla f_i(\bar{x}) = 0,$$

откуда вытекает

**Утверждение 1.** $B(\bar{x}, \bar{y}) = \min\limits_x B(x, \bar{y}) = \bar{\gamma}$, *т.е.* $\bar{x} = x(\bar{y})$.

Обозначим через $D$ множество всех неотрицательных векторов $y = [y_1, \ldots, y_m] \geq 0$, для которых функция

$$\mu(y) = \min_x B(x, y)$$

принимает конечные значения (определена). И вновь в силу условий (2)–(4) и монотонности логарифмической функции при всех $y \in D$ имеем

$$\mu(y) = \min_x B(x, y) \leq B(\bar{x}, y) = f_0(\bar{x}) - \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{m} \ln(1 - \tau\, y_i f_i(\bar{x}))$$

$$\leq f_0(\bar{x}) - \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{m} \ln(1 - \tau\, \bar{y}_i f_i(\bar{x})) = B(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{\gamma},$$

откуда следует

**Утверждение 2.** $B(\bar{x}, \bar{y}) = \max\limits_{y \in D} \min\limits_x B(x, y)$.

Таким образом, решение исходной задачи (1) можно осуществить через поиск максимина[3] функции $B(x, y)$ или, что то же, путем максимизации введенной выше функции $\mu(y)$, не обязательно вогнутой.

Максимизация функции $\mu(y)$ осложняется отсутствием конструктивного описания ее области определения. Единственная возможность здесь состоит в построении максимизирующей последовательности, сходящейся к $\bar{y}$ изнутри этой области, что легко сделать, поскольку $\operatorname{int} D = \mathbb{R}^m_{++}$. При этом оказывается полезной замена двойственных переменных $y_i$ на $u_i = (\tau\, y_i)^{-1} > 0$. В новых переменных задача поиска максимина функции $B(x, y)$ эквивалентна поиску максимина

$$\bar{\gamma} = \sup_{u>0} \min_x \bar{B}(x, u)$$

или точной верхней грани значений функции

$$\bar{\mu}(u) = \min_x \bar{B}(x, u),$$

где

$$\bar{B}(x, u) = f_0(x) - \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{m} \ln\left(\frac{u_i - f_i(x)}{u_i}\right) = f_0(x) - \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{m} \ln(\, u_i - f_i(x)\,) + \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{m} \ln(u_i).$$

[3]Поскольку область определения функции $B(\,\cdot\,, u)$ зависит от $u$, то перед нами задача поиска максимина со связанными переменными [14].

Поскольку последнее слагаемое здесь не зависит от прямых переменных, то фактически вычисление значения функции $\bar{\mu}(u)$ сводится к поиску безусловного минимума обычной логарифмической функции барьера

$$B_0(x,u) = f_0(x) - \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m} \ln(\, u_i - f_i(x)\,)$$

со смещением исходных ограничений задачи на вектор $u = [u_1, \ldots, u_m] > 0$ и с постоянным коэффициентом штрафа $\tau > 0$. Напомним, что аналогичный прием уже был использован ранее для квадратичной штрафной функции [12, 13].

## 2. Процедура настройки параметров смещения

Предлагаемая процедура настройки вектора смещений $u$ имеет итеративный характер. Пусть $t$ — номер итерации, $u^0$ — произвольный неотрицательный вектор начального смещения. На очередной итерации переопределение смещений будем производить по правилу

$$u_i^{t+1} = u_i^t - f_i(x_t) > 0 \qquad (i = 1, \ldots, m), \tag{7}$$

где векторы $x_t$ определяются из условий

$$\bar{B}(x_t, u^t) = \min_x \bar{B}(x, u^t). \tag{8}$$

Чтобы разобраться в предлагаемой конструкции, заметим, что условия (8) предполагают выполнение неравенств $u_i^{t+1} = u_i^t - f_i(x_t) > 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, а также соотношения

$$\nabla_x \bar{B}(x_t, u^t) = \nabla f_0(x_t) + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{u_i^t - f_i(x_t)} \nabla f_i(x_t) = 0. \tag{9}$$

Опираясь на (9), выпуклость всех входящих в задачу функций и на неравенство $\ln(w) \le \ln(w_0) + (w - w_0)w_0^{-1}$, которому логарифмическая функция удовлетворяет в силу своей вогнутости, выпишем последовательность оценок

$$\bar{B}(x,u) = f_0(x) - \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\ln(u_i - f_i(x)) + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\ln(u_i)$$

$$\ge f_0(x) - \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\ln(u_i^t - f_i(x_t)) - \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\frac{u_i - u_i^t + f_i(x_t) - f_i(x)}{u_i^t - f_i(x_t)} + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\ln(u_i)$$

$$\ge \bar{B}(x_t, u^t) + \nabla f_0(x_t)^T(x - x_t) - \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\frac{u_i - u_i^t - \nabla f_i(x_t)^T(x - x_t)}{u_i^t - f_i(x_t)} + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\ln\left(\frac{u_i}{u_i^t}\right)$$

$$= \bar{\mu}(u^t) - \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\frac{u_i - u_i^t}{u_i^t - f_i(x_t)} + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\ln\left(\frac{u_i}{u_i^t}\right).$$

Отсюда следует

**Утверждение 3.** *Для всех* $u = [u_1, \ldots, u_m] > 0$ *верно*

$$\bar{\mu}(u) = \min_x \bar{B}(x,u) \ge \bar{\mu}(u^t) - \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\frac{u_i - u_i^t}{u_i^t - f_i(x_t)} + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\ln\left(\frac{u_i}{u_i^t}\right). \tag{10}$$

Подберем теперь такое $u$, чтобы сумма двух последних слагаемых в правой части неравенства (10) была как можно больше. Она равна

$$\Delta(t,u) = \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m} \ln\left(\frac{u_i}{u_i^t}\right) - \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m} \frac{u_i - u_i^t}{u_i^t - f_i(x_t)}\,.$$

Поскольку эта сумма является строго вогнутой функцией аргумента $u$, то достаточно приравнять к нулю ее частные производные

$$\frac{\partial \Delta(t,u)}{\partial u_j} = \frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{u_i} - \frac{1}{u_i^t - f_i(x_t)}\right) = 0 \qquad (i = 1,\ldots,m)$$

и решить полученную систему уравнений. Очевидное решение этой системы

$$u_i^{t+1} = u_i^t - f_i(x_t) \qquad (i = 1,\ldots,m)$$

и предлагается выше взять в качестве обновленного вектора смещений. Подчеркнем, что значения его компонент $u_i^{t+1}$ автоматически положительны и, если $u^{t+1} \neq u^t$, то

$$\Delta(t,u^{t+1}) = \max_u \Delta(t,u) > \Delta(t,u^t) = 0,$$

так что заведомо будет верно неравенство

$$\bar{\mu}(u^{t+1}) > \bar{\mu}(u^t).$$

Повторяя этот процесс многократно, получаем монотонно растущую последовательность значений функции $\bar{\mu}(\,\cdot\,)$, при некоторых предположениях сходящуюся к оптимальному значению $\bar{\gamma}$.

З а м е ч а н и е. Как видно из приведенных рассуждений, предлагаемый метод максимизации функции $\bar{\mu}(u)$ (вообще говоря, не вогнутой) опирается на ее последовательную оценку снизу некоторыми вогнутыми логарифмическими функциями и потому может быть назван методом нижних вогнутых минорант.

## 3. Обоснование сходимости

Процесс (7), (8) генерирует последовательность $\{\bar{\mu}(u^t)\}_{t=0}^{\infty}$. Как показано в предыдущем разделе, эта последовательность монотонно растет, причем

$$\bar{\gamma} \geq \bar{\mu}(u^{T+1}) \geq \bar{\mu}(u^T) + \Delta(T,u^{T+1}) \geq \ \ldots\ \geq \bar{\mu}(u^0) + \sum_{t=1}^{T} \Delta(t,u^{t+1}),$$

где все $\Delta(t,u^{t+1}) \geq 0$. Поэтому ряд $\sum\limits_{t=1}^{\infty} \Delta(t,u^{t+1})$ сходится, и его общий член

$$\Delta(t,u^{t+1}) = \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m} \ln\left(\frac{u_i^{t+1}}{u_i^t}\right) - \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m} \frac{u_i^{t+1} - u_i^t}{u_i^{t+1}} \to 0.$$

Поскольку его можно представить в виде

$$\Delta(t,u^{t+1}) = \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m} \left[\frac{u_i^t}{u_i^{t+1}} - 1 - \ln\left(\frac{u_i^t}{u_i^{t+1}}\right)\right] \to 0,$$

то с учетом свойств элементарной функции[4] $\zeta(w) = w - 1 - \ln(w)$ имеем

[4]Непрерывная функция $\zeta(w) = w - 1 - \ln(w)$ выпукла и всюду положительна, за исключением $\zeta(1) = 0$.

**Утверждение 4.** *При $t \to \infty$ все $u_i^t/u_i^{t+1} \to 1$ или, что то же,*

$$\frac{u_i^{t+1} - u_i^t}{u_i^t} = -\frac{f_i(x_t)}{u_i^t} = -\tau\, y_i^t\, f_i(x_t) \to 0, \tag{11}$$

*где $y_i^t = 1/(\tau u_i^t)$ — двойственные переменные, связанные с процессом* (7)–(8).

Приглядимся к последовательности $y^t = [y_1^t, \ldots, y_m^t]$, введенной в последнем утверждении, повнимательнее. Как уже отмечалось в (9),

$$\nabla_x \bar{B}(x_t, u^t) = \nabla f_0(x_t) + \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^m \frac{1}{\underbrace{u_i^t - f_i(x_t)}_{=u_i^{t+1}}}\, \nabla f_i(x_t) = 0,$$

что эквивалентно равенству

$$\nabla_x \mathcal{L}(x_t, y^{t+1}) = \nabla f_0(x_t) + \sum_{i=1}^m y_i^{t+1}\, \nabla f_i(x_t) = 0,$$

откуда

$$\inf_x \mathcal{L}(x, y^{t+1}) = f_0(x_t) + \sum_{i=1}^m y_i^{t+1}\, f_i(x_t)$$

$$= f_0(x_t) + \sum_{i=1}^m y_i^{t+1} (\, f_i(x_t) - u_i^t\,) + \sum_{i=1}^m y_i^{t+1}\, u_i^t = f_0(x_t) - \frac{m}{\tau} + \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^m \frac{u_i^t}{u_i^{t+1}}.$$

Тем самым имеем

**Утверждение 5.** *Векторы $y^t$ с компонентами $y_i^t = 1/(\tau u_i^t) > 0$ являются допустимыми векторами для двойственной задачи* (5) *и доставляют ее целевой функции значения*

$$\inf_x \mathcal{L}(x, y^t) = f_0(x_{t-1}) - \frac{m}{\tau} + \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^m \frac{u_i^{t-1}}{u_i^t} \le \underline{\gamma} \qquad (= \bar{\gamma}). \tag{12}$$

Сопоставляя утверждения 4, 5, приходим к заключению, что значения целевой функции двойственной задачи (5) в допустимых точках $y^t$ с ростом $t$ исчезающе мало отличаются от значений целевой функции прямой задачи (1) в точках $x_{t-1}$. Поэтому обоснование сходимости рассматриваемого метода будет завершено, если мы покажем, что последовательность $x_t$ в пределе удовлетворяет ограничениям (1).

С этой целью наряду с задачей (1) рассмотрим параметризованную задачу

$$\bar{\gamma}(u) = \inf \{\, f_0(x) : f_i(x) \le u_i \ (i = 1, \ldots, m),\ x \in \mathbb{R}^n \,\}, \tag{13}$$

а также задачу, двойственную к ней

$$\underline{\gamma}(u) = \sup_{y \ge 0} \inf_x \mathcal{L}^u(x, y);$$

здесь $u = [u_1, \ldots, u_m]$ — вектор параметров смещения ограничений, участвующий в процессе (7), (8), $\mathcal{L}^u(x, y) = f_0(x) + \sum\limits_{i=1}^m y_i\, (f_i(x) - u_i)$ — функция Лагранжа задачи (13), $\bar{\gamma}(u)$ — ее функция оптимума. При сделанных предположениях функция $\bar{\gamma}(u)$ выпукла и $\mathbb{R}_+^m \subset \operatorname{int} \Gamma$, где $\Gamma$ — область, в которой эта функция конечна. В частности, $0 \in \operatorname{int} \Gamma$ и по построению $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}(0)$, $\underline{\gamma} = \underline{\gamma}(0)$. Кроме того, во всех внутренних точках области $\Gamma$ имеем совпадение оптимальных значений $\bar{\gamma}(u) = \underline{\gamma}(u)$, причем эти значения достижимы, а множества оптимальных векторов обеих задач ограничены (см., напр., [15]).

Покажем связь задачи (13) с точкой минимума барьерной функции $\bar{B}(x,u)$, для чего повторим (с некоторой модификацией) рассуждения, приведшие выше к утверждению 5. Пусть $\bar{B}(z,u) = \min\limits_x \bar{B}(x,u),\ u \geq 0$. Тогда точка $z$ является допустимой для задачи (13) и

$$\nabla_x \bar{B}(z,u) = \nabla f_0(z) + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{u_i - f_i(z)}\,\nabla f_i(z) = 0.$$

Поэтому для вектора $y = [y_1,\dots,y_m]$ с компонентами $y_i = 1/(\tau(u_i - f_i(z)) > 0$ имеем равенство

$$\nabla_x \mathcal{L}^u(z,y) = \nabla f_0(z) + \sum_{i=1}^{m} y_i\,\nabla f_i(z) = 0,$$

откуда

$$\mathcal{L}^u(z,y) = \inf_x \mathcal{L}^u(x,y) \leq \sup_{y\geq 0}\inf_x\, \mathcal{L}^u(x,y) = \underline{\gamma}(u) \quad (= \bar{\gamma}(u)),$$

и, следовательно,

$$f_0(z) = \mathcal{L}^u(z,y) - \sum_{i=1}^{m} y_i\,(f_i(z) - u_i) = \inf_x \mathcal{L}^u(x,y) + \frac{m}{\tau} \leq \bar{\gamma}(u) + \frac{m}{\tau}.$$

Тем самым имеем

**Утверждение 6.** *Векторы $x_t$ допустимы для задач* (13) *при $u = u^t$, причем*

$$\bar{\gamma}(u^t) < f_0(x_t) \leq \bar{\gamma}(u^t) + \frac{m}{\tau}. \tag{14}$$

Другими словами, мы установили, что вектор $x_t$ приближенно решает задачу (13) при $u = u^t$ и тем точнее, чем больше значение $\tau$. При этом оценка точности по функционалу не зависит от $u$. Заметим, что в предположении ограниченности оптимального множества задачи (13) сходимость допустимого вектора к ее решению по функционалу влечет и сходимость к нему по расстоянию.

Соотношение (14) поможет установить, что последовательность $\{x_t\}$ в пределе удовлетворяет ограничениям исходной задачи (1). Мы, однако, вынуждены сделать дополнительное предположение о регулярности задачи (1).

О п р е д е л е н и е. Пусть $\bar{x}$ — единственное решение задачи (1) и $I_0 = \{i : f_i(\bar{x}) = 0\}$ — индексы ее активных ограничений. Будем говорить, что задача (1) сильно регулярна, если $|\,I\,| = n$, векторы $\{\nabla f_i(\bar{x})\}_{i\in I_0}$ линейно независимы и $\bar{y}_i > 0$ при всех $i \in I_0$ (см. соотношения (2)–(4)).

Условие сильной регулярности задачи (1) автоматически обеспечивает и существование для нее точки Слейтера $x_{SL}$, и единственность решения $\bar{x}$ прямой задачи (1), и существование и единственность решения $\bar{y}$ двойственной к ней задачи (5). Более того, верно

**Утверждение 7.** *Пусть задача* (1) *сильно регулярна. Тогда существуют такие $\sigma, \delta > 0$, что если $u_i < \delta$ при всех $i \in I_0$, то параметрическая задача* (13) *сильно регулярна, разрешима, имеет единственный оптимальный вектор $\bar{x}(u)$, причем $f_i(\bar{x}(u)) \leq -\sigma$ при всех $i \in I_1 = \{1,\dots,m\}\backslash I_0$, так что множества индексов активных ограничений параметрической и исходной задач совпадают.*

Зафиксируем $\delta > 0$, $\sigma > 0$ из утверждения 7 и введем множество

$$U(\delta,\sigma) := \{u = [u_1,\dots,u_m] \geq 0 : u_i < \delta \ \text{ при всех } \ i \in I_0\}.$$

Комбинируя утверждение 7 с предыдущим, можно высказать

**Утверждение 8.** *Существует такое* $\bar\tau > 0$, *что при всех* $\tau > \bar\tau$ *и всех* $u^t \in U(\delta,\sigma)$ *вектор* $x_t$ *из соотношений* (7), (8) *удовлетворяет оценкам*

$$f_i(x_t) < 0 \quad \textit{при} \quad i \in I_1 \qquad \textit{и} \qquad u_i^t - \delta < f_i(x_t) < u_i^t \quad \textit{при} \quad i \in I_0. \tag{15}$$

Зафиксируем подходящее значение $\bar\tau > 0$. Сопоставляя последнее утверждение с соотношениями процесса (7), (8), получаем

**Утверждение 9.** *Пусть в* (7), (8) $\tau > \bar\tau$ *и начальное* $u^0 \in U(\delta,\sigma)$. *Тогда все последующие* $u^t \in U(\delta,\sigma)$ *также удовлетворяют этому условию, т.е. лежат в* $U(\delta,\sigma)$. *Кроме того* $f_i(x_t) \le 0$ *при всех* $t$, $i \in I_1$.

В самом деле, если $i \in I_0$ и $u^0 \in U(\delta,\sigma)$, то в силу (15) индуктивно

$$u_i^1 = u_i^0 - f_i(x_1) < u_i^0 - (u_i^0 - \delta) = \delta,$$

$$u_i^2 = u_i^1 - f_i(x_2) < u_i^1 - (u_i^1 - \delta) = \delta,$$

$$u_i^3 = u_i^2 - f_i(x_3) < u_i^2 - (u_i^2 - \delta) = \delta$$

и так далее.

Осталось вспомнить соотношение (11) из утверждения 4. Поскольку компоненты вектора смещений, отвечающие активным ограничениям исходной задачи, ограничены, то из (11) заключаем, что отвечающие им ограничения выполнены в пределе

$$\lim_{t\to\infty} f_i(x_t) = 0 \quad \text{при} \quad i \in I_0.$$

Для всех прочих ограничений в соответствии с утверждением 9

$$f_i(x_t) \le 0 \quad \text{при} \quad i \in I_1.$$

Кроме того из (12) вытекает

$$\limsup_{t\to\infty} f_0(x_t) \le \bar\gamma.$$

Поэтому окончательно

$$\lim_{t\to\infty} f_0(x_t) = \bar\gamma, \qquad \lim_{t\to\infty} \inf_x \mathcal{L}(x, y^t) = \bar\gamma$$

и верно

**Утверждение 10.** *Пусть задача* (1) *разрешима и сильно регулярна. Тогда при всех достаточно больших* $\tau > 0$ *и достаточно малых начальных векторах смещения* $u^0 \ge 0$ *процесс* (7), (8) *порождает последовательности* $\{x_t\}$ *и* $\{u^t\}$ *со свойствами*

$$\lim_{t\to\infty} \|x_t - \bar x\| = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \|y^t - \bar y\| = 0,$$

*где* $y^t = [y_1^t, \ldots, y_m^t]$ — *вектор с компонентами* $y_i^t = 1/(\tau u_i^t)$.

З а м е ч а н и е. Последовательность векторов смещений $\{u^t\}$ не имеет, вообще говоря, предела, поскольку ее компоненты, отвечающие пассивным ограничениям исходной задачи, стремятся к бесконечности. Это неудобство является своеобразной платой за возможность не наращивать штрафной коэффициент $\tau$ в ходе вычислительного процесса.

## 4. Случай задачи линейного программирования

Рассмотрим в качестве частной, но важной для приложений постановки каноническую задачу линейного программирования: найти

$$\hat{\gamma} = \min \{(c, x) : Ax = b,\ x \geq 0\}$$

или, что то же,

$$\min \{(c, x) : (a_i, x) = b_i\ (i = 1, \dots, m),\ x \geq 0\}; \tag{16}$$

здесь $x = (x_1, \dots, x_n)$ — вектор неизвестных исходной задачи, $c = (c_1, \dots, c_n)$ — вектор ее целевой функции, $b = (b_1, \dots, b_m)$ — вектор правых частей и $A = (a_{ij})_{m \times n}$ — матрица коэффициентов ее ограничений (выше $a_1, \dots, a_m$ — ее векторы-строки).

Как и ранее, будем предполагать, что задача (16) разрешима и $\hat{x}$ — ее единственный оптимальный вектор. Придавая вышеизложенному материалу несколько иной формат, введем аффинное многообразие $\Omega = \{x : Ax = b\}$ и функцию

$$\hat{\mu}(u) = \min_{x \in \Omega} \hat{B}(x, u),$$

где

$$\hat{B}(x, u) = (c, x) - \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{n} \ln \left( \frac{u_i + x_i}{u_i} \right), \qquad u \in \mathbb{R}^n_{++}, \qquad x \in \Omega.$$

Здесь барьерная функция $\hat{B}(x, u)$ ограничивает выход переменных задачи в отрицательную область (с учетом их смещения на вектор $u$) и оставляет за рамками своей конструкции ограничения общего вида. Последние участвуют в определении функции $\hat{\mu}(u)$, задавая область оптимизации барьерной функции.

При сделанных предположениях для каждого фиксированного $u \in \mathbb{R}^n_{++}$ можно указать (единственный) вектор $x = x(u) \in \Omega$ такой, что

$$\hat{B}(x(u), u) = \min_{x \in \Omega} \hat{B}(x, u).$$

Применяя ту же замену двойственных переменных и те же рассуждения, что были проведены в разд. 3, можно показать, что исходная задача сводится к поиску точной верхней грани функции $\hat{\mu}(u)$ или, что то же, максимина[5] параметризованной барьерной функции

$$\hat{\gamma} = \sup_{u > 0} \hat{\mu}(u) = \sup_{u > 0} \min_{x \in \Omega} \hat{B}(x, u). \tag{17}$$

Покажем, как строится максимизирующая последовательность для функции $\hat{\mu}(u)$.

Пусть имеется вектор смещений $u^t \in \mathbb{R}^m_{++}$ и найдена точка $x_t \in \Omega$, в которой функция $\hat{B}(\,\cdot\,, u^t)$ достигает своего минимума по $x$. Соответствующие условия оптимальности имеют вид

$$Ax_t = b, \qquad c - A^T y_t = z_t, \qquad (\tau X_t + \tau U_t)^{-1} e = z_t, \qquad x_t + u_t \in \mathbb{R}^n_{++}. \tag{18}$$

Выше $X_t$ и $U_t$ — диагональные матрицы, на диагонали которых выставлены компоненты векторов $x_t$ и $u^t$ соответственно, $e = [1, \dots, 1] \in \mathbb{R}^n$, $y_t$ — вектор двойственных переменных, $y_t \in \mathbb{R}^m$, $z_t$ — вектор невязок задачи, двойственной к исходной, $z_t \in \mathbb{R}^n$.

Опираясь на соотношение (18), выпуклость всех входящих в задачу функций и на неравенство $\ln(w) \leq \ln(w_0) + (w - w_0) w_0^{-1}$, которому логарифмическая функция удовлетворяет в силу своей вогнутости, выпишем последовательность неравенств

$$\hat{B}(x, u) = (c, x) - \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{m} \ln(u_i + x_i) + \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{m} \ln(u_i)$$

---

[5] Здесь также имеем максимин со связанными переменными, поскольку функция $\hat{B}(\cdot, u)$ как функция первого аргумента определена и конечна только при $u + x > 0$.

$$\geq (c,x) - \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\ln(u_i^t + x_i^t) - \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\frac{u_i - u_i^t + x_i - x_i^t}{u_i^t + x_i^t} + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\ln(u_i)$$

$$\geq \hat{B}(x_t, u^t) + (c, x - x_t) - \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\frac{u_i - u_i^t + x_i - x_i^t}{u_i^t + x_i^t} + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\ln\left(\frac{u_i}{u_i^t}\right)$$

$$= \hat{\mu}(u^t) + y_t^T(Ax - b) - \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\frac{u_i - u_i^t}{u_i^t + x_i^t} + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\ln\left(\frac{u_i}{u_i^t}\right).$$

Отсюда

$$\hat{\mu}(u) = \min_{x\in\Omega}\hat{B}(x,u) \geq \hat{\mu}(u^t) - \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\frac{u_i - u_i^t}{u_i^t + x_i^t} + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\ln\left(\frac{u_i}{u_i^t}\right). \tag{19}$$

Далее, дословно повторяя рассуждения из разд. 3, выводим, что наибольший гарантированный прирост значения функции $\hat{\mu}(u)$ достигается на

$$u_i^{t+1} = u_i^t + x_i^t \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Именно при таких значениях $u_i$ сумма последних двух слагаемых правой части оценки (19) максимальна.

Приведенные выкладки позволяют предложить для решения задачи (16) итерационный процесс, основанный на ее сведении к задаче (17) и описываемый следующими рекуррентными соотношениями:

$$u^{t+1} = u^t + x_t, \ \text{ где } \ x_t = \arg\min_{x\in\Omega}\hat{B}(x, u^t), \qquad t = 0, 1, \ldots .$$

Здесь на каждой итерации вначале решается задача минимизации барьерной функции $\hat{B}(x,u)$ по основным переменным $x$, после чего переопределяются компоненты вектора смещений $u$.

З а м е ч а н и е. Как отмечалось выше, задача минимизации барьерной функции $\hat{B}(x,u)$ при фиксированном $u > 0$ сводится к решению нелинейной системы уравнений

$$Ax = b, \qquad c - A^T y = z, \qquad (\tau X + \tau U)^{-1}e = z, \qquad x + u \in \mathbb{R}^n_{++}.$$

Это решение можно получить как предел итерационной последовательности, элементы которой $x^s$, $y^s$, $z^s$ пересчитываются по правилу

$$x^{s+1} = x^s + p_x, \qquad y^{s+1} = y^s + p_y, \qquad z^{s+1} = z^s + p_z$$

с использованием формул

$$p_y = (AD_1^{-1}D_2A^T)^{-1}(AD_1^{-1}D_2(c - \tau^{-1}D_2^{-1}e - A^Ty^s) + b - Ax^s),$$

$$p_x = D_1^{-1}D_2A^Tp_y + D_1^{-1}D_2(\tau^{-1}D_2^{-1}e - c + A^Ty^s),$$

$$p_z = -A^Tp_y + c - A^Ty^s - z^s;$$

выше $D_1$, $D_2$ — диагональные матрицы, на диагонали которых выставлены компоненты векторов $z^s$ и $x^s + u$ соответственно. Эти соотношения выводятся так же, как и соотношения метода внутренних точек [16].

## 5. Вычислительный эксперимент

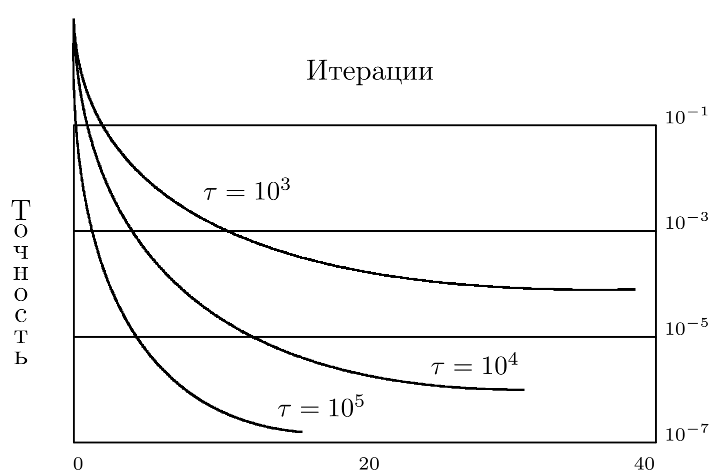
Вычислительный эксперимент проводился на задачах линейного программирования средней размерности в каноническом формате в среде MATLAB. Матрицы коэффициентов тестовых задач генерировались при помощи датчика случайных чисел с равномерным распределением от $-1$ до 1. Векторы целевой функции и правых частей ограничений подбирались таким образом, чтобы обеспечить совпадение решений прямой и двойственной задач с некоторыми заранее заданными векторами, составленными из нулей и единиц. При этом условия дополнительности выполнялись в строгой форме, что обеспечивало единственность решений прямой и двойственной задач. Формулы расчетов соответствуют приведенным в конце предыдущего раздела. Типичные результаты приведены ниже в таблице.

Таблица

**Результаты численных экспериментов**

| № п/п | Размерность тестовой задачи $m \times n$ | Величина штрафа $\tau$ | Точность прямого решения $\|x - \bar{x}\|$ | Число внешних итераций |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $300 \times 600$ | $10^3$ | $10^{-6}$ | 31 |
| 2 | $300 \times 600$ | $10^4$ | $10^{-6}$ | 20 |
| 3 | $600 \times 1200$ | $10^3$ | $10^{-5}$ | 40 |
| 4 | $600 \times 1200$ | $10^4$ | $10^{-6}$ | 14 |
| 5 | $1000 \times 2000$ | $10^4$ | $10^{-6}$ | 40 |
| 6 | $1000 \times 2000$ | $10^5$ | $10^{-6}$ | 10 |

Первая колонка таблицы содержит номер тестовой задачи, вторая — сведения о ее размерности, третья — величину штрафного коэффициента, четвертая — точность достигнутого решения задачи (норму разности точного и приближенного ее решений), пятая — число больших итераций алгоритма (число применения формул пересчета двойственных переменных). Усредненная зависимость достигнутой точности решения от числа больших итераций представлена ниже на рисунке. Шкала вертикальной оси логарифмическая.




Как видно из графиков, скорость сходимости метода особенно высока на его начальных итерациях. Результаты показывают перспективность предпринятых исследований.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Антипин А.С.** Методы нелинейного программирования, основанные на прямой и двойственной модификации функции Лагранжа. М.: Препринт ВНИИСИ, 1979.
2. **Васильев Ф.П.** Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
3. **Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В.** Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации. М.: Наука, 1989.
4. **Евтушенко Ю.Г.** Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.
5. **Eremin I.I.** Theory of linear optimization. Ser. Inverse and ill-posed problems. Utrecht: VSP, 2002.
6. **Жадан В.Г.** Численные методы линейного и нелинейного программирования. Вспомогательные функции в условной оптимизации. М.: ВЦ РАН, 2002.
7. **Карманов В.Г.** Математическое программирование. М.: Физматлит, 1986.
8. **Нестеров Ю.Е.** Эффективные методы в нелинейном программировании. М.: Радио и связь, 1989.
9. **Поляк Б.Т.** Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
10. **Firsch K.R.** The logarithmic potential method for convex programming. Oslo, 1955.
11. **Фиакко А., Мак–Кормик Г.** Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. М.: Мир, 1972.
12. **Wierzbicki A.P.** A penalty function shifting method in constrained static optimization and its convergence properties // Arch. Automat. i Telemech. 1971. Vol. 16, no. 4. P. 395–416.
13. **Rockafellar R.T.** The multiplier method of Hestenes and Powell applied to convex programming // J. Optimiz. Theory and Appl. 1973. Vol. 12, no. 5. P. 555–562.
14. **Федоров В.В.** Численные методы максимина. М.: Наука, 1979.
15. **Гольштейн Е.Г.** Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971.
16. **Roos C., Terlaky T., Vial J.-Ph.** Theory and algorithms for linear optimization. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 1997.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14 № 2 2008

УДК 519.853

# О МЕТОДЕ БАРЬЕРНЫХ ФУНКЦИЙ И АЛГОРИТМАХ КОРРЕКЦИИ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

**В. Д. Скарин**

В работе приводятся оценки сходимости некоторого обобщения метода обратной барьерной функции в выпуклом программировании, обсуждается значение этих оценок для построения итерационных алгоритмов. Рассматриваются регуляризирующие свойства барьерных функций, а также их применение для оптимальной коррекции несобственных задач выпуклого программирования.

## Введение

Рассмотрим задачу выпуклого программирования (ВП)

$$\min\{f_0(x) : x \in X\}, \tag{1}$$

где $X = \{x : f(x) \le 0\}$, $f(x) = [f_1(x), \dots, f_m(x)]$, $f_i(x)$ — определенные на $\mathbb{R}^n$ выпуклые функции, $i = 0, 1, \dots, m$.

Одним из распространенных методов решения задачи (1) является метод барьерных функций. Он основан на последовательной минимизации вспомогательной функции

$$B(x, \varepsilon) = f_0(x) + b(x, \varepsilon),$$

зависящей от числового или векторного параметра $\varepsilon > 0$. Здесь функция $b(x, \varepsilon)$ (функция барьеров, функция внутреннего штрафа) определена лишь внутри допустимого множества $X$ исходной задачи (1) и неограниченно возрастает, когда $f_i(x) \to 0$ хотя бы для одного $i \in \overline{1, m}$. Тем самым, решая задачу $\inf\limits_{x \in X^0} B(x, \varepsilon)$ при $X^0 = \{x : f(x) < 0\}$ с помощью монотонной итерационной процедуры безусловной минимизации и используя при этом начальную точку $x_0 \in X^0$, мы не выйдем за пределы множества $X$. При определенных условиях на конструкцию функции $b(x, \varepsilon)$, задачу (1) и изменение параметра $\varepsilon$ можно доказать, что точки $x(\varepsilon) = \arg\min\limits_{x \in X^0} B(x, \varepsilon)$ сходятся к решению исходной задачи на условный экстремум.

Различные варианты метода барьерных функций, вопросы теории и вычислительной эффективности исследовались во многих работах (см., напр., [1–6]). Интерес к барьерным функциям резко возрос в связи с развитием методов внутренней точки в линейном программировании [7–9]. В последнее время серьезное внимание уделяется различным модификациям метода барьерных функций, в частности, основанным на объединении классических барьерных функций и функции Лагранжа [10–12].

Типичными представителями барьерных функций являются логарифмическая функция (когда $b(x, \varepsilon) = -\varepsilon \sum\limits_{i=1}^{m} \ln(-f_i(x))$, $\varepsilon > 0$) и обратная функция $b(x, \varepsilon) = -\sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\varepsilon}{f_i(x)}$. Чаще встречается логарифмическая функция. Так, известный метод Кармаркара [8] для задачи линейного программирования основан на использовании этой функции. Оценки сходимости метода

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00399) и Программы поддержки ведущих научных школ (НШ-2081.2008.1).

логарифмической барьерной функции приведены в [13]. Метод обратной барьерной функции исследован в меньшей степени. В работе ниже выводятся оценки сходимости некоторого обобщения метода обратной функции. Обсуждаются возможности применения барьерных функций для регуляризации задач ВП. Рассматриваются вопросы построения на основе барьерных функций итерационных процедур решения задач ВП с заданной скоростью сходимости. Наконец, предлагаются две итерационные реализации метода обратной барьерной функции для оптимальной коррекции несобственных задач ВП.

## 1. Оценки сходимости метода

Пусть в задаче (1) $X^0 \neq \varnothing$, $X^* \times \Lambda^* \neq \varnothing$, где $X^* \times \Lambda^*$ — множество седловых точек функции Лагранжа $L(x,\lambda) = f_0(x) + (\lambda, f(x))$ в области $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$.

Задаче (1) поставим в соответствие проблему нахождения

$$\inf_{x\in X^0} \Big\{ B(x,\varepsilon) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon_i}{|f_i(x)|^{p_i}} \Big\}, \tag{2}$$

где $\varepsilon = [\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m]$, $1 > \varepsilon_i > 0$, $p_i \geq 1$ $(i = 1, \ldots, m)$.

**Теорема 1.** *При условиях, сформулированных выше, существуют константы $C_1$, $\alpha$ и вектор $\bar\varepsilon \in \mathbb{R}^m$ такие, что для любых $0 < \varepsilon \leq \bar\varepsilon$ выполняются неравенства*

$$0 \leq B^*_\varepsilon - f^* < C_1 \max_i \varepsilon_i^\alpha, \tag{3}$$

*где $f^*$ и $B^*_\varepsilon$ — оптимальные значения задач (1) и (2) соответственно,* $0 < \alpha \leq \min_i (1+p_i)^{-1}$.

Доказательство. Так как $X^0 \neq \varnothing$, найдется вектор $\bar\varepsilon \in \mathbb{R}^m$ такой, что множество $X_\varepsilon = \{x : f_i(x) \leq -\varepsilon_i^\alpha,\ i = 1, \ldots, m\}$ будет непусто для всех $\varepsilon \in E = \{\varepsilon = [\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m] :\ 0 < \varepsilon \leq \bar\varepsilon\}$. Обозначим через $f^*_\varepsilon$ оптимальное значение задачи $\inf\{f_0(x) : x \in X_\varepsilon\}$. Очевидно, $f^*_\varepsilon \geq f^* > -\infty$ для всех $\varepsilon \in E$.

Пусть $x^\varepsilon$ — точка из $X_\varepsilon$ такая, что $f_0(x^\varepsilon) < f^*_\varepsilon + \tilde\varepsilon$, где $\tilde\varepsilon = \max_i \varepsilon_i^{1-\alpha p_i}$. Тогда для $\varepsilon \in E$ выполняются соотношения

$$B^*_\varepsilon = \inf_{x\in X^0} B(x,\varepsilon) \leq \inf_{x\in X_\varepsilon} B(x,\varepsilon) \leq B(x^\varepsilon, \varepsilon)$$

$$= f_0(x^\varepsilon) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon_i}{|f_i(x^\varepsilon)|^{p_i}} < f_0(x^\varepsilon) + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^{1-\alpha p_i} < f^*_\varepsilon + (1+m)\,\tilde\varepsilon.$$

Нетрудно показать (см. также [5]), что функция $\varphi(u) = \inf\{f_0(x) : f(x) \leq u\}$ (функция чувствительности задачи (1)) выпукла на $\mathbb{R}^m$. Поэтому на любом ограниченном множестве из своей области определения она удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой $K > 0$ [14]. Отсюда

$$|\varphi(-\varepsilon^\alpha) - \varphi(0)| = |f^*_\varepsilon - f^*| \leq K\|\varepsilon^\alpha\|$$

для всех $\varepsilon \in E$ (здесь $\varepsilon^\alpha = [\varepsilon_1^\alpha, \ldots, \varepsilon_m^\alpha]$).

Таким образом, учитывая неравенства $B(x,\varepsilon) > f_0(x) \geq f^*$, справедливые для любого $x \in X^0$, имеем

$$0 \leq B^*_\varepsilon - f^* \leq (1+m)\,\tilde\varepsilon + K\sqrt{m}\max_i \varepsilon_i^\alpha.$$

Вспоминая условия на выбор числа $\alpha$, из которых следует $\tilde\varepsilon \leq \max_i \varepsilon_i^\alpha$, получаем оценку (3), где $C_1 = 1 + m + K\sqrt{m}$.

Теорема доказана.

Метод барьерных функций позволяет приближенно находить седловые точки функции Лагранжа для исходной задачи (1).

**Теорема 2.** *Пусть задача* (2) *разрешима в точке* $x(\varepsilon)$. *Справедливы соотношения*

$$|L(x(\varepsilon),\lambda(\varepsilon)) - f^*| < C_1\, C_2 \max_i \varepsilon_i^\alpha, \tag{4}$$

$$0 \in \partial_x L(x(\varepsilon),\lambda(\varepsilon)), \tag{5}$$

$$-C_1\, p_i \max_i \varepsilon_i^\alpha < \lambda_i(\varepsilon) f_i(x(\varepsilon)) < 0, \qquad i = 1,\dots,m, \tag{6}$$

*где* $\varepsilon \in E$, $\lambda(\varepsilon) = [\lambda_1(\varepsilon),\dots,\lambda_m(\varepsilon)] \geq 0$, $\lambda_i(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon_i\, p_i}{|f_i(x(\varepsilon))|^{p_i+1}}$, $i = 1,\dots,m$; $C_1$ *удовлетворяет неравенству* (3), $C_2 = \max\limits_i p_i + 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из оценки (3) получим

$$\sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon_i}{|f_i(x(\varepsilon))|^{p_i}} = B_\varepsilon^* - f_0(x(\varepsilon)) < f^* - f_0(x(\varepsilon)) + C_1 \max_i \varepsilon_i^\alpha \leq C_1 \max_i \varepsilon_i^\alpha. \tag{7}$$

Поскольку

$$L(x(\varepsilon),\lambda(\varepsilon)) = B(x(\varepsilon),\varepsilon) - \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon_i}{|f_i(x(\varepsilon))|^{p_i}} - \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon_i p_i}{|f_i(x(\varepsilon))|^{p_i}} = B_\varepsilon^* - \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon_i(1+p_i)}{|f_i(x(\varepsilon))|^{p_i}},$$

то согласно (7) и (3)

$$L(x(\varepsilon),\lambda(\varepsilon)) > f^* - C_1\, C_2 \max_i \varepsilon_i^\alpha. \tag{8}$$

С другой стороны,

$$L(x(\varepsilon),\lambda(\varepsilon)) = f_0(x(\varepsilon)) - \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon_i\, p_i}{|f_i(x(\varepsilon))|^{p_i}} < f_0(x(\varepsilon)) < B_\varepsilon^* < f^* + C_1 \max_i \varepsilon_i^\alpha.$$

Последнее вместе с (8) дает (4).

Из определения точки $x(\varepsilon)$ следует $0 \in \partial_x B(x(\varepsilon),\varepsilon)$. Но $\partial_x B(x(\varepsilon),\varepsilon) = \partial_x L(x(\varepsilon),\lambda(\varepsilon)) = \partial f_0(x(\varepsilon)) + \sum\limits_{i=1}^m \dfrac{\varepsilon_i\, p_i}{|f_i(x(\varepsilon))|^{p_i+1}}\, \partial f_i(x(\varepsilon))$ (см., напр., правила субдифференцирования [6]). Таким образом, справедливо включение (5).

Для проверки соотношений (6) достаточно заметить, что $\lambda_i(\varepsilon) f_i(x(\varepsilon)) = -\dfrac{\varepsilon_i\, p_i}{|f_i(x(\varepsilon))|^{p_i}} < 0$, и применить неравенство (7).

Теорема доказана.

Рассмотрим вопрос о разрешимости задачи (2).

**Теорема 3.** *Пусть множество* $M_\xi = \{x \mid f_0(x) \leq \xi\} \cap X$ *непусто и ограничено для некоторого* $\xi \in \mathbb{R}^1$. *Тогда существует точка* $x(\varepsilon) = \arg\min\limits_{x \in X^0} B(x,\varepsilon)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x^0 \in X^0$, $B(x^0,\varepsilon) = \sigma_0$, $M_0 = \{x : f_0(x) \leq \sigma_0\} \cap X$, $M_i = \left\{x : \dfrac{\varepsilon_i}{|f_i(x)|^{p_i}} \leq \sigma_0 - f^*\right\}$, $i = \overline{1,m}$. Образуем множество $M = \bigcap\limits_{i=0}^m M_i$. Так как $x^0 \in M$, то $M \neq \varnothing$. Из ограниченности множества $M_\xi$ следует ограниченность $M_0$ и, как следствие, ограниченность $M$. Кроме того, $M \subset X^0$. В самом деле, из определения множества $M_i$ для $x \in X$ вытекает $f_i(x) \leq -\left(\dfrac{\sigma_0 - f^*}{\varepsilon_i}\right)^{1/p_i} < 0$, $i = \overline{1,m}$. В силу компактности $M$ найдется $x(\varepsilon) = \arg\min\limits_{x \in M} B(x,\varepsilon)$.

Покажем, что $\min\limits_{x\in M} B(x,\varepsilon) = \inf\limits_{x\in X^0} B(x,\varepsilon) = B(x(\varepsilon),\varepsilon)$. Предположим от противного, что существует точка $x' \in X^0\backslash M$ такая, что

$$B(x',\varepsilon) < B(x(\varepsilon),\varepsilon) \le \sigma_0. \tag{9}$$

Тогда, очевидно, из (9) следует, что $x' \in M_0$. Также легко видеть, что $x' \in M_i$, $i = \overline{1,m}$. Действительно, если существует номер $\bar{i} \in \overline{1,m}$ такой, что $\dfrac{\varepsilon_{\bar{i}}}{|f_{\bar{i}}(x')|^{p_{\bar{i}}}} > \sigma_0 - f^*$, то

$$B(x',\varepsilon) > f_0(x') + \frac{\varepsilon_{\bar{i}}}{|f_{\bar{i}}(x')|^{p_{\bar{i}}}} \ge f^* + \frac{\varepsilon_{\bar{i}}}{|f_{\bar{i}}(x')|^{p_{\bar{i}}}} > \sigma_0,$$

что противоречит (9).

Таким образом, $x' \in M$. Получили противоречие с выбором $x'$.

Теорема доказана.

**Следствие.** *Если $f_0(x)$ — равномерно выпуклая функция, то задача* (2) *разрешима в некоторой точке $x(\varepsilon) \in X^0$. Если $f_0(x)$ — строго равномерно выпуклая (в частности, сильно выпуклая) функция, то решение задачи* (2) *единственно.*

З а м е ч а н и е 1. Если в (2) $B(x,\varepsilon)$ — стандартная обратная барьерная функция, т.е. $\varepsilon_i = \varepsilon$, $p_i = 1$ $(i = 1,\ldots,m)$, то число $\alpha$ в (3) можно взять равным 0.5. Тогда из соотношений (3) следует $|f_0(x(\varepsilon)) - f^*| = O(\sqrt{\varepsilon})$.

Пусть в задаче (1) $f_0(x)$ — сильно выпуклая с константой сильной выпуклости $\mu > 0$ функция, определенная в некоторой окрестности множества $X$. Тогда $X^* = \{x^*\}$ и для любого $x \in X$ будет выполняться [6] неравенство

$$\mu\,\|x - x^*\|^2 \le f_0(x) - f^*. \tag{10}$$

Также при этом существует единственная точка $x(\varepsilon) = \arg\min\limits_{x\in X^0} B(x,\varepsilon)$.

**Теорема 4.** *Если в задаче* (1) *$f_0(x)$ — сильно выпуклая функция, $\varepsilon \in E$, то*

$$C_4 \min_i \Bigl(\frac{\varepsilon_i}{\max\limits_i \varepsilon_i^{\alpha}}\Bigr)^{1/p_i} < \|x(\varepsilon) - x^*\| < C_3 \max_i \varepsilon_i^{\alpha/2}, \tag{11}$$

*где $C_3$, $C_4$ — положительные константы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку из (3) следует

$$f_0(x(\varepsilon)) - f^* < B_\varepsilon^* - f^* < C_1 \max_i \varepsilon_i^{\alpha},$$

то из (10) будем иметь

$$\|x(\varepsilon) - x^*\| \le \sqrt{\frac{1}{\mu}\,(f_0(x(\varepsilon)) - f^*)} < C_3 \max_i \varepsilon_i^{\alpha/2}, \tag{12}$$

где $C_3 = \sqrt{\dfrac{C_1}{\mu}}$.

Обозначим $S_r = \{x : \|x - x^*\| \le r\}$, $\partial f_0(S_r) = \cup\{\partial f_0(x) : x \in S_r\}$, где $r \ge C_3$. Известно [14], что $\partial f_0(S_r)$ — непустое компактное множество и $\beta = \sup\{\|e\| : e \in \partial f_0(S_r)\} < \infty$.

Из определений субградиента $e(x(\varepsilon))$ функции $f_0(x)$ в точке $x(\varepsilon)$, седловой точки $[x^*,\lambda^*] \in X^* \times \Lambda^*$ и оценки (7) получаем

$$\beta\,\|x(\varepsilon) - x^*\| \ge (e(x(\varepsilon)),\, x(\varepsilon) - x^*) \ge f_0(x(\varepsilon)) - f^* \ge (\lambda^*, f(x(\varepsilon)))$$

$$\geq \|\lambda^*\|_1 \min_i |f_i(x(\varepsilon))| > \|\lambda^*\|_1 \min_i \Big(\frac{\varepsilon_i}{C_1 \max\limits_i \varepsilon_i^\alpha}\Big)^{1/p_i}.$$

Отсюда

$$\|x(\varepsilon) - x^*\| > C_4 \min_i \Big(\frac{\varepsilon_i}{\max\limits_i \varepsilon_i^\alpha}\Big)^{1/p_i},$$

где $C_4 = \dfrac{\|\lambda^*\|_1}{\beta \min\limits_i (C_1)^{1/p_i}}$. Последнее вместе с (12) и доказывает оценки (11).

Теорема доказана.

Рассмотрим вопрос о сходимости приближений для множителей Лагранжа в случае, когда $f_0(x)$ — сильно выпуклая функция.

Пусть $x^0 \in X$. Обозначим $S_0 = \{x : x \in X,\ B(x, \bar\varepsilon) \leq B(x^0, \bar\varepsilon)\}$, где $\bar\varepsilon$ — из теоремы 1.

**Теорема 5.** *Пусть $f_0(x)$ — сильно выпуклая функция, $f_i(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности множества $X$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$, $A(x^*) = \{i \in \overline{1,m} : f_i(x^*) = 0\}$. Если векторы $\bigtriangledown f_i(x^*)$ линейно независимы для $i \in A(x^*)$, градиент $\bigtriangledown_x L(x, \lambda^*)$ удовлетворяет на $S_0$ условию Липшица с постоянной $L$, то для достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдутся константы $D_0$, $D_i$ $(i \in \overline{1,m} \setminus A(x^*))$ такие, что*

$$|\lambda_i(x(\varepsilon)) - \lambda_i^*| \leq D_0 \max_i \varepsilon_i^{\alpha/2} \qquad (i \in A(x^*)); \tag{13}$$

$$\frac{D_i}{3^{p_i+1}}\, \varepsilon_i < \lambda_i(x(\varepsilon)) < D_i \varepsilon_i \qquad (i \in \overline{1,m} \setminus A(x^*)). \tag{14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу сильной выпуклости функции $B(x, \bar\varepsilon)$ множество $S_0$ ограничено. Очевидно, все точки $x(\varepsilon) = \arg\min\limits_{x \in X^0} B(x, \varepsilon)$ для $\varepsilon \in E = \{\varepsilon \in \mathbb{R}^m : 0 < \varepsilon \leq \bar\varepsilon\}$ лежат в $S_0$.

Обозначим $N_i = \max\limits_{x \in S_0} \| \bigtriangledown f_i(x)\|$, $i \in \overline{1,m} \setminus A(x^*)$. Из выпуклости функций $f_i(x)$ имеем

$$(\bigtriangledown f_i(x^*),\, x(\varepsilon) - x^*) \leq f_i(x(\varepsilon)) - f_i(x^*) \leq (\bigtriangledown f_i(x(\varepsilon)),\, x(\varepsilon) - x^*),$$

откуда

$$|f_i(x(\varepsilon)) - f_i(x^*)| \leq N_i\, \|x(\varepsilon) - x^*\| \qquad (i \notin A(x^*)). \tag{15}$$

Пусть вектор $\varepsilon_0 = [\varepsilon_{01}, \ldots, \varepsilon_{0m}]$ удовлетворяет условиям: $0 < \varepsilon_0 \leq \bar\varepsilon$, $N_i C_3 \max\limits_i \varepsilon_{0i}^{\alpha/2} \leq \dfrac{1}{2}\, |f_i(x^*)|$ $(i \notin A(x^*))$. Тогда из (11) и (15) вытекает

$$\frac{1}{2}\, |f_i(x^*)| < |f_i(x(\varepsilon))| < \frac{3}{2}\, |f_i(x^*)|.$$

Поэтому

$$\frac{2^{p_i+1}\, p_i\, \varepsilon_i}{3^{p_i+1} |f_i(x^*)|^{p_i+1}} < \lambda_i(\varepsilon) = \frac{\varepsilon_i\, p_i}{|f_i(x(\varepsilon))|^{p_i+1}} < \frac{2^{p_i+1}\, p_i\, \varepsilon_i}{|f_i(x^*)|^{p_i+1}}$$

и, обозначив $D_i = \dfrac{2^{p_i+1}\, p_i}{|f_i(x^*)|^{p_i+1}}$ для $i \notin A(x^*)$, получим оценки (14).

Рассмотрим равенство

$$\sum_{i \in A(x^*)} (\lambda_i(x(\varepsilon)) - \lambda_i^*) \bigtriangledown f_i(x(\varepsilon))$$

$$= \bigtriangledown_x L(x(\varepsilon), \lambda^*) - \bigtriangledown_x L(x^*, \lambda^*) - \sum_{i \notin A(x^*)} \lambda_i(x(\varepsilon)) \bigtriangledown f_i(x(\varepsilon)). \tag{16}$$

Пусть $A(x^*) = \{i_1, \dots, i_q\}$ $(i_j \in \overline{1,m})$, $M_1(x^*)$ — матрица размера $n \times q$: $M_1(x^*) = [\triangledown f_{i_1}(x^*), \dots, \triangledown f_{i_q}(x^*)]$. Тогда равенство (16) можно записать в виде

$$M_1(x(\varepsilon))(\tilde{\lambda}(\varepsilon) - \tilde{\lambda}^*) = \triangledown_x L(x(\varepsilon), \lambda^*) - \triangledown_x L(x^*, \lambda^*) - \sum_{i \notin A(x^*)} \lambda_i(x(\varepsilon)) \triangledown f_i(x(\varepsilon)), \qquad (17)$$

где $M_1(x(\varepsilon))$ получается из $M_1(x^*)$ заменой $x^*$ на $x(\varepsilon)$, $\tilde{\lambda}(\varepsilon)$ и $\tilde{\lambda}^*$ — векторы-столбцы с $q$ компонентами $\lambda_i(\varepsilon)$ и $\lambda_i^*$ соответственно $(i = i_1, \dots, i_q)$.

Поскольку векторы $\triangledown f_i(x^*)$ для $i \in A(x^*)$ линейно независимы, то матрица $M(x^*) = M_1^T(x^*) M_1(x^*)$ будет неособенной: $|\det M(x^*)| > 0$. Обозначим через $M(x)$ матрицу, полученную из $M(x^*)$ заменой $x^*$ на $x$. В силу непрерывности в точке $x^*$ функции $\det M(x)$ существует шар $S_r(x^*)$ с центром $x^*$ и радиусом $r > 0$ такой, что $|\det M(x)| > 0$ для $x \in S_r(x^*)$. Пусть $\varepsilon \in E$, $\varepsilon = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m]$ и $0 < \varepsilon_i \le \left(\dfrac{r}{C_3}\right)^{2/\alpha}$ $(i = \overline{1,m})$. Тогда согласно (11) $x(\varepsilon) \in S_r(x^*)$.

Из (17) следует

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}(\varepsilon) - \tilde{\lambda}^* = M^{-1}(x(\varepsilon))\, M_1^T(x(\varepsilon)) \big[ \triangledown_x L(x(\varepsilon), \lambda^*) - \triangledown_x L(x^*, \lambda^*) \\ - \sum_{i \notin A(x^*)} \lambda_i(x(\varepsilon)) \triangledown f_i(x(\varepsilon)) \big]. \end{aligned} \qquad (18)$$

Пусть $\gamma_0 = \max\limits_{x \in S_r(x^*)} \|M^{-1}(x)\|$, $\gamma_1 = \max\limits_{x \in S_r(x^*)} \|M_1^T(x)\|$, $\gamma_2 = \sum\limits_{i \notin A(x^*)} N_i D_i$, где $\|A\|$ — норма матрицы $A$, согласованная с нормой $\|x\|$. Оценивая равенство (18) с учетом (11) и (14), получим

$$\|\tilde{\lambda}(\varepsilon) - \tilde{\lambda}^*\| \le \gamma_0 \, [\gamma_1 (L \|x(\varepsilon) - x^*\| + \gamma_2 \max_i \varepsilon_i)]$$

$$< \gamma_0 \, \gamma_1 (L\, C_3 \max_i \varepsilon_i^{\alpha/2} + \gamma_2 \max_i \varepsilon_i) < \gamma_0 \, \gamma_1 (L\, C_3 + \gamma_2) \max_i \varepsilon_i^{\alpha/2}.$$

Отсюда при $D_0 = \gamma_0 \gamma_1 (L C_3 + \gamma_2)$ получаем (13).

Теорема доказана.

## 2. Метод барьерных функций и регуляризация задач выпуклого программирования

Последние две теоремы представляют интерес с точки зрения возможного использования барьерных функций по аналогии со штрафными функциями для регуляризации некорректных задач ВП. Вопрос применения барьерных функций с целью регуляризации задач с ограничениями в литературе возникал достаточно редко (исключение составляют разве что работы [15, 16]). Сформулируем утверждение, которое показывает, как на основе обобщенных обратных функций может быть построен метод регуляризации для задачи ВП.

Задаче (1) поставим в соответствие проблему нахождения

$$\inf \{B_\gamma(x, \varepsilon) : x \in X^0\}, \qquad (19)$$

где $B_\gamma(x, \varepsilon) = \mathcal{F}_\gamma(x) + \sum\limits_{i=1}^m \dfrac{\varepsilon}{|f_i(x)|^p}$, $\mathcal{F}_\gamma(x) = f_0(x) + \gamma \|x\|^2$, $1 \ge \bar{\varepsilon} > \varepsilon > 0$, $p \ge 1$, $\gamma > 0$. Обозначим $x(\gamma, \varepsilon) = \arg \min\limits_{x \in X^0} B_\gamma(x, \varepsilon)$.

**Теорема 6.** *Если выполнены условия теоремы* 1, *то*

$$\lim_{\gamma \to 0} \lim_{\varepsilon \to 0} x(\gamma, \varepsilon) = x_0^*,$$

*где* $x_0^*$ *— нормальное решение задачи* (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть число $\bar{\varepsilon} > 0$ таково, что $X_\varepsilon \neq \varnothing$ при $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$, где $X_\varepsilon = \{x : f_i(x) \leq -\varepsilon^\alpha,\ i = 1, \ldots, m\}$, $0 < \alpha \leq \dfrac{1}{1+p}$. Обозначим $\mathcal{F}^*_{\gamma,\varepsilon} = \inf\{\mathcal{F}_\gamma(x) : x \in X_\varepsilon\}$.

Проведя выкладки, аналогичные тем, что были сделаны при доказательстве теоремы 1, получим

$$0 \leq B^*_{\gamma,\varepsilon} - \mathcal{F}^*_{\gamma,\varepsilon} \leq (1+m)\,\varepsilon^{1-\alpha p}, \tag{20}$$

где $B^*_{\gamma,\varepsilon}$ — оптимальное значение задачи (19). Используя функцию чувствительности для задачи $\min\{\mathcal{F}_\gamma(x) : x \in X\}$, получим оценку

$$|\mathcal{F}^*_{\gamma,\varepsilon} - \mathcal{F}^*_\gamma| \leq K(\gamma)\,\varepsilon^\alpha,$$

где $\mathcal{F}^*_\gamma = \inf\{\mathcal{F}_\gamma(x) : x \in X\}$.

Отсюда с учетом (20)

$$0 \leq B^*_{\gamma,\varepsilon} - \mathcal{F}^*_\gamma \leq C(\gamma)\,\varepsilon^\alpha, \tag{21}$$

где $C(\gamma) = 1 + m + K(\gamma)$.

В силу сильной выпуклости функции $\mathcal{F}_\gamma(x)$ имеем

$$\gamma\,\|x(\gamma,\varepsilon) - x^*_\gamma\|^2 \leq \mathcal{F}_\gamma(x(\gamma,\varepsilon)) - \mathcal{F}^*_\gamma \leq B^*_{\gamma,\varepsilon} - \mathcal{F}^*_\gamma,$$

где $x^*_\gamma \in X$, $\mathcal{F}_\gamma(x^*_\gamma) = \mathcal{F}^*_\gamma$. Отсюда с учетом (21) следует

$$\|x_{(\gamma,\varepsilon)} - x^*_\gamma\| \leq \sqrt{\gamma^{-1}\left[\mathcal{F}_\gamma(x(\gamma,\varepsilon)) - \mathcal{F}^*_\gamma\right]} \leq C_1(\gamma)\,\varepsilon^{\alpha/2}$$

при $C_1(\gamma) = \sqrt{C(\gamma)/\gamma}$. Поэтому $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} x(\gamma,\varepsilon) = x^*_\gamma$. Применяя в заключение известный факт о сходимости точек $x^*_\gamma$ к нормальному решению $x^*_0$ задачи (1) (см., напр., теорему 37 из [1]), приходим к требуемому утверждению.

Теорема доказана.

## 3. О построении итерационных алгоритмов на основе барьерных функций

Полученные выше оценки применим для обсуждения вопроса об управлении штрафным коэффициентом $\varepsilon$ с целью обеспечения сходимости метода барьерных функций к решению исходной задачи с заданной скоростью, например, со скоростью геометрической прогрессии.

Пусть в (2) $\varepsilon_i = \varepsilon$, $p_i = p = 1$, $i = 1, \ldots, m$. Для этих значений параметров теорему 1 можно усилить, определив нижнюю оценку для разности $B^*_\varepsilon - f^*$.

В самом деле, из определения седловой точки следует

$$f^* \leq f_0(x) + (\lambda^*, f(x)) \qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda^* \in \Lambda^*).$$

Если $x' \in X^0$, то имеем

$$B(x',\varepsilon) = f_0(x') + \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon}{|f_i(x')|} \geq f^* - \sum_{i=1}^m \lambda^*_i f_i(x') + \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon}{|f_i(x')|}$$

$$= f^* + \sum_{i=1}^m \Bigl(\sqrt{\lambda^*_i\,|f_i(x')|} - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{|f_i(x')|}}\Bigr)^2 + 2\sqrt{\varepsilon}\sum_{i=1}^m \sqrt{\lambda^*_i} \geq f^* + 2\Bigl(\sum_{i=1}^m \sqrt{\lambda^*_i}\Bigr)\sqrt{\varepsilon}.$$

Таким образом, полагая в (3) $\alpha = \dfrac{1}{2}$, получим

$$C_5\sqrt{\varepsilon} < B^*_\varepsilon - f^* < C_1\sqrt{\varepsilon}, \tag{22}$$

где $C_5 = 2\sum\limits_{i=1}^m \sqrt{\lambda^*_i}$.

Выберем в интервале (0, 1) два числа $q$ и $s$, для которых

$$q + \frac{C_5}{C_1} - 1 \geq s. \tag{23}$$

Построим последовательность $\{\varepsilon_k\}$ по правилу

$$\varepsilon_{k+1} = s^2\,\varepsilon_k, \qquad \varepsilon_0 = 1, \qquad k = 0, 1, \dots . \tag{24}$$

Покажем, что при выполнении условий теоремы 1 найдется номер $\bar{k}$ такой, что будет справедлива оценка

$$B^*_{\varepsilon_{k+1}} - f^* < q\,[B^*_{\varepsilon_k} - f^*], \qquad k \geq \bar{k}.$$

Действительно, пусть при $k \geq \bar{k}$ выполняется неравенство $\varepsilon_k \leq \bar{\varepsilon}$, где $\bar{\varepsilon}$ — из теоремы 1. Тогда из (22) следует

$$B^*_{\varepsilon_{k+1}} - f^* < B^*_{\varepsilon_k} - f^* + C_1\sqrt{\varepsilon_{k+1}} - C_5\sqrt{\varepsilon_k}.$$

Согласно (23), (24) имеем $C_1^2\,\varepsilon_{k+1} \leq (C_5 + C_1(q-1))^2\,\varepsilon_k$. Поэтому

$$B^*_{\varepsilon_{k+1}} - f^* < B^*_{\varepsilon_k} - f^* + C_1(q-1)\sqrt{\varepsilon_k} < B^*_{\varepsilon_k} - f^* + (q-1)(B^*_{\varepsilon_k} - f^*) = q\,(B^*_{\varepsilon_k} - f^*).$$

Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

**Теорема 7.** *Пусть выполнены условия, при которых справедливы неравенства* (22). *Тогда последовательность* $\{B^*_{\varepsilon_k}\}$, *где* $\varepsilon_k$ *выбирается в соответствии с* (24), *сходится к* $f^*$ *со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем* $q$.

Используя полученные в теореме 4 оценки о близости точек $x(\varepsilon)$ и $x^*$, можно конструировать итерационные алгоритмы, основанные на применении обратной барьерной функции и сходящиеся к оптимальной точке исходной задачи.

Пусть в (2) $\varepsilon_i = \varepsilon$, $p_i = 1$ $(i = 1, \dots, m)$, $f_0(x)$ — сильно выпуклая функция. Тогда из оценок (11) при $\alpha = \frac{1}{2}$ следует

$$C_4\sqrt{\varepsilon} < \|x(\varepsilon) - x^*\| < C_3\sqrt[4]{\varepsilon} \tag{25}$$

для любого $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$.

Выберем $q \in \mathbb{R}^1$, $\sigma \in \mathbb{R}^1$, $1 > q > \sigma > 0$, $C_4 > \sigma > 0$, $x^0 \in X^0$, $\varepsilon_0 = 1$, $\varphi_0(x) = B(x, \varepsilon_0)$; $\mathfrak{M}$ — произвольный релаксационный метод безусловной минимизации сильно выпуклой функции $n$ переменных, сходящийся со скоростью геометрической прогрессии (достаточно широкий обзор таких методов можно найти, например, в [2, 4, 6, 17]), $q_1$ — знаменатель этой прогрессии, $0 < q_1 < 1$.

Предположим, что определены точка $x^k = x^{k0} \in X^0$, числа $\varepsilon_k > 0$, $l_k \in \mathbb{N}$. Обозначим $\varphi_k(x) = B(x, \varepsilon_k)$. Принимая $x^{k0}$ в качестве начальной точки, делаем $l_k$ последовательных итераций метода $\mathfrak{M}$ для минимизации функции $\varphi_k(x)$. Получим

$$x^{kl_k} = x^{k+1} = x^{k+1,0}. \tag{26}$$

Выберем

$$0 < \varepsilon_{k+1} \leq \left(\frac{\sigma^2}{2\,C_3}\right)^4 \varepsilon_k^2, \tag{27}$$

$$l_{k+1} \geq \left[\frac{|\ln((C_4 - \sigma)\,d_0^{-1}\sqrt{\varepsilon_{k+1}})|}{|\ln q_1|}\right] + 1, \tag{28}$$

где $C_3$, $C_4$ — из (25), $d_0$ — диаметр множества $S_0 = \{x : x \in X,\ \varphi_0(x) \leq \varphi_0(x^0)\}$, $[\beta]$ — целая часть числа $\beta$.

**Теорема 8.** *Пусть выполнены условия, обеспечивающие справедливость оценок* (25)*. Тогда существует номер* $k_0$ *такой, что последовательность* $\{x^k\}$*, построенная согласно* (26)–(28)*, удовлетворяет соотношению*

$$\|x^{k+1} - x^*\| \le q\|x^k - x^*\| \tag{29}$$

*для всех* $k > k_0$*.*

Доказательство. Так как $\sigma^2 < 2C_4$, то из (25) получим $\dfrac{\sigma^2}{2C_3}\sqrt[4]{\varepsilon_k} < \dfrac{C_4}{C_3}\sqrt[4]{\varepsilon_k} < 1$. Поэтому в силу (27) $\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_k = 0$ и можно указать такое $k_0$, что $\varepsilon_k \le \min\left\{\bar{\varepsilon}, \left(\dfrac{q-\sigma}{C_4-\sigma}\, d_0\right)^2\right\}$ при $k \ge k_0$. Отсюда и из (28) также следует, что

$$q_1^{l_k} \le \frac{C_4 - \sigma}{d_0}\sqrt{\varepsilon_k} \le q - \sigma. \tag{30}$$

Покажем, что последовательность $\{x^k\}$ ограничена. Обозначим $S_t = \{x : x \in X,\ \varphi_t(x) \le \varphi_t(x^t)\}$, $t = 1, 2, \ldots$ . Поскольку $\mathfrak{M}$ — метод монотонный, то $x^{kj} \in S_k$, $j = 0, 1, \ldots, l_k$. Для произвольного $x' \in S_{k+1}$ имеем

$$B(x', \varepsilon_{k+1}) \le B(x^{k+1}, \varepsilon_{k+1}) = f_0(x^{k+1}) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon_{k+1}}{|f_i(x^{k+1})|}$$

$$= B(x^{k+1}, \varepsilon_k) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k}{|f_i(x^{k+1})|} < B(x^{k+1}, \varepsilon_k) \le B(x^k, \varepsilon_k).$$

Таким образом, $S_0 \supset S_1 \supset \ldots \supset S_k \supset \ldots$, $x^k \in S_k$, $x(\varepsilon_k) \in S_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ и, следовательно, все $x^k$ вместе с $x(\varepsilon_k)$ лежат в ограниченном множестве $S_0$.

Учитывая далее (26) и (30), получим

$$\|x^{k+1} - x(\varepsilon_k)\| \le q_1^{l_k}\, \|x^k - x(\varepsilon_k)\| \le q_1^{l_k}\, d_0 \le (C_4 - \sigma)\sqrt{\varepsilon_k}. \tag{31}$$

Так как

$$\|x^{k+1} - x^*\| \ge \|x(\varepsilon_k) - x^*\| - \|x(\varepsilon_k) - x^{k+1}\|,$$

то из (25) и (31) имеем

$$\|x^{k+1} - x^*\| > \sigma\sqrt{\varepsilon_k}, \qquad k > k_0. \tag{32}$$

Применяя последовательно соотношения (25), (27), (32), (30), получим для $k > k_0$

$$\|x^{k+1} - x^*\| \le \|x^{k+1} - x(\varepsilon_k)\| + \|x(\varepsilon_k) - x^*\| \le q_1^{l_k}\, \|x^k - x(\varepsilon_k)\| + \|x(\varepsilon_k) - x^*\|$$

$$\le q_1^{l_k}\, \|x^k - x^*\| + (1 + q_1^{l_k})\, \|x(\varepsilon_k) - x^*\| < q_1^{l_k}\, \|x^k - x^*\| + 2\, C_3 \sqrt[4]{\varepsilon_k}$$

$$\le q_1^{l_k}\, \|x^k - x^*\| + \sigma^2 \sqrt{\varepsilon_{k-1}} < (q_1^{l_k} + \sigma)\, \|x^k - x^*\| \le q\, \|x^k - x^*\|.$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Для построения последовательности $\{x^k\}$ в соответствии с (26)–(28) требуется знание констант $C_3$ и $C_4$. Постоянная $C_3$ пропорциональна $\sqrt{C_1}$, где $C_1 = 1 + m + K\sqrt{m}$, $K$ — константа Липшица для функции $f_\varepsilon^* = \inf\{f_0(x) : f_i(x) \le -\sqrt{\varepsilon},\ i = \overline{1, m}\}$. В силу выпуклости $f_\varepsilon^*$ можно положить $K = (f_{\bar{\varepsilon}}^*)'_+$, где $g'_+$ — символ правой производной функции $g$. Из теоремы о маргинальных значениях (см., напр., [18, гл. 5, теорема 3.3]) вытекает, что $(f_{\bar{\varepsilon}}^*)'_+ = \max\{\|\lambda\|_1 : \lambda \in \Lambda^*(\bar{\varepsilon})\}$, где $\Lambda^*(\bar{\varepsilon})$ — оптимальное множество двойственных переменных для задачи

$$\min\{f_0(x) : x \in X_{\bar{\varepsilon}}\}. \tag{33}$$

Константа $C_4 = \dfrac{\|\lambda^*\|_1}{\beta C_1}$, таким образом, содержит отношение норм векторов множителей Лагранжа для исходной задачи и задачи (33). Приближения для множителей Лагранжа определяются теоремами 2 и 5. В качестве $\beta$ можно взять оценку сверху величины $\|\bigtriangledown f_0(x)\|$ на множестве $S_0$.

## 4. Метод барьерных функций и оптимальная коррекция несобственных задач выпуклого программирования

Покажем, что барьерные функции могут применяться для оптимальной коррекции несобственных задач ВП.

Предположим, что ограничения задачи (1) противоречивы. В этом случае (1) будет несобственной задачей ВП [19].

Обозначим

$$X_s = \{x : f(x) \le s\}, \qquad s \in \mathbb{R}^m, \qquad E = \{s = [\sigma, \dots, \sigma] \in \mathbb{R}^m_+ : \ X_s \ne \varnothing\}.$$

Предположим, что

$$\text{множество } X_s \text{ ограничено для некоторого } s \in E. \tag{34}$$

Из последнего условия следует, что задача $\min\{\sigma : s = [\sigma, \dots, \sigma] \in E\}$ будет разрешима. Пусть ее оптимальное значение равно $\bar\sigma$. Нетрудно убедиться, что $\bar\sigma = \|f^+(\bar x)\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le m} f_i^+(\bar x)$, где $\bar x \in \overline{X} = \operatorname{Arg}\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \|f^+(x)\|_\infty$, т.е. $X_{\bar s} = \overline{X}$ при $\bar s = [\bar\sigma, \dots, \bar\sigma] \in \mathbb{R}^m_+$.

Сформулируем задачу

$$\min\{f_0(x) : f_i(x) \le \bar\sigma, \ i = 1, \dots, m\} \qquad (= \bar f). \tag{35}$$

Если $\bar\sigma = 0$, т.е. система ограничений задачи (1) совместна, то задачи (1) и (35) совпадают. При $\bar\sigma > 0$ задача (35) представляет собой одну из возможных аппроксимаций исходной несобственной постановки (1). В силу условия (34) задача (35) разрешима и ее оптимальное множество $X^*$ ограничено.

Целью нашего дальнейшего исследования будут вопросы применения метода обратной барьерной функции для построения итерационной процедуры, которая использует информацию о задаче (1) и которая будет сходиться к решению задачи (35).

Сформулируем следующий алгоритм.

**Алгоритм 1.** Пусть $x_0$ — произвольная точка из $\mathbb{R}^n$, $\{\bar\varepsilon_k\}$, $\{\delta_k\}$ — последовательности положительных чисел такие, что $\bar\varepsilon_{k+1} < \bar\varepsilon_k$, $\lim\limits_{k\to\infty} \bar\varepsilon_k = \lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = 0$. Положим

$$\sigma_0 = \|f^+(x_0)\|_\infty, \qquad \varepsilon_0 = \bar\varepsilon_0, \qquad \mu_0 \in (0, 1), \qquad Y_0 = \{x : f_i(x) \le \sigma_0 + \varepsilon_o, \ i = \overline{1, m}\}.$$

Опишем $(k+1)$-ю итерацию алгоритма, считая известными точку $x_k \in \mathbb{R}^n$, параметры $\sigma_k > 0$, $\varepsilon_k > 0$, $\delta_k > 0$, $\mu_k > 0$ и множество $Y_k^0 = \{x : f_i(x) < \sigma_k + \varepsilon_k, \ i = \overline{1, m}\}$. Построим функцию

$$B_k(x) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \frac{\mu_k}{\sigma_k + \varepsilon_k - f_i(x)}.$$

Определим точку $x_{k+1} \in Y_k^0$ согласно условию

$$B_k(x_{k+1}) - B_k(\bar x_{k+1}) < \delta_k, \tag{36}$$

где

$$\bar x_{k+1} = \arg\min\{B_k(x) : x \in Y_k^0\}. \tag{37}$$

Положим $\sigma_{k+1} = \|f^+(x_{k+1})\|_\infty$. Выберем число $\varepsilon_{k+1}$ по правилу

$$0 < \varepsilon_{k+1} < \min\{\sigma_k - \sigma_{k+1} + \varepsilon_k, \ \bar\varepsilon_{k+1}\}. \tag{38}$$

**Теорема 9.** *Пусть для задачи* (1) *выполнено условие* (34) *и* $\mu_k = o(\varepsilon_k)$. *Тогда*
(1) $\lim\limits_{k\to\infty} B_k(x_{k+1}) = \lim\limits_{k\to\infty} f_0(x_{k+1}) = \bar f$.
*Если, к тому же,* $f_i(x)$ — *дифференцируемые функции,* $i = 0, 1, \ldots, m$, *то*
(2) $\bigtriangledown_x L(x_{k+1}, \lambda_{k+1}) = 0$,
*где* $\lambda_{k+1} = [\lambda_1^{k+1}, \ldots, \lambda_m^{k+1}]$, $\lambda_i^{k+1} = \dfrac{\mu_k}{(\sigma_k + \varepsilon_k - f_i(x_{k+1}))^2}$, $i = \overline{1, m}$.
*Если при этом* $\mu_k = o(\varepsilon_{k+1}^2)$, *то*
(3) $\lim\limits_{k\to\infty} |\lambda_i^{k+1} f_i(x_{k+1})| = 0, \qquad i = \overline{1, m}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Образуем множество

$$M_k = \Big\{x : f_i(x) \le \sigma_k + \varepsilon_k - \frac{\mu_k}{\overline{B}_k - f_k^* + \delta_k},\ i = \overline{1, m}\Big\},$$

где $\overline{B}_k = \bar f + \dfrac{m\,\mu_k}{\sigma_k + \varepsilon_k - \bar\sigma}$, $f_k^* = \inf\{f_0(x) : x \in Y_k^0\}$. Так как $\sigma_k \ge \bar\sigma$, то $\overline{X} \subset Y_k^0$ $(\forall k)$ и $\bar f \ge f_k^*$ $(\forall k)$. Поэтому $\dfrac{\mu_k}{\overline{B}_k - f_k^* + \delta_k} > 0$ и, следовательно, $M_k \subset Y_k^0$ $(\forall k)$. Кроме того, для $\bar x \in \overline{X}$ выполняется

$$f_k^* + \frac{\mu_k}{\sigma_k + \varepsilon_k - f_i(\bar x)} < \bar f + \sum_{i=1}^m \frac{\mu_k}{\sigma_k + \varepsilon_k - f_i(\bar x)} = B_k(\bar x) \le \bar f + \frac{m\,\mu_k}{\sigma_k + \varepsilon_k - \bar\sigma} = \overline{B}_k.$$

Отсюда вытекает

$$f_i(\bar x) < \sigma_k + \varepsilon_k - \frac{\mu_k}{\overline{B}_k - f_k^*} < \sigma_k + \varepsilon_k - \frac{\mu_k}{\overline{B}_k - f_k^* + \delta_k}, \qquad i = \overline{1, m}.$$

Таким образом,

$$\overline{X} \subset M_k \subset Y_k^0 \qquad (\forall k).$$

В силу (34) множество $M_k$ компактно в $\mathbb{R}^n$. Поэтому существует точка $\tilde x_k \in M_k$ такая, что $\min\limits_{x\in M_k} B_k(x) = B_k(\tilde x_k)$. Пусть для некоторой точки $x' \in Y_k^0$ выполняется $B_k(x') \le B_k(\tilde x_k)$. Тогда

$$\begin{aligned} f_k^* + \frac{\mu_k}{\sigma_k + \varepsilon_k - f_i(x')} &< f_0(x') + \sum_{i=1}^m \frac{\mu_k}{\sigma_k + \varepsilon_k - f_i(x')} \\ &= B_k(x') \le B_k(\tilde x_k) \le B_k(\bar x) \le \overline{B}_k + \delta_k. \end{aligned} \tag{39}$$

Следовательно,

$$f_i(x') < \sigma_k + \varepsilon_k - \frac{\mu_k}{\overline{B}_k - f_k^* + \delta_k}, \qquad i = \overline{1, m}.$$

Другими словами,

$$B_k(\tilde x_k) = \min_{x\in M_k} B_k(x) = B_k(\bar x_{k+1}),$$

где $\bar x_{k+1}$ — из (37). Подставляя в (39) вместо $x'$ точку $x_{k+1}$ из (36), получим

$$f_i(x_{k+1}) < \sigma_k + \varepsilon_k - \frac{\mu_k}{\overline{B}_k - f_k^* + \delta_k}, \qquad i = \overline{1, m}, \tag{40}$$

т.е. $x_{k+1} \in M_k$. Так как $\dfrac{1}{\sigma_k - \bar\sigma + \varepsilon_k} > \dfrac{1}{\sigma_k + \varepsilon_k}$, то

$$0 < \frac{\mu_k}{\sigma_k + \varepsilon_k} < \bar f - f_k^* + \frac{m\,\mu_k}{\sigma_k - \bar\sigma + \varepsilon_k} + \delta_k = \overline{B}_k - f_k^* + \delta_k.$$

Отсюда
$$\sigma_k + \varepsilon_k - \frac{\mu_k}{\overline{B}_k - f_k^* + \delta_k} > 0,$$
и тогда из (40) следует
$$\sigma_{k+1} < \sigma_k + \varepsilon_k - \frac{\mu_k}{\overline{B}_k - f_k^* + \delta_k}. \tag{41}$$

Из неравенства (41) вытекает существование числа $\varepsilon_{k+1}$, для которого выполняется соотношение (38). Отсюда же следует, что
$$\lim_{k\to\infty} (\sigma_k + \varepsilon_k) = \inf (\sigma_k + \varepsilon_k) = \bar\sigma. \tag{42}$$
По построению множества $Y_k$ справедливо
$$\overline{X} \subset \ \dots \subset Y_{k+1}^0 \subset Y_k^0 \subset \ \dots \subset Y_0^0 \qquad (\forall k).$$
Поэтому
$$\bar f \geq \ \dots \geq f_{k+1}^* \geq f_k^* \qquad (\forall k).$$
Отсюда, а также из (42) и ограниченности множества $Y_0$ следует
$$\lim_{k\to\infty} f_k^* = \bar f. \tag{43}$$

Далее имеем следующую цепочку неравенств
$$f_k^* \leq f_0(x_{k+1}) < B_k(x_{k+1}) < B_k(\bar x_{k+1}) + \delta_k \leq B_k(\bar x) + \delta_k$$
$$= \bar f + \delta_k + \sum_{i=1}^m \frac{\mu_k}{\sigma_k + \varepsilon_k - f_i(\bar x)} \leq \bar f + \delta_k + \frac{m\,\mu_k}{\sigma_k + \varepsilon_k - \bar\sigma} < \bar f + \delta_k + m\,\frac{\mu_k}{\varepsilon_k}.$$
Из этих неравенств с учетом (43) и условий на параметры $\delta_k,\ \mu_k,\ \varepsilon_k$ получаем утверждение (1) доказываемой теоремы.

Из определения точек $x_{k+1}$ и $\lambda_{k+1}$ следует
$$0 = \bigtriangledown_x B(x_{k+1}) = \bigtriangledown f_0(x_{k+1}) + \sum_{i=1}^m \frac{\mu_k \bigtriangledown f_i(x_{k+1})}{(\sigma_k + \varepsilon_k - f_i(x_{k+1}))^2} = \bigtriangledown_x L(x_{k+1}, \lambda_{k+1}),$$
т.е. утверждение (2) теоремы.

Далее имеем
$$|\lambda_i^{k+1} f_i(x_{k+1})| = \frac{\mu_k\,|f_i(x_{k+1})|}{(\sigma_k + \varepsilon_k - f_i(x_{k+1}))^2} \leq \frac{\mu_k\,|f_i(x_{k+1})|}{(\sigma_k + \varepsilon_k - \sigma_{k+1})^2} < \frac{\mu_k}{\varepsilon_{k+1}^2}\, C_0, \qquad i = \overline{1,m},$$
где $C_0 = \max\limits_{x\in Y_0} \|f(x)\|_\infty$. Отсюда вытекает утверждение (3).

Теорема доказана.

Рассмотрим еще одну модификацию данного метода, отличающуюся выбором параметров и условиями сходимости.

**Алгоритм 2.** Пусть задана произвольная точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\{\varepsilon_k\}$ и $\{\delta_k\}$ — положительные числовые последовательности такие, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = 0$. Положим $\sigma_0 = \|f^+(x_0)\|_\infty$, $Y_0 = \{x : f_i(x) \leq \sigma_0 + \varepsilon_0,\ i = \overline{1,m}\}$.

Опишем $(k+1)$-й шаг метода, считая известными точку $x_k \in \mathbb{R}^n$, параметры $\sigma_k > 0$, $\varepsilon_k > 0$, $\delta_k > 0$ и множество $Y_k^0 = \{x \,|\, f_i(x) < \sigma_k + \varepsilon_k,\ i = \overline{1,m}\}$. Построим функцию
$$B_k^0(x) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \frac{\mu_0}{\sigma_k + \varepsilon_k - f_i(x)},$$

где $\mu_0 > 0$, $\mu_0 = \text{const}$.

Выберем точку $x_{k+1} \in Y_k^0$, удовлетворяющую условию

$$B_k^0(x_{k+1}) - B_k^0(\bar{x}_{k+1}) < \delta_k,$$

где

$$\bar{x}_{k+1} = \arg\min\{B_k^0(x) : x \in Y_k^0\}.$$

Положим $\sigma_{k+1} = \|f^+(x_{k+1})\|_\infty$.

**Теорема 10.** *Пусть в задаче* (35) $\overline{X} = X^* = \{x^*\}$ *и* $f_0(x) \geq \tilde{f} > -\infty$ $(\forall x \in \mathbb{R}^n)$. *Тогда для последовательностей* $\{\sigma_k\}$, $\{x_k\}$, *вырабатываемых алгоритмом* 2, *справедливы утверждения*:

(1) $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_k = \bar{\sigma}$,

(2) $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$, $\qquad \lim\limits_{k\to\infty} f_0(x_k) = \bar{f} = f_0(x^*)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Образуем множество

$$\widetilde{M}_k = \left\{x : f_i(x) \leq \sigma_k + \varepsilon_k - \frac{\mu_0}{\overline{B}_k - \tilde{f} + \delta_k},\ i = \overline{1,m}\right\},$$

где $\overline{B}_k = \bar{f} + \dfrac{m\,\mu_0}{\sigma_k + \varepsilon_k - \bar{\sigma}}$.

По аналогии с теоремой 9 устанавливается, что

(а) $\overline{X} \subset \widetilde{M}_k \subset Y_k^0 \qquad (\forall k)$;

(б) $x_{k+1} \in \widetilde{M}_k \qquad (\forall k)$;

(в) $\sigma_{k+1} < \sigma_k + \varepsilon_k - \dfrac{\mu_0}{\overline{B}_k - \tilde{f} + \delta_k} \qquad (\forall k)$. (44)

Из неравенства (44) в силу условия $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$ следует (см., напр., [6, гл. 2, разд. 3, лемма 2]), что последовательность $\{\sigma_k\}$ сходится. Тогда

$$\lim_{k\to\infty}(\sigma_k - \sigma_{k+1} + \varepsilon_k) = 0.$$

Преобразуем неравенство (44). Получим

$$\frac{1}{\sigma_k - \sigma_{k+1} + \varepsilon_k} < A_k + \frac{m}{\sigma_k - \bar{\sigma} + \varepsilon_k},$$

где $A_k = \dfrac{\bar{f} - \tilde{f} + \delta_k}{\mu_0}$. Отсюда при достаточно большом $k$ справедливо

$$0 \leq \sigma_k - \bar{\sigma} < \frac{m\,(\sigma_k - \sigma_{k+1} + \varepsilon_k)}{1 - A_k\,(\sigma_k - \sigma_{k+1} + \varepsilon_k)}$$

и, следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_k = \bar{\sigma}. \tag{45}$$

Далее, из условий (34), (45) и $\varepsilon_k \to 0$ $(k \to \infty)$ следует, что последовательность $\{x_k\}$ ограничена, имеет предельную точку, лежащую в $\overline{X}$. Но $\overline{X} = \{x^*\} = X^*$, поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$.

Теорема доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Фиакко А., Мак-Кормик Г.** Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. М.: Мир, 1972.
2. **Полак Е.** Численные методы оптимизации. Единый подход. М.: Мир, 1974.
3. **Евтушенко Ю.Г.** Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.
4. **Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.** Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985.
5. **Эльстер К.-Х., Рейнгардт Р., Шойбле М., Донат Г.** Введение в нелинейное программирование. М.: Наука, 1985.
6. **Васильев Ф.П.** Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
7. **Дикин И.И., Зоркальцев В.И.** Итеративное решение задач математического программирования (алгоритмы метода внутренних точек). Новосибирск: Наука, 1980.
8. **Karmarkar N.** A new polynomial-time algorithm for linear programming // Combinatorica. 1984. Vol. 4. P. 373–395.
9. **Gill P.E., Murray W., Saunders M.A., Tomlin J.A., Wright M.H.** On projected Newton barrier methods for linear programming and an equivalence to Karmarkar's projected methods // Math. Programming. 1986. Vol. 36. P. 183–209.
10. **Калинин И.Н., Стерлин А.М.** Об одном варианте модифицированной функции Лагранжа // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267, № 4. С. 787–789.
11. **Polyak R.** Modified barrier functions (theory and methods) // Math. Programming. 1992. Vol. 54. P. 177–222.
12. **Dussault J.-P.** Augmented non-quadratic penalty algorithms // Math. Programming. Ser. A. 2004. Vol. 99. P. 467–486.
13. **Mifflin R.** On the convergence of the logarithmic barrier function method // Numerical methods for unconstrained optimization / ed. by F.A. Lootsma. New York: Academic Press, 1972. P. 367–369.
14. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
15. **Hartung J.** A stable interior penalty method for convex extremal problems // Numer. Math. 1978. V. 29, no. 2. P. 149–158.
16. **Васильев Ф.П., Ковач М.** О регуляризации некорректных экстремальных задач с использованием штрафных и барьерных функций // Вестник МГУ. Сер. вычисл. математика и кибернетика. 1980. № 2. С. 29–35.
17. **Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.** Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986.
18. **Гольштейн Е.Г.** Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971.
19. **Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983.

Поступила 15.02.2008

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14 № 2 2008

УДК 519.6

# ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА МАРШРУТИЗАЦИИ “НА УЗКИЕ МЕСТА” С ОГРАНИЧЕНИЯМИ В ВИДЕ УСЛОВИЙ ПРЕДШЕСТВОВАНИЯ[1]

**А. А. Ченцов, А. Г. Ченцов**

Рассматривается экстремальная задача маршрутизации перемещений с ограничениями в виде условий предшествования. Критерий качества имеет смысл длины “наибольшего ребра” траектории. Конструируется экономичный вариант процедуры на основе метода динамического программирования (МДП).

## 1. Введение

Рассматривается задача последовательного обхода множеств, осложненная условиями предшествования. Критерий отвечает известной постановке задачи “на узкие места”, (в некотором естественном смысле “минимизируется” максимальное ребро). Построена модификация МДП, на основе которой конструируется вычислительная процедура, использующая построение не всей функции Беллмана, а лишь той ее “части”, которая согласуется в некотором естественном смысле с условиями предшествования (последние играют положительную, в некотором смысле, роль с точки зрения соображений, связанных с вычислительной реализацией). Возможные приложения могут быть связаны с задачами организации морских и авиационных перевозок, а также технологических процессов, включающих элементы директивно устанавливаемой очередности исполнения заданий.

## 2. Постановка задачи

В работах [1–3], посвященных исследованию хорошо известной задачи коммивояжера (ЗК), обсуждается также ряд естественных аналогов ЗК, включающих различные условия и ограничения, возникающие в разнообразных прикладных задачах. Из числа упомянутых аналогов ЗК отметим сейчас (см. [1]) задачу курьера и ЗК с выбором (имеется в виду задача о посещении кластеров, составленных из “городов”). В этой связи см. статью [1] и библиографию к ней. Рассматриваемая далее задача включает оба вышеупомянутых аналога в качестве своеобразных компонент: элементы задачи курьера и ЗК с выбором объединены здесь в единое целое в духе конструкций [4–8] с одним существенным отличием. Именно, исследуемая задача соответствует естественному распространению конструкций [4–8] на случай постановки, в которой функция агрегирования индивидуальных затрат соответствует задаче “на узкие места” [9, с. 37].

Для формулировки упомянутой задачи введем ряд обозначений общего характера, фиксируя непустое множество $X$, $x^0 \in X$, натуральное число $N$, $N \geq 2$, и непустые конечные подмножества (п/м)

$$M_1,\ \ldots,\ M_N, \tag{2.1}$$

множества $X$. Множества (2.1) называем целевыми. Рассматриваем перемещения вида

$$(x_0 = x^0) \longrightarrow (x_1 \in M_{\alpha(1)}) \longrightarrow\ \ldots\ \longrightarrow (x_N \in M_{\alpha(N)}), \tag{2.2}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 06-01-00414, 07-01-96088, 08-08-00981а).

где $\alpha$ — та или иная перестановка индексов $1, 2, ..., N$. Элементарные перемещения в (2.2) сопровождаются затратами, которые агрегируются по принципу выбора "максимального ребра". Минимизация агрегированных затрат в условиях ограничений на выбор $\alpha$ составляет нашу цель; для ее достижения используем $\alpha$ и кортеж $(x_1, ..., x_N)$, выбираемые в пределах соответствующих допустимых множеств (ограничения на выбор $(x_1, ..., x_N)$ указаны в (2.2); они зависят от перестановки $\alpha$).

Для уточнения постановки введем некоторые новые обозначения. Если $x$ — объект, то через $\{x\}$ обозначаем одноэлементное множество, содержащее $x$. Если же $x$ и $y$ — объекты, то $\{x; y\} \stackrel{\triangle}{=} \{x\} \cup \{y\}$ (здесь и ниже $\stackrel{\triangle}{=}$ — равенство по определению) — неупорядоченная пара объектов $x$ и $y$. Наконец, $(x, y) \stackrel{\triangle}{=} \big\{\{x\}; \{x; y\}\big\}$ — упорядоченная пара объектов $x$ и $y$. Через $\varnothing$ обозначаем пустое множество. Полагаем, что $\mathcal{N} \stackrel{\triangle}{=} \{1; 2; ...\}$ и $\mathcal{N}_0 \stackrel{\triangle}{=} \{0\} \cup \mathcal{N} = \{0; 1; 2; ...\}$; если $p \in \mathcal{N}_0$ и $q \in \mathcal{N}_0$, то

$$\overline{p, q} \stackrel{\triangle}{=} \big\{i \in \mathcal{N}_0 \mid (p \leq i) \ \& \ (i \leq q)\big\}$$

(не исключаем случай $q < p$, для которого $\overline{p, q} = \varnothing$)).

Условимся о соглашении: если $z$ — упорядоченная пара некоторых (определяемых единственным образом) объектов $x$ и $y$, то через $\mathrm{pr}_1(z)$ и $\mathrm{pr}_2(z)$ обозначаем соответственно первую и вторую компоненты $z = (x, y) : \mathrm{pr}_1(z) = x$ и $\mathrm{pr}_2(z) = y$; тогда, конечно же, $z = \big(\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z)\big)$. Если $S$ — множество, то через $\mathrm{Fin}(S)$ обозначаем семейство всех непустых конечных п/м множества $S$. Напомним, что $N \in \mathcal{N}$ и $N \geq 2$; будем полагать относительно множеств (2.1), что

$$(M_i)_{i \in \overline{1, N}} : \overline{1, N} \longrightarrow \mathrm{Fin}(X) \tag{2.3}$$

(итак, множества (2.1) конечны). Постулируем далее, что

$$\Big(x^0 \in X \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{N} M_i\Big)\Big) \& \big(M_{i_1} \cap M_{i_2} = \varnothing \ \ \forall i_1 \in \overline{1, N} \ \forall i_2 \in \overline{1, N} \setminus \{i_1\}\big). \tag{2.4}$$

С учетом (2.4) можно рассматривать (2.2) как процедуру последовательного посещения "островов" (2.1). Соглашение (2.3) можно рассматривать в этом случае как элемент идеализации.

Фиксируем число $n \in \mathcal{N}$, а также два кортежа

$$(p_i)_{i \in \overline{1, n}} : \overline{1, n} \longrightarrow \overline{1, N}, \quad (q_i)_{i \in \overline{1, n}} : \overline{1, n} \longrightarrow \overline{1, N}. \tag{2.5}$$

Каждую пару $(p_j, q_j)$, где $j \in \overline{1, n}$, называем адресной, что соответствует требованию осуществлять перемещение от $M_{p_j}$ к $M_{q_j}$ с возможным посещением "по пути" каких-то других множеств.

Через $\mathbb{P}$ обозначаем множество всех перестановок в $\overline{1, N}$ (элементы $\mathbb{P}$ — суть биекции $\overline{1, N}$ на $\overline{1, N}$ и только они), именуемых маршрутами. Если $\lambda \in \mathbb{P}$, то $\lambda^{-1} \in \mathbb{P}$ определяется как перестановка в $\overline{1, N}$, обратная по отношению к $\lambda$:

$$\lambda\big(\lambda^{-1}(k)\big) = \lambda^{-1}\big(\lambda(k)\big) = k \ \ \forall k \in \overline{1, N}. \tag{2.6}$$

С учетом (2.5), (2.6) конструируем множество [5, с. 182]

$$\mathbb{A} \stackrel{\triangle}{=} \big\{\lambda \in \mathbb{P} | \ \lambda^{-1}(p_i) < \lambda^{-1}(q_i) \ \ \forall i \in \overline{1, n}\big\} \tag{2.7}$$

всех маршрутов, допустимых в смысле вышеупомянутых адресных пар. Перестановки из (2.7) и только они соблюдают условия предшествования, связанные с (2.5). Для точного определения ограничений на выбор трассы (2.2) введем для каждой перестановки $\alpha \in \mathbb{P}$ специальное множество кортежей, отвечающих точкам посещения множеств (2.1).

Если $\alpha \in \mathbb{P}$, то через $\mathfrak{X}[\alpha]$ обозначаем множество всех кортежей (траекторий)

$$(x_i)_{i \in \overline{0, N}} : \overline{0, N} \longrightarrow X, \tag{2.8}$$

для каждого из которых $x_0 = x^0$ и, кроме того, $x_j \in M_{\alpha(j)} \quad \forall j \in \overline{1,N}$. Каждое конкретное решение по организации перемещений вида (2.2) рассматриваем как выбор некоторой упорядоченной пары $z = (\alpha, (x_i)_{i\in\overline{0,N}})$, где $\alpha \in \mathbb{A}$ и $(x_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{X}[\alpha]$. При этом

$$(\alpha = \mathrm{pr}_1(z)) \ \& \ ((x_i)_{i\in\overline{0,N}} = \mathrm{pr}_2(z)).$$

Для оценки элементарных перемещений с множества на множество фиксируем функцию затрат

$$\mathbf{c}: \ X \times X \longrightarrow [0, \infty[; \tag{2.9}$$

в частности, для всяких $i \in \overline{1,N}$, $j \in \overline{1,N}$, $i \neq j$, $y \in M_i$ и $z \in M_j$ определено число $\mathbf{c}(y,z)$, оценивающее затраты на перемещение из $y$ в $z$.

Через $\mathbb{X}$ обозначаем множество всех кортежей (2.8); с помощью (2.9) оцениваем каждый кортеж (2.8), определяя отображение

$$\mathfrak{C}: \ \mathbb{X} \longrightarrow [0, \infty[$$

по следующему правилу: если $(x_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathbb{X}$, то

$$\mathfrak{C}\big((x_i)_{i\in\overline{0,N}}\big) \stackrel{\triangle}{=} \max_{i\in\overline{1,N}} \mathbf{c}(x_{i-1}, x_i). \tag{2.10}$$

Итак, используем неаддитивный способ агрегирования затрат. В частности, посредством (2.10) оценивается каждая система перемещений (2.2). Способ агрегирования индивидуальных затрат, принятый в (2.10), является типичным для задач “на узкие места”. Наша цель состоит в минимизации значений (2.10) посредством рационального выбора пары маршрут — трасса.

В связи с вопросом о совместности ограничений возникающей минимаксной задачи нам потребуется одно предположение, для формулировки которого полагаем, что $\mathcal{K}$ — семейство всех непустых п/м множества $\overline{1,n}$; именно, полагаем в дальнейшем, что

$$\forall K \in \mathcal{K} \ \exists i \in K: \ p_i \neq q_j \ \ \forall j \in K. \tag{2.11}$$

Поскольку $\{k\} \in \mathcal{K}$ при $k \in \overline{1,n}$, имеем очевидное следствие (2.11):

$$p_i \neq q_i \ \ \forall i \in \overline{1,n}. \tag{2.12}$$

Из (2.11) и положений [5, с. 186–189] вытекает, что

$$\mathbb{A} \neq \varnothing. \tag{2.13}$$

С другой стороны, при $\alpha \in \mathbb{P}$ имеем: $\mathfrak{X}[\alpha]$ — непустое конечное множество. Поэтому ограничения задачи

$$\mathfrak{C}\big((x_i)_{i\in\overline{0,N}}\big) \longrightarrow \min, \ \ \alpha \in \mathbb{A}, \ (x_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{X}[\alpha] \tag{2.14}$$

совместны и корректно определяется ее значение

$$V \stackrel{\triangle}{=} \min_{\alpha\in\mathbb{A}} \ \min_{(x_i)_{i\in\overline{0,N}}\in\mathfrak{X}[\alpha]} \mathfrak{C}\big((x_i)_{i\in\overline{0,N}}\big) \in [0, \infty[. \tag{2.15}$$

Итак, в (2.14) определена задача оптимизации на множестве

$$\{z \in \mathbb{A} \times \mathbb{X} \mid \mathrm{pr}_2(z) \in \mathfrak{X}[\mathrm{pr}_1(z)]\},$$

в которой критерий качества явным образом зависит только от трассы, однако сам выбор трассы стеснен ограничением, определяемым выбором маршрута. Как обычно, маршрут и трассу, реализующие минимумы в (2.15), называем оптимальными. Нашей целью является определение $V$ (2.15) и построение оптимальной пары маршрут — трасса. В качестве основного инструмента используем МДП.

## 3. Метод динамического программирования

Введем некоторые обозначения, следуя [4–7]. Через $\mathbf{N}$ (через $\mathfrak{N}$) обозначаем семейство всех п/м (всех непустых п/м) множества $\overline{1,N}$. При $K \in \mathfrak{N}$ определяем множество $(\mathrm{bi})[K]$ всех биекций "отрезка" $\overline{1,|K|}$, где (здесь и ниже) $|K|$ — количество элементов $K$, на множество $K$; $\mathbb{P} = (\mathrm{bi})[\overline{1,N}]$. Полагаем также $|\varnothing| \overset{\triangle}{=} 0$. Пусть

$$\Sigma[K] \overset{\triangle}{=} \big\{i \in \overline{1,n} | (p_i \in K) \; \& \; (q_i \in K)\big\} \;\; \forall K \in \mathfrak{N}. \tag{3.1}$$

Как и в [4–8], полагаем, что отображение $\mathbf{I}$ действует в $\mathfrak{N}$ по правилу $\mathbf{I}(K) \overset{\triangle}{=} K \setminus \{q_j : \; j \in \Sigma[K]\}$. В терминах $\mathbf{I}$ определяется новый тип маршрутов, в основе которого находится ограничение на текущие переходы с множества на множество. Эти маршруты конструируются не только для решения "полной" маршрутной задачи, но и для укороченных, т.е. "неполных", задач.

Если $K \in \mathfrak{N}$, то через $(\mathbf{I}\text{-bi})[K]$ обозначаем множество всех биекций $\alpha \in (\mathrm{bi})[K]$, для каждой из которых

$$\alpha(k) \in \mathbf{I}\big(\{\alpha(l) : \; l \in \overline{k,|K|}\}\big) \;\; \forall k \in \overline{1,|K|}. \tag{3.2}$$

С учетом положений [4–6] получаем, что

$$(\mathbf{I}\text{-bi})[K] \neq \varnothing \;\; \forall K \in \mathfrak{N}; \tag{3.3}$$

кроме того (см. [4–6]) справедливо следующее равенство:

$$\mathbb{A} = (\mathbf{I}\text{-bi})[\overline{1,N}]. \tag{3.4}$$

Содержательный смысл новых ограничений, согласующихся в силу (3.4) с условиями предшествования, проясняется в (3.2): всякий раз оставшийся к исполнению список заданий прореживается по универсальному конструктивному правилу, определяемому в терминах $\mathbf{I}$. Маршруты из множеств в левой части (3.3) используются в качестве допустимых в укороченных задачах, отвечающих заданиям с индексами $i \in K$, где $K \in \mathfrak{N}$. Следует, кроме того, ввести укороченные трассы: если $x \in X$, $K \in \mathfrak{N}$ и $\alpha \in (\mathrm{bi})[K]$, то через $\mathcal{X}[x; K; \alpha]$ обозначаем множество всех кортежей

$$(x_i)_{i \in \overline{0,|K|}} : \; \overline{0,|K|} \longrightarrow X, \tag{3.5}$$

для каждого из которых $x_0 = x$ и, кроме того,

$$x_j \in M_{\alpha(j)} \;\; \forall j \in \overline{1,|K|}.$$

Можно рассматривать $\mathcal{X}[x; K; \alpha]$ как пучок траекторий, возможных при использовании частичного маршрута $\alpha$. Совокупное же решение укороченной задачи, связанной с посещением множеств $M_i$, $i \in K$, из состояния $x$, определяется парой $(\alpha, (x_i)_{i \in \overline{0,|K|}})$, где $\alpha \in (\mathbf{I}\text{-bi})[K]$, а $(x_i)_{i \in \overline{0,|K|}} \in \mathcal{X}[x; K; \alpha]$. С учетом (3.3) имеем очевидное свойство совместности: упомянутые совокупные решения существуют. В связи с оценкой результата условимся сопоставлять укороченной трассе (при зафиксированном $K \in \mathfrak{N}$) наибольшее из значений $\mathbf{c}(x_{i-1}, x_i)$, $i \in \overline{1,|K|}$. Определяем при $K \in \mathfrak{N}$ на множестве всех кортежей (3.5) функционал $\tilde{\mathfrak{C}}_K$, имеющий неотрицательные значения, посредством правила: если $(x_i)_{i \in \overline{0,|K|}}$ соответствует (3.5), то

$$\tilde{\mathfrak{C}}_K\big((x_i)_{i \in \overline{0,|K|}}\big) \overset{\triangle}{=} \max_{i \in \overline{1,|K|}} \mathbf{c}(x_{i-1}, x_i). \tag{3.6}$$

Укороченная задача, параметрами которой являются $x \in X$ и $K \in \mathfrak{N}$, имеет вид

$$\tilde{\mathfrak{C}}_K\big((x_i)_{i \in \overline{0,|K|}}\big) \longrightarrow \min, \;\; \alpha \in (\mathbf{I}\text{-bi})[K], \; (x_i)_{i \in \overline{0,|K|}} \in \mathcal{X}[x; K; \alpha]. \tag{3.7}$$

Этой задаче естественным образом сопоставляется экстремум (значение)

$$v(x,K) = \min_{\alpha\in(\mathbf{I}\text{-bi})[K]}\ \min_{(x_i)_{i\in\overline{0,|K|}}\in\mathcal{X}[x;K;\alpha]} \tilde{\mathfrak{C}}_K\big((x_i)_{i\in\overline{0,|K|}}\big)\in[0,\infty[; \tag{3.8}$$

напомним, что в (3.8) $x\in X$ и $K\in\mathfrak{N}$. Рассмотрим вопрос о согласовании основной задачи (2.14) с системой укороченных; оно сводится к истолкованию (2.14) в виде варианта (3.7). Для этого отметим прежде всего (3.4) и то, что

$$\mathfrak{X}[\alpha] = \mathcal{X}\big[x^0;\overline{1,N};\alpha\big]\ \ \forall\alpha\in\mathbb{A}. \tag{3.9}$$

Кроме того учтем, что $|\overline{1,N}| = N$ и отображение $\tilde{\mathfrak{C}}_{\overline{1,N}}$ определено на множестве $\mathbb{X}$ (см. (2.8), (3.5)). Более того, из (2.10) и (3.6) имеем равенство $\mathfrak{C} = \tilde{\mathfrak{C}}_{\overline{1,N}}$. Поэтому (см. (2.15), (3.4), (3.6), (3.8), (3.9))

$$V = v(x^0,\overline{1,N}). \tag{3.10}$$

Возвращаясь к (3.8), условимся о следующем соглашении: полагаем

$$v(x,\varnothing)\overset{\triangle}{=}0\ \ \forall x\in X. \tag{3.11}$$

Теперь уже определены значения $v(x,K)\in[0,\infty[\ \ \forall x\in X\ \forall K\in\mathbf{N}$. Иными словами, введена функция Беллмана

$$(x,K)\longmapsto v(x,K):\ X\times\mathbf{N}\longrightarrow[0,\infty[.$$

Следующий шаг состоит в получении уравнения Беллмана, на основе которого осуществляется построение как самой функции Беллмана, так и оптимального решения исходной задачи. Именно, по аналогии с [5, 6] устанавливается следующее

**Предложение 3.1.** *Если $x\in X$ и $K\in\mathfrak{N}$, то*

$$v(x,K) = \min_{j\in\mathbf{I}(K)}\ \min_{y\in M_j}\sup\big(\{\mathbf{c}(x,y);v(y,K\setminus\{j\})\}\big).$$

С х е м а д о к а з а т е л ь с т в а. В случае $|K|=1$ доказательство утверждения является очевидным следствием (3.11), поэтому ограничимся обсуждением случая $n\overset{\triangle}{=}|K|\in\overline{2,N}$. Ниже устанавливаются два неравенства, из которых вытекает требуемое утверждение.

Итак, выбираем, используя (3.8), маршрут $\mathbf{a}\in(\mathbf{I}\text{-bi})[K]$ и трассу $(y_i)_{i\in\overline{0,n}}\in\mathcal{X}[x;K;\mathbf{a}]$, для которых

$$v(x,K) = \tilde{\mathfrak{C}}_K\big((y_i)_{i\in\overline{0,n}}\big). \tag{3.12}$$

Поскольку $\mathbf{a}(1)\in\mathbf{I}(K)$ (см. (3.2)) и $y_1\in M_{\mathbf{a}(1)}$, то при $T\overset{\triangle}{=}K\setminus\big\{\mathbf{a}(1)\big\}$

$$\min_{j\in\mathbf{I}(K)}\ \min_{y\in M_j}\sup\big(\{\mathbf{c}(x,y);v(y,K\setminus\{j\})\}\big)\le\sup\big(\{\mathbf{c}(x,y_1);v(y_1,T)\}\big); \tag{3.13}$$

$|T| = n-1$. Легко видеть, что $\overline{a}\overset{\triangle}{=}\big(\mathbf{a}(i+1)\big)_{i\in\overline{1,n-1}}\in(\mathbf{I}\text{-bi})[T]$; $\overline{a}$ есть отображение

$$i\longmapsto\mathbf{a}(i+1):\ \overline{1,n-1}\longrightarrow T,$$

где $n-1\in\overline{1,N-1}$. Кроме того, имеем по выбору $(y_i)_{i\in\overline{0,n}}$, что

$$(y_{i+1})_{i\in\overline{0,n-1}}\in\mathcal{X}[y_1;T;\overline{a}],$$

что означает с учетом (3.8) справедливость неравенства

$$v(y_1,T)\le\tilde{\mathfrak{C}}_T((y_{i+1})_{i\in\overline{0,n-1}}) = \max_{i\in\overline{2,n}}\mathbf{c}(y_{i-1},y_i). \tag{3.14}$$

С учетом (3.6), (3.13), (3.14) получаем с очевидностью

$$\min_{j\in\mathbf{I}(K)}\min_{y\in M_j}\sup(\{\mathbf{c}(x,y);v(y,K\setminus\{j\})\})\leq\sup(\{\mathbf{c}(x,y_1);\max_{i\in\overline{2,n}}\mathbf{c}(y_{i-1},y_i)\})$$
$$=\tilde{\mathfrak{C}}((y_i)_{i\in\overline{0,n}})=v(x,K). \tag{3.15}$$

Выберем $q\in\mathbf{I}(K)$ и $z\in M_q$, для которых при $Q\overset{\triangle}{=}K\setminus\{q\}$

$$\sup(\{\mathbf{c}(x,z);v(z,Q)\})=\min_{j\in\mathbf{I}(K)}\min_{y\in M_j}\sup(\{\mathbf{c}(x,y);v(y,K\setminus\{j\})\}); \tag{3.16}$$

$|Q|=n-1$. С учетом (3.8) подберем $\beta\in(\mathbf{I}\text{-bi})[Q]$ и $(x_i^*)_{i\in\overline{0,n-1}}\in\mathcal{X}[z;Q;\beta]$, для которых

$$v(z,Q)=\tilde{\mathfrak{C}}_Q((x_i^*)_{i\in\overline{0,n-1}})=\max_{i\in\overline{1,n-1}}\mathbf{c}(x_{i-1}^*,x_i^*). \tag{3.17}$$

Введем отображение $\rho:\ \overline{1,n}\longrightarrow K$ по следующему правилу:

$$(\rho(1)\overset{\triangle}{=}q)\ \&\ (\rho(i)\overset{\triangle}{=}\beta(i-1)\ \ \forall i\in\overline{2,n}). \tag{3.18}$$

Тогда $\rho\in(\mathbf{I}\text{-bi})[K]$. Пусть, кроме того, $(y_i^*)_{i\in\overline{0,n}}$ — кортеж в $X$, для которого

$$(y_0^*\overset{\triangle}{=}x)\ \&\ (y_i^*\overset{\triangle}{=}x_{i-1}^*\ \ \forall i\in\overline{1,n}).$$

С учетом (3.18) имеем включение $(y_i^*)_{i\in\overline{0,n}}\in\mathcal{X}[x;K;\rho]$. Как следствие

$$v(x,K)\leq\tilde{\mathfrak{C}}_K((y_i^*)_{i\in\overline{0,n}}), \tag{3.19}$$

причем имеет место следующая цепочка равенств (3.17))

$$\tilde{\mathfrak{C}}_K((y_i^*)_{i\in\overline{0,n}})=\max_{i\in\overline{1,n}}\mathbf{c}(y_{i-1}^*,y_i^*)=\sup(\{\mathbf{c}(y_0^*,y_1^*);\ \max_{i\in\overline{2,n}}\mathbf{c}(y_{i-1}^*,y_i^*)\})$$
$$=\sup(\{\mathbf{c}(x,z);\ \max_{i\in\overline{1,n-1}}\mathbf{c}(x_{i-1}^*,x_i^*)\})=\sup(\{\mathbf{c}(x,z);v(z,Q)\}).$$

С учетом (3.16) и (3.19) получаем неравенство

$$v(x,K)\leq\min_{j\in\mathbf{I}(K)}\min_{y\in M_j}\sup\big(\{\mathbf{c}(x,y);v(y,K\setminus\{j\})\}\big),$$

из которого вытекает (см. (3.15)) доказываемое утверждение. □

## 4. Построение усеченного массива значений функции Беллмана

Введем сначала нужные разбиения семейств $\mathfrak{N}$ и $\mathbf{N}$, группируя подсемейства по количеству элементов множеств, составляющих то или иное подсемейство. Пусть

$$\big(\mathfrak{N}_s\overset{\triangle}{=}\{K\in\mathfrak{N}|\ |K|=s\}\ \forall s\in\overline{1,N}\big)\&\big(\mathbf{N}_k\overset{\triangle}{=}\{K\in\mathbf{N}|\ |K|=k\}\ \ \forall k\in\overline{0,N}\big). \tag{4.1}$$

Разумеется, $\mathbf{N}_s=\mathfrak{N}_s$ при $s\in\overline{1,N}$; $\mathbf{N}_0=\{\varnothing\}$. При этом $\{\mathfrak{N}_s:\ \ s\in\overline{1,N}\}$ — разбиение $\mathfrak{N}$, а $\{\mathbf{N}_k:\ k\in\overline{0,N}\}$ — разбиение $\mathbf{N}$. Соответственно $\{X\times\mathfrak{N}_s:\ s\in\overline{1,N}\}$ — разбиение множества $X\times\mathfrak{N}$, а $\{X\times\mathbf{N}_k:\ k\in\overline{0,N}\}$ — разбиение множества $X\times\mathbf{N}$. Если $s\in\overline{0,N}$, то полагаем, что

$$V_s\overset{\triangle}{=}(v(x,K))_{(x,K)\in X\times\mathbf{N}_s}, \tag{4.2}$$

получая отображение $V_s:\ X\times\mathbf{N}_s\longrightarrow[0,\infty[$.

**Предложение 4.1.** *Если* $m \in \overline{0, N-1}$ *и* $(x, K) \in X \times \mathbf{N}_{m+1}$, *то*

$$V_{m+1}(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_j} \sup\big(\{\mathbf{c}(x, y); V_m(y, K \setminus \{j\})\}\big).$$

Доказательство получается непосредственной комбинацией (4.2) и предложения 3.1. Предложение 3.1 определяет преобразование

$$V_m \longrightarrow V_{m+1} \ \ \forall m \in \overline{0, N-1}. \tag{4.3}$$

После выполнения конечного числа таких преобразований получаем весь кортеж $(V_i)_{i \in \overline{0,N}}$ слоев функции Беллмана; при этом “стартовая” функция $V_0$ определяется условием (см. (3.11))

$$V_0(x, \varnothing) = 0 \ \ \forall x \in X \tag{4.4}$$

(иными словами, $V_0$ — вещественнозначная функция на $X \times \mathbf{N}_0 = X \times \{\varnothing\}$, значения которой тождественно равны нулю). Итак, $V_0$ определяется посредством (4.4), а далее действует рекуррентная процедура (4.3), определяемая в предложении 4.1. Упомянутая процедура является, однако, чрезвычайно трудоемкой.

Рассмотрим усеченный вариант МДП, для чего прежде всего введем подобно [10] семейства

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_k &\stackrel{\triangle}{=} \big\{K \in \mathfrak{N}_k |\ \forall j \in \overline{1,n} \ \ (p_j \notin K) \vee (q_j \in K)\big\} \\ &= \big\{K \in \mathfrak{N}_k |\ \forall j \in \overline{1,n} \ \ ((p_j \in K) \Longrightarrow (q_j \in K))\big\} \ \ \forall k \in \overline{1, N}.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Из (2.12) и (4.5) вытекает следующее равенство:

$$\mathcal{C}_1 = \big\{\{s\} : \ s \in \overline{1, N} \setminus \{p_i : \ i \in \overline{1,n}\}\big\}. \tag{4.6}$$

Отметим, что (см. (2.5)) $\overline{1, N} \in \mathcal{C}_N$. Справедливо также

**Предложение 4.2.** *Если* $s \in \overline{2, N}$, $K \in \mathcal{C}_s$ *и* $k \in \mathbf{I}(K)$, *то* $K \setminus \{k\} \in \mathcal{C}_{s-1}$.

Доказательство. Легко видеть, что $\mathbb{K} \stackrel{\triangle}{=} K \setminus \{k\} \in \mathfrak{N}_{s-1}$. Пусть $r \in \overline{1, n}$. Если $p_r \in \mathbb{K}$, то в силу (4.5) имеем $r \in \Sigma[K]$ (см. (3.1)), а тогда по выбору $k$ получаем, что $k \neq q_r$; в итоге $q_r \in \mathbb{K}$. Импликация

$$(p_r \in \mathbb{K}) \Longrightarrow (q_r \in \mathbb{K})$$

установлена. Поскольку выбор $r$ был произвольным, имеем из (4.5) требуемое свойство $\mathbb{K} \in \mathcal{C}_{s-1}$. □

Из (2.7) легко следует полезное свойство:

$$\big\{\alpha(i) : \ i \in \overline{k, N}\big\} \in \mathcal{C}_{N-k+1} \ \ \forall \alpha \in \mathbb{A} \ \forall k \in \overline{1, N}. \tag{4.7}$$

Рассмотрим построение усеченных слоев в пространстве позиций, полагая сначала

$$\mathbf{M} \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{i \in \overline{1,N} \setminus \{p_i : \ i \in \overline{1,n}\}} M_i; \tag{4.8}$$

отметим согласованность (4.6) и (4.8). Далее, полагаем

$$\mathcal{J}_s(K) \stackrel{\triangle}{=} \big\{i \in \overline{1, N} \setminus K |\ \{i\} \cup K \in \mathcal{C}_{s+1}\big\} \ \ \forall s \in \overline{1, N-1} \ \forall K \in \mathcal{C}_s.$$

Усеченные слои $D_0, D_1, ..., D_N$ в пространстве позиций определяем посредством условий:

$$D_0 \stackrel{\triangle}{=} \big\{(x, \varnothing) : \ x \in \mathbf{M}\big\} = \mathbf{M} \times \{\varnothing\} = \mathbf{M} \times \mathbf{N}_0; \tag{4.9}$$

$$D_s \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{K \in \mathcal{C}_s} \Big\{ (x, K) : \ x \in \bigcup_{i \in \mathcal{J}_s(K)} M_i \Big\} \ \ \forall s \in \overline{1, N-1}; \tag{4.10}$$

$$D_N \stackrel{\triangle}{=} \big\{ (x^0, \overline{1, N}) \big\} = \big\{ x^0 \big\} \times \big\{ \overline{1, N} \big\}. \tag{4.11}$$

С учетом (2.13) легко проверяется, что $\mathbf{M} \neq \varnothing$, а тогда (см. (4.9), (4.11))

$$\big(D_0 \neq \varnothing\big) \& \big(D_N \neq \varnothing\big). \tag{4.12}$$

Множества (4.10) также являются непустыми. В самом деле, выберем $\alpha \in \mathbb{A}$ и рассмотрим $s \in \overline{1, N-1}$. Для $r \stackrel{\triangle}{=} N - s + 1 \in \overline{2, N}$ имеем в силу (4.7), что $T_1 \stackrel{\triangle}{=} \big\{ \alpha(i) : \ i \in \overline{r, N} \big\} \in \mathcal{C}_s$;

$$T_2 \stackrel{\triangle}{=} \big\{ \alpha(i) : \ i \in \overline{r-1, N} \big\} = \{ \alpha(r-1) \} \cup T_1 \in \mathcal{C}_{s+1},$$

откуда в силу инъективности $\alpha$ получаем, что $\alpha(r-1) \in \mathcal{J}_s(T_1)$. Тогда

$$(x, T_1) \in D_s \ \ \forall x \in M_{\alpha(r-1)},$$

где $M_{\alpha(r-1)} \in \mathrm{Fin}(X)$. В итоге $D_s \neq \varnothing$. Коль скоро выбор $s$ был произвольным, имеем с учетом (4.12) следующее

**Предложение 4.3.** *Каждое из множеств $D_s$, $s \in \overline{0, N}$, непусто.*

С учетом предложения 4.3 принимаем теперь соглашение: если $s \in \overline{0, N}$, то через $\mathcal{V}_s$ обозначаем сужение функции $V_s$ на множество $D_s$; $\mathcal{V}_s : \ D_s \longrightarrow [0, \infty[$ и при этом

$$\mathcal{V}_s \stackrel{\triangle}{=} \big( V_s(z) \big)_{z \in D_s}. \tag{4.13}$$

Кортеж $(\mathcal{V}_i)_{i \in \overline{0, N}}$ рассматриваем как усеченную версию функции Беллмана.

**Предложение 4.4.** *Если $s \in \overline{1, N}$, $(x, K) \in D_s$, $k \in \mathbf{I}(K)$ и $y \in M_k$, то*

$$(y, K \setminus \{k\}) \in D_{s-1}. \tag{4.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (4.10) имеем свойство $K \in \mathcal{C}_s$. Пусть сначала $s \in \overline{2, N}$. Тогда в силу предложения 4.2 $K \setminus \{k\} \in \mathcal{C}_{s-1}$, причем $k \in \mathcal{J}_{s-1}(K \setminus \{k\})$, где $s - 1 \in \overline{1, N-1}$. С учетом (4.10) получаем (4.14). Осталось рассмотреть случай $s = 1$, когда $K = \{k\} \in \mathcal{C}_1$, откуда в силу (4.6) $k \neq p_i \ \ \forall i \in \overline{1, n}$. Из (4.8) вытекает, что $M_k \subset \mathbf{M}$, а тогда

$$(y, K \setminus \{k\}) = (y, \varnothing) \in D_0$$

согласно (4.9), т.е. (4.14) выполняется и в случае $s = 1$. □

С учетом предложения 4.4 имеем следующее свойство: если $s \in \overline{1, N}$, $(x, K) \in D_s$, $k \in \mathbf{I}(K)$ и $y \in M_k$, то определено значение $\mathcal{V}_{s-1}(y, K \setminus \{k\})$. Стало быть, при $s \in \overline{1, N}$ и $(x, K) \in D_s$ определена величина

$$\min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_k} \sup \big( \big\{ \mathbf{c}(x, y); \mathcal{V}_{s-1}(y, K \setminus \{k\}) \big\} \big) \in [0, \infty[.$$

**Предложение 4.5.** *Если $s \in \overline{1, N}$ и $(x, K) \in D_s$, то*

$$\mathcal{V}_s(x, K) = \min_{k \in \mathbf{I}(\mathbf{K})} \min_{y \in M_k} \sup \big( \big\{ \mathbf{c}(x, y); \mathcal{V}_{s-1}(y, K \setminus \{k\}) \big\} \big). \tag{4.15}$$

Доказательство следует из предложения 4.1, (4.13) и замечания перед настоящим предложением. Из (3.10), (4.2) и (4.13) имеем, кроме того, равенства

$$\mathcal{V}_N(x^0, \overline{1,N}) = V_N(x^0, \overline{1,N}) = V. \tag{4.16}$$

Предложение 4.5 определяет естественную возможность построения $(\mathcal{V}_i)_{i\in\overline{0,N}}$ (в дальнейшем будет показано, что данный кортеж достаточен и для построения оптимального решения по МДП). Итак, функция $\mathcal{V}_0$ определяется (см. (4.4), (4.9)) условием

$$\mathcal{V}_0(x, \varnothing) = 0 \;\; \forall x \in \mathbf{M}. \tag{4.17}$$

Пусть $m \in \overline{0,N}$ и кортеж $(\mathcal{V}_i)_{i\in\overline{0,m}}$ уже построен. Тогда, в частности, мы располагаем функцией

$$\mathcal{V}_m: \; D_m \longrightarrow [0, \infty[.$$

Если $m = N$, то наше построение завершено. Пусть $m \neq N$, т.е. $m \in \overline{0, N-1}$. Тогда для $m+1 \in \overline{1,N}$ имеем в силу предложения 4.4 свойство

$$\big(y, K \setminus \{k\}\big) \in D_m \;\; \forall (x, K) \in D_{m+1} \; \forall k \in \mathbf{I}(K) \; \forall y \in M_k. \tag{4.18}$$

В силу (4.18) мы располагаем для каждой позиции $(x, K) \in D_{m+1}$ массивом значений

$$\big(\mathcal{V}_m(y, K \setminus \{k\}) : \;\; k \in \mathbf{I}(K), \; y \in M_k\big),$$

что позволяет воспользоваться предложением 4.5 при $s = m+1$. В самом деле, согласно этому предложению

$$\mathcal{V}_{m+1}(x, K) = \min_{k\in\mathbf{I(K)}} \min_{y\in M_k} \sup\big(\{\mathbf{c}(x,y); \mathcal{V}_m(y, K \setminus \{k\})\}\big) \;\; \forall (x, K) \in D_{m+1}. \tag{4.19}$$

Посредством (4.19) определяем функцию $\mathcal{V}_{m+1}$. После конечного числа шагов (этапов) типа $\mathcal{V}_m \longrightarrow \mathcal{V}_{m+1}$ весь кортеж $(\mathcal{V}_i)_{i\in\overline{0,N}}$ будет построен. В частности, будет определено значение $V$ в (4.16).

## 5. Построение оптимальной пары маршрут — трасса (алгоритм на функциональном уровне)

В настоящем разделе на основании информации о значениях функций $\mathcal{V}_i, \; i \in \overline{0,N}$, конструируется оптимальное решение в виде пары маршрут — трасса. Напомним, что $\big(x^0, \overline{1,N}\big) \in D_N$; см. (4.11). Кроме того, в силу предложения 4.4 для $k \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$ и $y \in M_k$ имеем $\big(y, \overline{1,N} \setminus \{k\}\big) \in D_{N-1}$. Более того, из предложения 4.5 вытекает, что (см. (4.16))

$$V = \min_{k\in\mathbf{I}(K)} \min_{y\in M_k} \sup\big(\{\mathbf{c}(x_0, y); \mathcal{V}_{N-1}(y, K \setminus \{k\})\}\big). \tag{5.1}$$

Полагаем $\mathbf{x}_0 \stackrel{\triangle}{=} x^0$. Выбираем (см. (5.1)) $\mathbf{i}_1 \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$ и $\mathbf{x}_1 \in M_{\mathbf{i}_1}$ так, что при этом

$$V = \sup\big(\{\mathbf{c}(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}_1); \mathcal{V}_{N-1}(\mathbf{x}_1, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\})\}\big). \tag{5.2}$$

Заметим, что в силу предложения 4.4

$$\big(\mathbf{x}_1, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}\big) \in D_{N-1}. \tag{5.3}$$

Вновь используя предложение 4.4 при $s = N-1$ и позиции (5.3), получаем

$$\big(y, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1; k\}\big) \in D_{N-2} \;\; \forall k \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}) \; \forall y \in M_k$$

и, более того, согласно предложению 4.5 и (5.3)

$$\mathcal{V}_{N-1}\big(\mathbf{x}_1, \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_1\}\big) = \min_{k\in\mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_1\})}\ \min_{y\in M_k}\sup\big(\{\mathbf{c}(\mathbf{x}_1,y);\mathcal{V}_{N-2}(y,K\setminus\{\mathbf{i}_1;k\})\}\big).$$

Выбираем $\mathbf{i}_2\in\mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_1\})$ и точку $\mathbf{x}_2\in M_{\mathbf{i}_2}$ так, что

$$\mathcal{V}_{N-1}(\mathbf{x}_1,\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_1\}) = \sup\big(\{\mathbf{c}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2);\mathcal{V}_{N-2}(\mathbf{x}_2,\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_1;\mathbf{i}_2\})\}\big). \tag{5.4}$$

При этом, конечно, справедливо свойство

$$\big(\mathbf{x}_2,\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:\ k\in\overline{1,2}\}\big) = \big(\mathbf{x}_2,\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_1;\mathbf{i}_2\}\big)\in D_{N-2}. \tag{5.5}$$

Из (5.2), (5.4) вытекает равенство

$$V=\sup\big(\{\max_{i\in\overline{1,2}}\mathbf{c}(\mathbf{x}_{i-1},\mathbf{x}_i);\mathcal{V}_{N-2}(\mathbf{x}_2,\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:\ k\in\overline{1,2}\})\}\big). \tag{5.6}$$

Пусть теперь $r\in\overline{2,N}$, и уже построены два кортежа

$$(\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,r}}:\ \overline{1,r}\longrightarrow\overline{1,N},\ \ (\mathbf{x}_i)_{i\in\overline{0,r}}:\ \overline{0,r}\longrightarrow X, \tag{5.7}$$

для которых выполнены следующие условия:

$$(1')\ \ \big(\mathbf{x}_0=x^0\big)\&\big(\mathbf{x}_j\in M_{\mathbf{i}_j}\ \ \forall j\in\overline{1,r}\big);$$

$$(2')\ \ \mathbf{i}_j\neq\mathbf{i}_k\ \ \forall j\in\overline{1,r}\ \forall k\in\overline{1,r}\setminus\{j\};$$

$$(3')\ \ \big(\mathbf{x}_k,\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_j:\ j\in\overline{1,k}\}\big)\in D_{N-k}\ \ \forall k\in\overline{1,r};$$

$$(4')\ \ \mathbf{i}_j\in\mathbf{I}\big(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:\ k\in\overline{1,j-1}\}\big)\ \ \forall j\in\overline{1,r};$$

$$(5')\ \ \mathcal{V}_{N-j+1}\big(\mathbf{x}_{j-1},\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:\ k\in\overline{1,j-1}\}\big)$$

$$=\sup\big(\{\mathbf{c}(\mathbf{x}_{j-1},\mathbf{x}_j);\mathcal{V}_{N-j}\big(\mathbf{x}_j,\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:\ k\in\overline{1,j}\}\big)\}\big)\ \ \forall j\in\overline{1,r};$$

$$(6')\ \ V=\sup\big(\{\max_{i\in\overline{1,r}}\mathbf{c}(\mathbf{x}_{i-1},\mathbf{x}_i);\mathcal{V}_{N-r}\big(\mathbf{x}_r,\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:\ k\in\overline{1,r}\}\big)\}\big).$$

З а м е ч а н и е 5.1. При $r=2$ условия очевидным образом выполняются; см. построения, связанные с (5.2)–(5.6).

Возвращаясь к общему случаю кортежей (5.7), рассмотрим отдельно два возможных случая: (1) $r=N$; (2) $r\in\overline{2,N-1}$.

(1) Пусть $r=N$. Тогда имеем в (5.7) “полные” кортежи

$$(\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,N}}:\ \overline{1,N}\longrightarrow\overline{1,N},\quad (\mathbf{x}_i)_{i\in\overline{0,N}}:\ \overline{0,N}\longrightarrow X. \tag{5.8}$$

В силу $(2')$ $(\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,N}}\in\mathbb{P}$, а тогда в силу (3.4) и $(4')$

$$(\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,N}}\in\mathbb{A}. \tag{5.9}$$

Из $(1')$ и (5.8) вытекает, что $(\mathbf{x}_i)_{i\in\overline{0,N}}\in\mathfrak{X}[(\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,N}}]$; с учетом (5.9) получаем допустимую пару маршрут — трасса

$$\big((\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,N}},(\mathbf{x}_i)_{i\in\overline{0,N}}\big); \tag{5.10}$$

см. задачу (2.14). В силу биективности (5.9) и (3.11) имеем цепочку равенств

$$\mathcal{V}_{N-r}\big(\mathbf{x}_r,\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:\ k\in\overline{1,r}\}\big)=\mathcal{V}_0(\mathbf{x}_r,\varnothing)=V_0(\mathbf{x}_N,\varnothing)=v(\mathbf{x}_N,\varnothing)=0.$$

Поэтому согласно (6′) имеем следующее равенство (см. (2.10)):

$$\mathfrak{C}\big((\mathbf{x}_i)_{i\in\overline{0,N}}\big)=V,$$

что означает оптимальность решения (5.10); см. (2.14), (2.15). Итак, в случае (1) имеем оптимальное решение.

(2) Пусть $r\in\overline{2,N-1}$; тогда $r+1\in\overline{3,N}$ и $N-r\in\overline{1,N-2}$. Из (3′) следует, что

$$\big(\mathbf{x}_r,\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:\ k\in\overline{1,r}\}\big)\in D_{N-r}. \tag{5.11}$$

Поскольку, в частности, $N-r\in\overline{1,N}$, то в силу предложения 4.4 и (5.11)

$$\big(y,(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:\ k\in\overline{1,r}\})\setminus\{j\}\big)\in D_{N-(r+1)}$$
$$\forall j\in\mathbf{I}\big(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:\ k\in\overline{1,r}\}\big)\ \forall y\in M_k. \tag{5.12}$$

Для позиций, указанных в (5.11), мы располагаем полученными ранее значениями функции $\mathcal{V}_{N-(r+1)}$. Более того, в силу предложения 4.5 и (5.11)

$$\mathcal{V}_{N-r}\big(\mathbf{x}_r,\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:\ k\in\overline{1,r}\}\big)$$
$$=\min_{j\in\mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:\, k\in\overline{1,r}\})}\ \min_{y\in M_j}\sup\big(\big\{\mathbf{c}(\mathbf{x}_r,y);\mathcal{V}_{N-(r+1)}\big(y,(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:\ k\in\overline{1,r}\})\setminus\{j\}\big)\big\}\big). \tag{5.13}$$

С учетом (5.13) выбираем индекс

$$\mathbf{i}_{r+1}\in\mathbf{I}\big(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:\ k\in\overline{1,r}\}\big) \tag{5.14}$$

и точку $\mathbf{x}_{r+1}\in M_{\mathbf{i}_{r+1}}$, для которых справедливо равенство

$$\mathcal{V}_{N-r}\big(\mathbf{x}_r,\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:\ k\in\overline{1,r}\}\big)$$
$$=\sup\big(\big\{\mathbf{c}(\mathbf{x}_r,\mathbf{x}_{r+1});\mathcal{V}_{N-(r+1)}(\mathbf{x}_{r+1},\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:\ k\in\overline{1,r+1}\})\big\}\big). \tag{5.15}$$

Теперь уже мы располагаем продолженными кортежами

$$(\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,r+1}}:\ \overline{1,r+1}\longrightarrow\overline{1,N}, \tag{5.16}$$

$$(\mathbf{x}_j)_{j\in\overline{0,r+1}}:\ \overline{0,r+1}\longrightarrow X. \tag{5.17}$$

В отношении (5.17) заметим, что имеет место свойство

$$(1'')\ \ \big(\mathbf{x}_0=x^0\big)\&\big(\mathbf{x}_j\in M_{\mathbf{i}_j}\ \ \forall j\in\overline{1,r+1}\big).$$

Из (2′) и (5.14) легко следует также свойство

$$(2'')\ \ \mathbf{i}_j\neq\mathbf{i}_k\ \ \forall j\in\overline{1,r+1}\ \forall k\in\overline{1,r+1}\setminus\{j\}.$$

Заметим далее, что из (5.12) по выбору $\mathbf{i}_{r+1}$ (см. (5.14)) и $\mathbf{x}_{r+1}$ имеем

$$\big(\mathbf{x}_{r+1},\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:\ k\in\overline{1,r+1}\}\big)\in D_{N-(r+1)}.$$

С учетом (3′) получаем теперь для кортежей (5.16), (5.17) свойство

$$(3'')\ \ \big(\mathbf{x}_k,\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_j:\ j\in\overline{1,k}\}\big)\in D_{N-k}\ \ \forall k\in\overline{1,r+1}.$$

Из (4′) и (5.14) вытекает, что справедливо

$$(4'')\ \ \mathbf{i}_j\in\mathbf{I}\big(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:\ k\in\overline{1,j-1}\}\big)\ \ \forall j\in\overline{1,r+1}.$$

Далее, из (5′) и (5.15) извлекается свойство

$$(5'')\ \ \mathcal{V}_{N-j+1}\big(\mathbf{x}_{j-1}, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_k :\ k \in \overline{1,j-1}\}\big)$$
$$= \sup\big(\big\{\mathbf{c}(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j); \mathcal{V}_{N-j}\big(\mathbf{x}_j, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_k :\ k \in \overline{1,j}\}\big)\big\}\big) \ \ \forall j \in \overline{1,r+1}.$$

Наконец, из (6′) и (5.15) получаем следующую цепочку равенств:

$$V = \sup\big(\big\{\max_{i \in \overline{1,r}} \mathbf{c}(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i); \sup\big(\big\{\mathbf{c}(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_{r+1}); \mathcal{V}_{N-(r+1)}\big(\mathbf{x}_{r+1}, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_k :\ k \in \overline{1,r+1}\}\big)\big\}\big)\big\}\big)$$

$$= \sup\big(\big\{\sup\big(\big\{\max_{i \in \overline{1,r}} \mathbf{c}(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i); \mathbf{c}\big(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_{r+1}\big)\big\}\big); \mathcal{V}_{N-(r+1)}\big(\mathbf{x}_{r+1}, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_j :\ j \in \overline{1,r+1}\}\big)\big\}\big)$$
$$= \sup\big(\big\{\max_{i \in \overline{1,r+1}} \mathbf{c}(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i); \mathcal{V}_{N-(r+1)}\big(\mathbf{x}_{r+1}, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_j :\ j \in \overline{1,r+1}\}\big)\big\}\big).$$

Следовательно, получено свойство

$$(6'')\ \ V = \sup\big(\big\{\max_{i \in \overline{1,r+1}} \mathbf{c}(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i); \mathcal{V}_{N-(r+1)}\big(\mathbf{x}_{r+1}, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_k :\ k \in \overline{1,r+1}\}\big)\big\}\big).$$

Итак, мы смогли продолжить (см. (5.16), (5.17)) каждый из кортежей (5.7) с сохранением всех основных свойств: (1′)–(6′) преобразуются в (1″)–(6″).

## 6. Вычислительный эксперимент

Приведенный выше алгоритм решения задачи обхода множеств был реализован в виде программы для ПЭВМ, написанной на языке C++ (Borland C++ Builder 6.0), работающей в операционной системе семейства Windows, не ранее Windows 95. Вычислительная часть программы реализована в отдельном от интерфейса пользователя потоке. Для случая решения задачи на плоскости в программе имеется возможность графического представления множеств, а также маршрута и трассы их обхода, отдельные участки графика можно увеличивать; программа позволяет сохранять график в файле формата bmp.

Вычислительный эксперимент проводился на компьютере Notebook с процессором Intel CoreDuo T2500 с частотой 2 гГц и объемом оперативной памяти 1 гБ с установленной операционной системой Windows XP Professional SP2.

Рассмотрим конкретный пример решения задачи обхода множеств на плоскости. Будем представлять множества в виде равномерных “сеток”, получаемых размещением на окружностях 12 точек, включая точки с нулевыми угловыми координатами. Таким образом, каждое множество $M_i$ однозначно представляется координатами центра $O_i$ и радиусом $R_i$ окружности, $i \in \overline{1,N}$. Будем рассматривать задачу обхода 27 таких множеств: $N = 27$.

Пусть начальная точка $x^0$ совпадает с началом координат, а функция затрат $\mathbf{c}$ — евклидово расстояние (между соответствующими точками).

Координаты центров окружностей:

$$O_1 = (15,0),\ O_2 = (45,0),\ O_3 = (80,0),\ O_4 = (0,-20),\ O_5 = (0,-50),$$
$$O_6 = (0,-85),\ O_7 = (-25,0),\ O_8 = (-55,0),\ O_9 = (-82,0),$$
$$O_{10} = (0,22),\ O_{11} = (0,48),\ O_{12} = (0,82),\ O_{13} = (30,35),\ O_{14} = (50,80),$$
$$O_{15} = (70,40),\ O_{16} = (30,-50),\ O_{17} = (65,-35),\ O_{18} = (80,-80),$$
$$O_{19} = (40,-85),\ O_{20} = (-40,-50),\ O_{21} = (-70,-75),\ O_{22} = (-80,-35),$$
$$O_{23} = (-70,80),\ O_{24} = (-60,35),\ O_{25} = (-30,55);\ O_{26} = (-40,-85),\ O_{27} = (-30,85).$$

Радиусы окружностей:

$$R_4 = R_6 = R_8 = R_{10} = R_{27} = 8;$$
$$R_1 = R_9 = R_{11} = R_{13} = R_{16} = R_{19} = R_{24} = R_{26} = 10;$$
$$R_3 = R_{18} = R_{21} = 11;$$
$$R_2 = R_5 = R_{15} = R_{17} = R_{22} = R_{25} = 12;$$
$$R_7 = R_{12} = R_{14} = R_{20} = R_{23} = 15.$$

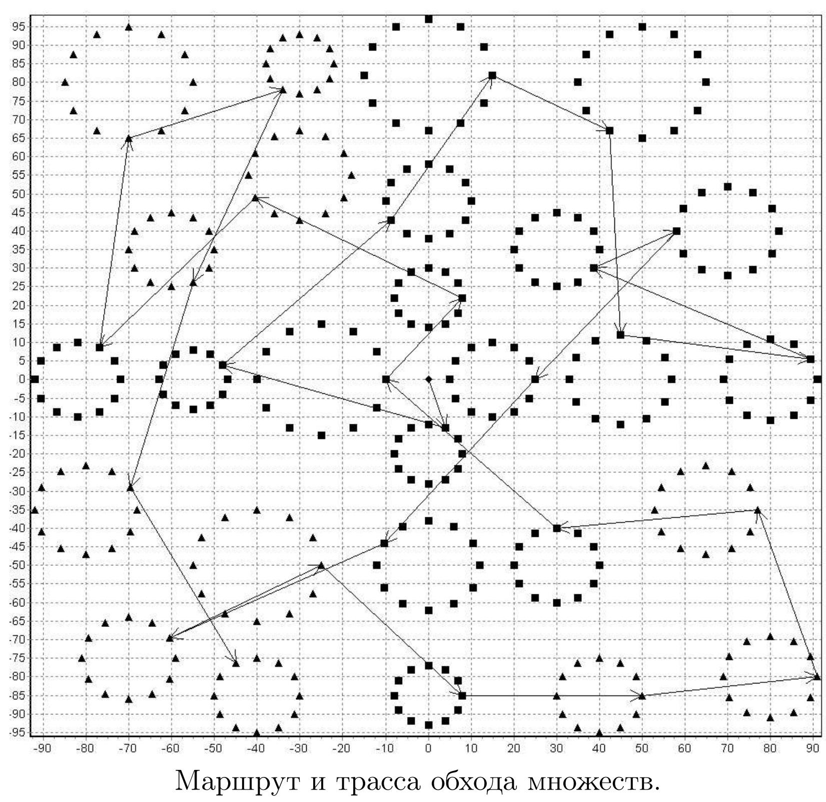
Пусть $n = 25$ и условия предшествования определяются (см. (2.5)) индексами:

$$p_1 = 1, q_1 = 10;\ p_2 = 12, q_2 = 2;\ p_3 = 2, q_3 = 13;\ p_4 = 13, q_4 = 15;$$
$$p_5 = 6, q_5 = 16;\ p_6 = 15, q_6 = 16;\ p_7 = 18, q_7 = 27;\ p_8 = 9, q_8 = 27;$$
$$p_9 = 10, q_9 = 9;\ p_{10} = 11, q_{10} = 19;\ p_{11} = 20, q_{11} = 19;\ p_{12} = 25, q_{12} = 26;$$
$$p_{13} = 23, q_{13} = 22;\ p_{14} = 21, q_{14} = 20;\ p_{15} = 24, q_{15} = 22;\ p_{16} = 14, q_{16} = 16;$$
$$p_{17} = 7, q_{17} = 10;\ p_{18} = 8, q_{18} = 2;\ p_{19} = 1, q_{19} = 9;\ p_{20} = 14, q_{20} = 26;$$
$$p_{21} = 2, q_{21} = 27;\ p_{22} = 3, q_{22} = 6;\ p_{23} = 3, q_{23} = 19;\ p_{24} = 18, q_{24} = 17;$$
$$p_{25} = 14, q_{25} = 25.$$

Получены следующие результаты:
Величина совокупных затрат: 57,23.
Маршрут и трасса:

$$(4, -13.07) \in M_4;\ (-48.07, 4) \in M_8;\ (-8.66, 43) \in M_{11};\ (15, 82) \in M_{12};\ (42.50, 67.01) \in M_{14};$$
$$(45, 12) \in M_2;\ (89.53, 5.50) \in M_3;\ (38.66, 30) \in M_{13};\ (58, 40) \in M_{15};\ (25, 0) \in M_1;$$
$$(-10.39, -44) \in M_5;\ (-60.47, -69.50) \in M_{21};\ (-25, -50) \in M_{20};\ (8, -85) \in M_6;$$
$$(50, -85) \in M_{19};\ (91, -80) \in M_{18};\ (77, -35) \in M_{17};\ (30, -40) \in M_{16};\ (-10, 0) \in M_7;$$
$$(8, 22) \in M_{10};\ (-40.39, 49) \in M_{25};\ (-77, 8.66) \in M_9;\ (-70, 65) \in M_{23};\ (-34, 78.07) \in M_{27};$$
$$(-55, 26.34) \in M_{24};\ (-69.61, -29) \in M_{22};\ (-45, -76.34) \in M_{26}.$$

Время вычисления составило 30 мин. 29 сек.
График маршрута и трассы приведен на рисунке.



Маршрут и трасса обхода множеств.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.** Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 3–34.
2. **Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.** Задача коммивояжера. Точные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 10. С. 3–29.
3. **Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.** Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 11. С. 3–26.
4. **Ченцов А.Г., Ченцов П.А.** Маршрутизация с условиями предшествования (задача курьера): метод динамического программирования // Вестник УГТУ-УПИ. 2004. № 15 (45). С. 148 – 151.
5. **Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А.** Об одном обобщении задачи курьера// Алгоритмы и програм. средства параллел. вычислений. Екатеринбург: УрО РАН, 2004. Вып. 8. С. 178–235.
6. **Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А.** Обобщенная версия задачи курьера // Математический и прикладной анализ: сб. науч. тр. Тюмень: Изд-во Тюменского гос. ун-та, 2005. Вып. 2. С. 238–280.
7. **Ченцов А.Г.** О структуре одной экстремальной задачи маршрутизации с ограничениями в виде условий предшествования // Вестник Удм. ун-та. Математика. 2006. № 1. С. 127–150.
8. **Ченцов А.Г.** Экстремальные задачи маршрутизации с ограничениями // Изв. Ин-та математики и информатики УдмГУ. 2006. Вып. 3 (37). С. 163–166.
9. **Сигал И.Х., Иванова А.П.** Введение в прикладное дискретное программирование. М.: Физматлит, 2007.
10. **Ченцов А.А., Ченцов А.Г.** О реализации метода динамического программирования в обобщенной задаче курьера // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 3. С. 136–160.

Поступила 05.02.2008

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14 № 2 2008

УДК 512.54

# О НЕПРИВОДИМЫХ ХАРАКТЕРАХ ГРУППЫ $S_n$, ПОЛУПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ НА $A_n$ ИЛИ НА $S_n \setminus A_n$. I [1]

**В. А. Белоногов**

Гипотеза об отсутствии пар полупропорциональных неприводимых характеров у знакопеременных групп $A_n$ сводится к некоторой гипотезе, связанной с задачей описания пар неприводимых характеров симметрической группы $S_n$, полупропорциональных на одном из множеств $A_n$ и $S_n \setminus A_n$. Форма этой гипотезы (в отличие от формы первоначальной гипотезы) максимально приспособлена для доказательства гипотезы по индукции. Свойства пары упомянутых выше характеров выражены в терминах строения диаграмм Юнга, соответствующих этим характерам. Теорема, доказанная в статье, уточняет строение этих диаграмм в одном из двух возможных случаев.

## Введение

Функции $\varphi$ и $\psi$ из некоторого множества $G$ в поле $\mathbb{C}$ называются *полупропорциональными*, если они непропорциональны и для некоторого подмножества $M$ из $G$ пропорциональны ограничения $\varphi$ и $\psi$ на $M$ и их ограничения на $G \setminus M$, и называются *полупропорциональными на* $S$, где $S \subseteq G$, если полупропорциональны их ограничения на $S$.

Вопрос о наличии пар полупропорциональных неприводимых характеров в конечных группах определенных классов исследовался в ряде работ автора (их список имеется в [1] и [2]). Интерес к таким исследованиям поддерживается, в частности, обнаруженной связью между наличием или отсутствием в группе такой пары и локальным строением этой группы. Например, в квазипростых группах лиева типа $\mathrm{L}_2(q)$, $\mathrm{SL}_2(q)$, $\mathrm{L}_3(q)$, $\mathrm{SL}_3(q)$, $\mathrm{U}_3(q)$ и $\mathrm{SU}_3(q)$ такие пары отсутствуют при чётных $q$ и присутствуют при нечётных $q$, за исключением групп $\mathrm{L}_2(5)$, $\mathrm{L}_2(7)$ и $\mathrm{L}_2(9)$ (изоморфных группам $\mathrm{L}_2(4)$, $\mathrm{L}_3(2)$ и $\mathrm{PSp}_4(2)'$ соответственно).

В [1] описаны все пары полупропорциональных неприводимых характеров симметрических групп (см. предложение 3.1 ниже) и начато исследование таких пар у знакопеременных групп. Там же (и в более явном виде в [3]) была высказана следующая

**Гипотеза 1.** *Знакопеременная группа $A_n$ при любом $n \in \mathbb{N}$ не имеет полупропорциональных неприводимых характеров.*

В теореме 2 из [1] показано, что если $\varphi$ и $\psi$ — полупропорциональные неприводимые характеры группы $A_n$, то $\varphi$ и $\psi$ являются ограничениями на $A_n$ некоторых неприводимых характеров $\chi^\alpha$ и $\chi^\beta$ симметрической группы $S_n$ ($\alpha, \beta \in P(n)$). (Здесь $P(n)$ обозначает множество всех разбиений числа $n$, и $\chi^\alpha$ — неприводимый характер группы $S_n$, соответствующий разбиению $\alpha \in P(n)$; встречающиеся далее обозначения и понятия, связанные с разбиениями, напоминаются в § 1.) Отсюда следует, что гипотеза 1 равносильна следующей гипотезе, сформулированной в терминах неприводимых характеров группы $S_n$.

**Гипотеза 2.** *Если $\chi^\alpha$ и $\chi^\beta$ — неприводимые характеры группы $S_n$ ($\alpha, \beta \in P(n)$), полупропорциональные на $A_n$, то одно из разбиений $\alpha$ и $\beta$ самоассоциировано.*

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 07-01-00148).

Метод доказательства гипотезы 2, намеченный автором, основывается на предложении 3.6 (см. ниже), согласно которому, если $\chi^\alpha$ и $\chi^\beta$ полупропорциональны на $A_n$ и диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ имеют точно по одному крюку $H$ и $K$ соответственно некоторой длины $m$, то характеры $\chi^{\alpha-H}$ и $\chi^{\beta-K}$ группы $S_{n-m}$ пропорциональны или полупропорциональны либо на $A_{n-m}$ (если $m$ нечётно), либо на $S_{n-m}\setminus A_{n-m}$ (если $m$ чётно). Поэтому для доказательства гипотезы 2 индукцией по $n$ оказывается необходимым определить для всех $n$ не только все пары $(\alpha,\beta)$, для которых выполнено условие гипотезы 2, но также и все пары $(\alpha,\beta)$ такие, что неприводимые характеры $\chi^\alpha$ и $\chi^\beta$ группы $S_n$ полупропорциональны на разности $S_n\setminus A_n$. Некоторые шаги в этом направлении были сделаны в [4] и [5]. В частности, в [5] на основании большого экспериментального материала высказаны следующие две гипотезы.

**Гипотеза 3.** *Если $\chi^\alpha$ и $\chi^\beta$ — неприводимые характеры группы $S_n$ $(\alpha,\beta\in P(n))$, полупропорциональные на $A_n$, то*

(а) *диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ имеют точно по одному крюку длины 3 и*

(б) *после удаления из них этих крюков остаётся одна и та же самоассоциированная диаграмма, не имеющая крюков длины 3.*

**Гипотеза 4.** *Если $\chi^\alpha$ и $\chi^\beta$ — неприводимые характеры группы $S_n$ $(\alpha,\beta\in P(n))$, полупропорциональные на $S_n\setminus A_n$, то*

(а) *диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ имеют точно по одному крюку длины 4 и*

(б) *после удаления из них этих крюков остаётся одна и та же самоассоциированная диаграмма, не имеющая крюков длины 4.*

Интересна своеобразная похожесть заключений этих гипотез, уже дающая некоторую надежду на их справедливость. Но обе гипотезы имеют серьёзные подтверждения. Как следует из теоремы Б в [6] и теоремы 1 в [7], каждая из них верна всякий раз, когда длина главной диагонали хотя бы одного из разбиений $\alpha$ и $\beta$ меньше трёх (см. предложения 4.2 и 4.3). Кроме того, в [4] доказана справедливость гипотезы 3 (так же, как и следующей более сильной гипотезы 3$'$) в случае, когда хотя бы одно из разбиений $\alpha$ и $\beta$ самоассоциировано (см. предложение 4.1).

Для доказательства этих гипотез предполагается применить метод доказательства теорем из [6, 7], а для этого необходимо знать вид диаграмм $[\alpha]$ и $[\beta]$, удовлетворяющих условиям (а) и (б) в каждом случае. Описание таких диаграмм получено соответственно в работах [4] и [5]. Это позволяет переформулировать гипотезы 3 и 4 в следующем виде. (В каждом случае сначала был найден вид диаграмм из пункта (б), а по их виду, как легко заметить, множество $\{\alpha,\beta\}$ со свойствами (а) и (б) восстанавливается однозначно с точностью до ассоциированности; см. рис. 2.2—2.6 и предложения 2.1—2.6.)

**Гипотеза 3$'$.** *Если $\chi^\alpha$ и $\chi^\beta$ — неприводимые характеры группы $S_n$ $(\alpha,\beta\in P(n))$, полупропорциональные на $A_n$, то с точностью до перемены мест $\alpha$ и $\beta$ выполнено одно из следующих условий*:

(1) $\alpha =' 2^k.() + (3)$ *и* $\beta = 2^k.() + (0^k, 2, 1)$, *где* $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$;

(2) $\alpha =' 2^k.(1) + (3)$ *и* $\beta = 2^k.(1) + (0^k, 1, 2)$, *где* $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

**Гипотеза 4$'$.** *Пусть $\alpha,\beta\in P(n)$ и $\chi^\alpha$ полупропорционально $\chi^\beta$ на $S_n\setminus A_n$. Тогда с точностью до перемены мест $\alpha$ и $\beta$ верно одно из следующих утверждений* (*везде $k, l$ целые*):

(1) $\alpha =' 3^k.\Delta_l + (4)$ *и* $\beta =' 3^k.\Delta_l + (0^k, 2, 2)$, *где* $k\geq 0$ *и* $l\geq 1$;

(2) $\alpha =' 3^k.\Sigma_l + (4)$ *и* $\beta =' 3^k.\Sigma_l + (0^k, 3, 1)$, *где* $k\geq 0$ *и* $l\geq 0$;

(3) $\alpha =' 3^k.2.\Sigma_l + (4)$ *и* $\beta =' 3^k.2.\Sigma_l + (0^k, 1, 3)$, *где* $k\geq 0$ *и* $l\geq 0$.

Определения разбиений $2^k.()$, $2^k.(1)$, $3^k.\Delta_l$, $3^k.\Sigma_l$ и $3^k.2.\Sigma_l$ напоминаются в § 2; там же приводятся изображения диаграмм Юнга разбиений $\alpha$ и $\beta$ для каждого из утверждений гипотез 3$'$ и 4$'$; знак $\neq'$ объясняется в § 1. ( $(0^k, a, b)$ есть последовательность $(0,\dots,0,a,b)$ длины $k+2$; последовательности складываются покоординатно.)

Объединим эти две гипотезы в следующей гипотезе A. Для $\varepsilon \in \{1, -1\}$ положим

$$S_n^\varepsilon := \begin{cases} S_n^+ := A_n, & \text{если } \varepsilon = 1, \\ S_n^- := S_n \setminus A_n, & \text{если } \varepsilon = -1. \end{cases}$$

**Гипотеза A**. *Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$ и $\chi^\alpha$ полупропорционально $\chi^\beta$ на $S_n^\varepsilon$. Тогда верно одно из следующих утверждений*:

(1) $\varepsilon = 1$ *и выполнено заключение гипотезы* $3'$;

(2) $\varepsilon = -1$ *и выполнено заключение гипотезы* $4'$.

Весьма прозрачное строение разбиений $\alpha$ и $\beta$ в пунктах (1) и (2) (см. рисунки диаграмм $[\alpha]$ и $[\beta]$ в § 2) делает гипотезу A удобной для доказательства её индукцией по $n$. После доказательства этой гипотезы доказанными становятся и все предыдущие гипотезы.

Очевидно, доказательство гипотезы A индукцией по числу $n$ достаточно провести в предположении, что выполнено следующее

**Условие A.** Пусть $n$ — натуральное число такое, что при любом $\widetilde{n} < n$ из того, что четвёрка $(\widetilde{n}, \widetilde{\varepsilon}, \widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$ удовлетворяет условию гипотезы A на месте $(n, \varepsilon, \alpha, \beta)$ следует, что она удовлетворяет и заключению этой гипотезы на месте $(n, \varepsilon, \alpha, \beta)$.

Согласно теореме A из [3] доказательство гипотезы A можно разделить на две части, в которых выполнены соответственно условия $h_{11}^\alpha = h_{11}^\beta$ и $h_{12}^\alpha = h_{11}^\beta$. Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема, позволяющая существенно прояснить строение диаграмм разбиений $\alpha$ и $\beta$ в случае, когда $h_{11}^\alpha = h_{11}^\beta$.

**Теорема A1.** *Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$, $\chi^\alpha$ полупропорционально $\chi^\beta$ на $S_n^\varepsilon$ и выполнено условие A. Предположим, что $h_{11}^\alpha = h_{11}^\beta$. Тогда тройка $(\alpha^{11}, \beta^{11}, \delta)$, где $\delta = (-1)^{h_{11}^\alpha + 1}\varepsilon$, удовлетворяет заключению гипотезы A на месте $(\alpha, \beta, \varepsilon)$.*

Теорема A1 доказывается в § 5. Необходимые для её доказательства понятия и результаты приведены в §§ 1–3. Параграф 1 содержит сведения о разбиениях и неприводимых характерах групп $S_n$ и $A_n$. В § 2 приводятся свойства разбиений $\alpha$ и $\beta$ из заключений гипотез $3'$ и $4'$, полученные в [4] и [5]. В § 3 собраны результаты, наиболее часто используемые в доказательстве теоремы A, касающиеся свойств произвольной пары $\chi^\alpha$ и $\chi^\beta$ неприводимых характеров $S_n$, полупропорциональных на $S_n^\varepsilon$. В частности, теорема 3.1 устанавливает следующее важное свойство любой такой пары: $\chi^\alpha(g) = \pm\chi^\beta(g)$ для всех $g \in S_n^\varepsilon$. В § 4 сформулированы полученные ранее подтверждения теоремы A.

Обозначения, используемые в статье, в основном стандартны (см., например, [8] и [9]). В частности, $\mathbb{C}$ и $\mathbb{N}$ — множества всех комплексных и натуральных чисел соответственно; запись $A := B$ (читается: $A$ по определению равно $B$) означает, что $A$ есть обозначение для $B$; $\dot\cup$ — знак объединения попарно не пересекающихся множеств. Если $\alpha = (a_1, \ldots, a_k)$ и $\beta = (b_1, \ldots, b_l)$ — конечные последовательности, то $\alpha * \beta$ обозначает последовательность $(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l)$; если $k \geq l$, то $\alpha + \beta = (a_1 + b_1, \ldots, a_l + b_l, a_{l+1}, \ldots, a_k)$.

Пусть $\varphi$ и $\psi$ — обобщённые характеры группы $G$ и $S \subseteq G$. Если ограничения $\varphi$ и $\psi$ на $S$ имеют одно и то же множество корней, то мы говорим, что $\varphi$ и $\psi$ *имеют одно и то же множество корней на* $S$ (или *являются равнокорневыми на* $S$) и пишем “$\varphi \sim \psi$ на $S$” (знак "$\sim$" можно читать как “эквивалентно”). Если же $|\phi(s)| = |\psi(s)|$ для всех $s \in S$, то скажем, что $\varphi$ и $\psi$ *модульно равны на* $S$.

Обозначения, связанные с разбиениями и характерами групп $S_n$, приводятся в § 1.

Всюду далее $n$ обозначает некоторое натуральное число.

## 1. Разбиения и характеры групп $S_n$ и $A_n$

Множество всех неприводимых характеров и множество всех классов сопряженных элементов симметрической группы $S_n$ находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством $P(n)$ всех разбиений числа $n$ [9, 10]. Если $\alpha$ — такое разбиение, то $\chi^\alpha$ и $C_\alpha$ обозначают соответствующие ему неприводимый характер и класс сопряженных элементов группы $S_n$ соответственно, а $g_\alpha$ обозначает некоторый элемент из $C_\alpha$ (когда конкретный вид элемента класса не важен). Напомним некоторые определения.

*Разбиение* натурального числа $n$ есть последовательность $\alpha = (a_1, \ldots, a_l)$ натуральных чисел такая, что $a_1 \geq \ldots \geq a_l$ и $n = a_1 + \ldots + a_l$. Длина $l$ разбиения $\alpha$ обозначается через $l(\alpha)$. $i$-й член $a_i$ $(1 \leq i \leq l)$ разбиения $\alpha$ обозначается через $\alpha_i$. Считают также, что $\alpha_i = 0$ при $i > l$. *Знаком* разбиения $\alpha \in P(n)$ называется число $\mathrm{sign}(\alpha) := (-1)^{n-l(\alpha)}$, а также знак этого числа. Разбиение $\alpha$ имеет знак $+$, если и только если $C_\alpha \subseteq A_n$. Каждому разбиению $\alpha = (a_1, \ldots, a_l) \in P(n)$ сопоставляется его *диаграмма Юнга* (или просто *диаграмма*) $[\alpha] := \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq l,\ 1 \leq j \leq a_i\}$. На рисунке её обычно изображают в виде $l$-строчной таблицы, состоящей из $n$ равных квадратных клеток, так что $i$-я строка имеет $a_i$ клеток и начальные клетки всех строк находятся в одном столбце. Клетки (элементы) вида $(i, i)$ диаграммы образуют её *главную диагональ*. Говорят, что разбиения $\alpha$ и $\beta$ *ассоциированы*, если диаграмма одного из них получается из диаграммы другого отражением относительно главной диагонали. Разбиение, ассоциированное с $\alpha$, обозначается через $\alpha'$. Разбиение называется *самоассоциированным*, если $\alpha = \alpha'$. Множество всех клеток $(i, j)$ диаграммы $[\alpha]$ таких, что $[\alpha]$ не содержит клетки $(i + 1, j + 1)$, называется её *границей*.

*Крюком* диаграммы $[\alpha]$ (или разбиения $\alpha$) с вершиной $(i, j)$ называется множество $H^\alpha_{ij} := \{(i, j)\} \cup A \cup L$, где $A := \{(i, j + k) \in [\alpha] \mid k \geq 1\}$ (*рука крюка*) и $L := \{(i + k, j) \in [\alpha] \mid k \geq 1\}$ (*нога крюка*). *Косым крюком* с вершиной $(i, j)$ диаграммы $[\alpha]$ называется часть границы диаграммы $[\alpha]$, "вырезанная" крюком $H^\alpha_{ij}$. Его обозначают через $R^\alpha_{ij}$ или через $R(H^\alpha_{ij})$. Косые крюки диаграммы $[\alpha]$ — это в точности те связные части её границы, после удаления которых из $[\alpha]$ остаётся диаграмма некоторого разбиения (какого-либо меньшего числа). *Длиной* крюка (косого крюка, диагонали, ноги крюка) называется его (или её) мощность. Длина главной диагонали диаграммы $[\alpha]$ обозначается через $d(\alpha)$. Положим $h^\alpha_{ij} := |H^\alpha_{ij}|$ $(= |R^\alpha_{ij}|)$. Для обозначения обычного словарного (лексикографического) порядка на $P(n)$ при любом $n$ используется знак $\leq$ (например, $(6, 3, 3, 1) < (6, 4, 2, 1)$).

При $k \in \mathbb{N}$ *$k$-ядро разбиения* $\lambda$ есть разбиение $\widetilde{\lambda}$, диаграмма которого может быть получена из диаграммы $[\alpha]$ последовательным удалением нескольких косых крюков длины $k$, причём сама диаграмма $[\widetilde{\lambda}]$ не имеет крюков длины $k$ ($\widetilde{\lambda}$ не зависит от выбора последовательности удаляемых косых крюков).

*Разбиением числа* 0 называют пустую (длины 0) последовательность натуральных чисел, обозначаемую через $()$, и считают, что $[()] = \varnothing$ и $()' = ()$. Далее под *разбиением* понимается разбиение некоторого целого неотрицательного числа.

Часто разбиения записывают в условной форме, заменяя подпоследовательность $a, \ldots, a$ длины $m \geq 0$ выражением $a^m$. Например, $(4, 3^2, 1) := (4, 3, 3, 1)$ и $(5, 1^0) := (5)$.

Пусть $\alpha, \beta, \gamma \in P(n)$, $H$ есть крюк разбиения $\alpha$ и $A, B$ — подмножества из $P(n)$. Введём обозначения:

$\alpha - H$ есть разбиение с диаграммой $[\alpha] \setminus R(H)$;

$\alpha^{ij} := \alpha - H^\alpha_{ij}$;

$l_H$ — длина ноги крюка $H$;

$\mathrm{H}^\alpha(m)$ — множество всех крюков длины $m$ в $[\alpha]$;

$\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(m) := \mathrm{H}^\alpha(m) \cup \mathrm{H}^\beta(m)$; $\quad \mathrm{H}^{\alpha,\beta,\gamma}(m) := \mathrm{H}^\alpha(m) \cup \mathrm{H}^\beta(m) \cup \mathrm{H}^\gamma(m)$;

кроме того, мы пишем:

$\alpha =' \beta$, если $\alpha \in \{\beta, \beta'\}$;

$\alpha \in' B$, если $\alpha \in B$ или $\alpha' \in B$, и

$A =' B$, если $\alpha \in' B$ для всех $\alpha \in A$ и $\beta \in' A$ для всех $\beta \in B$ (знаки $='$ и $\in'$ можно прочесть как “квазиравно” и “квазипринадлежит” соответственно). Отрицание отношения $='$ обозначается через $\neq'$.

**Предложение 1.1** ([9, теорема 2.1.7, 2.1.8, 2.1.11, 2.3.15] или [10, утверждение 2.3, 4.12, 6.7]).

(1) $\mathrm{Cl}(S_n) = \{C_\alpha \mid \alpha \in P(n)\}$, $|\mathrm{Cl}(S_n)| = |P(n)|$.

(2) $\mathrm{Irr}(S_n) = \{\chi^\alpha \mid \alpha \in P(n)\}$, $|\mathrm{Irr}(S_n)| = |P(n)|$.

(3) $\chi^{(n)} = 1_{S_n}$ *(главный характер группы* $S_n$*),* $\chi^{(1^n)} = \xi$ *— знакопеременный характер* $S_n$ *(линейный характер с ядром* $A_n$*).*

(4) $\chi^{\alpha'} = \chi^\alpha \xi$ *для всех* $\alpha \in P(n)$ *(характеры* $\chi^\alpha$ *и* $\chi^{\alpha'}$ *называются ассоциированными).*

(5) $\chi^\alpha$ *исчезает на* $S_n \setminus A_n$*, если и только если* $\alpha = \alpha'$ $(\alpha \in P(n))$.

(6) *Неприводимые характеры группы* $S_n$ *принимают лишь целые значения.*

Если множество $\{1, \ldots, n\}$ является объединением двух непересекающихся подмножеств $\Gamma$ и $\Delta$, $g \in S_\Gamma$ и $d \in S_\Delta$, то через $g \times d$ обозначается элемент из $S_n$, ограничение которого на $\Gamma$ равно $g$, а ограничение на $\Delta$ равно $d$.

**Предложение 1.2** ([9, теорема 2.4.7] или [10, утверждение 21.1]). *Пусть* $\alpha \in P(n)$*,* $m \in \mathbb{N}$*,* $m \leq n$*,* $x$ *— произвольная перестановка элементов* $1, \ldots, n-m$*, и* $z$ *— циклическая перестановка остальных* $m$ *элементов* $n-m+1, \ldots, n$*. Тогда*

$$\chi^\alpha(z \times x) = \sum_{(i,j)\in[\alpha],\ h_{ij}^\alpha = m} (-1)^{l_{ij}} \chi^{\alpha^{ij}}(x),$$

*где* $l_{ij}$ *— длина ноги крюка* $H_{ij}^\alpha$ *(считается, что* $\chi^{()}(x) = 1$*, а пустая сумма равна нулю).*

**Предложение 1.3** [9, теорема 2.5.7]. *Пусть* $n > 1$*,* $P_1(n) := \{\alpha \in P(n) \mid \alpha \neq \alpha'\}$ *и* $P_2(n) := \{\alpha \in P(n) \mid \alpha = \alpha'\}$.

(1) *Если* $\alpha \in P_1(n)$*, то* $\chi^\alpha|_{A_n} = \chi^{\alpha'}|_{A_n} \in \mathrm{Irr}(A_n)$.

(2) *Если* $\alpha \in P_2(n)$*, то* $\chi^\alpha|_{A_n} = \chi_+^\alpha + \chi_-^\alpha$*, где* $\chi_+^\alpha$ *и* $\chi_-^\alpha$ *— различные характеры из* $\mathrm{Irr}(A_n)$*, сопряжённые в* $S_n$ *(какому из них приписать индекс плюс, а какому индекс минус, безразлично).*

(3) $\mathrm{Irr}(A_n) = I_1 \dot\cup I_2$*, где*

$I_1 = \{\chi^\alpha|_{A_n} \mid \alpha \in P_1(n)\}$, $|I_1| = \frac{1}{2}|P_1(n)|$, *и*

$I_2 = \{\chi_+^\alpha, \chi_-^\alpha \mid \alpha \in P_2(n)\}$, $|I_2| = 2|P_2(n)|$.

**Предложение 1.4** [9, утверждения 2.4.8, 2.4.9]. Пусть $\alpha \in P(n)$. Положим $h(\alpha) := \{h_{11}^\alpha, \ldots, h_{dd}^\alpha\}$, где $d = d(\alpha)$. Тогда

(1) $h(\alpha)$ есть наибольшее (относительно обычного словарного порядка $\leq$ ) из разбиений $\beta \in P(n)$ таких, что $\chi^\alpha(g_\beta) \neq 0$;

(2) $\chi^\alpha(g_{h(\alpha)}) = \pm 1$.

Далее нам потребуются также свойства разбиения $f(\alpha)$, введённого в статье [11]. Из определения 1 и теоремы 1 в [11] вытекает

**Предложение 1.5.** *Пусть* $\alpha \in P(n)$*,* $n \in \mathbb{N}$ *и* $\alpha \neq \alpha'$*. Тогда существует разбиение* $f(\alpha)$ *числа* $n$ *такое, что*

(1) $f(\alpha') = f(\alpha)$;

(2) $f(\alpha)$ *есть наибольшее из разбиений* $\beta$ *числа* $n$*, знак которых противоположен знаку* $h(\alpha)$ *и таких, что* $\chi^\alpha(g_\beta) \neq 0$;

(3) $\chi^\alpha(g_{f(\alpha)}) = \pm 1$.

## 2. Свойства разбиений $\alpha$ и $\beta$ из заключения гипотезы А

О п р е д е л е н и е 2.1. Пусть $m \in 2, 3$. *$m$-накрытием* разбиения $\Theta$ длины $l \geq 0$ называется разбиение

$$m.\Theta := (\,\Theta_1 + m + 1,\, \Theta_1 + 1,\, \Theta_2 + 1,\, \ldots,\, \Theta_l + 1,\, 1^m) \quad (m.() = (m + 1, 1^m)).$$

Положим $m^0.\Theta := \Theta$ и $m^k.\Theta := m.(m^{k-1}.\Theta)$ для натуральных $k$.

$[m.\Theta]$ =

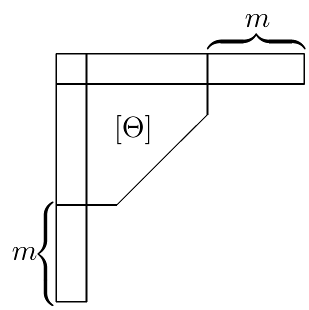



Рис. 2.1

Легко представить себе вид диаграмм $2^k.()$, $2^k.(1)$ и соответствующих им диаграмм $[\alpha]$ и $[\beta]$ из заключения гипотезы А. (В [4] эти диаграммы обозначались через $\Gamma_1(k)$ и $\Gamma_2(k+1)$ соответственно.) При $\gamma \in \{2^k.(), 2^k.(1)\}$ положим:

$$\gamma + (\widetilde{3}) := \begin{cases} 2^k.() + (0^k, 2, 1), & \text{если} \quad \gamma = 2^k.(), \\ 2^k.(1) + (0^k, 1, 2), & \text{если} \quad \gamma = 2^k.(1). \end{cases}$$

На рис. 2.2 и 2.3 изображены диаграммы разбиений $\alpha = \gamma + (3)$ и $\beta = \gamma + (\tilde{3})$ при $\gamma = 2^2.()$ и $\gamma = 2^2.(1)$ соответственно. Точками помечены их единственные косые крюки длины 3.

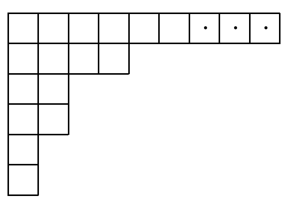
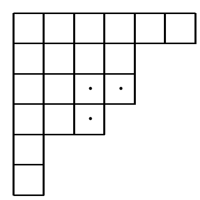
$[\alpha] = [2^2.() + (3)] =$  , $[\beta] = [2^2.() + (\widetilde{3})] =$ 

Рис. 2.2

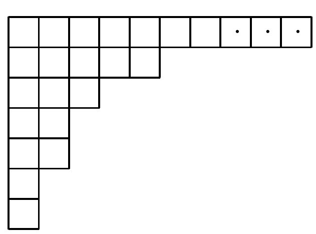
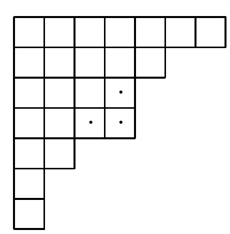
$[\alpha] = [2^2.(1) + (3)] =$  , $[\beta] = [2^2.(1) + (\widetilde{3})] =$ 

Рис. 2.3

О п р е д е л е н и е 2.2 [5]. Определим разбиения
$\Delta_l := (\,l,\, l-1,\, \ldots,\, 2, 1\,)$ при любом $l \in \mathbb{N}$ и
$\Sigma_l := (\,(2l)^2,\, (2l-2)^2,\, \ldots,\, 2^2\,)$ при любом $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $(\Sigma_0 = ())$.

Вид диаграмм $\Delta_l$ и $\Sigma_l$ ясен из рис. 2.4 и 2.5. Диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ из условий (1)–(3) гипотезы 4′ изображены на рис. 2.4–2.6 при $k = 0$; их единственные косые крюки длины 4 помечены точками.

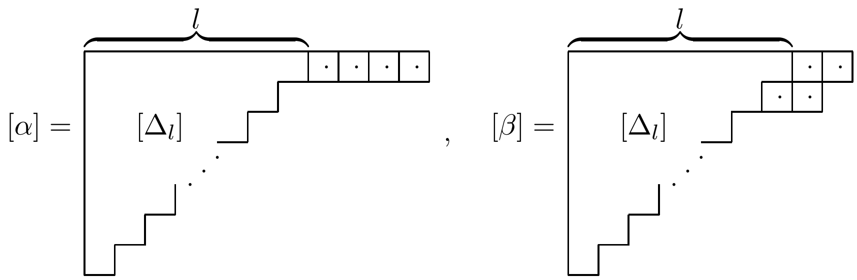


Рис. 2.4

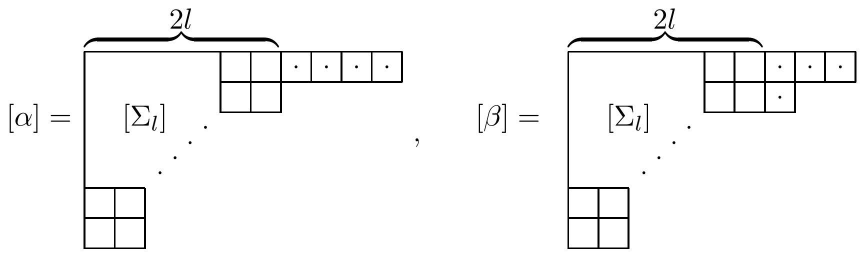


Рис. 2.5

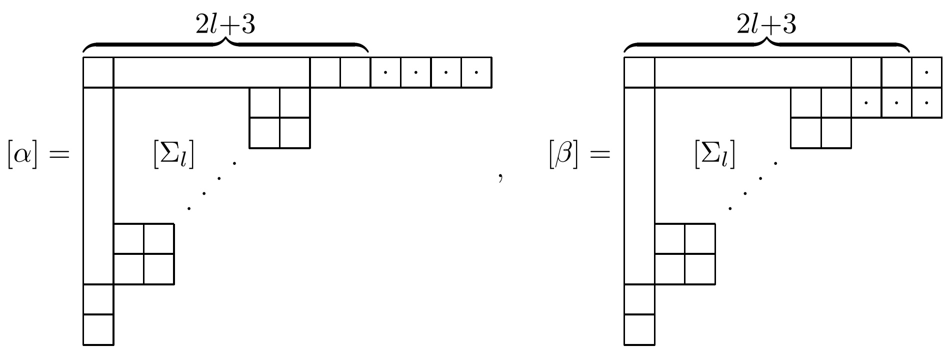


Рис. 2.6

Легко представить себе вид диаграмм $[\alpha]$ и $[\beta]$ и при $k > 0$. Для упрощения записей при $\gamma$, совпадающем с одним из разбиений $3^k.\Delta_l$, $3^k.\Sigma_l$ и $3^k.2.\Sigma_l$, положим:

$$\gamma + (\widetilde{4}) := \begin{cases} 3^k.\Delta_l + (0^k, 2, 2), & \text{если} \quad \gamma = 3^k.\Delta_l; \\ 3^k.\Sigma_l + (0^k, 3, 1), & \text{если} \quad \gamma = 3^k.\Sigma_l; \\ 3^k.2.\Sigma_l + (0^k, 1, 3), & \text{если} \quad \gamma = 3^k.2.\Sigma_l. \end{cases}$$

Очевидно, при таких $\gamma$ и $k > 0$

$$\beta^{11} = (3^k.\gamma + (\widetilde{4}))^{11} = 3^{k-1}.\gamma + (\widetilde{4}) \quad \text{и} \quad (3.\gamma + (\widetilde{4}))^{11} = \gamma + (\widetilde{4}). \tag{2.1}$$

**Предложение 2.1** [4, лемма 2.2]. *Пусть $\gamma$ — самоассоциированное разбиение некоторого целого неотрицательного числа. Равносильны условия:*

(1) *$\gamma$ не имеет крюков длины* 3;

(2) *$\gamma$ есть одно из разбиений $2^k.()$ и $2^k.(1)$ при некотором $k \geq 0$.*

**Предложение 2.2.** *Разбиения $2^k.()$ и $2^k.(1)$, где $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, не имеют крюков, длина которых делится на* 3.

Это непосредственно следует из леммы 2.1 в [4].

**Предложение 2.3** [4, следствие 2 леммы 2.2]. *Разбиения $\alpha$ и $\beta$ из условий* (1) *и* (2) *гипотезы* $3'$

(1) *имеют точно по одному крюку длины* 3;
(2) *не имеют крюков длины* $3t$ *при натуральных* $t \geq 2$.

**Предложение 2.4** [5, теорема 2.1]. *Пусть* $\gamma$ — *самоассоциированное разбиение некоторого числа. Равносильны условия*:
(1) $\gamma$ *не имеет крюков длины* 4;
(2) $\gamma$ *есть одно из разбиений* $3^k.\Delta_l$, $3^k.\Sigma_l$ *и* $3^k.2.\Sigma_l$ *при некоторых* $k, l$.

**Предложение 2.5** [5, следствие 3.1]. *Ни одно из разбиений* $3^k.\Delta_l$, $3^k.\Sigma_l$ *и* $3^k.2.\Sigma_l$ *при любых возможных* $k, l$ *не имеет крюков, длина которых делится на* 4.

**Предложение 2.6** [5, предложение 3.1]. *Пусть* $\alpha$ *и* $\beta$ — *разбиения какого-либо из условий* (1)–(3) *гипотезы* $4'$. *Тогда*
(1) $\alpha$ *и* $\beta$ *имеют точно по одному крюку длины* 4;
(2) $\alpha$ *и* $\beta$ *не имеют крюков длины* $4t$ *при натуральных* $t \geq 2$.

## 3. О диаграммах $[\alpha]$ и $[\beta]$ для характеров $\chi^\alpha$ и $\chi^\beta$, полупропорциональных на $S_n^\varepsilon$

Следующая теорема позволяет усилить некоторые ранние результаты о диаграммах, упомянутых в заголовке параграфа.

**Теорема 3.1.** *Пусть* $\chi^\alpha$ *и* $\chi^\beta$ — *неприводимые характеры группы* $S_n$, *полупропорциональные на* $S_n^\varepsilon$ $(\alpha, \beta \in P(n), \varepsilon = \pm 1)$. *Тогда*

$$\chi^\alpha(g) = \pm\chi^\beta(g) \quad \textit{для любого} \quad g \in S_n^\varepsilon \tag{3.1}$$

(*т. е.* $\chi^\alpha$ *и* $\chi^\beta$ *модульно равны на* $S_n^\varepsilon$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\varepsilon = 1$ это предложение доказано в [12, теорема 6.1].

Пусть $\varepsilon = -1$, т. е. $\chi^\alpha$ и $\chi^\beta$ полупропорциональны на $S := S_n \setminus A_n$. Тогда существуют подмножество $D$ в $S$ и различные ненулевые числа $u, v \in \mathbb{C}$ такие, что

$$\chi^\beta|_D = u\chi^\alpha|_D \quad \text{и} \quad \chi^\beta|_{S\setminus D} = v\chi^\alpha|_{S\setminus D}. \tag{3.2}$$

Положим $A := \sum_{x\in D} \chi^\alpha(x)^2$ и $B := \sum_{x\in S\setminus D} \chi^\alpha(x)^2$.

Так как $\chi^\alpha$ и $\chi^\beta$ не пропорциональны на $S$, то, как следует из пунктов (4) и (5) предложения 1.1 (а также из предложения 3.3 ниже),

$$\alpha \notin \{\beta, \beta'\}, \ \alpha \neq \alpha', \ \beta \neq \beta'.$$

Тогда согласно предложению 1.3 $\chi^\alpha|_{A_n}$ и $\chi^\beta|_{A_n}$ — различные неприводимые характеры группы $A_n$. Поэтому, применяя первое соотношение ортогональности [8, теорема 2A4] и учитывая, что характеры группы $S_n$ вещественнозначны по предложению 1.1(6), имеем:

$$0 = (\chi^\alpha, \chi^\beta)_{S_n} = \frac{1}{2}\,(\chi^\alpha|_{A_n}, \chi^\beta|_{A_n})_{A_n} + \frac{1}{n!}\left(\sum_{g\in D}\chi^\alpha(g)\chi^\beta(g) + \sum_{g\in S\setminus D}\chi^\alpha(g)\chi^\beta(g)\right) = \frac{1}{n!}\,(uA + vB).$$

Следовательно,

$$uA = -vB. \tag{3.3}$$

Далее, очевидно,

$$1 = (\chi^\alpha, \chi^\alpha)_{S_n} = \frac{1}{2}\,(\chi^\alpha|_{A_n}, \chi^\alpha|_{A_n})_{A_n} + \frac{1}{n!}\,(A+B),$$

т. е.

$$A + B = \frac{n!}{2}\,. \tag{3.4}$$

Отсюда и из (3.3) следует, что $A \neq 0$ и $B \neq 0$. Кроме того,

$$1 = (\chi^\beta, \chi^\beta)_{S_n} = \frac{1}{2}\,(\chi^\beta|_{A_n}, \chi^\beta|_{A_n})_{A_n} + \frac{1}{n!}\,(u^2A + v^2B),$$

т. е.

$$u^2A + v^2B = \frac{n!}{2}\,. \tag{3.5}$$

Из (3.4) и (3.5) следует, что

$$(u^2-1)A = -(v^2-1)B.$$

Отсюда и из (3.3) получаем $\dfrac{u^2-1}{u} = \dfrac{v^2-1}{v}$, т. е. $u - \dfrac{1}{u} = v - \dfrac{1}{v}$, откуда $u - v = \dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{v} = \dfrac{v-u}{uv}$ и, значит,

$$uv = -1. \tag{3.6}$$

Далее, поскольку $\chi^\alpha$ и $\chi^\beta$ имеют одно и то же множество корней на $S$, то согласно теореме A (или теореме 3.1) из [3] верно одно и только одно из следующих четырёх утверждений:

$$f(\alpha) = h(\beta) \ \text{ и } \ \operatorname{sign}(f(\alpha)) = \varepsilon, \qquad f(\alpha) = f(\beta) \ \text{ и } \ \operatorname{sign}(f(\alpha)) = \varepsilon,$$

$$h(\alpha) = h(\beta) \ \text{ и } \ \operatorname{sign}(h(\alpha)) = \varepsilon, \qquad h(\alpha) = f(\beta) \ \text{ и } \ \operatorname{sign}(h(\alpha)) = \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon = -1$, то отсюда следует, что

$$\text{существует нечётное } \ \delta \in \{h(\alpha), f(\alpha)\} \cap \{h(\beta), f(\beta)\}), \tag{3.7}$$

а именно, $\delta$ есть наибольшее нечётное разбиение числа $n$ такое, что $\chi^\alpha(g_\delta) \neq 0$ (равносильно, $\chi^\beta(g_\delta) \neq 0$). Из предложений 1.4 и 1.5 следует, что

$$|\chi^\alpha(g_{h(\alpha)})| = |\chi^\alpha(g_{f(\alpha)})| = |\chi^\beta(g_{h(\beta)})| = |\chi^\beta(g_{f(\beta)})| = 1. \tag{3.8}$$

Ввиду (3.7) и (3.8) для разбиения $\delta$ выполнены равенства

$$|\chi^\alpha(g_\delta)| = |\chi^\beta(g_\delta)| = 1. \tag{3.9}$$

Теперь из (3.2) и (3.9) следует, что

$$u = \chi^\beta(g_\delta)/\chi^\alpha(g_\delta) = \pm 1, \text{ если } g_\delta \in D, \ \text{ и } \ v = \chi^\beta(g_\delta)/\chi^\alpha(g_\delta) = \pm 1, \text{ если } g_\delta \in S \setminus D.$$

В любом случае ввиду (3.6) имеем $u = -v = \pm 1$. Отсюда и из (3.2) следует, что $\chi^\alpha(g) = \pm\chi^\beta(g)$ для любого $g \in S$, т. е. верно (3.1).

Теорема 3.1 доказана.

З а м е ч а н и е. Пусть $A$ и $B$ — числа, определённые в доказательстве теоремы 3.1. Из равенств (3.3), (3.4) и $u = -v$, очевидно, следует, что $A = B = \dfrac{n!}{4}$.

**Предложение 3.1.** *Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$ и $S := S_n^-$. Предположим, что существуют подмножество $D$ в $S$ и число $u \in \mathbb{C}$ такие, что*

$$\chi^\beta|_D = u\chi^\alpha|_D \ \text{ и } \ \chi^\beta(g) = 0 \ \text{ для всех } \ g \in S \setminus D.$$

*Тогда либо $\chi^\alpha$ и $\chi^\beta$ пропорциональны на $S$, либо $\beta = \beta'$ (т. е. $\chi^\beta(g) = 0$ для всех $g \in S$).*

Доказательство. Согласно условию предложения будет выполнено условие (3.2) из доказательства теоремы 3.1 при $v = 0$. Предположив, что $\chi^\alpha$ и $\chi^\beta$ не пропорциональны на $S$, мы можем повторить аргументы этого доказательства вплоть до равенства (3.3), т. е. получить равенство $A = 0$. Так как $A := \sum_{x\in D} \chi^\alpha(x)^2$, то отсюда следует, что $\chi^\alpha(x) = 0$ для всех $x \in D$. Отсюда и из условия предложения следует, что $\chi^\beta(g) = 0$ для всех $g \in S$, т. е. (см. предложение 1.1(5)) $\beta = \beta'$.

Предложение 3.1 доказано.

**Предложение 3.2** [1, теорема 1]. *Пусть $\chi^\alpha$ и $\chi^\beta$ — различные неприводимые характеры группы $S_n$ $(\alpha, \beta \in P(n))$. Равносильны условия*:

(1) *$\chi^\alpha$ и $\chi^\beta$ полупропорциональны,*

(2) *$\chi^\alpha$ и $\chi^\beta$ имеют одно и то же множество корней,*

(3) *$\alpha = \beta'$.*

**Следствие.** Неприводимые характеры $\chi^\alpha$ и $\chi^\beta$ группы $S_n$, полупропорциональные на $S_n^\varepsilon$ $(\alpha, \beta \in P(n),\ \varepsilon \in \{1, -1\})$, не могут быть одновременно полупропорциональными на $S_n^{-\varepsilon}$.

Действительно, в противном случае $\chi^\alpha$ и $\chi^\beta$ имели бы одно и то же множество корней и ввиду равносильности условий (2) и (3) предложения 3.2 и предложения 1.1(4) они были бы пропорциональными как на $S_n^\varepsilon$, так и на $S_n^{-\varepsilon}$.

**Предложение 3.3** [6, лемма 3.2]. *Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$ и $\varepsilon \in \{1, -1\}$. Равносильны условия*:

(1) *характеры $\chi^\alpha$ и $\chi^\beta$ пропорциональны на $S_n^\varepsilon$;*

(2) *выполнено по крайней мере одно из условий*:

(2а) *$\alpha =' \beta$;*

(2б) *$\varepsilon = -1$, $\alpha = \alpha'$ и $\beta = \beta'$.*

**Предложение 3.4.** *Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$ и $m$ — длина некоторого крюка из $[\alpha]$ или $[\beta]$. Положим $\delta := (-1)^{m+1}\varepsilon$.*

(1) *Если $\chi^\alpha \sim \chi^\beta$ на $S_n^\varepsilon$, то*

$$\sum_{H\in \mathrm{H}^\alpha(m)} (-1)^{l_H}\chi^{\alpha-H} \sim \sum_{K\in \mathrm{H}^\beta(m)} (-1)^{l_K}\chi^{\beta-K} \quad \text{на} \quad S^\delta_{n-m}.$$

(2) *Если $\chi^\alpha$ и $\chi^\beta$ полупропорциональны на $S_n^\varepsilon$, то*

$$\textstyle\sum_{H\in \mathrm{H}^\alpha(m)}(-1)^{l_H}\chi^{\alpha-H} \quad \text{и} \quad \sum_{K\in \mathrm{H}^\beta(m)}(-1)^{l_K}\chi^{\beta-K} \quad \text{модульно равны на} \quad S^\delta_{n-m}.$$

(Напомним, что пустая сумма считается равной нулю.)

Доказательство. Утверждение (1) — это лемма 3.3 из [6].

Пусть теперь $\chi^\alpha$ и $\chi^\beta$ полупропорциональны на $S_n^\varepsilon$. Тогда по теореме 3.1

$$|\chi^\alpha(g)| = |\chi^\beta(g)| \text{ для всех } g \in S_n^\varepsilon. \tag{3.10}$$

В частности, это равенство верно для всех элементов $g$ из $S_n^\varepsilon$ вида $g = z \times x$, где $x$ — произвольная перестановка элементов $1, \dots, n-m$ и $z$ — циклическая перестановка остальных $m$ элементов $n-m+1, \dots, n$. Поэтому согласно предложению 1.2 из (3.10) следует соотношение

$$\Big|\sum_{H\in \mathrm{H}^\alpha(m)} (-1)^{l_H}\chi^{\alpha-H}(x)\Big| = \Big|\sum_{K\in \mathrm{H}^\beta(m)} (-1)^{l_K}\chi^{\beta-K}(x)\Big| \ \text{ всякий раз, как } z \times x \in S_n^\varepsilon.$$

Очевидно, что $z \times x \in S_n^\varepsilon$, если и только если $\mathrm{sign}(x) = (-1)^{m+1}\varepsilon =: \delta$, т. е. если $x \in S^\delta_{n-m}$. Поэтому полученное выше соотношение равносильно заключению утверждения (2).

(Понятно, что чуть-чуть изменив приведённое доказательство, можно получить доказательство утверждения (1).)

Предложение 3.4 доказано.

**Предложение 3.5** [6, лемма 3.4]. *Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$ и $\chi^\alpha \sim \chi^\beta$ на $S_n^\varepsilon$, где $\varepsilon \in \{1, -1\}$. Предположим, что $[\alpha]$ имеет единственный крюк $H$ некоторой длины $m$, а $[\beta]$ не имеет крюков длины $m$. Тогда*

$$\alpha - H = (\alpha - H)' \quad \text{и} \quad \varepsilon = (-1)^m.$$

**Предложение 3.6**. *Пусть $\chi^\alpha$ и $\chi^\beta$ — неприводимые характеры группы $S_n$, полупропорциональные на $S_n^\varepsilon$ ($\alpha, \beta \in P(n)$). Предположим, что диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ имеют точно по одному крюку $H$ и $K$ соответственно некоторой длины $m$. Тогда*

$$\chi^{\alpha - H} \text{ и } \chi^{\beta - K} \text{ модульно равны на } S_{n-m}^\delta, \text{ где } \delta = (-1)^{m+1}\varepsilon$$

*(в частности, они пропорциональны или полупропорциональны на $S_{n-m}^\delta$).*

Доказательство. Утверждение непосредственно вытекает из предложений 3.3(2) и 1.2 (и является усилением леммы 3.6 из [6]).

**Предложение 3.7** [13, теорема]. *Пусть $\chi^\alpha \sim \chi^\beta$ на $S_n^\varepsilon$, где $\alpha, \beta \in P(n)$ и $\varepsilon \in \{1, -1\}$. Предположим, что $[\alpha]$ имеет хотя бы один крюк некоторой длины $m$, а $[\beta]$ не имеет крюков длины $m$. Тогда верно одно из утверждений:*

(1) *$\varepsilon = (-1)^m$, $\alpha$ имеет единственный крюк $H$ длины $m$ и разбиение $\alpha - H$ самоассоциировано;*

(2) *$\varepsilon = -1$, $\alpha = \alpha'$ и $\beta = \beta'$ (в частности, $\chi^\alpha$ и $\chi^\beta$ тождественно равны нулю на $S_n^\varepsilon$).*

Заметим, что в п. (2) $\chi^\alpha$ и $\chi^\beta$ не полупропорциональны на $S_n^\varepsilon$.

**Предложение 3.8.** *Пусть $A$ и $B$ — подмножества из $P(n)$, $m$ — длина крюка некоторого разбиения из $A \cup B$ и $\varepsilon \in \{1, -1\}$.*

(1) *Если $\sum\limits_{\alpha \in A} n_\alpha \chi^\alpha \sim \sum\limits_{\beta \in B} n_\beta \chi^\beta$ на $S_n^\varepsilon$, где $n_\alpha, n_\beta$ — целые числа, то*

$$\sum_{\alpha \in A} n_\alpha \sum_{H \in \mathrm{H}^\alpha(m)} (-1)^{l_H} \chi^{\alpha - H} \sim \sum_{\beta \in B} n_\beta \sum_{K \in \mathrm{H}^\beta(m)} (-1)^{l_K} \chi^{\beta - K} \text{ на } S_{n-m}^\delta, \text{ где } \delta = (-1)^{m+1}\varepsilon.$$

(2) *Утверждение (1) останется верным, если в нём знак $\sim$ заменить (оба раза) на “модульно равно”.*

Доказательство по существу повторяет аргументы доказательства предложения 3.4.

**Предложение 3.9.** *Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$, $\chi^\alpha \sim \chi^\beta$ на $S_n^\varepsilon$, где $\varepsilon \in \{1, -1\}$, и для некоторого натурального числа $m$ $\mathrm{H}^\alpha(m) = \{H_1, \ldots, H_r\}$, $r \geq 1$ и $\mathrm{H}^\beta(m) = \{K_1, \ldots, K_s\}$, $s \geq 1$. Предположим, что диаграмма $[\alpha - H_1]$ (мощности $n - m$) имеет единственный крюк $\widetilde{H}$ некоторой длины $l$, а диаграммы $[\alpha - H_i]$ при $2 \leq i \leq r$ и $[\beta - K_j]$ при $1 \leq j \leq s$ не имеют крюков длины $l$. Тогда*

$$\text{разбиение } (\alpha - H_1) - \widetilde{H} \text{ самоассоциировано и } \varepsilon = (-1)^{(m+l+1)}.$$

Доказательство. По предложению 3.4

$$\sum_{i=1}^{r} (-1)^{l_{H_i}} \chi^{\alpha - H_i} \sim \sum_{j=1}^{s} (-1)^{l_{K_j}} \chi^{\beta - K_j} \quad \text{на} \quad S_{n-m}^\delta, \quad \text{где} \quad \delta = (-1)^{m+1}\varepsilon.$$

Отсюда по предложению 3.8 получаем

$$\chi^{(\alpha-H_1)-\widetilde{H}} \sim 0 \ \text{ на } \ S^{\sigma}_{n-m-l}, \ \text{ где } \ \sigma=(-1)^{l+1}\delta=(-1)^{m+l}\varepsilon,$$

т. е. $\chi^{(\alpha-H_1)-\widetilde{H}}(g)$ для всех $g\in S^{\sigma}_{n-m-l}$. По предложению 1.1(5) отсюда следует, что $(\alpha-H_1)-\widetilde{H}$ самоассоциировано и $\sigma=-1$. Из последнего равенства следует, что $\varepsilon=(-1)^{(m+l+1)}$.

Предложение 3.9 доказано.

## 4. Некоторые подтверждения гипотезы А

**Предложение 4.1** [4, теорема]. *Пусть $\chi^\alpha$ и $\chi^\beta$ — неприводимые характеры группы $S_n$ $(\alpha,\beta\in P(n))$, полупропорциональные на $S^{\varepsilon}_n$ $(\varepsilon=\pm1)$. Если хотя бы одно из разбиений $\alpha$ и $\beta$ самоассоциировано, то выполнено заключение гипотезы $3'$ (а следовательно, и гипотезы $A$).*

Доказательство. Если самоассоциировано лишь одно из разбиений $\alpha$ и $\beta$, то по теореме из [4] должно быть выполнено заключение гипотезы $3'$.

Случай же, когда самоассоциированы оба разбиения $\alpha$ и $\beta$, противоречив. Действительно, в этом случае по предложению 1.1(5) $\chi^\alpha$ и $\chi^\beta$ принимают нулевые значения на $S^{-}_n$. Но тогда характеры $\chi^\alpha$ и $\chi^\beta$ оказываются полупропорциональными на всей группе $S_n$, а в этом случае по предложению 3.2 $\alpha=\beta'$ и тогда по предложению 1.1(4) $\chi^\alpha$ и $\chi^\beta$ пропорциональны, а не полупропорциональны на $S^{\varepsilon}_n$.

Предложение 4.1 доказано.

**Предложение 4.2.** *Пусть $\chi^\alpha$ и $\chi^\beta$ — неприводимые характеры группы $S_n$, полупропорциональные на $A_n$. Предположим, что $d(\alpha)\le 2$ и $d(\beta)\ge d(\alpha)$. Тогда справедливо заключение гипотезы $3'$, а именно, если $\gamma$ есть 3-ядро разбиений $\alpha$ и $\beta$, то верно одно из следующих утверждений*:

(1) $n=3,\quad \gamma=2^0.(),\quad \{\alpha,\beta\}=' \{(3),\ (2,1)\};$

(2) $n=4,\quad \gamma=2^0.(1),\quad \{\alpha,\beta\}=' \{(4),\ (2,2)\};$

(3) $n=8,\quad \gamma=2.(),\quad \{\alpha,\beta\}=' \{(6,1^2),\ (3,3,2)\};$

(4) $n=11,\quad \gamma=2.(1),\quad \{\alpha,\beta\}=' \{(7,2,1^2),\ (4,3^2,1)\};$

(5) $n=19,\quad \gamma=2^2.(),\quad \{\alpha,\beta\}=' \{(9,4,2^2,1^2),\ (6,4^2,3,1^2)\}.$

Доказательство. В случае, когда $d(\beta)\le 2$, результат вытекает из теоремы Б статьи [6], в которой, в частности, при $d(\alpha)\le 2$ и $d(\beta)\le 2$ описаны все пары $\alpha$ и $\beta$ такие, что характеры $\chi^\alpha$ и $\chi^\beta$ имеют одни и те же корни на $A_n$ (см. также замечание в конце статьи). Так получаются утверждения (1)—(3). В оставшемся случае из теоремы 1 статьи [7] получаем утверждения (4) и (5).

Предложение 4.2 доказано.

**Предложение 4.3.** *Пусть $\chi^\alpha$ и $\chi^\beta$ — неприводимые характеры группы $S_n$, полупропорциональные на $S_n\setminus A_n$. Предположим, что $d(\alpha)\le 2$ и $d(\beta)\ge d(\alpha)$. Тогда справедливо заключение гипотезы $4'$, а именно, если $\gamma$ есть 4-ядро разбиений $\alpha$ и $\beta$, то верно одно из следующих утверждений*:

(1) $n=4,\quad \gamma=\Sigma_0,\quad \{\alpha,\beta\}=' \{(4),\ (3,1)\};$

(2) $n=5,\quad \gamma=\Delta_1,\quad \{\alpha,\beta\}=' \{(5),\ (3,2)\};$

(3) $n=7,\quad \gamma=\Delta_2,\quad \{\alpha,\beta\}=' \{(6,1),\ (4,3)\};$

(4) $n=8,\quad \gamma=\Sigma_1,\quad \{\alpha,\beta\}=' \{(6,2),\ (5,3)\};$

$$
\begin{array}{rlll}
(5) & n = \ \ 9, & \gamma = 2.\Sigma_0, & \{\alpha,\beta\} =' \{(7,1^2),\ (4,4,1)\};\\
(6) & n = 10, & \gamma = \Delta_3, & \{\alpha,\beta\} =' \{(7,2.1),\ (5,4,1)\};\\
(7) & n = 11, & \gamma = 3.\Sigma_0, & \{\alpha,\beta\} =' \{(8,1^3),\ (4,4,2,1)\};\\
(8) & n = 14, & \gamma = \Delta_4, & \{\alpha,\beta\} =' \{(8,3,2,1),\ (6,5,2,1)\};\\
(9) & n = 16, & \gamma = \Sigma_3, & \{\alpha,\beta\} =' \{(8,4,2^2),\ (7,5,2^2)\};\\
(10) & n = 14, & \gamma = 3.\Delta_1, & \{\alpha,\beta\} =' \{(9,2,1^3),\ (5,4,3,1^2)\};\\
(11) & n = 18, & \gamma = 3.\Delta_2, & \{\alpha,\beta\} =' \{(10,3,2,1^3),\ (6,5,4,1^3)\};\\
(12) & n = 22, & \gamma = 3.2.\Sigma_0, & \{\alpha,\beta\} =' \{(11,4,2^2,1^3),\ (7,5^2,2,1^3)\};\\
(13) & n = 26, & \gamma = 3^2.\Sigma_0, & \{\alpha,\beta\} =' \{(12,5,2^3,1^3),\ (8,5^2,3,2,1^3)\}.
\end{array}
$$

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из теоремы Б статьи [6] и теоремы 1 статьи [7].

## 5. Доказательство теоремы А1

По условию теоремы А1 $\chi^\alpha$ полупропорционально $\chi^\beta$ на $S_n^\varepsilon$, где $\varepsilon = \pm 1$, выполнено свойство А и

$$h_{11}^\alpha = h_{11}^\beta. \tag{5.1}$$

Будем предполагать, что утверждение теоремы А1 неверно. Тогда согласно предложению 4.1 имеем

$$\alpha \neq \alpha' \text{ и } \beta \neq \beta'. \tag{5.2}$$

Ввиду (5.1) будет $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(h_{11}^\alpha) = \{H_{11}^\alpha, H_{11}^\beta\}$, и тогда согласно предложению 3.6 характеры $\chi^{\alpha^{11}}$ и $\chi^{\beta^{11}}$ пропорциональны или полупропорциональны на $S_{n-h_{11}^\alpha}^\delta$, где $\delta = (-1)^{h_{11}^\alpha+1}\varepsilon$.

Если $\chi^{\alpha^{11}}$ и $\chi^{\beta^{11}}$ полупропорциональны на $S_{n-h_{11}^\alpha}^\delta$, то согласно условию А заключение теоремы А1 выполнено. Поэтому можно предполагать, что $\chi^{\alpha^{11}}$ и $\chi^{\beta^{11}}$ пропорциональны на $S_{n-h_{11}^\alpha}^\delta$. Тогда согласно предложению 3.3 выполнено по крайней мере одно из условий:

(А) $\alpha^{11} =' \beta^{11}$;

(Б) $\delta = -1$ (т. е. $\varepsilon = (-1)^{h_{11}^\alpha}$), $\alpha^{11} = (\alpha^{11})'$ и $\beta^{11} = (\beta^{11})'$.

Рассмотрим эти возможности в следующих случаях А и Б. В каждом из них мы придём к противоречию и тем самым теорема А1 будет доказана.

**Случай А.** Пусть $\alpha^{11} =' \beta^{11}$.

Поскольку мы можем заменить $\beta$ на $\beta'$, то можно считать, что $\gamma := \alpha^{11} = \beta^{11}$. Диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ в этом случае имеют вид, изображённый на рис. 5.1, где $\{a,b,c,d\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$, $s = \gamma_1$ и $t = \gamma'{}_1$ (наклонная линия заменяет некоторую ступенчатую линию).

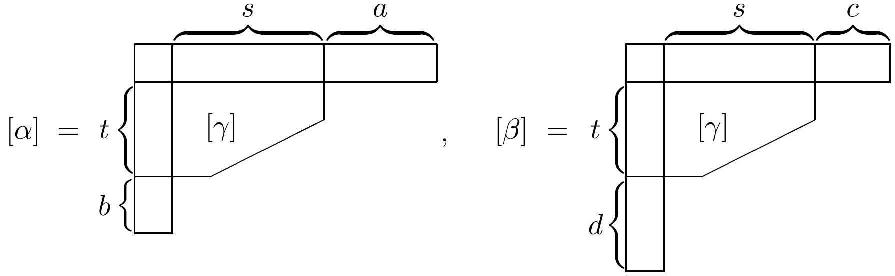



Рис. 5.1

Здесь $h_{11}^\alpha = 1 + t + s + a + b$, $h_{11}^\beta = 1 + t + s + c + d$ и, следовательно, по (5.1)

$$a + b = c + d, \quad a \neq c, \quad b \neq d. \tag{5.3}$$

Согласно предложениям 4.2 и 4.3

$$d(\gamma) \geq 2 \ \text{ и, в частности, } \ s \geq 2, \ t \geq 2. \tag{5.4}$$

Пусть, без ограничения общности,

$$a = \max\{a, b, c, d\} \ \ (\text{и тогда } \ b = \min\{a, b, c, d\}).$$

Так как $\alpha \neq \beta$, то

$$a > b, \ a > c, \ b < d, \ a \geq d, \ b \leq c. \tag{5.5}$$

Подсчитаем длины крюков $H^\alpha_{12}$ и $H^\alpha_{21}$ (среди которых должен быть второй по длине крюк в $[\alpha]$) и крюков $H^\beta_{12}$ и $H^\beta_{21}$ (среди которых должен быть второй по длине крюк в $[\beta]$). Имеем

$$\begin{aligned} h^\alpha_{12} &= t + s + a, \qquad & h^\beta_{12} &= t + s + c, \\ h^\alpha_{21} &= t + s + b, \qquad & h^\beta_{21} &= t + s + d. \end{aligned}$$

Следовательно, по (5.5)

$$h^\alpha_{12} > h^\alpha_{21}, \ h^\alpha_{12} > h^\beta_{12} \ \text{ и } \ h^\alpha_{12} \geq h^\beta_{21}. \tag{5.6}$$

Возможны два подслучая.

**Случай A1.** Пусть $a = d$ (и, следовательно, $b = c$). Положим $m := h^\alpha_{12}$ $(= h^\beta_{21})$.

Тогда $H^\alpha_{12}$ и $H^\beta_{21}$ — единственные крюки длины $m$ в $[\alpha]$ и $[\beta]$ соответственно и согласно предложению 3.6 характеры $\chi^{\alpha^{12}}$ и $\chi^{\beta^{21}}$ пропорциональны или полупропорциональны на $S^\sigma_{n-m}$, где $\sigma = (-1)^{m+1}\varepsilon$. При этом, как видно из рис. 5.1,

$$\alpha^{12} = \gamma * (1^{b+1}) \ \text{ и } \ \beta^{21} = \gamma + (b + 1). \tag{5.7}$$

Предположим, что $\chi^{\alpha^{12}}$ и $\chi^{\beta^{21}}$ пропорциональны на $S^\sigma_{n-m}$. Тогда по предложению 3.2 выполнено по крайней мере одно из условий:

(а) $\alpha^{12} =' \beta^{21}$;

(б) $\sigma = -1$, $\alpha^{12} = (\alpha^{12})'$ и $\beta^{21} = (\beta^{21})'$.

Если выполнено условие (а), то, как видно из (5.7), должно быть $\gamma = \gamma'$. Но в этом случае $\beta = \alpha'$ в противоречие с условием теоремы. Очевидно, что условие (б) также противоречит (5.7). Следовательно,

$$\chi^{\alpha^{12}} \text{ и } \chi^{\beta^{21}} \text{ полупропорциональны на } S^\sigma_{n-m}, \text{ где } \sigma = (-1)^{m+1}\varepsilon.$$

Поскольку $n - m < n$, то по свойству A выполнено одно из утверждений (1) и (2) гипотезы A с $(\alpha^{12}, \beta^{21}, \sigma)$ на месте $(\alpha, \beta, \varepsilon)$. В частности, в любом из этих случаев (см. рис. 2.2–2.6) должно быть выполнено условие $h^{\alpha^{12}}_{11} \neq h^{\beta^{21}}_{11}$. Однако это противоречит условию (5.7).

Итак, случай A1 невозможен.

**Случай A2.** Пусть $a > d$ (следовательно, $b < c$ и $b < d$).

В рассматриваемом случае $h^\beta_{21} < h^\alpha_{12}$. Отсюда и из (5.6) следует, что $[\beta]$ не имеет крюков длины $h^\alpha_{12}$, а $[\alpha]$ имеет точно один крюк такой длины. Тогда по лемме 3.4

$$\varepsilon = (-1)^{h^\alpha_{12}} \tag{5.8}$$

и разбиение $\alpha^{12}$ самоассоциировано. Так как $\alpha^{12} = \gamma * (1^{b+1})$ по (5.7), то $s = t + b + 1$, $H^\gamma_{11} = (t + b + 1, 1^{t-1})$ и $\gamma^{11} = (\gamma^{11})' =: \mu$. Таким образом, диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ в этом случае имеют вид, изображённый на рис. 5.2.

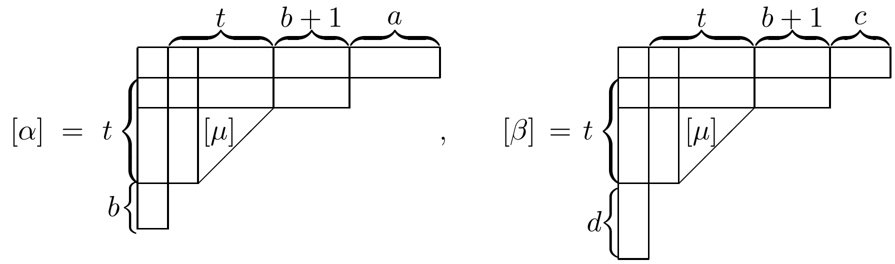



Рис. 5.2

Подсчитаем длины нескольких крюков, которые будут фигурировать в следующих рассуждениях.

$$
\begin{aligned}
h^\alpha_{12} &= 1 + 2t + b + a, & h^\beta_{12} &= 1 + 2t + b + c,\\
h^\alpha_{21} &= 1 + 2t + b + b, & h^\beta_{21} &= 1 + 2t + b + d,\\
h^\alpha_{13} &= 1 + \mu_1 + t + b + a, & h^\beta_{13} &= 1 + \mu_1 + t + b + c,\\
h^\alpha_{31} &= \mu_1 + t + b, & h^\beta_{31} &= \mu_1 + t + d,\\
h^\alpha_{22} &= 2t + b, & h^\beta_{22} &= 2t + b.
\end{aligned}
$$

Этот список нужно иметь в виду, когда далее в случае А2 будут устанавливаться какие-либо соотношения между длинами крюков.

Так как $\varepsilon = (-1)^{h^\alpha_{12}}$ по (5.8), то отсюда и из (5.3) следует, что

$$\varepsilon = (-1)^{1+a+b} = (-1)^{1+c+d}. \tag{5.9}$$

Пусть $w := \max\{c, d\}$ и $h^\beta := \max\{h^\beta_{12}, h^\beta_{21}\}$ $(= 1 + 2t + b + w)$. Тогда, очевидно,

$$\mathrm{H}^\beta(h^\beta) \subseteq \{H^\beta_{12}, H^\beta_{21}\}. \tag{5.10}$$

Если предположить, что $[\alpha]$ не имеет крюков длины $1 + 2t + b + w$, то по предложению 3.7 либо одно из разбиений $\beta^{12}$ и $\beta^{21}$ (имеющее длину $h^\beta$) должно быть самоассоциировано, либо $\varepsilon = -1$, $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$. Очевидно, оба случая противоречивы: см. рис. 5.3 и (5.2).

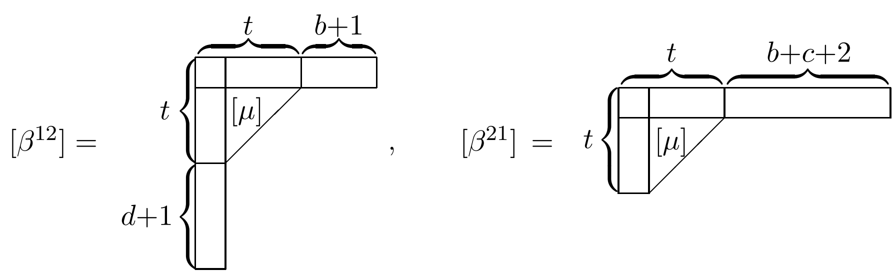



Рис. 5.3

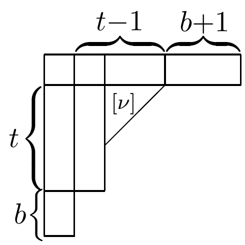
Следовательно,

$$[\alpha] \text{ имеет крюк } H^\alpha \text{ длины } h^\beta = 1 + 2t + b + w.$$

Так как $h^\alpha_{21} < h^\beta < h^\alpha_{12}$, то $H^\alpha = H^\alpha_{1j}$ для некоторого $j \geq 3$ и поэтому $h^\beta \leq h^\alpha_{13}$. Но тогда $h^\alpha_{21} < h^\alpha_{13} < h^\alpha_{12}$ и, следовательно,

$$H^\alpha_{13} \text{ — единственный крюк длины } h^\alpha_{13} \text{ в } [\alpha]. \tag{5.11}$$

Если $h^\beta < h^\alpha_{13}$, то $[\beta]$ не имеет крюков длины $h^\alpha_{13}$, в то время как по (5.11) $[\alpha]$ имеет единственный крюк такой длины. По предложению 3.5 разбиение $\alpha^{13}$ самоассоциировано. Но это противоречиво, так как (см. рис. 5.4 ) $(\alpha^{13})_2 \leq t$ и $(\alpha^{13})'_2 = t + 1$.

$[\alpha^{13}] =$ 

$(\nu = (), \text{ если } \mu = (1))$

Рис. 5.4

(На рис. 5.4 треугольник изображает диаграмму $[\nu]$, полученную из диаграммы $[\mu]$ выбрасыванием 1-го столбца.)

Следовательно,

$$h^\beta = h^\alpha_{13} \ \text{ и } \ H^\alpha = H^\alpha_{13}. \tag{5.12}$$

**A2.1.** Предположим, что $c \neq d$. Пусть $H^\beta$ — тот из крюков $H^\beta_{12}$ и $H^\beta_{21}$, который имеет длину $h^\beta$. Тогда, очевидно,

$$H^\beta \text{ — единственный крюк длины } h^\beta \text{ в } [\beta]. \tag{5.13}$$

Из (5.11)–(5.13) следует, что $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(h^\beta) = \{H^\alpha_{13}, H^\beta\}$, и по предложению 3.6

$$\chi^{\alpha^{13}} \text{ и } \chi^{\beta - H^\beta} \text{ пропорциональны или полупропорциональны на } S^\sigma_{n-h^\beta},$$

где $\sigma = (-1)^{h^\beta+1}\varepsilon$. Диаграмма $[\alpha^{13}]$ изображена на рис. 5.4, а диаграмма $[\beta - H^\beta]$ есть одна из диаграмм рис. 5.3.

Если $\chi^{\alpha^{13}}$ и $\chi^{\beta-H^\beta}$ пропорциональны на $S^\sigma_{n-h^\beta}$, то по предложению 3.3 должно быть либо $\alpha^{13} =' \beta - H^\beta$, либо разбиения $\alpha^{13}$ и $\beta - H^\beta$ оба самоассоциированы. Но из сравнения рис. 5.3 и 5.4 видно,что ни одно из этих условий не может быть выполнено ($(\alpha^{13})^{11}$ не самоассоциировано). Следовательно,

$$\text{характеры } \chi^{\alpha^{13}} \text{ и } \chi^{\beta-H^\beta} \text{ полупропорциональны на } S^\sigma_{n-h^\beta}.$$

Тогда по условию A для $(\alpha^{13}, \beta - H^\beta, \sigma)$ выполнено одно из утверждений (1) и (2) гипотезы A на месте $(\alpha, \beta, \varepsilon)$.

Утверждение (1), однако, не может быть выполнено, поскольку разбиение $(\alpha^{13})^{11}$ не является самоассоциированным, в то время, как $(\gamma + (3))^{11}$ и $(\gamma + (\tilde{3}))^{11}$ самоассоциированы при любом $\gamma \in \{2^k.(), 2^k.(1) \mid k \geq 0\}$.

Пусть для $(\alpha^{13}, \beta - H^\beta, \sigma)$ верно утверждение (2) теоремы. Тогда $\{\alpha^{13}, \beta - H^\beta\} =' \{\Theta + (4), \Theta + (\widetilde{4})\}$, где $\Theta$ есть $3^k.\Delta_l$, $3^k.\Sigma_l$ или $3^k.2.\Sigma_l$ при подходящих $k, l$. Так как $(\Theta + (4))^{11} = \Theta^{11}$ самоассоциировано, а $(\Theta + (\widetilde{4}))^{11}$ не самоассоциировано, то

$$(\alpha^{13})' = \Theta + (\widetilde{4}) \ \text{ и } \ \beta - H^\beta =' \Theta + (4).$$

Поскольку крюк $H^{\alpha^{13}}_{11}$ самоассоциирован, а крюк $H^{\alpha^{13}}_{22}$ не самоассоциирован (см. рис. 5.3), то $\Theta$ есть $3.\Delta_l$, $3.\Sigma_l$ или $3.2.\Sigma_l$ при подходящих $l$, что видно из рис. 2.1 и 2.4—2.6. Из этих же рисунков видно (см. также второе равенство в (2.1)), что при таких $\Theta$ разбиение $((\Theta + (\widetilde{4}))^{11})^{11}$ не самоассоциировано. Но это противоречиво, так как $((\alpha^{13})^{11})^{11} = \mu^{11}$. Таким образом, случай A2.1 ($c \neq d$) противоречив.

**A2.2.** Пусть $c = d$. Тогда $\varepsilon = -1$ по (5.9) и ввиду (5.10)—(5.12)

$$\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(h^\beta) = \{H^\alpha_{13}, H^\beta_{12}, H^\beta_{21}\}. \tag{5.14}$$

Так как $h^\alpha_{13} = h^\beta_{12}$, то $\mu_1 + c = t + b$. Имея в виду это равенство и (5.3), положим

$$u := t - \mu_1 = a - c = c - b \ \ (1 \leq u \leq t - 1). \tag{5.15}$$

К равенству (5.14) мы вернёмся позже, а предварительно установим некоторые соотношения между параметрами $t, b, u, \mu_2$. Расширим предыдущую таблицу длин крюков, используя при этом (5.15).

$$
\begin{array}{ll}
h^\alpha_{12} = 2t + 2b + 2u + 1, & h^\beta_{12} = 2t + 2b + u + 1, \\
h^\alpha_{13} = 2t + 2b + u + 1, & h^\beta_{13} = 2t + 2b + 1, \\
h^\alpha_{14} = t + \mu_2 + 2b + 2u, & h^\beta_{14} = t + \mu_2 + 2b + u, \\
h^\alpha_{21} = 2t + 2b + 1, & h^\beta_{21} = 2t + 2b + u + 1, \\
h^\alpha_{31} = 2t + b - u, & h^\beta_{31} = 2t + b, \\
h^\alpha_{41} = t + \mu_2 + b - 1 \text{ при } t \geq 3, & h^\beta_{41} = t + \mu_2 + b + u - 1 \text{ при } t \geq 3, \\
h^\alpha_{41} = b \text{ при } t = 2, & h^\beta_{41} = b + u \text{ при } t = 2, \\
h^\alpha_{22} = 2t + b, & h^\beta_{22} = 2t + b.
\end{array}
$$

Из этого списка видно, что $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2t+2b+1)$ равно $\{H^\alpha_{21}, H^\beta_{13}\}$ или $\{H^\alpha_{1j}, H^\alpha_{21}, H^\beta_{13}\}$ при некотором $j \geq 4$ ($h^\beta_{41} \leq t + \mu_1 + b + u - 1 = 2t + b - 1 \leq h^\beta_{13}$).

Предположим сначала, что $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2t + 2b + 1) = \{H^\alpha_{21}, H^\beta_{13}\}$. Тогда по предложению 3.5

$$\chi^{\alpha^{21}} \text{ и } \chi^{\beta^{13}} \text{ пропорциональны или полупропорциональны на } S^\delta_{n-f},$$

где $f = 2t+2b+1$ и $\delta = (-1)^{f+1}\varepsilon = \varepsilon = -1$. Если $\chi^{\alpha^{21}}$ и $\chi^{\beta^{13}}$ пропорциональны на $S^-_{n-f}$, то по предложению 3.3 либо $\alpha^{21} =' \beta^{13}$, либо разбиения $\alpha^{21}$ и $\beta^{13}$ оба самоассоциированы. Однако ни то, ни другое неверно, что видно из рис. 5.5.

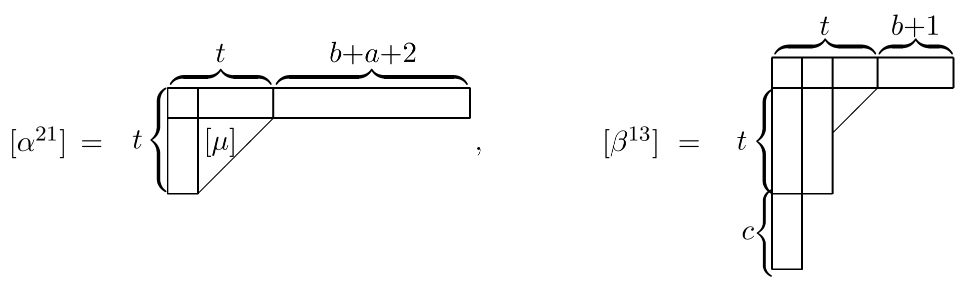



Рис. 5.5

Поэтому $\chi^{\alpha^{21}}$ и $\chi^{\beta^{13}}$ полупропорциональны на $S^-_{n-f}$. Тогда по свойству A имеем $\{\alpha^{21}, (\beta^{13})'\} = \{\Theta+(4), \Theta+(\widetilde{4})\}$, где $\Theta$ — одно из разбиений $3^k.\Delta_l$, $3^k.\Sigma_l$ и $3^k.2.\Sigma_l$ при некоторых $l, k$. Поэтому должно быть $\Theta_1 = {\alpha^{21}}_1 = {(\beta^{13})'}_1$, т. е. $t = t + b + 1$, что противоречиво.

Следовательно, $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2t + 2b + 1) = \{H^\alpha_{1j}, H^\alpha_{21}, H^\beta_{13}\}$ при некотором $j \geq 4$. Если $j > 4$, то $h^\alpha_{14} > h^\alpha_{21} = h^\beta_{13} = 2t + 2b + 1 = h^\beta_{31}$. $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(h^\alpha_{14}) = \{H^\alpha_{14}\}$, и по предложению 3.5 должно быть $\alpha^{14} = (\alpha^{14})'$, что противоречиво. Поэтому $j = 4$,

$$\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2t + 2b + 1) = \{H^\alpha_{14}, H^\alpha_{21}, H^\beta_{13}\}$$

и $2t + 2b + 1 = h^\alpha_{14} = t + \mu_2 + 2b + 2u$, откуда

$$\mu_2 = t + 1 - 2u. \tag{5.16}$$

Поскольку при $t = 2$ должно быть $\mu_2 = 0$ (см. рис. 5.2) и поэтому равенство (5.16) противоречиво, то

$$t \geq 3. \tag{5.17}$$

Тогда

$$h^{\alpha}_{14} = 2t + 2b + 1, \qquad h^{\beta}_{14} = 2t + 2b + 1 - u,$$
$$h^{\alpha}_{41} = 2t + b - 2u, \qquad h^{\beta}_{41} = 2t + b - u.$$

Так как число $h^{\beta}_{14} = 2t + 2b + 1 - u$ меньше, чем $h^{\beta}_{21}$ и больше каждого из чисел $h^{\beta}_{23} = t+\mu_1+b = 2t+b-u$, $h^{\beta}_{32} = t+\mu_1-1 = 2t-u-1$ и $h^{\beta}_{41} = 2t+b-u$, то верно одно из следующих условий:

(а) $h^{\beta}_{14} \neq 2t + b$ и $\mathrm{H}^{\beta}(h^{\beta}_{14}) = \{H^{\beta}_{14}\}$,

(б) $h^{\beta}_{14} = 2t + b$ и $\mathrm{H}^{\beta}(h^{\beta}_{14}) = \{H^{\beta}_{14}, H^{\beta}_{22}, H^{\beta}_{31}\}$.

Предположим, что верно условие (а). Так как $\beta^{14} \neq (\beta^{14})'$ ($[\beta^{14}]$ получается из $[\beta^{13}]$ удлинением третьего столбца; см. рис. 5.5), то по предложению 3.4

$$[\alpha] \text{ имеет крюк } H^{\alpha} \text{ длины } h^{\beta}_{14}.$$

Так как число $|H^{\alpha}| = h^{\beta}_{14} = 2t + 2b + 1 - u$ меньше, чем $h^{\alpha}_{21} = h^{\alpha}_{14}$, больше, чем $h^{\alpha}_{23} = h^{\alpha}_{31} = 2t + b - u$ и не равно $2t + b$, то $H^{\alpha} = \{H^{\alpha}_{1j}\}$ при некотором $j \geq 5$. Таким образом, $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2t + 2b + 1 - u) = \{H^{\alpha}_{1j}, H^{\beta}_{14}\}$ $(j \geq 5)$, и по предложению 3.6

$$\chi^{\alpha^{1j}} \text{ и } \chi^{\beta^{14}} \text{ пропорциональны или полупропорциональны на } S^{\delta}_{n-f},$$

где $f = 2t + 2b + 1 - u$ и $\delta = (-1)^{f+1}\varepsilon = (-1)^{u+1}$.

Если $\chi^{\alpha^{1j}}$ и $\chi^{\beta^{14}}$ пропорциональны на $S^{\delta}_{n-f}$, то по предложению 3.3 либо $\alpha^{1j} =' \beta^{14}$, либо разбиения $\alpha^{1j}$ и $\beta^{14}$ оба самоассоциированы. Очевидно, $\beta^{14} \neq (\beta^{14})'$. Если же $\beta^{14} \neq' \alpha^{1j}$, то должно быть $(\beta^{14})^{11} =' (\alpha^{1j})^{11}$, т. е. $\gamma^{13} =' \gamma^{1,j-1}$ ($\gamma = \alpha^{11} = \beta^{11}$), что невозможно, так как $j > 4$ ($|[\gamma^{13}]| < |[\gamma^{1,j-1}]|$).

Следовательно, $\chi^{\alpha^{1j}}$ и $\chi^{\beta^{14}}$ полупропорциональны на $S^{\delta}_{n-f}$, и по свойству A для $(\alpha^{1j}, \beta^{14}, \delta)$ выполнено одно из утверждений (1) и (2) гипотезы A на месте $(\alpha, \beta, \varepsilon)$.

Пусть выполнено утверждение (1), т. е. $\{\alpha^{1j}, \beta^{14}\} =' \{\Gamma + (3), \Gamma + \widetilde{(3)}\}$, где $\Gamma$ есть одно из разбиений $2^m.()$ и $2^m.(1)$. Но это противоречиво, поскольку $(\Gamma + (3))^{11}$ и $(\Gamma + \widetilde{(3)})^{11}$ самоассоциированы при любом $m$, а разбиение $(\beta^{14})^{11}$ таковым не является (легко увидеть, что $(\beta^{1i})^{11} = ((\beta^{1i})^{11})' \iff i \in \{2, t+2\}$, но $t \geq 3$ по (5.17)).

Поэтому выполнено утверждение (2) гипотезы A, т. е. $\{\alpha^{1j}, \beta^{14}\} =' \{\Theta + (4), \Theta + \widetilde{(4)}\}$, где $\Theta$ есть одно из разбиений $3^k.\Delta_l$, $3^k.\Sigma_l$ и $3^k.2.\Sigma_l$. Поскольку (как уже отмечалось в предыдущем абзаце) разбиение $(\beta^{14})^{11}$ не является самоассоциированным, а из разбиений $(\Theta + (4))^{11}$ и $(\Theta + \widetilde{(4)})^{11}$ точно одно (второе) не самоассоциировано (см. рис. 2.4–2.6 и (2.1)), то должно быть $(\beta^{14}) =' \Theta + \widetilde{(4)}$, $\alpha^{1j} =' \Theta + (4)$ и разбиение $(\alpha^{1j})^{11}$ самоассоциировано. Как видно из рис. 5.2, последнее условие может быть выполнено только при $t = t + 2$, а в этом случае само разбиение $\alpha^{1j}$ является самоассоциированным. Таким образом, условие (а) противоречиво.

Следовательно, верно условие (б), т. е. $h^{\beta}_{14} = 2t + b$. Тогда $2t + 2b + 1 - u = 2t + b$, откуда

$$b = u - 1. \tag{5.18}$$

Равенства (5.15), (5.16) и (5.18) позволяют выразить числа $a, b, c, \mu_1, \mu_2$ через $t$ и $u$:

$$a = 3u - 1,\ c = 2u - 1,\ b = u - 1,\ \mu_1 = t - u,\ \mu_2 = t + 1 - 2u.$$

Далее мы будем выражать через $t$ и $u$ длины всех интересующих нас крюков.

Теперь мы вернёмся к равенству (5.14): $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(h^{\beta}) = \{H^{\alpha}_{13}, H^{\beta}_{12}, H^{\beta}_{21}\}$.

Отсюда согласно предложению 3.3, учитывая, что $l_{H^{\beta}_{12}} = t$ и $l_{H^{\beta}_{21}} = t + c - 1 = t + 2u - 2$, получаем:

$$\chi^{\alpha^{13}} \text{ и } \chi^{\beta^{12}} + \chi^{\beta^{21}} \text{ модульно равны на } S^{\delta}_{n-h}, \tag{5.19}$$

где $h = h_{13}^{\alpha} = 2t + 3u - 1$ и $\delta = (-1)^{h+1}\varepsilon = (-1)^{u+1}$. Вычислим длины некоторых крюков диаграмм $[\alpha^{13}]$, $[\beta^{12}]$ и $[\beta^{21}]$; см. рис. 5.3 и 5.4 (на которых $b+1 = u$, $d+1 = 2u$ и $b+c+2 = 3u$):

$$\begin{aligned} h_{12}^{\alpha^{13}} &= 2t + u - 1, & h_{21}^{\alpha^{13}} &= \mu_1 + t + u - 1 = 2t - 1,\\ h_{12}^{\beta^{12}} &= \mu_1 + t + u - 1 = 2t - 1, & h_{21}^{\beta^{12}} &= \mu_1 + t + 2u - 1 = 2t + u - 1,\\ h_{13}^{\beta^{21}} &= \mu_2 + t + 3u - 2 = 2t + u - 1, & h_{21}^{\beta^{21}} &= \mu_1 + t - 1 = 2t - u - 1. \end{aligned}$$

Из этих равенств следует, что

$$\mathrm{H}^{\alpha^{13}\beta^{12}\beta^{21}}(2t + u + 1) = \{H_{12}^{\alpha^{13}}, H_{21}^{\beta^{12}}, H_{13}^{\beta^{21}}\}. \tag{5.20}$$

Далее находим $l_{H_{21}^{\beta^{12}}} = t - 2 + 2u$ и $l_{H_{13}^{\beta^{21}}} = \mu_2 = t + 1 - 2u$. Отсюда, из (5.19) и (5.20) согласно предложению 3.8 получаем:

$$\chi^{(\alpha^{13})^{12}} \text{ и } -\chi^{(\beta^{12})^{21}} + \chi^{(\beta^{21})^{13}} \text{ модульно равны на } S_k^{\sigma}, \tag{5.21}$$

где $k = n - h - f$, $f = 2t + u - 1$ и $\sigma = (-1)^{f+1}\delta = -1$. Диаграммы участвующих здесь разбиений изобразим на рис. 5.6 (длина второго столбца в $[(\beta^{21})^{13}]$ равна $\mu_1 + 1 = t - u + 1$).

$[((\alpha^{13})^{12})'] = [(\beta^{12})^{21}] =$ , $[(\beta^{21})^{13}] =$

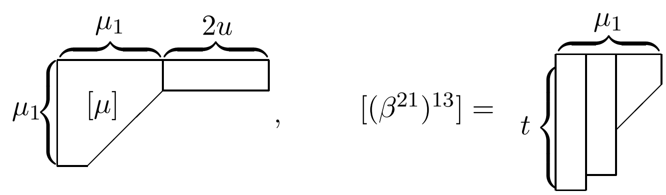



Рис. 5.6

Так как $((\alpha^{13})^{12})' = (\beta^{12})^{21}$ $(= \mu + (2u))$ и $\sigma = -1$, то $-\chi^{(\beta^{12})^{21}}$ равно $\chi^{(\alpha^{13})^{12}}$ на $S_k^{\sigma}$ и, следовательно, (5.21) равносильно условию, что

$$\chi^{(\alpha^{13})^{12}} \text{ и } \chi^{(\alpha^{13})^{12}} + \chi^{(\beta^{21})^{13}} \text{ модульно равны на } S_k^{-}.$$

Это означает, что существует подмножество $D$ в $S_k^-$ и числа $e, f \in \{1, -1\}$ такие, что

$$e\chi^{(\alpha^{13})^{12}}(g) = \chi^{(\alpha^{13})^{12}}(g) + \chi^{(\beta^{21})^{13}}(g) \quad \text{при} \quad g \in D,$$

$$f\chi^{(\alpha^{13})^{12}}(g) = \chi^{(\alpha^{13})^{12}}(g) + \chi^{(\beta^{21})^{13}}(g) \quad \text{при} \quad g \in S_k^- \setminus D,$$

откуда

$$(e - 1)\chi^{(\alpha^{13})^{12}}(g) = \chi^{(\beta^{21})^{13}}(g) \quad \text{при} \quad g \in D, \tag{5.22}$$

$$(f - 1)\chi^{(\alpha^{13})^{12}}(g) = \chi^{(\beta^{21})^{13}}(g) \quad \text{при} \quad g \in S_k^- \setminus D. \tag{5.23}$$

Предположим, что $e = f$. Если $e = 1$, то по (5.22) и (5.23) характер $\chi^{(\beta^{21})^{13}}$ исчезает на $S_k^-$ и по предложению 1.2(5) разбиение $(\beta^{21})^{13}$ является самоассоциированным, что противоречит рис. 5.6. Если же $e = -1$, то по (5.22) и (5.23) $\chi^{(\alpha^{13})^{12}}$ и $\chi^{(\beta^{21})^{13}}$ пропорциональны на $S_k^-$, а это противоречит предложению 3.3, так как $(\alpha^{13})^{12} \neq' (\beta^{21})^{13} \neq ((\beta^{21})^{13})'$.

Поэтому $e \neq f$ и, следовательно, точно одно из чисел $e - 1$ и $f - 1$ равно нулю. В этом случае согласно предложению 3.1 либо $(\alpha^{13})^{12}$ и $(\beta^{21})^{13}$ пропорциональны на $S_k^-$, либо $(\beta^{21})^{13} = ((\beta^{21})^{13})'$, но, как отмечено выше, это противоречиво.

Таким образом, противоречив случай А2.2 и, следовательно, противоречив случай А.

**Случай Б.** Пусть $\varepsilon = (-1)^m$, $\alpha^{11} = (\alpha^{11})'$ и $\beta^{11} = (\beta^{11})'$.

Тогда диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ имеют вид, изображённый на рис. 5.7.

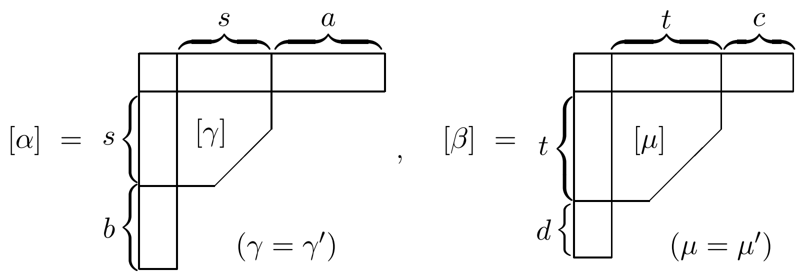



Рис. 5.7

Здесь $s := \gamma_1$, $t := \mu_1$,$a, b, c, d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Согласно предложениям 4.2 и 4.3

$$d(\gamma) \geq 2 \text{ и } d(\mu) \geq 2, \text{ и потому } s \geq 2 \text{ и } t \geq 2.$$

Так как $\alpha \neq \alpha'$ и $\beta \neq \beta'$, то без ограничения общности считаем, что

$$a > b \ \text{ и } \ c > d.$$

Имеем

$$h_{11}^{\alpha} = 1 + 2s + b + a, \qquad h_{11}^{\beta} = 1 + 2t + c + d,$$
$$h_{12}^{\alpha} = 2s + a, \qquad h_{12}^{\beta} = 2t + c,$$
$$h_{21}^{\alpha} = 2s + b, \qquad h_{21}^{\beta} = 2t + d.$$

Очевидно, что $H_{12}^{\alpha}$ — единственный второй по длине крюк в $[\alpha]$, а $H_{12}^{\beta}$ — единственный второй по длине крюк в $[\beta]$.

Предположим сначала, что $h_{12}^{\alpha} \neq h_{12}^{\beta}$. Пусть без ограничения общности $h_{12}^{\alpha} > h_{12}^{\beta}$. Тогда $H^{\alpha,\beta} = \{H_{12}^{\alpha}\}$ и по предложению 3.5 разбиение $\alpha^{12}$ самоассоциировано. Но это невозможно, что видно из рис. 5.7 (см. также следующее утверждение (5.24)).

Следовательно, $h_{12}^{\alpha} = h_{12}^{\beta}$ и $H^{\alpha,\beta} = \{H_{12}^{\alpha}, H_{12}^{\beta}\}$. Тогда по предложению 3.6

$$\chi^{\alpha^{12}} \text{ и } \chi^{\beta^{12}} \text{ пропорциональны или полупропорциональны на } S_{n-h_{12}^{\alpha}}^{\sigma},$$

где $\sigma = \pm 1$. Из рис. 5.7 видно, что

$$\alpha^{12} = \gamma * (1^{b+1}) \ \text{ и } \ \beta^{12} = \mu * (1^{d+1}). \tag{5.24}$$

Предположим, что $\chi^{\alpha^{12}}$ и $\chi^{\beta^{12}}$ пропорциональны на $S_{n-h_{12}^{\alpha}}^{\sigma}$. По предложению 3.3 либо $\alpha^{12} =' \beta^{12}$, либо $\sigma = -1$ и разбиения $\alpha^{12}$ и $\beta^{12}$ оба самоассоциированы. Противоречивость второго условия видна из условия (5.24). Если же $\alpha^{12} =' \beta^{12}$, то ввиду (5.24) должно быть $\alpha^{12} = \beta^{12}$, $\gamma = \mu$, $s = t$, $b = d$, откуда $\alpha = \beta$, что также противоречиво. Следовательно,

$$\chi^{\alpha^{12}} \text{ и } \chi^{\beta^{12}} \text{ полупропорциональны на } S_{n-h_{12}^{\alpha}}^{\sigma}, \ \ \sigma = \pm 1.$$

Тогда по свойству А для $(\alpha^{12}, \beta^{12}, \sigma)$ выполнено одно из утверждений (1) и (2) гипотезы А на месте $(\alpha, \beta, \varepsilon)$.

Утверждение (1), однако, не может быть выполнено, поскольку ни одно из разбиений $\alpha^{12}$ и $\beta^{12}$ не является самоассоциированным, в то время как $2^k.() + \widetilde{(3)}$ и $2^k.(1) + \widetilde{(3)}$ самоассоциированы при любом $k \geq 0$.

Не может быть выполнено и утверждение (2), поскольку разбиения $(\alpha^{12})^{11}$ $(= \gamma^{11})$ и $(\beta^{12})^{11}$ $(= \mu^{11})$ самоассоциированы, в то время как $(\Theta + \widetilde{(4)})^{11}$ не самоассоциировано при $\Theta$, равном любому из разбиений $3^k.\Delta_l$, $3^k.\Sigma_l$ и $3^k.2.\Sigma_l$ (см. рис. 2.1, 2.4–2.6).

Таким образом, случай Б противоречив и, следовательно, теорема А1 доказана.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**


1. **Белоногов В. А.** О неприводимых характерах групп $S_n$ и $A_n$ // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 5. С. 977–994.
2. **Белоногов В. А.** К гипотезе о полупропорциональных характерах // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 299–314.
3. **Белоногов В. А.** О равнокорневых неприводимых характерах групп $S_n$ и $A_n$ // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 1. С. 3–25.
4. **Белоногов В. А.** О неприводимых характерах группы $S_n$, полупропорциональных на $A_n$ // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 2. С. 135–156.
5. **Белоногов В. А.** Диаграммы Юнга без крюков длины 4 и характеры группы $S_n$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 3. С. 30–40.
6. **Белоногов В. А.** О некоторых парах неприводимых характеров групп $S_n$ и $A_n$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 1. С. 11–43.
7. **Белоногов В. А.** О некоторых парах неприводимых характеров групп $S_n$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 2. С. 13–32.
8. **Белоногов В. А.** Представления и характеры в теории конечных групп. Свердловск: УрО АН СССР, 1990.
9. **James G., Kerber A.** The representation theory of the symmetric group. London: Addison–Wesley, 1981.
10. **Джеймс Г.** Теория представлений симметрических групп. М.: Мир, 1982.
11. **Белоногов В. А.** О нулях в таблицах характеров групп $S_n$ и $A_n$ // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 1. С. 24–43.
12. **Белоногов В. А.** О нулях в таблицах характеров групп $S_n$ и $A_n$. II // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 643—663.
13. **Белоногов В. А.** О диаграммах Юнга пары неприводимых характеров $S_n$, равнокорневых на $S_n^\varepsilon$ // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, №4.


Поступила 5.02.2007

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14 № 2 2008

УДК 517.982.272+515.122.55

# О КОНЕЧНОКРАТНЫХ ОТКРЫТЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

**Н. В. Величко**

В работе исследуются открытые конечнократные (в основном $k$-кратные) отображения топологических пространств. Вводится понятие жесткого пространства. Доказано, что класс жестких пространств содержит все евклидовы пространства и все нульмерные линделёфовы пространства. Построены примеры и поставлены задачи.

В работе рассматриваются непрерывные сюръективные открытые отображения в классе хаусдорфовых пространств.

Рассматриваются только непустые пространства.

Напомним, что отображение $f: X \to Y$ называется *$k$-кратным* (соответственно *конечнократным*), если $|f^{-1}(y)| = k$ (соответственно $|f^{-1}(y)| < \aleph_0$) для любой точки $y \in Y$.

Обозначим через $\mathcal{P}_k$ класс всех $k$-кратных отображений и положим $\mathcal{P}{=}\cup\{\mathcal{P}_k : k \in \mathbb{N}\}$.

О классе $\mathcal{P}$ известно следующее (см. [1, гл. VI, §4]).

**Теорема 1.** *Отображение $f \in \mathcal{P}$ всегда замкнуто и локально гомеоморфно.*

**Следствие 1.** *Вес $w(X)$ пространства $X$ при отображении $f \in \mathcal{P}$ не превосходит веса $Y$(в предположении $w(Y) \geq \omega_0$).*

О п р е д е л е н и е 1. Отображение $f: X \to Y$ будем называть *элементарным*, если $X$ представимо в форме топологической суммы $\oplus\{X_i : i \leq k\}$ подпространств такой, что сужение $f|_{X_i}$ является гомеоморфизмом $X_i$ на $Y$.

О п р е д е л е н и е 2. Пространство $Y$ назовем *жестким* (относительно $\mathcal{P}$), если любое отображение класса $\mathcal{P}$ на $Y$ элементарно.

Простым примером жесткого пространства может служить дискретное пространство.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть $f: X \to Y$ — отображение класса $\mathcal{P}_k$. Открытое подмножество $A$ пространства $Y$ назовем *правильным* (относительно $f$), если сужение $f$ на множество $f^{-1}(A)$ элементарно, т.е. $f^{-1}(A)$ является дизъюнктной суммой открытых множеств $A_1, \dots, A_k$ такой, что $f|_{A_i}$ — гомеоморфное отображение $A_i$ на $A$, $i \leq k$. Семейство $\{A_i : i \leq k\}$ назовем *реализацией* $A$ и будем записывать это формулой $r(A) = \{A_i : i \leq k\}$.

Понятно, что у правильного множества могут быть разные реализации.

О п р е д е л е н и е 4. Пусть $A$ и $B$ — правильные множества в $Y$. Будем говорить, что реализация $r(B) = \{B_i : i \leq k\}$ *продолжает* реализацию $r(A) = \{A_i : i \leq k\}$, если $A_i \subseteq B_i$, $i \leq k$. Будем в этом случае писать $r(A) \leq r(B)$.

**Предложение 1.** *Для любого отображения $f \in \mathcal{P}$ и произвольно выбранной базы $\mathcal{B}$ топологии $Y$ правильные множества из $\mathcal{B}$ образуют подбазу.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y \in Y$, $W$ — произвольная окрестность точки $y$, $f^{-1}(y) = \{y_1, \dots, y_r\}$. Выберем дизъюнктную систему $\{W_1, \dots, W_r\}$ окрестностей точек $y_i$, $i \le k$, и положим $V' = W \cap \bigcap\{f(W_i) : i \le k\}$. Тогда $V'$ будет окрестностью точки $y$, содержащейся в $W$. Пусть $V \in \mathcal{B}$ и $V$ является окрестностью точки $y$, содержащейся в $V'$. В силу $k$-кратности $f$ множество $f^{-1}(V)$ будет содержаться в $\bigcup\{W_i\colon\ i \le k\}$, множества $V_i = f^{-1}(V) \cap W_i$ открыты в $X$ и взаимно однозначно отображаются на $V$, следовательно, отображение $f|_{V_i}$ является гомеоморфизмом $V_i$ на $V$, $i \le k$, т.е. $V$ является правильным множеством.

Предложение доказано.

Совокупность всех правильных подмножеств $Y$, являющаяся базой $Y$ в силу предложения 1, далее будет обозначаться через $\mathcal{B}(f)$.

О п р е д е л е н и е 6. Пусть $f \in \mathcal{P}$. Возрастающую по включению (не обязательно строго) трансфинитную последовательность $\{A^\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ элементов $\mathcal{B}(f)$ назовем *правильной*, если для каждого $\alpha$ можно выбрать реализацию $r(A^\alpha)$ множества $A^\alpha$ такую, что $r(A^\alpha)$ продолжает $r(A^\beta)$ при $\beta \le \alpha$. Множество $A = \bigcup\{A^\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ назовем пределом последовательности $\{A^\alpha : \alpha \in \Lambda\}$.

**Предложение 2.** *Любая правильная последовательность $\{A^\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ элементов $\mathcal{B}(f)$ удовлетворяет свойству*

(a) *Множество $A = \bigcup\{A^\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ правильно и найдется реализация $r(A)$ множества $A$, продолжающая реализацию $r(A^\alpha)$ для каждого $\alpha \in \Lambda$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $r(A^\alpha) = \{A_1^\alpha, \dots, A_k^\alpha\}$. Положим $A_i = \bigcup\{A_i^\alpha : \alpha \in \Lambda\}$. Заметим, что множества $A_i$ открыты в $X$ и не пересекаются, отображения $f|_{A_i}$ открыты и взаимно однозначны, следовательно, являются гомеоморфизмами $A_i$ на $A$. Так как $f^{-1}(A) = \bigcup\{A_i : i \le k\}$ (в силу $k$-кратности $f$), то семейство $\{A_1, \dots, A_k\}$ является реализацией $A$, продолжающей $r(A^\alpha)$ для любого $\alpha \in \Lambda$.

Предложение доказано.

Далее нам понадобится следующее элементарное утверждение.

**Лемма.** *Пусть $f \in \mathcal{P}$, $\{A^\alpha\}$ — дизъюнктное семейство элементов $\mathcal{B}(f)$. Тогда множество $A = \bigcup A^\alpha$ правильное.*

**Следствие 2.** *Топологическая сумма жестких пространств является жестким пространством.*

**Предложение 3.** *Если $f \in \mathcal{P}_k$, то в $Y$ найдется открытое плотное правильное подмножество $A$, т.е. множество $f^{-1}(A)$ есть дизъюнктная сумма открытых в $X$ множеств $A_i$ $(i \le k)$ таких, что сужение $f|_{A_i}$ отображения $f$ является гомеоморфизмом $A_i$ на $A$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{A^\alpha\}$ — максимальное дизъюнктное семейство правильных подмножеств $Y$. Из предложения 1 и леммы следует, что плотное в $Y$ множество $A = \bigcup A^\alpha$ является правильным. Если $r(A) = \{X_1, \dots, X_k\}$ — некоторая реализация множества $A$, то $f^{-1}(A) = \bigoplus\{X_i : i \le k\}$.

Предложение доказано.

Предложение 3 можно сформулировать по-другому.

**Предложение 4.** *Если $f \in \mathcal{P}_k$, то в $Y$ найдется открытое плотное правильное подмножество $A$ такое, что $X$ есть дизъюнктная сумма подпространств $X_i$ $(i \le k)$, для которых сужение $f|_{X_i}$ отображения $f$ является уплотнением $X_i$ на $Y$, гомеоморфным на множестве $f^{-1}(A) \cap X_i$.*

Определение 7. Пусть $f : X \to Y$ — отображение класса $\mathcal{P}$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}(f)$ — некоторая база топологии $Y$. Множество $A \in \mathcal{B}(f)$ назовем *большим*, если для любого элемента $B \in \mathcal{B}$, пересекающегося с $A$, выполняется $B \subseteq A$.

Следующее утверждение содержит общую идею доказательств элементарности отображений класса $\mathcal{P}$.

**Предложение 5.** *Пусть $f : X \to Y$ — отображение класса $\mathcal{P}$. Предположим, что в $Y$ существует база $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}(f)$, удовлетворяющая условию*

(b) *если множество $A \in \mathcal{B}(f)$ не является большим, то найдется множество $B \in \mathcal{B}$ такое, что $A \cap B \neq \varnothing$, $B \setminus A \neq \varnothing$ и $\{A, A \cup B\}$ — правильная последовательность.*

*Тогда $f$ элементарно.*

Доказательство. Семейство $\gamma = \{B^\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ назовем *правильным*, если для любого $\alpha$ множество $B^\alpha$ является большим и $B^\alpha \cap B^\beta = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$.

Ясно, что любое большое множество открыто-замкнуто и правильно. Упорядочим по включению множество $T$ всех правильных семейств. Очевидно, что любая цепь $\{\gamma_\alpha\}$ правильных семейств имеет точную верхнюю грань — семейство $\bigcup_\alpha \gamma_\alpha$. Тогда имеется максимальное семейство $\gamma_0$. Докажем, что $Y = \cup\gamma_0 := \bigcup\{C\colon C \in \gamma_0\}$.

Предположим, что $G = \cup\gamma_0 \neq Y$. По лемме множество $G \in \mathcal{B}(f)$, а по определению является большим множеством. Рассмотрим семейство $\sigma$ всех элементов $\mathcal{B}$, содержащихся в $Y \setminus G$. Докажем, что в $Y \setminus G$ имеется большое множество. Выберем произвольный элемент $A^0$ из $\sigma$. Если он не является большим множеством, то найдется элемент $B \in \mathcal{B}$, удовлетворяющий условию (b). Положим $A^1 = B \cup A^0$. Последовательность $\{A^0, A^1\}$ будет правильной и $A^1 \in \sigma$. Действительно, если $A^1 \notin \sigma$, то $A^1 \cap G \neq \varnothing$. Так как $A^0 \in \sigma$, то $B \cap G \neq \varnothing$. Тогда $B \subseteq G$. Так как $A^0 \cap B \neq \varnothing$, то $A^0 \cap G \neq \varnothing$, что противоречит формуле $A^0 \in \sigma$.

Предположим, что для любого $\beta < \alpha$ выбрано множество $A^\beta \in \mathcal{B}(f)$ такое, что последовательность $\{A^\beta : \beta < \alpha\}$ является правильной и лежащей в $Y \setminus G$. Положим $A^\alpha = \bigcup\{A^\beta : \beta < \alpha\}$. Множество $A^\alpha$ будет правильным как предел правильной последовательности и $A^\alpha \subseteq Y \setminus G$. Если $A^\alpha$ — большое множество, то построение завершено. Если нет, то из (b) следует, что найдется множество $B \in \mathcal{B}$ такое, что $(A^\alpha, A^\alpha \cup B)$ — правильная последовательность и $A^\alpha \cup B \subseteq Y \setminus G$. Это означает, что найдется такое $\tau$, что множество $A^\tau = \bigcup\{A^\beta : \beta < \tau\}$ будет большим и будет лежать в $Y \setminus G$. Тогда семейство $\gamma$, полученное из $\gamma_0$ добавлением элемента $A^\tau$, будет правильным, что противоречит максимальности $\gamma_0$.

Доказано, что $Y = \cup\gamma_0$. Тогда $Y$ правильно по лемме и отображение $f$ элементарно.

Предложение доказано.

Переходим к более конкретным ситуациям. Начнем с нульмерных пространств.

**Теорема 2.** *Нульмерное линделёфово пространство является жестким.*

Доказательство. Пусть пространство $Y$ нульмерно и линделёфово, $f : X \to Y$ — отображение класса $\mathcal{P}$. Пусть $\mathcal{B}'$ — база $Y$, состоящая из открыто-замкнутых множеств, $\mathcal{B}$ — подбаза $\mathcal{B}'$, состоящая из правильных множеств. Выберем из $\mathcal{B}$ счетное семейство $\{V_n : n < \omega\}$, покрывающее $Y$. Положим $W_0 = V_0$ и по индукции $W_n = V_n \setminus \bigcup\{W_k : k < n\}$. Тогда семейство $\{W_n : n < \omega\}$ состоит из непересекающихся открыто-замкнутых правильных множеств и объединение их дает $Y$, следовательно, $Y$ правильно по лемме и отображение $f$ элементарно. Теорема доказана.

**Следствие 3.** *Прямая Зоргенфрея является жестким пространством.*

**Следствие 4.** *Счетное регулярное пространство $Y$ является жестким.*

Действительно, счетное регулярное пространство обладает счетной сетью, в частности, линделёфово, а также нульмерно (см. [2, гл. VI, §2]).

Пространство $Y$ называется *наследственно несвязным*, если связная компонента каждой точки этого пространства одноточечна.

**Следствие 5.** *Наследственно несвязное локально компактное паракомпактное пространство является жестким.*

Действительно, локально компактное паракомпактное пространство $Y$ можно разложить в топологическую сумму линделёфовых пространств [2, гл. V, §1]; если $Y$ наследственно несвязно, то оно нульмерно [2, гл. VI, §2]; из этих двух утверждений, теоремы 2 и следствия леммы вытекает жесткость $Y$.

**Следствие 6.** *Стоун-чеховская компактификация $\beta Y$ сильно нульмерного пространства $Y$ является жестким пространством.*

Пространство $\beta Y$ в этом случае нульмерно [2, гл. VI, §2].

Рассмотрим класс связных пространств.

**Теорема 3.** *Отображение $f : X \to Y$ класса $\mathcal{P}_k$ на связное пространство $Y$ элементарно тогда и только тогда, когда пространство $X$ можно разложить в дизъюнктное семейство $\{X_i : i \leq k\}$ открытых подпространств.*

*В частности, при $k = 2$ отображение $f$ элементарно тогда и только тогда, когда $X$ несвязно.*

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно.

Предположим, что $X$ представимо как дизъюнктное семейство $\{X_i : i \leq k\}$ открытых подпространств. Достаточно показать, что для любой точки $y \in Y$ прообраз $f^{-1}(y)$ пересекается с каждым множеством семейства.

Предположим противное: найдется точка $y \in Y$ такая, что множество $f^{-1}(y)$ не пересекается с $X_i$ для некоторого $i$. Положим $Y_i = \{y : f^{-1}(y) \cap X_i = \varnothing\}$. Пусть $y \in Y_i$, $f^{-1}(y) = \{x_n : n \leq k\}$. Выберем непересекающиеся окрестности $O_n$ точек $x_n$ такие, что $O_n \subseteq X \setminus X_i$. Положим $Oy = \bigcap\{f(O_n) : n \leq k\}$. Ясно, что если точка $z \in Oy$, то $f^{-1}(z) \subseteq \bigcup\{O_n : n \leq k\}$, $f^{-1}(z) \cap X_i = \varnothing$. Отсюда следует, что множество $Y_i = \bigcup\{Oy : y \in Y_i\}$ открыто.

Положим $Y' = Y \setminus Y_i$. Если $y \in Y'$, то $f^{-1}(y) \cap X_i \neq \varnothing$. Отсюда следует, что множество $f(X_i)$ открыто и содержит $Y'$. Из определения $Y_i$ следует, что $Y' \cap Y_i = \varnothing$, так что $Y$ распадается в топологическую сумму двух подпространств, что противоречит связности $Y$.

Теорема доказана.

Связные нежесткие пространства, конечно, существуют.

Пример 1. Рассмотрим классическое нерегулярное $T_2$-пространство $Y$, которое получается усилением естественной топологии числовой прямой путем добавления к семейству замкнутых множеств множества $F = \{n^{-1} : n \in \mathbb{N}\}$. Пространство $Y$ связно. В качестве $X$ рассмотрим дизъюнктную сумму двух экземпляров $Y_1$ и $Y_2$ множества $Y$. Разобьем дизъюнктную последовательность интервалов $\gamma = \{\gamma_n = ((n+1)^{-1}, n^{-1}) : n \in \mathbb{N}\}$ на две бесконечные дизъюнктные последовательности $\gamma_1 = \{\gamma_1^{k_1}\}$ и $\gamma_2 = \{\gamma_1^{k_2}\}$. В точках из $Y_i \setminus \{0\}$ сохраним топологию $Y$. Обозначим через $\gamma_{i,j} = \{\gamma_{i,j}^{k_i}\}$ последовательность $\gamma_j$, лежащую в $Y_i\,(i, j = 1, 2)$. Базисными окрестностями точки $0 \in Y_i$ будут множества $V_i^k = \{0\} \cup \bigcup\{\gamma_{i,i}^{k_i} : k_i \geq k\} \cup \bigcup\{\gamma_{j,j}^{k_i} : k_j \geq k\}$, где $i \neq j$. Отображение $f : X \to Y$, тождественное на $Y_i, i = 1, 2$, будет открытым 2-значным отображением $X$ на $Y$. Так как $0 \in Y_i$, из связности $Y_i \setminus \{0\}$ легко выводится связность $X$. Из теоремы 3 следует, что отображение $f$ не является элементарным.

О п р е д е л е н и е 8. Пространство $Y$ назовем *вполне локально связным*, если существует база $\mathcal{B}$ его топологии, состоящая из связных множеств и удовлетворяющая условию: если $A$ и $B$ — пересекающиеся элементы $\mathcal{B}$, то $A \cap B \in \mathcal{B}$ и $A \cup B \in \mathcal{B}$.

Наиболее простые примеры вполне локально связных пространств:
$Y$ — дискретное пространство;
$Y = R$ (числовая прямая в естественной топологии);
$Y$ — длинная прямая (длинный отрезок) [2, гл. III, §12].

Простым примером не вполне локально связного (и нежесткого) пространства может служить окружность.

Вполне локально связные пространства являются жесткими. Мы докажем жесткость элементов более широкого класса пространств.

О п р е д е л е н и е 9. Пространство $Y$ назовем *устойчиво локально связным*, если существует база $\mathcal{B}$ его топологии, состоящая из связных множеств и удовлетворяющая условиям:

(a) если $A$ и $B$ — пересекающиеся элементы $\mathcal{B}$, то $A \cap B \in \mathcal{B}$ и существует минимальный элемент $C$ базы $\mathcal{B}$, содержащий $A \cup B$;

(b) если подбаза $\mathcal{R}$ базы $\mathcal{B}$ обладает свойствами

(b1) из того, что $A \in \mathcal{R}$, $B \in \mathcal{B}$ и $A \cap B \neq \varnothing$ следует, что $A \cap B \in \mathcal{R}$, и

(b2) из того, что $(A, B) \in \mathcal{R}^2$ и $A \cup B \in \mathcal{B}$, следует, что $A \cup B \in \mathcal{R}$,
то при $(A, B) \in \mathcal{R}^2$ и $A \cap B \neq \varnothing$ наименьший элемент базы $\mathcal{B}$, содержащий $A \cup B$, принадлежит $\mathcal{R}$.

Ясно, что вполне локально связное пространство устойчиво локально связно.

**Теорема 4.** *Устойчиво локально связное пространство $Y$ является жестким.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f : X \to Y$ — открытое $k$-кратное отображение. Для простоты изложения рассмотрим только случай $k = 2$.

Пусть $\mathcal{B}'$ — база топологии $Y$, удовлетворяющая условиям определения 9. Семейство $\mathcal{B}$ всех правильных множеств из $\mathcal{B}'$ является подбазой по предложению 1, удовлетворяющей условию (b1) (что очевидно). Докажем, что она удовлетворяет и условию (b2), следовательно, для нее будет удовлетворяться условие (b) определения 9. Справедливо следующее утверждение:

(A). Пусть $A$ и $B$ — правильные связные множества, пересечение которых непусто и связно. Тогда множество $C = A \cup B$ будет правильным и для любой реализации $r(A)$ множества $A$ ($r(B)$ множества $B$) найдется реализация $r(C)$ множества $C$, продолжающая $r(A)$ ($r(B)$).

Пусть $r(A) = (A_1, A_2)$ и $r(B) = (B', B'')$ — произвольные реализации множеств $A$ и $B$. Так как множество $D = A \cap B$ правильно, связно и содержится в $A$, то, положив $D' = f^{-1}(D) \cap A_1$ и $D'' = f^{-1}(D) \cap A_2$, получим реализацию $r(D) = (D', D'')$ множества $D$ такую, что $D' \subseteq A_1$ и $D'' \subseteq A_2$. Действительно, если $(D_1, D_2)$ — произвольная реализация $D$, то $D_1$ содержится только в одном из множеств $A_1, A_2$, скажем, в $A_2$ (в силу связности $D_1$). Тогда $D_1 = f^{-1}(D) \cap A_2 = D''$ (в силу взаимной однозначности отображения $f|_{A_2}$) и $D_2 = f^{-1}(D) \cap A_1 = D'$.

Заменив в этом рассуждении $A$ на $B$, получим, что или $D' \subseteq B', D'' \subseteq B''$, или $D' \subseteq B'', D'' \subseteq B'$, поэтому можно считать, что $D' \subseteq B', D'' \subseteq B'', D' = f^{-1}(D) \cap B', D'' = f^{-1}(D) \cap B''$. Заметим, что $B' \cap A_1 = D'$ и $B'' \cap A_2 = D''$. Действительно, для обоснования, например, первого равенства имеем $D' = f^{-1}(D) \cap B' \subseteq B', D' = f^{-1}(D) \cap A_1 \subseteq A_1$, тогда $D' \subseteq B' \cap A_1$; если $x' \in B' \cap A_1$, то $f(x') \in B \cap A = D$, следовательно, $x' \in f^{-1}(D)$ и $x' \in D' = f^{-1}(D) \cap B'$, т.е. $B' \cap A_1 \subseteq D'$.

Положим $C_1 = A_1 \cup B'$. Тогда $C_1$ будет открытым связным множеством, на котором отображение $f$ взаимно однозначно. Действительно, если $x_1$ и $x_2$ — различные точки $C_1$, то либо пара $\{x_1, x_2\}$ лежит в одном из множеств $A_1, B'$ и $f(x_1) \neq f(x_2)$, либо $x_1 \in A_1, x_2 \in B' \setminus A_1$ (вариант: $x_1 \in B', x_2 \in A_1 \setminus B'$), тогда $f(x_1) \in A, f(x_2) \in B \setminus A$ в силу $x_2 \notin D'$ (вариант: $f(x_1) \in B, f(x_2) \in A \setminus B$) и снова $f(x_1) \neq f(x_2)$. Точно так же показывается, что множество

$C_2 = A_2 \cap B''$ является открытым связным множеством, на котором отображение $f$ взаимно однозначно. Множества $C_1$ и $C_2$ не пересекаются (общая точка может лежать только в $f^{-1}(D)$, что исключено). Это означает, что $(C_1, C_2)$ — реализация множества $C$, продолжающая $r(A)$.

(A) доказано.

Из (A) следует, что база $\mathcal{B}$ удовлетворяет условию (b) определения 9. Кроме того, из (A) вытекает утверждение

(B) Любая возрастающая трансфинитная последовательность $\{V^\alpha : \alpha < \tau\}$ связных правильных множеств будет правильной.

Действительно, последовательность $\{V^0, V^1\}$ будет правильной в силу (A). Предположим, что последовательность $\{V^\alpha : \alpha < \beta\}$ правильна, где $\beta < \tau$. Если $A^\beta$ — предел последовательности $\{V^\alpha : \alpha < \beta\}$, то последовательность $\{V^\alpha : \alpha < \beta + 1\}$ будет правильной в силу предложения 2. Если нет, то последовательность $\{V^\alpha : \alpha < \beta+1\}$ будет правильной в силу (A).

(B) доказано.

Построим возрастающую трансфинитную последовательность $\{V^\alpha : \alpha < \tau\}$ связных правильных множеств такую, что ее предел $\bigcup\{V^\alpha : \alpha < \tau\}$ будет большим множеством.

Если $A$ и $B$ — элементы $\mathcal{B}$, то определим множество $\langle A, B\rangle$ следующим образом. Если $A \cap B \neq \varnothing$, то $\langle A, B\rangle$ будет минимальным элементом $\mathcal{B}$, содержащим $A \cup B$. Если $A \cap B = \varnothing$, то $\langle A, B\rangle = A$.

*Представлением* правильного связного множества $A$ назовем семейство $\pi(A)$ элементов базы $\mathcal{B}$ такое, что $A = \bigcup\{B : B \in \pi(A)\}$. Ясно, что множество $A$ может иметь разные представления. Положим $\pi(A) \leq \pi(B)$, если любой элемент $A' \in \pi(A)$ содержится в некотором элементе $B' \in \pi(B)$.

Если $C$ — произвольный элемент базы $\mathcal{B}$, а для правильного связного множества $A$ выбрано представление $\pi(A)$, то положим $\langle A, C\rangle = \bigcup\{\langle D, C\rangle : D \in \pi(A)\}$. Заметим, что если $\pi(A) \leq \pi(B)$, то $\langle A, C\rangle \subseteq \langle B, C\rangle$.

Предположим, что для любого $\beta < \alpha$ построено связное правильное множество $V^\beta$ и выбрано его представление $\pi(V^\beta)$ с выполнением следующих условий.

(1) Если $\beta$ — предельный ординал, то $V^\beta = \bigcup\{V^\delta : \delta < \beta\}$ и $\pi(V^\beta) = \bigcup\{\pi(V^\delta) : \delta < \beta\}$.

(2) Если ординал $\beta$ не является предельным, то множеству $V^\beta$ будет соответствовать элемент $F^\beta$ базы $\mathcal{B}$ такой, что $V^{\beta-1} \cap F^\beta \neq \varnothing$, $F^\beta \setminus V^{\beta-1} \neq \varnothing$ и $\pi(V^\beta)$ будет семейством $\{\langle A, F^\beta\rangle : A \in \pi(V^{\beta-1})\}$, следовательно, $V^\beta = \bigcup\{\langle A, F^\beta\rangle : A \in \pi(V^{\beta-1})\} = \langle V^{\beta-1}, F^\beta\rangle$. Так как $A \subseteq \langle A, F^\beta\rangle$, то $\pi(V^{\beta-1}) \leq \pi(V^\beta)$, откуда легко вывести свойство

(a) $\sigma < \sigma' \Rightarrow \pi(V^\sigma) \leq \pi(V^{\sigma'})$.

Если $\alpha$ — предельный ординал, то $A = \bigcup\{V^\beta : \beta < \alpha\}$ будет связным правильным множеством как предел правильной последовательности $\{V^\beta : \beta < \alpha\}$. Положим $V^\alpha = A$ и $\pi(V^\alpha) = \bigcup\{\pi(V^\beta) : \beta < \alpha\}$, получим правильную (в силу (B)) последовательность $\{V^\beta : \beta < \alpha + 1\}$.

Если $\alpha$ не является предельным ординалом, то предположим, что $V^{\alpha-1}$ не является большим множеством. Тогда найдется множество $F^\alpha$ базы $\mathcal{B}$ такое, что $V^{\alpha-1} \cap F^\alpha \neq \varnothing$ и $F^\alpha \setminus V^{\alpha-1} \neq \varnothing$. Положим $V^\alpha = \langle V^{\alpha-1}, F^\alpha\rangle$ и $\pi(V^\alpha) = \{\langle A, F^\alpha\rangle : A \in \pi(V^{\alpha-1})\}$. В этом случае надо доказать, что $V^\alpha$ будет правильным множеством. Отметим, что $\pi(V^\beta) \leq \pi(V^\alpha)$ для любого $\beta \leq \alpha$, т.е. выполняется свойство (a) для последовательности $\{V^\beta : \beta < \alpha + 1\}$.

Пусть $\beta < \alpha + 1$ — произвольный ординал и $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ — произвольная последовательность элементов базы $\mathcal{B}$. Поставим ей в соответствие последовательность $\{W_n^\beta : n \in \mathbb{N}_0\}$ такую, что $W_0^\beta = V^\beta, W_n^\beta = \langle W_{n-1}^\beta, A_n\rangle$ при $n \in \mathbb{N}$. Здесь $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Положим $\pi(W_0^\beta) = \pi(V^\beta), \pi(W_n^\beta) = \{\langle A, A_n\rangle : A \in \pi(W_{n-1}^\beta)\}$. Скажем, что $V^\beta$ удовлетворяет условию (c), если для любой последовательности $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ элементов $\mathcal{B}$ соответствующая ей последовательность $\{W_n^\beta : n \in \mathbb{N}_0\}$ правильная, т.е. состоит из правильных множеств.

Предположим, что $\beta < \alpha + 1$, для любого $\delta < \beta$ множество $V^\delta$ удовлетворяет условию (c), для любой последовательности $\gamma = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ элементов базы $\mathcal{B}$ и любого $k \in$N последовательность $\{W_k^\delta : \delta < \beta\}$ удовлетворяет условию (a) (где $\{W_n^\delta : n \in \mathbb{N}_0\}$ — соответствующая $\gamma$ последовательность).

Рассмотрим случай предельного $\beta$. Пусть $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ — произвольная последовательность элементов базы $\mathcal{B}$. По определению $W_0^\beta = V^\beta, \pi(W_0^\beta) = \pi(V^\beta) = \bigcup\{\pi(V^\delta) : \delta < \beta\} = \bigcup\{\pi(W_0^\delta) : \delta < \beta\}, W_0^\beta = \bigcup\{B : B \in \pi(W_0^\beta)\} = \bigcup_{\delta<\beta}\bigcup\{B : B \in \pi(W_0^\delta)\} = \bigcup\{W_0^\delta : \delta < \beta\}$. Последовательность $\{\pi(W_0^\delta) : \delta < \beta\}$ удовлетворяет условию (a) по предположению, следовательно, множество $W_0^\beta$ правильно как предел возрастающей последовательности правильных множеств $\{W_0^\delta : \delta < \beta\}$.

Предположим, что $W_n^\beta = \bigcup\{W_n^\delta : \delta < \beta\}$ и $\pi(W_n^\beta) = \bigcup\{\pi(W_n^\delta) : \delta < \beta\}$. Последовательность $\{\pi(W_n^\delta) : \delta < \beta\}$ удовлетворяет условию (a) по предположению.

Тогда $W_{n+1}^\beta = \langle W_n^\beta, A_{n+1}\rangle = \bigcup\{\langle B, A_{n+1}\rangle \colon B \in \pi(W_n^\beta)\} = \bigcup_{\delta<\beta}\{\langle B, A_{n+1}\rangle \colon B \in \bigcup \pi(W_n^\delta)\} = \bigcup_{\delta<\beta}\bigcup\{\langle B, A_{n+1}\rangle \colon B \in \pi(W_n^\delta)\} = \bigcup\{W_{n+1}^\delta : \delta < \beta\}$. Так как последовательность $\{W_n^\delta : \delta < \beta\}$ удовлетворяет условию (a), то множество $W_{n+1}^\beta$ правильно как предел последовательности $\{W_{n+1}^\delta : \delta < \beta\}$, и ясно, что последовательность $\{\pi(W_{n+1}^\delta) : \delta < \beta + 1\}$ удовлетворяет условию (a). Доказано, что последовательность $\{W_n^\beta : n \in \mathbb{N}_0\}$ правильная и выполняется условие (c).

Рассмотрим случай непредельного $\beta$. Из (2) следует, что $V^\beta = \langle V^{\beta-1}, F^\beta\rangle$. По предположению $V^{\beta-1}$ удовлетворяет условию (c). Пусть $\gamma = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ — произвольная последовательность элементов $\mathcal{B}$. Последовательность $\gamma' = \{A'_n : n \in \mathbb{N}\}$ определяем по индукции: $A'_1 = F^\beta, A'_n = A_{n-1}$. Последовательность $\{W_n^{\beta-1} : n \in \mathbb{N}_0\}$, соответствующая $\gamma'$, будет правильной по предположению. Но (см.(2)) $W_0^\beta = \langle V^{\beta-1}, F^\beta\rangle = \langle W_0^{\beta-1}, F^\beta\rangle = \langle W_0^{\beta-1}, A'_1\rangle = W_1^{\beta-1}$ (где $\{W_k^\beta : k \in \mathbb{N}_0\}$ — последовательность, соответствующая $\gamma$), по индукции $W_n^\beta = \langle W_{n-1}^\beta, A_n\rangle = \langle W_n^{\beta-1}, A'_{n+1}\rangle = W_{n+1}^{\beta-1}$, так что последовательность $\{W_n^\beta : n \in \mathbb{N}_0\}$ правильна, и для $V^\beta$ выполняется условие (c). Итак, множество $V^\beta$ правильно для любого $\beta < \alpha + 1$, в частности, множество $V^\alpha$ правильно и удовлетворяет условию (c). Доказано также, что если построена последовательность связных правильных множеств $\{V^\beta : \beta < \tau\}$ и ее предел не является большим множеством, то эту последовательность можно продолжить до последовательности $\{V^\beta : \beta < \tau + 1\}$. Следовательно, найдется такое $\tau$, что $A = \bigcup\{V^\beta : \beta < \tau\}$ будет большим множеством. Так как $A$ открыто-замкнуто, то оно совпадает с некоторой связной компонентой локально связного пространства $Y$. Из этого следует, что любая связная компонента $Y$ будет большим множеством; тогда $Y$ как дискретная сумма своих связных компонент будет правильным множеством по лемме, и отображение $f$ будет элементарным.

Теорема доказана.

П р и м е р 2. *Локально связное неустойчивое пространство.*

Пусть $Y'$ — подпространство $\mathbb{R}^2$, состоящее из открытого прямоугольника $E$ и двух точек $a$ и $b$, лежащих на границе $E$. Пусть $Y$ — факторпространство, полученное из $Y'$ склеиванием точек $a$ и $b$. Тогда $Y$ связно и локально связно, но не является жестким пространством. Докажем это.

Обозначим через $c$ точку, полученную в результате склеивания. Тогда можно записать $Y = E \cup \{c\}$. Пусть $X' = \oplus\{X'_i : i \leq 2\}$. где $X'_i$ — копия $Y$. Обозначим через $c_i, i = 1, 2$, точку $c$ в пространстве $X'_i$. Изменим топологию в точках $c_i$. Пусть $V'$ и $W'$ — непересекающиеся связные окрестности точек $a$ и $b$ в $Y'$, $V = V' \cap E$ и $W = W' \cap E$, $V_i$ $(W_i)$ — множество $V$ $(W)$, лежащее в $X'_i$. Тогда множество $\{c_1\} \cup V_1 \cup W_2$ $(\{c_2\} \cup V_2 \cup W_1)$ является окрестностью точки $c_1$ $(c_2)$ и подобные окрестности образуют фундаментальные системы. В точках $E$ сохраняется евклидова топология. Через $X$ обозначим пространство, полученное из $X'$ в результате изменения топологии. Ясно, что $X$ — связное пространство. Отображение $f : X \to Y$ задаем как сумму двух тождественных отображений $X'_i$ на $Y$. Являясь открытым 2-кратным отображением, $f$ не будет элементарным в силу теоремы 3, следовательно, пространство $Y$ не будет устойчивым в силу теоремы 4.

**Предложение 6.** *Пусть $Z$ — локально компактное устойчиво локально связное пространство, $\mathcal{B}'_Z$ — база $Z$, удовлетворяющая условиям определения* 9. *Тогда семейство $\mathcal{B}_Z$ всех относительно компактных множеств из $\mathcal{B}'_Z$ будет базой $Z$, удовлетворяющей всем условиям определения* 9.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что $\mathcal{B}_Z$ будет базой $Z$, и если $A \in \mathcal{B}_Z$, $B \in \mathcal{B}'_Z$ и $A \cap B \neq \varnothing$, то множество $A \cap B$, являясь относительно компактным, войдет в $\mathcal{B}_Z$. По той же причине $A \cup B \in \mathcal{B}_Z$, если $A \in \mathcal{B}_Z$, $B \in \mathcal{B}_Z$ и $A \cup B \in \mathcal{B}'_Z$. Это означает, что подбаза $\mathcal{B}_Z$ базы $\mathcal{B}'_Z$ удовлетворяет условиям (b1) и (b2) определения 8. Следовательно, для $\mathcal{B}_Z$ выполняется условие (b) определения 9, т.е. минимальный элемент базы $\mathcal{B}'_Z$, содержащий $A \cup B$ (при $A \in \mathcal{B}_Z$, $B \in \mathcal{B}_Z$ и $A \cap B \neq \varnothing$), принадлежит $\mathcal{B}_Z$. Этим доказано, что для $\mathcal{B}_Z$ выполняется условие (a). Если $\mathcal{B}$ — подбаза $\mathcal{B}_Z$, удовлетворяющая условиям (b1) и (b2) (относительно $\mathcal{B}_Z$), то $\mathcal{B}$ будет удовлетворять условиям (b1) и (b2) относительно $\mathcal{B}'_Z$, так что если $A \in \mathcal{B}$, $B \in \mathcal{B}$ и $A \cap B \neq \varnothing$, то минимальный элемент $\mathcal{B}'_Z$, содержащий $A \cup B$, будет принадлежать $\mathcal{B}$, т.е. $\mathcal{B}_Z$ удовлетворяет всем условиям определения 9.

Предложение доказано.

**Теорема 5.** *Если $X$ — локально компактное вполне локально связное пространство, то пространство $X^n$ устойчиво локально связно.*

Теорема 5 вытекает из следующего более общего утверждения.

**Предложение 7.** *Пусть $X$ — локально компактное вполне локально связное пространство, $\mathcal{B}'_X$ — база $X$, удовлетворяющая условию определения* 8, *$\mathcal{B}_X = \{A : A \in \mathcal{B}'_X, A$ относительно компактно$\}$. Тогда семейство $\mathcal{B} = \{\Pi\{A_i : i \leq n\} : A_i \in \mathcal{B}_X\}$ будет базой пространства $X^n$, удовлетворяющей условию* (a) *определения* 9 *и такой, что любая ее подбаза, удовлетворяющая условиям* (b1) *и* (b2) *определения* 9, *будет совпадать с $\mathcal{B}$.*

Доказательство проведем для $n = 3$ (доказательство для произвольного $n$ проводится аналогично, только существенно удлиняется).

Из предложения 6 вытекает, что семейство $\mathcal{B}_X$ является базой пространства $X$, удовлетворяющей всем условиям определения 9. Рассмотрим пространство $X^3$ с базой $\mathcal{B} = \{A \times B \times C : (A, B, C) \in \mathcal{B}_X^3\}$. Легко проверить, что если $U = A \times B \times C \in \mathcal{B}$, $V = D \times E \times F \in \mathcal{B}$ и $U \cap V \neq \varnothing$, то $U \cap V = (A \cap D) \times (B \cap E) \times (C \cap F)$ и множество $U \cup V = (A \cup D) \times (B \cup E) \times (C \cup F)$ является минимальным элементом базы $\mathcal{B}$, содержащим $U \cup V$. Таким образом, база $\mathcal{B}$ удовлетворяет условию (a) определения 9. Пусть $\mathcal{R}$ — подбаза базы $\mathcal{B}$, удовлетворяющая условиям (b1) и (b2) определения 9. Рассмотрим произвольный элемент $A \times B \times C$ базы $\mathcal{B}$.

Пусть $(x, y)$ — произвольная точка множества $\overline{A} \times \overline{B}$. Для любой точки $z \in \overline{C}$ выберем элемент $A_{x(z)} \times B_{y(z)} \times C_z \in \mathcal{R}$, содержащий точку $(x, y, z) \in X^3$. Из открытого покрытия $\{A_{x(z)} \times B_{y(z)} \times C_z\}$ компактного множества $\{x\} \times \{y\} \times \overline{C}$ выделим конечное подпокрытие $\{A_{x(z_i)} \times B_{y(z_i)} \times C_{z_i} : i \leq n\}$. Положим $A_x \times B_y = \bigcap\{A_{x(z_i)} : i \leq n\} \times \bigcap\{B_{y(z_i)} : i \leq n\}$. Тогда для всякого $i$ выполняется $A_x \times B_y \times C_{z_i} \subseteq A_{x(z_i)} \times B_{y(z_i)} \times C_{z_i} \in \mathcal{R}$, так что в силу (b1) $U_{((x,y),i)} = A_x \times B_y \times C_{z_i} \in \mathcal{R}$.

Далее, $\bigcup\{U_{((x,y),i)} : i \leq n\} = A_x \times B_y \times \bigcup\{C_{z_i} : i \leq n\}$, и можно предположить (учитывая связность компактного множества $x \times y \times \overline{C}$), что $(A_x \times B_y \times \bigcup\{C_{z_j} : j \leq i\}) \cap (A_x \times B_y \times C_{z_{i+1}}) \neq \varnothing$. Из условия (b2) определения 9 по индукции выводится, что $\bigcup\{U_{((x,y),i)} : i \leq n\} \in \mathcal{R}$. Это можно записать формулой $A_x \times B_y \times C_{x,y} \in \mathcal{R}$, где $C_{x,y} = \bigcup\{C_{z_i} : i \leq n\} \in \mathcal{B}_X$. Итак, доказано, что для любой точки $(x, y) \in \overline{A} \times \overline{B}$ найдется элемент $A_x \times B_y \times C_{x,y} \in \mathcal{R}$, содержащий компактное множество $\{x\} \times \{y\} \times \overline{C}$.

Пусть теперь $y$ — произвольная точка множества $\overline{B}$. Для каждой точки $(x,y) \in \overline{A} \times \{y\}$ найдется элемент $U_{x,y} = A_{x_y} \times B_{y_x} \times C_{x,y} \in \mathcal{R}$ такой, что $A_{x_y} \times B_{y_x}$ содержит точку $(x,y)$. Из семейства $\{U_{x,y} : (x,y) \in \overline{A} \times \{y\}\}$ выделим конечное покрытие $\{U_{x(i),y} = A_{x(i)_y} \times B_{y_{x(i)}} \times C_{x(i),y} : i \leq k\}$ компактного множества $\overline{A} \times \{y\} \times \overline{C}$. Положим $B_y = \bigcap\{B_{y_{x(i)}} : i \leq k\}$. Тогда для каждого $i$ выполняется $A_{x(i)_y} \times B_y \times C_{x(i),y} \subseteq A_{x(i)_y} \times B_{y_{x(i)}} \times C_{x(i),y} \in \mathcal{R}$. Так же, как и выше, выводим, что $A_{x(i)_y} \times B_y \times C_{x(i),y} \in \mathcal{R}$ и $\bigcup\{A_{x(i)_y} : i \leq k\} \times B_y \times \bigcap\{C_{x(i),y} : i \leq k\} = A_{x,y} \times B_y \times C_{x,y} = U'_y \in \mathcal{R}$, где $A_{x,y} \supseteq \overline{A}$, $C_{x,y} \supseteq \overline{C}$.

Построим $U'_y$ для каждой точки $y \in \overline{B}$. Выделим конечное покрытие $\{U'_{y(i)} : i \leq l\}$ компактного множества $\overline{B}$. Положим $By = \bigcup\{A_{y(i)} : i \leq l\}$, $Ax = \bigcap\{A_{x,y(i)} : i \leq l\}$, $Cz = \bigcap\{C_{x,y(i)} : i \leq l\}$. Так же, как и выше, выводится формула $Ax \times By \times Cz \in \mathcal{R}$ и $Ax \times By \times Cz \supseteq A \times B \times C$ (так как $A \subseteq Ax$, $B \subseteq Bx$, $C \subseteq Cx$). Отсюда следует, что $A \times B \times C \in \mathcal{R}$.

Предложение доказано.

Из теоремы 5 вытекает и такое

**Следствие 7.** *Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ является устойчиво локально связным пространством.*

Рассмотрим теперь конечнократные отображения. О них известно следующее (см. [1, гл. VI, §4]).

**Теорема 6.** *Пусть $f : X \to Y$ — открытое конечнократное отображение. Тогда (при условии $w(Y) \geq \omega_0$)*

(a) *сетевой вес $nw(X)$ пространства $X$ не превосходит $w(Y)$;*

(b) *если $X$ перистое, то $w(X) = w(Y)$.*

Напомним, что пространство $Y$ называется *бэровским*, если любое открытое множество в $Y$ имеет вторую категорию.

**Теорема 7.** *Если $f$ — открытое конечнократное отображение пространства $X$ на бэровское пространство $Y$, то в $X$ имеется открытое плотное подмножество $A$ такое, что $w(A) \leq w(Y)$ (при $w(Y) \geq \omega_0$).*

Доказательство. Без потери общности можно предположить, что для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется точка $x(k) \in Y$ такая, что $|f^{-1}(x(k))| = k$.

Положим $A(k) = \{y : y \in Y, |f^{-1}(y)| \leq k\}$. Заметим, что множество $A(k)$ замкнуто. Действительно, пусть $y \notin A(k)$. Тогда $l = |f^{-1}(y)| > k$. Пусть $f^{-1}(y) = \{x_i : i \leq l\}$. Выберем непересекающиеся окрестности $W_i$ точек $x_i$ $(i \leq l)$. Положим $W = \bigcap\{f(W_i) : i \leq l\}$. Тогда $W \cap A(k) = \varnothing$.

Имеем $Y = \bigcup\{A(k) : k \in \mathbb{N}\}$. В силу того, что $Y$ — бэровское пространство, найдется первое $k_1$ такое, что $\langle A(k_1)\rangle \neq \varnothing$, где $\langle A(k_1)\rangle$ — внутренность $A(k_1)$. Положим $V(k_1) = \langle A(k_1)\rangle \setminus A(k_1 - 1)$. Отображение $f|_{f^{-1}(V(k_1))} : f^{-1}(V(k_1)) \to V(k_1)$ будет $k_1$-кратным, так что $w(f^{-1}(V(k_1))) \leq w(V(k_1)) \leq w(Y)$ (см. следствие 1 теоремы 1). Положим $W(k_1) = f^{-1}(V(k_1))$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ построим по индукции открытые множества $V(k_n)$ и $W(k_n)$ такие, что $V(k_n) = \langle A(k_n)\rangle \setminus A(k_n - 1), W(k_n) = f^{-1}(V(k_n))$ и $k_n$ — первое после $k_{n-1}$ число такое, что $\langle A(k_n) \setminus A(k_{n-1})\rangle \neq \varnothing$. Положим $A = \bigcup W_{k_n}$, $B = \bigcup V_{k_n}$. Ясно, что $w(A) \leq w(B) \leq w(Y)$ (семейства $\{V(k_n) : n \in \mathbb{N}\}$ и $\{W(k_n) : n \in \mathbb{N}\}$ состоят из непересекающихся множеств).

Докажем, что множество $B$ плотно в $Y$. Пусть $y \in Y$ — произвольная точка, $V$ — ее произвольная окрестность. Найдется первое $n$ такое, что $V \cap \langle A(k_n)\rangle \neq \varnothing$. Из этого следует, что и множество $A$ плотно в $X$.

Теорема доказана.

Отметим, что существует открытое конечнократное отображение счетного пространства $X$ на компакт $Y$ (являющийся александровской компактификацией счетного дискрета) такое, что $\chi(X) > w(Y) = \omega_0$, где $\chi(X)$ — характер $X$ (см. [1, гл. VI, §4]). Построим более простой пример с аналогичным свойством.

Пример 3. Пусть $a\mathrm{N}$ — александровская компактификация подпространства N числовой прямой R. Пусть $X = \{a^*\} \cup \bigcup\{\mathrm{N}_i : i \in \mathbb{N}\}$ (где $\mathrm{N}_i \cap \mathrm{N}_j = \varnothing$ при $i \neq j$) — классический пример счетного пространства с одной неизолированной точкой $a^*$, в которой характер пространства $X$ несчетен. Отображение $f$ задается следующим образом. Если $k \in \mathrm{N}_i$, то $f(k) = k+i,\ f(a^*) = a$. Легко проверить, что отображение $f : X \to a\mathbb{N}_0$ непрерывно, открыто и конечнократно. Если $N_i$ объявить замкнутыми, то получим пространство без нетривиальных сходящихся последовательностей.

В заключение поставим вопросы, которые естественно возникли при этом исследовании, но к решению которых автор не приступал.

Вопрос 1. Является ли жестким пространство $\omega_1$ всех счетных ординалов в естественной топологии?

Вопрос 2. Всякое ли (сильно) нульмерное пространство жестко?

Вопрос 3. Будет ли (конечное) произведение (локально компактных) устойчиво локально связных пространств устойчивым (или хотя бы жестким) пространством?

Вопрос 4. Будет ли (конечное) произведение жестких пространств жестким?

Вопрос 5. Существует ли достаточно простой критерий жесткости связных (локально связных) пространств?

Вопрос 6. Всякое ли подпространство жесткого пространства жестко?

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Архангельский А.В., Пономарев В.И.** Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974.
2. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986.


Поступила 5.02.2008

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14 № 2 2008

УДК 515.125, 515.126

# МИНИМАЛЬНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ В ВЕЩЕСТВЕННУЮ ПРЯМУЮ[1]

**М. А. Патракеев**

В статье доказывается теорема, дающая описание $\mathbb{R}$-минимальных топологических пространств, т.е. тех пространств $(X, \tau)$, которые топологически вкладываются в вещественную прямую $\mathbb{R}$, но уже не обладают этим свойством при замене $\tau$ более слабой топологией.

Известно, что любое непрерывное инъективное отображение компактного топологического пространства в хаусдорфово является гомеоморфным вложением. Если мы ограничимся подмножествами евклидовых пространств $\mathbb{R}^n$, то из теоремы Брауэра об инвариантности областей [1] нетрудно вывести, что всякое непрерывное инъективное отображение открытого подмножества евклидова пространства в евклидово пространство той же размерности также является гомеоморфным вложением. С другой стороны, в бесконечномерном гильбертовом пространстве, в счетной степени $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ вещественной прямой и в канторовом совершенном множестве $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ лишь компактные подмножества обладают аналогичным свойством. Мы рассматриваем и решаем задачу характеризации подмножеств вещественной прямой $\mathbb{R}$, любое непрерывное инъективное отображение которых в вещественную прямую является гомеоморфным вложением. Оказывается, что помимо компактных и открытых подмножеств в $\mathbb{R}$ имеются и другие подмножества, обладающие данным свойством. Нам неизвестны подобные описания для подмножеств евклидовых пространств размерности $\geq 2$. Если $\mathcal{P}$ — топологическое свойство, то пространство $X$ называется $\mathcal{P}$-минимальным, если оно обладает свойством $\mathcal{P}$, но утрачивает его при любой более слабой топологии на $X$. В связи с этим мы даем следующее

О п р е д е л е н и е. Топологическое пространство $(X, \tau)$ назовем $\mathbb{R}$-*минимальным*, если оно гомеоморфно подпространству вещественной прямой $\mathbb{R}$, но уже не обладает этим свойством при любой более слабой топологии $\tau' \subseteq \tau$, $\tau' \neq \tau$.

Заметим, что пространство $X$ $\mathbb{R}$-минимально тогда и только тогда, когда оно топологически вкладывается в $\mathbb{R}$ и при этом любое непрерывное инъективное отображение из $X$ в $\mathbb{R}$ является гомеоморфным вложением. Таким образом, мы даем характеристику $\mathbb{R}$-минимальных топологических пространств. Заметим также, что существуют подпространства вещественной прямой, отличные от $\mathbb{R}$-минимальных — например, подпространство, состоящее из интервала и точки, не принадлежащей замыканию этого интервала.

В статье используются обозначения и терминология, принятые в книге "Общая топология" Р. Энгелькинга [2]. Замыкание, внутренность и граница множества $A$ в топологическом пространстве $X$ обозначаются соответственно через $[A]_X$, $\mathrm{Int}_X A$ и $\mathrm{Fr}_X A$ (если пространство $X$ понимается однозначно, то нижний индекс $X$ опускается). Символами $\mathrm{id}_A$, $f|_A$ и $\mathbb{R}^*$ обозначаются соответственно тождественное отображение на множестве $A$, сужение отображения $f$ на множество $A$ и двухточечная компактификация вещественной прямой, гомеоморфная отрезку (считается, что $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$).

Напомним, что топологическое пространство называется связным, если в нем нет открыто-замкнутых подмножеств, отличных от пустого множества и всего пространства. Подмножество

[1]Работа выполнена при поддержке молодежного гранта УрО РАН 2007 года.

$M \subseteq A$ называется компонентой пространства $A$, если оно является максимальным по включению связным подпространством $A$. Компонентой точки называется компонента пространства, содержащая данную точку. Для подпространства $A \subseteq \mathbb{R}$ компонентами $A$ могут быть одноточечные множества, отрезки, конечные или бесконечные интервалы (бесконечным интервалом мы называем открытый луч или всю прямую) и конечные или бесконечные полуинтервалы (бесконечным полуинтервалом мы называем замкнутый луч). Символом $\Gamma_A$ мы будем обозначать семейство нетривиальных (т.е. не сводящихся к точке) компонент подпространства $A \subseteq \mathbb{R}$.

Прежде чем формулировать основную теорему, приведем без доказательства вспомогательную лемму, фактически известную из курса математического анализа.

**Лемма.** *Пусть множество $A \subseteq \mathbb{R}$ есть промежуток $(a,b)$, $[a,b]$, $[a,b)$ или $(a,b]$ $(a,b \in \mathbb{R}^*)$ и отображение $f\colon A \to \mathbb{R}$ непрерывно и взаимно однозначно. Тогда образ $A$ при отображении $f$ есть промежуток того же вида, например, $f((a,b]) = (c,d]$ или $f((a,b]) = [d,c)$, где $c \in \mathbb{R}^*$, $d \in \mathbb{R}$; при этом обратное отображение $f^{-1}\colon f(A) \to A$ также непрерывно.*

**Теорема.** *Подпространство $A$ вещественной прямой является $\mathbb{R}$-минимальным в том и только том случае, если выполняется хотя бы одно из условий* (1)–(4):

(1) *$A$ — компакт.*

(2) *$A$ открыто в $\mathbb{R}$.*

(3) *$A$ является полуинтервалом или замкнутым лучом, т.е. $A$ имеет вид $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,+\infty)$ или $(-\infty,a]$.*

(4) *Все компоненты $A$ нетривиальны, т.е. $A = \bigcup\{M\colon M \in \Gamma_A\}$; множество $\bigcup\{[M]_{\mathbb{R}^*}\colon M \in \Gamma_A\}$ — компакт; для любой компоненты $M$ множества $A$ всякая точка $a \in \operatorname{Fr} M$ принадлежит $M$ тогда и только тогда, когда любая окрестность $O_a$ точки $a$ содержит бесконечное число компонент множества $A$.*

Доказательство. Докажем, что если для множества $A \subseteq \mathbb{R}$ выполняется хотя бы одно из условий (1)–(4), то $A$ является $\mathbb{R}$-минимальным. Предположим, что выполняется условие (1), т.е. множество $A$ — компакт. Поскольку любое непрерывное инъективное отображение компакта в хаусдорфово пространство является гомеоморфным вложением, то множество $A$ $\mathbb{R}$-минимально.

Предположим, что выполняется условие (2), т.е. множество $A$ открыто. Пусть $f\colon A \to f(A) \subseteq \mathbb{R}$ — непрерывное инъективное отображение. Поскольку множество $A$ открыто, то интервалы, лежащие в $A$, образуют базу подпространства $A$. По лемме образ любого интервала при отображении $f$ открыт в $\mathbb{R}$, а следовательно, и в $f(A)$, поэтому отображение $f$ открыто. Так как открытое инъективное непрерывное отображение является гомеоморфным вложением, то мы получаем, что множество $A$ $\mathbb{R}$-минимально.

Если выполняется условие (3), то $\mathbb{R}$-минимальность $A$ следует непосредственно по лемме.

Предположим, что выполняется условие (4). Представим условие (4) в виде конъюнкции условий (4.1)–(4.4):

(4.1) $A = \bigcup\{M\colon M \in \Gamma_A\}$, т.е. все компоненты множества $A$ нетривиальны.

(4.2) Множество $\bigcup\{[M]_{\mathbb{R}^*}\colon M \in \Gamma_A\}$ — компакт.

(4.3) Для любого множества $M \in \Gamma_A$ и любой точки $a \in \operatorname{Fr} M \setminus M$ существует окрестность $O_a$ точки $a$, которая не содержит нетривиальных компонент множества $A$.

(4.4) Для любого множества $M \in \Gamma_A$ и любой точки $a \in \operatorname{Fr} M \cap M$ любая окрестность $O_a$ точки $a$ содержит бесконечное число нетривиальных компонент множества $A$.

Пусть отображение $f\colon A \to \mathbb{R}$ непрерывно и инъективно. Нам нужно доказать, что отображение $f$ является гомеоморфным вложением, т.е. доказать непрерывность отображения $f^{-1}\colon f(A) \to A$. Пусть $M \in \Gamma_A$. Поскольку множество $\operatorname{Int} M$ — внутренность множества $M$ в $\mathbb{R}$ — открыто в $\mathbb{R}$, то по доказанному выше оно $\mathbb{R}$-минимально, следовательно, отображение $f|_{\operatorname{Int} M}$ является гомеоморфным вложением. Поскольку множество $\operatorname{Int} M$ является конечным или бесконечным интервалом, то по лемме его образ $f(\operatorname{Int} M)$ открыт в $\mathbb{R}$, следовательно, открыт и в $f(A)$, а так как отображение $f^{-1}|_{f(\operatorname{Int} M)}\colon f(\operatorname{Int} M) \to \operatorname{Int} M$ непрерывно, то и само отображение $f^{-1}\colon f(A) \to A$ непрерывно в точках множества $f(\operatorname{Int} M)$. Поскольку $A = \bigcup\{M\colon M \in \Gamma_A\}$, то нам осталось доказать непрерывность отображения $f^{-1}$ в точках множества $\bigcup_{M\in\Gamma_A} f(M \setminus \operatorname{Int} M)$.

Предположим противное, пусть существует множество $M \in \Gamma_A$ и точка $b \in M \setminus \operatorname{Int} M$ такие, что отображение $f^{-1}$ имеет разрыв в точке $f(b)$. Тогда существует последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ такая, что ее образ $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к точке $f(b)$, а сама последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ не сходится к точке $f^{-1}(f(b)) = b$. Найдется окрестность $O_b$ точки $b$ такая, что вне ее имеется бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, поэтому можно сразу считать, что вся последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ лежит в множестве $A \setminus O_b$. Поскольку $A = \bigcup\{M\colon M \in \Gamma_A\} \subseteq \bigcup\{[M]_{\mathbb{R}^*}\colon M \in \Gamma_A\}$ и по условию (4.2) множество $\bigcup\{[M]_{\mathbb{R}^*}\colon M \in \Gamma_A\}$ — компакт, то найдутся точка $a \in \bigcup\{[M]_{\mathbb{R}^*}\colon M \in \Gamma_A\}$ и подпоследовательность последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, сходящаяся к точке $a$. Можно считать, что сама последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к $a$.

Поскольку последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ лежит вне окрестности $O_b$ точки $b$, то она не сходится к точке $b$, следовательно, $a \neq b$. Более того, $a \notin A$: если это не так и $a \in A$, то в силу непрерывности отображения $f$ последовательность $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ будет сходиться к точке $f(a)$, а так как $a \neq b$ и отображение $f$ инъективно, то $f(a) \neq f(b)$, что противоречит сходимости последовательности $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ к точке $f(b)$. Поскольку $a \in \bigcup\{[M]_{\mathbb{R}^*}\colon M \in \Gamma_A\}$, то найдется множество $M_0 \in \Gamma_A$ такое, что $a \in [M_0]_{\mathbb{R}^*}$.

Покажем, что найдется множество $M_1 \in \Gamma_A$, содержащее бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. В случае, если $a \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}$, само множество $M_0$ подходит в качестве $M_1$. Рассмотрим случай, когда $a \in \mathbb{R}$. В этом случае $a \in [M_0]_{\mathbb{R}^*}$ влечет $a \in [M_0]_{\mathbb{R}}$, а так как $a \notin A$, то $a \in [M_0]_{\mathbb{R}} \setminus M_0 = \operatorname{Fr} M_0 \setminus M_0$. Тогда по условиям (4.1) и (4.3) некоторый интервал $(c,d) \ni a$ не содержит компонент множества $A$. Можно считать, что $c \in M_0$. Если $(a,d) \cap A = \varnothing$, то положим $M_1 = M_0$. Если $(c,a)$ содержит лишь конечное число $x_n$, то имеется компонента $L \neq M_0$ из $\Gamma_A$ с концом $a$, и тогда положим $M_1 = L$. Можно считать, что вся последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ содержится в множестве $M_1$. Покажем, что $M_1 \neq M$. Поскольку $M \in \Gamma_A$, то $M$ — отрезок, интервал (конечный или бесконечный) либо полуинтервал (конечный или бесконечный). Во всех случаях, как было доказано выше, множество $M$ $\mathbb{R}$-минимально, следовательно, отображение $f|_M\colon M \to \mathbb{R}$ является гомеоморфным вложением. Если множества $M$ и $M_1$ совпадают, то последовательность $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ лежит в множестве $f|_M(M)$ и сходится к точке $f|_M(b)$, следовательно, последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (прообраз) сходится к точке $b$, что невозможно. Таким образом, $M_1 \neq M$.

Множество $M$ является нетривиальной компонентой $A$, отображение $f$ инъективно, поэтому множество $f(M)$ содержит более одной точки и связно, а следовательно, выпукло. Поскольку $f(b) \in f(M)$, найдется число $\varepsilon_1 > 0$ такое, что либо $(f(b) - \varepsilon_1, f(b)] \subseteq f(M)$, либо $[f(b), f(b) + \varepsilon_1) \subseteq f(M)$. Последовательность $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к точке $f(b)$, поэтому найдется ее монотонная подпоследовательность $\{f(x_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$, сходящаяся к точке $f(b)$. Поскольку эта подпоследовательность содержится в множестве $f(M_1)$, которое как непрерывный образ связного множества связно, а следовательно, выпукло, то для любого $k \in \mathbb{N}$ отрезок с концами в точках $f(x_{n_k})$ и $f(x_{n_{k+1}})$ содержится в множестве $f(M_1)$. Следовательно, найдется число $\varepsilon_2 > 0$ такое, что либо $(f(b) - \varepsilon_2, f(b)) \subseteq f(M_1)$, либо $(f(b), f(b) + \varepsilon_2) \subseteq f(M_1)$. Поскольку множества $M$ и $M_1$ как различные компоненты $A$ не пересекаются, то в итоге мы имеем, что при $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ интервал $(f(b) - \varepsilon, f(b) + \varepsilon)$ содержится в множестве $f(M \cup M_1)$.

Поскольку $b \in M \setminus \operatorname{Int} M$, то $b \in \operatorname{Fr} M$ и $b \in M$, следовательно, по условию (4.4) любая окрестность точки $b$ содержит бесконечное число нетривиальных компонент $A$. Тогда найдется последовательность $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A \setminus (M \cup M_1)$, сходящаяся к точке $b$. Образ этой последовательности лежит в множестве $f(A \setminus (M \cup M_1))$ и сходится к точке $f(b)$, но это противоречит тому, что отображение $f$ инъективно и интервал $(f(b) - \varepsilon, f(b) + \varepsilon)$ целиком содержится в множестве $f(M \cup M_1)$. Тем самым доказано, что множество $A$ $\mathbb{R}$-минимально.

Теперь докажем обратное: если множество $A$ $\mathbb{R}$-минимально, то выполняется хотя бы одно из условий (1)–(4). Для доказательства нам потребуется рассмотреть два дополнительных условия на множество $A \subseteq \mathbb{R}$:

(5) Существуют строго монотонная последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в множестве $A$ и последовательность $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в множестве $\mathbb{R}\setminus A$ такие, что для любого $n \in \mathbb{N}$ точка $y_n$ лежит между точками $x_n$ и $x_{n+1}$ (т.е. $y_n \in (\min(x_n, x_{n+1}), \max(x_n, x_{n+1})))$ и предел последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ принадлежит $\mathbb{R}^*\setminus A$ (этот предел существует, так как последовательность монотонна).

(6) Множество $A$ гомеоморфно такому подмножеству $A'$ вещественной прямой $\mathbb{R}$, для которого существуют точки $a, b \in \mathbb{R}$ $(a \neq b)$ такие, что $(a, b) \subseteq \mathbb{R}\setminus A'$ и при этом хотя бы один из концов интервала $(a, b)$ лежит в $A'$, т.е. $a \in A'$ или $b \in A'$.

Мы покажем, что если множество $A$ $\mathbb{R}$-минимально, то из условия (5) следует условие (2), а из условия (6) следует условие (1) или (3). Далее мы покажем, что если для множества $A \subseteq \mathbb{R}$ не выполняется условие (4), то для $A$ выполняется условие (5) или (6). Тем самым мы покажем, что если $A$ $\mathbb{R}$-минимально, то из отрицания условия (4) следует условие (1), (2) или (3), что собственно и даст нам доказательство теоремы в обратную сторону.

Чтобы показать, что из отрицания условия (4) следует условие (5) или (6), мы воспользуемся тем, что условие (4) равносильно конъюнкции условий (4.1)–(4.4). Мы докажем, что: отрицание условия (4.1) влечет выполнение условия (6); отрицание условия (4.2) при условии (4.1) влечет за собой условие (5); отрицание условия (4.3) влечет условие (5) и отрицание условия (4.4) при условии (4.1) влечет условие (6). Это даст нам, что отрицание условия (4) влечет условие (5) или (6), что и требовалось.

Схематически наши рассуждения выглядят следующим образом. Нам нужно доказать, что ($A$ $\mathbb{R}$-минимально) $\Rightarrow$ (1) $\vee$ (2) $\vee$ (3) $\vee$ (4). Используя вспомогательные условия (5) и (6), мы доказываем следующие импликации:

(i) ($A$ $\mathbb{R}$-минимально) & (5) $\Rightarrow$ (2),
(ii) ($A$ $\mathbb{R}$-минимально) & (6) $\Rightarrow$ (1) $\vee$ (3).

Далее мы хотим доказать, что $\neg$(4) $\Rightarrow$ (5) $\vee$ (6). Для этого потребуются следующие импликации:

(iii) $\neg$(4.1) $\Rightarrow$ (6),
(iv) $\neg$(4.2) & (4.1) $\Rightarrow$ (5),
(v) $\neg$(4.3) $\Rightarrow$ (5),
(vi) $\neg$(4.4) & (4.1) $\Rightarrow$ (6).

Поскольку (4) $\Leftrightarrow$ (4.1) & (4.2) & (4.3) & (4.4), то $\neg$(4) $\Rightarrow$ $\neg$(4.1) $\vee$ ($\neg$(4.2)&(4.1)) $\vee$ $\neg$(4.3) $\vee$ ($\neg$(4.4)&(4.1)). Отсюда, используя импликации (iii)–(vi), получаем, что $\neg$(4) $\Rightarrow$ (5) $\vee$ (6). Из этого, используя импликации (i) и (ii), мы получаем, что ($A$ $\mathbb{R}$-минимально) & $\neg$(4) $\Rightarrow$ (1) $\vee$ (2) $\vee$ (3), а значит, ($A$ $\mathbb{R}$-минимально) $\Rightarrow$ (1) $\vee$ (2) $\vee$ (3) $\vee$ (4), что и требуется доказать.

Остается доказать импликации (i)–(vi).

(i) ($A$ $\mathbb{R}$-минимально) & (5) $\Rightarrow$ (2).

Пусть множество $A$ является $\mathbb{R}$-минимальным и существуют строго монотонная последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в $A$ и последовательность $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в $\mathbb{R}\setminus A$ такие, что для любого $n \in \mathbb{N}$ точка $y_n$ лежит между точками $x_n$ и $x_{n+1}$ и предел последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ принадлежит $\mathbb{R}^*\setminus A$. Нам нужно доказать, что множество $A$ открыто в $\mathbb{R}$. Предположим противное. Без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ возрастающая. Обозначим $a = \lim_{n\to\infty} x_n$, по условию $a \in \mathbb{R}^*\setminus A$. Обозначим $A_0 = [a, +\infty]$ (если $a = +\infty$, то $A_0 = [+\infty, +\infty] = \{+\infty\} \subseteq \mathbb{R}^*$), $A_1 = [-\infty, y_1]$, $A_n = [y_{n-1}, y_n]$ (при $n \geq 2$). Далее, при $n \in \mathbb{N}$ положим $\widetilde{A}_n = A_n \bigcap A$. Поскольку $a \notin A$, $+\infty \notin A$, $-\infty \notin A$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ $y_n \notin A$, то для каждого $n = 0, 1, \ldots$ множество $\widetilde{A}_n$ открыто-замкнуто в $A$ и $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} \widetilde{A}_n$.

Поскольку, как мы предположили, множество $A$ не открыто в $\mathbb{R}$, то найдется точка $b \in A \setminus \operatorname{Int} A$. Поскольку $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} \widetilde{A}_n$, то найдется номер $n_0 = 0, 1, \ldots$ такой, что $b \in \widetilde{A}_{n_0}$. Обозначим $A_{n_0} = [c, d]$ (т.е. если $n_0 \geq 2$, то $c = y_{n_0-1}$, $d = y_{n_0}$; если $n_0 = 1$, то $c = -\infty$, $d = y_1$; если $n_0 = 0$, то $c = a$, $d = +\infty$). Поскольку $b \in \widetilde{A}_{n_0}$, то $b \in (c, d)$. Далее, поскольку точка $b$ не является внутренней точкой множества $A$, а следовательно, и множества $\widetilde{A}_{n_0}$, то найдется строго монотонная последовательность $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в $(c, d) \setminus \widetilde{A}_{n_0}$, сходящаяся к точке $b$. Без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ возрастающая.

Обозначим $B_0 = [b, d]$, $B_1 = [c, z_1]$, $B_n = [z_{n-1}, z_n]$ (при $n \geq 2$). Далее при $n = 0, 1, \ldots$ обозначим $\widetilde{B}_n = B_n \bigcap A$. При $n \geq 1$ множества $\widetilde{B}_n$ открыто-замкнуты в $A$, поскольку $z_n \notin A$ и $c \notin A$.

Построим непрерывное инъективное отображение $f\colon A \to f(A) \subseteq \mathbb{R}$, которое не является гомеоморфным вложением. Положим $f|_{\widetilde{A}_n} = \mathrm{id}_{\widetilde{A}_n}$ при $n = 0, 1, \ldots, n_0 - 1$ и $f|_{\widetilde{B}_0} = \mathrm{id}_{\widetilde{B}_0}$ (следовательно, $f(b) = b$).

При $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $g_n\colon B_n \to B_{2n}$ и $h_n\colon A_{n_0+n} \to B_{2n-1}$ гомеоморфизмы соответственно отрезка $B_n$ на отрезок $B_{2n}$ и отрезка $A_{n_0+n}$ на отрезок $B_{2n-1}$ и положим $f|_{\widetilde{B}_n} = g_n|_{\widetilde{B}_n}$ и $f|_{\widetilde{A}_{n_0+n}} = h_n|_{\widetilde{A}_{n_0+n}}$.

Очевидно, что таким образом мы получили непрерывное инъективное отображение $f\colon A \to \mathbb{R}$. Поскольку последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к точке $a \notin A$, а образ этой последовательности $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к точке $b \in f(A)$ (это следует из того, что при $n > n_0$ точка $x_n$ лежит в множестве $\widetilde{A}_n$), то отображение $f$ не является гомеоморфным вложением. Таким образом, мы получили противоречие с тем, что множество $A$ $\mathbb{R}$-минимально, а следовательно, множество $A$ открыто в $\mathbb{R}$, что и требовалось.

(ii) ($A$ $\mathbb{R}$-минимально) & (6) $\Rightarrow$ (1) $\vee$ (3).

Пусть множество $A$ $\mathbb{R}$-минимально, $A$ гомеоморфно множеству $A' \subseteq \mathbb{R}$ (тогда $A'$ $\mathbb{R}$-минимально) и существуют точки $a, b \in \mathbb{R}$ ($a \neq b$) такие, что $(a, b) \subseteq \mathbb{R} \setminus A'$ и при этом хотя бы один из концов интервала $(a, b)$ лежит в $A'$. Без ограничения общности можно считать, что $b \in A'$. Нам нужно доказать, что множество $A$ либо компакт, либо полуинтервал, либо замкнутый луч. Предположим противное, тогда и $A'$ не компакт, а по лемме оно не является ни полуинтервалом, ни замкнутым лучом. Так как $A'$ не компакт, найдутся точка $c \in \mathbb{R}^* \setminus A'$ и последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A'$, сходящаяся к точке $c$. Можно считать, что последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ строго монотонна. Поскольку $c \notin A'$, то $c \neq b$. Возможны следующие три случая:

(a) $b > c$,
(b) $b < c$ и найдется точка $d \in (b, c) \setminus A'$,
(c) $b < c$ и $(b, c) \subseteq A'$.

Рассмотрим случай (a). Поскольку $c < b$ и $(a, b) \subseteq \mathbb{R} \setminus A'$, то найдется точка $d$, лежащая в $(c, b) \setminus A'$. Возможны два подслучая: последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ либо возрастает, либо убывает.

Пусть последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ возрастает. Рассмотрим гомеоморфизм $h$ отрезка $[-\infty, c]$ на отрезок $[a, b]$ такой, что $h(c) = b$ и $h(-\infty) = a$. Определим отображение $f\colon A' \to \mathbb{R}$ следующим образом: $f|_{[-\infty,c]\cap A'} = h|_{[-\infty,c]\cap A'}$, $f|_{A'\setminus[-\infty,c]} = \mathrm{id}_{A'\setminus[-\infty,c]}$.

Очевидно, что построенное таким образом отображение $f$ непрерывно и инъективно. Поскольку последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ строго возрастающая, сходится к точке $c$ и содержится в множестве $A'$, то она содержится в множестве $[-\infty, c] \cap A'$, следовательно, ее образ $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к точке $b$. Но так как $b = f(b) \in f(A')$, а $c \notin A'$, то отображение $f$ переводит последовательность, которая не сходится в множестве $A'$, в последовательность, которая сходится в множестве $f(A')$, следовательно, $f$ не является гомеоморфным вложением. Это противоречит тому, что множество $A'$ $\mathbb{R}$-минимально.

Пусть теперь последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ убывает. Поскольку $d \in (c, b)$, то $c < d$, поэтому мы можем считать, что вся последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ лежит в интервале $(c, d)$. Рассмотрим гомеоморфизм $h$ отрезка $[c, d]$ на отрезок $[a, b]$ такой, что $h(c) = b$ и $h(d) = a$, и определим отображение $f\colon A' \to \mathbb{R}$ следующим образом: $f|_{[c,d]\cap A'} = h|_{[c,d]\cap A'}$, $f|_{A'\setminus[c,d]} = \mathrm{id}_{A'\setminus[c,d]}$.

На этот раз $c \notin A'$, $d \notin A'$, поэтому $f([c, d]\cap A') \subseteq (a, b)$, и аналогично предыдущему случаю получаем инъективность отображения $f$. Непрерывность отображения $f$ также получается аналогично — множества $[c, d] \cap A'$ и $A' \setminus [c, d]$ открыто-замкнуты в $A'$. Снова получаем, что последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ не сходится в множестве $A'$, а ее образ сходится в множестве $f(A')$ к точке $f(b) = b$, и мы получаем искомое противоречие с тем, что множество $A'$ $\mathbb{R}$-минимально.

Рассмотрим случай (b), когда $b < c$ и существует точка $d \in (b, c) \setminus A'$. Этот случай полностью аналогичен случаю (a). Если последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ убывающая, то мы построим непрерывное инъективное отображение $f\colon A' \to f(A') \subseteq \mathbb{R}$, не являющееся гомеоморфным вложением, при помощи гомеоморфизма $h$ отрезка $[c, +\infty]$ на отрезок $[a, b]$ такого, что $h(c) = b$ и $h(+\infty) = a$ (в этом случае $f$ определяется так: $f|_{[c,+\infty]\cap A'} = h|_{[c,+\infty]\cap A'}$, $f|_{A'\setminus[c,+\infty]} = \mathrm{id}_{A'\setminus[c,+\infty]}$). Если же последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ возрастающая, то непрерывное инъективное отображение $f\colon A' \to f(A') \subseteq \mathbb{R}$, не являющееся гомеоморфным вложением, строится аналогично при помощи гомеоморфизма $h$ отрезка $[d, c]$ на отрезок $[a, b]$ такого, что $h(c) = b$ и $h(d) = a$. В обоих случаях получается искомое противоречие с тем, что множество $A'$ $\mathbb{R}$-минимально.

Рассмотрим случай (c), когда $b < c$ и $(b, c) \subseteq A'$. Поскольку,множество $A'$ не является ни полуинтервалом, ни замкнутым лучом, то $A' \neq [b, c)$ (если $c = +\infty$, то $[b, c)$ есть замкнутый луч). Следовательно, выполняется хотя бы один из двух случаев:

(c.1) $(-\infty, b) \cap A' \neq \varnothing$,
(c.2) $[c, +\infty) \cap A' \neq \varnothing$.

Рассмотрим случай (c.1). Положим $d = \sup\big((-\infty, b)\cap A'\big)$. Пусть вначале $d \in A'$. Построим непрерывное инъективное отображение $f\colon A' \to f(A') \subseteq \mathbb{R}$, не являющееся гомеоморфным вложением. Пусть $h$ — гомеоморфизм отрезка $[b, c]$ на отрезок $[d, c]$ такой, что $h(c) = d$ и $h(b) = c$. Положим $f|_{[b,c]\cap A'} = h|_{[b,c]\cap A'}$ и $f|_{A'\setminus[b,c]} = \mathrm{id}_{A'\setminus[b,c]}$. Построенное таким образом отображение $f$ непрерывно и инъективно. Поскольку последовательность $\big\{c - (c - b)/(n + 2)\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к точке $c \notin A'$, но ее образ при отображении $f$ сходится к точке $d = f(d) \in f(A')$, то $f$ не является гомеоморфным вложением, и это снова противоречит тому, что множество $A'$ $\mathbb{R}$-минимально.

Если же $d \notin A'$, противоречие получается точно так же с той разницей, что берется такой гомеоморфизм $h$ отрезка $[b, c]$ на отрезок $[d, c]$, что $h(b) = d$ и $h(c) = c$.

Рассмотрим случай (c.2), когда $[c, +\infty) \cap A' \neq \varnothing$. Этот случай полностью аналогичен случаю (c.1). Точка $d$ определяется как $\inf([c, +\infty) \cap A')$, рассматривается гомеоморфизм отрезка $[b, c]$ на отрезок $[b, d]$ такой, что либо $h(c) = d$ (если $d \in A'$), либо $h(b) = d$ (если $d \notin A'$). В обоих случаях получается противоречие. Мы рассмотрели все три случая (a)–(c) и везде получили искомое противоречие, таким образом импликация (ii) доказана.

(iii) $\neg(4.1) \Rightarrow (6)$.

Итак, $A \neq \bigcup\{M\colon M \in \Gamma_A\}$, т.е. существует тривиальная (одноточечная) компонента $A$. Нам нужно доказать, что множество $A$ гомеоморфно такому подмножеству $A'$ вещественной прямой $\mathbb{R}$, для которого существуют точки $a, b \in \mathbb{R}$ ($a \neq b$) такие, что $(a, b) \subseteq \mathbb{R} \setminus A'$ и при этом $a \in A'$ или $b \in A'$. Мы построим отображение $f\colon A \to \mathbb{R}$ такое, что $f$ — гомеоморфное вложение, и покажем, что множество $A' = f(A)$ удовлетворяет требуемым свойствам.

Пусть точка $d \in A$ такова, что компонента точки $d$ в подпространстве $A$ есть множество $\{d\}$. Следовательно, никакой интервал вида $(d - \varepsilon, d)$ или $(d, d + \varepsilon)$ не содержится в множестве $A$. Тогда существуют строго возрастающая последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и строго убывающая последовательность $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, лежащие в множестве $\mathbb{R} \setminus A$ и сходящиеся к точке $d$.

При $n \in \mathbb{N}$ положим $B_n = [x_n, x_{n+1}]$, $C_n = [y_{n+1}, y_n]$, $\widetilde{B}_n = B_n \bigcap A$, $\widetilde{C}_n = C_n \bigcap A$ и рассмотрим гомеоморфизм $g_n$ отрезка $B_n$ на отрезок $C_{2n}$ и гомеоморфизм $h_n$ отрезка $C_n$ на отрезок $C_{2n-1}$. Определим отображение $f\colon A \to \mathbb{R}$ следующим образом: при $n \in \mathbb{N}$ положим $f|_{\widetilde{B}_n} = g|_{\widetilde{B}_n}$, $f|_{\widetilde{C}_n} = h|_{\widetilde{C}_n}$ и, кроме того, положим $f|_{A \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\widetilde{B}_n \cup \widetilde{C}_n)} = \mathrm{id}_{A \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\widetilde{B}_n \cup \widetilde{C}_n)}$.

По построению отображение $f$ инъективно, а следовательно, отображение $f^{-1}\colon f(A) \to A$ существует и взаимно однозначно. Нетрудно показать, что отображения $f$ и $f^{-1}$ непрерывны, а следовательно, отображение $f$ является гомеоморфным вложением. Нам осталось показать, что для множества $A' = f(A)$ найдутся точки $a, b \in \mathbb{R}$ $(a \neq b)$ такие, что $(a, b) \subseteq \mathbb{R} \setminus A'$ и при этом $a \in A'$ или $b \in A'$. Очевидно, что точки $a = x_1$ и $b = d$ удовлетворяют данным требованиям (множества $(x_1, d)$ и $A'$ не пересекаются, а точка $d$ лежит в множестве $A'$). Таким образом, импликация (iii) доказана.

(iv) $\neg(4.2)$ & $(4.1) \Rightarrow (5)$.

Итак, множество $\bigcup\{[M]_{\mathbb{R}^*}\colon M \in \Gamma_A\}$ не является компактом и $A = \bigcup\{M\colon M \in \Gamma_A\}$, т.е. все компоненты $A$ нетривиальны.

Поскольку множество $\bigcup\{[M]_{\mathbb{R}^*}\colon M \in \Gamma_A\} \subseteq \mathbb{R}^*$ не компакт, в нем имеется последовательность $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, сходящаяся к некоторой точке $b \in \mathbb{R}^* \setminus \bigcup\{[M]_{\mathbb{R}^*}\colon M \in \Gamma_A\}$. Тогда найдется строго монотонная последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, лежащая в множестве $A$ и также сходящаяся к точке $b$. Без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ строго возрастающая.

Существует строго возрастающая последовательность $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, лежащая в множестве $\mathbb{R}\setminus A$ и сходящаяся к точке $b$. Если это не так, найдется число $c < b$ такое, что $(c, b) \subseteq A$. Тогда имеется множество $M \in \Gamma_A$ такое, что $(c, b) \subseteq M$, следовательно, $b \in [M]_{\mathbb{R}^*}$, что противоречит выбору точки $b$.

Теперь, поскольку обе последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходятся к точке $b$ и являются строго возрастающими, мы может выбрать из них такие подпоследовательности $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ и $\{y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, что для любого $k \in \mathbb{N}$ точка $y_{n_k}$ лежит в интервале $(x_{n_k}, x_{n_{k+1}})$. Поскольку $A = \bigcup\{M\colon M \in \Gamma_A\} \subseteq \bigcup\{[M]_{\mathbb{R}^*}\colon M \in \Gamma_A\}$ и $b \in \mathbb{R}^* \setminus \{[M]_{\mathbb{R}^*}\colon M \in \Gamma_A\}$, то $b \in \mathbb{R}^* \setminus A$, а так как $\{y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \setminus A$ и $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq A$, то условие (5) выполняется для множества $A$. Тем самым импликация (iv) доказана.

(v) $\neg(4.3) \Rightarrow (5)$.

Пусть $M$ — нетривиальная компонента $A$, точка $a$ лежит на границе множества $M$ в $\mathbb{R}$ и любая окрестность $O_a$ точки $a$ содержит бесконечное число нетривиальных компонент $A$, но $a \notin M$. Нам нужно доказать, что существуют строго монотонная последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в $A$ и последовательность $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в $\mathbb{R}\setminus A$ такие, что для любого $n \in \mathbb{N}$ точка $y_n$ лежит между точками $x_n$ и $x_{n+1}$, а предел последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ принадлежит $\mathbb{R}^* \setminus A$.

Множество $M \subseteq \mathbb{R}$ связно, следовательно, выпукло, а так как $a \in \mathrm{Fr}\, M$, то либо $a = \sup(M)$, либо $a = \inf(M)$. Без ограничения общности можно считать, что $a = \sup(M)$. Множество $M$ является компонентой $A$, следовательно, $a \notin A$ — в противном случае точка $a$ оказалась бы в множестве $M$. Поскольку любая окрестность точки $a$ содержит бесконечное число нетривиальных компонент $A$, то найдется последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, сходящаяся к точке $a$ и такая, что все элементы этой последовательности лежат в различных нетривиальных компонентах $A$. Можно считать, что последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ строго монотонна. Поскольку $a = \sup(M)$ и множество $M$ выпукло и не сводится к точке, то найдется интервал $(a - \varepsilon, a) \subseteq M$, поэтому последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ является строго убывающей — иначе в множестве $M$ окажется больше чем один член последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Для каждого номера $n \in \mathbb{N}$ найдется точка $y_n \in (x_{n+1}, x_n)\setminus A$. Если бы это было не так, т.е. весь интервал $(x_{n+1}, x_n)$ лежал бы в множестве $A$, то точки $x_{n+1}$ и $x_n$ принадлежали бы одной компоненте $A$ (той, которая содержит весь интервал $(x_{n+1}, x_n)$), что противоречит построению этих точек.

Поскольку последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ сходится к точке $a \notin A$, то построенные последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ удовлетворяют условию (5); таким образом, импликация (v) доказана.

(vi) $\neg(4.4)$ & $(4.1) \Rightarrow (6)$.

Итак, существуют множество $M \in \Gamma_A$ (нетривиальная компонента $A$) и точка $a$, лежащая на границе множества $M$ в $\mathbb{R}$, такие, что $a \in M$, но существует окрестность $O_a$ точки $a$, которая содержит лишь конечное число нетривиальных компонент $A$ (т.е. $|\{L \in \Gamma_A\colon L \subseteq O_a\}| < \infty$). Кроме этого, все компоненты $A$ нетривиальны. Нам достаточно найти точки $b, c \in \mathbb{R}$ $(b \neq c)$ такие, что $(b, c) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$ и при этом хотя бы одна из точек $b$ или $c$ лежит в множестве $A$.

Снова, как и в предыдущем пункте, множество $M \subseteq \mathbb{R}$ связно, следовательно, оно выпукло, а так как $a \in Fr\,M$, то либо $a = \sup(M)$, либо $a = \inf(M)$. Без ограничения общности можно считать, что $a = \sup(M)$. Положим $b = a$. Поскольку $b \in A$, то для доказательства импликации (vi) достаточно найти точку $c > b$ такую, что $(b, c) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$. Предположим, что такой точки нет. Тогда существует строго убывающая последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, лежащая в множестве $A$ и сходящаяся к точке $a$. Можно считать, что $[a, x_1] \subseteq O_a$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $M_n$ компоненту точки $x_n$ в множестве $A$.

Покажем, что если $M_n \neq M_1$, то $M_n \subseteq [a, x_1]$ $(n \in \mathbb{N})$. Пусть это не так, и существует $z \in M_n \setminus [a, x_1]$. Возможны два случая: $z > x_1$ или $z < a$. Рассмотрим первый случай, когда $z > x_1$. Поскольку различные компоненты не пересекаются и $M_1 \neq M_n$, то $M_1 \cap M_n = \varnothing$. Следовательно, $x_1 \notin M_n$, так как $x_1 \in M_1$. Имеем: $x_n < x_1 < z$, $x_n \in M_n$, $z \in M_n$, $x_1 \notin M_n$. Это противоречит связности $M_n$. Рассмотрим второй случай, когда $z < a$. Поскольку $\sup(M) = a$, $a < x_n$ и $x_n \in M_n$, то $M \neq M_n$, следовательно, $M \cap M_n = \varnothing$. Так как $a \in M$, то $a \notin M_n$. Аналогично первому случаю имеем $z < a < x_n$, $z \in M_n$, $x_n \in M_n$, $a \notin M_n$ и получаем противоречие с тем, что множество $M_n$ связно.

Итак, для каждого $n \in \mathbb{N}$ либо $M_n = M_1$, либо $M_n \subseteq [a, x_1]$. Покажем, что найдется номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что множество $M_{n_0}$ содержит бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Предположим, что это не так. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество $M_n$ содержит не более чем конечное число членов последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, а так как $\{x_n\colon n \in \mathbb{N}\} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$, то число различных множеств среди множеств вида $M_n$ бесконечно. Поскольку все они, кроме совпадающих с $M_1$, содержатся в отрезке $[a, x_1]$, то в $[a, x_1]$ содержится бесконечное число различных множеств вида $M_n$. Поскольку множества $M_n$ суть компоненты $A$ и так как $[a, x_1] \subseteq O_a$, то в окрестности $O_a$ содержится бесконечное число компонент $A$. По условию все они являются нетривиальными компонентами, но это противоречит тому, что $O_a$ не содержит бесконечного числа нетривиальных компонент $A$.

Мы нашли номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что множество $M_{n_0}$ включает бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Можно считать, что вся последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ лежит в множестве $M_{n_0}$. Поскольку это множество связно, оно выпукло, следовательно, для любого $n \in \mathbb{N}$ отрезок $[x_{n+1}, x_n]$ содержится в $M_{n_0}$. Так как $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[x_{n+1}, x_n] = (a, x_0]$, то $(a, x_0] \subseteq M_{n_0} \subseteq A$, следовательно, компонента точки $a$ в подпространстве $A$ содержит отрезок $[a, x_{n_0}]$, но эта компонента есть множество $M$ и $a = \sup(M)$. Это противоречие доказывает импликацию (vi) и тем самым теорему.

В связи с доказанным возникает следующий

Вопрос. Какова характеристика $\mathbb{R}^2$-минимальных подмножеств плоскости $\mathbb{R}^2$?

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дольд А.** Лекции по алгебраической топологии. М.: Мир, 1976.
2. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986.

Поступила 16.02.2008

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14 № 2 2008

УДК 517.977.58

# ПОСТРОЕНИЕ МИНИМАКСНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА ЭЙКОНАЛА[1]

**П. Д. Лебедев, А. А. Успенский, В. Н. Ушаков**

Обоснована формула минимаксного (обобщенного) решения задачи Коши — Дирихле для уравнения типа эйконала в случае изотропной среды при предположении, что краевое множество замкнуто, причем имеет не обязательно гладкую границу. Предложен конструктивный подход к построению минимаксного решения, использующий методы теории особенностей дифференцируемых отображений. Вводится в рассмотрение биссектриса — представитель множеств симметрии. Выделяются псевдовершины — особые точки границы множества и строятся отвечающие им ветви биссектрисы, на которых решение терпит "градиентную катастрофу". Знание биссектрисы позволяет сформировать эволюцию волновых фронтов в областях гладкости обобщенного решения. Указана связь рассматриваемой задачи с одним классом задач динамического управления по быстродействию. Эффективность разработанного подхода иллюстрируется примерами аналитического и численного построения минимаксных решений.

## Введение

Предложены аналитические и численные алгоритмы построения минимаксного решения [1] уравнения в частных производных первого порядка типа эйконала [2]. Уравнения означенного типа рассматриваются в геометрической оптике [3] при описании характеристической функции Гамильтона, при исследовании перестройки волновых фронтов [4]. В теории динамического управления движением эти уравнения изучаются при анализе задачи быстродействия. Введенные в работе конструкции позволяют в ряде случаев строить минимаксное решение уравнения в явном виде. При этом как аналитические, так и вычислительные процедуры построения решения опираются на понятие множества симметрии [5, 6]. Приведенные в работе результаты применимы в теории оптимального управления и в теории позиционных дифференциальных игр [7,8] при изучении негладких особенностей множеств достижимости, стабильных мостов. Кроме того, эти результаты полезны при изучении решения волнового уравнения, в частности, при рассмотрении его характеристического уравнения [9]. Работа продолжает исследования [10–14].

## 1. Постановка задачи

Рассматривается задача Коши — Дирихле для уравнения в частных производных первого порядка:

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 = n(\mathbf{x}), \tag{1.1}$$

$$u|_\Gamma = 0. \tag{1.2}$$

Уравнение (1.1) в геометрической оптике относят к уравнениям типа эйконала. Эйконал $u = u(\mathbf{x})$ — функция от $m$ переменных $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, поверхности уровня которой совпадают с волновыми фронтами. Модуль разности значений гладкого эйконала равен оптической

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 05-01-00601), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-8512.2006.1) и регионального гранта РФФИ/ПСО (проект № 07-0196085).

длине луча, соединяющего две точки. Краевое условие (1.2) определено на границе $\Gamma = \partial M$ замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}^m$. Здесь считаем, что источник волны равномерно распределен вдоль границы $\Gamma$. Положительная функция $n = n(\mathbf{x})$ определяет коэффициент преломления среды. В дальнейшем полагаем, что среда однородна и $n(\mathbf{x}) \equiv 1,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \setminus M$.

Задача (1.1), (1.2) имеет известные особенности. Во-первых, решение нелинейного уравнения в частных производных первого порядка понимается в обобщенном смысле. Классическое (дифференцируемое) решение уравнения (1.1), существуя локально вблизи множества $M$ с гладкой границей, в общем случае не может быть гладким образом продолжено на сколько-нибудь большую область. Во-вторых, уравнение типа эйконала распадается на два различных уравнения вблизи границы $\Gamma = \partial M$ множества $M \subset \mathbb{R}^m$. Нетрудно видеть, что если $\Gamma$ — гладкая поверхность и при этом существует классическое решение $u = u(\mathbf{x})$ задачи (1.1), (1.2), то функция противоположного знака формально также удовлетворяет условиям задачи (1.1), (1.2). Исходя из содержательных аспектов и постулатов геометрической оптики, С.Н. Кружков [2] ввел так называемое главное (фундаментальное) решение задачи (1.1), (1.2), определяемое единственным образом. Фундаментальным решением задачи (1.1), (1.2) является функция $u(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x}, M)$, где $\rho(\mathbf{x}, M) = \min\limits_{\mathbf{y} \in M} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ — евклидово расстояние от точки $\mathbf{x}$ до множества $M$, $\|a\| = \Big(\sum\limits_{i=1}^{m} a_i^2\Big)^{1/2}$ — норма вектора $a = (a_1, \ldots, a_m)$. В общем случае фундаментальное решение не является всюду дифференцируемой функцией.

Наряду с задачей (1.1), (1.2) рассмотрим задачу Коши — Дирихле для уравнения типа Гамильтона — Якоби:

$$\min_{\nu : \|\nu\| \le 1} \langle \nu, Du(\mathbf{x}) \rangle + 1 = 0, \tag{1.3}$$

$$u|_\Gamma = 0. \tag{1.4}$$

Здесь $Du(\mathbf{x}) = \Big(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_m}\Big)$ — градиент функции $u(\mathbf{x})$, $\langle a, b \rangle = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i b_i$ — скалярное произведение векторов $a = (a_1, \ldots, a_m)$ и $b = (b_1, \ldots, b_m)$.

Минимаксное решение задачи (1.3), (1.4) является функцией оптимального результата (см. [1, с. 264]) для задачи быстродействия с простой динамикой

$$\dot{\mathbf{x}} = \nu,$$

где управление $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$ стеснено ограничением $\|\nu\| \leqslant 1$, а целью является замкнутое множество $M \subset \mathbb{R}^m$ с границей $\partial M = \Gamma$. В теории дифференциальных игр [7,8] уравнение (1.3) называется уравнением Айзекса — Беллмана. Важно отметить, что задачи (1.1), (1.2) и (1.3), (1.4) эквивалентны в том смысле, что гладкое решение одной из них является решением другой задачи. Подробно о решениях (гладких и обобщенных — минимаксных/вязкостных) уравнений в частных производных первого порядка типа Гамильтона — Якоби, а также об их связи с приложениями, в частности, с дифференциальными играми и теорией оптимального управления изложено в монографии [1].

Основной целью настоящей работы является разработка аналитических и численных подходов к построению минимаксного решения задачи (1.3), (1.4). При этом используются методы и конструкции дифференциальной геометрии [15], геометрической оптики [3], теории особенностей гладких отображений [4].

## 2. Биссектриса множества

Пусть $M$ — замкнутое множество в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$, точка $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \setminus M$. Под проекцией точки $\mathbf{x}$ на $M$ понимаем ближайшую к $\mathbf{x}$ в евклидовой метрике точку из $M$. Символом $\Omega_M(\mathbf{x})$ обозначим совокупность всех проекций точки $\mathbf{x}$ на $M$.

Для замкнутого множества $M$ из определения проекции следует

$$\rho(\mathbf{x}, M) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \ \ \forall \mathbf{y} \in \Omega_M(\mathbf{x}).$$

О п р е д е л е н и е 1. *Биссектрисой* $L(M)$ *множества* $M$ назовем [13] множество всех точек из $\mathbb{R}^m \setminus M$, которые имеют не менее двух проекций на множество $M$:

$$L(M) = \{\mathbf{x} \in (\mathbb{R}^m \setminus M)\colon \ \exists \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \Omega_M(\mathbf{x}), \ \ \mathbf{y}_1 \neq \mathbf{y}_2\}.$$

Биссектриса является частным представителем множеств симметрии [5]. Топологические особенности множеств симметрии исследованы, в частности, В.Д. Седых [6]. Он изучал схожие многообразия, называемые “middle point sets” и “medial axes”.

Из теоремы Т. Моцкина (см. [16]) следует, что $L(M) = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $M$ — выпуклое множество. Располагая биссектрисой множества, можно найти его меру невыпуклости. Понятие меры невыпуклости введено В.Н. Ушаковым. Во многих случаях задача нахождения функции расстояния от точки до множества $M$ сводится к построению его биссектрисы $L(M)$. В точках биссектрисы функция $\rho = \rho(\mathbf{x}, M)$ теряет гладкость, в этих точках волновые фронты претерпевают изломы [14].

В приводимых ниже конструкциях биссектриса множества и функция расстояния имеют ключевое значение.

## 3. Минимаксное решение уравнения типа эйконала

Эйконал обладает многими свойствами функции расстояния, что проистекает из содержательных аспектов геометрической оптики (см., напр., [3]). Известно также [9], что в изотропной среде эйконал совпадает с функцией расстояния в окрестности краевого множества с гладкой границей. Покажем, что эта функция является не только локальным, но и глобальным решением задачи (1.1), (1.2), в том числе для случая краевого множества с негладкой границей.

**Теорема 1.** *Функция* $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$ *— минимаксное решение задачи Коши — Дирихле* (1.3), (1.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приняв $H\big(Du(\mathbf{x})\big) = -\|Du(\mathbf{x})\| + 1$, перепишем задачу (1.3), (1.4) в виде

$$H\big(Du(\mathbf{x})\big) = 0, \tag{3.1}$$

$$u|_{\Gamma} = 0. \tag{3.2}$$

Функция $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$ удовлетворяет краевому условию (3.2), ибо для любой точки $\mathbf{x} \in \partial M$ расстояние $\rho(\mathbf{x}, M) = 0$.

Функция $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица с константой Липшица $L = 1$. Непрерывная функция $u = u(\mathbf{x})$, для которой выполняется краевое условие (3.2), является *минимаксным* решением задачи (3.1), (3.2), если она является *верхним* решением этой задачи, т.е. если

$$H(s) \geqslant 0 \tag{3.3}$$

при всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \setminus M$ и $s \in D^+u(\mathbf{x})$, где $D^+u(\mathbf{x})$ — супердифференциал функции $u(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}$, и одновременно *нижним* решением этой задачи, т.е. если

$$H(s) \leqslant 0 \tag{3.4}$$

при всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \setminus M$ и $s \in D^-u(\mathbf{x})$, где $D^-u(\mathbf{x})$ — субдифференциал функции $u(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}$.

Функция $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$ расстояния до множества дифференцируема во всех точках $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \setminus M$, имеющих точно одну проекцию на множество $M$ [17, с. 243], а ее градиент равен

$$Du(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\rho(\mathbf{x}, M)} \quad \big(\mathbf{y} \in \Omega_M(\mathbf{x})\big). \tag{3.5}$$

В силу (3.5) в точках дифференцируемости $\|Du(\mathbf{x})\| = 1$, и, стало быть, в этих точках выполняются оба неравенства (3.4) и (3.3).

Когда точка $\mathbf{x}$ принадлежит биссектрисе $L(M)$ и множество $\Omega_M(\mathbf{x})$ содержит не менее двух точек, функция $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$ не является гладкой. При этом она дифференцируема по направлениям $g \in \mathbb{R}^m$, $\|g\| \neq 0$, и производная по направлению равна [17, с. 244]

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial g} = \min_{h \in D^+u(\mathbf{x})} \langle g, h \rangle, \tag{3.6}$$

где

$$D^+u(\mathbf{x}) = \mathrm{co}\left\{ \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\rho(\mathbf{x}, M)} : \mathbf{y} \in \Omega_M(\mathbf{x}) \right\}.$$

Здесь $\mathrm{co}\,\Psi$ — выпуклая оболочка множества $\Psi$.

Равенство (3.6) означает, что функция $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$ супердифференцируема в точках биссектрисы множества $M$.

Поскольку супердифференциал $D^+u(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}$ — это выпуклая оболочка множества, состоящего из точек, лежащих на сфере единичного радиуса, то для произвольного вектора $s \in D^+u(\mathbf{x})$ выполняется оценка:

$$\|s\| \leqslant 1.$$

Отсюда для всех суперградиентов $s \in D^+u(\mathbf{x})$ имеет место неравенство

$$H(s) = 1 - \|s\| \geqslant 0,$$

что означает справедливость условия (3.3). Тем самым показано, что $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$ является нижним решением задачи (3.1), (3.2).

Пустота субдифференциала $D^-u(\mathbf{x})$ функции $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$ в точках $\mathbf{x} \in L(M)$ ее негладкости означает, что $u(\mathbf{x})$ является также верхним решением задачи (3.1), (3.2). Таким образом, $u(\mathbf{x})$ — минимаксное решение задачи Коши — Дирихле (3.1), (3.2).

## 4. Уравнение типа эйконала для плоского случая

Ограничимся подробным исследованием задачи (1.3), (1.4) в двумерном пространстве. При дальнейшем изложении для краткости описания конструкций в $\mathbb{R}^2$ переобозначим компоненты вектора переменных, приняв $\mathbf{x} = (x, y)$:

$$\min_{\nu : \|\nu\| \leq 1} \left( \nu_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \nu_2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 1 = 0, \tag{4.1}$$

$$u|_{\Gamma} = 0. \tag{4.2}$$

Минимаксное решение задачи (4.1), (4.2) является функцией оптимального результата в соответствующей задаче быстродействия, где управление $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ стеснено ограничением $\|\nu\| \leqslant 1$, а $M \subset \mathbb{R}^2$ есть целевое множество. Будем полагать, что граница $\Gamma = \partial M$ этого множества является непрерывной склейкой дважды гладких кривых без точек самопересечения.

Построение решения $u(x, y) = \rho((x, y), M)$ задачи (4.1), (4.2) предполагает конструирование волновых фронтов. В данном случае волновой фронт — это линия уровня функции

$u(x,y)=\rho((x,y),M)$. В соответствии с принципом Гюйгенса (см. напр., [3]) мгновенный волновой фронт есть огибающая сферических волн, порожденных точечными источниками. Построение волновых фронтов требует отыскания эквидистант [15] кривой $\Gamma$, поскольку волновой фронт принадлежит соответствующей эквидистанте. Известно (см. [4]), что в общем случае достаточно удаленная эквидистанта гладкой кривой теряет дифференциальные свойства, возникают особенности типа "ласточкин хвост". Объединения таких особых точек эквидистант образуют многообразия, входящие в биссектрису $L(M)$. Нахождение биссектрисы $L(M)$ является необходимым элементом при построении решения задачи (4.1), (4.2).

Здесь отметим, что с точки зрения теории дифференциальных игр биссектриса $L(M)$ целевого множества $M$ для соответствующей задачи управления по быстродействию — это рассеивающая кривая. Из каждой точки $\mathbf{x}\in L(M)$ выходят не менее двух оптимальных траекторий — это отрезки $[\mathbf{x},\mathbf{y}]$, $\mathbf{y}\in\Omega_M(\mathbf{x})$ [7, с. 196]. При этом структура биссектрисы как объединения многообразий определяется геометрией границы целевого множества. В плоском случае биссектриса является объединением нульмерных и одномерных многообразий, построение которых возможно в ряде простых ситуаций в точной аналитической форме, но в самой общей ситуации требуется разработка численных алгоритмов.

В качестве примера на рис. 1 изображена биссектриса $L(M)$ для подграфика $M=\operatorname{hyp} f:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\leqslant f(x),\ x\in\mathbb{R}\}$ функции $f(x)=x^4$. Биссектриса есть объединение трех одномерных многообразий и одного нульмерного многообразия — точки ветвления.

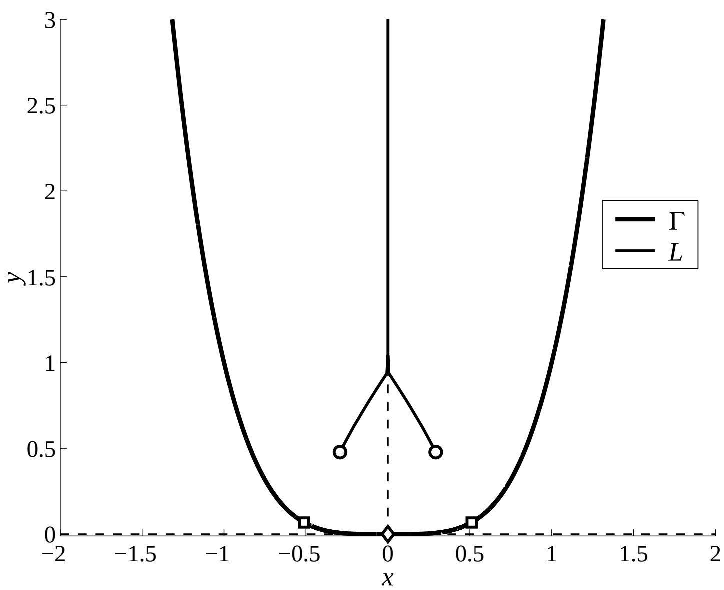



Рис. 1

## 5. Построение биссектрисы плоской кривой

Биссектриса $L(M)$ замкнутого плоского множества $M$ определяется его границей. При этом одномерные многообразия ("ветви биссектрисы"), составляющие $L(M)$, определяются особыми точками границы множества. На рис. 1 эти точки отмечены маркерами. Также маркерами отмечены крайние точки биссектрисы — "начала" ее ветвей. Строгие определения этих особых точек приведены ниже.

Пусть $X$ — конечный или бесконечный интервал в $\mathbb{R}$. Обозначим $\Gamma=\operatorname{gr} f$, где $\operatorname{gr} f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=f(x), x\in X\}$ — график непрерывной функции $y=f(x)$. Будем рассматривать функции $y=f(x)$, определенные на $X$, со следующими дифференциальными свойствами. Для любой точки $x_0\in X$ существует сколь угодно малая окрестность $O(x_0)=(x_0-\delta,x_0+\delta), \delta>0$, такая, что функция $y=f(x)$, будучи непрерывной в точке $x_0$, дважды дифференцируема в выколотой окрестности $O_0(x_0)=O(x_0)\setminus\{x_0\}$.

Свойства таких функций будем изучать локально в окрестности произвольно взятой точки $x_0 \in X$. С каждой точкой $(x, y) = (x_0, y_0)$ плоскости свяжем совокупность $F(x_0, y_0)$ функций $y = f(x)$, $f(x_0) = y_0$, каждая из которых

(1) непрерывна в точке $x_0$,

(2) дважды непрерывно дифференцируема в выколотой окрестности точки $x_0$,

(3) ни в какой окрестности точки $x_0$ не является линейной функцией, даже при наличии производной $f'(x_0)$.

В зависимости от дифференциальных свойств функций в точке $x_0$ выделим во множестве $F(x_0, y_0)$ следующие семейства функций:

$$F^{(2)}(x_0, y_0) = \{f(x) : \exists f'(x_0), \exists f''(x_0)\},$$

$$F^{(1)}(x_0, y_0) = \{f(x) : \exists f'(x_0), \exists f''_-(x_0), \exists f''_+(x_0), f''_-(x_0) \neq f''_+(x_0)\},$$

$$F^{(0)}(x_0, y_0) = \{f(x) : \exists f'_-(x_0), \exists f'_+(x_0), f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)\}.$$

Здесь $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ и $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ — односторонние производные в точке $x = x_0$ слева и справа соответственно.

Аналогично символами $f''_-(x_0), f''_+(x_0)$ обозначены односторонние производные второго порядка соответственно слева и справа в точке $x = x_0$.

Вообще говоря, здесь допускается, что производные могут и не быть конечными величинами.

Рассмотрим интервал $O(x_0) = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2)$, где $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$.

Определение 2. Будем говорить, что локальный диффеоморфизм $\xi : x_1 \to x_2$ непрерывен слева в точке $x_1 = x_0$ и отображает левую полуокрестность точки $x_1 = x_0$ на ее правую полуокрестность, если выполняются условия:

(1) $\lim\limits_{x_1 \to x_0 - 0} \xi[x_1] = x_0$,

(2) $\xi[(x_0 - \delta_1, x_0)] = (x_0, x_0 + \delta_2)$.

Нетрудно видеть, что односторонняя непрерывность слева диффеоморфизма обеспечивается требованием строгой отрицательности его производной.

Определение 3. *Псевдовершиной* кривой $\Gamma = \operatorname{gr} f$ будем называть точку

$$\big(x_0, f(x_0)\big) = \lim_{x_1 \to x_0 - 0} (x_*, y_*),$$

где $(x_*, y_*)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} y_* = f'(x_1)(x_* - x_1) + f(x_1), \\ y_* = f'(x_2)(x_* - x_2) + f(x_2), \end{cases}$$

$x_2 = \xi(x_1)$, $\xi$ — непрерывный слева в точке $x_1 = x_0$ локальный диффеоморфизм левой полуокрестности точки $x_1 = x_0$ на ее правую полуокрестность, определяемый уравнением

$$G(x_1, x_2) = 0. \tag{5.1}$$

Здесь

(1) $(x_*, y_*)$ — точка пересечения касательных к кривой $\Gamma = \operatorname{gr} f$ в точках $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$, абсциссы которых удовлетворяют уравнению $x_2 = \xi(x_1)$;

(2) $G(x_1, x_2) = \rho^2\big((x_1, f(x_1)), (x_*, y_*)\big) - \rho^2\big((x_2, f(x_2)), (x_*, y_*)\big)$ — разность квадратов расстояний между указанными точками графика функции и точкой пересечения касательных, проведенных через эти точки.

С точки зрения геометрии точка $(x_*, y_*)$ — центр окружности, пересекающей график функции в точках $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ под прямыми углами.

Функции, аналогичные $G = G(x_1, x_2)$, используются при изучении свойств кривых [5].

Определение 4. Конечный односторонний предел $(\overline{x}_0, \overline{y}_0) = \lim\limits_{x_1 \to x_0 - 0} (x_0, y_0)$ решений системы

$$\begin{cases} -x + x_1 - f'(x_1)\big(y - f(x_1)\big) = 0, \\ -x + x_2 - f'(x_2)\big(y - f(x_2)\big) = 0, \end{cases} \tag{5.2}$$

будем называть крайней точкой биссектрисы. Здесь $x_2 = \xi(x_1)$, $\xi$ — непрерывный слева в точке $x_1 = x_0$ локальный диффеоморфизм левой полуокрестности точки на ее правую полуокрестность, определяемый уравнением (5.1). Если означенный предел равен бесконечности или не существует, то будем говорить, что псевдовершина $(x_0, y_0) = \big(x_0, f(x_0)\big)$ не порождает крайнюю точку биссектрисы.

Система (5.2) определяет точки из $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, которые имеют две ортогональные проекции на кривую $\Gamma$, причем проекции находятся на одном и том же расстоянии от соответствующей точки.

Определение 5. *Ветвью* $L(x_0, y_0)$ биссектрисы кривой $\Gamma = \operatorname{gr} f$, где $(x_0, y_0) = \big(x_0, f(x_0)\big)$ — псевдовершина $\Gamma$, будем называть множество точек $(x, y)$ на плоскости, удовлетворяющих системе уравнений (5.2), когда параметры $x_1$ и $x_2$ связаны уравнением (5.1), определяющим непрерывный слева в точке $x_1 = x_0$ локальный диффеоморфизм $\xi$ левой полуокрестности точки $x_1 = x_0$ на ее правую полуокрестность.

Для иллюстрации определений рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ 0, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

У графика этой функции существует единственная псевдовершина $(x_0, y_0) = (0, 0)$, причем локальный диффеоморфизм, определяемый уравнением (5.1), имеет вид

$$x_2 = \frac{1}{2} x_1 \left(1 - \sqrt{1 + 4x_1^2}\right).$$

Точка $(\overline{x}_0, \overline{y}_0) = \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ — крайняя точка единственной ветви биссектрисы

$$L(\operatorname{hyp} f) = \left\{(x, y)\colon\ x = \frac{x_1\left(1 - \sqrt{1 + 4x_1^2}\right)}{2},\ \ y = \frac{1 + 4x_1^2 + \sqrt{1 + 4x_1^2}}{4}\right\}.$$

При отыскании крайних точек биссектрисы используются следующие факты, доказательство которых основано на применении дифференциальных теорем о среднем и приведенных выше определений.

**Лемма 1.** *Если* $A_0 = \big(x_0, f(x_0)\big)$ *— псевдовершина кривой* $\Gamma = \operatorname{gr} f$, $f \in F^{(2)}\big(x_0, f(x_0)\big)$, *причем* $f''(x_0) \neq 0$, *то крайняя точка* $\overline{A} = (\overline{x}_0, \overline{y}_0)$ *биссектрисы* $L(\Gamma)$ *является центром кривизны кривой* $\Gamma = \operatorname{gr} f$ *в точке* $A_0 = \big(x_0, f(x_0)\big)$:

$$\overline{x}_0 = x_0 - \frac{f'(x_0)\left(1 + (f'(x_0))^2\right)}{f''(x_0)}, \qquad \overline{y}_0 = f(x_0) + \frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)}. \tag{5.3}$$

**Лемма 2.** *Если* $A_0 = \big(x_0, f(x_0)\big)$ *— псевдовершина кривой* $\Gamma = \operatorname{gr} f$, $f \in F^{(1)}\big(x_0, f(x_0)\big)$, *и существует конечный или бесконечный предел* $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} \dfrac{dx_2}{dx_1} = c \leqslant 0$, *то крайняя точка* $\overline{A} = (\overline{x}_0, \overline{y}_0)$ *биссектрисы* $L(\Gamma)$ *вычисляется по формулам:*

$$\overline{x}_0 = x_0 - \frac{f'(x_0)\left(1 + (f'(x_0))^2\right)}{\beta_{10} f''_-(x_0) + \beta_{20} f''_+(x_0)}, \qquad \overline{y}_0 = f(x_0) + \frac{1 + (f'(x_0))^2}{\beta_{10} f''_-(x_0) + \beta_{20} f''_+(x_0)}, \tag{5.4}$$

*где* $\beta_{10} = \dfrac{1}{1 - c}$, $\beta_{20} = -\dfrac{c}{1 - c}$, $\beta_{10} + \beta_{20} = 1$.

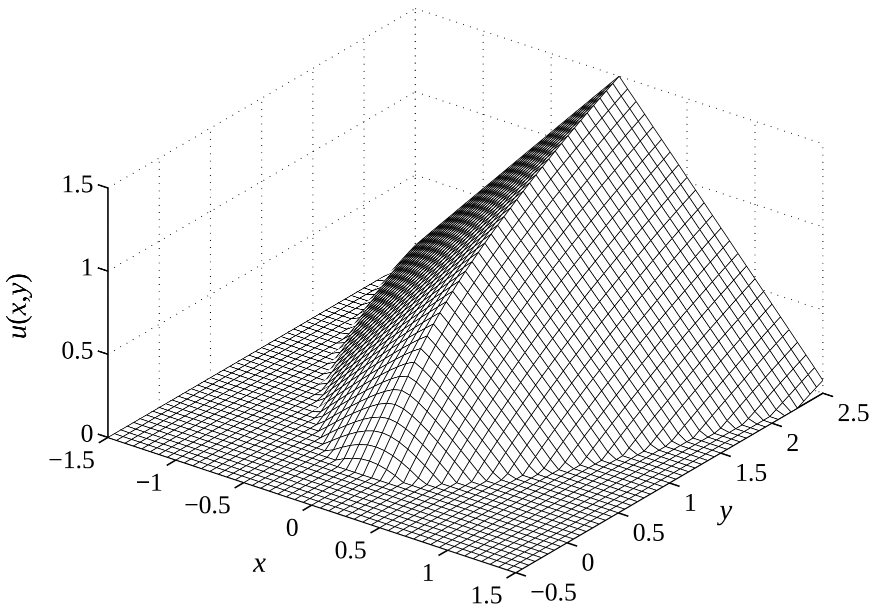



Рис. 2

Формулы (5.4) являются обобщением формул центра кривизны кривой на случай дифференцируемой функции без второй производной.

**Лемма 3.** *Если* $A_0 = \big(x_0, f(x_0)\big)$ *— псевдовершина кривой* $\Gamma = \operatorname{gr} f$, $f \in F^{(0)}\big(x_0, f(x_0)\big)$, *причем* $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$, *то крайняя точка* $\overline{A} = (\overline{x}_0, \overline{y}_0)$ *биссектрисы* $L(\Gamma)$ *совпадает с псевдовершиной графика* $\Gamma = \operatorname{gr} f$:

$$(\overline{x}_0, \overline{y}_0) = \big(x_0, f(x_0)\big).$$

## 6. Примеры построения решения

Приведем примеры построения минимаксного решения задачи (1.3), (1.4). Основным элементом при конструировании решения является биссектриса целевого множества, при построении которой используются формулы (5.1), (5.4).

П р и м е р 1. Пусть $M = \operatorname{hyp} f$, где $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Здесь биссектриса лежит на оси ординат:

$$L(M) = \Big\{(x, y)\colon\ x = 0,\ y > \frac{1}{2}\Big\}.$$

В данном примере знание биссектрисы позволяет в аналитической форме построить решение задачи (1.3), (1.4), т.е. найти расстояние от точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ до параболы $\Gamma$:

$$u(x, y) = \sqrt{(x - x_p)^2 + (y - x_p^2)^2},$$

где

$$x_p = \begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{x}{4} + \sqrt{\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{(2y-1)^3}{216}}} + \sqrt[3]{\dfrac{x}{4} - \sqrt{\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{(2y-1)^3}{216}}}, & y \leqslant E(x), \\ -2\sqrt{\dfrac{2y-1}{6}}\cos\dfrac{\arccos\dfrac{-3\sqrt{6}x}{(2y-1)^{3/2}}}{3}, & x \leqslant 0,\ y > E(x), \\ 2\sqrt{\dfrac{2y-1}{6}}\cos\dfrac{\arccos\dfrac{3\sqrt{6}x}{(2y-1)^{3/2}}}{3}, & x > 0,\ y > E(x). \end{cases}$$

Здесь $E(x) = \dfrac{1}{2} + \sqrt[3]{\dfrac{27}{16}x^2}$, кривая $\Xi = \{(x, y) : y = E(x)\}$ является эволютой [15] параболы.

В точках биссектрисы линии уровня решения $u = u(x, y)$ имеют изломы.

График решения $u = u(x, y)$ задачи (3.1), (3.2) представлен на рис. 2. Непрерывное продолжение решения на множество $M$ принимается тождественно равным нулю.

П р и м е р 2. Пусть $M = \operatorname{hyp} f$, где

$$f(x) = \begin{cases} 2\ln(-x), & x \leqslant -1, \\ x^3 - x, & x > -1. \end{cases}$$

Отыскание точного решения задачи здесь не представляется возможным. Построение биссектрисы, волновых фронтов и решения $u = u(x, y)$ осуществляется приближенно численными методами. Аппроксимации биссектрисы $L(M)$ и волновых фронтов $\Phi$ (линий уровня функции $u = u(x, y)$) представлены на рис. 3. Аппроксимация графика функции $u = u(x, y)$ представлена на рис. 4.

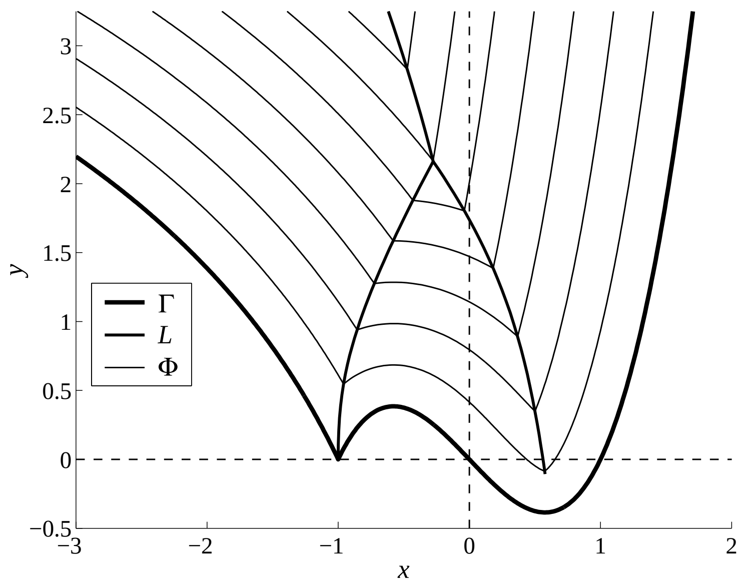



Рис. 3

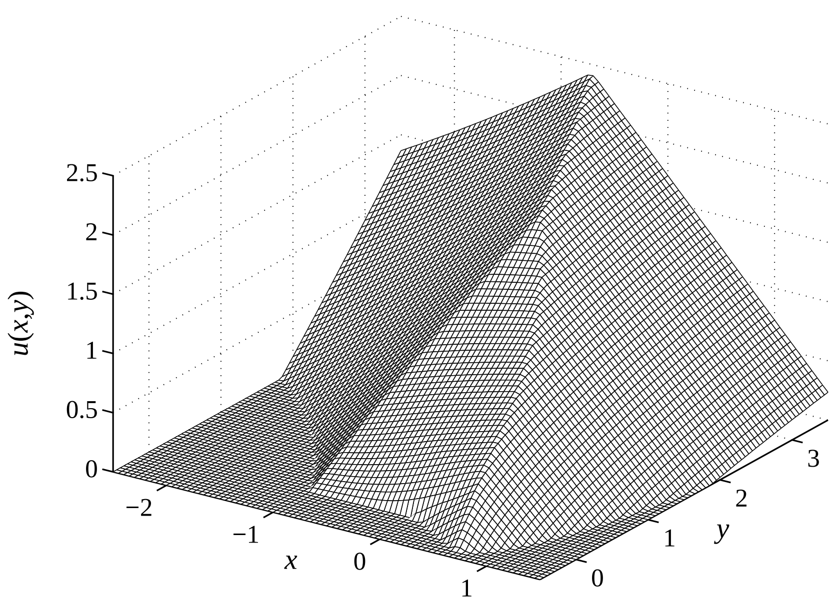



Рис. 4

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2003.
2. **Кружков С.Н.** Обобщенные решения уравнений Гамильтона — Якоби типа эйконала. I. // Мат. сб. 1975. Т. 98, вып. 3. С. 450–493.
3. **Слюсарев Г.Г.** Геометрическая оптика. М.: Изд-во АН СССР, 1946.
4. **Арнольд В.И.** Особенности каустик и волновых фронтов. М.: ФАЗИС, 1996.
5. **Брус Дж., Джиблин П.** Кривые и особенности. М.: Мир, 1988.
6. **Sedykh V.D.** On the topology of symmetry sets of smooth submanifolds in $\mathbb{R}^k$// Advanced Studies in Pure Mathematics. 2006. Vol. 43. Singularity Theory and Its Applications. P. 401–419.
7. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
8. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
9. **Бабич В.М., Булдырев В.С., Молотков И.А.** Пространственно-временной лучевой метод: Линейные и нелинейные волны. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
10. **Тарасьев А.М., Успенский А.А., Ушаков В.Н.** Аппроксимационные операторы и конечно-разностные схемы для построения обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 173–185.
11. **Папаков Г.В., Тарасьев А.М., Успенский А.А.** Численные аппроксимации обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 4. С. 570–581.
12. **Пахотинских В.Ю., Успенский А.А., Ушаков В.Н.** Конструирование стабильных мостов в дифференциальных играх с фазовыми ограничениями // Прикл. математика и механика. 2003. Т. 67. Вып. 5. С. 771–783.
13. **Успенский А.А., Ушаков В.Н., Фомин А.Н.** $\alpha$-множества и их свойства. Екатеринбург: Ин-т математики и механики УрО РАН, 2004. Деп. в ВИНИТИ 02.04.04, № 543-В2004.
14. **Лебедев П.Д., Успенский А.А.** Исследование геометрии и асимптотики волновых фронтов в некоторых задачах управления // Тр. 9-й междунар. Четаевской конф. 2007. Т. 5. С. 224–236.
15. **Рашевский П.К.** Курс дифференциальной геометрии. М.: Эдиториал, 2003.
16. **Лейхтвейс К.** Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.
17. **Демьянов В.Ф., Васильев Л.В.** Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.


Поступила 14.02.2008

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14 № 2 2008

УДК 517.977

# СТРАТЕГИЯ МИНИМАКСНОГО РИСКА (СОЖАЛЕНИЯ) ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПОМЕХ

**Д. А. Серков**

Рассматривается управляемая система в условиях динамических помех. Приводятся постановка задачи о нахождении стратегии, оптимальной в смысле критерия минимаксного риска (сожаления) Сэвиджа, первоначальные свойства таких задач, и для одного класса систем, включающего линейные системы, описана конструкция стратегии, оптимальной в указанном смысле.

## 1. Введение

Рассматривается управляемая система в условиях динамических помех. Динамика системы описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. Управление и помеха стеснены геометрическими ограничениями. Сторона, формирующая управление, стремится минимизировать терминальный показатель качества. В отношении способа формирования помехи предполагается лишь, что порождаемые им реализации помехи являются измеримыми функциями времени.

Настоящая статья следует методологии, сформированной в исследованиях [1–4], и примыкает к работам [5–7], где изучаются задачи управления со "слепой" помехой, т.е. с помехой, не зависящей от состояния управляемой системы или действий управляющей стороны. В работе приводятся постановка задачи о нахождении стратегии, оптимальной в смысле критерия Сэвиджа [8], простейшие свойства таких задач, и для одного семейства систем, включающего линейные системы, описана конструкция стратегии, оптимальной в указанном смысле.

## 2. Определения

Рассмотрим управляемую систему, описываемую обыкновенными дифференциальными уравнениями и краевым условием:

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau) = f(\tau, x(\tau), u[\tau], v[\tau]),\ x(t) = z \in \mathbb{R}^n, \\ u[\tau] \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^l,\ v[\tau] \in \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^m, \tau \in [t, \vartheta] \subseteq [t_0, \vartheta] \equiv T, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ суть компактные подмножества соответствующих конечномерных евклидовых пространств, функция $f(\cdot)$ непрерывна по совокупности аргументов, локально липшицева по второй переменной в области $[t_0, \vartheta + 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ и допускает продолжение всех решений уравнения (2.1) в смысле Каратеодори на интервал $T$ при любых начальных условиях из заданного компакта $G \subset T \times \mathbb{R}^n$ и любых измеримых по Борелю реализациях управления $u[\cdot]$ и помехи $v[\cdot]$, удовлетворяющих указанным ограничениям. Множества всех таких реализаций управления и помехи обозначим соответственно $\mathbf{U}_T$ и $\mathbf{V}_T$. Для множеств сужений элементов из $\mathbf{U}_T$ и $\mathbf{V}_T$ на произвольный интервал $[s_1, s_2] \subseteq T$ используем обозначения $\mathbf{U}_{[s_1,s_2]}$ и $\mathbf{V}_{[s_1,s_2]}$.

Обозначим $x(\cdot, t, z, u[\cdot], v[\cdot])$ решение задачи (2.1) на интервале $[t, \vartheta]$. В силу сделанных предположений это решение будет единственным. Без ограничения общности рассуждений можно считать множество $G$ таким, что при любых $u[\cdot] \in \mathbf{U}_T$, $v[\cdot] \in \mathbf{V}_T$, $(t,z) \in G$ движение $x(\cdot,t,z,u[\cdot],v[\cdot])$ не покинет $G$ вплоть до момента $\vartheta$.

Качество управления оценивается терминальным показателем вида

$$\gamma(x(\cdot,t,z,u[\cdot],v[\cdot])) = \sigma(x(\vartheta,t,z,u[\cdot],v[\cdot])), \tag{2.2}$$

который следует минимизировать, распоряжаясь реализацией $u[\cdot] \in \mathbf{U}_T$. Будем предполагать функцию $\sigma(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ также локально липшицевой. Обозначим $|x(\cdot)|_C$ норму элемента $x(\cdot)$ пространства $C([t_1,t_2];\mathbb{R}^n)$ непрерывных функций:

$$|x(\cdot)|_C \equiv \max_{\tau\in[t_1,t_2]} |x(\tau)|,$$

где $|x(\tau)|$ означает евклидову норму элемента $x(\tau)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. Обозначим $X(t,z)$ и $X(t,z,v[\cdot])$ замыкания в норме пространства $C([t,\vartheta];\mathbb{R}^n)$, соответственно, множеств

$$\{x(\cdot,t,z,u[\cdot],v[\cdot]) \ : \ u[\cdot] \in \mathbf{U}_T, \ v[\cdot] \in \mathbf{V}_T\} \qquad \{x(\cdot,t,z,u[\cdot],v[\cdot]) \ : \ u[\cdot] \in \mathbf{U}_T\}. \tag{2.3}$$

Из теоремы Асколи [9, I.5.4] следует, что множества (2.3) предкомпактны в пространстве $C([t,\vartheta];\mathbb{R}^n)$, а значит, множества $X(t,z,v[\cdot])$ и $X(t,z)$ компактны в $C([t,\vartheta];\mathbb{R}^n)$ в топологии равномерной сходимости.

Обозначим $\Delta = \{\tau_0 = t < \tau_1 < \ldots < \tau_{n_\Delta} = \vartheta\}$ разбиение отрезка $[t,\vartheta] \subseteq T$, а $\mathbf{d}(\Delta)$ — диаметр разбиения $\Delta$:

$$\mathbf{d}(\Delta) \equiv \max\{\tau_i - \tau_{i-1} \mid i \in \overline{1,n_\Delta}\}.$$

Пусть для произвольного $t \in T$ — начального момента движения системы (2.1) и произвольного $\tau \in (t,\vartheta]$ — текущего момента движения определена функция

$$U_{[t,\tau)} : C([t,\tau];\mathbb{R}^n) \times \mathbf{U}_{[t,\tau)} \times \mathbf{V}_{[t,\tau)} \to \mathbf{U}_{[\tau,\vartheta]}. \tag{2.4}$$

Семейство этих функций при всех указанных $t$ и $\tau$ назовем *стратегией* и обозначим той же буквой $U$ без индекса. Содержательно первый аргумент в этих функциях отвечает истории движения, а второй и третий — реализациям (историям) управления и помехи на временном интервале $[t,\tau)$. Таким образом, мы предполагаем, что управляющая сторона в текущий момент имеет возможность использовать информацию о состоянии движения, управления и помехи во все предыдущие моменты движения нашей управляемой системы. Множество всех стратегий вида (2.4) обозначим $\mathbf{U}_{na}$.

Построим движения, порожденные стратегией $U$, в соответствии с [1]: пару $\{U,\Delta\}$, где $U$ — стратегия, а $\Delta$ — разбиение отрезка $[t,\vartheta]$ назовем *законом управления на отрезке* $[t,\vartheta]$, *отвечающим стратегии* $U$ *и разбиению* $\Delta$ (или кратко — *законом управления*). Для произвольных $(t,z) \in G$, $v[\cdot] \in \mathbf{V}_T$ определим *пошаговое движение* $x(\cdot) \equiv x(\cdot,t,z,\{U,\Delta\},v[\cdot]) \in X(t,z,v[\cdot])$, порожденное законом управления $\{U,\Delta\}$ и помехой $v[\cdot]$ из начального положения $(t,z)$, и реализацию управления $u(\cdot) \equiv u(\cdot,t,z,\{U,\Delta\},v[\cdot]) \in \mathbf{U}_{[t,\vartheta]}$, случившуюся при построении этого пошагового движения, следующим образом. Положим

$$u(\cdot)|_{[t,\tau_1)} \equiv \bar{u}, \quad x(\tau) \equiv x(\tau,t,z,u(\cdot),v[\cdot]), \ \tau \in [t,\tau_1], \tag{2.5}$$

где $\bar{u} \in \mathcal{P}$ — произвольно выбранное управление. Из (2.4) для интервала $[t,\tau_1)$ определяется $u(\cdot)|_{[\tau_1,\tau_2)}$ и, в силу уравнений (2.1), движение $x(\cdot)$ на интервале $[\tau_1,\tau_2]$

$$u(\cdot)|_{[\tau_1,\tau_2)} \equiv U_{[t,\tau_1)}(x(\cdot)|_{[t,\tau_1)}, u(\cdot)|_{[t,\tau_1)}, v[\cdot]|_{[t,\tau_1)})|_{[\tau_1,\tau_2)},$$

$$x(\tau) \equiv x(\tau,\tau_1,x(\tau_1),u(\cdot),v[\cdot]), \ \tau \in [\tau_1,\tau_2],$$

и так далее на всех интервалах разбиения $\Delta$

$$u(\cdot)|_{[\tau_i,\tau_{i+1})} \equiv U_{[t,\tau_i)}(x(\cdot)_{[t,\tau_i)}, u(\cdot)_{[t,\tau_i)}, v[\cdot]_{[t,\tau_i)})|_{[\tau_i,\tau_{i+1})},$$
$$x(\tau) \equiv x(\tau,\tau_i,x(\tau_i),u(\cdot),v[\cdot]),\ \tau\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\ i\in\overline{1,n_\Delta-1}. \tag{2.6}$$

Можно проверить, что для реализаций управления $u(\cdot,t,z,\{U,\Delta\},v[\cdot])$ будет выполняться следующее свойство *неупреждаемости.* При произвольных $[t_1,t_2]\subseteq T$, $(t_1,z)\in G$, стратегии $U$ вида (2.4), разбиении $\Delta$ отрезка $[t_1,\vartheta]$ и $v_1[\cdot],v_2[\cdot]\in\mathbf{V}_T$ выполняется импликация

$$v_1[\cdot]|_{[t_1,t_2]} = v_2[\cdot]|_{[t_1,t_2]} \quad\Rightarrow\quad u(\cdot,t_1,z,\{U,\Delta\},v_1[\cdot])|_{[t_1,t_2]} = u(\cdot,t_1,z,\{U,\Delta\},v_2[\cdot])|_{[t_1,t_2]}. \tag{2.7}$$

Для произвольных $U\in\mathbf{U}_{na}$ и $(t,z)\in G$ обозначим $X(t,z,U,v[\cdot])$ замыкание в пространстве $C([t,\vartheta];\mathbb{R}^n)$ множества всех последовательностей вида

$$\left\{x(\cdot,t,z,\{U,\Delta_k\},v[\cdot]), k\in\mathbb{N}\ \mid\ \lim_{k\to\infty}\mathbf{d}(\Delta_k)=0\right\}.$$

Понятно, что при любых $(t,z)\in G$, $U\in\mathbf{U}_{na}$, $v[\cdot]\in\mathbf{V}_T$ выполнены включения

$$X(t,z,U,v[\cdot])\subseteq X(t,z,v[\cdot]). \tag{2.8}$$

Для произвольной $U\in\mathbf{U}_{na}$ *результатом в позиции* $(t,z)$ *при помехе* $v[\cdot]\in\mathbf{V}_T$ назовем величину

$$\mathrm{res}(t,z,U,v[\cdot]) \equiv \sup_{x(\cdot)\in X(t,z,U,v[\cdot])}\sigma(x(\vartheta)). \tag{2.9}$$

Исходя из этих определений можно представить величину $\mathrm{res}(\cdot)$ также в виде

$$\mathrm{res}(t,z,U,v[\cdot]) = \limsup_{\mathbf{d}(\Delta)\to 0}\sigma(x(\vartheta,t,z,\{U,\Delta\},v[\cdot])). \tag{2.10}$$

Для произвольных $(t,z)\in G$ и $v[\cdot]\in\mathbf{V}_T$ *оптимальным результатом* назовем и обозначим $\rho(t,z,v[\cdot])$ следующую величину:

$$\rho(t,z,v[\cdot]) \equiv \min_{x(\cdot)\in X(t,z,v[\cdot])}\sigma(x(\vartheta)). \tag{2.11}$$

Из (2.8), (2.9), (2.11) следует, что для всех $(t,z)\in G$, $v[\cdot]\in\mathbf{V}_T$ и $U\in\mathbf{U}_{na}$ результат, доставляемый стратегией $U$ при помехе $v[\cdot]$ в позиции $(t,z)$, конечен и не меньше оптимального результата

$$\mathrm{res}(t,z,U,v[\cdot]) \geq \rho(t,z,v[\cdot]). \tag{2.12}$$

Определение 1. Назовем *оптимальным риском задачи управления* (2.1), (2.2) *в позиции* $(t,z)\in G$ (или, для краткости, *оптимальным риском в позиции* $(t,z)$) и обозначим $\delta(t,z)$ величину

$$\delta(t,z) \equiv \inf_{U\in\mathbf{U}_{na}}\ \sup_{v[\cdot]\in\mathbf{V}_T}\{\mathrm{res}(t,z,U,v[\cdot]) - \rho(t,z,v[\cdot])\}. \tag{2.13}$$

Из определения $\delta(\cdot)$, свойств системы (2.1) и неравенства (2.12) следует, что $\delta(t,z)\in[0,K]$ при всех $(t,z)\in G$ для некоторой константы $K>0$.

В дальнейшем будут изучаться элементы $\mathbf{U}_{na}$, достигающие нижней грани (2.13) или аппроксимирующие ее.

Определение 2. Пусть задано $\varepsilon\geq 0$. Стратегию $U_\varepsilon$ назовем *$\varepsilon$-оптимальной по риску в позиции* $(t,z)\in G$, если для всех $v[\cdot]\in\mathbf{V}_T$

$$\mathrm{res}(t,z,U_\varepsilon,v[\cdot]) \leq \rho(t,z,v[\cdot]) + \delta(t,z) + \varepsilon. \tag{2.14}$$

Для $\varepsilon \geq 0$ множество всех $\varepsilon$-оптимальных по риску стратегий в позиции $(t,z)$ обозначим $\mathbf{U}^{\varepsilon}_{na}(t,z)$. Из свойств нижней грани непосредственно следует, что при $\varepsilon > 0$ выполняется соотношение

$$\mathbf{U}^{\varepsilon}_{na}(t,z) \neq \varnothing. \tag{2.15}$$

Стратегии из множества $\mathbf{U}^{0}_{na}(t,z)$ будем называть *оптимальными по риску в позиции* $(t,z)$.

Для построения оптимальной по риску стратегии нам потребуются следующие два вспомогательные подмножества из $X(t,z,v[\cdot])$. При произвольных $(t,z) \in G$ и $v[\cdot] \in \mathbf{V}_T$ положим

$$W(t,z,v[\cdot]) \equiv \{w(\cdot) \in X(t,z,v[\cdot]) \mid \sigma(w(\vartheta)) \leq \rho(t,z,v[\cdot]) + \delta(t,z)\}, \tag{2.16}$$

$$\begin{gathered} W_{na}(t,z,v[\cdot]) \equiv \big\{w(\cdot) \in C([t,\vartheta];\mathbb{R}^n) \mid \exists\{(x_i(\cdot),U_i,\varepsilon_i) \in X(t,z,v[\cdot]) \times \mathbf{U}_{na} \times (0,1] \mid i \in \mathbb{N}\} \ : \\ U_i \in \mathbf{U}^{\varepsilon_i}_{na}(t,z),\ x_i(\cdot) \in X(t,z,U_i,v[\cdot]),\ \lim_{i\to\infty}\varepsilon_i = 0,\ \lim_{i\to\infty}|w(\cdot) - x_i(\cdot)|_C = 0\big\}. \end{gathered} \tag{2.17}$$

Элементы множества $W(t,z,v[\cdot])$ назовем *оптимальными по риску траекториями*, а элементы $W_{na}(t,z,v[\cdot])$ — *неупреждающими оптимальными по риску траекториями.*

**Лемма 1.** *Пусть* $(t,z) \in G$, $t' \in [t,\vartheta]$, $v[\cdot], \bar{v}[\cdot] \in \mathbf{V}_T$. *Тогда множества* $W(t,z,v[\cdot])$, $W_{na}(t,z,v[\cdot])$ *непусты, компактны в* $C([t,\vartheta];\mathbb{R}^n)$ *и удовлетворяют соотношениям*

$$W_{na}(t,z,v[\cdot]) \subseteq W(t,z,v[\cdot]) \tag{2.18}$$

$$v[\cdot]|_{[t,t']} = \bar{v}[\cdot]|_{[t,t']} \quad \Rightarrow \quad W_{na}(t,z,v[\cdot])|_{[t,t']} = W_{na}(t,z,\bar{v}[\cdot])|_{[t,t']}, \tag{2.19}$$

$$W_{na}(t,z,v[\cdot])|_{[t,t']} \subseteq \bigcap_{\substack{v'[\cdot]\in\mathbf{V}_T \\ v'[\cdot]|_{[t,t']}=v[\cdot]|_{[t,t']}}} W(t,z,v'[\cdot])|_{[t,t']}. \tag{2.20}$$

Доказательство. Включения (2.18) следуют из непрерывности показателя качества относительно сходимости в $C([t,\vartheta];\mathbb{R}^n)$. По этой же причине множество $W(t,z,v[\cdot])$ является замкнутым, а значит, компактным в $C([t,\vartheta];\mathbb{R}^n)$ (как замкнутое подмножество компактного множества $X(t,z,v[\cdot])$).

Импликация (2.19) следует из свойства неупреждаемости (2.7). Включение (2.20) следует из (2.18) и (2.19).

В силу (2.15) и компактности $X(t,z,v[\cdot])$ существует сходящаяся подпоследовательность последовательности

$$\{x_i(\cdot) \mid x_i(\cdot) \in X(t,z,U_i,v[\cdot]), U_i \in \mathbf{U}^{\frac{1}{i}}_{na}(t,z), i \in \mathbb{N}\}.$$

Предел этой последовательности лежит в $W_{na}(t,z,v[\cdot])$. Значит, множество $W_{na}(t,z,v[\cdot])$ и, в силу (2.18), множество $W(t,z,v[\cdot])$ непусты.

Так как $W_{na}(t,z,v[\cdot])$ есть подмножество компактного множества $X(t,z,v[\cdot])$, для доказательства компактности достаточно показать, что $W_{na}(t,z,v[\cdot])$ замкнуто в $C([t,\vartheta];\mathbb{R}^n)$.

Пусть $\{w_i(\cdot) \mid i \in \mathbb{N}\}$ — произвольная сходящаяся последовательность из $W_{na}(t,z,v[\cdot])$ и $\bar{w}(\cdot)$ — ее предел. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что при любом $i \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$|w_i(\cdot) - \bar{w}(\cdot)|_C < \frac{1}{i}. \tag{2.21}$$

В этом случае по определению $W_{na}(t,z,v[\cdot])$ существуют последовательности

$$\{(x_{ij}(\cdot),U_{ij},\varepsilon_{ij}) \in X(t,z,v[\cdot]) \times \mathbf{U}_{na} \times (0,1] \mid j \in \mathbb{N}\}, \quad i \in \mathbb{N}$$

такие, что при всех $i,j \in \mathbb{N}$ выполняются соотношения

$$U_{ij} \in \mathbf{U}_{na}^{\varepsilon_{ij}}(t,z), \qquad x_{ij}(\cdot) \in X(t,z,U_{ij},v[\cdot]), \tag{2.22}$$

$$\lim_{j\to\infty} \varepsilon_{ij} = 0, \qquad \lim_{j\to\infty} |x_{ij}(\cdot) - w_i(\cdot)|_C = 0. \tag{2.23}$$

Исходя из равенств (2.23) можно построить последовательность индексов $\{j_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ такую, что для последовательностей $\{\bar{x}_i(\cdot) \equiv x_{ij_i}(\cdot) \mid i \in \mathbb{N}\}$, $\{\bar{\varepsilon}_i \equiv \varepsilon_{ij_i} \mid i \in \mathbb{N}\}$ при всех $i \in \mathbb{N}$ будут выполнены неравенства

$$|\bar{x}_i(\cdot) - w_i(\cdot)|_C < \frac{1}{i}, \tag{2.24}$$

$$\bar{\varepsilon}_i < \frac{1}{i}. \tag{2.25}$$

Тогда из (2.24) и (2.21) получим

$$\lim_{i\to\infty} |\bar{x}_i(\cdot) - \bar{w}(\cdot)|_C = 0, \tag{2.26}$$

что вместе с (2.22) и (2.25) влечет $\bar{w}(\cdot) \in W_{na}(t,z,v[\cdot])$. □

## 3. Оптимальная по риску стратегия

В этом пункте будет определено семейство управляемых систем, включающее в себя линейные системы, и для этого семейства будет построена оптимальная по риску стратегия.

Пусть система (2.1) удовлетворяет следующим двум дополнительным условиям:

$$\begin{gathered}\forall \big((t',z') \in G,\ t'' \in [t',\vartheta],\ v[\cdot] \in \mathbf{V}_T,\ z'' \in X(t',z',v[\cdot])|_{t''}\big) \quad \exists \big(u[\cdot] \in \mathbf{U}_T\big)\\ x(t'',t',z',u[\cdot],v[\cdot]) = z'',\end{gathered} \tag{3.1}$$

$$\begin{gathered}\forall ((t',z_1),(t',z_2) \in G,\ t'' \in [t',\vartheta],\ v_1[\cdot],v_2[\cdot] \in \mathbf{V}_T,\ u_1[\cdot],u_2[\cdot] \in \mathbf{U}_T)\\ x(t'',t',z_1,u_1[\cdot],v_1[\cdot]) = x(t'',t',z_1,u_1[\cdot],v_2[\cdot]) \quad \Rightarrow \quad x(t'',t',z_2,u_2[\cdot],v_1[\cdot]) = x(t'',t',z_2,u_2[\cdot],v_2[\cdot]).\end{gathered} \tag{3.2}$$

Нетрудно проверить, что условиям (3.1), (3.2) удовлетворяют, например, системы вида

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t,u[t]) + C(t,v[t]) \tag{3.3}$$

в случаях, когда множество $\{B(t,u) \mid u \in \mathcal{P}\}$ является выпуклым при любом $t \in T$.

Для управляемой системы (2.1), удовлетворяющей условиям (3.1), (3.2), и показателя качества (2.2) определим стратегию $U_{\mathrm{s}} \in \mathbf{U}_{na}$ следующим образом.

Стратегия $U_{\mathrm{s}}$ в процессе синтеза управляющего воздействия вычисляет движение вспомогательной управляемой системы (именуемой ниже $y$-моделью), описываемой теми же уравнениями и теми же начальными условиями, что и рассматриваемая управляемая система (2.1). При формировании этого движения на очередном интервале разбиения выбирается помеха, эквивалентная помехе в исходной системе, а управление назначается таким, чтобы движение принадлежало множеству $W$ оптимальных по риску траекторий. И это же управление затем действует в рассматриваемой системе на следующем отрезке разбиения. В результате, движения вспомогательной системы оказываются оптимальными в нужном нам смысле, а движения исходной системы — приближающимися к ним в метрике $C([t,\vartheta];\mathbb{R}^n)$ при измельчении шага разбиения. Эти два факта обеспечивают оптимальность по риску стратегии $U_{\mathrm{s}}$. Такой способ формирования управления широко известен и неоднократно применялся для решения различных задач управления.

Конкретизируем описанную схему и докажем оптимальность построенной стратегии для разбиения с постоянным шагом. Пусть имеются начальная позиция $(t,z) \in G$, последовательность разбиений $\Delta_k = \{\tau_i^k = t + il_k, l_k = (\vartheta - t)/k, i \in \overline{0,k}, k \in \mathbb{N}\}$ и помеха $v[\cdot] \in \mathbf{V}_T$. Тогда движения системы будут удовлетворять уравнениям

$$x^k(\tau) = z + \int\limits_t^\tau f(s, x^k(s), u^k(s), v[s])ds, \quad \tau \in [t,\vartheta], \tag{3.4}$$

где $u^k(\cdot)$ обозначают реализации управления, порождаемые нашей стратегией $U_{\mathrm{s}}$ при начальной позиции $(t,z)$, помехе $v[\cdot]$ и разбиении $\Delta_k$ или, используя ранее введенные обозначения, $u^k(\cdot) \equiv u^k(\cdot, t, z, \{U_{\mathrm{s}}, \Delta_k\}, v[\cdot])$. Для обозначения положений управляемой системы, реализаций управления и помехи на отдельных интервалах разбиения $\Delta_k$ положим

$$x_i^k \equiv x^k(\tau_i^k), \quad v_i^k[\tau] \equiv v[\tau], \quad u_i^k(\tau) \equiv u^k(\tau), \quad \tau \in [\tau_i^k, \tau_{i+1}^k), \quad i \in \overline{0, k-1}.$$

Обозначим реализации управления и помехи, формирующие движение $y$-модели при разбиении $\Delta_k$, соответственно $\bar{u}^k(\cdot)$ и $\bar{v}^k(\cdot)$. Так как движение $y$-модели описывается теми же уравнениями, что и движение управляемой системы (2.1), и с тем же начальным положением, то движения $y^k(\cdot)$ $y$-модели удовлетворяют равенствам

$$y^k(\tau) = z + \int\limits_t^\tau f(s, y^k(s), \bar{u}^k(s), \bar{v}^k[s])ds, \quad \tau \in [t,\vartheta]. \tag{3.5}$$

Введем обозначения для положений $y$-модели, реализаций управления и помехи на отдельных интервалах разбиения $\Delta_k$:

$$y_i^k \equiv y^k(\tau_i^k), \quad \bar{v}_i^k(\tau) \equiv \bar{v}^k(\tau), \quad \bar{u}_i^k(\tau) \equiv \bar{u}^k(\tau), \quad \tau \in [\tau_i^k, \tau_{i+1}^k), \quad i \in \overline{0, k-1}.$$

Перейдем непосредственно к определению стратегии $U_{\mathrm{s}}$. На первом отрезке разбиения зададим произвольное допустимое управление: $u_0^k(\tau) = u \in \mathcal{P}$, $\tau \in [\tau_0^k, \tau_1^k]$. К моменту $\tau_1^k$ узнаем $x_1^k$ и, пользуясь аксиомой выбора, назначим произвольную $\bar{v}_0^k(\cdot)$ из множества

$$\left\{ v'[\cdot] \in \mathbf{V}_{[\tau_0^k, \tau_1^k]} \mid x_1^k = x(\tau_1^k, \tau_0^k, x_0^k, u_0^k(\cdot), v'[\cdot]) \right\}.$$

Это множество непусто, так как содержит по крайней мере один элемент — $v_0^k[\cdot]$. Вновь применяя аксиому выбора, определим $\bar{u}_0^k(\cdot)$ из условия

$$y_1^k \equiv y(\tau_1^k, t, z, \bar{u}_0^k(\cdot), \bar{v}_0^k[\cdot]) \in W_{na}(t, z, \bar{v}^k[\cdot])|_{\tau_1^k}. \tag{3.6}$$

В последнем соотношении $y(\tau_1^k, t, z, \bar{u}_0^k(\cdot), \bar{v}_0^k[\cdot])$ — движение $y$-модели из начальной позиции $(t,z)$, порожденное реализациями управления и помехи $\bar{u}_0^k(\cdot)$, $\bar{v}_0^k[\cdot]$; $\bar{v}^k[\cdot]$ — произвольное продолжение помехи $\bar{v}_0^k[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t,\tau_1^k]}$ до элемента из $\mathbf{V}_{[t,\vartheta]}$. Выбор продолжения на интервале $[\tau_1^k, \vartheta]$ в силу (2.19) не влияет на множество $W_{na}(t, z, \bar{v}^k[\cdot])|_{\tau_1^k}$. Множество $W_{na}(t, z, \bar{v}^k[\cdot])$ в соответствии с леммой 1 имеет непустое сечение при любом $\tau \in [t, \vartheta]$, а условие (3.1) и включение $W_{na}(t, z, \bar{v}^k[\cdot])|_{\tau_1^k} \subseteq X(t, z, \bar{v}^k[\cdot])|_{\tau_1^k}$ обеспечивают существование управления $\bar{u}_0^k(\cdot) \in \mathbf{U}_T$, удовлетворяющего (3.6). Таким образом, в силу аксиомы выбора искомое управление $\bar{u}_0^k(\cdot)$ существует и не зависит от значений помехи $\bar{v}_0^k[\cdot]$ на интервале $[\tau_1^k, \vartheta]$.

Пусть наступил момент $\tau_i^k$, $i \in \overline{1, k-1}$ и нам известны $x_i^k = x^k(\tau_i^k)$, $y_i^k = y^k(\tau_i^k)$, $\bar{u}_{i-1}^k(\cdot)$ и $\bar{v}_{i-1}^k[\cdot]$. Как уже говорилось, положим

$$u_i^k(\tau) = \bar{u}_{i-1}^k(\tau - l_k), \quad \tau \in [\tau_i^k, \tau_i^k + l_k]. \tag{3.7}$$

Нам остается определить $\bar{u}_i^k(\cdot)$ и $\bar{v}_i^k(\cdot)$. После наступления момента $\tau_{i+1}^k$ выберем их по известным $x_i^k$, $x_{i+1}^k$, $y_i^k$ и $u_i^k(\cdot)$ из условий

$$\bar{v}_i^k[\cdot] \in \left\{ v'[\cdot] \in \mathbf{V}_{[\tau_i^k, \tau_{i+1}^k]} \mid x_{i+1}^k = x(\tau_{i+1}^k, \tau_i^k, x_i^k, u_i^k(\cdot), v'[\cdot]) \right\}, \tag{3.8}$$

$$y_{i+1}^k \equiv y(\tau_{i+1}^k, \tau_i^k, y_i^k, \bar{u}_i^k(\cdot), \bar{v}_i^k[\cdot]) \in W_{na}(t, z, \bar{v}^k[\cdot])|_{\tau_{i+1}^k}. \tag{3.9}$$

Существование $\bar{v}_i^k[\cdot]$, удовлетворяющего (3.8), обосновывается так же, как и на первом шаге. Обратимся к вопросу существования $\bar{u}_i^k(\cdot)$, удовлетворяющего (3.9). Как отмечалось, помеху $\bar{v}^k[\cdot]$ можно доопределить произвольным образом на интервале $\tau \in [\tau_{i+1}^k, \vartheta]$, не изменив в силу (2.19) условия (3.9). Учитывая условие (3.1), для доказательства достаточно установить, что

$$W_{na}(t, z, \bar{v}^k[\cdot])|_{\tau_{i+1}^k} \cap X(\tau_i^k, y_i^k, \bar{v}^k[\cdot])|_{\tau_{i+1}^k} \neq \varnothing. \tag{3.10}$$

Доказательство использует индукцию по $i$. База индукции (при $i = 0$) обоснована на первом шаге. Из предположения индукции следует, что выполняется включение $y_i^k \in W_{na}(t, z, \bar{v}^k[\cdot])|_{\tau_i^k}$. Значит, существует функция $w(\cdot) \in W_{na}(t, z, \bar{v}^k[\cdot])$ такая, что $w(\tau_i^k) = y_i^k$. Следовательно,

$$w(\cdot)|_{[\tau_i^k, \vartheta]} \in W_{na}(t, z, \bar{v}^k[\cdot])|_{[\tau_i^k, \vartheta]}, \quad w(\cdot)|_{[\tau_i^k, \vartheta]} \in X(\tau_i^k, y_i^k, \bar{v}^k[\cdot]),$$

что влечет выполнение (3.10). Таким образом, стратегия $U_{\mathrm{s}}$ определена для всех отрезков разбиения $\Delta_k$ при любом $k \in \mathbb{N}$, а движения системы и $y$-модели будут продолжены вплоть до момента $\vartheta$.

Из приведенного построения видно, что стратегия $U_{\mathrm{s}}$ при равномерном разбиении принадлежит $\mathbf{U}_{na}$ и не зависит явно от действующей помехи. Эта стратегия представлена функцией, определенной на двух позициях движения $(\tau_{i-1}, x(\tau_{i-1}))$, $(\tau_i, x(\tau_i))$ и позиции $y$-модели $(\tau_i, y(\tau_i))$, зависящей от всей предыдущей истории движения. Роль $y$-модели по сути аналогична роли поводыря в известной одноименной процедуре управления [1].

**Теорема 1.** *Пусть для системы* (2.1) *выполняются условия* (3.1), (3.2). *Тогда стратегия* $U_{\mathrm{s}}$ *является оптимальной по риску.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что для движений $y$-модели выполняются соотношения

$$\sigma(y^k(\vartheta)) \leq \rho(t, z, v[\cdot]) + \delta(t, z), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.11}$$

Из определения (3.8) реализации $\bar{v}^k[\cdot]$, определения движений $y$-модели и условия (3.2) следуют равенства $X(t, z, v[\cdot])|_\vartheta = X(t, z, \bar{v}^k[\cdot])|_\vartheta$, $k \in \mathbb{N}$. Отсюда с учетом вида показателя качества (2.2) и определения функции оптимального результата $\rho(\cdot)$ (2.11) следуют равенства $\rho(t, z, v[\cdot]) = \rho(t, z, \bar{v}^k[\cdot])$, $k \in \mathbb{N}$, из которых в силу определений (2.16) получим

$$W(t, z, \bar{v}^k[\cdot])|_\vartheta = W(t, z, v[\cdot])|_\vartheta, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.12}$$

Равенства (3.12), включения (2.18) и включения $y^k(\vartheta) \in W_{na}(t, z, \bar{v}^k[\cdot])|_\vartheta$ (см. (3.9) при $i = k-1$) влекут выполнение (3.11).

Теперь установим равенство

$$\lim_{k \to \infty} |x^k(\cdot) - y^k(\cdot)|_C = 0, \tag{3.13}$$

которое вместе с (3.11) даст оценку

$$\limsup_{k \to \infty} \sigma(x^k(\vartheta)) \leq \rho(t, z, v[\cdot]) + \delta(t, z). \tag{3.14}$$

Прежде всего заметим, что из построения управления $\bar{u}^k[\cdot]$ и помехи $\bar{v}^k[\cdot]$, используя условие (3.2) и формально доопределив $u_k(\cdot)$ на отрезке $[\vartheta, \vartheta + l_k]$ соотношением (3.7) при $i = k$, можно получить равенства

$$y^k(\tau) = z + \int\limits_t^\tau f(s, y^k(s), u^k[s + l_k], v[s])ds, \quad \tau \in \Delta_k. \tag{3.15}$$

Так как функция $f$ непрерывна на компактном множестве $G \times \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$, то существует модуль непрерывности этой функции [9, п.I.2] по первому аргументу равномерный по всем остальным; обозначим его $\mu_1(\cdot)$:

$$\max_{\substack{(t',z),\,(t'',z)\in G\\ u\in\mathcal{P}\\ v\in\mathcal{Q}}} |f(t', z, u, v) - f(t'', z, u, v)| < \mu_1(|t' - t''|), \quad \lim_{\varepsilon\to+0} \mu_1(\varepsilon) = 0. \tag{3.16}$$

При $l_k < 1$ представим $y^k(\cdot)$ в виде

$$y^k(\tau) = z + \int\limits_t^\tau f(s + l_k, y^k(s), u^k[s + l_k], v[s])ds$$

$$+ \int\limits_t^\tau \Big( f(s, y^k(s), u^k[s + l_k], v[s]) - f(s + l_k, y^k(s), u^k[s + l_k], v[s]) \Big)\, ds, \quad \tau \in \Delta_k. \tag{3.17}$$

Обозначив последний интеграл $\varphi_1(\tau, l_k)$ и используя модуль непрерывности $\mu_1(\cdot)$, при $l_k < 1$ получим соотношения

$$y^k(\tau) = z + \int\limits_t^\tau f(s + l_k, y^k(s), u^k[s + l_k], v[s])ds + \varphi_1(\tau, l_k), \quad |\varphi_1(\tau, l_k)| < (\vartheta - t)\mu_1(l_k), \quad \tau \in \Delta_k. \tag{3.18}$$

Используя константу Липшица $L_G$ функции $f$ по второму аргументу на множестве $G$ и константу $\varkappa$, ограничивающую норму $f$ на множестве $G \times \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$, получим

$$y^k(\tau) = z + \int\limits_t^\tau f(s + l_k, y^k(s + l_k), u^k[s + l_k], v[s])ds + \varphi_1(\tau, l_k) + \varphi_2(\tau, l_k),$$

$$|\varphi_1(\tau, l_k)| < (\vartheta - t)\mu_1(l_k), \quad |\varphi_2(\tau, l_k)| < (\vartheta - t)L_G\varkappa \tag{3.19}$$

$$l_k, \quad \tau \in \Delta_k \backslash \{\vartheta\}.$$

Как в предыдущих выкладках, и с помощью модуля непрерывности $\mu_4(\cdot)$ функции $f$ по четвертому аргументу получим соотношения

$$y^k(\tau) = z + \int\limits_t^\tau f(s + l_k, y^k(s + l_k), u^k[s + l_k], v[s + l_k])ds + \varphi_1(\tau, l_k) + \varphi_2(\tau, l_k) + \varphi_3(\tau, l_k),$$

$$|\varphi_1(\tau, l_k)| < (\vartheta - t)\mu_1(l_k), \quad |\varphi_2(\tau, l_k)| < (\vartheta - t)l_k L_G\varkappa, \tag{3.20}$$

$$|\varphi_3(\tau, l_k)| < \int\limits_t^\tau \mu_4(|v[s] - v[s + l_k]|)ds, \quad \tau \in \Delta_k \backslash \{\vartheta\}.$$

В силу известного свойства измеримых функций последний интеграл при любом $v[\cdot] \in \mathbf{V}_T$ стремится к нулю при $l_k \to 0$. Из (3.18)–(3.20) следуют равенства

$$x^k(\tau)-y^k(\tau)=\int\limits_t^\tau f(s,x^k(s),u^k[s],v[s])ds-\int_{t+l_k}^{\tau+l_k} f(\xi,y^k(\xi),u^k[\xi],v[\xi])d\xi$$
$$-\varphi_1(\tau,l_k)-\varphi_2(\tau,l_k)-\varphi_3(\tau,l_k),\quad \tau\in\Delta_k\backslash\{\vartheta\}. \tag{3.21}$$

Отсюда получим

$$x^k(\tau)-y^k(\tau)=\int\limits_{t+l_k}^\tau \Big(f(s,x^k(s),u^k[s],v[s])ds-f(s,y^k(s),u^k[s],v[s])\Big)\,ds$$
$$+\int\limits_t^{t+l_k} f(s,x^k(s),u^k[s],v[s])ds-\int\limits_\tau^{\tau+l_k} f(\xi,y^k(\xi),u^k[\xi],v[\xi])d\xi$$
$$-\varphi_1(\tau,l_k)-\varphi_2(\tau,l_k)-\varphi_3(\tau,l_k),\quad \tau\in\Delta_k\backslash\{t,\vartheta\}. \tag{3.22}$$

Используя липшицевость $f$ по второму аргументу и мажоранту $\varkappa$ нормы $f$ в области $G\times\mathcal{P}\times\mathcal{Q}$, из (3.20)–(3.22) получим

$$|x^k(\tau)-y^k(\tau)|\le\int\limits_t^\tau L_G|x^k(s)-z^k(s)|ds+l_k(2\varkappa+L_G)$$
$$+(\vartheta-t)\mu_1(l_k)+(\vartheta-t)l_kL_G\varkappa+\int\limits_t^{\vartheta-l_k}\mu_4(|v[s]-v[s+l_k]|)ds,\quad \tau\in[t,\vartheta]. \tag{3.23}$$

Обозначив $\Phi(l_k)$ сумму всех слагаемых в правой части (3.23) кроме первого и применив неравенство Гронуолла [9, теорема II.4.4], получим неравенства

$$|x^k(\tau)-y^k(\tau)|\le\Phi(l_k)(1+L_G(\vartheta-t)\exp(L_G(\vartheta-t))),\quad \tau\in[t,\vartheta],\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\Phi(\varepsilon)=0, \tag{3.24}$$

из которых следует (3.13).

Мы установили выполнение неравенства (3.14) при произвольном $v[\cdot]\in\mathbf{V}_T$, что с учетом (2.10) равносильно свойству оптимальности по риску стратегии $U_{\mathrm{s}}$. □

В случае произвольного разбиения построение стратегии и доказательство ее оптимальности дополняются несущественными техническими деталями. Стратегия также содержится в $\mathbf{U}_{na}$ и не имеет явной зависимости от помехи. Кроме того, в этом случае для построения управления помимо позиции $y$-модели необходимо помнить историю движения от текущего момента на небольшой (не более диаметра разбиения) отрезок времени в прошлое.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. **Красовский Н. Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
3. **Субботин А. И., Ченцов А. Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.
4. **Субботин А. И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003.
5. **Серков Д. А.** Сильно оптимальные стратегии// Докл. АН СССР. 1991. Т. 321, № 2. С. 258–262.
6. **Серков Д. А.** О равномерных стратегиях // Сб. тр. междунар. семинара “Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби” (CGS’2005), посвященного 60-летию академика А. И. Субботина. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2006. Т. 1. С. 273–284.
7. **Серков Д. А.** Стратегии минимаксного риска (сожаления) в системе с простыми движениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 3. С. 121–135.
8. **Savage L. J.** The theory of statistical decision // J. Amer. Stat. Association. 1951. № 46. P. 55–67.
9. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.


Поступила 5.02.2008

*A. S. Antipin.* **Saddle Problem and Optimization Problem as an Integrated System.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 2. P. 5–15.

A parametric problem of convex programming and a linear optimization problem on a convex set are considered as an integrated system of problems. Properties of this system are studied, the sphere of its application is discussed, and methods for its solution are proposed. The convergence of the proposed methods is established.

*N. N. Astaf'ev.* **Opposite Problems and Dual Regularization in Linear Programming.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 2. P. 16–22.

For problems of linear programming, matrix games, and Chebyshev's measures of systems of affine functions, we set opposite problems (in the same classes). We propose to analyze them jointly, using the duality.

*A. A. Chentsov and A. G. Chentsov.* **Extremal Bottleneck Routing Problem with Constraints in the Form of Precedence Conditions.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 2. P. 129–142.

An extremal routing problem under constraints in the form of precedence conditions is considered. The quality criterion is the length of the greatest edge of a trajectory. An economical version of a computational procedure based on the dynamic programming method is constructed.

*M. V. Devyaterikova, A. A. Kolokolov, A. P. Kolosov.* **One Approach to Solving a Discrete Production Planning Problem with Interval Data.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 2. P. 48–57.

In this paper, we develop an approach to solving integer programming problems with interval data based on using the possibilities of varying the relaxation set of the problem. This is illustrated by means of an $L$-class enumeration algorithm for solving a dicrete production planning problem. We describe the algorithm and a number of its modifications and present results of a computational experiment for families of problems from the OR Library and with randomly generated initial data. This approach is also applied to obtain approximate solutions of the mentioned problem in its conventional setting.

*I. I. Eremin.* **Author's Results on Mathematical Programming in Retrospect.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 2. P. 58–66.

In 2001, Information Bulletin No. 9 of the Association of Mathematical Programming was published containing annotations of priority results in mathematical programming. In the Bulletin, 22 authors were represented, including the author of this paper. The following of his results were mentioned: (1) the discovery of exact penalty functions; (2) the elaboration of the duality constructions (as well as theorems of duality) for improper, lexicographic, Pareto lexicographic, disjunctive, and other problems. In this paper, we present the author's results mentioned in the bulletin. Publication data and annotations of some monographs and papers of recent years are also given where the author continues the development of the subjects.

*E. Kh. Gimadi.* **Asymptotically Optimal Algorithm for Finding One and Two Edge-Disjoint Traveling Salesman Routes of Maximal Weight in Euclidean Space.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 2. P. 23–32.

The paper presents a polynomial approximation algorithm $\mathcal{A}$ solving the problem of finding one and two edge-disjoint Hamiltonian cycles (traveling salesman routes) of maximal weight in a complete weighted undirected graph in multidimensional Euclidean space. The asymptotic optimality of the algorithm is established.

*A.I. Golikov, Yu.G. Evtushenko.* **Finding the Projection of a Given Point on the Set of Solutions of a Linear Programming Problem.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 2. P. 33–47.

The problem of finding the projections of points on the sets of solutions of primal and dual problems of linear programming is considered. This problem is reduced to a single solution of the problem of minimizing a new auxiliary function, starting from some threshold value of the penalty coefficient. Estimates of the threshold value are obtained. A software implementation of the proposed method is compared with some known commercial and research software packages for solving linear programming problems.

*A.V. Kel'manov.* **Off-Line Detection of a Quasi-Periodically Recurring Fragment in a Numerical Sequence.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 2. P. 81–88.

The paper considers a nontraditional—combinatorial—approach to solving the problem of a posteriori (off-line) noise-proof detection of a recurring fragment in a numerical sequence. Results are presented concerning the complexity, classification, and justification of algorithms for solving discrete extremal problems to which, within the combinatorial approach, some possible variants of this problem are reduced in the case when repetitions are quasi-periodic and the noise is additive.

*Vl.D. Mazurov, M.Yu. Khachay, M.I. Poberii.* **Combinatorial Optimization Problems Related to the Committee Polyhedral Separability of Finite Sets.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 2. P. 89–102.

In the paper, the computational and approximational complexity of the minimal affine separating committee problem, as well as of some important special cases of this problem, is investigated.

*L.D. Popov.* **One Modification of the Logarithmic Barrier Function Method in Linear and Convex Programming.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 2. P. 103–114.

A novel modification of the logarithmic barrier function method is introduced for solving problems of linear and convex programming. The modification is based on a parametric shifting of the constraints of the original problem, similarly to what was done in the method of Wierzbicki–Hestenes–Powell multipliers for the usual quadratic penalty function (this method is also known as the method of modified Lagrange functions). The new method is described, its convergence is proved, and results of numerical experiments are given.

*V. D. Skarin.* **Barrier Function Method and Correction Algorithms for Improper Convex Programming Problems.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 2. P. 115–128.

In the paper, convergence estimates are given for some generalization of the inverse barrier function method in convex programming. The significance of these estimates for constructing iterative algorithms is discussed. Regularizing properties of barrier functions and their application for optimal correction of improper convex programming problems are considered.

*V. G. Zhadan.* **Direct Newton Method for a Linear Problem of Semidefinite Programming.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 2. P. 67–80.

We consider a linear problem of semidefinite programming. To solve this problem, we propose a direct Newton method, which is a generalization of the direct barrier-Newton method for problems of linear programming. We study properties of the method and prove its local convergence.

*V. A. Belonogov.* **On Irreducible Characters of the Group $S_n$ That Are Semiproportional on $A_n$ or $S_n\setminus A_n$. I.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 2. P. 143–163.

The hypothesis that the alternating groups $A_n$ have no pairs of semiproportional irreducible characters is reduced to a hypothesis concerning the problem of describing the pairs of irreducible characters of the symmetric group $S_n$ that are semiproportional on one of the sets $A_n$ or $S_n\setminus A_n$. The form of this hypothesis (in contrast to the form of the original one) is maximally adapted for an inductive proof. Properties of a pair of the mentioned characters are expressed in terms of the structure of Young's diagrams for these characters. The theorem proved in this paper refines the structure of these diagrams in one of the two possible cases.

*M. A. Patrakeev.* **Minimal Embeddings of Topological Spaces into the Real Line.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 2. P. 174–181.

A theorem describing $\mathbb{R}$-minimal topological spaces is proved. These are spaces $(X, \tau)$ topologically embeddable into the real line $\mathbb{R}$ and not possessing this property under the replacement of $\tau$ by a weaker topology.

*N. V. Velichko.* **On Finite-to-One Open Mappings.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 2. P. 164–173.

We investigate open finite-to-one (mainly, $k$-to-one) mappings of topological spaces. The notion of a rigid space is introduced. It is shown that the class of rigid spaces contains all Euclidean spaces and all zero-dimensional Lindelöf spaces. Examples are constructed and problems are formulated.

*P.D. Lebedev, A.A. Uspenskii, V.N. Ushakov.* **Construction of a Minimax Solution for an Eikonal-Type Equation.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 2. P. 182–191.

A formula for a minimax (generalized) solution of the Cauchy–Dirichlet problem for an eikonal-type equation is proved in the case of an isotropic medium providing that the edge set is closed; the boundary of the edge set can be nonsmooth. A technique of constructing a minimax solution is proposed that uses methods from the theory of singularities of differentiable mappings. The notion of a bisector, which is a representative of symmetry sets, is introduced. Special points of the set boundary—pseudovertices—are singled out and bisector branches corresponding to them are constructed; the solution suffers a "gradient catastrophe" on these branches. Having constructed the bisector, one can generate the evolution of wave fronts in smoothness domains of the generalized solution. The relation of the problem under consideration to one class of time-optimal dynamic control problems is shown. The efficiency of the developed approach is illustrated by examples of analytical and numerical construction of minimax solutions.

*D.A. Serkov.* **Minimax Risk (Regret) Strategy for One Class of Control Problems under Dynamic Disturbances.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 2. P. 192–200.

A controlled system under dynamic disturbances is considered. We formulate the problem of finding a strategy that is optimal in the sense of Savage's minimax risk (regret) criterion, list basic properties of such problems, and describe a construction of a strategy optimal in the above sense for one class of systems containing linear systems.

**ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН**

**2008 Том 14, № 2** **Апрель–Июнь**

ISSN 0134–4889

Учредитель
Учреждение Российской академии наук
Институт математики и механики Уральского отделения РАН

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–30115 от 31 октября 2007 г.

Редактор Е. Г. Понизовкина
Технический редактор Н. Н. Моргунова

Отв. за выпуск Г. Ф. Корнилова

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

---

Подписано в печать 10.06.08. Формат $60 \times 84^1/_8$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 25. Уч.-изд. л. 20,2. Тираж 200 экз. Заказ 2445.

---

*Адрес редакции*: 620219, Екатеринбург, ул. С.Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, д.17, офис 226