РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 11, № 2 2005

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 11
№ 2

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

Екатеринбург
2005

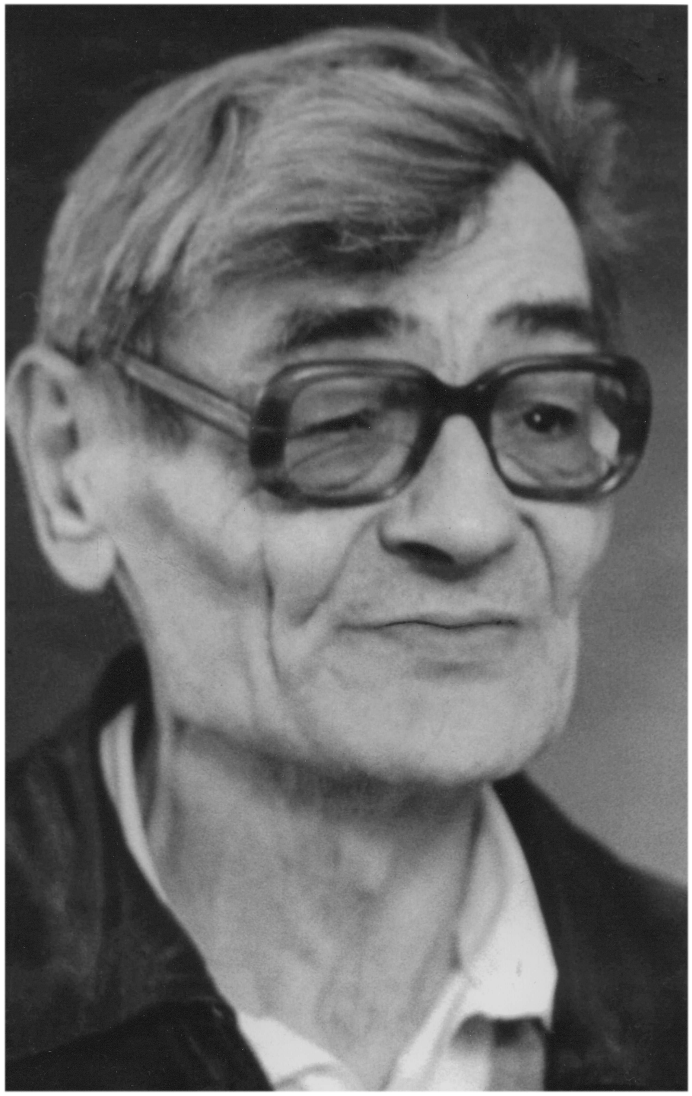
Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 11, № 2. Теория функций: Сб. науч. трудов. Екатеринбург: УрО РАН, 2005. 204 с.
ISBN 5–7691–1752–4.

Настоящий выпуск содержит статьи учеников и коллег профессора С.Б. Стечкина (1920–1995), посвященные его 85-летию и 30-летию летних математических школ его имени по теории функций. В сборнике рассмотрены вопросы сходимости и другие свойства обычных и кратных рядов Фурое по различным системам функций, включая всплески, а также экстремальные свойства полиномов и функций, навигация, МКЭ и сглаживание отображений.

Издание предназначено для специалистов по теории приближений и теории функций, научных сотрудников, аспирантов и студентов.

ISBN 5–7691–1752–4

О $\dfrac{59(06)}{8\Pi6(03998)}$ ПО–2005



Сергей Борисович Стечкин

СОДЕРЖАНИЕ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 11 № 2 2005

УДК 517000

НЕРАВЕНСТВО КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛУПЛОСКОСТИ[1]

Р. Р. Акопян

Получено точное неравенство Колмогорова

$$\|f^{(k)}\|_p \le \|f\|_p{}^{1-k/n}\,\|f^{(n)}\|_p{}^{k/n}, \quad 1 \le k < n, \quad 1 \le p \le \infty,$$

в пространстве Харди H_p функций, аналитических в полуплоскости.

1. Введение

Неравенствами Колмогорова на числовой оси $\mathbb{R}$ называют неравенства вида

$$\|f^{(k)}\|_{L_q(\mathbb{R})} \le \mathcal{K}\,\|f\|^{\alpha}_{L_r(\mathbb{R})}\|f^{(n)}\|^{1-\alpha}_{L_p(\mathbb{R})}, \tag{1.1}$$

где

$$\alpha = \frac{n-k-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}{n-\frac{1}{p}+\frac{1}{r}}.$$

Такие неравенства впервые появились в работе Г. Харди и Дж. Литтлвуда 1912 г., где было показано, что в равномерной норме ($p = r = q = \infty$) имеет место неравенство (1.1) с некоторой конечной константой. Первое точное неравенство (с наименьшей возможной константой) было получено Э. Ландау, Ж. Адамаром при $n = 2$. В 1939 году А.Н. Колмогоров [3] нашел точную константу в неравенстве (1.1) в равномерной норме для всех $k, n\,(1 \le k < n)$. Неравенствам Колмогорова посвящено большое число работ Э. Ландау, Ж. Адамара, Б.-С. Надя, А.Н. Колмогорова, Г. Харди, Дж. Литтлвуда, Г. Полиа, Г. Стейна, С.Б. Стечкина, В.Н. Габушина, В.В. Арестова, Л.В. Тайкова, Ю.Н. Субботина, В.М. Тихомирова, А.П. Буслаева, Г.Г. Магарил-Ильяева и многих других. Интерес к точным неравенствам Колмогорова вызван, в частности, их связью с задачей Стечкина о наилучшем приближении оператора дифференцирования ограниченными операторами, задачей оптимального восстановления производной функции, заданной с ошибкой, и задачей наилучшего приближения класса дифференцируемых функций другим классом более гладких функций. Подробную информацию об исследованиях неравенств Колмогорова и связанных с ними задач можно найти в обзорной работе [1]. К.Ю. Осипенко [9] получил точное неравенство Колмогорова в случае равномерных норм на оси для функций, аналитических в полосе $|\operatorname{Im} z| < \beta$.

В настоящей работе исследуются точные неравенства Колмогорова в пространстве Харди H_p функций, аналитических в полуплоскости. Около 10 лет тому назад В.В. Арестов показал, что в этом случае для равномерных норм точная константа будет строго меньше, чем в соответствующем неравенстве на оси, а также высказал гипотезу, что экстремальными являются функции вида $\exp(i\alpha z)$, $\alpha > 0$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00233) и Программы Государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1347.2003.1).

Пусть H_p, $1 \le p \le \infty$, есть пространство функций, аналитических в верхней полуплоскости $\Pi = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, с конечной нормой

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)| \,:\, z \in \Pi\}, \quad p = \infty,$$

$$\|f\|_p = \sup_{y>0} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^p \, dx \right)^{1/p}, \qquad 1 \le p < \infty.$$

Для натурального n через H_p^n обозначим множество функций $f \in H_p$, у которых производная $f^{(n)}$ порядка n также принадлежит H_p.

Для двух неотрицательных вещественных параметров λ и μ рассмотрим класс

$$Q_p^n(\lambda, \mu) = \left\{ f \in H_p^n : \ \|f\|_p \le \lambda, \, \|f^{(n)}\|_p \le \mu \right\}.$$

При $1 \le k < n$ определим функцию

$$\Omega_p^{k,n}(\lambda, \mu) = \sup\left\{ \|f^{(k)}\|_p : f \in Q_p^n(\lambda, \mu) \right\} = \sup\left\{ \|f^{(k)}\|_p \ : \ \|f\|_p \le \lambda, \ \|f^{(n)}\|_p \le \mu \right\} \tag{1.2}$$

переменных $\lambda, \mu \ge 0$. Справедлива формула

$$\Omega_p^{k,n}(\lambda, \mu) = K \lambda^{\frac{n-k}{n}} \mu^{\frac{k}{n}}, \quad K = \Omega_p^{k,n}(1,1). \tag{1.3}$$

Эта формула обосновывается с помощью следующих известных соображений (см. [6, 1]). Для функции $f \in H_p^n$ рассмотрим функцию $g(z) = cf(hz) \in H_p^n$, где параметры $c, h > 0$ удовлетворяют условиям $ch^{n-1/p} = \mu$, $ch^{-1/p} = \lambda$. Построенное отображение осуществляет взаимно однозначное соответствие между классами $Q_p^{k,n}(1,1)$ и $Q_p^{k,n}(\lambda, \mu)$. При этом для любого j, $0 \le j \le n$, имеет место равенство $\|g^{(j)}\|_p = \|f^{(j)}\|_p \, \lambda^{\frac{n-j}{n}} \mu^{\frac{j}{n}}$. Отсюда получаем

$$\Omega_p^{k,n}(\lambda, \mu) = \sup\left\{ \|g^{(k)}\|_p : g \in Q_p^n(\lambda, \mu) \right\}$$

$$= \sup\left\{ \|f^{(k)}\|_p \, \lambda^{\frac{n-k}{n}} \mu^{\frac{k}{n}} : f \in Q_p^n(1,1) \right\} = \Omega_p^{k,n}(1,1) \lambda^{\frac{n-k}{n}} \mu^{\frac{k}{n}},$$

т.е. формулу (1.3).

На самом деле имеет место равенство $K = \Omega_p^{k,n}(1,1) = 1$. В силу определения (1.2) и представления (1.3) последний факт эквивалентен тому, что на множестве H_p^n выполняется неравенство

$$\|f^{(k)}\|_p \le \|f\|_p^{\frac{n-k}{n}} \, \|f^{(n)}\|_p^{\frac{k}{n}}, \quad f \in H_p^n, \tag{1.4}$$

с наилучшей (наименьшей возможной) константой $K = 1$. Это и есть основной результат данной работы; он составляет суть следующего утверждения.

Теорема 1. *Для произвольных $1 \le k < n$ и $1 \le p \le \infty$ справедливо точное неравенство* (1.4). *При $p = \infty$ функции $\exp(i\alpha z)$, $\alpha > 0$, являются экстремальными в неравенстве* (1.4). *В случае $1 \le p < \infty$ при любом $\alpha > 0$ функции $\exp\left((i\alpha z)^{1+1/m}\right)$, $m \in \mathbb{N}$, образуют экстремальную последовательность.*

Для доказательства основной теоремы мы вначале получим неравенства для равномерных норм производных функций, аналитических в круге и внешности круга. Устремив затем радиус в бесконечность, получим неравенство (1.4) при $p = \infty$; на значения $1 \le p < \infty$ неравенство переносится известным методом Стейна.

2. Точные неравенства для норм производных функций, аналитических в круге и внешности круга

В этом параграфе будет получен ряд точных неравенств в пространстве $H_\infty = H_\infty(V)$ функций f, аналитических и ограниченных в области V с нормой $\|f\| = \sup\{|f(z)| : z \in V\}$ для двух типов областей V: открытых кругов G_R и внешностей E_R замкнутых кругов радиуса R с центром в нуле. Точнее, для этих двух типов областей будет найдена функция $\Omega(V; \lambda, \mu)$ двух неотрицательных переменных λ и μ, являющаяся значением следующей экстремальной задачи, аналогичной задаче (1.2):

$$\Omega(V; \lambda, \mu) = \sup\left\{\|f'\| : f \in Q(V; \lambda, \mu)\right\}, \tag{2.1}$$

где

$$Q(V; \lambda, \mu) = \left\{f \in H_\infty(V) : \ \|f\| \le \lambda, \ \|f''\| \le \mu\right\}$$

— класс функций из $H_\infty(V)$, нормы которых ограничены числом λ, а нормы вторых производных ограничены числом μ. В дальнейшем условимся обозначать через G единичный (открытый) круг G_1, а через E внешность E_1 замкнутого единичного круга.

Далее нам потребуется следующее утверждение.

Лемма. *На множестве функций, аналитических в единичном круге G, справедливо точное неравенство*

$$\|D_m f\| \le \frac{1}{m}\,\|D_m^2 f\|, \tag{2.2}$$

где $D_m f(z) = z^m f'(z)$, $D_m^2 f = D_m(D_m f)$. Неравенство (2.2) *обращается в равенство лишь на функциях $f(z) = az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$.*

Неравенство (2.2) следует из теоремы 4 работы [4]; в случае $m = 1$ — также из утверждений, полученных Лёвнером (см. [5], отдел 3, гл.6, §2, задача 291) и Ньюменом (см. [8]). Однако для полноты изложения приведем доказательство этой леммы. Для этого воспользуемся следующим хорошо известным фактом.

В пространстве $H_\infty(G)$ функций g, аналитических и ограниченных в единичном круге, рассмотрим линейный оператор A, определенный последовательностью коэффициентов $\{\alpha_k\}_{k=0}^\infty$ по формуле

$$Ag(z) = \sum_{k=0}^\infty \alpha_k g_k z^k, \qquad g(z) = \sum_{k=0}^\infty g_k z^k. \tag{2.3}$$

Предположим, что последовательность $\{\alpha_k\}_{k=0}^\infty$ неотрицательная, выпуклая (вниз) и сходится к нулю. Тогда (см., например, [2, 7]) оператор A в пространстве $H_\infty(G)$ ограничен и $\|A\| = \alpha_0$; более того, если $\alpha_0 \ne 0$ (или, что то же самое, последовательность $\{\alpha_k\}_{k=0}^\infty$ ненулевая), то норма оператора достигается лишь на постоянных функциях.

Вернемся к доказательству леммы. Предположим, что функция $f(z) = \sum_{k=0}^\infty f_k z^k$ аналитична в единичном круге. Имеем

$$D_m f(z) = z^m \sum_{k=0}^\infty (k+1) f_{k+1} z^k, \qquad D_m^2 f(z) = z^{2m-1} \sum_{k=0}^\infty (k+1)(k+m) f_{k+1} z^k.$$

Функцию $z^{-m} D_m f(z)$ можно интерпретировать как значение оператора A_m вида (2.3) с коэффициентами $\alpha_k = 1/(k+m)$, $k \ge 0$, на функции $z^{-2m+1} D_m^2 f(z)$, аналитической в единичном круге, т.е.

$$z^{-m} D_m f(z) = A_m\left[z^{-2m+1} D_m^2 f(z)\right].$$

Коэффициенты оператора A_m удовлетворяют перечисленным выше условиям, и потому $\|A_m\| = 1/m$. Этот факт влечет за собой утверждение леммы.

В следующей теореме приведен аналог неравенства Колмогорова в пространстве $H_\infty(E_R)$ при $k=1,\ n=2$.

Теорема 2. *В множестве $H^2_\infty(E_R)$ функций $f\in H_\infty(E_R)$, у которых вторая производная f'' также принадлежит $H_\infty(E_R)$, имеет место точное неравенство*

$$\|f'\|\le \min\left\{\frac{R}{2}\,\|f''\|,\ \ \frac{1}{2R}\left(\sqrt{\|f\|^2+4R^2\|f\|\,\|f''\|}-\|f\|\right)\right\}. \tag{2.4}$$

Неравенство (2.4) *обращается в равенство на функциях вида*

$$f_1(z)=\frac{a}{z}+b,\quad a,\,b\in\mathbb{C} \tag{2.5}$$

$$f_2(z)=c\frac{R-z\xi}{z-R\overline{\xi}},\quad c\in\mathbb{C},\quad |\xi|<1. \tag{2.6}$$

Доказательство. Обоснуем вначале неравенство (2.4) в случае $R=1$. Покажем, что любая функция, аналитическая и ограниченная во внешности E замкнутого единичного круга, удовлетворяет неравенству

$$\|f'\|\le\frac{1}{2}\,\|f''\|. \tag{2.7}$$

Действительно, для произвольной функции f, аналитической и ограниченной в E, справедливо представление $f(z)=F\left(1/z\right)$, где функция $F(w)=f\left(1/w\right)$ аналитическая и ограниченная в единичном круге G, при этом

$$f'(z)=-w^2F'(w)=-D_2F(w),\qquad f''(z)=D_2^2F(w).$$

Отсюда, используя лемму, получим неравенство (2.7).

Теперь покажем, что справедливо неравенство

$$\|f'\|\le\frac{1}{2}\left(\sqrt{\|f\|^2+4\|f\|\,\|f''\|}-\|f\|\right). \tag{2.8}$$

Без ограничения общности можно считать, что $\|f''\|=1$. Если $\|f\|\ge 1/2$, то неравенство (2.8) следует из неравенства (2.7). Исследуем теперь случай $\|f\|\le 1/2$. Выберем точку $\xi\in[0,1]$ из условия

$$\|f\|=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-\xi)^2}{1+\xi}. \tag{2.9}$$

Рассмотрим аналитическую в E функцию g, определяемую равенством

$$f(z)=\frac{(1-\xi)^2}{1+\xi}\,g\left(\frac{z-\xi}{1-\xi z}\right).$$

В силу (2.9) имеем $\|g\|=1/2$. Соотношение

$$f'(z)=\frac{(1-\xi)^3}{(1-\xi z)^2}\,g'\left(\frac{z-\xi}{1-\xi z}\right) \tag{2.10}$$

влечет за собой оценку

$$\|f'\|\le(1-\xi)\|g'\|. \tag{2.11}$$

Дифференцируя (2.10) еще раз, находим

$$f''(z)=(1-\xi)^3\left(\frac{2\xi}{(1-\xi z)^3}\,g'\left(\frac{z-\xi}{1-\xi z}\right)+\frac{1-\xi^2}{(1-\xi z)^4}\,g''\left(\frac{z-\xi}{1-\xi z}\right)\right).$$

Не ограничивая общности, можно считать, что норма

$$\|g''\| = \sup\left\{|g''(z)| : |z| < 1\right\}$$

достигается на последовательности точек, сходящейся к точке $z = 1$. В этом случае

$$\left\|\frac{1}{(1-\xi z)^4} g''\left(\frac{z-\xi}{1-\xi z}\right)\right\| = \frac{\|g''\|}{(1-\xi)^4}.$$

Отсюда, используя неравенство (2.7), получаем

$$1 = \|f''\| \geq (1+\xi)\|g''\| - 2\xi\|g'\| \geq \|g''\|.$$

Неравенства (2.11) и (2.7) влекут за собой оценки

$$\|f'\| \leq (1-\xi)\|g'\| \leq \frac{1-\xi}{2}\,\|g''\| \leq \frac{1-\xi}{2}.$$

Выражая ξ из (2.9) и подставляя в последнее соотношение, получим неравенство (2.8) в предположении $\|f''\| = 1$, а в силу однородности нормы — и в общем случае.

Для доказательства (2.4) при $R \neq 1$ достаточно в неравенствах (2.7) и (2.8) произвести замену $\zeta = Rz$.

Экстремальность функций (2.5) и (2.6) видна из доказательства, впрочем, этот факт нетрудно проверить непосредственно. Таким образом, теорема 2 доказана.

Теорема 2 содержит, по существу, решение задачи (2.1) для области $V = E_R$. В следующей теореме соответствующий результат сформулирован явно. Впрочем, как нетрудно понять, эти две теоремы эквивалентны.

Теорема 2$'$. *При любом $R > 0$ для любых неотрицательных чисел λ и μ справедливо равенство*

$$\Omega(E_R;\lambda,\mu) = \min\left\{\frac{\mu R}{2},\, \frac{1}{2R}\left(\sqrt{\lambda^2 + 4R^2\lambda\mu} - \lambda\right)\right\};$$

экстремальными являются функции (2.5), (2.6) *при соответствующем выборе параметров.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (2.4) следует неравенство

$$\Omega(E_R;\lambda,\mu) \leq \min\left\{\frac{\mu R}{2},\, \frac{1}{2R}\left(\sqrt{\lambda^2 + 4R^2\lambda\mu} - \lambda\right)\right\}.$$

С другой стороны, как нетрудно проверить, в случае $\frac{\lambda}{\mu} \geq \frac{R^2}{2}$ функция f_1, определенная в (2.5) при $a = \frac{\mu R^3}{2}$ и $b = \lambda - \frac{\mu R^2}{2}$, и в случае $\frac{\lambda}{\mu} \leq \frac{R^2}{2}$ функция f_2, определенная в (2.6) при $c = \lambda$ и $\frac{\mu R^2}{2\lambda} = \frac{1+\xi}{(1-\xi)^2}$, дают обратное неравенство. Теорема 2$'$ доказана.

Следующая теорема содержит аналог неравенства Колмогорова в пространстве H_∞ на круге G_R при $k = 1,\ n = 2$.

Теорема 3. *В множестве $H^2_\infty(G_R)$ функций $f \in H_\infty(G_R)$, у которых вторая производная f'' также принадлежит $H_\infty(G_R)$, имеет место точное неравенство*

$$\|f'\| \leq \frac{1}{2R}\left(\sqrt{\|f\|^2 + 4R^2\|f\|\|f''\|} + \|f\|\right). \tag{2.12}$$

Неравенство (2.12) *обращается в равенство на функциях вида*

$$f_0(z) = c\frac{z-\xi R}{R-\bar{\xi}z}, \quad c \in \mathbb{C}, \quad |\xi| < 1. \tag{2.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале покажем, что справедливо неравенство (2.12) в случае $R = 1$. Для произвольной функции f, аналитической и ограниченной в открытом единичном круге G, положим $g(z) = f\,(1/z)$. Ясно, что функция g является аналитической и ограниченной во внешности замкнутого единичного круга E. Дифференцируя функцию g, получим

$$g'(z) = -\frac{1}{z^2} f'\left(\frac{1}{z}\right), \qquad g''(z) = \frac{2}{z^3} f'\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z^4} f''\left(\frac{1}{z}\right).$$

Для норм функций f и g и их производных справедливы следующие соотношения:

$$\|g\| = \|f\|, \qquad \|g'\| = \|f'\|, \qquad \|g''\| \le 2\|f'\| + \|f''\|. \tag{2.14}$$

Подставляя (2.14) в неравенство (2.8), получим

$$\|f'\| \le \frac{1}{2}\left(\sqrt{\|f\|^2 + 8\|f\|\,\|f'\| + 4\|f\|\,\|f''\|} - \|f\|\right).$$

Решив последнее неравенство относительно $\|f'\|$, приходим к (2.12) в случае $R = 1$.

Для доказательства (2.12) при произвольном R достаточно произвести замену $\zeta = Rz$. Экстремальность функций вида (2.13) можно непосредственно проверить. Таким образом, теорема 3 доказана.

Как следствие теоремы 3 можно выписать решение задачи (2.1) для области $V = G_R$.

Теорема 3′. *При любом $R > 0$ для любых неотрицательных чисел λ и μ справедливо равенство*

$$\Omega(G_R; \lambda, \mu) = \frac{1}{2R}\left(\sqrt{\lambda^2 + 4R^2\lambda\mu} + \lambda\right);$$

экстремальными являются функции (2.13) *при соответствующем выборе параметров.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (2.12) следует неравенство

$$\Omega(G_R; \lambda, \mu) \le \frac{1}{2R}\left(\sqrt{\lambda^2 + 4R^2\lambda\mu} + \lambda\right).$$

С другой стороны, нетрудно проверить, что функция f_0, определенная в (2.13), при $\dfrac{\mu R^2}{2\lambda} = \dfrac{\xi(1+\xi)}{(1-\xi)^2}$ дает обратное неравенство. Теорема 3′ также доказана.

3. Доказательство основной теоремы

Ясно, что неравенство (2.4) справедливо для функций, аналитических и ограниченных во внешности замкнутого круга радиуса R с центром в произвольной точке z_0, а неравенство (2.12) — для функций, аналитических и ограниченных в открытом круге радиуса R с центром в произвольной точке $\widetilde{z}_0$. Рассмотрев $z_0 = -iR$ в первом случае, а $\widetilde{z}_0 = iR$ — во втором и перейдя к пределу при $R \to \infty$, получим неравенство (1.4) для случая равномерной нормы при $k = 1$, $n = 2$. Для произвольных k, n, $1 \le k < n$, неравенство доказывается индукцией по параметрам k и n.

На произвольные p, $1 \le p < \infty$, неравенство переносится известным методом Стейна следующим образом. Для функции $f \in H_p^n$ при $y > 0$ рассмотрим функцию F_y, определенную равенством

$$F_y(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z+t)g(t+iy)dt,$$

в котором функция g задается соотношением

$$g(z) = \frac{|f^{(k)}(z)|^{p-1}}{\|f^{(k)}\|_p^{p-1}} \exp\left(-i \arg f^{(k)}(z)\right).$$

Нетрудно понять, что $g \in H_q$, $1/p + 1/q = 1$, при этом $\|g\|_q = 1$.

Функция F_y принадлежит классу H_∞^n. Действительно, из неравенства

$$\sup_{y>0} \|F_y\|_\infty = \sup_{y>0} \sup_{z\in\Pi} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+z) g(t+iy) dt \right|$$

$$\leq \sup_{z\in\Pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t+z)|^p dt \right)^{1/p} \sup_{y>0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t+iy)|^q dt \right)^{1/q}$$

следует оценка

$$\sup_{y>0} \|F_y\|_\infty \leq \|f\|_p. \tag{3.1}$$

Аналогично можно получить оценку

$$\sup_{y>0} \|F_y^{(n)}\|_\infty \leq \|f^{(n)}\|_p. \tag{3.2}$$

Пользуясь доказанным выше неравенством (1.4) для равномерных норм, получаем

$$\|f^{(k)}\|_p = \sup_{y>0} |F_y^{(k)}(iy)| \leq \sup_{y>0} \|F_y\|_\infty^{\frac{n-k}{n}} \|F_y^{(n)}\|_\infty^{\frac{k}{n}}. \tag{3.3}$$

Из (3.1)–(3.3) следует неравенство (1.4) при $1 \leq p < \infty$. Теорема 1 доказана.

Поступила 06.09.04

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арестов В.В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 6. С. 89–124.
2. **Бабенко К.И.** О наилучших приближениях одного класса аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1958. Т. 22, № 5. Р. 531–540.
3. **Колмогоров А.Н.** О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольных функций на бесконечном интервале // Избр. тр. Математика, механика. М.:Наука, 1985. С. 252–263.
4. **Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю., Тихомиров В.М.** Оптимальное восстановление и теория экстремума // Докл. РАН. 2001. Т. 279. С. 161–164.
5. **Полиа Г., Сеге Г.** Задачи и теоремы из анализа. Наука, М.: 1978. Ч.1.
6. **Стечкин С.Б.** Наилучшее приближение линейных операторов // Мат. заметки. 1967. Т 1, № 2. С. 137-148.
7. **Тайков Л.В.** О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки. Т. 1, № 2. С. 155-162.
8. **Micchelli C.A., Rivlin T.J.** A Survey of Optimal Recovery, Optimal Estimation in Approximation Theory. New York: Plenum Press, 1977.
9. **Osipenko K.Yu.**, Optimal Recovery of Analytic Function. Huntington (NY): Nova Science Publ.Inc., 2000.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 11 № 2 2005

УДК 517.518

О СКОРОСТИ РОСТА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ КРАТНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СУММ ФУРЬЕ[1]

Н. Ю. Антонов

В случае, когда последовательность d-мерных векторов $\mathbf{n}_k = (n_k^1, n_k^2, ..., n_k^d)$ с неотрицательными целочисленными координатами удовлетворяет условию

$$n_k^j = \alpha_j m_k + O(1), \quad k \in \mathbb{N}, \quad 1 \le j \le d,$$

где $\alpha_1, ..., \alpha_d$ — неотрицательные вещественные числа, а $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, получена следующая оценка скорости роста последовательностей $S_{\mathbf{n}_k}(f, \mathbf{x})$ прямоугольных частичных сумм кратных тригонометрических рядов Фурье: если $f \in L(\ln^+ L)^{d-1}([-\pi, \pi)^d)$, то

$$S_{\mathbf{n}_k}(f, \mathbf{x}) = o(\ln k) \quad \text{п.в.}$$

Аналогичные оценки справедливы и для сопряженных рядов.

1. Введение

Пусть d — натуральное число, $\mathbb{Z}^d$ и $\mathbb{R}^d$ — множества всех d-мерных векторов с целочисленными и действительными координатами соответственно, $\mathbf{k} = (k_1, ..., k_d) \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{kx} = k_1 x_1 + ... + k_d x_d$,

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kx}} \tag{1.1}$$

— кратный тригонометрический ряд Фурье 2π-периодической по каждой переменной и суммируемой на $[-\pi, \pi)^d$ функции f и для $\mathbf{n} = (n_1, n_2, ..., n_d)$, $n_j \ge 0$, $1 \le j \le d$,

$$S_{\mathbf{n}}(f, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}=(k_1,...,k_d): |k_j| \le n_j, 1 \le j \le d} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kx}}$$

— его $\mathbf{n}$-я прямоугольная частичная сумма.

Пусть B — некоторое непустое подмножество множества первых d натуральных чисел: $B = \{r_1, ..., r_l\} \subset \{1, ..., d\}$. Ряд

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \prod_{j=1}^{l} (-i \operatorname{sign} k_{r_j}) a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kx}} \tag{1.2}$$

называется сопряженным к ряду (1.1) по переменным, номера которых входят во множество B, или B-сопряженным, а $\mathbf{n}$-я прямоугольная частичная сумма $\tilde{S}_{\mathbf{n},B}(f, \mathbf{x})$ ряда (1.2) определяется аналогично $\mathbf{n}$-й прямоугольной частичной сумме ряда (1.1). При $d = 1$ ряды (1.1) и (1.2) совпадают соответственно с обычным тригонометрическим рядом Фурье 2π-периодической функции и его сопряженным рядом. В случае, когда множество B пустое, будем считать, что

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 05-01-00949, и Ведущих научных школ РФ НШ-1347.2003.1.

ряд (1.2) совпадает с рядом (1.1). Вообще, всюду далее произведение $\prod$, в котором множество сомножителей пусто, будем по определению считать равным единице.

Пусть $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ — неубывающая функция. Обозначим через $\varphi(L)(E)$ множество всех определенных на множестве $E \subset \mathbb{R}^d$ и измеримых по Лебегу функций f, удовлетворяющих условию

$$\int_E \varphi(|f(\mathbf{t})|)d\mathbf{t} < \infty.$$

Будем полагать для $u \geq 0 \quad \ln^+ u = \ln(u + e)$.

В случае $d = 1$ имеет место классическая оценка Г. Харди [1] скорости роста частичных сумм тригонометрических рядов Фурье: для любой функции $f \in L([-\pi, \pi))$ почти всюду выполняется соотношение

$$S_n(f, x) = o(\ln n). \tag{1.3}$$

К настоящему времени неясно, является ли оценка (1.3) неулучшаемой. Известно (С.В. Конягин [2]), что $\ln n$ в правой части (1.3) нельзя заменить на последовательность, растущую медленнее, чем $\sqrt{\ln n / \ln \ln n}$. К.И. Осколковым [3] было получено следующее обобщение (1.3): для любой функции $f \in L([-\pi, \pi))$ и любой последовательности натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ справедлива оценка

$$\max\{|S_{n_k}(f, x)|, |\tilde{S}_{n_k}(f, x)|\} = o(\ln k) \quad \text{п.в.}, \tag{1.4}$$

неулучшаемая в случае, когда последовательность $\{n_k\}$ растет достаточно быстро, в частности является лакунарной. Отметим, что ранее Р. Хантом [4] был получен частный случай оценки (1.4).

При $d = 2$ Г.А. Карагулян [5] доказал, что для любой последовательности $\mathbf{n}_k = (n_k^1, n_k^2)$ и для каждой функции $f \in L \ln^+ L([-\pi, \pi)^2)$

$$S_{\mathbf{n}_k}(f, \mathbf{x}) = o(\ln^2 k) \quad \text{п.в.} \tag{1.5}$$

Из следующего результата вытекает, что при некоторых условиях на последовательность $\mathbf{n}_k$ оценка (1.5) может быть улучшена.

Теорема. *Пусть $d \in \mathbb{N}$ и последовательность $\mathbf{n}_k = (n_k^1, n_k^2, ..., n_k^d)$ представима в виде*

$$n_k^j = \alpha_j m_k + O(1), \quad k \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq j \leq d, \tag{1.6}$$

где $\alpha_1, ..., \alpha_d$ — неотрицательные вещественные числа, а $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел. Тогда для любой функции $f \in L(\ln^+ L)^{d-1}([-\pi, \pi)^d)$ и любого $B \subset \{1, ..., d\}$ при почти всех $\mathbf{x} \in [-\pi, \pi)^d$ справедлива оценка

$$\tilde{S}_{\mathbf{n}_k, B}(f, \mathbf{x}) = o(\ln k).$$

В частности,

$$S_{\mathbf{n}_k}(f, \mathbf{x}) = o(\ln k) \quad \textit{п.в.}$$

2. Предварительные утверждения

Пусть функция $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, $\bar{f}(x)$ — преобразование Гильберта функции f:

$$\bar{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t + x)}{t} \, dt,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения.

Теорема A (см., например, [6], гл. 5, теоремы 1 и 2). *Преобразование Гильберта является оператором слабого типа* $(1,1)$ *и* $(2,2)$, *т.е. существует абсолютная константа* $C_0 > 0$ *такая, что для любых* $f \in L(\mathbb{R})$ *и* $y > 0$

$$\mathrm{m}\{x \in \mathbb{R} : |\bar{f}(x)| > y\} \le \frac{C_0}{y} \, \|f\|_{L(\mathbb{R})} \tag{2.1}$$

и для любых $f \in L^2(\mathbb{R})$ *и* $y > 0$

$$\mathrm{m}\{x \in \mathbb{R} : |\bar{f}(x)| > y\} \le \frac{C_0}{y^2} \, \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{2.2}$$

Пусть $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Положим

$$\varphi_d(u) = \begin{cases} u(\ln u)^d, & u \ge e, \\ (u^{\frac{3}{2}})/\sqrt{e}, & 0 \le u < e. \end{cases} \tag{2.3}$$

Заметим, что $L(\ln^+ L)^d(E) \subset \varphi_d(L)(E)$ для любого множества $E \subset \mathbb{R}^d$.

Лемма 1. *Для* $d \in \mathbb{N}$ *и функции* $f \in \varphi_d(L)(\mathbb{R})$ *справедлива оценка*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_{d-1}(|\bar{f}(t)|)\, dt \le C_d \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_d(|f(t)|)\, dt, \tag{2.4}$$

где C_d *— константа, зависящая лишь от* d.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y > 0$. Положим

$$g(x) = g_y(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| > y, \\ 0, & |f(x)| \le y, \end{cases}$$

$$h(x) = h_y(x) = f(x) - g(x).$$

Тогда, обозначив $\lambda_f(y) = \mathrm{m}\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > y\}$, имеем

$$\lambda_{\bar{f}}(y) \le \mathrm{m}\{x \in \mathbb{R} : |\bar{g}_y(x)| > y/2\} + \mathrm{m}\{x \in \mathbb{R} : |\bar{h}_y(x)| > y/2\} = \lambda_{\bar{g}}(y/2) + \lambda_{\bar{h}}(y/2). \tag{2.5}$$

Пользуясь равенством

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_{d-1}(|\bar{f}(t)|)\, dt = -\int\limits_0^\infty \varphi_{d-1}(y)\, d\lambda_{\bar{f}}(y) = \int\limits_0^\infty \lambda_{\bar{f}}(y)\, d\varphi_{d-1}(y),$$

оценкой (2.5) и неравенствами (2.1) и (2.2), примененными к функциям $g_y(x)$ и $h_y(x)$ соответственно, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_{d-1}(|\bar{f}(t)|)\, dt \le \int\limits_0^\infty \lambda_{\bar{g}}\left(\frac{y}{2}\right) d\varphi_{d-1}(y) + \int\limits_0^\infty \lambda_{\bar{h}}\left(\frac{y}{2}\right) d\varphi_{d-1}(y)$$

$$\le 2C_0 \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{y} \int\limits_{\{t \in \mathbb{R} : |f(t)| > y\}} |f(t)|\, dt \right) d\varphi_{d-1}(y) + 4C_0 \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{y^2} \int\limits_{\{t \in \mathbb{R} : |f(t)| \le y\}} |f(t)|^2\, dt \right) d\varphi_{d-1}(y)\ .$$

Далее, положив

$$\psi_d(u) = \begin{cases} (\ln u)^d, & u \ge e, \\ \sqrt{u/e}, & 0 \le u < e, \end{cases}$$

замечая, что $\varphi'_d(u) \le 2(d+1)\psi_d(u)$, и меняя порядок интегрирования в последних двух интегралах, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_{d-1}(|\bar{f}(t)|)\,dt \le 4C_0 d \int\limits_{\mathbb{R}} |f(t)| \left(\int\limits_{0}^{|f(t)|} \frac{\psi_{d-1}(y)}{y}\,dy \right)\,dt + 8C_0 d \int\limits_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \left(\int\limits_{|f(t)|}^{\infty} \frac{\psi_{d-1}(y)}{y^2}\,dy \right) dt. \tag{2.6}$$

Оценим внутренние интегралы в правой части (2.6). При $0 \le u < e$

$$\int\limits_0^u \frac{\psi_{d-1}(y)}{y}\,dy = \frac{1}{\sqrt{e}} \int\limits_0^u y^{-\frac{1}{2}}\,dy \le \frac{2u^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{e}} = \frac{2\varphi_d(u)}{u}.$$

Если $u \ge e$, то

$$\int\limits_0^u \frac{\psi_{d-1}(y)}{y}\,dy = \frac{1}{\sqrt{e}} \int\limits_0^e y^{-\frac{1}{2}}\,dy + \int\limits_e^u \frac{(\ln y)^{d-1}}{y}\,dy = 2 + \left.\frac{(\ln y)^d}{d}\right|_e^u \le 3\,(\ln u)^d = \frac{3\,\varphi_d(u)}{u}.$$

Таким образом, для всех $u \ge 0$

$$\int\limits_0^u \frac{\psi_{d-1}(y)}{y}\,dy \le \frac{3\varphi_d(u)}{u}. \tag{2.7}$$

При $u \ge e$, $d > 1$

$$\int\limits_u^\infty \frac{\psi_{d-1}(y)}{y^2}\,dy = \int\limits_u^\infty \frac{(\ln y)^{d-1}}{y^2}\,dy = -\left.\frac{(\ln y)^d}{y}\right|_u^\infty + (d-1)\int\limits_u^\infty \frac{(\ln y)^{d-2}}{y^2}\,dy$$

$$= \sum_{k=0}^{d-1} \frac{(d-1)!}{(d-1-j)!} \cdot \frac{(\ln u)^{d-1-j}}{u} \le \frac{d!(\ln u)^{d-1}}{u} = \frac{d!\varphi_d(u)}{u^2}.$$

При $u \ge e$, $d = 1$ оцениваемый интеграл, очевидно, также не превосходит $d!\varphi_d(u)/u^2$. Наконец, если $0 \le u < e$, то

$$\int\limits_u^\infty \frac{\psi_{d-1}(y)}{y^2}\,dy = \frac{1}{\sqrt{e}} \int\limits_u^e y^{-\frac{3}{2}}\,dy + \int\limits_e^\infty \frac{(\ln y)^{d-1}}{y^2}\,dy \le \frac{2u^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{e}} - \frac{2}{e} + \frac{d!}{e} \le \frac{3d!u^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{e}} = \frac{3d!\varphi_d(u)}{u^2}.$$

Таким образом, для всех $u \ge 0$

$$\int\limits_0^u \frac{\psi_{d-1}(y)}{y^2}\,dy \le 3d!\frac{\varphi_d(u)}{u^2}. \tag{2.8}$$

Объединяя (2.6), (2.7) и (2.8), получаем (2.4) с константой $C_d = 12C_0 d(1 + 2d!)$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $d \ge 2$, $f \in \varphi_{d-1}(L)(\mathbb{R}^d)$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, $\mu^2 + \nu^2 \ne 0$. Тогда функция $h^{\mu,\nu}$, определяемая равенством*

$$h^{\mu,\nu}(x_1, x_2, ..., x_d) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x_1 + \mu t, x_2 + \nu t, x_3, ..., x_d)\frac{1}{t}\,dt,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения, принадлежит классу $\varphi_{d-2}(L)(\mathbb{R}^d)$ *и*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi_{d-2}(|h^{\mu,\nu}(x_1,...,x_d)|)\,dx_1...dx_d \le C_{d-1}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi_{d-1}(|f(x_1,...,x_d)|)\,dx_1...dx_d. \tag{2.9}$$

Здесь функции φ_d *определены равенством* (2.3)*, а константы* C_{d-1} *совпадают с соответствующими константами из леммы* 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности можно считать, что $\mu \ne 0$. Вводя новые переменные $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2 + (\nu/\mu)x'_1$, $x_3 = x'_3$,..., $x_d = x'_d$, получим

$$h^{\mu,\nu}(x_1,x_2,...,x_d) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x'_1+\mu t, x'_2 + \frac{\nu}{\mu}x'_1 + \nu t, x'_3,...,x'_d)\frac{1}{t}\,dt$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f(x'_1+\mu t, x'_2 + \frac{\nu}{\mu}(x'_1+\mu t), x'_3,...,x'_d)\frac{1}{t}\,dt. \tag{2.10}$$

При фиксированных x'_2,...,x'_d правая часть (2.10) как функция переменной x'_1 является преобразованием Гильберта функции $f(x'_1, x'_2+(\nu/\mu)x'_1, x'_3,...,x'_d)$, поэтому из леммы 1 следует

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_{d-2}\left(\left|\int\limits_{\mathbb{R}} f(x'_1+\mu t, x'_2+\frac{\nu}{\mu}(x'_1+\mu t), x'_3,...,x'_d)\frac{1}{t}dt\right|\right)dx'_1$$

$$\le C_{d-1}\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_{d-1}(|f(x'_1, x'_2+(\nu/\mu)x'_1, x'_3,...,x'_d)|)\,dx'_1. \tag{2.11}$$

Интегрируя (2.11) по $(x'_2,...,x'_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$, пользуясь равенством (2.10) и замечая, что якобиан перехода от $(x'_1,x'_2,...,x'_d)$ к $(x_1,x_2,...,x_d)$ равен единице, получаем (2.9). Лемма 2 доказана.

Пусть $f(x)$ — 2π-периодическая интегрируемая функция, т.е. $f \in L([-\pi,\pi))$. Обозначим через $\tilde f$ функцию, тригонометрически сопряженную с f:

$$\tilde f(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения.

Лемма A (см. [3], доказательство теоремы 1). *Пусть* $f \in L([-\pi,\pi))$, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— последовательность измеримых комплекснозначных функций на периоде* $[-\pi,\pi)$ *таких, что* $|f_k(x)| \le |f(x)|$. *Пусть*

$$F(x) = F(f,\{f_k\},x) = \sup_{k\ge1}\frac{|\tilde f(x)|}{\ln(k+1)}.$$

Тогда для всех $y > 0$

$$\mathrm{m}\{x : F(x) > y\} \le \frac{K_0}{y}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx.$$

В дальнейшем понадобится следующий непериодический аналог леммы A.

Лемма 3. *Пусть* $f \in L(\mathbb{R})$, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— последовательность измеримых комплекснозначных функций на* $\mathbb{R}$ *такая, что* $|f_k(x)| \le |f(x)|$, $x \in \mathbb{R}$. *Тогда для всех* $y > 0$

$$\mathrm{m}\left\{x \in [-\pi,\pi) : \sup_{k\ge1}\frac{|\bar f_k(x)|}{\ln(k+1)} > y\right\} \le \frac{K}{y}\int\limits_{\mathbb{R}}|f(x)|\,dx. \tag{2.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале покажем с помощью леммы А справедливость неравенства

$$\mathrm{m}\left\{x\in(-\pi/2,\pi/2):\sup_{k\ge1}\frac{\left|\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} f_k(t+x)\frac12\operatorname{ctg}\frac t2 dt\right|}{\ln(k+1)}>y\right\}\le\frac{K_1}{y}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx. \tag{2.13}$$

Для этого заметим, что в соотношении (2.13) используются значения функций лишь на $[-\pi,\pi)$, и поэтому, заменяя f_k на f_k^1 — функции, совпадающие на $[-\pi,\pi)$ с f_k и 2π-периодические, получаем

$$\left|\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} f_k(t+x)\frac12\operatorname{ctg}\frac t2\,dt\right|=\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_k^1(t+x)\frac12\operatorname{ctg}\frac t2\,dt-\left(\int\limits_{-\pi}^{-\pi/2}+\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\right)f_k^1(t+x)\frac12\operatorname{ctg}\frac t2\,dt\right|$$

$$\le\pi|\tilde f_k^1(x)|+\frac12\operatorname{ctg}\frac\pi4\left(\int\limits_{-\pi}^{-\pi/2}+\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\right)|f_k^1(t+x)|\,dt\le\pi|\tilde f_k^1(x)|+\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f_k(t)|\,dt.$$

Отсюда следует, что левая часть (2.13) не превосходит

$$\mathrm{m}\left\{x\in(-\pi/2,\pi/2):\sup_{k\ge1}\frac{|\tilde f_k^1(x)|}{\ln(k+1)}>\frac{y}{2\pi}\right\}+\mathrm{m}\left\{x\in(-\pi/2,\pi/2):\sup_{k\ge1}\frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\,dt}{\ln(k+1)}>\frac y2\right\}.$$

Используя лемму А и тот факт, что второе слагаемое последнего выражения не больше, чем $(4\pi/y)\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt$, получаем (2.13) с константой $K_1=2\pi(K_0+2)$.

Далее, с помощью неравенства

$$\left|\frac12\operatorname{ctg}\frac t2-\frac1t\right|\le K_2,\quad -\frac\pi2\le t\le\frac\pi2,$$

и рассуждений, аналогичных только что приведенным, из (2.13) имеем

$$\mathrm{m}\left\{x\in(-\pi/2,\pi/2):\sup_{k\ge1}\frac{\left|\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{f_k(t+x)}{t}\,dt\right|}{\ln(k+1)}>y\right\}\le\frac{K_3}{y}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx, \tag{2.14}$$

где $K_3=2(K_1+K_2)$.

Пусть теперь f — произвольная функция из $L(\mathbb{R})$ с ограниченным носителем, $|f_k(t)|\le|f(t)|$, $t\in\mathbb{R}$. Пусть $f(t)=0$ при $t\notin[-a,a]$, $a>0$. Тогда для $x\in[-a,a]$, $v=\pi x/(4a)$, $g_k(u)=f_k(4au/\pi)$ и $g(u)=f(4au/\pi)$

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{f_k(x+t)}{t}\,dt=\int\limits_{x-a}^{x+a}\frac{f_k(x+t)}{t}\,dt=\int\limits_{-2a}^{2a}\frac{f_k(x+t)}{t}\,dt=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{f_k\left(x+\frac{4au}{\pi}\right)}{u}\,du=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{g_k(v+u)}{u}\,du.$$

Отсюда с помощью оценки (2.14), примененной к последовательности функций $g_k(t)$, получаем

$$\mathrm{m}\left\{x\in[-a,a]:\frac{\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\left|\int\limits_{x-a}^{x+a}\frac{f_k(x+t)}{t}\,dt\right|}{\ln(k+1)}>y\right\}=\frac{4a}{\pi}\mathrm{m}\left\{v\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]:\frac{\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\left|\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{g_k(v+u)}{u}\,du\right|}{\ln(k+1)}>y\right\}$$

$$\le\frac{4a}{\pi}\mathrm{m}\left\{v\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]:\frac{\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\left|\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{g_k(v+u)}{u}\,du\right|}{\ln(k+1)}>y\right\}$$

$$\le\frac{4a}{\pi}\cdot\frac{K_3}{y}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g(u)|\,du=\frac{K_3}{y}\int\limits_{-a}^{a}|f(t)|\,dt=\frac{K_3}{y}\int\limits_{\mathbb{R}}|f(t)|\,dt. \tag{2.15}$$

Пусть, наконец, f — произвольная функция из $L(\mathbb{R})$, $|f_k(t)|\le|f(t)|$, $t\in\mathbb{R}$. Тогда для $x\in[-\pi,\pi]$ и $a>1$

$$|\bar f_k(x)|\le\left|\int\limits_{x-a}^{x+a}\frac{f_k(x+t)}{t}\,dt\right|+\left|\left(\int\limits_{-\infty}^{x-a}+\int\limits_{x+a}^{+\infty}\right)\frac{f_k(x+t)}{t}\,dt\right|$$

$$\le\left|\int\limits_{x-a}^{x+a}\frac{f_k(x+t)}{t}\,dt\right|+\left(\int\limits_{-\infty}^{-a}+\int\limits_{a}^{+\infty}\right)|f(t)|\,dt,$$

откуда

$$\sup_{k\ge1}\frac{|\bar f_k(x)|}{\ln(k+1)}\le\left|\int\limits_{x-a}^{x+a}\frac{f_k(x+t)}{t}\,dt\right|+\frac{1}{\ln2}\left(\int\limits_{-\infty}^{-a}+\int\limits_{a}^{+\infty}\right)|f(t)|\,dt.$$

Замечая, что мера тех $x\in[-\pi,\pi)$, для которых первое слагаемое последнего неравенства больше y, оценивается с помощью неравенства (2.15), а второе слагаемое с помощью выбора числа a можно сделать сколь угодно малым, убеждаемся в справедливости (2.12). Лемма 3 доказана.

Пусть $\{Q_k(t_2,...,t_d)\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность функций, определенных на $\mathbb{R}^{d-1}$ и таких, что существуют функция $Q(t_2,...,t_d)\in L^3(\mathbb{R}^{d-1})$ и константа $M>0$, для которых при всех $k\in\mathbb{N}$ и $(t_2,...,t_d)\in\mathbb{R}^{d-1}$

$$|Q_k(t_2,...,t_d)|\le Q(t_2,...,t_d)\le M. \tag{2.16}$$

Пусть $f\in L(\mathbb{R}^d)$, $\mathbf{x}=(x_1,...,x_d)$. Обозначим

$$S_k^*(f,\mathbf{x})=\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{Q_k(t_2,...,t_d)}{t_1}\,f(x_1+t_1,x_2+t_2,...,x_d+t_d)\,dt_1...dt_d.$$

Лемма 4. *Пусть $f\in\varphi_0(L)(\mathbb{R}^d)$, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность измеримых комплексно-значных функций на $\mathbb{R}^d$ таких, что $|f_k(\mathbf{x})|\le|f(\mathbf{x})|$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d$. Тогда для всех $y>0$*

$$\mathrm{m}\left\{\mathbf{x}\in[-\pi,\pi)^d:\sup_{k\ge1}\frac{|S_k^*(f_k,\mathbf{x})|}{\ln(k+1)}>y\right\}\le\frac{A}{y}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\varphi_0(|f(\mathbf{x})|)\,d\mathbf{x}+1\right), \tag{2.17}$$

где константа A не зависит от f и от y, а φ_0 — функция, определенная соотношением (2.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$f_k^{(1)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f_k(\mathbf{x}), & |f(\mathbf{x})| > e, \\ 0, & |f(\mathbf{x})| \le e; \end{cases}$$

$$f_k^{(2)}(\mathbf{x}) = f_k^{(2)}(x_1, ..., x_d) = \begin{cases} f_k(\mathbf{x}), & |f(\mathbf{x})| \le e \text{ и } |x_1| \le 2\pi, \\ 0, & |f(\mathbf{x})| > e \text{ или } |x_1| > 2\pi; \end{cases}$$

$$f_k^{(3)}(\mathbf{x}) = f_k^{(2)}(x_1, ..., x_d) = \begin{cases} f_k(\mathbf{x}), & |f(\mathbf{x})| \le e \text{ и } |x_1| > 2\pi, \\ 0, & |f(\mathbf{x})| > e \text{ или } |x_1| \le 2\pi. \end{cases}$$

Аналогично определим функции $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $f^{(3)}$ (опуская всюду в определениях $f_k^{(j)}(\mathbf{x})$ нижний индекс k). Заметим, что $f_k(\mathbf{x}) = f_k^{(1)}(\mathbf{x}) + f_k^{(2)}(\mathbf{x}) + f_k^{(3)}(\mathbf{x})$. Отсюда

$$\mathrm{m}\left\{\mathbf{x} \in [-\pi,\pi)^d : \sup_{k\ge1} \frac{|S_k^*(f_k, \mathbf{x})|}{\ln(k+1)} > y\right\} \le \sum_{k=1}^{3} \mathrm{m}\left\{\mathbf{x} \in [-\pi,\pi)^d : \sup_{k\ge1} \frac{|S_k^*(f_k^{(j)}, \mathbf{x})|}{\ln(k+1)} > \frac{y}{3}\right\}. \quad (2.18)$$

Оценим первые два слагаемых в правой части (2.18). Зафиксируем $x_2, ..., x_d \in [-\pi, \pi)$. Тогда для $j = 1, 2$

$$S_k^*(f_k^{(j)}, (x_1, ..., x_d)) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{t_1} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} Q_k(t_2, ..., t_d) f_k^{(j)}(x_1 + t_1, x_2 + t_2, ..., x_d + t_d) dt_2 ... dt_d \right) dt_1. \quad (2.19)$$

Замечая, что функции

$$g_k^{(j)}(x_1) = \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} Q_k(t_2, ..., t_d) f_k^{(j)}(x_1, x_2 + t_2, ..., x_d + t_d)\, dt_2 ... dt_d, \quad k \in \mathbb{N},$$

ограничены функцией

$$g^{(j)}(x_1) = \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} Q(t_2, ..., t_d) |f^{(j)}(x_1, x_2 + t_2, ..., x_d + t_d)|\, dt_2 ... dt_d,$$

применяя к последовательности $\{g_k^{(j)}\}$ и функции $g^{(j)}$ лемму 3 и учитывая (2.19), имеем

$$\mathrm{m}\left\{x_1 \in [-\pi,\pi) : \sup_{k\ge1} \frac{|S_k^*(f_k^{(j)}, (x_1, x_2, ..., x_d))|}{\ln(k+1)} > y\right\}$$

$$\le \frac{K}{y} \int\limits_{\mathbb{R}^d} Q(t_2, ..., t_d) |f^{(j)}(x_1, x_2 + t_2, ..., x_d + t_d)|\, dt_2 ... dt_d dx_1.$$

Интегрируя обе части последнего неравенства по $(x_2, ..., x_d) \in [-\pi, \pi)^{d-1}$, получаем

$$\mathrm{m}\left\{\mathbf{x} \in [-\pi,\pi)^d : \sup_{k\ge1} \frac{|S_k^*(f_k^{(j)}, \mathbf{x})|}{\ln(k+1)} > y\right\}$$

$$\le \frac{K}{y} \int\limits_{[-\pi,\pi)^{d-1}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} Q(t_2, ..., t_d) |f^{(j)}(x_1, x_2 + t_2, ..., x_d + t_d)|\, dt_2 ... dt_d dx_1 \right) dx_2 ... dx_d$$

$$= \frac{K}{y} \int\limits_{[-\pi,\pi)^{d-1}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} Q(t_2 - x_2, ..., t_d - x_d) |f^{(j)}(x_1, t_2, ..., t_d)| \, dt_2 ... dt_d dx_1 \right) dx_2 ... dx_d. \tag{2.20}$$

Для $j = 1$ интеграл в правой части (2.20) оценим с помощью (2.16):

$$\int\limits_{[-\pi,\pi)^{d-1}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} Q(t_2 - x_2, ..., t_d - x_d) |f^{(1)}(x_1, t_2, ..., t_d)| \, dt_2 ... dt_d dx_1 \right) dx_2 ... dx_d$$

$$\leq (2\pi)^{d-1} M \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f^{(1)}(x_1, t_2, ..., t_d)| \, dt_2 ... dt_d dx_1$$

$$= (2\pi)^{d-1} M \int\limits_{\{(x_1,t_2,...,t_d) \in \mathbb{R}^d : |f(x_1,t_2,...,t_d)| > e\}} |f^{(1)}(x_1, t_2, ..., t_d)| dt_2 ... dt_d dx_1$$

$$\leq (2\pi)^{d-1} M \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi_0(|f(\mathbf{x})|) \, d\mathbf{x}. \tag{2.21}$$

Для $j = 2$ имеем

$$\int\limits_{[-\pi,\pi)^{d-1}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} Q(t_2 - x_2, ..., t_d - x_d) |f^{(2)}(x_1, t_2, ..., t_d)| \, dt_2 ... dt_d dx_1 \right) dx_2 ... dx_d$$

$$= \int\limits_{[-\pi,\pi)^{d-1}} \left(\int\limits_{\{(x_1,t_2,...,t_d) \in \mathbb{R}^d : |x_1| \leq 2\pi\}} Q(t_2 - x_2, ..., t_d - x_d) |f^{(2)}(x_1, t_2, ..., t_d)| \, dt_2 ... dt_d dx_1 \right) dx_2 ... dx_d$$

$$\leq \int\limits_{[-\pi,\pi)^{d-1}} \left(4\pi \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} (Q(t_2 - x_2, ..., t_d - x_d))^3 dt_2 ... dt_d \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f^{(2)}(x_1, t_2, ..., t_d)|^{\frac{3}{2}} \, dt_2 ... dt_d dx_1 \right)^{\frac{2}{3}} dx_2 ... dx_d$$

$$\leq (2\pi)^{d-1} (4\pi)^{\frac{1}{3}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} (Q(t_2, ..., t_d))^3 \, dt_2 ... dt_d \right)^{\frac{1}{3}} \max \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f^{(2)}(\mathbf{x})|^{\frac{3}{2}} \, d\mathbf{x}, 1 \right\}$$

$$\leq A' \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi_0(|f(\mathbf{x})|) \, d\mathbf{x} + 1 \right), \tag{2.22}$$

где

$$A' = (2\pi)^{d-1} (4\pi)^{\frac{1}{3}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} (Q(t_2, ..., t_d))^3 \, dt_2 ... dt_d \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Оценим, наконец, третье слагаемое в правой части (2.18). Для $x_1, ..., x_d \in [-\pi, \pi)$ имеем

$$|S_k^*(f_k^{(3)}, \mathbf{x})| = \left| \int\limits_{\{(t_1,...,t_d)\in\mathbb{R}^d : |t_1|>2\pi\}} \frac{Q_k(t_2 - x_2, ..., t_d - x_d)}{t_1 - x_1} f_k^{(3)}(t_1, t_2, ..., t_d)\, dt_1 ... dt_d \right|$$

$$\leq \int\limits_{\{(t_1,...,t_d)\in\mathbb{R}^d : |t_1|>2\pi\}} \frac{Q(t_2 - x_2, ..., t_d - x_d)}{|t_1| - \pi} |f^{(3)}(t_1, t_2, ..., t_d)|\, dt_1 ... dt_d$$

$$\leq \left(\int\limits_{\{(t_1,...,t_d)\in\mathbb{R}^d : |t_1|>2\pi\}} \frac{(Q(t_2 - x_2, ..., t_d - x_d))^3}{(|t_1| - \pi)^3}\, dt_1 ... dt_d \right)^{\frac{1}{3}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f^{(3)}(t_1, t_2, ..., t_d)|^{\frac{3}{2}}\, dt_1 ... dt_d \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\leq A'' \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi_0(|f(\mathbf{t})|)\, d\mathbf{t} + 1 \right),$$

где

$$A'' = \left(2 \int\limits_{\pi}^{\infty} t^{-3} dt \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} (Q(t_2, ..., t_d))^3\, dt_2 ... dt_d \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Отсюда

$$\mathrm{m} \left\{ \mathbf{x} \in [-\pi, \pi)^d : \sup_{k\geq 1} \frac{|S_k^*(f_k^{(3)}, \mathbf{x})|}{\ln(k+1)} > y \right\} \leq \frac{(2\pi)^d A''}{y \ln 2} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi_0(|f(\mathbf{t})|)\, d\mathbf{t} + 1 \right). \qquad (2.23)$$

Объединяя (2.18) и (2.20)–(2.23), получаем (2.17) с константой $A = 3((2\pi)^{d-1}KM + KA' + (2\pi)^d A''(\ln 2)^{-1})$. Лемма 4 доказана.

3. Основная лемма

Пусть $d \in \mathbb{N}$; d_0, d_1 — целые неотрицательные числа, $d_0 + d_1 = d$; $B_0 \subset \{1, 2, ..., d_0\}$ при $d_0 \geq 1$, $B_0 = \varnothing$, если $d_0 = 0$; $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел; $\alpha_1, ..., \alpha_{d_0}$ — неотрицательные вещественные числа. Обозначим

$$\tilde{D}_\alpha^*(t) = \frac{1 - \cos \alpha t}{t}, \qquad D_\alpha^*(t) = \frac{\sin \alpha t}{t}, \qquad \alpha > 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Пусть $Q_k(t_{d_0+1}, ..., t_d)$, $k \in \mathbb{N}$, — последовательность таких функций $d - d_0$ переменных, что существуют функция $Q(t_{d_0+1}, ..., t_d) \in L^3(\mathbb{R}^{d-d_0})$ и константа $M > 0$, для которых при всех $k \in \mathbb{N}$ и $(t_{d_0+1}, ..., t_d) \in \mathbb{R}^{d-d_0}$

$$|Q_k(t_{d_0+1}, ..., t_d)| \leq Q(t_{d_0+1}, ..., t_d) \leq M.$$

Для функции $f \in L(\mathbb{R})$, $B_0 \subset \{1, 2, ..., d_0\}$ и $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_d)$ положим

$$S_{k,B_0}^*(f, \mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \prod_{j\in B_0} (-\tilde{D}_{\alpha_j m_k}^*(t_j)) \prod_{j\in\{1,...,d_0\}\setminus B_0} D_{\alpha_j m_k}^*(t_j) Q_k(t_{d_0+1}, ..., t_d) f(\mathbf{x} + \mathbf{t})\, d\mathbf{t},$$

$$M_{B_0}(f, \mathbf{x}) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|S_{k,B_0}^*(f, \mathbf{x})|}{\ln(k+1)}.$$

Пусть функции $\varphi_d(u)$ определены соотношением (2.3).

Лемма 5. *Для каждого $d_0 \in \mathbb{N}$ существует константа $A_{d_0} > 0$ такая, что для любой функции $f \in \varphi_{d_0-1}(L)(\mathbb{R}^d)$, для всех $B_0 \subset \{1,2,...,d_0\}$ и любых $y > 0$*

$$\mathrm{m}\left\{\mathbf{x} \in [-\pi,\pi)^d : M_{B_0}(f,\mathbf{x}) > y\right\} \le \frac{A_{d_0}}{y}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi_{d_0-1}(|f(\mathbf{x})|)\,d\mathbf{x} + 1\right), \tag{3.1}$$

где константа A_{d_0} не зависит от f и от y. При $d_0 = 0$

$$\mathrm{m}\left\{\mathbf{x} \in [-\pi,\pi)^d : M_{B_0}(f,\mathbf{x}) > y\right\} \le \frac{A_0}{y}\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $d_0 = 0$

$$S^*_{k,B_0}(f,\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} Q_k(t_1,...,t_d) f(\mathbf{x}+\mathbf{t})\,d\mathbf{t},$$

откуда легко следует утверждение леммы с константой $A_0 = M/\ln 2$.

Пусть $d_0 > 0$. Зафиксируем $d_1 \in \mathbb{Z}_+$. Доказательство будем вести индукцией по d_0.

Пусть $d_0 = 1$. Для $B_0 = \varnothing$

$$S^*_{k,B_0}(f,\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{\sin\alpha_j m_k t_1}{t_1}\, Q_k(t_2,...,t_d) f(\mathbf{x}+\mathbf{t})\,d\mathbf{t}$$

$$= \frac{e^{-i\alpha_j m_k x_1}}{2i}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{i\alpha_j m_k (t_1+x_1)}}{t_1}\, Q_k(t_2,...,t_d) f(\mathbf{x}+\mathbf{t})\,d\mathbf{t}$$

$$-\frac{e^{i\alpha_j m_k x_1}}{2i}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{-i\alpha_j m_k (t_1+x_1)}}{t_1}\, Q_k(t_2,...,t_d) f(\mathbf{x}+\mathbf{t})\,d\mathbf{t}.$$

Отсюда, полагая $f_k^{\pm}(t_1,...,t_d) = e^{\pm i\alpha_j m_k t_1} f(t_1,...,t_d)$ и используя обозначения леммы 4, получаем

$$\mathrm{m}\left\{\mathbf{x} \in [-\pi,\pi)^d : M_{B_0}(f,\mathbf{x}) > y\right\}$$

$$\le \mathrm{m}\left\{\mathbf{x} \in [-\pi,\pi)^d : \sup_{k\ge 1}\frac{|S^*_k(f_k^+,\mathbf{x})|}{\ln(k+1)} > y\right\} + \mathrm{m}\left\{\mathbf{x} \in [-\pi,\pi)^d : \sup_{k\ge 1}\frac{|S^*_k(f_k^-,\mathbf{x})|}{\ln(k+1)} > y\right\}.$$

Применяя к обоим слагаемым правой части этого неравенства лемму 4 (неравенство (2.17)), получаем (3.1) с константой $A_1 = 2A$. Используя аналогичные рассуждения при $B_0 = \{1\}$, можно получить (3.1) с константой $A_1 = 8A$.

Пусть выполняется утверждение леммы для $d_0 - 1$ ($d_0 \ge 2$). Докажем его для d_0. Рассмотрим произвольное подмножество B_0 множества $N_{d_0} = \{1,2,...,d_0\}$. Обозначим $\bar{B}_0 = N_{d_0} \backslash B_0$. Возможны три случая.

Случай 1. $1 \in \bar{B}_0$, $2 \in \bar{B}_0$.

Обозначим

$$\Pi_k = \Pi_k(t_3,...,t_{d_0}) = \prod_{j\in B_0}(-\tilde{D}^*_{\alpha_j m_k}(t_j)) \prod_{j\in \bar{B}_0\backslash\{1,2\}} D^*_{\alpha_j m_k}(t_j).$$

Тогда

$$S^*_{k,B_0}(f,\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} D^*_{\alpha_1 m_k}(t_1) D^*_{\alpha_2 m_k}(t_2) \Pi_k(t_3,...,t_{d_0}) Q_k(t_{d_0+1},...,t_d) f(\mathbf{x}+\mathbf{t})\, d\mathbf{t}. \tag{3.2}$$

Применяя последовательно тождества

$$\sin(\alpha_1 m_k t_1)\sin(\alpha_2 m_k t_2) = \frac{1}{2}[(\cos m_k(\alpha_1 t_1 - \alpha_2 t_2) - 1) - (\cos m_k(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2) - 1)]$$

и

$$\frac{1}{t_1 t_2} = \frac{1}{t_1\left(t_2 \pm \frac{\alpha_1}{\alpha_2} t_1\right)} + \frac{1}{t_2\left(t_1 \pm \frac{\alpha_2}{\alpha_1} t_2\right)},$$

имеем

$$D^*_{\alpha_1 m_k}(t_1) D^*_{\alpha_2 m_k}(t_2) = \frac{\sin(\alpha_1 m_k t_1)\sin(\alpha_2 m_k t_2)}{t_1 t_2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(\cos m_k(\alpha_1 t_1 - \alpha_2 t_2) - 1) - (\cos m_k(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2) - 1)}{t_1 t_2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\cos m_k(\alpha_1 t_1 - \alpha_2 t_2) - 1}{t_1\left(t_2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} t_1\right)} + \frac{\cos m_k(\alpha_1 t_1 - \alpha_2 t_2) - 1}{t_2\left(t_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} t_2\right)}\right)$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{\cos m_k(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2) - 1}{t_1\left(t_2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} t_1\right)} + \frac{\cos m_k(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2) - 1}{t_2\left(t_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} t_2\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t_1}\left(\frac{\cos m_k(\alpha_1 t_1 - \alpha_2 t_2) - 1}{t_2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} t_1} - \frac{\cos m_k(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2) - 1}{t_2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} t_1}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t_2}\left(\frac{\cos m_k(\alpha_1 t_1 - \alpha_2 t_2) - 1}{t_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} t_2} - \frac{\cos m_k(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2) - 1}{t_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} t_2}\right).$$

Таким образом,

$$D^*_{\alpha_1 m_k}(t_1) D^*_{\alpha_2 m_k}(t_2) = D^1_k + D^2_k, \tag{3.3}$$

где

$$D^1_k = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t_1}\left[\tilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}\left(t_2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} t_1\right) - \tilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}\left(t_2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} t_1\right)\right], \tag{3.4}$$

$$D^2_k = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t_2}\left[\tilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}\left(t_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} t_2\right) - \tilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}\left(t_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} t_2\right)\right]. \tag{3.5}$$

Заметим, что при каждом k функции D^1_k и D^2_k ограничены по t_1 и t_2.

Пусть $(x_1,...,x_d) \in [-\pi,\pi)^d$. Умножим обе части равенства (3.4) на

$$\Pi_k(t_3,...,t_{d_0}) Q_k(t_{d_0+1},...,t_d) f(x_1+t_1,...,x_d+t_d)$$

и проинтегрируем по множеству $\{(t_1,t_2,...,t_d) \in \mathbb{R}^d : |t_1| > \varepsilon\}$. Затем разобьем получившийся в правой части интеграл на разность двух интегралов в соответствии с разностью в (3.4), сделаем в них замену переменных $u_1 = t_1, u_2 = t_2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} t_1, u_3 = t_3, ..., u_d = t_d$ и соответственно $u_1 = t_1, u_2 = t_2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} t_1, u_3 = t_3, ..., u_d = t_d$ и перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$. Получим равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} D^1_k \Pi_k(t_3,...,t_{d_0}) Q_k(t_{d_0+1},...,t_d) f(x_1+t_1,...,x_d+t_d)\, dt_1...dt_d$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \tilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}(u_2)\Pi_k(u_3,...,u_{d_0})Q_k(u_{d_0+1},...,u_d)$$

$$\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(x_1+u_1,x_2+u_2-(\alpha_1/\alpha_2)u_1,x_3+u_3,...,x_d+u_d)\frac{1}{u_1}\,du_1\right)du_2...du_d$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \tilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}(u_2)\Pi_k(u_3,...,u_{d_0})Q_k(u_{d_0+1},...,u_d)$$

$$\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(x_1+u_1,x_2+u_2+(\alpha_1/\alpha_2)u_1,x_3+u_3,...,x_d+u_d)\frac{1}{u_1}\,du_1\right)du_2...du_d. \tag{3.6}$$

Внутренние интегралы в правой части (3.6), понимаемые в смысле главного значения, согласно обозначениям леммы 2 можно записать как $h^{1,-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}(x_1,x_2+u_2,x_3+u_3,...,x_d+u_d)$ и $h^{1,\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}(x_1,x_2+u_2,x_3+u_3,...,x_d+u_d)$. Проделав с равенством (3.5) то же, что и с (3.4), только производя при этом замены $u_1=t_1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}t_2, u_2=t_2,...,u_d=t_d$ и $u_1=t_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}t_2, u_2=t_2,...,u_d=t_d$, получаем:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} D_k^2\Pi_k(t_3,...,t_{d_0})Q_k(t_{d_0+1},...,t_d)f(x_1+t_1,...,x_d+t_d)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \tilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}(u_1)\Pi_k(u_3,...,u_{d_0})Q_k(u_{d_0+1},...,u_d)$$

$$\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(x_1+u_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}u_2,x_2+u_2,x_3+u_3,...,x_d+u_d)\frac{1}{u_2}\,du_2\right)du_1du_3...du_d$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \tilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}(u_1)\Pi_k(u_3,...,u_{d_0})Q_k(u_{d_0+1},...,u_d)$$

$$\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(x_1+u_1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}u_2,x_2+u_2,x_3+u_3,...,x_d+u_d)\frac{1}{u_2}\,du_2\right)du_1du_3...du_d$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \tilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}(u_1)\Pi_k(u_3,...,u_{d_0})Q_k(u_{d_0+1},...,u_d)$$

$$\times\, h^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1},1}(x_1+u_1,x_2,x_3+u_3,...,x_d+u_d)\,du_1du_3...du_d$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \tilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}(u_1)\Pi_k(u_3,...,u_{d_0})Q_k(u_{d_0+1},...,u_d)$$

$$\times\, h^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1},1}(x_1+u_1,x_2,x_3+u_3,...,x_d+u_d)\,du_1du_3...du_d. \tag{3.7}$$

Используя определение $M_{B_0}(f,\mathbf{x})$, (3.2), (3.3), (3.6) и (3.7), имеем

$$2M_{B_0}(f,\mathbf{x}) \le \sup_{k\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{\ln(k+1)} \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \tilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}(u_2)\Pi_k(u_3,...,u_{d_0})Q_k(u_{d_0+1},...,u_d) \right.$$

$$\left. \times\ h^{1,-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}(x_1,x_2+u_2,x_3+u_3,...,x_d+u_d)\ du_2...du_d \right|$$

$$+\ \sup_{k\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{\ln(k+1)} \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \tilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}(u_2)\Pi_k(u_3,...,u_{d_0})Q_k(u_{d_0+1},...,u_d) \right.$$

$$\left. \times\, h^{1,\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}(x_1,x_2+u_2,x_3+u_3,...,x_d+u_d)\ du_2...du_d \right|$$

$$+\ \sup_{k\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{\ln(k+1)} \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \tilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}(u_1)\Pi_k(u_3,...,u_{d_0})Q_k(u_{d_0+1},...,u_d) \right.$$

$$\left. \times\, h^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1},1}(x_1+u_1,x_2,x_3+u_3,...,x_d+u_d)\ du_1du_3...du_d \right|$$

$$+\ \sup_{k\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{\ln(k+1)} \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \tilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}(u_1)\Pi_k(u_3,...,u_{d_0})Q_k(u_{d_0+1},...,u_d) \right.$$

$$\left. \times\, h^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1},1}(x_1+u_1,x_2,x_3+u_3,...,x_d+u_d)\ du_1du_3...du_d \right|$$

$$= M^1_{B_0}(f,\mathbf{x}) + M^2_{B_0}(f,\mathbf{x}) + M^3_{B_0}(f,\mathbf{x}) + M^4_{B_0}(f,\mathbf{x}). \tag{3.8}$$

Покажем, что $M^1_{B_0}(f,\mathbf{x})$ удовлетворяет неравенству (3.1) с некоторой константой $A^1_{d_0}$.

Зафиксируем $x_1 \in [-\pi,\pi)$. Тогда согласно предположению индукции множество $B_0' = B_0 \cup \{2\} \subset \{2,...,d_0\}$, последовательность $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, (d_0-1) чисел $\alpha_2,...,\alpha_{d_0}$, функции $Q_k(u_{d_0+1},...,u_d)$ и построенный на их основе и применяемый к некоторой функции $d-1$ переменного $g(\mathbf{x}') = g(x_2,...,x_d)$ оператор

$$M_{B_0'}(g,\mathbf{x}') = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|S^*_{k,B_0}(g,(x_2,...,x_d))|}{\ln(k+1)},$$

где

$$S^*_{k,B_0}(g,(x_2,...,x_d)) = \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \prod_{j\in B_0'} (-\tilde{D}^*_{\alpha_j m_k}(u_j)) \prod_{j\in\{1,...,d_0\}\setminus B_0'} D^*_{\alpha_j m_k}(u_j)$$

$$\times Q_k(u_{d_0+1},...,u_d)g(x_2+u_2,...,x_d+u_d)\,du_2...du_d,$$

удовлетворяют (3.1) с d_0-1, P_0' и $\mathbf{x}'$ вместо d_0, P_0 и $\mathbf{x}$ соответственно. В частности, для функции $g(x_2,...,x_d)=h^{1,-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(x_1,x_2,x_3,...,x_d)$ (x_1 фиксировано) справедлива оценка

$$\mathrm{m}\left\{(x_2,...,x_d)\in[-\pi,\pi)^{d-1}:\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\frac{1}{\ln(k+1)}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\tilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}(u_2)\Pi_k(u_3,...,u_{d_0})Q_k(u_{d_0+1},...,u_d)\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\, h^{1,-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(x_1,x_2+u_2,x_3+u_3,...,x_d+u_d)\,du_2...du_d\right|>y\right\}$$

$$=\ \mathrm{m}\left\{(x_2,...,x_d)\in[-\pi,\pi)^{d-1}:\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\frac{1}{\ln(k+1)}S^*_{k,B_0'}\left(h^{1,-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}},(x_2,...,x_d)\right)\right|>y\right\}$$

$$\leq\ \frac{A_{d_0-1}}{y}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\varphi_{d-2}(|h^{1,-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(x_1,x_2,x_3,...,x_d)|)\,dx_2...dx_d+1\right),\quad y>0. \tag{3.9}$$

Пользуясь тем, что

$$\mathrm{m}\{(x_1,x_2,...,x_d)\in[-\pi,\pi)^d: M^1_{B_0}(f,\mathbf{x})>y\}$$

$$=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{m}\left\{(x_2,...,x_d)\in[-\pi,\pi)^{d-1}:\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\frac{1}{\ln(k+1)}S^*_{k,B_0'}\left(h^{1,-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}},(x_2,...,x_d)\right)\right|>y\right\}dx_1,$$

а затем применяя (3.9) и теорему Фубини, получаем

$$\mathrm{m}\{(x_1,x_2,...,x_d)\in[-\pi,\pi)^d: M^1_{B_0}(f,\mathbf{x})>y\}$$

$$\leq\ \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{A_{d_0-1}}{y}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\varphi_{d_0-2}(|h^{1,-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(x_1,x_2,...,x_d)|)\,dx_2...dx_d+1\right)dx_1$$

$$\leq\ \frac{A_{d_0-1}}{y}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{d}}\varphi_{d_0-2}(|h^{1,-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(x_1,x_2,...,x_d)|)\,dx_1dx_2...dx_d+2\pi\right).$$

Отсюда и из леммы 2 заключаем

$$m\{(x_1,x_2,...,x_d)\in[-\pi,\pi)^d: M^1_{B_0}(f,\mathbf{x})>y\}$$

$$\leq\ \frac{A^1_{d_0}}{y}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{d}}\varphi_{d_0-1}(|f(x_1,x_2,...,x_d)|)\,dx_1dx_2...dx_d+1\right),\quad y>0,$$

где $A^1_{d_0}=A_{d_0-1}\max\{C_{d_0-1},2\pi\}$.

Аналогично можно показать, что мажоранты $M^i_{B_0}(f,\mathbf{x})$, $i=2,3,4$, также удовлетворяют (3.1) с той же константой $A^1_{d_0}$. Таким образом, для $M_{B_0}(f,\mathbf{x})$ неравенство (3.1) выполняется с $A_{d_0}=4A^1_{d_0}$.

Случай 2. $1\in B_0$, $2\in\bar{B}_0$. (Случай, когда $1\in\bar{B}_0$, $2\in B_0$, рассматривается аналогично). Здесь

$$S^*_{k,B_0}(f,\mathbf{x})=-\int\limits_{\mathbb{R}^d}\tilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}(t_1)D^*_{\alpha_2 m_k}(t_2)\Pi_k(t_3,...,t_{d_0})Q_k(t_{d_0+1},...,t_d)f(\mathbf{x}+\mathbf{t})\,d\mathbf{t}. \tag{3.10}$$

Применяя последовательно тождества, аналогичные использованным в предыдущем случае, получаем:

$$\frac{(\cos(\alpha_1 m_k t_1)-1)\sin(\alpha_2 m_k t_2)}{t_1 t_2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(\sin m_k(\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2)+\sin m_k(\alpha_2 t_2-\alpha_1 t_1))-\sin m_k\alpha_2 t_2}{t_1 t_2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin m_k(\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2)}{t_1\left(t_2+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}t_1\right)}+\frac{\sin m_k(\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2)}{t_2\left(t_1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}t_2\right)}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\sin m_k(\alpha_2 t_2-\alpha_1 t_1)}{t_1\left(t_2-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}t_1\right)}+\frac{\sin m_k(\alpha_2 t_2-\alpha_1 t_1)}{t_2\left(t_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}t_2\right)}\right)-\frac{\sin m_k\alpha_2 t_2}{t_1 t_2},$$

т.е.

$$\tilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}(t_1)D^*_{\alpha_2 m_k}(t_2)=D^3_k+D^4_k, \tag{3.11}$$

где

$$D^3_k=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t_1}\left[D^*_{\alpha_2 m_k}\left(t_2+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}t_1\right)+D^*_{\alpha_2 m_k}\left(t_2-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}t_1\right)-2D^*_{\alpha_2 m_k}(t_2)\right], \tag{3.12}$$

$$D^4_k=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t_2}\left[D^*_{\alpha_1 m_k}\left(t_1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}t_2\right)-D^*_{\alpha_1 m_k}\left(t_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}t_2\right)\right]. \tag{3.13}$$

Теперь обе части равенства (3.12) умножим на $\Pi_k Q_k f(\mathbf{x}+\mathbf{t})$ и проинтегрируем по множеству $\{(t_1,t_2,...,t_d)\in\mathbb{R}^d : |t_1|>\varepsilon\}$, $\varepsilon>0$. Затем разобьем получившийся в правой части интеграл на три интеграла, сделаем в первых двух из них замену переменных $u_1=t_1, u_2=t_2+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}t_1, u_3=t_3,...,u_d=t_d$ и соответственно $u_1=t_1, u_2=t_2-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}t_1, u_3=t_3,...,u_d=t_d$ и перейдем к пределу при $\varepsilon\to 0$. Аналогичные действия проделаем с равенством (3.13). Используя получившиеся соотношения, а также (3.11) и (3.10), имеем

$$2M_{B_0}(f,\mathbf{x})\le \sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\frac{1}{\ln(k+1)}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} D^*_{\alpha_2 m_k}(u_2)\Pi_k(u_3,...,u_{d_0})Q_k(u_{d_0+1},...,u_d)\right.$$

$$\left.\times\, h^{1,-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}(x_1,x_2+u_2,x_3+u_3,...,x_d+u_d)\,du_2...du_d\right|$$

$$+\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\frac{1}{\ln(k+1)}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} D^*_{\alpha_2 m_k}(u_2)\Pi_k(u_3,...,u_{d_0})Q_k(u_{d_0+1},...,u_d)\right.$$

$$\left.\times\, h^{1,\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}(x_1,x_2+u_2,x_3+u_3,...,x_d+u_d)\,du_2...du_d\right|$$

$$+\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\frac{1}{\ln(k+1)}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} D^*_{\alpha_2 m_k}(u_2)\Pi_k(u_3,...,u_{d_0})Q_k(u_{d_0+1},...,u_d)\right.$$

$$\left. \times h^{1,0}(x_1, x_2+u_2, x_3+u_3, ..., x_d+u_d)\ du_2...du_d \right|$$

$$+ \sup_{k\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{\ln(k+1)} \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} D^*_{\alpha_1 m_k}(u_1)\Pi_k(u_3, ..., u_{d_0})Q_k(u_{d_0+1}, ..., u_d) \right.$$

$$\left. \times h^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1},1}(x_1+u_1, x_2, x_3+u_3, ..., x_d+u_d)\ du_1du_3...du_d \right|$$

$$+ \sup_{k\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{\ln(k+1)} \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} D^*_{\alpha_1 m_k}(u_1)\Pi_k(u_3, ..., u_{d_0})Q_k(u_{d_0+1}, ..., u_d) \right.$$

$$\left. \times h^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1},1}(x_1+u_1, x_2, x_3+u_3, ..., x_d+u_d)\ du_1du_3...du_d \right|. \tag{3.14}$$

Используя те же рассуждения, что и в случае 1, можно показать, что все пять слагаемых в правой части (3.14) удовлетворяют (3.1), откуда следует (3.1) для $M_{B_0}(f, \mathbf{x})$.

Случай 3. $1 \in B_0$, $2 \in B_0$.

Этот случай рассматривается аналогично двум предыдущим. Здесь используется тождество

$$\tilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}(t_1)\tilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}(t_2) = D^5_k + D^6_k,$$

где

$$D^5_k = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t_1}\left[\tilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}\left(t_2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}t_1\right) + \tilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}\left(t_2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}t_1\right) - 2\tilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}(t_2)\right],$$

$$D^6_k = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t_2}\left[\tilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}\left(t_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}t_2\right) + \tilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}\left(t_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}t_2\right) - 2\tilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}(t_1)\right].$$

Таким образом, (3.1) справедливо для любого $d \in \mathbb{N}$ и произвольного $B_0 \subset \{1, 2, ..., d_0\}$. Лемма 5 доказана.

4. Доказательство теоремы

Пусть последовательность векторов $\mathbf{n}_k = (n_k^1, n_k^2, ..., n_k^d) \in (\mathbb{Z}_+)^d$ удовлетворяет условию (1.6) теоремы. Тогда ядро Дирихле $D_{n_k^j}(t)$ и сопряженное к нему ядро $\tilde{D}_{n_k^j}(t)$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \le j \le d$, представимы в виде

$$D_{n_k^j}(t) = \frac{\sin\left(n_k^j + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{\sin\alpha_j m_k t}{t} + R_{n_k^j}(t) = D^*_{\alpha_j m_k}(t) + R_{n_k^j}(t),$$

$$\tilde{D}_{n_k^j}(t) = \frac{\cos\frac{t}{2} - \cos\left(n_k^j + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{1-\cos\alpha_j m_k t}{t} + \tilde{R}_{n_k^j}(t) = \tilde{D}^*_{\alpha_j m_k}(t) + \tilde{R}_{n_k^j}(t),$$

где функции

$$R_{n_k^j}(t) = \frac{\sin n_k^j t - \sin\alpha_j m_k t}{t} + \sin n_k^j t\left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2} - \frac{1}{t}\right) + \frac{1}{2}\cos n_k^j t$$

и

$$\tilde{R}_{n_k^j}(t) = \frac{\cos n_k^j t - \cos \alpha_j m_k t}{t} + (1 - \cos n_k^j t)\left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2} - \frac{1}{t}\right) - \frac{1}{2}\sin n_k^j t$$

равномерно ограничены по k, j и $t \in [-\pi, \pi]$. Отсюда для $B \subset \{1, ..., d\}$

$$\tilde{S}_{\mathbf{n}_k,B}(f, \mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^d} \int\limits_{[-\pi,\pi)^d} \prod_{j \in B}(-\tilde{D}_{n_k^j}(t_j)) \prod_{j \in \{1,...,d\}\setminus B} D_{n_k^j}(t_j) f(x_1 + t_1, ..., x_d + t_d)\, dt_1 ... dt_d$$

$$= \frac{1}{\pi^d} \int\limits_{[-\pi,\pi)^d} \prod_{j \in B}\left(-\tilde{D}^*_{\alpha_j m_k}(t_j) - \tilde{R}_{n_k^j}(t_j)\right) \prod_{j \in \{1,...,d\}\setminus B}\left(D^*_{\alpha_j m_k}(t_j) + R_{n_k^j}(t_j)\right) f(\mathbf{x} + \mathbf{t})\, d\mathbf{t}. \qquad (4.1)$$

Ядро в правой части (4.1), являющееся произведением двух произведений, можно разбить на 2^d слагаемых, в соответствии с этим интеграл разобьется на сумму 2^d интегралов. Каждое из слагаемых этой суммы будет иметь вид

$$\frac{1}{\pi^d} \int\limits_{[-\pi,\pi)^d} \prod_{j \in B_1}\left(-\tilde{D}^*_{\alpha_j m_k}(t_j)\right) \prod_{j \in B_2}\left(-\tilde{R}_{n_k^j}(t_j)\right) \prod_{j \in B_3} D^*_{\alpha_j m_k}(t_j) \prod_{j \in B_4} R_{n_k^j}(t_j) f(\mathbf{x} + \mathbf{t})\, d\mathbf{t}, \qquad (4.2)$$

где множества B_1, B_2, B_3, B_4 удовлетворяют условиям $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, $B_1 \cup B_2 = B$, $B_3 \cap B_4 = \varnothing$, $B_3 \cup B_4 = \{1, ..., d\}\setminus B$. В силу аддитивности интеграла по множеству выражение (4.2) может быть представлено в виде

$$\frac{1}{\pi^d} \sum_D (-1)^{\gamma(D)} \int\limits_D \prod_{j \in B_1}\left(-\tilde{D}^*_{\alpha_j m_k}(t_j)\right) \prod_{j \in B_2}\left(-\tilde{R}_{n_k^j}(t_j)\right) \prod_{j \in B_3} D^*_{\alpha_j m_k}(t_j) \prod_{j \in B_4} R_{n_k^j}(t_j) f(\mathbf{x} + \mathbf{t})\, d\mathbf{t}; \qquad (4.3)$$

здесь сумма берется по всевозможным множествам D вида $D = \prod_{j=1}^d D_j$, где $D_j = [-\pi, \pi)$, если $j \in B_2 \cup B_4$, и $D_j = \mathbb{R}$ либо $D_j = \mathbb{R}\setminus[-\pi, \pi)$, если $j \in B_3 \cup B_4$; число $\gamma(D)$ равно количеству тех $j \in \{1, ..., d\}$, для которых $D_j = \mathbb{R}\setminus[-\pi, \pi)$.

Зафиксируем D. Обозначим через B_5 множество тех j, для которых $D_j = \mathbb{R}$, через B_6 — множество тех j, для которых $D_j = \mathbb{R}\setminus[-\pi, \pi)$. Положим $B_7 = B_1 \cap B_5$, $B_8 = B_1 \cap B_6$, $B_9 = B_3 \cap B_5$, $B_{10} = B_3 \cap B_6$. Для произвольной функции $\lambda(t)$, $t \in \mathbb{R}$, и произвольного множества $E \subset \mathbb{R}$ обозначим

$$(\lambda(t))_E = \begin{cases} \lambda(t), & t \in E, \\ 0, & t \notin E. \end{cases}$$

Тогда, используя введенные обозначения, интеграл по множеству D из суммы (4.3) можно записать следующим образом:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \prod_{j \in B_7}\left(-\tilde{D}^*_{\alpha_j m_k}(t_j)\right) \prod_{j \in B_9} D^*_{\alpha_j m_k}(t_j) \prod_{j \in B_2}\left(-\tilde{R}_{n_k^j}(t_j)\right)_{[-\pi,\pi)} \prod_{j \in B_4}(R_{n_k^j}(t_j))_{[-\pi,\pi)}$$

$$\times \prod_{j \in B_8}\left(-\tilde{D}^*_{\alpha_j m_k}(t_j)\right)_{\mathbb{R}\setminus[-\pi,\pi)} \prod_{j \in B_{10}}(D^*_{\alpha_j m_k}(t_j))_{\mathbb{R}\setminus[-\pi,\pi)} f(\mathbf{x} + \mathbf{t})\, d\mathbf{t}. \qquad (4.4)$$

Применим к последовательности (последовательности по k) интегралов вида (4.4) лемму 5. Положим $d_0 = \mathrm{card} B_7 + \mathrm{card} B_9$. Переставим номера переменных $t_1, t_2, ..., t_d$ и точно так же номера переменных $x_1, x_2, ..., x_d$ так, чтобы $B_7 \cup B_9 = \{1, ..., d_0\}$ и, следовательно, $B_2 \cup B_4 \cup B_8 \cup B_{10} = \{d_0 + 1, ..., d\}$. Положим

$$Q_k(t_{d_0+1}, ..., t_d) = \prod_{j \in B_2}\left(-\tilde{R}_{n_k^j}(t_j)\right)_{[-\pi,\pi)} \prod_{j \in B_4}(R_{n_k^j}(t_j))_{[-\pi,\pi)}$$

$$\times \prod_{j\in B_8}\left(-\tilde{D}^*_{\alpha_j m_k}(t_j)\right)_{\mathbb{R}\setminus[-\pi,\pi)} \prod_{j\in B_{10}} (D^*_{\alpha_j m_k}(t_j))_{\mathbb{R}\setminus[-\pi,\pi)}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Отметим, что функции Q_k ограничены в совокупности константой, зависящей лишь от d и от исходной последовательности $\{\mathbf{n}_k\}$. В силу леммы 5, примененной к функции $f_1(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\chi_{[-2\pi,2\pi)^d}(\mathbf{x})$, где $\chi_{[-2\pi,2\pi)^d}(\mathbf{x})$ — характеристическая функция d-мерного куба $[-2\pi,2\pi)^d$, мера тех $\mathbf{x}\in[-\pi,\pi)^d\subset\mathbb{R}^d$, для которых верхняя грань по k модулей выражений (4.4), деленных на $\ln(k+1)$, больше, чем y, не превосходит

$$\frac{A_{d_0}}{y}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\varphi_{d_0-1}(|f_1(\mathbf{x})|)d\mathbf{x}+1\right) = \frac{A_{d_0}}{y}\left(2^d\int\limits_{[-\pi,\pi)^d}\varphi_{d_0-1}(|f(\mathbf{x})|)d\mathbf{x}+1\right),$$

если $d_0>0$, и не превосходит

$$\frac{A_0}{y}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|f_1(\mathbf{x})|d\mathbf{x} = \frac{2^dA_0}{y}\int\limits_{[-\pi,\pi)^d}|f(\mathbf{x})|d\mathbf{x}$$

при $d_0=0$.

Объединяя все такие оценки для выражений вида (4.4) из сумм (4.3), т.е. из выражений вида (4.2), и замечая, что $\varphi_{d_0-1}(u)\le\varphi_{d-1}(u)<u(\ln u)^{d-1}+e$ для $u\ge0$, $1\le d_0\le d$, получаем

$$\mathrm{m}\left\{\mathbf{x}\in[-\pi,\pi)^d : \sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{\left|\tilde{S}_{\mathbf{n}_k,B}(f,\mathbf{x})\right|}{\ln(k+1)}>y\right\} \le \frac{2^{12d}A_d}{y}\int\limits_{[-\pi,\pi)^d}\Big(|f(\mathbf{x})|(\ln^+(|f(\mathbf{x})|))^{d-1}d\mathbf{x}+2\Big). \quad (4.5)$$

Пусть $y>0$. Для сколь угодно большого $\alpha>0$ найдется кратный тригонометрический полином g такой, что

$$\frac{2^{12d}A_d}{y}\int\limits_{[-\pi,\pi)^d}|\alpha f(\mathbf{x})-g(\mathbf{x})|(\ln^+(|\alpha f(\mathbf{x})-g(\mathbf{x})|))^{d-1}d\mathbf{x}<1.$$

Отсюда, замечая, что

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\left|\tilde{S}_{\mathbf{n}_k,B}(g,\mathbf{x})\right|}{\ln(k+1)}=0$$

для всех $\mathbf{x}\in[-\pi,\pi)^d$, и применяя затем (4.5) к функции $\alpha f(\mathbf{x})-g(\mathbf{x})$, получаем

$$\mathrm{m}\left\{\mathbf{x}\in[-\pi,\pi)^d : \limsup_{k\to\infty}\frac{\left|\tilde{S}_{\mathbf{n}_k,B}(f,\mathbf{x})\right|}{\ln(k+1)}>y\right\}$$

$$=\mathrm{m}\left\{\mathbf{x}\in[-\pi,\pi)^d : \limsup_{k\to\infty}\frac{\left|\tilde{S}_{\mathbf{n}_k,B}(\alpha f-g,\mathbf{x})\right|}{\ln(k+1)}>\alpha y\right\}$$

$$\le\mathrm{m}\left\{\mathbf{x}\in[-\pi,\pi)^d : \sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{\left|\tilde{S}_{\mathbf{n}_k,B}(\alpha f-g,\mathbf{x})\right|}{\ln(k+1)}>\alpha y\right\}<\frac{3\cdot2^{12d}A_d}{\alpha y}.$$

Таким образом, $\lim\limits_{k\to\infty}\tilde{S}_{\mathbf{n}_k,B}(f,\mathbf{x})/\ln(k+1)=0$ для почти всех $\mathbf{x}\in[-\pi,\pi)^d$. Теорема доказана.

Поступила16.01.05

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Hardy G.H.** On summability of Fourier series // Proc. London Math. Soc. 1913. Vol. 12. P. 365–372.
2. **Конягин С.В.** О расходимости всюду тригонометрических рядов Фурье // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 1. С.103—126.
3. **Осколков К.И.** Подпоследовательности сумм Фурье интегрируемых функций // Тр. МИАН. 1985. Т. 167. С. 239–260.
4. **Hunt R.A.** An estimate of the conjugate function // Studia Math. 1972. Vol. 44. P. 371–376.
5. **Карагулян Г.А.** Преобразование Гильберта и экспоненциальные интегральные оценки прямоугольных частичных сумм двойных рядов Фурье // Мат. сб. 1996. Т. 187, № 3. С. 55–74.
6. **Кашин Б.С., Саакян А.А.** Ортогональные ряды. М.: АФЦ, 1999. 560 с.

Том 11 № 2 2005

УДК 517.5

О НУЛЯХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ[1]

В. М. Бадков

Пусть $\{T_{\sigma,n}(\tau)\}_{n=0}^{\infty}$ — ортонормированная на $[0,2\pi]$ по мере $d\sigma(\tau)$ система тригонометрических полиномов, полученная при ортогонализации методом Шмидта последовательности $1, \sin\tau, \cos\tau, \sin 2\tau, \cos 2\tau, \ldots$ Устанавливается формула приращения в точке единичной окружности аргумента алгебраического многочлена, ортогонального на ней по мере $d\sigma(\tau)$. С помощью этой формулы при $n>0$ доказывается вещественность и простота нулей полинома $T_{\sigma,n}(\tau)$, а также перемежаемость нулей линейных комбинаций $aT_{\sigma,2n-1}(\tau)+bT_{\sigma,2n}(\tau)$ и $-bT_{\sigma,2n-1}(\tau)+aT_{\sigma,2n}(\tau)$, если $a^2+b^2>0$. Для широкого класса весов с особенностями, порядки которых задаются конечными произведениями действительных степеней вогнутых модулей непрерывности, доказывается существование положительных констант C_1 и C_2, зависящих лишь от веса, таких, что расстояние между соседними нулями ортогонального с этим весом тригонометрического полинома порядка n заключено между $C_1 n^{-1}$ и $C_2 n^{-1}$. В виде следствий выводятся как известные, так и новые результаты о нулях многочленов, ортогональных по мере на отрезке (возможно, бесконечном).

1. Введение

Всюду ниже $\mathbb{C}$ — множество всех комплексных чисел, $\mathbb{R} := (-\infty,\infty)$, $\mathbb{Z}_+ := \{0,1,\ldots\}$, $\mathbb{N} := \{1,2,\ldots\}$; $\alpha(t)$ $(-1\le t\le 1)$ и $\sigma(\tau)$ $(0\le\tau\le 2\pi)$ — ограниченные неубывающие функции с бесконечными множествами значений; $p_{\alpha,n}(t)=k_{\alpha,n}t^n+\cdots$ $(k_{\alpha,n}>0,\ \deg p_{\alpha,n}=n,\ n\in\mathbb{Z}_+)$ — система алгебраических многочленов, ортонормированная на отрезке $[-1,1]$ в следующем смысле:

$$\int_{-1}^{1} p_{\alpha,m}(t)p_{\alpha,n}(t)\,d\alpha(t)=\delta_{m,n}\qquad (m,n\in\mathbb{Z}_+);$$

$\varphi_{\sigma,n}(z)=\varkappa_{\sigma,n}z^n+\cdots$ $(\deg\varphi_{\sigma,n}=n,\ \varkappa_{\sigma,n}>0,\ n\in\mathbb{Z}_+)$ — система алгебраических многочленов, ортонормированная на окружности $\Gamma_1 := \{z : |z|=1\}$ по мере $d\sigma(\tau)$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_{\sigma,m}(e^{i\tau})\overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})}\,d\sigma(\tau)=\delta_{m,n}\qquad (m,n\in\mathbb{Z}_+).$$

По известной формуле Г. Сегё [1, 2] для всех $n\in\mathbb{Z}_+$ и $z\in\mathbb{C}$

$$p_{\alpha,n}((z+z^{-1})/2)=\{2\pi[1+\varphi_{\sigma,2n}(0)/\varkappa_{\sigma,2n}]\}^{-1/2}[\varphi_{\sigma,2n}(z)+\varphi^*_{\sigma,2n}(z)]z^{-n},\tag{1.1}$$

где $\alpha(-1)=0,\ \sigma(\tau)=\alpha(\cos\tau)\operatorname{sgn}(\tau-\pi)$,

$$\varphi^*_{\sigma,n}(z):=z^n\overline{\varphi_{\sigma,n}(1/\overline{z})}=\overline{\varphi_{\sigma,n}(0)}z^n+\cdots+\varkappa_{\sigma,n}.\tag{1.2}$$

Через t_σ обозначим класс систем $\{t_{\sigma,n}\}_{n=0}^{\infty}$ тригонометрических полиномов с действительными коэффициентами, для которых при всех $n\in\mathbb{N}$ $t_{\sigma,2n-1}$ и $t_{\sigma,2n}$ — полиномы порядка n, $t_{\sigma,0}=\text{const}$ и

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}t_{\sigma,m}(\tau)t_{\sigma,n}(\tau)\,d\sigma(\tau)=\delta_{m,n}\qquad (m,n\in\mathbb{Z}_+).$$

[1]Работа поддержана грантами РФФИ (проект 05–01–00233) и Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (проект НШ–1347.2003.1)

Классу t_σ принадлежит, в частности, система $\{T_{\sigma,n}(\tau)\}_{n=0}^{\infty}$ тригонометрических полиномов, полученная из последовательности 1, $\sin\tau$, $\cos\tau$, $\sin 2\tau$, $\cos 2\tau, \ldots$, методом ортогонализации Шмидта относительно $d\sigma(\tau)$ на $[0,2\pi]$. Класс t_σ содержит бесконечное множество существенно различных систем. Как заметил Г. Сегё [3], вектор-строки, состоящие из полиномов порядка n любых двух систем $\{t_{\sigma,n}\}$ и $\{u_{\sigma,n}\} \in t_\sigma$, связаны формулой

$$\{t_{\sigma,2n-1}, t_{\sigma,2n}\} = \{u_{\sigma,2n-1}, u_{\sigma,2n}\}O_n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

где O_n — некоторая ортогональная (2×2)-матрица. Г. Сегё [3] в случае абсолютно непрерывной $\sigma(\tau)$ показал, что одной из систем класса t_σ является система A_0, $A_1(\tau)$, $B_1(\tau)$, $A_2(\tau)$, $B_2(\tau), \ldots$, где

$$A_n(\tau) = \sqrt{2}\,\{1 + |\varphi_{\sigma,2n}(0)|/\varkappa_{\sigma,2n}\}^{-1/2}\,\Re\left\{e^{-i(n\tau+\gamma_{2n})}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})\right\} \qquad (n \in \mathbb{Z}_+), \tag{1.3}$$

$$B_n(\tau) = \sqrt{2}\{1 - |\varphi_{\sigma,2n}(0)|/\varkappa_{\sigma,2n}\}^{-1/2}\Im\left\{e^{-i(n\tau+\gamma_{2n})}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})\right\} \qquad (n \in \mathbb{N}), \tag{1.4}$$

параметр $\gamma_{2n} \in \mathbb{R}$ определяется из условия $e^{-i\gamma_{2n}}\varphi_{\sigma,2n}(0) \in \mathbb{R}$ (с точностью до слагаемого, кратного $\pi/2$). Эта система, вообще говоря, не совпадает с $\{T_{\sigma,n}(\tau)\}_{n=0}^{\infty}$. В [4] для необязательно абсолютно непрерывной меры $d\sigma(\tau)$ получены формулы

$$[\varkappa_{\sigma,2n} - \Re\varphi_{\sigma,2n}(0)]^{1/2}(2\varkappa_{\sigma,2n})^{-1/2}T_{\sigma,2n-1}(\tau) = \Re\left\{e^{-i(n-1)\tau}\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})\right\}, \tag{1.5}$$

$$[\varkappa_{\sigma,2n} - \Re\varphi_{\sigma,2n}(0)]^{1/2}(2\varkappa_{\sigma,2n})^{-1/2}T_{\sigma,2n}(\tau) = \Im\left\{e^{-in\tau}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})\right\}, \tag{1.6}$$

выгодно отличающиеся от (1.3)–(1.4) тем, что не содержат параметра γ_{2n}.

Соотношения (1.1)–(1.2) и (1.5)–(1.6) позволяют изучать асимптотические, аппроксимативные и другие свойства систем $\{\varphi_{\sigma,n}(z)\}_{n=0}^{\infty}$, $\{T_{\sigma,n}(\tau)\}_{n=0}^{\infty}$, $\{p_{\alpha,n}(t)\}_{n=0}^{\infty}$ в рамках единой теории. Этой теории посвящены работы [3–13], а также и настоящая статья, в которой исследуются свойства нулей тригонометрических и алгебраических ортогональных полиномов (из свойств многочленов, ортогональных на окружности, выводятся свойства тригонометрических ортогональных полиномов, из которых, в свою очередь, получаются в виде следствий свойства алгебраических многочленов, ортогональных на отрезке).

Наряду с $\{T_{\sigma,n}(\tau)\}_{n=0}^{\infty}$, в [4] введена система полиномов лорановского типа $\{R_{\sigma,n}(z)\}_{n=0}^{\infty}$, полученная в результате ортогонализации по мере $d\sigma(\tau)$ на единичной окружности последовательности 1, z, z^{-1}, z^2, $z^{-2}, \ldots$. В [4] установлено, что

$$R_{\sigma,2n}(z) = z^{-n}\varphi^*_{\sigma,2n}(z) \qquad (n \in \mathbb{Z}_+), \tag{1.7}$$

$$R_{\sigma,2n-1}(z) = z^{1-n}\varphi_{\sigma,2n-1}(z) \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{1.8}$$

В разд. 2 доказываются новым способом формулы, связывающие полиномы $R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})$ и $R_{\sigma,2n}(e^{i\tau})$ с полиномами $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$ и $T_{\sigma,2n}(\tau)$. В разд. 2 приведено доказательство анонсированной в [14] формулы приращения в точке $\theta \in \mathbb{R}$ любой из ветвей функции $\gamma_{\sigma,n}(\tau) := \arg\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})$. С помощью этой формулы в разд. 4 доказывается при $n > 0$ вещественность и простота нулей полинома $T_{\sigma,n}(\tau)$, а также перемежаемость нулей линейных комбинаций $aT_{\sigma,2n-1}(\tau) + bT_{\sigma,2n}(\tau)$ и $-bT_{\sigma,2n-1}(\tau) + aT_{\sigma,2n}(\tau)$, если $a^2 + b^2 > 0$. В разд. 5 многочлены, ортогональные на отрезке, выражаются через тригонометрические ортогональные полиномы. В разд. 6 из результатов разд. 4 выводятся известные свойства нулей многочленов, ортогональных на отрезке $[a,b]$ (не обязательно конечном). Кроме того, в разд. 6 для широкого класса весов с особенностями, порядки которых задаются конечными произведениями действительных степеней вогнутых модулей непрерывности, доказывается существование положительных констант C_1 и C_2, зависящих лишь от веса, таких, что расстояние между соседними нулями ортогонального с этим весом тригонометрического полинома порядка n заключено между C_1n^{-1} и C_2n^{-1}. В виде следствий выводятся как известные, так и новые результаты о нулях многочленов, ортогональных с весом на отрезке $[-1,1]$.

2. Связь ортогональных лорановских полиномов с действительными тригонометрическими

В силу ортонормированности на Γ_1 по мере $d\sigma(\tau)$ системы $\{\varphi_{\sigma,n}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ из формул (1.7), (1.8) и (1.2) следует ортонормированность на Γ_1 по мере $d\sigma(\tau)$ системы $\{R_{\sigma,n}(z)\}_{n=0}^{\infty}$. Поэтому полиномы

$$R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau}), \qquad R_{\sigma,2n}(e^{i\tau}) \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{2.1}$$

ортогональны гармоникам

$$1,\ e^{i\tau},\ e^{-i\tau}, \ldots,\ e^{i(n-1)\tau},\ e^{-i(n-1)\tau} \tag{2.2}$$

(при $n = 1$ последовательность (2.2) состоит из одного члена — единицы) в следующем смысле:

$$\int_0^{2\pi} R_{\sigma,k}(e^{i\tau})\, e^{\pm i\nu\tau} d\sigma(\tau) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1;\ k = 2n-1, 2n). \tag{2.3}$$

Свойством, аналогичным (2.3), обладают любые линейные комбинации полиномов (2.1) и комплексно сопряженных к ним, и в частности функции

$$u_{\sigma,k}(\tau) := \Re R_{\sigma,k}(e^{i\tau}), \qquad v_{\sigma,k}(\tau) := \Im R_{\sigma,k}(e^{i\tau}) \qquad (k = 2n-1, 2n). \tag{2.4}$$

Всюду в этом разделе для тригонометрических полиномов порядка не выше n будем использовать обозначения: $t_n(\tau),\ t_{n,1}(\tau),\ t_{n,2}(\tau), \ldots$. Поскольку любой $t_{n-1}(\tau)$ есть линейная комбинация гармоник (2.2), то функции (2.4), являясь ортогональными этим гармоникам, ортогональны любому $t_{n-1}(\tau)$, а потому и полиномам $\{T_{\sigma,\nu}(\tau)\}_{\nu=0}^{2n-2}$:

$$\int_0^{2\pi} u_{\sigma,k}(\tau) T_{\sigma,\nu}(\tau)\, d\sigma(\tau) = \int_0^{2\pi} v_{\sigma,k}(\tau) T_{\sigma,\nu}(\tau)\, d\sigma(\tau) = 0 \qquad (0 \le \nu \le 2n-2; k = 2n-1, 2n). \tag{2.5}$$

Функции (2.4) суть тригонометрические полиномы порядка n, а значит, являются линейными комбинациями полиномов $\{T_{\sigma,\nu}(\tau)\}_{\nu=0}^{2n}$. В силу (2.5) у этих линейных комбинаций отличными от нуля могут быть только коэффициенты при $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$ и $T_{\sigma,2n}(\tau)$. Задачу нахождения этих коэффициентов решает следующая

Теорема 2.1. *При $n \in \mathbb{N}$ для функций (2.4) имеют место следующие представления в виде линейных комбинаций $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$ и $T_{\sigma,2n}(\tau)$:*

$$u_{\sigma,2n-1}(\tau) = (c_n)^{-1} T_{\sigma,2n-1}(\tau), \tag{2.6}$$

$$v_{\sigma,2n-1}(\tau) = -\frac{c_n}{2} \frac{\Im\varphi_{\sigma,2n}(0)}{\varkappa_{\sigma,2n}} T_{\sigma,2n-1}(\tau) + \frac{c_n}{2} \frac{\varkappa_{\sigma,2n-1}}{\varkappa_{\sigma,2n}} T_{\sigma,2n}(\tau), \tag{2.7}$$

$$u_{\sigma,2n}(\tau) = \frac{c_n}{2} \frac{\varkappa_{\sigma,2n-1}}{\varkappa_{\sigma,2n}} T_{\sigma,2n-1}(\tau) + \frac{c_n}{2} \frac{\Im\varphi_{\sigma,2n}(0)}{\varkappa_{\sigma,2n}} T_{\sigma,2n}(\tau), \tag{2.8}$$

$$v_{\sigma,2n}(\tau) = -\frac{1}{c_n} T_{\sigma,2n}(\tau), \tag{2.9}$$

где $\varkappa_{\sigma,n}$ — старший коэффициент многочлена $\varphi_{\sigma,n}(z)$,

$$c_n := (2\varkappa_{\sigma,2n})^{1/2} [\varkappa_{\sigma,2n} - \Re\varphi_{\sigma,2n}(0)]^{-1/2}. \tag{2.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ради краткости вместо $R_{\sigma,k}(e^{i\tau}), u_{\sigma,k}(\tau), v_{\sigma,k}(\tau)$ иногда будем писать R_k, u_k, v_k соответственно. Через $c_{n,k}$ обозначим коэффициент при z^k многочлена $\varphi_{\sigma,n}(z)$. Таким образом,

$$\varphi_{\sigma,n}(z) = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} z^k, \qquad c_{n,n} = \varkappa_{\sigma,n} > 0, \qquad c_{n,0} = \varphi_{\sigma,n}(0). \tag{2.11}$$

Докажем (2.6). В силу (2.4) и (2.11) имеем:

$$u_{\sigma,2n-1}(\tau) = \Re\, R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau}) = \Re\,\{e^{-i(n-1)\tau}\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})\}$$

$$= \Re \sum_{k=0}^{2n-1} c_{2n-1,k} e^{i(k+1-n)\tau} = \Re \sum_{\nu=1-n}^{n} c_{2n-1,n+\nu-1} e^{i\nu\tau}$$

$$= \Re(c_{2n-1,2n-1} e^{in\tau}) + t_{n-1,2}(\tau) = \varkappa_{\sigma,2n-1} \cos n\tau + t_{n-2,2}(\tau). \tag{2.12}$$

Из (2.12) видно, что $u_{\sigma,2n-1}(\tau)$ есть линейная комбинация гармоник

$$1,\ \cos\tau,\ \sin\tau, \ldots, \cos(n-1)\tau,\ \sin(n-1)\tau,\ \cos n\tau$$

с коэффициентом $\varkappa_{\sigma,2n-1}$ при $\cos n\tau$. Согласно (2.5) полином $u_{\sigma,2n-1}(\tau)$ ортогонален по мере $d\sigma(\tau)$ любому $t_{n-1,3}(\tau)$. Поэтому при некотором $b_n > 0$ выполняется равенство

$$u_{\sigma,2n-1}(\tau) = b_n T_{\sigma,2n-1}(\tau). \tag{2.13}$$

Найдем b_n. Из ортонормальности $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$ и (2.13) следует, что

$$b_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [b_n T_{\sigma,2n-1}(\tau)]^2\, d\sigma(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^2_{\sigma,2n-1}(\tau)\, d\sigma(\tau). \tag{2.14}$$

Пользуясь (2.4), находим, что

$$u^2_{\sigma,2n-1}(\tau) = (\Re R_{2n-1})^2 = \frac{1}{4}(R^2_{2n-1} + 2|R_{2n-1}|^2 + \overline{R^2_{2n-1}})$$

$$= \frac{1}{2}|\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})|^2 + \frac{1}{2}\Re[e^{-(2n-2)\tau}\varphi^2_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})]. \tag{2.15}$$

Из (2.14) и (2.15) получаем равенства

$$b_n^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Re\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(2n-2)\tau}\varphi^2_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})\, d\sigma(\tau)\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Re\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{2n-1} c_{2n-1,k} e^{-i(2n-2-k)\tau}\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})\, d\sigma(\tau)\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Re\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{\nu=-1}^{2n-2} c_{2n-1,2n-2-\nu} e^{-i\nu\tau}\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})\, d\sigma(\tau)\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Re\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varkappa_{\sigma,2n-1} e^{i\tau}\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})\, d\sigma(\tau)\right]. \tag{2.16}$$

Воспользуемся известным равенством (см. [2], формулы (1.3)–(1.4))

$$I_{n,1} := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varkappa_{\sigma,n} e^{i\tau}\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})\,d\sigma(\tau) = -\frac{\varphi_{\sigma,n+1}(0)}{\varkappa_{\sigma,n+1}}. \tag{2.17}$$

Из (2.16), (2.17) и (2.10) следует, что

$$b_n^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Re I_{2n-1,1} = \frac{1}{2} - \frac{\Re\varphi_{\sigma,2n}(0)}{2\varkappa_{\sigma,2n}} = \frac{1}{c_n^2}. \tag{2.18}$$

В силу положительности чисел b_n и c_n из (2.18) вытекает, что

$$b_n = \frac{1}{c_n}. \tag{2.19}$$

Из (2.13) и (2.19) выводим (2.6).

Теперь докажем (2.9). Для этого, пользуясь (2.5), установим ортогональность по мере $d\sigma(\tau)$ полинома v_{2n} полиному u_{2n-1} (в силу (2.6) она равносильна ортогональности по мере $d\sigma(\tau)$ полинома v_{2n} полиному $T_{\sigma,2n-1}$), на основании чего придем к формуле

$$v_{\sigma,2n}(\tau) = d_n T_{\sigma,2n}(\tau). \tag{2.20}$$

После этого останется доказать, что

$$d_n = -\frac{1}{c_n}. \tag{2.21}$$

Приступая к доказательству ортогональности полиномов v_{2n} и u_{2n-1} по мере $d\sigma$, замечаем, что в силу формул (2.4)

$$v_{2n}\,u_{2n-1} = \frac{R_{2n} - \overline{R_{2n}}}{2i}\cdot\frac{R_{2n-1} + \overline{R_{2n-1}}}{2}$$

$$= (4i)^{-1}[2i\Im(R_{2n}R_{2n-1}) + 2i\Im(R_{2n}\overline{R_{2n-1}})] = 2^{-1}[\Im(R_{2n}R_{2n-1}) + \Im(R_{2n}\overline{R_{2n-1}})].$$

Поэтому

$$I_{n,2} := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_{\sigma,2n}(\tau)u_{\sigma,2n-1}(\tau)\,d\sigma(\tau)$$

$$= \frac{1}{4\pi}\Im\left[\int_0^{2\pi} R_{\sigma,2n}(e^{i\tau})R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})\,d\sigma(\tau) + \int_0^{2\pi} R_{\sigma,2n}(e^{i\tau})\overline{R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})}\,d\sigma(\tau)\right]. \tag{2.22}$$

Последний интеграл равен нулю. Поэтому

$$I_{n,2} = 2^{-1}\Im I_{n,3}, \tag{2.23}$$

где

$$I_{n,3} := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R_{\sigma,2n}(e^{i\tau})R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})\,d\sigma(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\tau}\overline{\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})}e^{-i(n-1)\tau}\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})\,d\sigma(\tau)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})}\sum_{k=0}^{2n-1} c_{2n-1,k}e^{i(k+1)\tau}\,d\sigma(\tau) = \frac{\varkappa_{\sigma,2n-1}}{\varkappa_{\sigma,2n}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi_{\sigma,2n}(e^{i}\tau)|^2\,d\sigma(\tau) = \frac{\varkappa_{\sigma,2n-1}}{\varkappa_{\sigma,2n}}. \tag{2.24}$$

Из (2.22)–(2.24) получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v_{\sigma,2n}(\tau)u_{\sigma,2n-1}(\tau)\,d\sigma(\tau)=\frac{1}{2}\Im\frac{\varkappa_{\sigma,2n-1}}{\varkappa_{\sigma,2n}}=0 \tag{2.25}$$

(как мнимая часть положительного числа). Как отмечалось выше, в силу (2.25) выполняется (2.20). Докажем (2.21). Учитывая (2.20), имеем

$$d_n^2=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}[d_nT_{\sigma,2n}(\tau)]^2\,d\sigma(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\Im R_{2n})^2\,d\sigma(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{R_{2n}-\overline{R_{2n}}}{2i}\right)^2 d\sigma(\tau)$$

$$\frac{1}{4}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(2|R_{2n}|^2-R_{2n}^2-\overline{R_{2n}^2})\,d\sigma(\tau)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\Re\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\overline{R_{2n}^2}\,d\sigma(\tau)\right]. \tag{2.26}$$

Вычисляем последний интеграл:

$$\begin{aligned}I_{n,4}&:=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\overline{R_{2n}^2}\,d\sigma(\tau)\\&=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}[e^{-i2n\tau}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})]\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})\,d\sigma(\tau)\\&=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})\sum_{k=0}^{2n}c_{2n,k}\;e^{-i(2n-k)\tau}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})\,d\sigma(\tau)\\&=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})\sum_{\nu=0}^{2n}c_{2n,2n-\nu}\;e^{-i\nu\tau}\,d\sigma(\tau)\\&=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})\;c_{2n,0}\;e^{-i2n\tau}\,d\sigma(\tau)=\frac{\varphi_{\sigma,2n}(0)}{\varkappa_{\sigma,2n}}.\end{aligned} \tag{2.27}$$

Из (2.26), (2.27) и (2.10) следует, что

$$d_n^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\Re\varphi_{\sigma,2n}(0)}{\varkappa_{\sigma,2n}}=\frac{1}{c_n^2}. \tag{2.28}$$

Чтобы получить (2.21) из (2.28), надо показать, что

$$d_n<0. \tag{2.29}$$

В силу (2.4)

$$v_{2n}=\Im R_{2n}=-\Im\overline{R_{2n}}=-\Im\{e^{-in\tau}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})\}=-\Im\sum_{k=0}^{2n}c_{2n,k}e^{i(k-n)\tau}$$

$$=-\Im\sum_{\nu=-n}^{n}c_{2n,n+\nu}e^{i\nu\tau}=-\Im(c_{2n,0}\;e^{-in\tau}+c_{2n,2n}\;e^{in\tau})+t_{n-1,4}(\tau)$$

$$=t_{n-1,4}(\tau)-\Im\{[\Re\varphi_{\sigma,2n}(0)+i\Im\varphi_{\sigma,2n}(0)](\cos n\tau-i\sin n\tau)+\varkappa_{\sigma,2n}(\cos n\tau+i\sin n\tau)\}$$

$$= t_{n-1,4}(\tau) - \varkappa_{\sigma,2n}\sin n\tau - \{\Im\varphi_{\sigma,2n}(0)\}\cos n\tau + \{\Re\varphi_{\sigma,2n}(0)\}\sin n\tau.$$

Отсюда видно, что старший коэффициент полинома v_{2n} (т.е. коэффициент при $\sin n\tau$) равен $\Re\varphi_{\sigma,2n}(0) - \varkappa_{\sigma,2n}$, что в соответствии с (2.18) влечет его отрицательность. В силу этого с учетом положительности старшего коэффициента у $T_{\sigma,2n}(\tau)$ можно заключить, что коэффициент d_n в (2.20) удовлетворяет неравенству (2.29). Так как $d_n < 0$, $c_n > 0$, то из (2.28) следует (2.21), и потому (2.20) превращается в (2.9).

Докажем (2.7). Для этого сначала вычислим соответствующие коэффициенты Фурье функции $v_{2n-1}(\tau)$ по системе $\{T_{\sigma,k}(\tau)\}$. В силу (2.6) и (2.4)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_{2n-1}T_{\sigma,2n-1}\,d\sigma(\tau) = c_n\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_{2n-1}u_{2n-1}\,d\sigma(\tau) = c_n\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R_{2n-1}^2 - \overline{R_{2n-1}^2}}{4i}\,d\sigma(\tau)$$

$$= c_n\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2i\Im R_{2n-1}^2}{4i}\,d\sigma(\tau) = \frac{c_n}{2}\Im\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(2n-2)\tau}\varphi_{\sigma,2n-1}^2(e^{i\tau})\,d\sigma(\tau)\right\}. \qquad (2.30)$$

Последний интеграл в (2.30) равен интегралу $I_{2n-1,1} = -\varphi_{\sigma,2n}(0)/\varkappa_{\sigma,2n}$ (см. (2.17)). Поэтому (2.30) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_{\sigma,2n-1}(\tau)T_{\sigma,2n-1}(\tau)\,d\sigma(\tau) = -\frac{c_n}{2}\frac{\Im\varphi_{\sigma,2n}(0)}{\varkappa_{\sigma,2n}}. \qquad (2.31)$$

Аналогично в силу (2.9) и (2.4) имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_{2n-1}T_{\sigma,2n}\,d\sigma(\tau) = \frac{c_n}{4}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(R_{2n-1} - \overline{R_{2n-1}})(R_{2n} - \overline{R_{2n}})\,d\sigma(\tau)$$

$$= \frac{c_n}{4}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(R_{2n-1}R_{2n} - \overline{R_{2n-1}}R_{2n} - R_{2n-1}\overline{R_{2n}} + \overline{R_{2n-1}R_{2n}}\right)\,d\sigma(\tau)$$

$$= \frac{c_n}{2}\Re\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R_{2n-1}R_{2n}d\sigma(\tau) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})\overline{R_{\sigma,2n}(e^{i\tau})}\,d\sigma(\tau)\right\}$$

$$= \frac{c_n}{4\pi}\Re\left\{\int_0^{2\pi} R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})R_{\sigma,2n}(e^{i\tau})\,d\sigma(\tau)\right\}.$$

Отсюда вследствие (2.24) получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_{2n-1}T_{\sigma,2n}\,d\sigma(\tau) = \frac{c_n}{2}\frac{\varkappa_{\sigma,2n-1}}{\varkappa_{\sigma,2n}}. \qquad (2.32)$$

Из (2.5), (2.31) и (2.32) следует (2.7).

Формулу (2.8) доказываем аналогично (2.7). В силу (2.6) и (2.4)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_{2n}T_{\sigma,2n-1}\,d\sigma(\tau) = \frac{1}{4}c_n\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(R_{2n} + \overline{R_{2n}})(R_{2n-1} + \overline{R_{2n-1}})\,d\sigma(\tau)$$

$$= \frac{c_n}{8\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left\{R_{2n}R_{2n-1}+R_{2n}\overline{R_{2n-1}}+\overline{R_{2n}}R_{2n-1}+\overline{R_{2n}R_{2n-1}}\right\}d\sigma(\tau)=\frac{c_n}{4\pi}\Re\left\{\int\limits_0^{2\pi}R_{2n}R_{2n-1}\,d\sigma(\tau)\right\}.$$

Ввиду (2.24) отсюда следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}u_{2n}T_{\sigma,2n-1}\,d\sigma(\tau)=\frac{c_n}{2}\frac{\varkappa_{\sigma,2n-1}}{\varkappa_{\sigma,2n}}. \tag{2.33}$$

С учетом (2.9) и (2.4) имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}u_{\sigma,2n}T_{\sigma,2n}\,d\sigma(\tau)=-c_n\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}u_{2n}v_{2n}\,d\sigma(\tau)=-c_n\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{(R_{2n}+\overline{R_{2n}})(R_{2n}-\overline{R_{2n}})}{4i}\,d\sigma(\tau)$$

$$=c_n\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{(\overline{R_{2n}})^2-R_{2n}^2}{4i}\,d\sigma(\tau)=\frac{c_n}{2}\Im\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\overline{R_{2n}})^2\,d\sigma(\tau)\right\}.$$

Отсюда в силу (2.27) получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}u_{2n}T_{\sigma,2n}\,d\sigma(\tau)=\frac{c_n}{2}\frac{\Im\,\varphi_{\sigma,2n}(0)}{\varkappa_{\sigma,2n}}. \tag{2.34}$$

Из (2.5), (2.33) и (2.34) выводим (2.8).

3. Формула приращения аргумента многочлена, ортогонального на окружности

Следующая лемма устанавливает формулу приращения в точке $e^{i\theta}$ аргумента многочлена, ортогонального на единичной окружности.

Лемма 3.1. *Пусть $\{\varphi_{\sigma,n}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ — система многочленов, ортонормированная на окружности $|z|=1$ по мере $d\sigma(\tau)$. Тогда для любой из ветвей функции $\gamma_{\sigma,n}(\tau):=\arg\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})$ при всех $\theta,\tau\in\mathbb{R}$ и $n\in\mathbb{N}$ выполняется равенство*

$$\gamma_{\sigma,n}(\tau)-\gamma_{\sigma,n}(\theta)=\frac{n}{2}(\tau-\theta)+\frac{1}{2}\int\limits_\theta^\tau|\varphi_{\sigma,n}(e^{iu})|^{-2}K_{\sigma,n-1}(e^{iu},e^{iu})\,du, \tag{3.1}$$

где

$$K_{\sigma,n}(z,\zeta):=\sum_{\nu=0}^{n}\varphi_{\sigma,\nu}(z)\overline{\varphi_{\sigma,\nu}(\zeta)}. \tag{3.2}$$

Доказательство. Дифференцируя по τ равенство $\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})=e^{i\gamma_{\sigma,n}(\tau)}|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|$, получаем

$$ie^{i\tau}\varphi'_{\sigma,n}(e^{i\tau})=e^{i\gamma_{\sigma,n}(\tau)}\frac{d}{d\tau}\left|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})\right|+i\gamma'_{\sigma,n}(\tau)\left|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})\right|e^{i\gamma_{\sigma,n}(\tau)}.$$

Умножим обе части этого равенства на $-2i\overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})}$ и воспользуемся формулой

$$\overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})}=e^{-i\gamma_{\sigma,n}(\tau)}|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|.$$

Тогда получим

$$2e^{i\tau}\varphi'_{\sigma,n}(e^{i\tau})\overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})} = -2i\left|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})\right|\frac{d}{d\tau}\left|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})\right| + 2\gamma'_{\sigma,n}(\tau)\left|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})\right|^2. \tag{3.3}$$

В [11] установлено равенство

$$K_{\sigma,n-1}(e^{i\tau}, e^{i\tau}) + n|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|^2 = 2\Re\{e^{i\tau}\varphi'_{\sigma,n}(e^{i\tau})\overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})}\}. \tag{3.4}$$

Из (3.3) и (3.4) следует, что

$$2\gamma'_{\sigma,n}(\tau)|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|^2 = n|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|^2 + K_{\sigma,n-1}(e^{i\tau}, e^{i\tau}).$$

Отсюда легко находим

$$\gamma'_{\sigma,n}(\tau) = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|^{-2}K_{\sigma,n-1}(e^{i\tau}, e^{i\tau}). \tag{3.5}$$

Интегрируя (3.5), получаем (3.1).

З а м е ч а н и е 3.1. Формула (3.1) применяется ниже при исследовании поведения нулей тригонометрических ортогональных полиномов и многочленов, ортогональных на отрезке.

4. Перемежаемость нулей тригонометрических ортогональных полиномов одного и того же порядка

В случае меры $d\sigma(\tau) = d\tau$ полиномы $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$ и $T_{\sigma,2n}(\tau)$ лишь постоянными множителями отличаются от гармоник $\cos n\tau$ и $\sin n\tau$. Нули последних являются простыми и перемежаются. Любой промежуток $[c, c+2\pi)$ содержит $2n$ нулей каждой из этих гармоник. Следующая теорема показывает, что перечисленные свойства нулей гармоник $\cos n\tau$ и $\sin n\tau$ справедливы и для полиномов $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$ и $T_{\sigma,2n}(\tau)$ в случае произвольной неубывающей на $[0, 2\pi]$ функции $\sigma(\tau)$ с бесконечным множеством значений. Более того, эти свойства нулей верны и для некоторых линейных комбинаций $G_n(\tau)$ и $F_n(\tau)$ полиномов $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$ и $T_{\sigma,2n}(\tau)$.

Теорема 4.1. *Пусть $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a^2 + b^2 > 0$. Тогда тригонометрические полиномы*

$$F_n(\tau) := aT_{\sigma,2n-1}(\tau) + bT_{\sigma,2n}(\tau), \tag{4.1}$$

$$G_n(\tau) := -bT_{\sigma,2n-1}(\tau) + aT_{\sigma,2n}(\tau) \tag{4.2}$$

на любом промежутке $[c, c+2\pi)$ имеют по $2n$ простых нулей. Нули $F_n(\tau)$ и $G_n(\tau)$ перемежаются, т.е. между двумя соседними нулями одного из этих полиномов имеется один и только один нуль другого.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сперва рассмотрим важный частный случай: $a = 1$, $b = 0$, т.е. случай, когда $F_n(\tau) = T_{\sigma,2n-1}(\tau)$, $G_n(\tau) = T_{\sigma,2n}(\tau)$. В этом случае, воспользовавшись формулами (2.9), (2.4), (1.7) и (1.2), получим

$$T_{\sigma,2n}(\tau) = -c_n v_{\sigma,2n}(\tau) = -c_n\Im\{R_{\sigma,2n}(\tau)\} = c_n\Im\{e^{-in\tau}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})\}. \tag{4.3}$$

Легко видеть, что

$$\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau}) = |\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})|e^{i\gamma_{\sigma,2n}(\tau)}, \tag{4.4}$$

где $\gamma_{\sigma,2n}(\tau)$ — любая из ветвей функции $\arg\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})$. В силу (4.3)–(4.4)

$$T_{\sigma,2n}(\tau) = c_n|\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})|\sin\Gamma_{\sigma,2n}(\tau), \tag{4.5}$$

где
$$\Gamma_{\sigma,2n}(\tau) := \gamma_{\sigma,2n}(\tau) - n\tau. \tag{4.6}$$
Ввиду (4.5) нули полинома $T_{\sigma,2n}(\tau)$ совпадают с нулями функции $\sin\Gamma_{\sigma,2n}(\tau)$.

Из (4.6), (3.1) и (3.2) выводим равенство
$$\Gamma_{\sigma,2n}(\tau) - \Gamma_{\sigma,2n}(\theta) = \frac{1}{2}\int\limits_{\theta}^{\tau} |\varphi_{\sigma,2n}(u)|^{-2} \sum_{\nu=0}^{2n-1} |\varphi_{\sigma,\nu}(e^{iu})|^2\, du. \tag{4.7}$$
При $\tau = \theta + 2\pi$ из (4.7) следует, что
$$\Gamma_{\sigma,2n}(\theta+2\pi) - \Gamma_{\sigma,2n}(\theta) = \frac{1}{2}\int\limits_{\theta}^{\theta+2\pi} |\varphi_{\sigma,2n}(u)|^{-2} \sum_{\nu=0}^{2n-1} |\varphi_{\sigma,\nu}(e^{iu})|^2\, du. \tag{4.8}$$
Поскольку в (4.8) подынтегральная функция 2π-периодична, а интеграл берется по отрезку длины 2π, то (4.8) можно переписать в виде
$$\Gamma_{\sigma,2n}(\theta+2\pi) - \Gamma_{\sigma,2n}(\theta) = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} |\varphi_{\sigma,2n}(u)|^{-2} \sum_{\nu=0}^{2n-1} |\varphi_{\sigma,\nu}(e^{iu})|^2\, du. \tag{4.9}$$
Из равенств
$$c_\nu := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-i\nu\tau}\, d\sigma(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-i\nu\tau} \frac{d\tau}{|\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})|^2} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, 2n)$$
(см. формулу (1.20) из [2]) следует, что детерминантные представления (см. формулу (8.5) из [2]) соответственных многочленов с номерами $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, ортонормированных относительно мер $d\sigma(u)$ и $|\varphi_{\sigma,2n}(u)|^{-2}\, du$, совпадают. Поэтому в (4.9) вместо $|\varphi_{\sigma,2n}(u)|^{-2}\, du$ можно писать $d\sigma(u)$. Таким образом,
$$\Gamma_{\sigma,2n}(\theta+2\pi) - \Gamma_{\sigma,2n}(\theta) = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} \sum_{\nu=0}^{2n-1} |\varphi_{\sigma,\nu}(e^{iu})|^2\, d\sigma(u). \tag{4.10}$$
Вследствие ортонормальности системы $\{\varphi_{\sigma,\nu}(z)\}_{\nu=0}^{\infty}$ по мере $d\sigma(\tau)$ из (4.10) получаем
$$\Gamma_{\sigma,2n}(\theta+2\pi) - \Gamma_{\sigma,2n}(\theta) = 2\pi n. \tag{4.11}$$
Из (4.7) и (4.11) видно, что когда τ, возрастая, пробегает отрезок длины 2π, то $\Gamma_{\sigma,2n}(\tau)$ пробегает, возрастая, отрезок длины $2\pi n$. Поэтому $\sin\Gamma_{\sigma,2n}(\tau)$, а вместе с ним и $T_{\sigma,2n}(\tau)$ на любом промежутке $[c, c+2\pi)$ имеет $2n$ попарно различных нулей. Поскольку на таком промежутке тригонометрический полином не может иметь более, чем $2n$ нулей, считая с кратностями, то все нули полинома $T_{\sigma,2n}(\tau)$ являются простыми.

С учетом (2.4) по аналогии с (4.5) устанавливается равенство
$$u_{\sigma,2n}(\tau) = |\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})| \cos\Gamma_{\sigma,2n}(\tau). \tag{4.12}$$
Сравнивая (4.5) с (4.12), заключаем, что нули $u_{\sigma,2n}(\tau)$ и $T_{\sigma,2n}(\tau)$ перемежаются. Кроме того, из (4.12) видно, что все нули полинома $u_{\sigma,2n}(\tau)$ являются простыми. В силу этого в смежных интервалах, концами которых служат нули полинома $u_{\sigma,2n}(\tau)$, этот полином имеет разные знаки. Следовательно, в соседних нулях полинома $T_{\sigma,2n}(\tau)$ полином $u_{\sigma,2n}(\tau)$ имеет разные знаки. Отсюда в силу (2.8) следует, что в соседних нулях $u_{\sigma,2n}(\tau)$ полином $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$ имеет

разные знаки, а потому между этими нулями обращается в нуль. Таким образом, $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$ на любом промежутке $[c, c+2\pi)$ имеет $2n$ попарно различных нулей и эти нули являются простыми и перемежаются с нулями $T_{\sigma,2n}(\tau)$. Итак, в случае $a = 1$, $b = 0$ теорема 4.1 доказана.

В случае произвольных a и $b \in \mathbb{R}$, для которых $a^2+b^2 > 0$, рассуждаем следующим образом. Пусть, например, $a \neq 0$. Тогда из (4.1) видно, что в соседних нулях полинома $T_{\sigma,2n}(\tau)$ полином $F_n(\tau)$ имеет разные знаки, так как этим же свойством обладает $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$. Следовательно, между этими нулями $F_n(\tau)$ обращается в нуль, нули $F_n(\tau)$ перемежаются с нулями $T_{\sigma,2n}(\tau)$, на $[c, c+2\pi)$ $F_n(\tau)$ имеет $2n$ попарно различных нулей и все нули $F_n(\tau)$ являются простыми.

Ввиду (4.1) в соседних нулях τ' и τ'' полинома $F_n(\tau)$ выполняются равенства

$$T_{\sigma,2n-1}(\tau') = -\frac{b}{a}T_{\sigma,2n}(\tau'), \qquad T_{\sigma,2n-1}(\tau'') = -\frac{b}{a}T_{\sigma,2n}(\tau''),$$

из которых вследствие (4.2) получаем

$$G_n(\tau') = \frac{a^2+b^2}{a}T_{\sigma,2n}(\tau'), \qquad G_n(\tau'') = \frac{a^2+b^2}{a}T_{\sigma,2n}(\tau''). \tag{4.13}$$

В силу перемежаемости нулей $F_n(\tau)$ и $T_{\sigma,2n}(\tau)$ правые части равенств (4.13) имеют разные знаки. Поэтому между τ' и τ'' имеется нуль полинома $G_n(\tau)$. Отсюда вытекает справедливость теоремы 4.1 в случае, когда $a \neq 0$. Аналогично рассматривается случай, когда $b \neq 0$.

5. Выражение многочленов, ортогональных на отрезке, через тригонометрические ортогональные полиномы

Теорема 5.1. *Пусть $\alpha(t)$ — неубывающая ограниченная функция на $[-1,1]$ с бесконечным множеством значений, удовлетворяющая условию*

$$\alpha(-1) = 0. \tag{5.1}$$

Рассмотрим на единичной окружности и на отрезке $[-1,1]$ соответственно меры $d\sigma(\tau)$ и $d\beta(t)$, связанные с мерой $d\alpha(t)$ соотношениями

$$\sigma(\tau) = -\alpha(\cos\tau)\ \operatorname{sgn}\tau\ (-\pi \le \tau \le \pi). \tag{5.2}$$

$$d\beta(t) = (1-t^2)\,d\alpha(t). \tag{5.3}$$

Наконец, рассмотрим системы алгебраических многочленов $\{p_{\alpha,n}(t)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{q_{\beta,n}(t)\}_{n=0}^{\infty}$, ортонормальные на $[-1,1]$ относительно мер $d\alpha(t)$ и $d\beta(t)$ соответственно, и систему тригонометрических полиномов $\{T_{\sigma,n}(\tau)\}_{n=0}^{\infty}$, ортонормальную на $[-\pi,\pi]$ по мере $d\sigma(\tau)$. Тогда имеют место соотношения

$$T_{\sigma,0}(\tau) = \sqrt{\pi}p_{\alpha,0}(\cos\tau) \qquad (\tau \in \mathbb{R}), \tag{5.4}$$

$$T_{\sigma,2n-1}(\tau) = \sqrt{\pi}p_{\alpha,n}(\cos\tau) \qquad (\tau \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}), \tag{5.5}$$

$$T_{\sigma,2n}(\tau) = \sqrt{\pi}q_{\beta,n-1}(\cos\tau)\sin\tau \qquad (\tau \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}). \tag{5.6}$$

Доказательство. В силу ортонормальности системы $\{p_{\alpha,n}(t)\}_{n=0}^{\infty}$ по мере $d\alpha(t)$ при замене переменной $t = \cos\tau$ получаем, что при $m, n \in \mathbb{Z}_+$

$$\delta_{m,n} = \int_{-1}^{1} p_{\alpha,m}(t)p_{\alpha,n}(t)\,d\alpha(t) = -2\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} p_{\alpha,m}(\cos\tau)p_{\alpha,n}(\cos\tau)\,d\alpha(\cos\tau). \tag{5.7}$$

Произведя замену переменной $\tau = -u$, приходим к равенству

$$\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi} p_{\alpha,m}(\cos\tau)p_{\alpha,n}(\cos\tau)\,d\alpha(\cos\tau) = -\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{0} p_{\alpha,m}(\cos u)p_{\alpha,n}(\cos u)\,d\alpha(\cos u). \tag{5.8}$$

С учетом (5.8), (5.1) и (5.2) вместо (5.7) можно написать

$$\delta_{m,n} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{0} p_{\alpha,m}(\cos\tau)p_{\alpha,n}(\cos\tau)\,d\alpha(\cos\tau) - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi} p_{\alpha,m}(\cos)p_{\alpha,n}\,d\alpha(\cos\tau)$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} p_{\alpha,m}(\cos\tau)p_{\alpha,n}(\cos\tau)\,d\sigma(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left[\sqrt{\pi}p_{\alpha,m}(\cos\tau)\right]\left[\sqrt{\pi}p_{\alpha,n}(\cos\tau)\right]\,d\sigma(\tau). \tag{5.9}$$

Функция $p_{\alpha,n}(\cos\tau)$ есть косинус-полином порядка n со старшим коэффициентом $2^{1-n}k_{\alpha,n} > 0$, так как является линейной комбинацией функций $(\cos\tau)^{\nu}(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ с коэффициентом $k_{\alpha,n} > 0$ при $(\cos\tau)^n$ и, как легко доказывается методом индукции, $(\cos\tau)^{\nu}$ есть косинус-полином порядка ν со старшим коэффициентом $2^{1-\nu}$.

Аналогично с учетом (5.1)–(5.3) при $m, n \in \mathbb{N}$ получаем

$$\delta_{m,n} = \int\limits_{-1}^{1} q_{\beta,m-1}(t)q_{\beta,n-1}(t)\,d\beta(t)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left[\sqrt{\pi}q_{\beta,m-1}(\cos\tau)\sin\tau\right]\left[\sqrt{\pi}q_{\beta,n-1}(\cos\tau)\sin\tau\right]\,d\sigma(\tau), \tag{5.10}$$

причем $q_{\beta,n-1}(\cos\tau)\sin\tau$ есть синус-полином порядка n с положительным старшим коэффициентом $2^{1-n}k_{\beta,n-1}$.

При $m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{Z}_+$ рассмотрим интеграл

$$I_{m,n} := \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left[\sqrt{\pi}q_{\beta,m-1}(\cos\tau)\sin\tau\right]\left[\sqrt{\pi}p_{\alpha,n}(\cos\tau)\right]\,d\sigma(\tau). \tag{5.11}$$

Произведем замену переменной $\tau = -u$, при этом учтем, что в силу (5.2) $d\sigma(-u) = -d\sigma(u)$. Тогда из (5.11) получим

$$I_{m,n} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\pi}^{-\pi} \left[\sqrt{\pi}q_{\beta,m-1}(\cos u)(-\sin u)\right]\left[\sqrt{\pi}p_{\alpha,m}(\cos u)\right]\left[-d\sigma(u)\right] = -I_{m,n},$$

откуда следует

$$I_{m,n} = 0 \qquad (m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{Z}_+). \tag{5.12}$$

Из формул (5.9)–(5.12) видно, что система тригонометрических полиномов $\{t_n(\tau)\}_{n=0}^{\infty}$, где

$$t_0(\tau) := \sqrt{\pi}p_{\alpha,0}(\cos\tau), \qquad t_{2n-1}(\tau) := \sqrt{\pi}p_{\alpha,n}(\cos\tau),$$

$$t_{2n}(\tau) := \sqrt{\pi}q_{\beta,n-1}(\cos\tau)\sin\tau \qquad (n \in \mathbb{N})$$

удовлетворяет следующим условиям: она ортонормальна на $[-\pi, \pi]$ по мере $d\sigma(\tau)$; $t_0 = \mathrm{const} > 0$; при $n \in \mathbb{N}$ полином $t_{2n-1}(\tau)$ есть косинус-полином порядка n с положительным старшим коэффициентом, а $t_{2n}(\tau)$ есть синус-полином порядка n с положительным старшим коэффициентом. Следовательно, эта система совпадает с системой $\{T_{\sigma,n}(\tau)\}_{n=0}^{\infty}$, получаемой при ортогонализации методом Шмидта по мере $d\sigma(\tau)$ на $[-\pi, \pi]$ последовательности $1,\ \cos\tau,\ \sin\tau,\ \cos 2\tau,\ \sin 2\tau,\ \ldots$ Итак, формулы (5.4)–(5.6) доказаны.

6. Новое доказательство перемежаемости нулей многочленов, ортогональных на отрезке

Обозначим через $\{p_n(\alpha;A,B;t)\}_{n=0}^{\infty}$ систему алгебраических многочленов, ортонормальную на $[A,B]$ $(-\infty \le A < B \le \infty)$ по мере $d\alpha(t)$. Докажем для нее новым способом известную (см., например, [1]) теорему о перемежаемости нулей многочленов с соседними номерами. Случай $A=-1$, $B=1$ рассматривается в следующей теореме.

Теорема 6.1. *Пусть $\{p_{\alpha,\nu}(t)\}_{\nu=0}^{\infty}$ — система алгебраических многочленов, ортонормированная на отрезке $[-1,1]$ по мере $d\alpha(t)$, где $\alpha(t)$ — неубывающая функция с бесконечным множеством значений. Тогда при каждом $n\in\mathbb{N}$ нули многочлена $p_{\alpha,n}(t)$ являются действительными, простыми и находятся внутри интервала $(-1,1)$. Нули многочленов $p_{\alpha,n}(t)$ и $p_{\alpha,n+1}(t)$ перемежаются, т.е. между любыми соседними нулями $p_{\alpha,n+1}(t)$ имеется нуль $p_{\alpha,n}(t)$.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой 5.1. Не ограничивая общности рассуждений, считаем выполненным условие (5.1). Формулами (5.2) и (5.3) определяем функцию $\sigma(\tau)$ и меру $d\beta(t)$. По теореме 5.1 полиномы системы $\{T_{\sigma,\nu}(\tau)\}_{\nu=0}^{\infty}$ определяются формулами (5.4)–(5.6). По теореме 4.1 (при $a=1$, $b=0$) при каждом $n\in\mathbb{N}$ полиномы $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$ и $T_{\sigma,2n}(\tau)$ имеют по $2n$ простых нулей в промежутке $[-\pi,\pi)$, причем нули этих полиномов перемежаются. Точки $\pm\pi$ и 0 не являются нулями $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$, так как являются нулями $T_{\sigma,2n}(\tau)$ (см. (5.6)). В силу четности $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$ в интервалах $(-\pi,0)$ и $(0,\pi)$ находится по n простых нулей. Отсюда в силу (5.5) следует, что в интервале $(-1,1)$ многочлен $p_{\alpha,n}(t)$ имеет n простых нулей. Из (5.5)–(5.6) и теоремы 4.1 следует, что каждый интервал, концами которого являются соседние нули многочлена $(1-t^2)p_{\beta,n-1}(t)$, содержит один и только один нуль многочлена $p_{\alpha,n}(t)$.

Убедимся в том, что

$$(1-t^2)p_{\beta,n-1}(t) = c_{n,n+1}p_{\alpha,n+1}(t) + c_{n,n}p_{\alpha,n}(t) + c_{n,n-1}p_{\alpha,n-1}(t), \tag{6.1}$$

где $c_{n,n+1}$, $c_{n,n}$ и $c_{n,n-1}$ — некоторые константы. В самом деле, левая часть (6.1) есть многочлен степени $n+1$. Поэтому имеет место разложение

$$\left(1-t^2\right)p_{\beta,n-1}(t) = \sum_{\nu=0}^{n+1} c_{n,\nu}p_{\alpha,\nu}(t), \tag{6.2}$$

где

$$c_{n,\nu} := \int_{-1}^{1}(1-t^2)p_{\beta,n-1}(t)p_{\alpha,\nu}(t)\,d\alpha(t). \tag{6.3}$$

В силу (5.3) равенство (6.3) можно переписать в виде

$$c_{n,\nu} = \int_{-1}^{1} p_{\alpha,\nu}(t)p_{\beta,n-1}(t)\,d\beta(t). \tag{6.4}$$

При $\nu < n-1$ интеграл в правой части (6.4) равен нулю (в силу ортогональности по мере $d\beta(t)$ многочлена $p_{\beta,n-1}(t)$ многочленам меньшей степени). Поэтому (6.2) имеет вид (6.1).

Воспользуемся хорошо известным [1] рекуррентным соотношением

$$p_{\alpha,n+1}(t) = [(t-B_n)p_{\alpha,n}(t) - A_{n-1}p_{\alpha,n-1}(t)]/A_n. \tag{6.5}$$

Подставляя правую часть (6.5) вместо $p_{\beta,n-1}(t)$ в правую часть (6.1), получаем равенство

$$(1-t^2)p_{\beta,n-1}(t) = (a_n+b_nt)p_{\alpha,n}(t) + c_np_{\alpha,n-1}(t), \tag{6.6}$$

где a_n, b_n, и c_n — некоторые константы. Поскольку нули многочлена $p_{\alpha,n}(t)$ перемежаются с нулями левой части (6.6), то в нулях $p_{\alpha,n}(t)$ левая часть (6.6) не равна нулю. Значит, $c_n \neq 0$. В соседних нулях t' и t'' многочлена $p_{\alpha,n}(t)$ левая часть (6.6) имеет противоположные знаки. Значит, этим свойством обладает и $p_{\alpha,n-1}(t)$. Отсюда следует, что между t' и t'' имеется нуль многочлена $p_{\alpha,n-1}(t)$, т.е. доказана перемежаемость нулей многочленов $p_{\alpha,n+1}(t)$ и $p_{\alpha,n}(t)$ при $n \in \mathbb{N}$. Теорема 6.1 доказана.

З а м е ч а н и е 6.1. В случае когда $\alpha(t)$ имеет лишь $m+1$ ($m \in \mathbb{Z}_+$) точек роста, ортонормальная по мере $d\alpha(t)$ система многочленов конечна и имеет вид $p_{\alpha,0}(t), \dots, p_{\alpha,m}(t)$. Теорема 6.1 с доказательством верна и в этом случае.

Пользуясь теоремой 6.1, докажем теперь перемежаемость нулей многочленов $p_n(\alpha; A, B; t)$ и $p_{n+1}(\alpha; A, B; t)$ ($n \in \mathbb{N}$) в случае $-\infty \le A < B \le \infty$.

Теорема 6.2. *Теорема* 6.1 *остается справедливой при замене в ее формулировке отрезка* $[-1, 1]$ *промежутком* $[A, B]$, *где* $-\infty \le A < B \le \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае конечного $[A, B]$, положив $x = (B - A)^{-1}[2t - A - B]$, переведем отрезок $A \le x \le B$ в отрезок $-1 \le t \le 1$. При этом окажется, что многочлены $q_n(\alpha; t) := p_{\alpha,n}((B - A)^{-1}[2t - A - B])$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) ортогональны на отрезке $[-1, 1]$ по мере $d\alpha((B - A)^{-1}[2t - A - B])$. Графики многочленов $q_n(\alpha; t)$ и $q_{n+1}(\alpha; t)$ получаются из графиков многочленов $p_{\alpha,n}(t)$ и $p_{\alpha,n+1}(t)$ растяжением с одним и тем же коэффициентом вдоль оси абсцисс (а также — что для рассматриваемого вопроса не имеет никакого значения — растяжением и вдоль оси ординат, возможно, с разными коэффициентами). По теореме 6.1 при каждом $n \in \mathbb{N}$ все нули многочлена $q_n(\alpha; t)$ являются простыми и находятся внутри $(-1, 1)$, а нули многочленов $q_{n+1}(\alpha; t)$ и $q_n(\alpha; t)$ перемежаются. Следовательно, при каждом $n \in \mathbb{N}$ все нули многочлена $p_{\alpha,n}(x)$ являются простыми и находятся внутри (A, B), а нули многочленов $p_{\alpha,n+1}(x)$ и $p_{\alpha,n}(x)$ перемежаются. Таким образом, для конечного $[A, B]$ теорема 6.2 верна. Причем замечание 6.2 справедливо и в этом случае.

Пусть теперь хотя бы одно из чисел A и B является бесконечным. Введем в рассмотрение конечный отрезок $[A_N, B_N]$, где $N > 0$, $A_N = A$ при $A > -\infty$, $A_N = -N$ при $A = -\infty$, $B_N = N$ при $B < \infty$, $B_N = -N$ при $B = \infty$. Рассмотрим неубывающую функцию $\alpha_N(t)$, равную $\alpha(t)$ на $[A_N, B_N]$, $\alpha(A_N)$ при $t \le A_N$ и $\alpha(B_N)$ при $t \ge B_N$. Пусть $n \in \mathbb{N}$, а N достаточно велико. Тогда интервал (A_N, B_N) содержит $n+2$ точки роста функции $\alpha(t)$, так что многочлены $p_{\alpha_N,n}(t)$ и $p_{\alpha_N,n+1}(t)$ имеют смысл и для них верна теорема 6.2 (в соответствии со сделанным выше замечанием о ее справедливости при конечных A, B и для функции $\alpha(t)$, имеющей лишь конечное число точек роста).

По хорошо известной теореме нули многочлена $p_n(\alpha; A, B; t)$ ($n \in \mathbb{N}$) являются действительными и простыми (весьма простое доказательство этой теоремы приведено в монографии [1]). Пусть (λ_n, μ_n) — конечный интервал, содержащий все нули многочлена $p_n(\alpha; A, B; t)$. Рассмотрим моменты

$$\mu_{\alpha,n} := \int_{-\infty}^{\infty} t^n \, d\alpha(t), \qquad \mu_{\alpha_N,n} := \int_{-\infty}^{\infty} t^n \, d\alpha_N(t) \qquad (n \in \mathbb{Z}_+). \tag{6.7}$$

Поскольку на $[A_N, B_N]$ функции $\alpha(t)$ и $\alpha_N(t)$ совпадают, то из (6.7) вытекает неравенство

$$|\mu_{\alpha,n} - \mu_{\alpha_N,n}| \le \left| \int_{-\infty}^{A_N} t^n \, d\alpha(t) \right| + \left| \int_{B_N}^{\infty} t^n \, d\alpha(t) \right|. \tag{6.8}$$

При достаточно большом N

$$\left\{ \int_{-\infty}^{A_N} + \int_{B_N}^{\infty} \right\} |t|^n \, d\alpha(t) \le \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{A_N} t^{2n} \, d\alpha(t) + \frac{1}{N} \int_{B_N}^{\infty} t^{2n} \, d\alpha(t) \le \frac{\mu_{\alpha,2n}}{N}. \tag{6.9}$$

Из (6.8) и (6.9) следует, что при фиксированном n

$$\lim_{N\to\infty} \mu_{\alpha_N,n} = \mu_{\alpha,n}. \tag{6.10}$$

Пользуясь теоремой 4.2 и равенством (6.10), заключаем, что при фиксированных $n \in \mathbb{Z}_+$ и $[\lambda,\mu] \subset (-\infty,\infty)$ равномерно по $t \in [\lambda,\mu]$

$$\lim_{N\to\infty} p_{\alpha_N,n}(t) = p_{\alpha,n}(t). \tag{6.11}$$

Пусть $0<\varepsilon<1$. Будем считать, что все нули $x_{\alpha,n,1},\dots,x_{\alpha,n,n}$ многочлена $p_{\alpha,n}(t)$ вместе с их ε-окрестностями находятся внутри (λ,μ). При достаточно малом ε эти окрестности попарно не пересекаются. Так как все нули многочлена $p_{\alpha,n}(t)$ являются простыми, то в точках $x_{\alpha,n,k}\pm\varepsilon$ он принимает значения противоположных знаков. В силу (6.11) при достаточно большом N этим же свойством обладает и многочлен $p_{\alpha_N,n}(t)$. Следовательно, внутри $(x_{\alpha,n,k}-\varepsilon, x_{\alpha,n,k}+\varepsilon)$ многочлен $p_{\alpha_N,n}(t)$ имеет корень. Таким образом, k-й корень $p_{\alpha_N,n}(t)$ (обозначим его через $x_{\alpha_N,n,k}$) при $N\to\infty$ стремится к $x_{\alpha,n,k}$. Отсюда в силу перемежаемости нулей многочленов $p_{\alpha_N,n+1}(t)$ и $p_{\alpha_N,n}(t)$ вытекает перемежаемость нулей многочленов $p_{\alpha,n+1}(t)$ и $p_{\alpha,n}(t)$. Теорема 6.2 доказана.

7. Оценки расстояния между соседними нулями тригонометрического ортогонального полинома

Пользуясь леммой 3.1, для широкого класса мер $d\sigma(\tau)$ докажем существование констант C_1 и C_2 $(0<C_1<C_2)$, зависящих лишь от $d\sigma(\tau)$, таких, что расстояние между соседними нулями $T_{\sigma,n}(\tau)$ заключено между $C_1 n^{-1}$ и $C_2 n^{-1}$. При этом оценка сверху указанного расстояния будет получена в более общем случае, чем оценка снизу. В виде следствий получим как известные, так и новые результаты о нулях многочленов, ортогональных по мере на отрезке.

Теорема 7.1. *Если существует число $C_3(\sigma)>0$ такое, что $\forall n\in\mathbb{N}$*

$$\left\|\varphi_{\sigma,n}^{-2}(e^{iu})\left[\left|\varphi_{\sigma,0}(e^{iu})\right|^2+\ldots+\left|\varphi_{\sigma,n-1}(e^{iu})\right|^2\right]\right\|_\infty \ge C_3(\sigma)n, \tag{7.1}$$

то найдется число $C_4(\sigma)>0$ такое, что $\forall n\in\mathbb{N}$ расстояние между любыми соседними нулями $T_{\sigma,n}(\tau)$ не больше величины $C_4(\sigma)n^{-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $T_{\sigma,2n}(\tau)$ справедливость доказываемой теоремы немедленно следует из формул (4.5) и (4.9). По теореме 4.1 нули полиномов $T_{\sigma,2n}(\tau)$ и $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$ перемежаются. Поэтому теорема 7.1 верна и для $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$.

Теорема 7.2. *Условие* (7.1) *выполняется, если*

$$|\varphi_{\sigma,n+1}(0)|^2+|\varphi_{\sigma,n+2}(0)|^2+\ldots = O(n^{-1}) \qquad (n\to\infty). \tag{7.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся соотношением (см. [2], глава 1)

$$\varkappa_{\sigma,n}\varphi_{\sigma,n+1}(z) = \varkappa_{\sigma,n+1} z\varphi_{\sigma,n}(z) + \varphi_{\sigma,n+1}(0)\varphi^*_{\sigma,n}(z). \tag{7.3}$$

В силу (7.3) при $k\in\mathbb{N}$

$$\frac{\varphi_{\sigma,n+k}(z)}{\varphi_{\sigma,n}(z)} = \prod_{\nu=1}^{k}\left[\frac{\varkappa_{\sigma,n+\nu}}{\varkappa_{\sigma,n+\nu-1}}z + \frac{\varphi_{\sigma,n+\nu}(0)}{\varkappa_{\sigma,n+\nu-1}}\cdot\frac{\varphi^*_{\sigma,n+\nu-1}(z)}{\varphi_{\sigma,n+\nu-1}(z)}\right]. \tag{7.4}$$

Вследствие (7.2) при $n\to\infty$ $\varkappa_{\sigma,n}$ стремится к конечному положительному пределу, а $\varphi_{\sigma,n}(0)$ — к нулю (см. [2], глава 1). Согласно (1.2) на Γ_1 $|\varphi^*_{\sigma,n}(z)| = |\varphi_{\sigma,n}(z)|$. Поэтому из равенства

(7.4) следует, что при всех $k = 1, \dots, n$; $n \in \mathbb{N}$ и $u \in \mathbb{R}$ величина $|\varphi_{\sigma,n+k}(e^{iu})/|\varphi_{\sigma,2n}(e^{iu})|$ заключена между двумя положительными константами, зависящими лишь от σ. Отсюда следует справедливость неравенства (7.1).

В [11] найдены классы мер $d\sigma(\tau)$, удовлетворяющих (7.1) или (7.2). В [16] установлено следующее предложение.

Теорема 7.3. *Пусть $j \in \mathbb{Z}_+$; $d\sigma(\tau) := \varphi(\tau)d\tau$, причем вес φ имеет вид*

$$\varphi(\tau) := h(\tau)\prod_{\nu=1}^{m} w_\nu\left(|\sin\frac{\tau-\theta_\nu}{2}|\right) \qquad (\tau \in \mathbb{R},\ -\pi < \theta_1 < \ldots < \theta_m \le \pi),$$

где

$$w_\nu(u) := \prod_{\mu=1}^{l_\nu}[g_{\mu,\nu}(u)]^{\alpha(\mu,\nu)} \in L^1[0,1];$$

$m, l_\nu \in \mathbb{N}$; $\alpha(\mu,\nu) \in \mathbb{R}$; $g_{\mu,\nu}(u)$ *— вогнутые модули непрерывности* $(\mu = 1, \dots, l_\nu;\ \nu = 1, \dots, m)$;

$$\int_0^\theta w_\nu(\tau)\,d\tau = O(\theta w_\nu(\theta)) \qquad (\theta \to +0;\ \nu = 1, \dots, m);$$

функция h удовлетворяет условиям

$$0 \le h(\tau), \qquad h,\ \frac{1}{h} \in L^\infty,$$

а также одному из условий

$$\omega(h;\delta)_2 = O(\sqrt{\delta}) \qquad (\delta \to +0)$$

или

$$\omega(h;\tau)_\infty \tau^{-1} \in L^1[0,\pi].$$

Тогда найдутся положительные константы C_5 и C_6, зависящие лишь от j и φ, такие, что для всех $n > j$ и $\theta \in \mathbb{R}$

$$C_5 n^j g_n(\theta) \le |\varphi_n^{(j)}(e^{i\theta})| \le C_6 n^j g_n(\theta),$$

где

$$g_n(\theta) := g_n(\theta) = \left\{\prod_{\nu=1}^{m} w_\nu\left(\left|\sin\frac{\theta-\theta_\nu}{2}\right| + \frac{1}{n}\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

С помощью этой теоремы легко доказывается

Теорема 7.4. *В условиях теоремы 7.3 найдутся положительные константы $C_7(\sigma)$ и $C_8(\sigma)$ такие, что $\forall n \in \mathbb{N}$ расстояние между любыми двумя соседними нулями $T_{\sigma,n}(\tau)$ заключено между $C_7(\sigma)n^{-1}$ и $C_8(\sigma)n^{-1}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $T_{\sigma,2n}(\tau)$ доказываемая теорема легко следует из теоремы 7.3 в силу формул (4.5) и (4.9). Для $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$, пользуясь формулой (2.6) вместо (2.9), получим

$$T_{\sigma,2n-1}(\tau) = c_n\left|\varphi\sigma, 2n-1(e^{i\tau})\right|\cos\Gamma_{\sigma,2n-1}(\tau), \tag{7.5}$$

где

$$\Gamma_{\sigma,2n-1}(\tau) = \gamma_{\sigma,2n-1}(\tau) - (n-1)\tau. \tag{7.6}$$

В силу (7.6)

$$\Gamma_{\sigma,2n-1}(\tau) - \Gamma_{\sigma,2n-1}(\theta) = \frac{\tau-\theta}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{\theta}^{\tau} |\varphi_{\sigma,2n-1}(u)|^{-2} \sum_{\nu=0}^{2n-2} |\varphi_{\sigma,\nu}(e^{iu})|^2\, du. \tag{7.7}$$

Из (7.5), (7.7) и теоремы 7.3 следует справедливость доказываемой теоремы для $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$.

Из полученных результатов о нулях полиномов $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$ соответствующие результаты о нулях $p_{\alpha,n}(\cos\tau)$ легко получаются с помощью формулы (5.5) (см. теорему 5.1).

Поступила 20.01.05

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Сегё Г.** Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.
2. **Геронимус Я.Л.** Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке. М.: Физматгиз, 1958. 240 с.
3. **Szegö G.** On bi-orthogonal systems of trigonometric polynomials // Magy. tud. akad. Mat. kut. intéz. közl. 1963(1964). K. 8. № 3. Old. 255–273.
4. **Бадков В.М.** Приближение функций в равномерной метрике суммами Фурье по ортогональным полиномам // Тр. МИАН. 1980. Т. 145. С. 20–62.
5. **Бадков В.М.** Аппроксимативные свойства рядов Фурье по ортогональным полиномам // Успехи мат. наук.1978. Т. 33, вып. 4. С. 51–106.
6. **Badkov V.M.** Approximation of functions by means of Fourier sums with respect to the orthogonal polynomials // Approximation and Function Spaces. Amsterdam etc.: North-Holland, 1981. P. 51–67.
7. **Badkov V.M.** Estimations for the Lebesgue function and the remainder of the Fourier series with respect to orthogonal polynomials // Functions, series, operators. Amsterdam etc.: North-Holland, 1983. P. 165–181.
8. **Бадков В.М.** Равномерные асимптотические представления ортогональных полиномов // Тр. МИАН. 1983. Т. 164. С. 6–36.
9. **Бадков В.М.** О системах ортогональных многочленов, выражающихся в явном виде через многочлены Якоби // Мат. заметки. 1987. Т. 42, № 5. С. 650–659.
10. **Бадков В.М.** Двусторонние оценки функции Лебега и остатка ряда Фурье по ортогональным многочленам // Аппроксимация в конкретных и абстрактных банаховых пространствах. Свердловск: УНЦ АН СССР,1987. С. 31–45.
11. **Бадков В.М.** Асимптотические и экстремальные свойства ортогональных полиномов при наличии особенностей у веса // Тр. МИРАН. 1992. Т. 198. С. 41–88.
12. **Badkov V.M.** Orders of the weighted Lebesgue constants for Fourier sums with respect to orthogonal polynomials // Proc. Steklov Inst. Math. 2001. Suppl. 1. P. S48–S64.
13. **Badkov V.M.** Equiconvergence of Fourier Sums in Orthogonal Polynomials // Proc. Steklov Inst. Math. 2004. Suppl. 1. P. S101–S127.
14. **Бадков В.М.** Функция Кристоффеля и нули ортогональных полиномов // Соврем. проблемы теории функций и их прил.: Тез. докл. 10-й Сарат. зим. шк. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. С. 14–15.
15. **Бадков В.М.** Порядок расстояния между соседними нулями обобщенного полинома Якоби // Алгебра и анализ: Тез. докл. шк.-конф., посвящ. 100-летию со дня рождения Б.М. Гагаева (Казань, 16–22 июня 1997 г.). Казань: Изд-во Казан. мат. о-ва, 1997. С. 24.
16. **Бадков В.М.** Асимптотика многочленов второго рода и двусторонние поточечные оценки их производных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1992. Т. 1. С. 71–83.

Том 11 № 2 2005

УДК 519.652.3

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ЭРМИТОВОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ МНОГОЧЛЕНАМИ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ НА ТРЕУГОЛЬНИКЕ[1]

Н. В. Байдакова

Как правило, при построении треугольных конечных элементов типа Эрмита или Биркгофа в знаменателях оценок погрешности интерполяции присутствует синус наименьшего угла треугольника. Это ведет к необходимости наложения ограничений на триангуляцию области. За исключением публикуемой в настоящем сборнике работы Ю.Н. Субботина, автору не известны описания случаев, когда при интерполяции функции многочленом Эрмита или Биркгофа степени n наименьший угол отсутствовал бы в оценках всех производных до порядка n включительно. В данной работе предлагается новый способ эрмитовой интерполяции функции двух переменных на треугольнике многочленами третьей степени. При указанном способе в оценках погрешности любых производных функции до третьего порядка в знаменателях отсутствует синус наименьшего угла, что дает возможность ослабить требования к триангуляции.

Выбор интерполяционных условий (в частности, при построении подпространства конечных элементов) в некоторых случаях позволяет ослабить ограничения на триангуляцию исходной области. Часто используемым ограничением на триангуляцию является "условие наименьшего угла" или его аналог — ограничение снизу отношений диаметров множеств из триангуляции области к радиусам наибольших содержащихся в них шаров — в случае больших размерностей. Во многих оценках погрешности интерполяции для производных функции в знаменателе присутствуют синусы наименьших углов треугольников, составляющих разбиение исходной области. В качестве примера можно указать полученные в начале 70-х годов прошлого века оценки Женишека [1], Брамбла и Зламала [2], а также достаточно универсальные оценки сходимости Сьярле и Равьяра [3] для широкого класса многомерных областей (отметим, что в большинстве указанных здесь и ниже работ речь идет не только о полученных авторами оценках, но и о выборе ими способов интерполяции). Однако еще в 1957 году Сингом [4] (см. также ссылку в [5]), а затем — в 1976 году — Бабушкой и Азизом [6] на примерах многочленов малых степеней (первой и второй), не всегда с указанием точной зависимости, было отмечено, что "условие наименьшего угла" в некоторых случаях может быть заменено более слабым ограничением — ограничением на наибольший угол. Позднее для случая лагранжевой интерполяции многочленами произвольной степени на n-симплексе Ю.Н. Субботиным [7,8] были получены оценки, в ряде случаев неулучшаемые или неулучшаемые с точностью до постоянного множителя, не зависящего от функции и геометрических характеристик треугольника. При этом указанные оценки требуют, в частности, в случае $\mathbb{R}^2$, ограничения лишь на наибольший угол треугольника. Кроме того, им были получены неулучшаемые в этом же смысле оценки приближения функций и их производных некоторыми интерполяционными многочленами Эрмита и Биркгофа малых степеней на треугольниках и n-симплексах [7–10], позволяющие ослабить "условие наименьшего угла" или устанавливающие, что данное условие является существенным. Этому же направлению посвящены и работы Н.В. Латыповой [11] и автора [12], в которых найдены интерполяционные условия типа Биркгофа для построения многочленов степеней $4m+3$ и $4m+1$ на треугольнике, дающие возможность ослабить требования к триангуляции (но не избавляющие полностью от присутствия синуса наименьшего

[1]Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 05-01-00949), грантом Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (проект НШ-1347.2003.1) и целевой программой поддержки междисциплинарных проектов между УрО РАН и СО РАН.

угла в знаменателе в оценках погрешности для производных). Н.В. Латыповой был также рассмотрен ряд таких условий для многочленов 3-й степени [13].

Вопрос о возможности построения интерполяционного многочлена произвольной степени, обеспечивающего достаточно высокую гладкость результирующей кусочно полиномиальной функции (это возможно при интерполяции Эрмита или Биркгофа), а также позволяющего ослабить "условие наименьшего угла" или его аналога, остается открытым. Эта задача была предложена автору Ю.Н. Субботиным. В настоящей работе рассмотрен частный случай проблемы: предлагается способ эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике, в оценках погрешности которого наименьший угол всюду заменен на средний (наибольший). Предположение о том, что для третьей степени задача может быть решена положительно, причем решение неединственно, возникло в совместных обсуждениях с Ю.Н. Субботиным, предложившим свой способ интерполяции [14].

Прежде чем вводить обозначения, приведем теорему, которая понадобится нам для получения оценок погрешности интерполяции.

Теорема A [1]. *Пусть $g(u)$ — функция действительной переменной $u \in [0,d]$, непрерывная на $[0,d]$ и имеющая ограниченную константой M_{n+1} производную порядка $n+1$ на $(0,d)$. Пусть $u_0 = 0 < u_1 < \dots < u_r = d$ и значения функции и ее производных удовлетворяют неравенствам*

$$|g(u_i)| \le \zeta_i^0, \dots, \left|g^{(\alpha_i-1)}(u_i)\right| \le \zeta_i^{(\alpha_i-1)}, \qquad i = 0,\dots,r,$$

где $\zeta_i^{(k)}$ – константы, α_i — натуральные числа, удовлетворяющие условию

$$\alpha_0 + \dots + \alpha_r = n+1.$$

Пусть $\zeta = \max\limits_{i=0,\dots,r} \left|\max\limits_{k=0,\dots,\alpha_i-1} d^k \zeta_i^{(k)}\right|$. Тогда

$$\left|g^{(p)}(u)\right| \le K_{2p+1} d^{-p}\zeta + K_{2p+2} M d^{n+1-p},$$

$$u \in [0,d], \qquad p = 0,\dots,n+1,$$

где K_{2p+1}, K_{2p+2} — некоторые константы.

Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ — невырожденный треугольник; a_i $(i = 1,2,3)$ — вершины треугольника Δ. Внутренние углы треугольника при вершинах a_1, a_2, a_3 обозначим через α, β, θ соответственно. Пусть $0 < \alpha \le \beta \le \theta$. Разместим треугольник в прямоугольной системе координат так, чтобы его вершины имели координаты: $a_1 = (a+b, 0)$, $a_2 = (0,0)$, $a_3 = (a,h)$, где $a,b,h > 0$. При выбранном соотношении углов длина наибольшей стороны равна $a+b = H$ и, кроме того, $0 < a \le b$. Далее будет рассматриваться множество W^4M функций, непрерывных на Δ вместе со всеми своими частными производными до порядка 4 включительно, у которых все производные четвертого порядка ограничены по модулю константой M.

Через $P_3(x,y) = P_3(z) = P_3(f;z)$, где $z = (x,y)$, обозначим многочлен степени не выше 3 по совокупности переменных, удовлетворяющий следующим интерполяционным условиям (под степенью многочлена по совокупности переменных x и y понимается наибольшее из чисел $k+l$ для входящих в него мономов $x^k y^l$):

$$f(a_i) = P_3(a_i), \qquad i = 1,2,3; \tag{1}$$

$$\frac{\partial f(a_i)}{\partial x} = \frac{\partial P_3(a_i)}{\partial x}, \qquad i = 1,2,3; \tag{2}$$

$$\frac{\partial f(a_i)}{\partial y} = \frac{\partial P_3(a_i)}{\partial y}, \qquad i = 1,2,3; \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 f(a_2)}{\partial \xi \partial \tau} = \frac{\partial^2 P_3(a_2)}{\partial \xi \partial \tau}, \tag{4}$$

где ξ и τ — единичные векторы, направленные от a_2 к a_1 и от a_2 к a_3 соответственно. Наконец, пусть

$$e(x,y) = f(x,y) - P_3(x,y).$$

Теорема 1. *Существует константа K такая, что для любой функции $f \in W^4M$ и любой точки $(x,y) \in \Delta$ справедлива оценка*

$$\left|\frac{\partial^n e(x,y)}{\partial x^{n-j}\partial y^j}\right| \le KMH^{4-n}\frac{1}{\sin^j\beta}\,, \tag{5}$$

где $0 \le n \le 3$, $0 \le j \le n$; β — средний угол треугольника Δ.

Доказательство. Используя формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме Коши, получим разложение

$$\frac{\partial^n e(x,y)}{\partial x^{n-s}\partial y^s} = \sum_{i=s}^{3-n+s}\frac{1}{(i-s)!}y^{i-s}\sum_{k=0}^{3-n+s-i}\frac{\partial^{n-s+i+k}e(0,0)}{\partial x^{n-s+k}\partial y^i}\cdot\frac{x^k}{k!}$$

$$+\sum_{i=s}^{3-n+s}\frac{1}{(i-s)!}y^{i-s}\int_0^x\frac{(x-v)^{3-n+s-i}}{(3-n+s-i)!}\cdot\frac{\partial^4 e(v,0)}{\partial v^{4-i}\partial y^i}\,dv$$

$$+\int_0^y\frac{(y-t)^{3-n}}{(3-n)!}\cdot\frac{\partial^4 f(x,t)}{\partial x^{n-s}\partial t^{4-n+s}}\,dt\,. \tag{6}$$

Чтобы доказать (5), достаточно оценить $\frac{\partial^n e(0,0)}{\partial x^{n-j}\partial y^j}$, $0 \le n \le 3$, $0 \le j \le n$. Далее через R будем обозначать неотрицательные константы, необязательно равные, независящие от f и геометрических характеристик треугольника. Так как значение погрешности интерполяции $e(x,y)$ и ее первых производных в точке $a_2 = (0,0)$ по условиям (1)–(3) равно нулю, остается оценить производные второго и третьего порядков.

Лемма 1. *Для $j = 0,1,2$ справедлива оценка*

$$\left|\frac{\partial^2 e(0,0)}{\partial x^{2-j}\partial y^j}\right| \le RMH^2\frac{1}{\sin^j\beta}\,. \tag{7}$$

Доказательство. Рассматривая $e(x,0)$ на отрезке $[a_2,a_1]$ и используя формулы для оценки ошибки интерполяции в одномерном случае (см. [15] или теорему А для $\zeta = 0$), получим

$$\left|\frac{\partial^2 e(0,0)}{\partial x^2}\right| \le RMb^2.$$

Аналогично, рассматривая $e(x,y)$ вдоль отрезка $[a_2,a_3]$, будем иметь

$$\left|\frac{\partial^2 e(0,0)}{\partial \tau^2}\right| \le RM(a^2+h^2).$$

Кроме того, используем условие (4). Таким образом, представляя $\frac{\partial^2 e}{\partial\tau^2}$, $\frac{\partial^2 e}{\partial x\partial\tau}$, $\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}$ через производные по переменным x и y, получим систему уравнений относительно $\frac{\partial^2 e(0,0)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 e(0,0)}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 e(0,0)}{\partial y^2}$, расширенная матрица которой имеет следующий вид:

$$(D|B) = \begin{pmatrix} \cos^2\beta & 2\cos\beta\sin\beta & \sin^2\beta & B_1 \\ \cos\beta & \sin\beta & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix},$$

где через D обозначена основная матрица, через B — столбец свободных членов; при этом выполняются оценки
$$|B_1| \le RM(a^2+h^2), \quad |B_2| \le RMH^2.$$
Оценим величины $\frac{\partial^2 e(0,0)}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 e(0,0)}{\partial y^2}$ (оценка для $\frac{\partial^2 e(0,0)}{\partial x^2}$ уже получена), решая систему по формулам Крамера. Очевидно, $\det D = -\sin^3\beta$. Так как
$$\det D_{xy} \triangleq \begin{vmatrix} \cos^2\beta & B_1 & \sin^2\beta \\ \cos\beta & 0 & 0 \\ 1 & B_2 & 0 \end{vmatrix} = B_2 \cos\beta \sin^2\beta,$$
то
$$\left| \frac{\partial^2 e(0,0)}{\partial x \partial y} \right| = \left| \frac{\det D_{xy}}{\det D} \right| \le RMH^2 \frac{1}{\sin\beta}\,.$$
Наконец,
$$\det D_{y^2} \triangleq \begin{vmatrix} \cos^2\beta & 2\cos\beta\sin\beta & B_1 \\ \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ 1 & 0 & B_2 \end{vmatrix} = -B_1\sin\beta - B_2\cos^2\beta\sin\beta,$$
и поэтому
$$\left| \frac{\partial^2 e(0,0)}{\partial y^2} \right| \le \frac{|B_1|+|B_2|}{\sin^2\beta} \le RMH^2 \frac{1}{\sin^2\beta}\,.$$
Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для* $j=0,1,2,3$ *справедлива оценка*
$$\left| \frac{\partial^3 e(0,0)}{\partial x^{3-j} \partial y^j} \right| \le RMH \frac{1}{\sin^j\beta}\,. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сужение функции $\frac{\partial e(x,y)}{\partial y}$ на сторону $[a_2,a_1]$. Учитывая условие (3) для $i=1,2$ и то, что $\left|\frac{\partial^2 e(0,0)}{\partial x \partial y}\right| \le RM\frac{H^2}{\sin\beta}$ (согласно лемме 1), по теореме A получаем
$$\left| \frac{\partial^3 e(0,0)}{\partial x^2 \partial y} \right| \le RMH \frac{1}{\sin\beta}\,.$$
Аналогично, рассматривая сужение функции $\frac{\partial e(x,y)}{\partial x}$ на $[a_2,a_3]$ и используя (2) при $i=2,3$ и (3), получим оценку
$$\left| \frac{\partial^3 e(0,0)}{\partial x \partial \tau^2} \right| \le RMH \left(a^2+h^2\right)^{1/2}\,.$$
Кроме того, так же, как при доказательстве леммы 1, получаем оценки $\left|\frac{\partial^3 e(0,0)}{\partial x^3}\right| \le RMH$ и $\left|\frac{\partial^3 e(0,0)}{\partial \tau^3}\right| \le RM\left(a^2+h^2\right)^{1/2}$.

Представляя $\frac{\partial^3 e}{\partial \tau^3}$, $\frac{\partial^3 e}{\partial x \partial \tau^2}$, $\frac{\partial^3 e}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 e}{\partial x^3}$ через производные по переменным x и y, получим систему уравнений относительно $\frac{\partial^3 e(0,0)}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 e(0,0)}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 e(0,0)}{\partial x \partial y^2}$, $\frac{\partial^3 e(0,0)}{\partial y^3}$, расширенная матрица которой имеет вид
$$(D|B) = \begin{pmatrix} \cos^3\beta & 3\cos^2\beta\sin\beta & 3\cos\beta\sin^2\beta & \sin^3\beta & B_1 \\ \cos^2\beta & 2\cos\beta\sin\beta & \sin^2\beta & 0 & B_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & B_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & B_4 \end{pmatrix},$$

где $|B_1| \le RM(a^2+h^2)^{1/2}$, $|B_2| \le RM(a^2+h^2)^{1/2}$, $|B_3| \le RMH\frac{1}{\sin\beta}$, $|B_4| \le RMH$. Так как оценки величин $\frac{\partial^3 e(0,0)}{\partial x^3}$ и $\frac{\partial^3 e(0,0)}{\partial x^2 \partial y}$ уже получены, остается оценить $\frac{\partial^3 e(0,0)}{\partial x \partial y^2}$ и $\frac{\partial^3 e(0,0)}{\partial y^3}$, решая систему по формулам Крамера. Определитель основной матрицы равен $\det D = \sin^5\beta$. Кроме того,

$$\det D_{xy^2} \triangleq \begin{vmatrix} \cos^3\beta & 3\cos^2\beta\sin\beta & B_1 & \sin^3\beta \\ \cos^2\beta & 2\cos\beta\sin\beta & B_2 & 0 \\ 0 & 1 & B_3 & 0 \\ 1 & 0 & B_4 & 0 \end{vmatrix} = -\sin^3\beta\left(-B_2 + 2B_3\cos\beta\sin\beta + B_4\cos^2\beta\right),$$

откуда следует, что

$$\left|\frac{\partial^3 e(0,0)}{\partial x\partial y^2}\right| = \left|\frac{\det D_{xy^2}}{\det D}\right| \le RMH\frac{1}{\sin^2\beta}.$$

Наконец,

$$\det D_{y^3} \triangleq \begin{vmatrix} \cos^3\beta & 3\cos^2\beta\sin\beta & 3\cos\beta\sin^2\beta & B_1 \\ \cos^2\beta & 2\cos\beta\sin\beta & \sin^2\beta & B_2 \\ 0 & 1 & 0 & B_3 \\ 1 & 0 & 0 & B_4 \end{vmatrix}$$

$$= B_1\sin^2\beta - 3B_2\cos\beta\sin^2\beta + 3B_3\cos^2\beta\sin^3\beta + 2B_4\cos^3\beta\sin^2\beta,$$

и поэтому

$$\left|\frac{\partial^3 e(0,0)}{\partial y^3}\right| = \left|\frac{\det D_{y^3}}{\det D}\right| \le RMH\frac{1}{\sin^3\beta}.$$

Лемма 2 доказана.

Для завершения доказательства теоремы остается воспользоваться разложением (6) с учетом условий (1)–(3) для $i=2$ и оценок (7) и (8).

З а м е ч а н и е 1. Так как существуют положительные константы C_1 и C_2 такие, что $C_1\sin\theta \le \sin\beta \le C_2\sin\theta$ (где β — средний, а θ — наибольший углы треугольника Δ), то средний угол треугольника в правой части оценки (5) можно заменить на наибольший.

З а м е ч а н и е 2. Теорема 1 останется справедливой, если считать, что интерполяционное условие (4) задается в вершине при наибольшем угле. Чтобы убедиться в этом, достаточно повторить доказательство теоремы в предположении $\alpha \le \theta \le \beta$, разместив треугольник Δ в верхней полуплоскости таким образом, чтобы вершина a_2 совпала с точкой $(0,0)$, а сторона $[a_1, a_2]$ лежала на оси Ox.

Поступила 27.12.04

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ženišek A.** Interpolation polynomials on the triangle // Numer. Math. 1970. Vol 15. P. 283–296.
2. **Bramble J.H., Zlamal M.** Triangular elements in the finite element method // Math. Comp. 1970. Vol 24, № 112. P. 809–820.
3. **Ciarlet P.G., Raviart P.A.** General Lagrange and Hermite interpolation in R^n with applications to finite element methods // Arch. Rational Mech. Anal. 1972. Vol. 46, № 3. P. 177–199.
4. **Synge J.L.** The hypercircle in mathematical physics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1957.
5. **Zlamal M., Ženišek A.** Mathematical aspect of the finite element method // Technical, physical and mathematical principles of the finite element method / Ed. V. Kolar et al. Praha: Acad. VED. 1971. P. 15–39.
6. **Babuška I., Aziz A.K.** On the angle condition in the finite element method // SIAM J. Numer. Anal. 1976. Vol 13, № 2. P. 214–226.

7. **Субботин Ю.Н.** Многомерная кусочно полиномиальная интерполяция // Методы аппроксимации и интерполяции / Под ред. А.Ю.Кузнецова. Новосибирск: ВЦН. 1981. С. 148–153.
8. **Субботин Ю.Н.** Зависимость оценок многомерной кусочно полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик триангуляции // Тр. МИАН СССР. 1989. Т. 189. С. 117–137.
9. **Субботин Ю.Н.** Погрешность аппроксимации интерполяционными многочленами малых степеней на n-симплексах // Мат. заметки. 1990. Т. 48, вып. 4. С. 88–100.
10. **Субботин Ю.Н.** Зависимость оценок аппроксимации интерполяционными полиномами пятой степени от геометрических характеристик треугольника // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1992. Т. 2. С. 110–119.
11. **Latypova N.V.** Error estimates for approximation by polynomials of degree $4k+3$ on the triangle // Proc. Steklov Inst. Math. 2002. Suppl. 1. P. S190–S213.
12. **Baidakova N.V.** On some interpolation process by polynomials of degree $4m+1$ on the triangle // Rus. J. numer. anal. and math. modelling. 1999. Vol 14, № 2. P. 87–107.
13. **Латыпова Н.В.** Погрешность кусочно-кубической интерполяции на треугольнике // Вестн. Удмурт. ун-та. Сер. Математика. 2003. С. 3–10.
14. **Субботин Ю.Н.** Новый кубический элемент в МКЭ. (Настоящий сборник).
15. **Березин И.С., Жидков Н.П.** Методы вычислений. М.: Физматгиз, 1962. Т. 1.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 11 № 2 2005

УДК 519.6:519.85

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ, ОРИЕНТАЦИИ И СКОРОСТИ АВТОНОМНОГО АППАРАТА ПО ГЕОФИЗИЧЕСКОМУ ПОЛЮ[1]

В. И. Бердышев

Дана новая математическая модель навигации автономно управляемого аппарата для определения по геофизическому полю в целом и его фрагменту не только координат и ориентации, но и скорости аппарата в каждый момент времени. Уточняется понятие фрагмента поля в этой модели. В связи с задачей экономного хранения на борту информации о поле в целом даны необходимые условия на хранимую аппроксимирующую поле функцию из заданного класса, которая минимизирует ошибку навигации.

1. Навигационная модель

Задача навигации состоит в определении местоположения автономного летательного аппарата (ЛА) по информации о геофизическом поле заданного региона Q земной поверхности, хранимой на борту, и фрагменту поля, замеряемому аппаратом при движении.

Местоположение ЛА в каждый момент времени τ определяется тройкой t, a, v, где $t \in \mathbb{R}^3$ — центр масс аппарата, a — преобразование поворота исходной системы координат (XYZ) в локальную систему координат, жестко связанную с ЛА, v — величина скорости ЛА. Как известно, любое преобразование поворота является вращением вокруг некоторой оси, поэтому a можно задать тройкой углов (a_1, a_2, a_3), где a_1, a_2 определяют положение оси вращения, a_3 — угол поворота вокруг этой оси.

Геофизическое поле задается вектор-функцией $F = (F_1(u), F_2(u))$ $(u \in Q \subset \mathbb{R}^2)$, где $F_1(u)$ — высота земной поверхности над уровнем моря, $F_2(u) = \mathrm{Br}\,(u, F_1(u))$ — яркость точек земной поверхности региона Q.

В отличие от ранее предложенных моделей (см., например, [1–3]) в настоящей модели предполагается поиск не только t и a, но и величины скорости v. В связи с новой постановкой задачи навигации уточняется понятие фрагмента поля.

Автономный аппарат, находясь в некоторый момент времени в положении t^0, a^0, v^0, которое неизвестно или известно с погрешностью, имеет возможность уточнить свое местоположение, замеряя параметры поля (высоту и яркость) при движении по заранее заданной программной траектории. Пусть в системе (XYZ) двумя дифференцируемыми функциями $t(s), a(s)$ задана (программная) траектория

$$\Gamma = \{t(s) = (x(s), y(s), z(s))\}, \qquad A = \{a(s) = (a_1(s), a_2(s), a_3(s))\}, \tag{1.1}$$

где s — функция пройденного к моменту τ расстояния, подлежащая определению,

$$s = s(\tau), \qquad 0 \le \tau \le \tau_*, \qquad s(0) = 0, \qquad s(\tau_*) = s_* > 0, \qquad t(0) = 0,$$

$t(s) \in \mathbb{R}^3$, $a(s)$ — преобразование поворота, τ — время. Функция $s = s(\tau)$ также является дифференцируемой. Примером $a(s)$ может служить преобразование исходной системы в систему координат Френе, в которой касательный вектор, нормаль и бинормаль в точке $t(s)$ кривой Γ

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05–01–01092)

задают оси координат. Траектория (1.1) может быть составной частью заранее намеченной траектории от точки старта ЛА до цели. Далее аппарат продолжает движение из точки t^0, используя программную траекторию (1.1), и за время τ_* совершает движение

$$\left\{t^0 + a^0 t(s),\ a^0 \circ a(s),\ s = s^0(\tau),\quad 0 \le \tau \le \tau_*\right\}, \tag{1.2}$$

где $a^0 \circ a(s)$ — суперпозиция преобразований a^0 и $a(s)$. Точка t^0, преобразование поворота a^0, функция $s^0(\tau),\ 0 \le \tau \le \tau_*$, и, следовательно, величина скорости v известны с погрешностью и подлежат определению. Задача определения скорости по функции s^0 является корректной, поскольку, как правило, величина максимального ускорения ЛА конечна.

Итак, требуется найти тройку

$$w^0 = \{t^0, a^0, s^0(\cdot)\} = \{w_i^0\}_{i=1}^7,$$

т.е. реализовавшуюся траекторию (1.2).

Пусть задан конус лучей $\Delta = \{l\}$ (телесный, плоский или дискретный) с вершиной в начале системы координат (XYZ). Для точки $t \in \mathbb{R}^3$, расположенной над земной поверхностью области Q, луча $l \in \Delta$ и преобразования поворота a через $f = f_{t,a,l}$ обозначим точку из graph F_1, на которой достигается расстояние ($|\cdot|$ — евклидова норма на $\mathbb{R}^n$)

$$\rho_{t,a,l} = \rho\left(t, [t + al] \bigcap \mathrm{graph}\ F_1\right) = |t - f_{t,a,l}|.$$

Назовем фрагментом поля F, соответствующим тройке w^0, вектор-функцию

$$\varphi_{t^0,a^0}(l, s^0(\tau), F) = \varphi_{w^0}(l, F) = (\rho_{t,a,l}, \mathrm{Br}\, f_{t,a,l}), \qquad l \in \Delta, \qquad \tau \in [0, \tau_*], \tag{1.3}$$

где $t = t^0 + a^0 t(s),\ a = a^0 \circ a(s),\ s = s^0(\tau)$. При фиксированной w^0 фрагмент поля является функцией от $l \in \Delta$ и $\tau \in [0, \tau_*]$.

По фрагменту $\varphi_{w^0}(l, F)$ поля, снятому аппаратом на траектории (1.2), и информации о поле F в целом на Q, предстоит найти t^0, a^0 и функцию $s = s^0(\tau)$ $(0 \le \tau \le \tau_*)$. Область

$$h = h_t \times h_a \times h_s$$

поиска параметров t^0, a^0, s^0 определяется техническими характеристиками ЛА, точностью инерциальных систем навигации. Предполагается, что эта область компактна. Так, область h_s содержится в множестве монотонных дифференцируемых функций $s = s(\tau)$, удовлетворяющих условиям

$$s(0) = 0, \qquad s(\tau_*) = s_*, \qquad 0 < v_* \le \frac{d}{d\tau} s(\tau) \le v^* < \infty, \qquad 0 \le \tau \le \tau_*, \tag{1.4}$$

при некоторых $v_* < v^*$, которое компактно в чебышевской норме. В качестве h_s можно взять замкнутое конечномерное множество, например, множество многочленов или сплайнов, удовлетворяющих условию (1.4).

Пусть для вектор-функций с областью определения $\Delta \times [0, \tau_*]$ задана норма $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\Delta \times [0,\tau_*]}$. Задача навигации сводится к следующей задаче:

$$d(w^0, F) = \min_{w \in h} \|\varphi_{w^0}(l, F) - \varphi_w(l, F)\|, \tag{1.5}$$

где тройка $w = \{t, a, s(\cdot)\} = \{w_i\}_{i=1}^7$ указывает на то, что фрагмент $\varphi_w(l, F)$ снят с функции F на траектории $\{t + at(s),\ a \circ a(s),\ s = s(\tau),\ 0 \le \tau \le \tau_*\}$. В дальнейшем под $\|\cdot\|$ можно понимать среднеквадратическую норму для вектор-функций.

2. Аппроксимация геофизического поля

Для решения задачи (1.5) необходимо хранить на борту ЛА информацию о поле F всего региона Q. В случае ограничения на объем хранимой на борту информации целесообразно аппроксимировать функцию F функцией p простой структуры, определяемой небольшим числом параметров и поместить ее вместо F в бортовую память. Пусть задан линейный класс $\mathcal{P}$ аппроксимирующих функций и выбрана функция $p \in \mathcal{P}$. Тогда вместо (1.5) придется решать задачу

$$d(w^0, p) = \min_{w \in h} \|\varphi_{w^0}(l, F) - \varphi_w(l, p)\|, \tag{2.1}$$

что повлечет увеличение ошибки навигации. Ошибку навигации будем измерять в следующей норме $\|\!| \cdot |\!\|$:

$$|\!|\!| w - w^0 |\!|\!|^2 = \sum_{i=1}^{6} |w_i - w_i^0|^2 + \int\limits_0^{\tau_*} |s(\tau) - s^0(\tau)|^2 \, d\tau. \tag{2.2}$$

Ввиду непрерывности нормы отображение $p \mapsto \arg d(w^0, p)$ полунепрерывно сверху. Здесь предполагается, что класс $\mathcal{P}$ снабжен среднеквадратичной нормой.

Пусть $w = w(w^0, p)$ — одно из решений задачи (2.1), например, наиболее удаленное от w^0. В дальнейшем будем считать, что при фиксированном w^0 отображение

$$p \mapsto w(w^0, p) = \left(w_1(w^0, p), \ldots, w_6(w^0, p), w_7(\tau, w^0, p)\right), \qquad \tau \in [0, \tau_*], \tag{2.3}$$

из $\mathcal{P}$ в область h, однозначно. Здесь $w_7(\tau, w^0, p) = s(\tau, w^0, p)$. Обозначим

$$\mathcal{D}(p) = \max_{w^0 \in h} |\!|\!| w^0 - w(w^0, p) |\!|\!|^2 \tag{2.4}$$

и рассмотрим задачу

$$\inf\{\mathcal{D}(p) : \ p \in \mathcal{P}\} \tag{2.5}$$

поиска аппроксимирующей функции из класса $\mathcal{P}$, которая минимизирует наибольшую ошибку навигации. Наша цель — дать необходимое условие экстремума в этой задаче.

Сперва рассмотрим задачу (2.1). Если норма дифференцируема, то необходимое условие экстремума в задаче (2.1) по теореме Ферма можно выразить через частные производные функции

$$\|\varphi_w(l, p) - \varphi_{w^0}(l, F)\|_{\Delta \times [0, \tau_*]}.$$

Как известно (см., например, [4]), в случае гладкого нормированного пространства имеет место соотношение

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\|x + ay\| - \|x\|}{\alpha} = \frac{f_x(y)}{\|x\|} \qquad (\|y\| = 1), \tag{2.6}$$

где f_x — опорный функционал для нормы в точке x. Обозначим $\lambda = w_0$,

$$S(w_0, \ldots, w_7(\tau)) = \varphi_w(l, p + \lambda q) - \varphi_{w^0}(l, F) \qquad (p, q \in \mathcal{P})$$

при фиксированной тройке $\{t^0, a^0, s^0(\cdot)\}$. Выпишем достаточное условие дифференцируемости функции S по переменным w_i при условии дифференцируемости функций F, p, q. Это условие имеет вид (здесь θ_l — угол между $l \in \Delta$, и осью, направленной противоположно оси Z)

$$\max\left\{\frac{\partial F_1(u)}{\partial r} : \ u \in Q, \ r \in \mathbb{R}^2, \ |r| = 1\right\} < \min\left\{\operatorname{ctg} \theta_{a(l)} : \ l \in \Delta, \ t \in h_t, \ a \in h_a\right\} \tag{2.7}$$

для функции F и формулируется аналогичным образом для p, q. При его выполнении каждый луч $t + al$ $(l \in \Delta)$ пересекается с graph F_1 не более, чем в одной точке. Для приращений δw_i скалярных переменных w_i $(i = 0, \ldots, 6)$ и приращения

$$\delta w_7(\tau) = \delta s(\tau), \qquad 0 \le \tau \le \tau_*, \qquad \delta s(0) = \delta s(\tau_*) = 0, \qquad \int\limits_0^{\tau_*} |\delta s(\tau)|^2 \, d\tau = 1,$$

функции $s(\cdot)$ имеем

$$\left.\begin{array}{l} S(w_0, \ldots, w_i + \delta w_i, \ldots, w_7) = S(w_0, \ldots, w_7) + S_{w_i}(w_0, \ldots, w_7)\delta w_i + o(\delta w_i) \\ \delta w_i \to 0 \quad (i = 0, \ldots, 6), \\ S(w_0, \ldots, w_6, w_7 + \alpha \delta s(\cdot)) = S(w_0, \ldots, w_7) + S_{\delta s}(w_0, \ldots, w_7)\alpha + o(\alpha) \quad (\alpha \to +0) \end{array}\right\}, \tag{2.8}$$

где S_{w_i} — частные производные функции S по w_i $(i = 0, \ldots, 6)$,

$$S_{\delta s}(w_0, \ldots, w_7) = S_{\delta w_7}(w_0, \ldots, w_7) = \lim_{\alpha \to +0} \frac{S(w_0, \ldots, w_7 + \alpha \delta s(\cdot)) - S(w_0, \ldots, w_7)}{\alpha}$$

— производная по направлению δs функционала $S(w_0, \ldots, w_7 + \delta s(\cdot))$, заданного на пространстве

$$\delta h_s = \{\delta w_7 = \delta s(\cdot) : \ \delta s(0) = \delta s(\tau_*) = 0\}$$

непрерывных функций $\delta s(\tau)$, удовлетворяющих условию $\delta s(0) = \delta s(\tau_*) = 0$. Из (2.8), (2.6) следует, что

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial w_i}\|S\| = f_S(S_{w_i}) \quad (i = 0, \ldots, 6), \\ \frac{\partial}{\partial(\delta s)}\|S\| = f_S(S_{\delta s}) \end{array}\right\}, \tag{2.9}$$

где $\partial/\partial(\delta s)$ — производная в направлении δs, $|\delta s| = 1$, а f_S — опорный функционал в "точке" S для нормы $\|\cdot\|_{\Delta \times [0,\tau_*]}$. Поэтому при $w_0 = \lambda = 0$ получаем

Предложение 1. *Если $w = (w_1, \ldots, w_6, s(\cdot))$ доставляет минимум в задаче* (2.1), *то*

$$f_S(S_{w_i}) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, 6) \quad \text{и} \quad f_S(S_{\delta s}) = 0$$

для любого "направления" δs, $\delta s(0) = \delta s(\tau_*) = 0$.

Теперь рассмотрим задачу (2.5). Если отображение (2.3) $\mathcal{P} \to \mathbb{R}^6 \times L^2_{[0,\tau_*]}$ дифференцируемо по Гато в "точке" $p \in \mathcal{P}$, то его производная есть линейное отображение из $\mathcal{P}$ в $\mathbb{R}^6 \times L^2_{[0,\tau_*]}$. Коэффициенты этого отображения будем обозначать через γ_i $(i = 1, \ldots, 7)$:

$$q \mapsto \gamma = \{\gamma_i(q)\}_{i=1}^7 \qquad (q \in \mathcal{P}),$$

где

$$\gamma_i(q) = \gamma_i(p, q) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{w_i(w^0, p + \lambda q) - w_i(w^0, p)}{\lambda} \qquad (i = 1, \ldots, 6), \tag{2.10}$$

$$\gamma_7(\tau, q) = \gamma_7(\tau, p, q) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{s(\tau, w^0, p + \lambda q) - s(\tau, w^0, p)}{\lambda},$$

$$s(\tau, w^0, p) = w_7(\tau, w^0, p).$$

Обозначим

$$\Phi = \Phi(w_0, \ldots, w_7) = \|S(w_0, \ldots, w_7(\tau))\|_{\Delta \times [0,\tau_*]}.$$

Если норма $\|\cdot\|$ и функции $p, q \in \mathcal{P}$ дважды дифференцируемы, то частные производные

$$\Phi_i = \Phi_i(w_0, \ldots, w_7) = \frac{\partial}{\partial w_i}\Phi(w_0, \ldots, w_7) \qquad (i = 0, \ldots, 7)$$

в окрестности произвольной точки $(\overline{w}_0, \ldots, \overline{w}_7)$ представимы в виде

$$\Phi_i(w_0, \ldots, w_7) = \Phi_i(\overline{w}_0, \ldots, \overline{w}_7) + \sum_{j=0}^{7}[\Phi_{ij}(\overline{w}_0, \ldots, \overline{w}_7) + \varepsilon_{ij}]\delta w_j, \tag{2.11}$$

где $\delta w_j = w_j - \overline{w}_j$ и $\varepsilon_{ij} \to 0$ при $\delta w_j \to 0$. Здесь $\Phi_7, \Phi_{7i}, \Phi_{i7}$ $(i = 0, \ldots, 6)$ — линейные функционалы, а Φ_{77} — билинейный функционал на пространстве δh_s с нормой L_2. Для вычисления Φ_{ij} можно использовать (2.9).

Пусть $\overline{w}_0 = \lambda = 0$, а $\overline{w} = w(w^0, p)$ есть решение задачи (2.1), т.е. $(\overline{w}_0, \ldots, \overline{w}_7) = (0, w(w^0, p))$ минимизирует функцию Φ при $\lambda = 0$, а $(w_0, \ldots, w_7) = (\lambda, w(w^0, p + \lambda q))$ минимизирует Φ при $\lambda \neq 0$. Тогда по теореме Ферма

$$\Phi_i(\overline{w}_0, \ldots, \overline{w}_7) = 0, \qquad \Phi_i(w_0, \ldots, w_7) = 0 \qquad (i = 0, \ldots, 7)$$

и соотношение (2.11) принимает вид

$$\sum_{j=0}^{7}\left[\Phi_{ij}(0, w(w^0, p)) + \varepsilon_{ij}\right]\delta w_j = 0,$$

где $\delta w_0 = \lambda$, $\delta w_j = w_j(w^0, p + \lambda q) - w_j(w^0, p)$ $(j = 1, \ldots, 7)$. В силу непрерывности отображения (2.3) имеем $\delta w_j \to 0$ $(j = 1, \ldots, 7)$ при $\lambda \to 0$ и, значит, $\varepsilon_{ij} \to 0$ (см. (2.11)). Итак, для поиска величин γ_i, определенных в (2.10), мы имеем систему уравнений

$$\begin{gathered}
\lambda\Phi_{10} + \sum_{j=1}^{6}[\Phi_{1j} + \varepsilon_{1j}]\delta w_j + [\Phi_{17} + \varepsilon_{17}]\delta s = 0 \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
\lambda\Phi_{60} + \sum_{j=1}^{6}[\Phi_{6j} + \varepsilon_{6j}]\delta w_j + [\Phi_{67} + \varepsilon_{67}]\delta s = 0 \\
\lambda\Phi_{70} + \sum_{j=1}^{6}[\Phi_{7j} + \varepsilon_{7j}]\delta w_j + [\Phi_{77} + \varepsilon_{77}]\delta s = 0,
\end{gathered}$$

где $\Phi_{ij} = \Phi_{ij}(0, w(w^0, p))$ $(i, j = 0, \ldots, 7)$. После деления этих соотношений на $\lambda \neq 0$, перехода к пределу при $\lambda \to 0$, получим

$$\begin{gathered}
\Phi_{10} + \sum_{j=1}^{6}\Phi_{1j}\gamma_j + \Phi_{17}\gamma_7 = 0 \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
\Phi_{60} + \sum_{j=1}^{6}\Phi_{6j}\gamma_j + \Phi_{67}\gamma_7 = 0 \\
\Phi_{70} + \sum_{j=1}^{6}\Phi_{7j}\gamma_j + \Phi_{77}\gamma_7 = 0.
\end{gathered} \tag{2.12}$$

Пусть

$$B = \begin{vmatrix} \Phi_{11} & \cdots & \Phi_{16} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \Phi_{61} & \cdots & \Phi_{66} \end{vmatrix} \neq 0$$

и определители B_j^0, B_j^7 получены из B заменой j-го столбца столбцом, составленным из элементов $\Phi_{10}\cdots\Phi_{60}$ и $\Phi_{17}\cdots\Phi_{67}$ соответственно. Тогда из первых шести уравнений системы (2.12) получаем

$$\gamma_j = -\frac{1}{B}(B_j^0 + B_j^7\gamma_7) \qquad (i = 1, \dots, 6), \tag{2.13}$$

а из последнего уравнения системы (2.12) следует

$$\Phi_{70} - \frac{1}{B}\sum_{j=1}^{6} B_j^0 \Phi_{7j} = \frac{1}{B}\sum_{j=1}^{6}(B_j^7\gamma_7)\Phi_{7j} - \Phi_{77}\gamma_7, \tag{2.14}$$

где, как уже отмечалось, Φ_7, Φ_{7i} $(i = 0, \dots, 6)$ — линейные функционалы, Φ_{77} — билинейный функционал на пространстве δh_s.

Если множество $h_s = \{s(\tau):\ s(0) = 0,\ s(\tau_*) = s_*\}$ (см. (1.4)) является конечномерным множеством, например, множеством возрастающих многочленов степени $n+1$, то δs и γ_7 суть многочлены степени $n+1$, зануляющиеся в точках $0, \tau_*$. Обозначим

$$\delta s_k(\tau) = s_* \frac{\tau}{\tau_*}\left[1 - \left(\frac{\tau}{\tau_*}\right)^k\right] \qquad (k = 1, \dots, n).$$

Итак, доказана

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (2.7), *норма* $\|\cdot\|_{\Delta\times[0,\tau_*]}$ *и функции* $F, p, q \in \mathcal{P}$ *дважды дифференцируемы, а отображение* $p \mapsto w(w^0, p)$ *(см.* (2.3)*) дифференцируемо. Тогда величины* γ_i $(i = 1, \dots, 6)$ *и функция* $\gamma_7(\tau)$ *удовлетворяют соотношениям* (2.13), (2.14). *Если* h_s *является множеством многочленов степени* $n+1$, *то коэффициенты многочлена* $\gamma_7(\tau)$ *удовлетворяют системе уравнений*

$$\left[\Phi_{70} - \frac{1}{B}\sum_{j=1}^{6}(B_j^0\Phi_{71} + B_j^7\gamma_7\Phi_{7j}) + \Phi_{77}\gamma_7\right]\delta s_k = 0 \qquad (k = 1, \dots, n).$$

З а м е ч а н и е. Условия дифференцируемости отображения (2.3) могут быть получены посредством теории неявных функций. Рассмотрим частный случай задачи навигации. Пусть $F = F(x, y)$, $(x, y) \in Q$, — поле высот региона Q. Предполагается, что Q — выпуклое множество из $\mathbb{R}^2$ и его диаметр больше единицы, программная траектория Γ является прямолинейным отрезком $\Gamma = \{(x, 0, 1):\ 0 \le x \le 1\}$ и движение по ней осуществляется без изменения ориентации, при этом конус Δ состоит из единственного вертикального луча $l = \{(0, 0, z):\ z \le 0\}$. Для аппроксимирующей функции $p = p(x, y)$, $(x, y) \in Q$, из заданного пространства дважды дифференцируемых функций $\mathcal{P} = \{p = p(x, y)\}$ задача навигации в среднеквадратической норме имеет вид

$$\min_{X,Y}\int_0^1 [F(x,0) - p(x+X, Y)]^2\, dx$$

и ее решение $X = X(p)$, $Y = Y(p)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} \Psi_1(X, Y, p) &\overset{\text{def}}{=} \int_0^1 [F(x,0) - p(x+X, Y)]\frac{\partial p(x+X, Y)}{\partial x}\, dx = 0, \\ \Psi_2(X, Y, p) &\overset{\text{def}}{=} \int_0^1 [F(x,0) - p(x+X, Y)]\frac{\partial p(x+X, Y)}{\partial y}\, dx = 0. \end{aligned}\right\}$$

Пусть $X_0,\ Y_0,\ p_0 \in \mathcal{P}$ удовлетворяют этой системе. В соответствии с известной теоремой о неявной функции, в окрестности "точки" p_0 существует однозначное непрерывно дифференцируемое решение $X = X(p),\ Y = Y(p)$ задачи навигации, если функции $\Psi_1(X,Y,p),\ \Psi_2(X,Y,p)$ в некоторой окрестности "точки" (X_0, Y_0, p_0) непрерывны вместе с их частными производными первого порядка и

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial X}\Psi_1 & \frac{\partial}{\partial Y}\Psi_1 \\ \frac{\partial}{\partial X}\Psi_2 & \frac{\partial}{\partial Y}\Psi_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Необходимое условие на функцию $p \in \mathcal{P}$, реализующую точную нижнюю границу

$$\inf\{D(p):\ p \in \mathcal{P}\},$$

выражается через производную

$$\frac{\partial \mathcal{D}(p)}{\partial q} = \lim_{\lambda \to +0} \frac{\mathcal{D}(p+\lambda q) - \mathcal{D}(p)}{\lambda}$$

функционала $\mathcal{D}$ в "точке" $p \in \mathcal{P}$ по любому "направлению" $q \in \mathcal{P}$. В силу теоремы В.Ф. Демьянова (см. [5]) о дифференцировании функции максимума, для функционала (2.4) и нормы (2.2) имеет место формула

$$\frac{\partial \mathcal{D}(p)}{\partial q} = \max_{w^0 \in \arg \mathcal{D}(p)} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \sum_{i=1}^{6} \left[w_i^0 - w_i(w^0, p+\lambda q) \right]^2 + \int_0^{\tau_*} [s^0(\tau) - s(\tau, w^0, p+\lambda q)]^2 \, d\tau \right\}.$$

Из теоремы Ферма следует, что справедлива

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы* 1, *ошибка навигации измеряется в норме* (2.2) *и функция* $p \in \mathcal{P}$ *есть решение задачи* (2.5), *то для любой функции* $q \in \mathcal{P}$ *выполняется неравенство*

$$\max_{w^0 \in \arg \mathcal{D}(p)} \left\{ \sum_{i=1}^{6} \left[w_i^0 - w_i(w^0, p) \right] \gamma_i(p,q) + \int_0^{\tau_*} [s^0(\tau) - s(\tau, w^0, p)] \gamma_7(\tau, p, q) \, d\tau \right\} \leq 0,$$

где γ_i $(i = 1, \ldots, 7)$ *определяются из соотношений* (2.13), (2.14).

Автор благодарен В.Б. Костоусову за обсуждение навигационной модели. Поступила 15.04.05

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бердышев В.И., Петрак Л.В.** Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения // Екатеринбург: УрО РАН, 1999.
2. **Бердышев В.И.** Навигация по полю высот и его фрагменту // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2002. Том 9, № 1.
3. **Бердышев В.И.** Информативность траектории в задаче навигации по полю высот // Докл. РАН. 2004. Т. 397, № 3. С. 297–299.
4. **Diestel, J.** Geometry of Banach Spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1975.
5. **Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н.** Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.

Том 11 № 2 2005

УДК 517.518.86

НЕРАВЕНСТВО МАРКОВА–НИКОЛЬСКОГО ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ L_q, L_0 НА ОТРЕЗКЕ [1]

П. Ю. Глазырина

В работе найдена точная константа $M_{q,0}(n,k)$ в неравенстве Маркова–Никольского $\|P^{(k)}\|_q \le M_{q,0}(n,k)\|P\|_0$, $1\le q\le\infty$, для алгебраических многочленов степени n на отрезке.

1. Пусть $\mathcal{P}_n$ есть множество алгебраических многочленов степени не выше n с коэффициентами из поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел. В работе изучается точная константа $M_q(n,k)=M_{q,0}(n,k)$ в неравенстве

$$\|P^{(k)}\|_q \le M_q(n,k)\|P\|_0, \qquad P\in\mathcal{P}_n, \tag{1}$$

при $1\le k\le n,\ 1\le q\le\infty$. Здесь и в дальнейшем

$$\|P\|_\infty=\max_{t\in[-1,1]}|P(t)|, \qquad \|P\|_q=\left(\frac12\int_{-1}^{1}|P(t)|^q\,dt\right)^{1/q} \qquad (0<q<\infty),$$

$$\|P\|_0=\exp\left(\frac12\int_{-1}^{1}\ln|P(t)|\,dt\right).$$

Известно (см., например, [16]), что если для измеримой на промежутке $(-1,1)$ функции f величина $\|f\|_{\overline{q}}$ конечна для некоторого $\overline{q}\in(0,\infty]$, то $\|f\|_0=\lim\limits_{q\to+0}\|f\|_q$. Таким образом, (1) можно рассматривать как предельный случай при $p\to+0$ следующего неравенства

$$\|P^{(k)}\|_q \le M_{q,p}(n,k)\|P\|_p, \qquad P\in\mathcal{P}_n. \tag{2}$$

Неравенство (2) при различных значениях параметров содержит несколько хорошо известных экстремальных задач для многочленов. Так, в случае $k>0$ и $q=p$ (2) называют неравенством Маркова; при $k=0$, $q\ne p$ — неравенством разных метрик (неравенством Никольского), а в случае $k=n$ задача определения точной константы в (2) сводится к задаче о многочлене, наименее уклоняющемся от нуля в пространстве L_p. В настоящее время известен порядок роста величины $M_{q,p}(n,k)$ по n при всех фиксированных k и $0<q,\ p\le\infty$:

$$M_{q,p}(n,k)\asymp\begin{cases} n^{2k+2/p-2/q}, & \text{если } k>2/q-2/p,\\ n^k(\ln n)^{1/q-1/p}, & \text{если } k=2/q-2/p,\\ n^k, & \text{если } k<2/q-2/p.\end{cases} \tag{3}$$

Поведение точной константы в (2) для различных q,p и k изучали E. Hille, G. Szegö, J. D. Tamarkin [17], Н. К. Бари [3], А. Ф. Тиман [12, п. 4.9.6] и другие математики. И. К. Даугавет и С. З. Рафальсон в [4] установили соотношение (3) для всех $1\le q,\ p\le\infty$. Общий случай $0\le q,p\le\infty$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00233), Программы Государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1347.2003.1) и совместной российско-германской программы «Михаил Ломоносов».

следует из работы В. И. Иванова [7] (см. также [8]). С. В. Конягин [9] получил равномерные по n и k оценки $M_{q,p}(n,k)$ для $p \geq 1$ в неравенстве (2) с весами.

Точные значения величины $M_{q,p}(n,k)$ известны лишь в некоторых случаях. В следующей таблице приведены известные автору точные результаты для $0 < q,\ p \leq \infty$, а также результаты автора, относящиеся к случаю $p = 0$. Через $P_n(t;\alpha)$ обозначены ультрасферические многочлены, ортогональные на отрезке $[-1,1]$ с весом $(1-t^2)^\alpha$.

Т а б л и ц а

k	$q,\ p$	$M_{q,p}(n,k)$	Экстремальные многочлены	Авторы
$k=n$	$p=\infty$	$n!\,2^{n-1}$	$P_n(t;-1/2)$	П. Л. Чебышев [5]
$k=n$	$p=2$	$\dfrac{(2n+1)!!}{\sqrt{2n+1}}$	$P_n(t;0)$	
$k=n$	$p=1$	$n!\,2^n$	$P_n(t;1/2)$	А. Н. Коркин, Е. И. Золотарев [18]
$k=1$	$q=\infty$ $p=\infty$	n^2	$P_n(t;-1/2)$	А. А. Марков [10]
$1<k<n$	$q=\infty$ $p=\infty$	$\dfrac{\prod\limits_{\ell=0}^{k-1}(n^2-\ell^2)}{(2k-1)!!}$	$P_n(t;-1/2)$	В. А. Марков [11]
$k=1$	$1\leq q<\infty$ $p=\infty$	$\lVert P_n'(\cdot;-1/2)\rVert_q$	$P_n(t;-1/2)$	B. D. Bojanov [13]
$0\leq k<n$	$q=\infty$ $p=2$	$\dfrac{(2k+1)!!}{\sqrt{2k+1}}\dbinom{n+k+1}{n-k}$	$P_{\infty,2}(t;n,k)$ (α)	G. Labelle [19]
$1\leq k<n$	$q=2$ $p=2$	(β)		P. Dörfler [14], G. V. Milovanović [20]
$k=0$	$0<q\leq\infty$ $p=0$	$\max\limits_{z\in[0,1)}\dfrac{\lVert\cdot-z\rVert_{(n-k)q}^{n-k}}{\lVert\cdot-z\rVert_0^n}$	$(t-z^*)^n$ (γ)	П.Ю. Глазырина [15]
$1\leq k<n$	$1\leq q\leq\infty$ $p=0$			Теорема 1 данной работы
$1\leq k\leq n$	$q=p=0$	$\dfrac{n!\,e^k}{(n-k)!}$	t^n	П.Ю. Глазырина [6]

Прокомментируем три помеченные буквами α,β,γ клетки таблицы.

(α) Для экстремального многочлена представление $P_{\infty,2}(t;n,k) = \sum\limits_{\ell=k}^{n}(2\ell+1)\binom{\ell+k}{\ell-k}P_\ell(t;0)$ справедливо [19].

(β) Величина $M_{2,2}(n,k)$ выражена в [14], [20] в терминах наибольшего собственного значения некоторой матрицы.

(γ) Здесь $z^* = \arg\max\limits_{z\in[0,1)}\lVert t-z\rVert_{(n-k)q}^{n-k}/\lVert t-z\rVert_0^n$, в частности $z^*=0$ при $(n-k)^2q\leq k$.

На множестве тригонометрических полиномов на периоде (алгебраических многочленов на окружности) неравенства типа (2) также имеют богатую историю. Этой тематикой занимались Д. Джексон, С. М. Никольский, С. Б. Стечкин, Н. К. Бари, В. И. Иванов, В. М. Бадков, В. Ф. Бабенко, А. И. Козко и многие другие математики.

Аналогичная (1) задача для многочленов на единичной окружности решена В. В. Арестовым. В его работе [2] (см. также [1]) доказано, что для двух произвольных многочленов $Q(z) = \sum\limits_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} q_\ell\, z^\ell$, $P(z) = \sum\limits_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} p_\ell\, z^\ell$ и их композиции Сеге $QP(z) = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} q_\ell\, p_\ell\, z^\ell$ имеет место неравенство

$$\|QP(e^{it})\|_{q[0,2\pi]} \le \|Q(e^{it})\|_{q[0,2\pi]}\, \|P(e^{it})\|_{0[0,2\pi]}, \qquad 0 \le q \le \infty.$$

Если все n нулей фиксированного многочлена Q лежат в единичном круге $|z| \le 1$ или в множестве $|z| \ge 1$, то последнее неравенство точное по $P \in \mathcal{P}_n$. Рассмотрев конкретный многочлен $Q_k(z) = z^k(z+1)^{n-k} n!/(n-k)!$, имеющий все нули в замкнутом единичном круге и удовлетворяющий равенствам $Q_kP(z) = z^k P^{(k)}(z)$, $\|Q_kP(e^{it})\|_{q[0,2\pi]} = \|P^{(k)}(e^{it})\|_{q[0,2\pi]}$, получим неравенство Бернштейна в разных метриках

$$\|P^{(k)}(e^{it})\|_{q[0,2\pi]} \le M_{q[0,2\pi]}(n,k) \|P(e^{it})\|_{0[0,2\pi]}, \tag{4}$$

где $M_{q[0,2\pi]}(n,k) = \|Q_k(e^{it})\|_{q[0,2\pi]}$. Это неравенство обращается в равенство на многочленах вида $P(z) = c(z+\zeta)^n$, $c,\ \zeta \in \mathbb{C}$, $|\zeta| = 1$, и только на них. Для сравнения с теоремой 1 настоящей работы отметим, что экстремальные многочлены неравенства (4) не зависят от k и q.

Остановимся подробнее на необходимых в дальнейшем результатах из [6,15] о точных константах в неравенстве (1) в случае $p = 0$. При $q = 0$ и $1 \le k \le n$

$$M_0(n,k) = \frac{n!\, e^k}{(n-k)!}; \tag{5}$$

экстремальными в (1) являются многочлены $c\,t^n$, $c \in \mathbb{C}$, и только они. При $k = 0$ и $0 < q \le \infty$

$$M_q(n,0) = M_{nq}^n(1,0) = \max_{z \in (0,1)} \frac{\|t-z\|_{nq}^n}{\|t-z\|_0^n}, \tag{6}$$

где максимум достигается в единственной точке $z^* = z^*(n,q)$; экстремальными в (1) являются многочлены $c(t-z^*)^n$, $c(t+z^*)^n$, $c \in \mathbb{C}$, и только они.

Следующая теорема посвящена случаю $1 \le k \le n$, $1 \le q \le \infty$ и является основным результатом работы.

Теорема 1. *Пусть* $1 \le k \le n$ *и* $1 \le q \le \infty$. *Тогда*

$$M_q(n,k) = \max_{z \in [0,1)} \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{\|t-z\|_{(n-k)q}^{n-k}}{\|t-z\|_0^n};$$

максимум достигается в единственной точке z^*. *Более того, если* n, k *и* q *таковы, что* $(n-k)^2 q > k$, *то* $z^* = z_q(n,k) > 0$ *и экстремальные многочлены неравенства* (1) *имеют вид* $c(t-z^*)^n$, $c(t+z^*)^n$, $c \in \mathbb{C}$. *Если же* $(n-k)^2 q \le k$, *то* $z^* = 0$ *и единственный с точностью до постоянного множителя экстремальный многочлен есть* t^n; *в этом случае*

$$M_q(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{e^n}{((n-k)q+1)^{1/q}}.$$

2. Доказательству теоремы 1 предпошлем две леммы о свойствах функций $\|t-z\|_q$, $\|t-z\|_0$ переменной z на отрезке $[-1,1]$. Непосредственно вычисляя нормы и их производные, нетрудно получить следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $0 < q < \infty$, *тогда для* $z \in [-1,1]$ *справедливы равенства*

$$\|t-z\|_0 = \exp\left(\frac{1+z}{2}\ln(1+z) + \frac{1-z}{2}\ln(1-z) - 1\right), \qquad |z| \neq 1,$$

$$\|t-z\|_0' = \|t-z\|_0 \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right), \qquad |z| \neq 1, \tag{7}$$

$$\|t-z\|_q = \left(\frac{(1+z)^{q+1} + (1-z)^{q+1}}{2(q+1)}\right)^{1/q}, \tag{8}$$

$$\|t-z\|_q' = \frac{q+1}{q(2(q+1))^{1/q}} \cdot \frac{(1+z)^q - (1-z)^q}{\left((1+z)^{q+1} + (1-z)^{q+1}\right)^{1-1/q}}, \tag{9}$$

$$\|t-z\|_\infty = 1 + |z|.$$

Лемма 2. *Для* $1 \le q \le \infty$ *определим на отрезке* $[0,1]$ *функцию*

$$\psi_q(z) = \|t-z\|_q'.$$

Для этой функции

$$\psi_q'(z) = \|t-z\|_q'' \ge 0, \qquad z \in [0,1], \tag{10}$$

$$\psi_q''(z) = \|t-z\|_q''' \le 0, \qquad z \in [0,1). \tag{11}$$

Как следствие, функция $\psi_q(z)$ *выпукла (возможно, нестрого) вверх на* $[0,1]$.

Доказательство. При $1 \le q \le \infty$ для функционала $\|\cdot\|_q$ справедливо неравенство треугольника, в частности

$$\left\|t - \frac{z_1+z_2}{2}\right\|_q \le \frac{\|t-z_1\|_q + \|t-z_2\|_q}{2},$$

следовательно, функция $\|t-z\|_q$ выпукла вниз на отрезке $[0,1]$. Из соотношений (8), (9) леммы 1 вытекает, что функция $\|t-z\|_q$ дважды дифференцируема на $[0,1]$, поэтому $\|t-z\|_q'' = \psi_q'(z) \ge 0$, и тем самым (10) доказано.

Докажем (11). Два крайних случая $q=1$ и $q=\infty$ проверяются довольно легко. Действительно, по лемме 1

$$\psi_1(z) = z, \qquad \psi_\infty(z) = 1, \qquad \psi_1''(z) = \psi_\infty''(z) = 0.$$

Пусть теперь $1 < q < \infty$. Положим для краткости

$$s(z) = (1+z)^{q+1} + (1-z)^{q+1}, \qquad m(z) = (1+z)^q - (1-z)^q, \qquad C = \frac{q(2(q+1))^{1/q}}{q+1}.$$

Тогда по формуле (9)

$$\psi_q(z) = \frac{m(z)}{Cs(z)^{1-1/q}},$$

$$\psi_q'(z) = \frac{q\left(\left((1+z)^{q-1} + (1-z)^{q-1}\right)s(z)^{1-1/q} - m(z)(1-1/q)s(z)^{-1/q}(q+1)m(z)\right)}{Cs(z)^{2-2/q}},$$

$$\psi_q'(z) = \frac{q^2\left(\left((1+z)^{q-1} + (1-z)^{q-1}\right)s(z) - (q^2-1)\left((1+z)^q - (1-z)^q\right)^2\right.}{Cq\left((1+z)^{q+1} + (1-z)^{q+1}\right)^{2-1/q}}.$$

Сделаем замену переменных
$$z=\frac{x-1}{x+1},\qquad x\in[1,\infty),$$
и рассмотрим функцию
$$\varphi(x)=\psi_q'\left(\frac{x-1}{x+1}\right)Cq.$$
Поскольку $dz=2\,dx/(x+1)^2$, из неравенства $\varphi'(x)\le 0,\ x\in[1,\infty)$, следует $\psi_q''(z)\le 0,\ z\in[0,1)$. Поэтому займемся исследованием знака $\varphi'(x)$. Имеем
$$\begin{aligned}\varphi(x)\,&=\,\frac{q^2(1-z)^{2q}\left(x^{q-1}+1\right)(x^{q+1}+1)-(q^2-1)(1-z)^{2q}\left(x^q-1\right)^2}{(1-z)^{(q+1)(2-1/q)}(x^{q+1}+1)^{2-1/q}}\\&=\,\frac{q^2\left(x^{q-1}+1\right)(x^{q+1}+1)-(q^2-1)\left(x^q-1\right)^2}{(x^{q+1}+1)^{2-1/q}}(1+x)^{1-1/q}\\&=\,\frac{h(1+x)^{1-1/q}}{(x^{q+1}+1)^{2-1/q}},\end{aligned}$$
где $h=h(x)=q^2\left(x^{q-1}+1\right)(x^{q+1}+1)-(q^2-1)\left(x^q-1\right)^2$;
$$\begin{aligned}\varphi'(x)\,&=\,\frac{\left(h'(1+x)^{1-1/q}+h(1-1/q)(1+x)^{-1/q}\right)(x^{q+1}+1)^{2-1/q}}{(x^{q+1}+1)^{4-2/q}}\\&-\,\frac{h(1+x)^{1-1/q}(2-1/q)(x^{q+1}+1)^{1-1/q}(q+1)x^q}{(x^{q+1}+1)^{4-2/q}}.\end{aligned}$$

Знак $\varphi'(x)$ совпадает со знаком выражения
$$\begin{aligned}R(x)\,&=\,\left(qh'(1+x)+h(q-1)\right)(x^{q+1}+1)-(2q-1)(q+1)h(1+x)x^q\\&=qh'(1+x)(x^{q+1}+1)+h\left((q-1)(x^{q+1}+1)-(2q-1)(q+1)(1+x)x^q\right).\end{aligned}\tag{12}$$
Поэтому достаточно показать, что $R(x)\le 0$ при $x\in[1,\infty)$. Наша ближайшая цель — получить явный вид функции $R(x)$. Для этого сначала преобразуем выражение для $h(x)$ и найдем $h'(x)$:
$$\begin{aligned}h(x)\,&=\,q^2\left(x^{q-1}+1\right)(x^{q+1}+1)-(q^2-1)\left(x^q-1\right)^2\\&=q^2x^{2q}+q^2(x^{q+1}+x^{q-1})+q^2+(1-q^2)x^{2q}+(q^2-1)2x^q+1-q^2\\&=x^{2q}+q^2(x^{q+1}+x^{q-1})+(q^2-1)2x^q+1,\end{aligned}\tag{13}$$
$$h'(x)\,=\,x^{2q-1}2q+x^q(q^3+q^2)+x^{q-1}(2q^3-2q)+x^{q-2}(q^3-q^2).\tag{14}$$
Подставляя теперь (13), (14) в (12) и приводя подобные, получаем выражение для $R(x)$:
$$R(x)=-a_1(x^{3q}-1)-a_2(x^{2q+2}-x^{q-2})-a_3(x^{2q+1}-x^{q-1})-a_4(x^{2q}-x^q)-a_5(x^{2q-1}-x^{q+1}),$$
где
$$\begin{aligned}a_1&=q-1,\\a_2&=q^4-q^3,\\a_3&=3q^4-3q^2,\\a_4&=3q^4+3q^3-6q^2-3q+3=3(q^2+q-1)(q^2-1),\\a_5&=q^4+2q^3-3q^2.\end{aligned}$$

Нетрудно увидеть, что для $q > 1$ все a_i положительны. Далее, если $q \geq 2$, то $2q-1 \geq q+1$ и все разности $(x^{3q}-1)$, $(x^{2q+2}-x^{q-2})$, $(x^{2q+1}-x^{q-1})$, $(x^{2q}-x^{q})$, $(x^{2q-1}-x^{q+1})$ при $x \in [1,\infty)$ неотрицательные. Следовательно, в этом случае $R(x) \leq 0$.

Пусть теперь $1 < q < 2$. Зафиксируем некоторое $x > 1$ и рассмотрим многочлен

$$P(t) = -a_1 t^3 - \left(a_2 x^2 + a_3 x + a_4 + a_5 \frac{1}{x}\right) t^2 + \left(a_5 x + a_4 + a_3 \frac{1}{x} + a_2 \frac{1}{x^2}\right) t + a_1.$$

Заметим, что $P(x^q) = R(x)$, поэтому для завершения доказательства леммы достаточно показать, что $P(t) \leq 0$ при $t \in [1,\infty)$. Последовательность коэффициентов P имеет одну перемену знака между t^2 и t. Поэтому в силу правила Декарта многочлен $P(t)$ может иметь не более одного положительного нуля. Покажем, что $x^2 P(1) \leq 0$. Поскольку старший коэффициент P отрицательный, отсюда будет следовать, что $P(t) \leq 0$ для $t \in [1,\infty)$. Итак,

$$\begin{aligned} x^2 P(1) &= -(a_2 x^4 + a_3 x^3 + a_4 x^2 + a_5 x) + (a_5 x^3 + a_4 x^2 + a_3 x + a_2) \\ &= -a_2 x^4 + (a_5 - a_3) x^3 + (a_3 - a_5) x + a_2 \\ &= -(q^4 - q^3)(x^4 - 1) - 2(q^4 - q^3)(x^3 - x) \leq 0. \end{aligned}$$

Тем самым лемма полностью доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Для $n = 1$ или $k = n$ утверждение теоремы легко получается из равенства (5), поскольку в этих случаях константа $M_q(n,n)$ не зависит от q и совпадает с $M_0(n,n)$. Поэтому далее считаем, что $n \geq 2$ и $n - k \geq 1$.

Докажем сначала, что теорема справедлива на множестве $\mathcal{P}_n^1$ многочленов степени n с коэффициентом при t^n, равным единице. Доказательство проведем в несколько этапов.

а. Пусть P — произвольный многочлен из $\mathcal{P}_n^1$ с нулями $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ из $\mathbb{C}^n$. Для фиксированных k $(1 \leq k < n)$ и q $(1 \leq q \leq \infty)$ положим

$$M(P) = \frac{\|P^{(k)}\|_q}{\|P\|_0}, \qquad M^1 = \sup_{P \in \mathcal{P}_n^1} M(P).$$

В этом пункте мы построим некоторую функцию $F(P) = F(Z)$, позволяющую оценить величину $M(P)$, а значит, и M^1 сверху.

Обозначим через $\mathcal{N}$ множество чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$, а через $\mathcal{K}$ — множество размещений из $\mathcal{N}$ по $(n-k)$ элементов без повторений. Многочлен P и его k-ю производную можно представить следующим образом:

$$P(t) = \prod_{\ell \in \mathcal{N}} P_\ell(t), \qquad P_\ell(t) = t - z_\ell, \qquad P^{(k)}(t) = \sum_{K \in \mathcal{K}} \prod_{\ell \in K} P_\ell(t).$$

Отметим, что в последней сумме $n!/(n-k)!$ слагаемых, а в каждом из произведений $n-k$ сомножителей. Применяя к выражению для $P^{(k)}$ сначала неравенство треугольника, а затем неравенство Гельдера для $n-k$ сомножителей, получаем следующую цепочку соотношений:

$$\|P^{(k)}\|_q = \left\| \sum_{K \in \mathcal{K}} \prod_{\ell \in K} P_\ell \right\|_q \leq \sum_{K \in \mathcal{K}} \left\| \prod_{\ell \in K} P_\ell \right\|_q \leq \sum_{K \in \mathcal{K}} \prod_{\ell \in K} \|P_\ell\|_{\overline{q}}, \tag{15}$$

где $\overline{q} = (n-k)q$. Все неравенства здесь обращаются в равенства только на многочленах вида $P(t) = (t-z)^n$. Функционал $\|\cdot\|_0$ обладает свойством мультипликативности, поэтому $\|P\|_0 = \prod\limits_{\ell \in \mathcal{N}} \|P_\ell\|_0$. Отсюда и из (15) следует, что

$$M(P) = \frac{\|P^{(k)}\|_q}{\|P\|_0} \leq \frac{\sum\limits_{K \in \mathcal{K}} \prod\limits_{\ell \in K} \|P_\ell\|_{\overline{q}}}{\prod\limits_{\ell \in \mathcal{N}} \|P_\ell\|_0} = F(P), \tag{16}$$

$$M(P) = F(P) \;\Leftrightarrow\; P(t) = (t-z)^n. \tag{17}$$

Поскольку любой многочлен $P \in \mathcal{P}_n^1$ однозначно определяется своими нулями, то M и F можно рассматривать как функции нулей P, т. е. $M(P) = M(Z)$ и $F(P) = F(Z)$. Функции $\|t-z\|_q$, $\|t-z\|_0$ четные относительно вещественной и мнимой частей z, поэтому достаточно исследовать F на множестве D^n, $D = \{z : \operatorname{Re} z \ge 0, \operatorname{Im} z \ge 0\}$. Таким образом, получаем оценку

$$M^1 = \sup_{Z \in \mathbb{C}^n} M(Z) \le \sup_{Z \in \mathbb{C}^n} F(Z) = \sup_{Z \in D^n} F(Z). \tag{18}$$

b. Покажем, что множество D^n можно еще «сузить». Более точно, существует такое число $\theta \in (0,1)$, что

$$\sup_{Z \in D^n} F(Z) = \max_{Z \in [0,\theta]^n} F(Z), \qquad \text{и если } Z' \in D^n \backslash [0,\theta]^n, \qquad \text{то } F(Z') < \max_{Z \in [0,\theta]^n} F(Z). \tag{19}$$

Для обоснования этого утверждения возьмем

$$\theta = \arg\max_{z \in D} \frac{\|t-z\|_{\overline{q}}}{\|t-z\|_0}, \qquad \overline{q} = (n-k)q. \tag{20}$$

В силу (6) для каждого $\overline{q}$ такое θ существует; оно единственно и принадлежит промежутку $(0,1)$. Кроме того, для $z \in D \backslash [0,\theta]$ выполняется неравенство

$$\frac{\|t-z\|_{\overline{q}}}{\|t-z\|_0} < \frac{\|t-x\|_{\overline{q}}}{\|t-x\|_0}, \tag{21}$$

где $x = \min\{\operatorname{Re} z, \theta\}$. Допустим, что $Z = (z_1, \ldots, z_n) \in D^n \backslash [0,\theta]^n$. Поставим ей в соответствие точку $X = (x_1, \ldots, x_n) \in [0,\theta]^n$ с координатами $x_\ell = \min\{\operatorname{Re} z_\ell, \theta\}$ и покажем, что

$$F(Z) < F(X). \tag{22}$$

Запишем функцию F в виде

$$F(Z) = \prod_{\ell \in \mathcal{N}} \frac{\|t-z_\ell\|_{\overline{q}}}{\|t-z_\ell\|_0} \left(\sum_{K \in \mathcal{K}} \prod_{\ell \in \mathcal{N} \backslash K} \frac{1}{\|t-z_\ell\|_{\overline{q}}} \right). \tag{23}$$

Из (21) имеем неравенство

$$\frac{\|t-z_\ell\|_{\overline{q}}}{\|t-z_\ell\|_0} \le \frac{\|t-x_\ell\|_{\overline{q}}}{\|t-x_\ell\|_0}, \qquad 1 \le \ell \le n. \tag{24}$$

Далее, нетрудно убедиться, что функция $\|t-z_\ell\|_{\overline{q}}$ возрастает по $\operatorname{Re} z_\ell$ и $\operatorname{Im} z_\ell$, поэтому

$$\frac{1}{\|t-z_\ell\|_{\overline{q}}} \le \frac{1}{\|t-x_\ell\|_{\overline{q}}}. \tag{25}$$

Представление (23) и соотношения (24), (25) влекут (22) со знаком нестрогого неравенства. Но поскольку $Z \ne X$, то хотя бы для одного номера ℓ неравенства (24), (25) будут строгими. Отсюда вытекает (22). Остается заметить, что F непрерывна на компакте $[0,\theta]^n$, а значит, достигает на нем своей верхней грани, и соотношение (19) доказано.

c. Пусть $Z^* = (z_1^*, \ldots, z_n^*) \in [0,\theta]^n$ — точка максимума F. Докажем, что тогда все координаты Z^* равны. В этом пункте будет рассмотрен случай, когда все координаты Z^* отличны от нуля, т.е. $Z^* \in (0,\theta]^n$. Ясно, что Z^* является внутренней точкой максимума для области $(0,1)^n$. В этой области функция F дифференцируема, следовательно, все ее частные производные в точке Z^* обращаются в нуль. Выделим две переменные — не ограничивая общности, z_1, z_2 —

найдем F'_{z_1}, F'_{z_2} и докажем, что если они одновременно обращаются в нуль, то $z_1 = z_2$. Отсюда в силу симметричности F по $z_1, \ldots, z_n$ будет следовать, что все координаты Z^* равны.

Далее для краткости записи будем использовать обозначения

$$P_{\ell\overline{q}} = P_{\ell\overline{q}}(z_\ell) = \|P_\ell\|_{\overline{q}}, \qquad P_{\ell 0} = P_{\ell 0}(z_\ell) = \|P_\ell\|_0.$$

В этих обозначениях F принимает вид

$$F(z_1, \ldots, z_n) = \frac{\sum\limits_{K\in\mathcal{K}} \prod\limits_{\ell\in K} P_{\ell\overline{q}}}{\prod\limits_{\ell\in\mathcal{N}} P_{\ell 0}}.$$

Зафиксируем $z_3^*, \ldots, z_n^*$ и рассмотрим F как функцию двух переменных z_1 и z_2 в области $(0,1)^2$. Числитель и знаменатель F можно представить соответственно как

$$\sum_{K\in\mathcal{K}} \prod_{\ell\in K} P_{\ell\overline{q}} = \alpha(P_{1\overline{q}} + P_{2\overline{q}}) + \beta P_{1\overline{q}} P_{2\overline{q}} + \gamma \quad \text{и} \quad \prod_{\ell\in\mathcal{N}} P_{\ell 0} = P_{10} P_{20} \delta,$$

где $\alpha,\, \delta > 0$, $\beta,\, \gamma \geq 0$ и не зависят от z_1, z_2. Тогда

$$f(z_1,\, z_2) = F(z_1,\, z_2,\, z_3^*, \ldots, z_n^*) = \frac{\alpha(P_{1\overline{q}} + P_{2\overline{q}}) + \beta P_{1\overline{q}} P_{2\overline{q}} + \gamma}{P_{10} P_{20} \delta}.$$

Вычислим $f'_1 = f'_{z_1}$:

$$f'_1(z_1,\, z_2) = \frac{\left(\alpha P'_{1\overline{q}} + \beta P'_{1\overline{q}} P_{2\overline{q}}\right) P_{10} - \left(\alpha(P_{1d} + P_{2d}) + \beta P_{1d} P_{2d} + \gamma\right) P'_{10}}{P_{10}^2 P_{20} \delta}. \tag{26}$$

Заменяя P'_{10} по формуле (7) и приравнивая f'_1 к нулю, находим, что

$$(\alpha + \beta P_{2\overline{q}})\, P'_{1\overline{q}} - (\alpha(P_{1\overline{q}} + P_{2\overline{q}}) + \beta P_{1\overline{q}} P_{2\overline{q}} + \gamma)\, \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+z_1}{1-z_1}\right) = 0. \tag{27}$$

Аналогично, для f'_2:

$$(\alpha + \beta P_{1\overline{q}})\, P'_{2\overline{q}} - (\alpha(P_{1\overline{q}} + P_{2\overline{q}}) + \beta P_{1\overline{q}} P_{2\overline{q}} + \gamma)\, \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+z_2}{1-z_2}\right) = 0. \tag{28}$$

Деля (27) и (28) соответственно на $\ln\left(\frac{1+z_1}{1-z_1}\right)$ и $\ln\left(\frac{1+z_2}{1-z_2}\right)$ и вычитая одно из другого, получаем

$$(\alpha + \beta P_{2\overline{q}})\, P'_{1\overline{q}} \ln\left(\frac{1+z_2}{1-z_2}\right) = (\alpha + \beta P_{1\overline{q}})\, P'_{2\overline{q}} \ln\left(\frac{1+z_1}{1-z_1}\right). \tag{29}$$

Очевидно, последнее соотношение справедливо для $z_1 = z_2$. Докажем, что в других случаях равенство невозможно. Зафиксируем z_2 и посмотрим на левую и правую части (29) как на функции аргумента $z_1 = z$ на полуинтервале $[0, 1)$. Покажем, что по z_1 левая часть выпукла вверх (возможно, нестрого), а правая — строго выпукла вниз. Отсюда мы заключаем, что общих точек графиков этих функций (т. е. случаев равенства) может быть не более двух. Поскольку при $z_1 = 0$ обе функции равны 0, в интервале $(0, 1)$ может находиться только одна такая точка, а именно точка $z_1 = z_2$.

Рассмотрим сначала функцию в правой части

$$\varphi_r(z) = (\alpha + \beta\|t - z\|_{\overline{q}})\, P'_{2\overline{q}} \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

Для $\overline{q} \geq 1$ функция $\|t-z\|_{\overline{q}}$ является выпуклой вниз. Поскольку все величины α, β, $P'_{2\overline{q}}$ неотрицательны, функция $(\alpha+\beta\|t-z\|_{\overline{q}})\,P'_{2\overline{q}}$ тоже выпукла вниз. Проверим, что и функция $\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ выпукла вниз:

$$\left(\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right)'' = \left(\frac{2}{(1-z^2)}\right)' = \frac{4z}{(1-z^2)^2} > 0.$$

Значит, φ_r выпукла вниз как произведение двух неотрицательных неубывающих выпуклых вниз функций.

Левая часть (29) является произведением производной $P'_{1\overline{q}}(z) = \|t-z\|'_{\overline{q}}$ и положительной константы. По лемме 2 функция $\|t-z\|'_{\overline{q}}$ выпукла вверх, следовательно, левая часть также выпукла вверх. Тем самым для точек Z^*, принадлежащих $(0,\theta]^n$, утверждение доказано.

d. Рассмотрим теперь случай, когда $Z^* = (z_1^*,\ldots,z_n^*)$ имеет хотя бы одну нулевую координату, т.е. $Z^* \in [0,\theta]^n \backslash (0,\theta]^n$. Докажем, что тогда и все остальные координаты равны нулю. Предположим противное; без ограничения общности можно считать, что $z_1 = 0,\ z_2 = z^* > 0$. Зафиксируем остальные координаты $z_3^*,\ldots,z_n^*$ и рассмотрим функцию

$$f(z_1,\, z_2) = F(z_1,\, z_2,\, z_3^*,\ldots,z_n^*), \qquad (z_1,\, z_2) \in (-1,1)^2.$$

В наших предположениях f должна иметь максимум в точке $(0,z^*)$. Разберем отдельно случаи $q=\infty$ и $1 \leq q < \infty$.

Если $q=\infty$, то f по переменной z_1 непрерывна в нуле и имеет непрерывную правую производную. Поскольку $(0,z^*)$ является точкой максимума для f, должно выполняться неравенство

$$f'_1(+0,z^*) \leq 0. \tag{30}$$

Но знак $f'_1(+0,z^*)$ совпадает со знаком левой части выражения (27), которая в точке $(+0,z^*)$ принимает значение $\alpha+\beta P_{2\overline{q}} > 0$, что противоречит (30).

Для $1 \leq q < \infty$ функция f непрерывно дифференцируема в области $(-1,1)^2$, поэтому в точке $(0,z^*)$ должны выполняться соотношения

$$f'_1(0,z^*) = 0, \qquad f'_2(0,z^*) = 0, \tag{31}$$

$$f'_1(z_1,z^*) \leq 0 \ \text{ для малых } \ z_1 > 0. \tag{32}$$

Докажем, что если верно (31), то (32) не выполняется. С этой целью вновь обратимся к выражениям (27), (28), отвечающим за знаки $f'_1,\ f'_2$:

$$\varphi_1(z_1,z_2) \,=\, (\alpha+\beta P_{2\overline{q}})\,P'_{1\overline{q}} - (\alpha(P_{1\overline{q}}+P_{2\overline{q}}) + \beta P_{1\overline{q}}P_{2\overline{q}} + \gamma)\,\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z_1}{1-z_1}\right),$$

$$\varphi_2(z_1,z_2) \,=\, (\alpha+\beta P_{1\overline{q}})\,P'_{2\overline{q}} - (\alpha(P_{1\overline{q}}+P_{2\overline{q}}) + \beta P_{1\overline{q}}P_{2\overline{q}} + \gamma)\,\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z_2}{1-z_2}\right).$$

Перепишем (31), (32) следующим образом:

$$\varphi_1(0,z^*) = 0, \qquad \varphi_2(0,z^*) = 0, \tag{33}$$

$$\varphi_1(z_1,z^*) \leq 0 \ \text{ для малых } \ z_1 > 0. \tag{34}$$

Поскольку $\varphi_1(0,z^*) = 0$, то для получения противоречия с (34), а значит, и с (32) достаточно показать, что

$$\varphi'_1(0,z^*) > 0, \tag{35}$$

где $\varphi'_1(z_1,z^*) = \frac{\partial}{\partial z_1}\varphi_1(z_1,z^*)$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(z) = \left(\alpha + \frac{\beta}{z^*}\big((z^*-z)P_{2\overline{q}}(z^*) + zP_{1\overline{q}}(0)\big)\right)\|t-z\|'_{\overline{q}}$$

$$-\left(\alpha(P_{1\overline{q}}(0)+P_{2\overline{q}}(z^*))+\beta P_{1\overline{q}}(0)P_{2\overline{q}}(z^*)+\gamma\right)\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

Так как

$$\|t-z\|'_{\overline{q}}\Big|_{z=0}=0,\qquad \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\Big|_{z=0}=0,$$

$$\left(\alpha+\frac{\beta}{z^*}\left((z^*-z)P_{2\overline{q}}(z^*)+zP_{1\overline{q}}(0)\right)\right)\Big|_{z=0}=\left(\alpha+\beta P_{2\overline{q}}(z^*)\right),$$

то

$$\varphi(0)=\varphi_1(0,z^*)=0,\qquad \varphi(z^*)=\varphi_2(0,z^*)=0\qquad\text{и}\qquad \varphi'(0)=\varphi_1'(0,z^*). \tag{36}$$

Пусть доказано, что φ строго выпукла вверх на $[0,z^*]$. Тогда в силу равенств (36) она будет положительна на $(0,z^*)$ и для произвольной точки $z\in(0,z^*)$

$$\varphi_1'(0,z^*)=\varphi'(0)\geq\frac{\varphi(z)}{z}>0,$$

что влечет за собой (35). Убедимся, что φ строго выпукла вверх. По доказанному выше функция $\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ строго выпукла вниз. Следовательно, второе слагаемое φ строго выпукло вверх. Остается показать, что первое слагаемое

$$\sigma(z)=\left(\alpha+\frac{\beta}{z^*}\left((z^*-z)P_{2\overline{q}}(z^*)+zP_{1\overline{q}}(0)\right)\right)\|t-z\|'_{\overline{q}}$$

функции φ выпукло вверх. Для этого определим знак второй производной

$$\sigma''(z)=\left(\alpha+\frac{\beta}{z^*}\left((z^*-z)P_{2\overline{q}}(z^*)+zP_{1\overline{q}}(0)\right)\right)\|t-z\|'''_{\overline{q}}$$

$$+\,2\|t-z\|''_{\overline{q}}\frac{\beta}{z^*}\left(P_{1\overline{q}}(0)-P_{2\overline{q}}(z^*)\right).$$

Выражение $\alpha+\frac{\beta}{z^*}\left((z^*-z)P_{2\overline{q}}(z^*)+zP_{1\overline{q}}(0)\right)\geq 0$, так как это аффинная функция переменной z, которая в точках 0 и z^* принимает положительные значения $\alpha+\beta P_{2\overline{q}}(z^*)$ и $\alpha+\beta P_{1\overline{q}}(0)$. По лемме 2 $\|t-z\|'''_{\overline{q}}\leq 0$, $\|t-z\|''_{\overline{q}}\geq 0$ и, наконец, разность $P_{1\overline{q}}(0)-P_{2\overline{q}}(z^*)<0$, поэтому $\sigma''(z)\leq 0$.

e. Итак, мы доказали, что в области D^n ($D=\{z:\ \operatorname{Re}z\geq 0,\ \operatorname{Im}z\geq 0\}$) функция F достигает своей верхней грани. Если $Z^*=(z_1^*,\ldots,z_n^*)\in D^n$ — точка максимума F, то все координаты $z_\ell^*=z^*\in[0,\theta]$, где θ есть некоторое число из интервала $(0,1)$, определенное формулой (20). Кроме того, из (17) следует, что в этом случае

$$F(Z^*)=M(Z^*)=\frac{n!}{(n-k)!}\cdot\frac{\|t-z^*\|_{\overline{q}}^{n-k}}{\|t-z^*\|_0^n}.$$

Поэтому

$$M^1=\sup_{Z\in\mathbb{C}^n}M(Z)=\max_{z\in[0,\theta]}\frac{n!}{(n-k)!}\cdot\frac{\|t-z\|_{\overline{q}}^{n-k}}{\|t-z\|_0^n},\qquad \overline{q}=(n-k)q.$$

Исследуем функцию $\|t-z\|_{\overline{q}}^{n-k}/\|t-z\|_0^n$ на отрезке $[0,\theta]$. Докажем, что ее максимум достигается в единственной точке. С этой целью вычислим

$$\left(\frac{\|t-z\|_{\overline{q}}^{n-k}}{\|t-z\|_0^n}\right)'=\frac{(n-k)\|t-z\|_{\overline{q}}^{n-k-1}\|t-z\|'_{\overline{q}}-\|t-z\|_{\overline{q}}^{n-k}\frac{n}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}{\|t-z\|_0^n}.$$

Знак производной совпадает со знаком выражения

$$\mu(z)=(n-k)\|t-z\|'_{\overline{q}}-\|t-z\|_{\overline{q}}\frac{n}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

Повторяя рассуждения пункта **b**, заключаем, что на $[0,\theta]$ эта функция строго выпукла вверх.

В случае $\overline{q}=\infty$ $(q=\infty)$ $\mu(0)=n-k>0$, значит, $\mu(z)$ может менять знак не более одного раза, и $\|t-z\|_{\overline{q}}^{n-k}/\|t-z\|_0^n$ достигает максимума в единственной точке z^* из промежутка $(0,\theta]$. Если же $1\le\overline{q}<\infty$, то $\mu(0)=0$ и, применяя (8), (9), находим, что при $z\to+0$

$$\mu(z)\sim\left(\frac{(n-k)(\overline{q}+1)}{(\overline{q}+1)^{1/\overline{q}}}-\frac{n}{(\overline{q}+1)^{1/\overline{q}}}\right)z=\frac{(n-k)z}{\overline{q}+1}\left((n-k)(\overline{q}+1)-n\right).$$

Отсюда заключаем, что если $(n-k)(\overline{q}+1)-n=(n-k)^2q-k>0$, то при малых z функция $\mu(z)$ положительна и максимум достигается в единственной точке z^* из полуинтервала $(0,\theta]$. Если же $(n-k)^2q-k\le 0$, то в силу строгой выпуклости $\mu(z)$ всюду на $(0,\theta)$ отрицательна, следовательно, отношение $\|t-z\|_{\overline{q}}^{n-k}/\|t-z\|_0^n$ по z убывает, и наибольшее значение достигается в точке 0. С помощью леммы 1 нетрудно убедиться, что в этом случае

$$\frac{\|t-0\|_{\overline{q}}^{n-k}}{\|t-0\|_0^n}=\frac{e^n}{((n-k)q+1)^{1/q}}.$$

f. Для завершения доказательства теоремы остается показать, что точная степень экстремального многочлена равна n. Действительно, на каждом из множеств $\mathcal{P}_m^1$, $k\le m\le n$, максимум отношения $\|P_m^{(k)}\|_q/\|P_m\|_0$ достигается на многочленах вида $P_m(t)=(t-z)^m$. Поскольку функционал $\|\cdot\|_q$ возрастает по q, для $m<n$ имеем

$$\frac{m!}{(m-k)!}\cdot\frac{\|t-z\|_{(m-k)q}^{m-k}}{\|t-z\|_0^m}<\frac{m!}{(m-k)!}\cdot\frac{\|t-z\|_{(m-k)q}^{n-k}}{\|t-z\|_0^n}<\frac{n!}{(n-k)!}\cdot\frac{\|t-z\|_{(n-k)q}^{n-k}}{\|t-z\|_0^n}$$

и

$$\max_{z\in[0,1)}\frac{m!}{(m-k)!}\cdot\frac{\|t-z\|_{(m-k)q}^{m-k}}{\|t-z\|_0^m}<\max_{z\in[0,\theta]}\frac{n!}{(n-k)!}\cdot\frac{\|t-z\|_{(n-k)q}^{n-k}}{\|t-z\|_0^n}.$$

Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 1 следует, что при $(n-k)^2q>k$ производная отношения $\|t-z\|_{(n-k)q}^{n-k}/\|t-z\|_0^n$ на интервале $(0,1)$ обращается в нуль в единственной точке z^*, в которой это отношение достигает своего максимума. Вычисляя с помощью леммы 1 указанную производную, приравнивая ее к нулю и делая замену переменной $z=(x-1)/(x+1)$, $x>1$, получаем следующую переформулировку части теоремы 1, относящуюся к случаю $(n-k)^2q>k$.

Теорема 2. *Пусть $1\le k\le n$, $1\le q\le\infty$ и $(n-k)^2q>k$. Тогда относительно неравенства* (1) *справедливы следующие утверждения.*

(I) *В зависимости от значений параметра q для константы $M_q(n,k)$ имеют место формулы:*

(a) *если $1\le q<\infty$, то*

$$M_q(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}\frac{(1+x)^k}{2^k}\frac{e^n}{x^{nx/(x+1)}}\left(\frac{x^{(n-k)q}-1}{nq\ln x}\right)^{1/q},\tag{37}$$

где $x=x(q,n,k)$ — (единственный) корень уравнения

$$((n-k)q+1)(x^{(n-k)q}-1)(x+1)=nq(x^{(n-k)q+1}+1)\ln x,\qquad x>1;\tag{38}$$

(b) *если $q=\infty$, то*

$$M_\infty(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}\frac{e^k}{2^k}(1+x)^kx^{n-k},\tag{39}$$

где $x = x(\infty, n, k)$ — *(единственный) корень уравнения*

$$(n-k)(x+1) = nx\ln x, \qquad x > 1. \tag{40}$$

(II) *Для всех значений параметра* q, $1 \le q \le \infty$, *экстремальные многочлены имеют вид* $c(t-z^*)^n$, $c(t+z^*)^n$, $c \in \mathbb{C}$, *где*

$$z^* = z^*(q, n, k) = \frac{x(q, n, k) - 1}{x(q, n, k) + 1}.$$

Поступила 03.10.04

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арестов В. В.** Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1981. Т. 45, № 1. С. 3–22.
2. **Арестов В. В.** Интегральные неравенства для алгебраических многочленов на единичной окружности // Мат. заметки. 1990. Т. 48, № 4. С. 7–18.
3. **Бари Н. К.** Обобщение неравенств С. Н. Бернштейна и А. А Маркова // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18. С. 159–176.
4. **Даугавет И.К., Рафальсон С.З.** Некоторые неравенства типа Маркова–Никольского для алгебраических многочленов // Вестн. ЛГУ. Сер. Математика, механика и астрономия. 1972. № 1, вып. 1. С. 15–25.
5. **Чебышев П. Л.** Полн. собр. соч. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1947.
6. **Глазырина П. Ю.** Неравенство братьев Марковых в пространстве L_0 // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: Тез. докл. Всеросс. конф., 2–6 февр. 2004. Екатеринбург, 2004. С. 38–39.
7. **Иванов В. И.** Некоторые неравенства для тригонометрических многочленов и их производных в разных метриках // Мат. заметки. 1975. Т. 18, № 4. С. 489–498.
8. **Иванов В. И.** Некоторые экстремальные свойства полиномов и обратные неравенства теории приближения // Тр. МИАН. 1980. Т. 145. С. 79–110.
9. **Конягин С. В.** Оценки производных от многочленов // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243, № 5. С. 1116–1118.
10. **Марков А. А.** Об одном вопросе Д. И. Менделеева // Зап. Имп. Акад. наук (Санкт-Петербург). 1889. Т. 62. С. 1–24.
11. **Марков В. А.** О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке. СПб, 1892.
12. **Тиман А. Ф.** Теория приближения функций действительного переменного. М.: ГИФМЛ, 1960.
13. **Bojanov B. D.** An extension of the Markov inequality // J. Approx. Theory. 1982. Vol. 35, № 2. P. 181–190.
14. **Dörfler P.** New inequalities of Markov type // SIAM J. Math. Anal. 1987. Vol. 18. P. 490–494.
15. **Glazyrina P. Yu.** Limiting case of the inequality in various metrics for algebraic polynomials on an interval // East J. Approx. 2003. Vol. 9, № 1. P. 1–19.
16. **Hardy G. H., Littlewood J. E. and Polya G.** Inequalities. Cambridge. 1934.
17. **Hille E., Szegö G., Tamarkin J. D.** On some Generalizations of a Theorem of A. Markoff // Duke Math. J. 1937. Vol. 3. P. 729–739.
18. **Korkin A. N. and Zolotarev E. I.** Sur un certain minimum // Nouv. Ann. Math. Sér. 2. 1873. № 12. P. 337–355.
19. **Labelle G.** Concerning polynomials on the unit interval // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 20. P. 321–326.
20. **Milovanović G. V.** Various extremal problems of Markov's type for algebraic polynomials // Facta Univ. Ser. Math. Inform. 1987. № 2. P. 7–28.

Том 11 № 2 2005

УДК 517.5

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА КОНЯГИНА И $(\mathbf{C},\mathbf{L})$-КОНСТАНТЫ НИКОЛЬСКОГО[1]

Д. В. Горбачев

Рассматривается одна экстремальная задача для функций с малым носителем, поставленная С.В. Конягиным в связи с приложениями к теории чисел. Доказывается ее связь с экстремальными задачами о наилучших константах Никольского в неравенствах между C- и L-нормами для тригонометрических многочленов и целых функций экспоненциального типа. Получены новые оценки констант в рассматриваемых задачах.

1. Введение и основные результаты

Используются обозначения:

$$e(x) = \exp(2\pi i x); \qquad c(x) = \cos(2\pi x); \qquad s(x) = \sin(2\pi x);$$

$$j(x) = \int_0^1 c(xt)\,dt = \frac{s(x)}{2\pi x} \qquad (j(0) = 1); \qquad \operatorname{Si} x = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$$

— интегральный синус [1]; $\chi(x)$ — характеристическая функция отрезка $[-1,1]$ ($\chi(x) = 1$ при $|x| \le 1$ и $\chi(x) = 0$ в противном случае). Сформулируем экстремальные задачи, рассматриваемые в работе.

Пусть Φ — класс непрерывных четных функций $\varphi:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, обладающих свойствами:

(1) $\varphi(x) = 0$ при $|x| \ge 1$ (носитель функции φ сосредоточен на отрезке $[-1,1]$);

(2) $0 < \|\widehat{\varphi}\|_{L(\mathbb{R})} < \infty$.

Здесь

$$\widehat{\varphi}(z) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)e(zx)\ dx = 2\int_0^1 \varphi(x)c(zx)\ dx$$

— преобразование Фурье функции φ,

$$\|\widehat{\varphi}\|_{L(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(z)|\ dz$$

— норма функции $\widehat{\varphi}$ в $L(\mathbb{R})$.

Класс Φ не пуст и содержит, например, функцию

$$\varphi_0(x) = 4\pi c(x/4)\chi(x), \qquad \text{для которой} \qquad \widehat{\varphi}_0(z) = \frac{c(z)}{1/16 - z^2}. \tag{1.1}$$

З а д а ч а 1. Найти

$$L = \sup_{\varphi\in\Phi} \frac{\widehat{\varphi}(0)}{\|\widehat{\varphi}\|_{L(\mathbb{R})}}.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00647, и гранта Президента Российской Федерации № МК-1522.2004.1.

Эта экстремальная задача была поставлена С.В. Конягиным и возникла в работе [2] при нахождении асимптотического равенства при $h \to 0$ для величины $B(h)$, определяемой выражением

$$B(h) = \sup_{f \in K(h)} a_0 = \sup_{f \in K(h)} \int_{-h}^{h} f(x)\, dx,$$

где $0 < h \le 1/2$ и $K(h)$ — класс непрерывных четных 1-периодических функций f, обладающих свойствами:

(1) $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n c(nx)$, $a_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$;

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| = 1$;

(3) $f(x) = 0$ при $h \le |x| \le 1/2$ (носитель функции f на периоде $\mathbb{T} = (-1/2, 1/2]$ сосредоточен на отрезке $[-h, h]$).

Задача нахождения величины $B(h)$ (см. [2–5]) и ее варианты имеют важные приложения в аналитической теории чисел. В работе [2] доказано, что

$$B(h) = L\, h + O(h^2) \qquad (h \to 0)$$

и для константы L получены двусторонние оценки

$$1,07995\ldots < L < 1,17898. \tag{1.2}$$

Нижняя оценка доставляется функцией φ_0 из (1.1), а оценка сверху доказана на пути решения двойственной экстремальной задачи [2], упрощенный вариант которой далее используется для уточнения верхней границы константы L.

Основная цель работы состоит в доказательстве более сильных двусторонних оценок константы L и установлении связи задачи 1 с известными экстремальными задачами теории приближений (см. далее задачи 2, 3), имеющими приложения и в других областях математики.

Пусть T_n — множество действительных 1-периодических тригонометрических многочленов (т.м.) t порядка $n-1$:

$$t(x) = \sum_{\nu=-(n-1)}^{n-1} \widehat{t}(\nu) e(\nu x), \qquad \|t\|_{C(\mathbb{T})} = \max_{|x| \le 1/2} |t(x)|, \qquad \|t\|_{L(\mathbb{T})} = \int_{-1/2}^{1/2} |t(x)|\, dx.$$

З а д а ч а 2. Найти

$$c_n = \sup\Big\{\frac{\|t\|_{C(\mathbb{T})}}{\|t\|_{L(\mathbb{T})}} : t \in T_n,\ t \not\equiv 0\Big\}.$$

Эта экстремальная задача известна как задача о наилучшей константе Никольского в неравенстве между C- и L-нормами для т.м. [6, 7]. Константа c_n также равна [8, 9] наилучшему приближению

$$c_n = \inf_g \|D_n - g\|_{C(\mathbb{T})}$$

ядра Дирихле порядка $n-1$

$$D_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} c(kx) = \frac{s((n-\frac{1}{2})x)}{s(\frac{x}{2})}$$

ограниченными измеримыми функциями g с рядом Фурье $g(x) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} g_k c(kx)$, ортогональными т.м. из класса T_n.

Очевидно, что $c_1 = 1$. Нетрудно доказать, что
$$c_2 = \max_{t\ge 1} \frac{\pi(t+1)}{\pi + 2(\sqrt{t^2-1} - \arccos(1/t))} = \frac{\pi}{2} \max_{0\le x\le \pi/2} \frac{1+\sin x}{\cos x + x\sin x} = 2,12532\ldots$$

Другие точные значения константы c_n автору неизвестны. В работе [8] (см. также [9]) отмечено, что вычисление этих значений является весьма сложной задачей, и поэтому представляет интерес нахождение асимптотического равенства для c_n при $n\to\infty$.

С.Б. Стечкин (см. [8, 9]) доказал, что
$$c_n = c\,n + o(n) \qquad (n\to\infty)$$
с константой $c > 0$, не зависящей от n.

Двусторонние оценки константы c были получены Л.В. Тайковым [8]:
$$\frac{2}{\operatorname{Si}\pi} = 1,07995\ldots \le c \le \frac{4G}{\pi} = 1,16625\ldots, \tag{1.3}$$
где $G = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k/(2k+1)^2 = 0,91596\ldots$ — константа Каталана. Оценку снизу в (1.3) дают многочлены Рогозинского
$$R_n(x) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} c(\tfrac{k}{4n})\, e(kx) = \frac{s(\frac{1}{4n})c(nx)}{c(x) - c(\frac{1}{4n})},$$
а оценка сверху выводится из интерполяционной формулы М. Рисса [11].

Оценка снизу константы c была улучшена автором в работе [12]: $c \ge 1,08176$.

Обобщением задачи 2 является следующая задача для целых функций экспоненциального типа. Пусть $E(\sigma)$ — множество действительных на $\mathbb{R}$ целых функций f экспоненциального типа не большего $2\pi\sigma > 0$ ($|f(z)| \le A_\varepsilon e^{(2\pi\sigma+\varepsilon)|z|}$ $\forall\ \varepsilon > 0,\ z\in\mathbb{C}$). Обозначим $\|f\|_{C(\mathbb{R})} = \sup\limits_{z\in\mathbb{R}} |f(z)|$.

З а д а ч а 3. Найти
$$C(\sigma) = \sup\{\frac{\|f\|_{C(\mathbb{R})}}{\|f\|_{L(\mathbb{R})}} : f\in E(\sigma),\ 0 < \|f\|_{L(\mathbb{R})} < \infty\}.$$

Поскольку для функции $f\in E(\sigma)$ функция $g(z) = f(z/\sigma)\in E(1)$ и $\|f\|_{C(\mathbb{R})} = \|g\|_{C(\mathbb{R})}$, $\|f\|_{C(\mathbb{R})} = \sigma^{-1}\|g\|_{L(\mathbb{R})}$, то $C(\sigma) = C\sigma$, где $C = C(1)$. Поэтому достаточно решить задачу 3 для константы C, т.е. при $\sigma = 1$.

Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. *Справедливо равенство*
$$C = L.$$

Теорема 2. *Для* $n\in\mathbb{N}$
$$(n-1)\,L \le c_n \le n\,L.$$

В работе [10] установлено, что
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{c_{n+1}}{n} = c_2 = \frac{\pi}{2\xi} = 2.12532\ldots,$$
где $\xi = 0{,}73908\ldots$ — единственный корень уравнения $\cos t = t$. Из этого результата вытекает неравенство $c_n \le (n-1)c_2$ $(n = 2,3,\ldots)$, которое при $n\ge 3$ в силу (1.2) несколько слабее правого неравенства в формулировке теоремы 2.

Из теоремы 2 вытекает, что
$$c = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{n} = L.$$
Таким образом, из теорем 1, 2 следуют равенства
$$L = c = C. \tag{1.4}$$

Теорема 3. *Справедливы оценки*

$$1,08185\ldots \leq L \leq 1,09769\ldots$$

Из теоремы 3 и равенств (1.4) получаем более сильные оценки констант в задачах 2, 3. Функции и т.м., на которых достигаются оценки снизу, будут приведены в тексте доказательства теоремы 3 и в заключении.

2. Вспомогательные утверждения

Перед доказательством теорем 1, 2 приведем ряд вспомогательных утверждений, часть которых можно считать известными (см., например, [11]).

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$c_n = \sup_{t\in T_n^0} \frac{t(0)}{\|t\|_{L(\mathbb{T})}},$$

где T_n^0 — подмножество четных т.м. $t \in T_n$, $t \not\equiv 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $t \in T_n$ — произвольный т.м., $t \not\equiv 0$ и $\|t\|_{C(\mathbb{T})} = t(x_0)$. Рассмотрим четный т.м.

$$t_0(x) = \frac{t(x_0 - x) + t(x_0 + x)}{2} \in T_n^0.$$

Имеем

$$t_0(0) = t(x_0) = \|t\|_{C(\mathbb{T})}, \qquad \|t_0\|_{L(\mathbb{T})} \leq \frac{\|t(x_0 - x)\|_{L(\mathbb{T})} + \|t(x_0 + x)\|_{L(\mathbb{T})}}{2} = \|t\|_{L(\mathbb{T})}.$$

Следовательно,

$$\frac{\|t\|_{C(\mathbb{T})}}{\|t\|_{L(\mathbb{T})}} \leq \frac{t_0(0)}{\|t_0\|_{L(\mathbb{T})}},$$

а значит,

$$c_n \leq \sup_{t_0\in T_n^0} \frac{t_0(0)}{\|t_0\|_{L(\mathbb{T})}}.$$

Оценка снизу $c_n \geq \sup\limits_{t\in T_n^0} \frac{t(0)}{\|t\|_{L(\mathbb{T})}}$ вытекает из включения $T_n^0 \subset T_n$ и оценки $t(0) \leq \|t\|_{C(\mathbb{T})}$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$C = \sup_{f\in E^0} \frac{f(0)}{\|f\|_{L(\mathbb{R})}},$$

где E^0 — подмножество четных функций $f \in E(1)$, $0 < \|f\|_{L(\mathbb{R})} < \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы аналогично доказательству леммы 1.

Лемма 3. *Пусть $v(x) = (1 - |x|)\chi(x)$. Тогда*

$$\widehat{v}(z) = j^2(z/2), \tag{2.1}$$

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widehat{v}(z + \nu) = 1 \qquad (z \in \mathbb{R}). \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу четности функции v находим

$$\widehat{v}(z) = 2\int_0^1 v(x)c(zx)\,dx = \frac{2}{2\pi z}\left((1-x)s(zx)\Big|_0^1 + \int_0^1 s(zx)\,dx\right)$$

$$= \frac{2(1-c(z))}{(2\pi z)^2} = \frac{s^2(z/2)}{(2\pi z/2)^2} = j^2(z/2).$$

Для доказательства равенства (2.2) воспользуемся формулой суммирования Пуассона [13]

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(z+\nu) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} f(-\nu)e(\nu z),$$

или — для четных функций f —

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(z+\nu) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} f(\nu)e(\nu z) = f(0) + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} f(\nu)c(\nu z). \tag{2.3}$$

Везде в дальнейшем (2.3) будет применяться только к четным функциям f, которые имеют компактный носитель и удовлетворяют условию $\widehat{f}(z) = O(z^{-2})$ $(|z|\to\infty)$, т.е. когда эта формула справедлива.

Применим формулу (2.3) к функции v. С учетом (2.1) получаем

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widehat{v}(z+\nu) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} (1-|\nu|)\chi(\nu)e(\nu z) = 1 \qquad (z\in\mathbb{R}).$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть непрерывная четная функция удовлетворяет условиям*:

$$f(x) = 0 \quad (|x|\ge 1 + a/n,\ a\in\mathbb{Z}_+,\ n\in\mathbb{N}), \qquad \widehat{f}(z) = O(z^{-2}) \qquad (|z|\to\infty).$$

Тогда функция

$$\tau_n f(z) = n\sum_{z\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n(z+\nu))$$

является четным т.м. порядка $n+a-1$:

$$\tau_n f(z) = \sum_{\nu=-(n+a-1)}^{n+a-1} f(\nu/n)e(\nu z).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно применить формулу суммирования Пуассона (2.3) к функции $f_n(x) = f(x/n)$, для которой $\widehat{f_n}(z) = n\widehat{f}(nz)$.

Лемма 5. *Справедливы равенства*

$$E^0 = \{\widehat{\varphi}\colon\ \varphi\in\Phi\}, \qquad \Phi = \{\widehat{f}\colon\ f\in E^0\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f\in E^0$ — произвольная функция.

Тогда $\|f\|_{L_2(\mathbb{R})} = O(\|f\|_{L(\mathbb{R})}) < \infty$ [11], и функцию f по теореме Пэли–Винера [11, 13] можно представить в виде

$$f(z) = \int_{-1}^{1} \widehat{f}(x)c(zx)\,dx, \qquad \widehat{f}\in C[-1,1].$$

Значит, $\varphi = \widehat{f} \in \Phi$.

С другой стороны, если функция $\varphi \in \Phi$, то ее преобразование Фурье

$$\widehat{\varphi}(z) = 2\int\limits_0^1 \varphi(x)c(zx)\ dx$$

есть четная целая функция экспоненциального типа не большего 2π [11] и $0 < \|\widehat{\varphi}\|_{L(\mathbb{R})} < \infty$ по определению класса Φ. Значит, функция $\widehat{\varphi} \in E^0$.

Лемма доказана.

3. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1. Равенство $C = L$ вытекает из лемм 2, 5:

$$C = \sup_{f \in E^0} \frac{f(0)}{\|f\|_{L(\mathbb{R})}} = \sup_{\varphi \in \Phi} \frac{\widehat{\varphi}(0)}{\|\widehat{\varphi}\|_{L(\mathbb{R})}} = L.$$

Доказательство теоремы 2.

1. *Оценка сверху* $c_n \le nL$. Пусть $t \in T_n^0$ — произвольный четный т.м. Тогда

$$t(x) = \sum_{\nu=-(n-1)}^{n-1} \widehat{t}(\nu)c(\nu x), \qquad \widehat{t}(-\nu) = \widehat{t}(\nu).$$

Введем четную непрерывную кусочно-линейную функцию φ с вершинами в точках (x_ν, y_ν) $(\nu = -n, -n+1, \ldots, n)$, , где $x_\nu = \nu/n$, $y_\nu = \widehat{t}(\nu)$ $(\nu = -n+1, -n+2, \ldots, n-1)$, $y_{-n} = y_n = 0$, и равную нулю при $|x| \ge 1$.

Положим $\Delta y_\nu = y_{\nu+1} - y_\nu$. Тогда функцию φ можно представить в виде

$$\varphi(x) = y_\nu + \Delta y_\nu(nx - \nu) \quad (x_\nu \le x \le x_{\nu+1},\ \nu = -n, -n+1, \ldots, n-1), \quad \varphi(x) = 0 \quad (|x| \ge 1).$$

Найдем преобразование Фурье функции φ. Имеем

$$\widehat{\varphi}(z) = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(x)c(zx)\ dx = \sum_{\nu=-n}^{n-1} \int\limits_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} (y_\nu + \Delta y_\nu(nx-\nu))c(zx)\ dx.$$

Поскольку

$$\int\limits_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} c(zx)\ dx = \frac{s(x_{\nu+1}z) - s(x_\nu z)}{2\pi z}$$

и

$$\int\limits_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} (nx-\nu)c(zx)\ dx = \frac{1}{2\pi z}\left((nx-\nu)s(zx)\Big|_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} - n\int\limits_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} s(zx)\ dx\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi z}\left(s(x_{\nu+1}z) + n\,\frac{c(x_{\nu+1}z) - c(x_\nu z)}{2\pi z}\right) = \frac{s(x_{\nu+1}z)}{2\pi z} + n\,\frac{c(x_{\nu+1}z) - c(x_\nu z)}{(2\pi z)^2},$$

то, учитывая, что $y_{-n} = y_n = 0$, получаем

$$\widehat{\varphi}(z) = \sum_{\nu=-n}^{n-1}\Big[y_\nu\,\frac{s(x_{\nu+1}z) - s(x_\nu z)}{2\pi z} + \Delta y_\nu\left(\frac{s(x_{\nu+1}z)}{2\pi z} + n\,\frac{c(x_{\nu+1}z) - c(x_\nu z)}{(2\pi z)^2}\right)\Big]$$

$$= \sum_{\nu=-n}^{n-1} y_\nu \Big(-\frac{s(x_\nu z)}{2\pi z} - n\,\frac{c(x_{\nu+1}z) - c(x_\nu z)}{(2\pi z)^2} \Big) + \sum_{\nu=-n}^{n-1} y_{\nu+1} \Big(\frac{s(x_{\nu+1} z)}{2\pi z} + n\,\frac{c(x_{\nu+1}z) - c(x_\nu z)}{(2\pi z)^2} \Big)$$

$$= n \sum_{\nu=-(n-1)}^{n-1} y_\nu\, \frac{2c(x_\nu z) - c(x_{\nu-1} z) - c(x_{\nu+1} z)}{(2\pi z)^2}.$$

Из равенства

$$2c(x_\nu z) - c(x_{\nu-1} z) - c(x_{\nu+1} z) = 2c(x_\nu z)(1 - c(z/n)) = 4s^2\Big(\frac{z}{2n}\Big) c\Big(\frac{\nu z}{n}\Big) = \frac{(2\pi z)^2}{n^2}\, j^2\Big(\frac{z}{2n}\Big) c\Big(\frac{\nu z}{n}\Big)$$

окончательно находим, что

$$\widehat{\varphi}(z) = \frac{1}{n}\, j^2\Big(\frac{z}{2n}\Big) \sum_{\nu=-(n-1)}^{n-1} \widehat{t}(\nu) c\Big(\frac{\nu z}{n}\Big) = \frac{1}{n}\, j^2\Big(\frac{z}{2n}\Big) t\Big(\frac{z}{n}\Big). \tag{3.1}$$

Из (3.1) вытекает, что $\widehat{\varphi}(z) = O(z^{-2})$ ($|z| \to \infty$). Следовательно, $\|\widehat{\varphi}\|_{L(\mathbb{R})} < \infty$, и, учитывая определение функции φ, получаем, что $\varphi \in \Phi$.

Покажем, что $\|\widehat{\varphi}\|_{L(\mathbb{R})} = \|t\|_{L(\mathbb{T})}$. Действительно, используя лемму 3, находим

$$\|\widehat{\varphi}\|_{L(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(z)|\; dz = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \int_{n(\nu-1/2)}^{n(\nu+1/2)} |\widehat{\varphi}(z)|\; dz =$$

$$= n \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \int_{-1/2}^{1/2} |\widehat{\varphi}(n(z+\nu))|\; dz = \int_{-1/2}^{1/2} |t(z)| \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} j^2\Big(\frac{z+\nu}{2}\Big)\; dz$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} |t(z)| \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widehat{v}(z+\nu)\; dz = \int_{-1/2}^{1/2} |t(z)|\; dz = \|t\|_{L(\mathbb{T})}. \tag{3.2}$$

Таким образом, из (3.1) и (3.2) следует, что

$$\frac{t(0)}{\|t\|_{L(\mathbb{T})}} = \frac{n\widehat{\varphi}(0)}{\|\widehat{\varphi}\|_{L(\mathbb{R})}} \le nL,$$

а значит,

$$c_n \le nL.$$

2. *Оценка снизу* $(n-1)L \le c_n$. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\varphi \in \Phi$ — произвольная функция.

Положим $v_n(x) = nv(nx)$, где v — функция из леммы 3. Функция v_n имеет носителем отрезок $[-1/n, 1/n]$ ($v_n(x) = 0$ при $|x| \ge 1/n$), и ее преобразование Фурье равно $\widehat{v}_n(z) = \widehat{v}(z/n) = j^2(\frac{z}{2n})$.

Введем четную функцию ψ, являющуюся сверткой четных функций φ и v_n:

$$\psi(x) = (\varphi * v_n)(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-y) v_n(y)\; dy.$$

Поскольку $\varphi(x) = 0$ ($|x| \ge 1$) и $v_n(x) = 0$ ($|x| \ge 1/n$), то $\psi(x) = 0$ при $|x| \ge 1 + 1/n$.

Преобразование Фурье функции ψ равно произведению преобразований Фурье функций φ и v_n:

$$\widehat{\psi}(z) = \widehat{\varphi}(z)\widehat{v}_n(z) = j^2\left(\frac{z}{2n}\right) \widehat{\varphi}(z). \tag{3.3}$$

Отсюда, в частности, следует, что $\widehat{\psi}(z) = O(z^{-2})$ $\;(|z| \to \infty)$.

Таким образом, функция ψ является допустимой функцией в лемме 4. Следовательно, по этой лемме при $a = 1$ получаем, что функция

$$t(z) = \tau_n \psi(z) = n \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \widehat{\psi}(n(z+\nu)) \tag{3.4}$$

является четным т.м. порядка n из класса T^0_{n+1}.

Из соотношений (3.3) и (3.4), учитывая, что $j(0) = 1$, $j(\nu/2) = 0$ $(\nu \in \mathbb{Z},\ \nu \neq 0)$, получаем значение т.м. t в нуле:

$$t(0) = n \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} j^2(\nu/2) \widehat{\varphi}(n\nu) = n\widehat{\varphi}(0).$$

Оценим $\|t\|_{L(\mathbb{T})}$. Используя неравенство $|j(z)| \le 1$ $(z \in \mathbb{R})$, получаем

$$\|t\|_{L(\mathbb{T})} = \int\limits_{-1/2}^{1/2} |t(z)|\, dz = \int\limits_{-1/2}^{1/2} \Big| n \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \widehat{\psi}(n(z+\nu)) \Big|\, dz$$

$$\le n \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \int\limits_{-1/2}^{1/2} |\widehat{\psi}(n(z+\nu))|\, dz = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \int\limits_{n(\nu-1/2)}^{n(\nu+1/2)} |\widehat{\psi}(z)|\, dz = \int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}(z)|\, dz$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \Big| j^2\left(\frac{z}{2n}\right) \widehat{\varphi}(z) \Big|\, dz \le \int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(z)|\, dz = \|\widehat{\varphi}\|_{L(\mathbb{R})}.$$

Таким образом, $t(0) = n\widehat{\varphi}(0)$ и $\|t\|_{L(\mathbb{T})} \le \|\widehat{\varphi}\|_{L(\mathbb{R})}$. Следовательно, учитывая, что $t \in T^0_{n+1}$, находим

$$c_{n+1} \ge \frac{t(0)}{\|t\|_{L(\mathbb{T})}} \ge \frac{n\widehat{\varphi}(0)}{\|\widehat{\varphi}\|_{L(\mathbb{R})}} \Longrightarrow c_{n+1} \ge nL.$$

Теорема доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3. Для оценки снизу развивается подход работы [12], а для оценки сверху — подход работы [2].

Пусть $q_k = k/2 + 1/4$ $(k \in \mathbb{Z})$ — нули 1-периодического косинуса $c(x)$, $\;c(q_k) = 0$, $s(q_k) = (-1)^k$. Для нуля $q = q_k$ введем четную функцию

$$\sigma_q(x) = \frac{\pi}{q}\, s(q(1-|x|))\chi(x) = \frac{\pi s(q)}{q}\, c(qx)\chi(x), \tag{3.5}$$

имеющую преобразование Фурье

$$\widehat{\sigma}_q(z) = \frac{2\pi}{q} \int\limits_0^1 s(q(1-x))c(zx)\, dx = \frac{\pi}{q} \int\limits_0^1 (s(q-(q-z)x) + s(q-(q+z)x))\, dx$$

$$= \frac{\pi}{q} \left(\frac{c(q-(q-z)x)}{2\pi(q-z)}\Big|_0^1 + \frac{c(q-(q+z)x)}{2\pi(q+z)}\Big|_0^1 \right) = \frac{c(z)-c(q)}{2q} \left(\frac{1}{q-z} + \frac{1}{q+z} \right) = \frac{c(z)}{q^2-z^2}, \tag{3.6}$$

и функцию

$$\tau_q(t) = q^2 \int\limits_0^t \frac{c(z)}{q^2-z^2}\, dz = \frac{q}{2} \left(\int\limits_0^t \frac{c(z)}{q-z}\, dz + \int\limits_0^t \frac{c(z)}{q+z}\, dz \right)$$

$$= \frac{q}{2} \left(\int\limits_{q-t}^{q} \frac{c(q-z)}{z}\, dz + \int\limits_{q}^{q+t} \frac{c(z-q)}{z}\, dz \right) = \frac{qs(q)}{2} \left(\int\limits_{q-t}^{q} \frac{s(z)}{z}\, dz + \int\limits_{q}^{q+t} \frac{s(z)}{z}\, dz \right)$$

$$= \frac{qs(q)}{2}\,(\mathrm{Si}\,(2\pi(q+t)) - \mathrm{Si}\,(2\pi(q-t))). \tag{3.7}$$

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\zeta = (z_1, z_2, \ldots, z_m) \in \mathbb{R}^m$ — произвольный вектор, координаты z_i которого удовлетворяют неравенствам

$$|z_i - q_i| < 1/4 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{3.8}$$

Множество всех таких векторов обозначим через Z_m. Для $\zeta \in Z_m$ положим

$$\rho = \rho(\zeta) = (4S)^{-1}, \tag{3.9}$$

$$S = S(\zeta) = Y(q_0) + \sum_{i=1}^{m} (-1)^i (Y(q_i) - Y(z_i)), \qquad Y(t) = Y(t, \zeta) = \sum_{i=0}^{m} \frac{a_i}{b_i}\,\tau_{q_i}(t), \tag{3.10}$$

$$a_i = a_i(\zeta) = \prod_{j=1}^{m} \Bigl(1 - \frac{q_i^2}{z_j^2}\Bigr), \qquad b_i = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{m} \Bigl(1 - \frac{q_i^2}{q_j^2}\Bigr) \qquad (i = 0, 1, \ldots, m), \tag{3.11}$$

$$\alpha_i = \alpha_i(\zeta) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{m} (z_j^2 - q_i^2)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{m} (q_j^2 - q_i^2)}, \qquad \omega(z) = \omega(z, \zeta) = \frac{1}{q_0^2 - z^2} \prod_{j=1}^{m} \frac{z_j^2 - z^2}{q_j^2 - z^2}. \tag{3.12}$$

Лемма 6. *Для произвольного вектора $\zeta \in Z_m$ (3.8) справедлива оценка снизу*

$$L \geq \rho(\zeta) = \frac{\widehat{\varphi}_m(0)}{\|\widehat{\varphi}_m\|_{L(\mathbb{R})}},$$

где функция $\varphi_m \in \Phi$ и ее преобразование Фурье $\widehat{\varphi}_m$ определяются равенствами

$$\varphi_m(x) = \varphi_m(x, \zeta) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \sigma_{q_i}(x), \qquad \widehat{\varphi}_m(z) = \widehat{\varphi}_m(z, \zeta) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i\,\frac{c(z)}{q_i^2 - z^2} = \omega(z) c(z). \tag{3.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $z \in \mathbb{R}$, $\zeta = (z_1, z_2, \ldots, z_m) \in Z_m$,

$$\omega_i(z) = (q_i^2 - z^2)\omega(z) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{m} (z_j^2 - z^2)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{m} (q_j^2 - z^2)} \qquad (i = 0, 1, \ldots, m).$$

Из (3.12) находим

$$\omega_i(q_i) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{m} (z_j^2 - q_i^2)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{m} (q_j^2 - q_i^2)} = \alpha_i. \tag{3.14}$$

Для рациональной функции $\omega(z)$ (3.12) справедливо разложение

$$\omega(z) = \sum_{i=0}^{m} \frac{\alpha_i}{q_i^2 - z^2}. \tag{3.15}$$

Действительно, любой многочлен $p(t) = \prod_{i=1}^{m}(\tau_i - t)$ степени m, используя интерполяционную формулу Лагранжа, можно представить в виде

$$p(t) = \sum_{i=0}^{m} \frac{p(t_i)\lambda(t)}{(t-t_i)\lambda'(t_i)}, \qquad \lambda(t) = \prod_{i=0}^{m}(t_i - t).$$

Полагая здесь $\omega(t) = \frac{p(t)}{\lambda(t)}$, $\omega_i(t) = (t_i - t)\omega(t)$, учитывая, что $\omega_i(t_i) = -\frac{p(t_i)}{\lambda'(t_i)}$, и делая замены $t = z^2$, $\tau_i = z_i^2$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, $t_i = q_i^2$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$, приходим к равенству (3.15).

Положим $\varphi(x) = \varphi_m(x)$, где φ_m — функция (3.13). Поскольку по определению (3.5) функция σ_q непрерывна, четна и имеет носитель $[-1, 1]$ для любого $q = q_i$, то функция φ также непрерывна, четна и имеет носитель $[-1, 1]$. Следовательно, функция φ удовлетворяет условию (1) класса Φ. Покажем, что она также удовлетворяет и условию (2), т.е. в итоге $\varphi \in \Phi$.

Из (3.6), (3.13) и (3.15) находим преобразование Фурье функции φ :

$$\widehat{\varphi}(z) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \, \frac{c(z)}{q_i^2 - z^2} = \omega(z)c(z). \tag{3.16}$$

Отсюда следует, что $\widehat{\varphi}(z) = O(z^{-2})$ при $|z| \to \infty$ и, следовательно, $0 < \|\widehat{\varphi}\|_{L(\mathbb{R})} < \infty$. Таким образом, $\varphi \in \Phi$.

Вычислим норму $\|\widehat{\varphi}\|_{L(\mathbb{R})}$. Пусть $z_0 = 0,\ z_i = q_i$ $(i = m+1, m+2, \ldots)$ и $k = [(m+1)/2]$ — целая часть числа $(m+1)/2$.

Из (3.16) и (3.12) следует, что точки $\pm z_i$ $(i \in \mathbb{N})$ являются простыми нулями функции $\widehat{\varphi}$, причем других нулей она не имеет. Отсюда и из положительности значения функции $\widehat{\varphi}(z)$ в точке $z = 0$ вытекает, что при $z \in (z_i, z_{i+1})$ $(i \in \mathbb{Z}_+)$ ее знак равен $(-1)^i$. Следовательно, учитывая четность функции $\widehat{\varphi}$ и неравенство $2k + 1 \geq m + 1$, получаем

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(z)| \, dz = \int\limits_{0}^{\infty} |\widehat{\varphi}(z)| \, dz = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \int\limits_{z_i}^{z_{i+1}} \widehat{\varphi}(z) \, dz = \sum_{i=0}^{2k}(-1)^i \int\limits_{z_i}^{z_{i+1}} \widehat{\varphi}(z) \, dz + I, \tag{3.17}$$

где

$$I = \sum_{i=2k+1}^{\infty} (-1)^i \int\limits_{q_i}^{q_{i+1}} \widehat{\varphi}(z) \, dz.$$

Разбивая сумму I на две суммы по четным и нечетным индексам, находим

$$I = \sum_{i=2k+1}^{\infty} \int\limits_{q_i}^{q_{i+1}} \widehat{\varphi}(z) \, dz - 2\sum_{j=k+1}^{\infty} \int\limits_{q_{2j-1}}^{q_{2j}} \widehat{\varphi}(z) \, dz = \int\limits_{q_{2k+1}}^{\infty} \widehat{\varphi}(z) \, dz - 2\sum_{j=k+1}^{\infty} \int\limits_{q_{2j-1}}^{q_{2j}} \widehat{\varphi}(z) \, dz$$

$$= \int\limits_{0}^{\infty} \widehat{\varphi}(z) \, dz - \int\limits_{0}^{q_{2k+1}} \widehat{\varphi}(z) \, dz - 2\sum_{j=k+1}^{\infty} \int\limits_{q_{2j-1}}^{q_{2j}} \widehat{\varphi}(z) \, dz.$$

Отсюда, разбивая второй интеграл, делая очевидные замены переменного в третьем и используя равенства

$$\int\limits_{0}^{\infty} \widehat{\varphi}(z) \, dz = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(z) \, dz = \varphi(0), \qquad q_{2j-1} = j - 1/4, \qquad q_{2j} = j + 1/4,$$

мы получаем

$$I = \frac{\varphi(0)}{2} - \sum_{i=0}^{2k} \int\limits_{z_i}^{z_{i+1}} \widehat{\varphi}(z) \, dz - 2\sum_{j=k+1}^{\infty} \int\limits_{0}^{1/4} (\widehat{\varphi}(z-j) + \widehat{\varphi}(z+j)) \, dz. \tag{3.18}$$

Воспользуемся формулой суммирования Пуассона (2.3) для четной функции $\widehat{\varphi}$. Из равенства $\varphi(j)=0$ при $|j|\ge 1$ имеем

$$\widehat{\varphi}(z)+\sum_{j=1}^{\infty}(\widehat{\varphi}(z-j)+\widehat{\varphi}(z+j))=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\widehat{\varphi}(z+j)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\varphi(j)e(jz)=\varphi(0).$$

Следовательно, меняя порядок суммирования и интегрирования в (3.18), получаем

$$I=\frac{\varphi(0)}{2}-\sum_{i=0}^{2k}\int\limits_{z_i}^{z_{i+1}}\widehat{\varphi}(z)\,dz-2\int\limits_{0}^{1/4}\left(\varphi(0)-\widehat{\varphi}(z)-\sum_{j=1}^{k}(\widehat{\varphi}(z-j)+\widehat{\varphi}(z+j))\right)\,dz$$

$$=2\left(\int\limits_{0}^{1/4}\widehat{\varphi}(z)+\sum_{j=1}^{k}\int\limits_{j-1/4}^{j+1/4}\widehat{\varphi}(z)\,dz\right)-\sum_{i=0}^{2k}\int\limits_{z_i}^{z_{i+1}}\widehat{\varphi}(z)\,dz$$

$$=2\left(\int\limits_{0}^{q_0}\widehat{\varphi}(z)+\sum_{j=1}^{k}\int\limits_{q_{2j-1}}^{q_{2j}}\widehat{\varphi}(z)\,dz\right)-\sum_{i=0}^{2k}\int\limits_{z_i}^{z_{i+1}}\widehat{\varphi}(z)\,dz.$$

Подставляя полученное выражение для I в формулу (3.17), получаем

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}}|\widehat{\varphi}(z)|\,dz=\sum_{i=0}^{2k}(-1)^i\int\limits_{z_i}^{z_{i+1}}\widehat{\varphi}(z)\,dz+2\left(\int\limits_{0}^{q_0}\widehat{\varphi}(z)+\sum_{j=1}^{k}\int\limits_{q_{2j-1}}^{q_{2j}}\widehat{\varphi}(z)\,dz\right)-\sum_{i=0}^{2k}\int\limits_{z_i}^{z_{i+1}}\widehat{\varphi}(z)\,dz$$

$$=2\left(\int\limits_{0}^{q_0}\widehat{\varphi}(z)+\sum_{j=1}^{k}\left(\int\limits_{q_{2j-1}}^{q_{2j}}\widehat{\varphi}(z)\,dz-\int\limits_{z_{2j-1}}^{z_{2j}}\widehat{\varphi}(z)\,dz\right)\right).$$

Пусть

$$\rho=\frac{\widehat{\varphi}(0)}{\|\widehat{\varphi}\|_{L(\mathbb{R})}}=\frac{\widehat{\varphi}(0)}{4}\left[\int\limits_{0}^{q_0}\widehat{\varphi}(z)+\sum_{j=1}^{k}\left(\int\limits_{q_{2j-1}}^{q_{2j}}\widehat{\varphi}(z)\,dz-\int\limits_{z_{2j-1}}^{z_{2j}}\widehat{\varphi}(z)\,dz\right)\right]^{-1}. \tag{3.19}$$

Упростим выражение (3.19) для величины ρ. Имеем

$$\frac{\widehat{\varphi}(0)}{4\rho}=\int\limits_{0}^{q_0}\widehat{\varphi}(z)+\sum_{j=1}^{k}\left(\int\limits_{q_{2j-1}}^{q_{2j}}\widehat{\varphi}(z)\,dz-\int\limits_{z_{2j-1}}^{z_{2j}}\widehat{\varphi}(z)\,dz\right). \tag{3.20}$$

Введем функцию (используем (3.15) и (3.16))

$$y(z)=\frac{\widehat{\varphi}(z)}{\widehat{\varphi}(0)}=\frac{\omega(z)c(z)}{\omega(0)}=\frac{c(z)}{\omega(0)}\sum_{i=0}^{m}\frac{\alpha_i}{q_i^2-z^2}. \tag{3.21}$$

Подставляя $y(z)$ в (3.20), получаем

$$\frac{1}{4\rho}=\int\limits_{0}^{q_0}y(z)\,dz+\sum_{j=1}^{k}\left(\int\limits_{q_{2j-1}}^{q_{2j}}y(z)\,dz-\int\limits_{z_{2j-1}}^{z_{2j}}y(z)\,dz\right). \tag{3.22}$$

Из (3.16), (3.21) и (3.7) находим

$$\int_0^t y(z)\,dz = \sum_{i=0}^{m} \frac{\alpha_i}{\omega(0)} \int_0^t \frac{c(z)}{q_i^2 - z^2}\,dz = \sum_{i=0}^{m} \frac{\alpha_i}{q_i^2 \omega(0)}\, \tau_{q_i}(t).$$

В силу (3.12), (3.14), (3.11)

$$\frac{\alpha_i}{q_i^2\omega(0)} = \frac{1}{q_i^2} \frac{\prod\limits_{j=1}^{m}(z_j^2 - q_i^2)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{m}(q_j^2 - q_i^2)} \frac{q_0^2 \prod\limits_{j=1}^{m} q_j^2}{\prod\limits_{j=1}^{m} z_j^2} = \frac{a_i}{b_i}.$$

Следовательно, по определению функции Y (3.10)

$$\int_0^t y(z)\,dz = Y(t).$$

Возвращаясь к (3.22), получаем

$$\frac{1}{4\rho} = Y(q_0) + \sum_{j=1}^{k}[Y(q_{2j}) - Y(q_{2j-1}) - (Y(z_{2j}) - Y(z_{2j-1}))] = Y(q_0) + \sum_{i=1}^{2k}(-1)^i (Y(q_i) - Y(z_i)). \quad (3.23)$$

Поскольку $2k = m$ для четного m, $2k = m+1$ и $z_{2k} = q_{2k}$ при нечетном m, то выражение (3.23) с учетом определения величины S (3.9) принимает вид

$$\frac{1}{4\rho} = Y(q_0) + \sum_{i=1}^{m}(-1)^i (Y(q_i) - Y(z_i)) = S. \quad (3.24)$$

Таким образом, из принадлежности $\varphi \in \Phi$ и (3.19) следует

$$L \geq \frac{\widehat{\varphi}(0)}{\|\widehat{\varphi}\|_{L(\mathbb{R})}} = \rho,$$

что вместе с (3.24) и определением функции Y (3.10) завершает доказательство леммы.

Отметим, что лемма 6 верна и при $m = 0$, если считать, что пустые суммы и произведения равны соответственно 0 и 1. В этом случае имеем

$$S = Y(q_0) = \frac{\operatorname{Si}\pi}{8}, \qquad \rho = \frac{2}{\operatorname{Si}\pi}, \qquad \varphi_0(x) = 4\pi c(x/4)\chi(x), \qquad \widehat{\varphi}_0(z) = \frac{c(z)}{1/16 - z^2}.$$

Это дает оценку снизу в формуле (1.2).

Из леммы 6 вытекает, что для получения более сильной оценки снизу константы L следует при заданном $m \in \mathbb{N}$ решать экстремальную задачу $\sup\limits_{\zeta\in Z_m} \rho(\zeta)$, а затем переходить к верхней грани по m. Для нахождения оптимального вектора ζ^* можно решать эквивалентную задачу $\inf\limits_{z\in Z_m} S(\zeta)$.

Функция $S(\zeta)$ непрерывно дифференцируема. Численные расчеты при малых m (случай $m = 1$ отражен на рис. 1) показывают, что в области Z_m существует единственная точка абсолютного минимума $\zeta^* = (z_1^*, z_2^*, \ldots, z_m^*)$. Тогда в силу необходимых условий экстремума она является решением системы уравнений

$$\frac{\partial S(\zeta^*)}{\partial z_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \qquad \zeta = (z_1, z_2, \ldots, z_m) =\in Z_m. \quad (3.25)$$

Строгое доказательство этого факта, как и решение системы нелинейных уравнений (3.25), представляется трудоемкой задачей. Поэтому был выбран следующий путь. Система уравнений (3.25) решалась численно методом Ньютона. При этом для исследованных случаев $m = 1, 2, \ldots, 10$ оказалось, что метод с погрешностью 10^{-12} за небольшое число итераций (порядка 10) сходится к некоторому вектору $\widehat{\zeta}_m = (\widehat{z}_1, \widehat{z}_2, \ldots, \widehat{z}_m)$, который и является, как предполагается, приближенным значением ζ^* для заданного m.

В таблице приведены результаты численных расчетов (приводятся первые 8 значащих цифр). Из этой таблицы (колонка $m = 10$) получаем оценку снизу $L > 1,08185\ldots$ в теореме 3. Функцией из класса Φ, на которой достигается эта оценка, является функция $\varphi_{10}(x, \widehat{\zeta}_{10})$.

Таблица

Оценки снизу $L \geq \rho(\widehat{\zeta}_m)$ для небольших m

	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$
$\rho(\widehat{\zeta}_m)$	1,08156401	1,08176615	1,08181830	1,08183731	1,08184581
$\widehat{z}_1$	0,72116483	0,72096471	0,72092297	0,72090887	0,72090279
$\widehat{z}_2$		1,23305946	1,23294274	1,23291191	1,23289981
$\widehat{z}_3$			1,73796135	1,73788651	1,73786388
$\widehat{z}_4$				2,24065240	2,24060061
$\widehat{z}_5$					2,74235634
	$m=6$	$m=7$	$m=8$	$m=9$	$m=10$
$\rho(\widehat{\zeta}_m)$	1,08185017	1,08185262	1,08185411	1,08185507	**1,08185570**
$\widehat{z}_1$	0,72089974	0,72089804	0,72089702	0,72089637	0,72089593
$\widehat{z}_2$	1,23289402	1,23289088	1,23288903	1,23288787	1,23288710
$\widehat{z}_3$	1,73785411	1,73784910	1,73784623	1,73784446	1,73784331
$\widehat{z}_4$	2,24058351	2,24057563	2,24057137	2,24056884	2,24056722
$\widehat{z}_5$	2,74231844	2,74230514	2,74229870	2,74229509	2,74229287
$\widehat{z}_6$	3,24353313	3,24350422	3,24349361	3,24348827	3,24348518
$\widehat{z}_7$		3,74439503	3,74437227	3,74436360	3,74435912
$\widehat{z}_8$			4,24505370	4,24503531	4,24502812
$\widehat{z}_9$				4,74557353	4,74555837
$\widehat{z}_{10}$					5,24599429

Приступим к выводу верхней оценки в теореме 3. Пусть $\|f\|_{C(\mathbb{R}_+)} = \sup\limits_{z\in\mathbb{R}_+} |f(z)|$. Оценка сверху константы L опирается на решение экстремальной задачи

$$M^* = \inf_{a,b} \|2j(z)(1 + b(z)) + a(z)\|_{C(\mathbb{R}_+)}, \tag{3.26}$$

где нижняя грань берется по всем 1-периодическим непрерывным четным действительным функциям a, b, имеющим ряды Фурье

$$a(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n c(nz), \qquad b(z) = \sum_{n=2}^{\infty} b_n c(nz), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} |b_n| < \infty. \tag{3.27}$$

Лемма 7. *Справедлива оценка*

$$L \leq M^*.$$

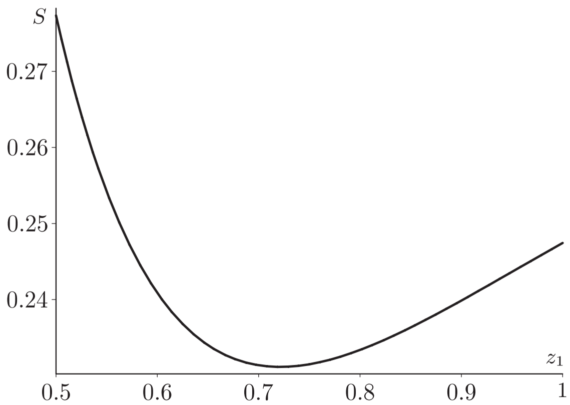


Рис. 1. График функции $S(z_1)$

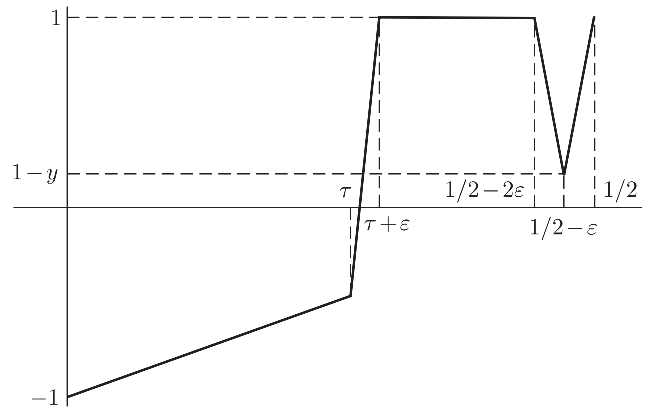


Рис. 2. График функции $\alpha_\tau(z)$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть φ — произвольная функция из класса Φ. Оценим сверху величину $\widehat{\varphi}(0)$.

В силу свойства $\varphi(x) = 0$ $(|x| \geq 1)$ находим

$$\widehat{\varphi}(0) = \int_{-1}^{1} \varphi(x)\, dx = 2\int_{0}^{1} \varphi(x)\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi(n) + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \int_{0}^{1} (\varphi(x+n) + \varphi(x-n))\, dx, \tag{3.28}$$

где a_n, b_n — произвольные действительные числа, которые выберем удовлетворяющими условиям (3.27).

Подставим в выражение (3.28) вместо функции φ ее представление через преобразование Фурье $\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(z)c(zx)\, dz$. Тогда, меняя порядок интегрирования, а также интегрирования и суммирования (что законно в силу свойств $\widehat{\varphi}$ и (3.27)) и учитывая определения функции j и (3.27), находим

$$\widehat{\varphi}(0) = 2\int_{0}^{1}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(z)c(zx)\, dz\, dx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(z)c(zn)\, dz + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \int_{0}^{1}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(z)(c(z(x+n)) + c(z((x-n)))\, dz\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(2\int_{0}^{1} c(zx)\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n c(nz) + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \int_{0}^{1} 2c(zx)c(nz)\, dx \right) \widehat{\varphi}(z)\, dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (2j(z)(1+b(z)) + a(z))\widehat{\varphi}(z)\, dz.$$

Отсюда, используя четность функции $2j(z)(1+b(z)) + a(z)$, получаем оценку

$$\widehat{\varphi}(0) \leq \left| \int_{\mathbb{R}} (2j(z)(1+b(z)) + a(z))\widehat{\varphi}(z)\, dz \right| \leq \sup_{z\in\mathbb{R}_+} |2j(z)(1+b(z)) + a(z)| \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(z)|\, dz$$

$$= \|2j(z)(1+b(z)) + a(z)\|_{C(\mathbb{R}_+)} \|\widehat{\varphi}\|_{L(\mathbb{R})} \leq M^* \|\widehat{\varphi}\|_{L(\mathbb{R})} \Longrightarrow L = \sup_{\varphi\in\Phi} \frac{\widehat{\varphi}(0)}{\|\widehat{\varphi}\|_{L(\mathbb{R})}} \leq M^*.$$

Лемма доказана.

Отметим, что задача (3.26) является упрощенным вариантом двойственной к задаче 1 экстремальной задачи, которая рассматривалась в работе [2].

Точное значение величины M^* получить не удалось. Для получения достаточно хорошей оценки сверху решалась следующая экстремальная задача:

$$F = \sup_{\alpha} \int\limits_0^{1/2} \frac{1-\alpha(z)}{j(z)}\, dz, \tag{3.29}$$

где верхняя грань берется по всем непрерывным кусочно-линейным функциям $\alpha\colon [0,1/2] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющим условиям:

$$2z-1 \le \alpha(z) \le 1 \qquad (0 \le z \le 1/2), \qquad \alpha(1/2) = 1,$$

$$\int\limits_0^{1/2} \alpha(z)\, dz = 0, \qquad \int\limits_0^{1/2} \frac{1-\alpha(z)}{j(z)}\, c(z)\, dz = 0.$$

Лемма 8. *Справедлива оценка*

$$M^* \le \frac{1}{F}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале заметим, что функции a, b (3.27) в силу их 1-периодичности и четности достаточно определить на полупериоде $[0,1/2]$, причем должны выполняться равенства

$$\int\limits_0^{1/2} a(z)\, dz = \int\limits_0^{1/2} b(z)\, dz = \int\limits_0^{1/2} b(z)c(z)\, dz = 0, \tag{3.30}$$

означающие равенство нулю коэффициентов Фурье a_0, b_0, b_1.

Приближенное решение задачи (3.26) (путем сведения к задаче линейного программирования) показывает, что на отрезке $[0,1/2]$ для предполагаемых экстремальных функций $a(z)$ и $b(z)$ (3.27) должно выполняться тождество

$$2j(z)(1+b(z)) + a(z) \equiv M \qquad (z \in [0,1/2]), \qquad M = \|2j(z)(1+b(z)) + a(z)\|_{C(\mathbb{R}_+)}. \tag{3.31}$$

Будем искать функции $a(z)$ и $b(z)$ при $z \in [0,1/2]$, исходя из тождества (3.31). Поскольку $j(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$, модуль функции a должен быть ограничен константой M :

$$|a(z)| \le M \qquad (z \in [0,1/2]). \tag{3.32}$$

Выразим из тождества (3.31) функцию b через функцию a:

$$b(z) = \frac{M-a(z)}{2j(z)} - 1 \qquad (z \in [0,1/2]). \tag{3.33}$$

Поскольку $j(1/2) = 0$, для ограниченности функции b необходимо, чтобы $a(1/2) = M$. Потребуем для существования предела $b(1/2-0)$, чтобы функция a имела конечную левую производную в точке $1/2$.

Будем искать функцию $a(z)$ при $z \in [0,1/2]$ в классе непрерывных кусочно-линейных функций. Тогда функция a автоматически имеет абсолютно сходящийся ряд коэффициентов Фурье. Из (3.33) и условий, наложенных на функцию a, следует, что это справедливо и для функции b.

Введем функцию α равенством

$$a(z) = M\alpha(z). \tag{3.34}$$

Выпишем условия на функцию α, которые к текущему моменту должны выполняться:

(1) α — непрерывная четная кусочно-линейная функция;

(2) $|\alpha(z)| \le 1$ при $z \in [0, 1/2]$ (следует из (3.32));

(3) $\alpha(1/2) = 1$ (следует из примечания к (3.33); условие конечности левой производной функции α в точке $z = 1/2$ выполнено автоматически из линейности α в окрестности этой точки);

(4) $\displaystyle\int\limits_0^{1/2} \alpha(z)\, dz = 0$ (следует из (3.30)).

Из выражения (3.33) для функции b, определения функции α (3.34) и (3.30) вытекает, что

$$0 = \int\limits_0^{1/2} \left(\frac{M - M\alpha(z)}{2j(z)} - 1 \right)\, dz = \int\limits_0^{1/2} \left(\frac{M - M\alpha(z)}{2j(z)} - 1 \right) c(z)\, dz. \tag{3.35}$$

Из первого равенства в формуле (3.35) находим

$$M \int\limits_0^{1/2} \frac{1 - \alpha(z)}{2j(z)}\, dz - \frac{1}{2} = 0,$$

откуда следует

$$\frac{1}{M} = \int\limits_0^{1/2} \frac{1 - \alpha(z)}{2j(z)}\, dz. \tag{3.36}$$

Второе равенство в (3.35) дает новое условие на функцию α:

(5) $\displaystyle\int\limits_0^{1/2} \frac{1 - \alpha(z)}{2j(z)}\, c(z)\, dz = 0.$

Наконец, осталось определить, при каком условии на функцию α будет выполняться неравенство

$$|2j(z)(1 + b(z)) + a(z)| \le M \qquad (z \in \mathbb{R}_+), \tag{3.37}$$

означающее с учетом (3.31), что $M = \|2j(z)(1 + b(z)) + a(z)\|_{C(\mathbb{R}_+)}$.

На отрезке $[0, 1/2]$ неравенство (3.37) выполнено в силу тождества (3.31), поэтому рассмотрим интервал $z \ge 1/2$.

Число $z \ge 1/2$ можно представить в виде $z = n + t$, где $n \in \mathbb{N}$, $|t| \le 1/2$. Учитывая 1-периодичность функций a, b, соотношение

$$j(n + t) = \frac{s(n + t)}{2\pi(n + t)} = \frac{s(t)}{n + t} = \frac{ts(t)}{2\pi t(n + t)} = \frac{t}{n + t}\, j(t)$$

и тождество (3.31), находим, что

$$\begin{aligned} 2j(z)(1 + b(z)) + a(z) &= 2j(n + t)(1 + b(n + t)) + a(n + t) \\ &= \frac{t}{n + t}\, 2j(t)(1 + b(t)) + a(t) = \frac{t}{n + t}\, (M - a(t)) + a(t). \end{aligned}$$

Рассмотрим случай $0 \le t \le 1/2$. Используя неравенства $|a(t)| \le M$ и $0 \le \frac{t}{n+t} < 1$ ($t \in [0, 1/2]$), получаем

$$-M \le a(t) \le \frac{t}{n + t}\, (M - a(t)) + a(t) \le M - a(t) + a(t) = M,$$

и неравенство (3.37) выполнено.

Рассмотрим случай $-1/2 \le t \le 0$. Тогда $\frac{t}{1+t} \le \frac{t}{n+t} \le 0$ (здесь учтено, что $n \ge 1$). Отсюда, вновь используя неравенство $|a(t)| \le M$ $(|t| \le 1/2)$, получаем

$$\frac{t}{n+t}\,(M - a(t)) + a(t) \le a(t) \le M.$$

Выясним, когда будет выполняться неравенство

$$\frac{t}{n+t}\,(M - a(t)) + a(t) \ge -M. \tag{3.38}$$

Имеем

$$\frac{t}{n+t}\,(M - a(t)) + a(t) \ge \frac{t}{1+t}\,(M - a(t)) + a(t).$$

Отсюда следует, что неравенство (3.38) будет выполнено, если

$$\frac{t}{1+t}\,(M - a(t)) + a(t) \ge -M \Longrightarrow a(t) \ge -M(2t+1) \qquad (t \in [-1/2, 0]).$$

Последнее неравенство для функции a в силу ее четности эквивалентно неравенству

$$a(z) \ge M(2z-1) \qquad (z \in [0, 1/2]). \tag{3.39}$$

Таким образом, для выполнения неравенства (3.37) на функцию a необходимо наложить условие (3.39). Следовательно, функция α (3.34) должна удовлетворять еще одному условию:

(6) $\alpha(z) \ge 2z - 1$ $(z \in [0, 1/2])$.

Итак, если функция α удовлетворяет условиям (1)–(6) (далее будет построено семейство таких функций), то существуют функции a, b, для которых величина M (3.31) находится из равенства (3.36). Уменьшая значение M, приходим к экстремальной задаче (3.29).

Лемма доказана.

Экстремальная задача (3.29) сводится к задаче линейного программирования. Решая последнюю симплекс-методом, можно сделать заключение о виде предполагаемой экстремальной функции в задаче (3.29). Это приводит вместе с леммой 8 к следующему результату.

Лемма 9. *Пусть* $0 < \tau < 1 - 1/\sqrt{2} = 0{,}29289\ldots$;

$$M_\tau = \|2j(z)(1 + b_\tau(z)) + a_\tau(z)\|_{C(\mathbb{R}_+)} = \left(\int\limits_0^{1/2} \frac{1 - \alpha_\tau(z)}{j(z)}\, dz\right)^{-1}; \tag{3.40}$$

где α_τ *— непрерывная кусочно-линейная функция (рис. 2), имеющая вид*

$$\alpha_\tau(z) = \begin{cases} 2z - 1, & 0 \le z \le \tau, \\ 2\tau - 1 + 2(1-\tau)(z-\tau)/\varepsilon, & \tau \le z \le \tau + \varepsilon, \\ 1, & \tau + \varepsilon \le z \le 1/2 - 2\varepsilon, \\ 1 - y(z - 1/2 + 2\varepsilon)/\varepsilon, & 1/2 - 2\varepsilon \le z \le 1/2 - \varepsilon, \\ 1 - y + y(z - 1/2 + \varepsilon)/\varepsilon, & 1/2 - \varepsilon \le z \le 1/2; \end{cases} \tag{3.41}$$

$$\varepsilon = \frac{\tau^2 - 2\tau + 1/2}{1 + y - 2\tau} > 0; \tag{3.42}$$

число $y = y(\tau) \in (0, 1)$ *— решение при фиксированном* τ *трансцендентного уравнения*

$$J(\tau, y) = \int\limits_0^{1/2} \frac{1 - \alpha_\tau(z)}{j(z)}\, c(z)\, dz = 0; \tag{3.43}$$

функции $a_\tau(z)$, $b_\tau(z)$ *на полупериоде* $z \in [0, 1/2]$ *определяются равенствами*

$$a_\tau(z) = M_\tau \alpha_\tau(z), \qquad b_\tau(z) = M_\tau \frac{1 - \alpha_\tau(z)}{2j(z)} - 1.$$

Тогда

$$M^* \le M_\tau.$$

Доказательство. Покажем, что функция α_τ при $0 < \tau < 1 - 1/\sqrt{2}$ является допустимой в задаче (3.29). Для этого необходимо показать, что она удовлетворяет условиям (1)–(6) из доказательства леммы 8.

Условия (1)–(3), (6) выполнены по определению функции α_τ (3.41).

Среднее значение функции α_τ на отрезке $[0, 1/2]$ равно

$$\int\limits_0^{1/2} \alpha_\tau(z)\, dz = (2\tau - y - 1)\varepsilon + \tau^2 - 2\tau + 1/2.$$

Оно обращается в нуль, если ε определяется равенством (3.42). При этом числа $\varepsilon > 0$ и $0 < y < 1$ при $0 < \tau < 1/2$ будут существовать, только если $0 < \tau < 1 - 1/\sqrt{2}$, что предполагается. Таким образом, условие (4) также выполнено.

Условие (5) эквивалентно равенству (3.43). Осталось показать, что решение уравнения (3.43) $y = y(\tau) \in (0, 1)$ при фиксированном $\tau \in (0, 1 - 1/\sqrt{2})$ существует. А это так, поскольку функция $J(\tau, y)$ непрерывна в прямоугольнике (τ, y) ($\tau \in (0, 1 - 1/\sqrt{2})$, $y \in (0, 1)$) и, как показывают несложные вычисления, на нижней стороне $(\tau, 0)$ прямоугольника она положительна, а на верхней $(\tau, 1)$ — отрицательна. Следовательно, существует непрерывная кривая $0 < y(\tau) < 1$, для которой $J(\tau, y(\tau)) = 0$ $(0 < \tau < 1 - 1/\sqrt{2})$.

Функции a_τ и b_τ определяются по функции α_τ, исходя из равенств (3.34), (3.33).

Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы 3, т.е. получим верхнюю оценку константы L. Для этого положим $\tau_0 = 29289/100000 = 0{,}29289$. Тогда $y(\tau_0) = 0{,}43056\ldots$, $\varepsilon = 0{,}0000053884\ldots$ и $M_{\tau_0} = 1,09769\ldots$ Отсюда и из лемм 7, 9 получаем оценку $L \le 1,09769\ldots$

Теорема 3 доказана.

4. Заключение

Приведем несколько комментариев к полученным результатам.

1. Детальное исследование величины M_τ (3.40) из леммы 9 показывает, что

$$\inf_{\tau \in (0, 1 - 1/\sqrt{2})} M_\tau = \lim_{\tau \to 1 - 1/\sqrt{2} - 0} M_\tau = M_{1 - 1/\sqrt{2}}.$$

При $\tau \to 1 - 1/\sqrt{2} - 0$ параметр $\varepsilon \to +0$ и справедливы предельные соотношения:

$$\int\limits_0^{1/2} \frac{1 - \alpha_\tau(z)}{j(z)}\, dz \;\longrightarrow\; 2 \int\limits_0^{1 - 1/\sqrt{2}} \frac{1 - z}{j(z)}\, dz + \frac{y \ln 2}{2},$$

$$J(\tau, y) = \int\limits_0^{1/2} \frac{1 - \alpha_\tau(z)}{j(z)}\, c(z)\, dz \;\longrightarrow\; J(1 - 1/\sqrt{2}, y) = 2 \int\limits_0^{1 - 1/\sqrt{2}} \frac{1 - z}{j(z)}\, c(z)\, dz - \frac{y \ln 2}{2}\,.$$

Приравнивая в соответствии с (3.43) правую часть последнего равенства к нулю, находим y, а из (3.40) — выражение для $M_{1-1/\sqrt{2}}$:

$$M_{1-1/\sqrt{2}} = \left(2\int\limits_0^{1-1/\sqrt{2}} \frac{1-z}{j(z)}\,(1+c(z))\;dz\right)^{-1} = 1,0976920716\ldots$$

2. Нетрудно решить ослабленный вариант задачи (3.26), в котором поиск нижней грани ведется только по функциям $a(z)$ (3.27) при $b(z)\equiv 0$.

Справедливо равенство

$$\inf_a \|2j(z)+a(z)\|_{C(\mathbb{R}_+)} = \|2j(z)+a^*(z)\|_{C(\mathbb{R}_+)} = \frac{2\mathrm{Si}\,\pi}{\pi}, \tag{4.1}$$

$$a_*(z) = \frac{2\mathrm{Si}\,\pi}{\pi} - 2j(z) \qquad (z\in[0,1/2]). \tag{4.2}$$

Этот результат приводит к верхней оценке в (1.2). В работе [2] функция a^* выписана, но без доказательства ее экстремальности.

Докажем (4.1). Из определения функции a^* следует, что $2j(z)+a^*(z)=\frac{2\mathrm{Si}\,\pi}{\pi}$ при $z\in[0,1/2]$. Далее, неравенство $\|2j(z)+a^*(z)\|\le\frac{2\mathrm{Si}\,\pi}{\pi}$ $(z\in\mathbb{R}_+)$ доказано в работе [2] или может быть установлено аналогично неравенству (3.37) из доказательства леммы 8.

Пусть существует функция a (3.27), для которой $\|2j(z)+a(z)\|_{C(\mathbb{R}_+)}<\frac{2\mathrm{Si}\,\pi}{\pi}$. Тогда при $z\in[0,1/2]$

$$a^*(z)-a(z) = 2j(z)+a^*(z)-(2j(z)+a(z)) = \frac{2\mathrm{Si}\,\pi}{\pi}-(2j(z)+a(z))>0.$$

Но $\int\limits_0^{1/2}(a^*(z)-a(z)\;dz=0$. Пришли к противоречию.

3. Т.м., на которых асимптотически при $n\to\infty$ улучшается (по сравнению с многочленами Рогозинского) полученная Л.В. Тайковым оценка снизу константы c_n, являются многочлены $\tau_n\varphi_m(x,\widehat{\zeta}_m)$ (см. лемму 4 при $a=1$ и таблицу).

Оценки снизу для задачи 3 получаются на функциях $\widehat{\varphi}_m(x,\widehat{\zeta}_m)\in E^0$ (см. лемму 5).

Автор выражает благодарность О.А. Столяровой за проведение компьютерных вычислений и полезное обсуждение работы.

Поступила 16.07.04

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Справочник по специальным функциям / Под. ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979.
2. **Андреев Н.Н., Конягин С.В., Попов А.Ю.** Экстремальные задачи для функций с малым носителем // Мат. заметки. 1996. Т. 60, № 3. С. 323–332.
3. **Konyagin S., Shparlinski I.** Character sums with exponential functions and their applications. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.
4. **Горбачев Д.В., Маношина А.С.** Экстремальная задача Турана для периодических функций с малым носителем и ее приложения // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 5. С. 688–700.
5. **Горбачев Д.В.** Об одной экстремальной задаче для периодических функций с малым носителем // Мат. заметки. 2003. Т. 73, № 5. С. 773–778.
6. **Никольский С.М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
7. **Milovanović G.V., Mitrinović D.S., Rassias Th.M.** Topics in polynomials: extremal problems, inequalities, zeros. Singapore etc.: World Sci. Publ. Co., 1994.

8. **Тайков Л.В.** Один круг экстремальных задач для тригонометрических полиномов // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20, № 3. С. 205–211.
9. **Тайков Л.В.** О наилучшем приближении ядер Дирихле // Мат. заметки. 1993. Т. 53, № 6. С. 116–121.
10. **Babenko V., Kofanov V., Pichugov S.** Comparison of Rearrangement and Kolmogorov–Nagy Type Inequalities for Periodic Functions // Approx. Theory: A volume dedicated to Blagovest Sendov / Ed. B. Bojanov. Sofia: DARBA, 2002. P. 24–53.
11. **Ахиезер Н.И.** Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
12. **Горбачев Д.В.** Усиление нижней оценки Тайкова в неравенстве между C- и L-нормами для тригонометрических полиномов // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 1. С. 132–134.
13. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 11 № 2 2005

УДК 517.977

НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С УСЛОВИЯМИ НА ИХ ЗНАЧЕНИЯ И КОЭФФИЦИЕНТЫ ФУРЬЕ[1]

В. И. Иванов, Д. В. Горбачев, Ю. Д. Рудомазина

Дается решение дискретного варианта задачи Фейера о наибольшем значении в нуле четного неотрицательного тригонометрического полинома с фиксированным средним значением. В качестве следствий для всех рациональных h, $0 < h \leqslant 1/2$, найдены наибольшие средние значения непрерывных 1-периодических четных функций с неотрицательными коэффициентами Фурье, фиксированным значением в нуле и равных нулю на отрезке $[h, 1-h]$ (задача Турана) или неположительных на этом отрезке (задача Дельсарта). Подобные задачи решены и в дискретном случае. Также в одном случае приводится решение экстремальной задачи Монтгомери для неотрицательных тригонометрических полиномов.

Введение

Работа посвящена решению экстремальных задач Фейера, Турана, Дельсарта для периодических функций и тригонометрических полиномов, непрерывных и дискретных.

Пусть $\mathbb{T} = [0, 1)$ — одномерный тор, $c(x) = \cos(2\pi x)$, $s(x) = \sin(2\pi x)$, $0 < h \leqslant 1/2$, $K_T(h)$ — класс определенных на $\mathbb{T}$ непрерывных четных функций

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n c(nx),$$

для которых выполнены условия:

$$a_n \geqslant 0, \qquad n \in \mathbb{N}; \tag{0.1}$$

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1; \tag{0.2}$$

$$f(x) = 0, \qquad h \leqslant |x| \leqslant 1/2. \tag{0.3}$$

Задача Турана состоит в вычислении величины

$$A_T(h) = \sup_{f \in K_T(h)} a_0 = \sup_{f \in K_T(h)} \int_{-h}^{h} f(x)\, dx. \tag{0.4}$$

Она была поставлена П. Тураном в 1970 г. в беседе с С.Б. Стечкиным. При решении задачи Турана условие $a_0 \geqslant 0$ в определении класса (0.1) заранее можно не требовать.

С.Б. Стечкин в работе [1], вышедшей в 1972 г. (см. также [2]), показал, что классы $K_T(h)$ непусты, например,

$$\varphi_h(x) = h + 2h \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{s\,(nh/2)}{\pi n h} \right)^2 c(nx) \in K_T(h),$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00647, и (второй автор) гранта Президента Российской Федерации № МК-1522.2004.1.

и доказал, что для $q = 2, 3, \ldots$ $A_T(1/q) = 1/q$ и что экстремальной функцией является $\varphi_{1/q}(x)$. Отсюда он получил асимптотику $A_T(h) = h + O(h^2),\ h \to 0$.

А.Ю. Попов (устное сообщение) показал, что для $h \neq 1/q$ $A_T(h) > h$, и предположил, что при $h \to 0$ справедлива более сильная асимптотика $A_T(h) = h + O(h^3)$.

Дальнейшее продвижение в задаче Турана получено в работах Д.В. Горбачева и А.С. Маношиной [3–6], где, в частности, доказано предположение А.Ю. Попова. В [3–6] задача Турана для рациональных h сведена к дискретному варианту задачи Фейера о наибольшем значении в нуле четного неотрицательного тригонометрического полинома с фиксированным средним значением; величина $A_T(h)$ вычислена для $h = 2/q,\ 3/q,\ 4/q,\ p/(2p+1), p \in \mathbb{N}$.

Задача Турана имеет много различных вариантов постановок для рядов и интегралов, в том числе и многомерные постановки (этому посвятили свои статьи, например, Д.В. Горбачев [5], В.В. Арестов, Е.Е. Бердышева и H. Berens [7–9], M. Kolountzakis и S.G. Rěvěsz [10, 11]).

Если в определении класса $K_T(h)$ условие (0.3) заменить на более слабое условие

$$f(x) \leqslant 0, \qquad h \leqslant |x| \leqslant 1/2, \tag{0.5}$$

то получится более широкий класс $K_D(h)$.

Задача Дельсарта состоит в вычислении величины

$$A_D(h) = \sup_{f \in K_D(h)} a_0 = \sup_{f \in K_D(h)} \int_{-h}^{h} f(x)\, dx. \tag{0.6}$$

Подобная задача была поставлена Ф. Дельсартом (см. [12]) для многочленов в связи с оценкой мощности кодов в симметричных ассоциативных полиномиальных схемах отношений. Различные варианты задачи Дельсарта для многочленов, рядов и интегралов с успехом использовались многими авторами при оценке мощности кодов, дизайнов, контактных чисел, плотности упаковки в однородных пространствах. На этом пути важные результаты для классических компактных и локально компактных однородных пространств получили Ф. Дельсарт, Д. Геталс, Дж. Зейдель, К. Данкл, А. Одлыжко, М. Слоэн, В.М. Сидельников, В.И. Левенштейн, Г.А. Кабатянский, Г. Фазекаш, В.А. Юдин, Н.Н. Андреев, В.В. Арестов, А.Г. Бабенко, О.Р. Мусин, Д.В. Горбачев, Г. Кон, Н. Элкис, А. Кумар (см., например, [13–18]).

Величина $A_D(h)$ была вычислена Д.В. Горбачевым для $h = 1/q,\ 2/q,\ p/(2p+1)$. Во всех этих случаях выполнялось равенство $A_D(h) = A_T(h)$.

В настоящей работе дано решение дискретной задачи Фейера и как следствия получены решения задач Турана и Дельсарта для всех рациональных h.

1. Задача Фейера

Пусть $p, q \in \mathbb{N},\ p \leqslant q/2,\ (p, q)$ — наибольший общий делитель p и q, $\mathbb{Z}_q = \{0, 1, \ldots, q-1\}$ — циклическая группа порядка q, $\Theta_q = q^{-1}\mathbb{Z}_q = \{0, 1/q, \ldots, (q-1)/q\}$ — подгруппа тора $\mathbb{T}$, T_p — множество четных тригонометрических полиномов

$$t_{p-1}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{p-1} a_k c(kx)$$

порядка $p-1$ с действительными коэффициентами $a_k = a_k(t_{p-1})$,

$$T_p^+ = \{t_{p-1} \in T_p\colon\ t_{p-1}(x) \geqslant 0,\ x \in \mathbb{T}\}$$

— множество неотрицательных полиномов,

$$T_{p,q}^+ = \{t_{p-1} \in T_p\colon\ t_{p-1}(x) \geqslant 0,\ x \in \Theta_q\}$$

— множество неотрицательных полиномов на сетке Θ_q.

Рассмотрим следующие экстремальные задачи:

$$\Lambda(p)=\sup\left\{t_{p-1}(0)\colon\ t_{p-1}\in T_p^+,\ a_0=\int\limits_0^1 t_{p-1}(x)\ dx=1\right\}; \tag{1.1}$$

$$\lambda(p)=\sup\left\{t_{p-1}(0)\colon\ t_{p-1}\in T_p^+,\ a_0=1,\ a_k\geqslant 0,\ k=1,\dots,p-1\right\}; \tag{1.2}$$

$$\Lambda(p,q)=\sup\left\{t_{p-1}(0)\colon\ t_{p-1}\in T_{p,q}^+,\ a_0=1\right\}; \tag{1.3}$$

$$\lambda(p,q)=\sup\left\{t_{p-1}(0)\colon\ t_{p-1}\in T_{p,q}^+,\ a_0=1,\ a_k\geqslant 0,\ k=1,\dots,p-1\right\}. \tag{1.4}$$

Задачу (1.1) поставил и решил Л. Фейер [21] (см. также [22]). Он показал, что $\Lambda(p)=p$. Оценка снизу была получена с помощью полинома, известного теперь как полином Фейера

$$F_{p-1}(x)=1+2\sum_{k=1}^{p-1}\left(1-\frac{k}{p}\right)c(kx)=\frac{1}{p}\left(\frac{s\,(px/2)}{s\,(x/2)}\right)^2. \tag{1.5}$$

Оценка сверху была доказана им многими способами, в том числе и с помощью квадратурной формулы прямоугольников

$$\int\limits_0^1 t_{p-1}(x)\,dx=\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}t_{p-1}\,(k/p)$$

по нулям полинома $F_{p-1}(x)$. Оценка сверху может быть получена и с помощью квадратурной формулы, прямо определяемой полиномом Фейера (1.5):

$$\int\limits_0^1 t_{p-1}(x)\,dx=\frac{1}{p}\left\{t_{p-1}(0)+2\sum_{k=1}^{p-1}\left(1-\frac{k}{p}\right)t_{p-1}\,(k/p)\right\}.$$

Так как коэффициенты полинома Фейера неотрицательные, $\lambda(p)=\Lambda(p)$.

Л. Фейер рассматривал произвольные тригонометрические полиномы, но можно ограничиться только четными полиномами. Преобразование $(t_{p-1}(x)+t_{p-1}(-x))/2$ переводит произвольный неотрицательный тригонометрический полином $t_{p-1}(x)$ в четный неотрицательный полином с тем же значением в нуле и тем же средним значением.

Если $p\mid q$ (p делит q), то $\{k/p\}_{k=0}^{p-1}\subset\Theta_q$ и

$$\Lambda(p)=\lambda(p)=\Lambda(p,q)=\lambda(p,q)=p.$$

Рассмотрим случай, когда p не делит q. Тогда $\{k/p\}_{k=0}^{p-1}\not\subset\Theta_q$ и экстремальные полиномы в задачах (1.3), (1.4) отличны от полинома Фейера.

Отметим, что

$$\Lambda(p,q)=\sup\left\{t_{p-1}(0)\colon\ t_{p-1}\,(r/q)=1+\sum_{k=1}^{p-1}a_k c\,(kr/q)\geqslant 0,\ r/q\in\Theta_q\right\}. \tag{1.6}$$

Так как $T_p^+\subset T_{p,q}^+$ и полином из $T_{p,q}^+$ не обязан иметь нули четной кратности, если расстояние между двумя соседними нулями равно $1/q$, то в дискретной задаче Фейера (1.6) множество рассматриваемых полиномов гораздо богаче, чем в непрерывной задаче Фейера (1.1).

В дальнейшем рассматривается случай $(p,q)=1$. Покажем, что нули четного экстремального полинома в задачах (1.3), (1.6) располагаются на сетке Θ_q и что они наилучшим образом аппроксимируют нули полинома Фейера. Кроме того, покажем, что все коэффициенты экстремального полинома неотрицательные и что он определяет квадратурную формулу, с помощью которой в задачах (1.3), (1.6) получается правильная оценка сверху.

Пусть $p,q\in\mathbb{N},\ p\leqslant q/2,(p,q)=1,$

$$S^1_{p,q}=\left\{\left[\frac{qi}{p}\right]\colon\ i=1,\dots,\left[\frac{p}{2}\right]\right\},\qquad S^2_{p,q}=\left\{\left[\frac{qi}{p}\right]+1\colon\ i=1,\dots,\left[\frac{p-1}{2}\right]\right\},$$

$$S_{p,q}=S^1_{p,q}\cup S^2_{p,q}=\{1<r_1<r_2<\ldots<r_{p-1}<q/2\}\,. \tag{1.7}$$

Здесь $[x]$ означает целую часть числа x.

Числа $r_{2i-1}/q\in\Theta_q$ аппроксимируют нули полинома Фейера (1.5) снизу, а числа $r_{2i}/q\in\Theta_q$ — сверху, причем $r_{2i}-r_{2i-1}=1$, $i=1,\dots,[(p-1)/2]$. Для четного p и нечетного q число r_{p-1} равно $(q-1)/2$, а r_p не определено.

Введем четный дискретный полином порядка $p-1$

$$F_{p,q}\left(r/q\right)=\lambda_0\prod_{k=1}^{p-1}\left(c\left(r/q\right)-c\left(r_k/q\right)\right)=1+\sum_{k=1}^{p-1}\widehat{F}^{p,q}_k c\left(rk/q\right),\qquad \lambda_0>0. \tag{1.8}$$

По построению и свойствам чисел r_i для него выполнены неравенства

$$F_{p,q}\left(r/q\right)\geqslant 0,\qquad r/q\in\Theta_q, \tag{1.9}$$

т.е. он неотрицателен на сетке Θ_q.

Далее мы покажем, что у полинома $F_{p,q}$ коэффициенты $\widehat{F}^{p,q}_k>0$, $k=1,\dots,p-1$. С этой целью изучим арифметическую структуру множества $S_{p,q}$.

Пусть

$$\begin{aligned} &q=pk+r, && r=1,\dots,p-1, && (r,p)=1,\\ &p=rt+m, && m=1,\dots,r-1, && (m,r)=1 \qquad (r\geqslant 2); \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned} &I^1_\tau=\left\{ik+\tau-1\colon\ i=\left[\frac{(\tau-1)p}{r}\right]+1,\dots,\left[\frac{\tau p}{r}\right]\right\},\\ &I^2_\tau=\left\{ik+\tau\colon\ i=\left[\frac{(\tau-1)p}{r}\right]+1,\dots,\left[\frac{\tau p}{r}\right]\right\},\qquad \tau=1,\dots,r. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Тогда

$$S_{p,q}=\left(\bigcup_{\tau=1}^{[r/2]}(I^1_\tau\cup I^2_\tau)\right)\cup I^1_0\cup I^2_0, \tag{1.12}$$

где

$$\begin{aligned} &I^1_0=\left\{ik+\left[\frac{r}{2}\right]\colon\ i=\left[\frac{[r/2]\,p}{r}\right]+1,\dots,\left[\frac{p}{2}\right]\right\},\\ &I^2_0=\left\{ik+\left[\frac{r}{2}\right]+1\colon\ i=\left[\frac{[r/2]\,p}{r}\right]+1,\dots,\left[\frac{p-1}{2}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Множества $I^1_0,\ I^2_0$ могут быть и пустыми, если, например, r четное. В случае $r=1$

$$S_{p,q}=I^1_0\bigcup I^2_0,$$

где

$$I_0^1 = \left\{ik\colon\ i = 1,\dots,\left[\frac{p}{2}\right]\right\}, \qquad I_0^2 = \left\{ik+1\colon\ i = 1,\dots,\left[\frac{p-1}{2}\right]\right\}.$$

Мощности множеств $I_\tau^1,\ I_\tau^2$ равны:

$$|I_\tau^1| = |I_\tau^2| = \left[\frac{\tau p}{r}\right] - \left[\frac{(\tau-1)p}{r}\right] = t + \left[\frac{\tau m}{r}\right] - \left[\frac{(\tau-1)m}{r}\right]$$

$$= \begin{cases} t+1, & (\tau m) \mod r \leqslant m-1, \\ t, & (\tau m) \mod r \geqslant m. \end{cases} \tag{1.14}$$

Для $a \in \mathbb{Z}$ через $\langle a\rangle$ обозначим расстояние от числа a до ближайшего целого, кратного q:

$$\langle a\rangle = \min(a_0, q-a_0),$$

где $a_0 \in \mathbb{Z}_q,\ a \equiv a_0 \,(\mathrm{mod}\, q)$. Отметим легко проверяемые свойства операции $\langle a\rangle$:

$$\langle a_1\rangle = \langle a_2\rangle \iff a_2 \pm a_1 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, q) \iff c\,(a_1/q) = c\,(a_2/q)\,; \tag{1.15}$$

$$\langle -a\rangle = \langle a\rangle; \tag{1.16}$$

$$\text{если } \langle a_1\rangle = \langle a_2\rangle, \text{ то для любого } j \in \mathbb{Z} \quad \langle a_1 j\rangle = \langle a_2 j\rangle. \tag{1.17}$$

Кроме того, если $(q, j) = 1$, то $\langle a_1\rangle = \langle a_2\rangle$ тогда и только тогда, когда $\langle a_1 j\rangle = \langle a_2 j\rangle$.

Если в (1.10) $r = 1,\ \overline{r} = k$, то

$$S_{p,q} = \{\langle \overline{r} i\rangle\colon\ i = 1,\dots,p-1\}\,. \tag{1.18}$$

Действительно, согласно (1.15), (1.16)

$$\{\langle \overline{r} i\rangle\colon\ i = 1,\dots,[p/2]\} = \{ik:\ i = 1,\dots,[p/2]\} = I_0^1,$$

$$\left\{\langle \overline{r} i\rangle\colon\ i = \left[\frac{p}{2}\right]+1,\dots,p-1\right\} = \left\{\langle q-ki\rangle\colon\ i = \left[\frac{p}{2}\right]+1,\dots,p-1\right\}$$

$$= \left\{\langle (p-i)k+1\rangle:\ i = \left[\frac{p}{2}\right]+1,\dots,p-1\right\} = \left\{ik+1\colon\ i = 1,\dots,\left[\frac{p-1}{2}\right]\right\} = I_0^2.$$

Покажем, что и при $r \geqslant 2$ множество $S_{p,q}$ (1.7) можно описать аналогичным образом для некоторого $\overline{r} = \overline{r}(p, q)$.

Лемма 1. *Если $r, m \in \mathbb{N},\ r > m,\ (r, m) = 1$, то существуют числа $u, l \in \mathbb{Z}_+,\ u \leqslant m/2,\ l \leqslant r/2$ такие, что*

$$|ru - ml| = 1. \tag{1.19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно [23], что уравнение

$$ru - ml = 1 \tag{1.20}$$

при условии $(r, m) = 1$ имеет решение (u, l), $1 \leqslant u \leqslant m$, $1 \leqslant l \leqslant r$. Если $u \leqslant m/2,\ l \leqslant r/2$, то (1.19) доказано. Возможны еще три случая.

1. Пусть $u > [m/2]\,,\ l > [r/2]\,$. Если $u^* = m-u,\ l^* = r-l$, то $u^* \leqslant m/2,\ l^* \leqslant r/2$,

$$|ru^* - ml^*| = |(m-u)r - (r-l)m| = |-ru + lm| = 1$$

и (u^*, l^*) — искомое решение уравнения (1.19).

2. Пусть $u > [m/2]$, $l \leqslant [r/2]$. Если $r = 2r' + 1$, $m = 2m'$, то $u \geqslant m' + 1$, $l \leqslant r'$ и

$$ru - ml \geqslant (2r' + 1)(m' + 1) - 2m'r' = 2r' + m' + 1 > 1,$$

что противоречит (1.20). Если $r = 2r'$, $m = 2m' + 1$, то $u \geqslant m' + 1$, $l \leqslant r'$ и

$$ru - ml \geqslant 2r'(m' + 1) - (2m' + 1)r' = r' \geqslant 1.$$

Равенство (1.20) выполнено, если только $r = 2$, $m = 1$. В этом случае можно взять $u = 0$, $l = 1$. Если $r = 2r' + 1$, $m = 2m' + 1$, то $u \geqslant m' + 1$, $l \leqslant r'$ и

$$ru - lm \geqslant (2r' + 1)(m' + 1) - (2m' + 1)r' = r' + m' + 1 > 1,$$

что опять противоречит (1.20).

3. Пусть $u \leqslant m/2$, $l > [r/2]$. Тогда

$$ru - ml \leqslant \frac{rm}{2} - m\left(\left[\frac{r}{2}\right] + 1\right) < 0,$$

что противоречит (1.20).

Все случаи рассмотрены. Лемма 1 доказана.

Если r, m из (1.10), $r \geqslant 2$, числа u, l из леммы 1, то положим

$$\overline{r} = \overline{r}(p, q) = (lt + u)k + l. \tag{1.21}$$

Отметим, что

$$(\overline{r}, q) = 1, \qquad (lt + u, p) = 1. \tag{1.22}$$

Действительно, согласно (1.10), (1.19)

$$r(lt + u) - lp = r(lt + u) - l(rt + m) = ru - lm = \pm 1$$

и $(lt + u, p) = 1$. Пусть $(\overline{r}, q) = d$. Так как

$$r\overline{r} - lq = r((lt + u)k + l) - l((rt + m)k + r) = (r(lt + u) - lp)k = \pm k,$$

то $d \mid k, d \mid r$, $d \mid l$, поэтому из (1.19) $d = 1$.

Лемма 2. *Если* $r, m \in \mathbb{N}$, $r > m$, $(r, m) = 1$, $\tau \in 0, 1, \ldots, r$,

$$s_1(\tau) = r - m\tau + r\left[\frac{\tau m}{r}\right], \qquad s_2(\tau) = r - s_1(\tau),$$

то

$$s_1\left(\left\{0, 1, \ldots, \left[\frac{r-1}{2}\right]\right\}\right) \bigcap s_2\left(\left\{1, \ldots, \left[\frac{r}{2}\right]\right\}\right) = \varnothing, \tag{1.23}$$

$$s_1\left(\left\{0, 1, \ldots, \left[\frac{r-1}{2}\right]\right\}\right) \bigcup s_2\left(\left\{1, \ldots, \left[\frac{r}{2}\right]\right\}\right) = \{1, \ldots, r\}. \tag{1.24}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $s_1(\tau)$ биективно отображает множество $\{0, 1, \ldots, r-1\}$ на множество $\{1, \ldots, r\}$. Действительно,

$$s_1(\tau) = r - m\tau + r\left[\frac{\tau m}{r}\right] \leqslant r - m\tau + r\frac{\tau m}{r} = r, \qquad s_1(\tau) > r - m\tau + r\left(\frac{\tau m}{r} - 1\right) = 0.$$

Если $s_1(\tau_1) = s_1(\tau_2)$, $0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant r - 1$, то

$$m(\tau_2 - \tau_1) = r\left(\left[\frac{\tau_2 m}{r}\right] - \left[\frac{\tau_1 m}{r}\right]\right),$$

что противоречит условию $(r, m) = 1$. Аналогично функция $s_2(\tau)$ биективно отображает множество $\{1, \ldots, r - 1\}$ на себя.

Если $0 \leqslant \tau_1 \leqslant [(r - 1)/2]$, $1 \leqslant \tau_2 \leqslant [r/2]$, $s_1(\tau_1) = s_2(\tau_2)$, то $1 \leqslant \tau_1 + \tau_2 \leqslant [(r - 1)/2] + [r/2] < r$ и $r\,(1 + [\tau_1 m/r] + [\tau_2 m/r]) = m(\tau_1 + \tau_2)$, что опять противоречит взаимной простоте m и r. Значит, (1.23) выполнено.

Так как $[(r - 1)/2] + [r/2] + 1 = r$, то верно и (1.24). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если* $p, q \in \mathbb{N}$, $p \leqslant q/2$, $(p,q)=1$, *число* $\overline{r}$ *определено в* (1.21), *то*

$$S_{p,q} = \{\langle \overline{r} j\rangle \colon\ j = 1,\dots,p-1\}\,. \tag{1.25}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть r, m, u, l — числа из (1.10) и леммы 1, определяющие число $\overline{r}$ (1.21). По лемме 1 $ru - ml = \pm 1$.

Рассмотрим вначале случай

$$ru - ml = 1. \tag{1.26}$$

Если $j = 1,\dots,p-1$, то j может быть записано в виде $j = ri + s$, где $s = 1,\dots,r$, $i = 0,1,\dots,i_s$,

$$i_s = \begin{cases} t, & s = 1,\dots,m-1,\\ t-1, & s = m,\dots,r. \end{cases} \tag{1.27}$$

Согласно (1.10), (1.21), (1.26)

$$r\overline{r} = r((lt+u)k+l) = l((rt+m)k+r) + (ru-ml)k = lq+k, \tag{1.28}$$

поэтому

$$\{\langle \overline{r} j\rangle \colon\ j = 1,\dots,p-1\} = \{\langle s\overline{r} + ik\rangle \colon\ s = 1,\dots,r,\ i = 0,1,\dots,i_s\}.$$

Пусть $s_1(\tau)$ из леммы 2, $s \in s_1\left(\{0,1,\dots,[(r-1)/2]\}\right)$, т.е.

$$s = s_1(\tau) = r - m\tau + r\left[\frac{\tau m}{r}\right], \qquad \tau = 0,1,\dots,\left[\frac{r-1}{2}\right].$$

Так как согласно (1.10), (1.26)

$$\begin{aligned} m\overline{r} &= mltk + muk + ml = (ru-1)tk + muk + ml\\ &= u((rt+m)k+r) + ml - ru - tk = uq - 1 - tk, \end{aligned} \tag{1.29}$$

то, учитывая (1.15), (1.28), получим

$$\langle s\overline{r} + ik\rangle = \left\langle \left(r - m\tau + r\left[\frac{\tau m}{r}\right]\right)\overline{r} + ik\right\rangle = \left\langle k + \tau + \tau t k + k\left[\frac{\tau m}{r}\right] + ik\right\rangle = \langle jk + \tau\rangle, \tag{1.30}$$

где

$$j = \tau t + \left[\frac{\tau m}{r}\right] + 1 + i = \left[\frac{\tau p}{r}\right] + 1 + i, \qquad i = 0,1,\dots,i_s.$$

Покажем, что

$$\left[\frac{\tau p}{r}\right] + 1 + i_s = \left[\frac{(\tau+1)p}{r}\right].$$

Отсюда будет вытекать, что

$$j = \left[\frac{\tau p}{r}\right] + 1,\dots,\left[\frac{(\tau+1)p}{r}\right]. \tag{1.31}$$

В силу (1.14) достаточно показать, что для $s = s_1(\tau)$

$$1 + i_s = \begin{cases} t+1, & ((\tau+1)m) \mod r \leqslant m-1,\\ t, & ((\tau+1)m) \mod r \geqslant m. \end{cases} \tag{1.32}$$

Если $1 \leqslant s \leqslant m-1$, то $1 + i_s = t+1$,

$$(\tau+1)m = r\left(1 + \left[\frac{\tau m}{r}\right]\right) + m - s, \qquad 1 \leqslant ((\tau+1)m) \mod r = m - s \leqslant m-1,$$

и (1.32) верно. Так как $s_2(1)=m$, то равенство $s=s_1(\tau)=m$ невозможно. Если $m+1\leqslant s\leqslant r$, то $1+i_s=t$,

$$m\leqslant ((\tau+1)m \mod r=r+m-s\leqslant r-1,$$

и (1.32) также верно.

Пусть $\tau=0,1,\ldots,[(r-1)/2]-1$ или $\tau=[(r-1)/2]$, r — четное. Тогда $\tau+1\leqslant [r/2]$ и для $s\in s_1(\{0,1,\ldots,[(r-1)/2]\})$ согласно (1.11), (1.30), (1.31)

$$\{\langle s\overline{r}+ik\rangle\colon\ i=0,1,\ldots,i_s\}=\left\{\langle jk+\tau\rangle\colon\ j=\left[\frac{\tau p}{r}\right]+1,\ldots,\left[\frac{(\tau+1)p}{r}\right]\right\}$$

$$=\left\{jk+\tau\colon\ j=\left[\frac{\tau p}{r}\right]+1,\ldots,\left[\frac{(\tau+1)p}{r}\right]\right\}=I^1_{\tau+1}. \tag{1.33}$$

Пусть r — нечетное, $\tau=[(r-1)/2]=[r/2]$. Тогда согласно (1.13)

$$\left\{\left\langle jk+\left[\frac{r}{2}\right]\right\rangle\colon\ j=\left[\frac{[r/2]\,p}{r}\right]+1,\ldots,\left[\frac{p}{2}\right]\right\}=\left\{jk+\left[\frac{r}{2}\right]\colon\ j=\left[\frac{[r/2]\,p}{r}\right]+1,\ldots,\left[\frac{p}{2}\right]\right\}=I^1_0. \tag{1.34}$$

Так как $2\,[r/2]+1=r$, $m<r$, то

$$\left[\frac{[r/2]\,p}{r}\right]+\left[\frac{([r/2]+1)\,p}{r}\right]+1=\left[\frac{r}{2}\right]t+\left[\frac{m}{2}-\frac{m}{2r}\right]+\left(\left[\frac{r}{2}\right]+1\right)t+\left[\frac{m}{2}+\frac{m}{2r}\right]+1$$

$$=rt+\left[\frac{m-1}{2}\right]+\left[\frac{m}{2}\right]+1=rt+m=p.$$

Отсюда и из (1.13), (1.15), (1.16) имеем

$$\left\{\left\langle jk+\left[\frac{r}{2}\right]\right\rangle\colon\ j=\left[\frac{p}{2}\right]+1,\ldots,\left[\frac{([r/2]+1)\,p}{r}\right]\right\}$$

$$=\left\{\left\langle (p-j)k+r-\left[\frac{r}{2}\right]\right\rangle\colon\ j=\left[\frac{p}{2}\right]+1,\ldots,\left[\frac{([r/2]+1)\,p}{r}\right]\right\}$$

$$=\left\{\left\langle ik+\left[\frac{r}{2}\right]+1\right\rangle\colon\ i=\left[\frac{[r/2]\,p}{r}\right]+1,\ldots,p-\left[\frac{p}{2}\right]-1\right\}$$

$$=\left\{ik+\left[\frac{r}{2}\right]+1\colon\ i=\left[\frac{[r/2]\,p}{r}\right]+1,\ldots,\left[\frac{p-1}{2}\right]\right\}=I^2_0. \tag{1.35}$$

Собирая вместе (1.33), (1.34), (1.35), получим

$$\left\{\langle s\overline{r}+ik\rangle\colon\ s\in s_1\left(\left\{0,1,\ldots,\left[\frac{r-1}{2}\right]\right\}\right),\ i=0,1,\ldots,i_s\right\}=\left(\bigcup_{\tau=1}^{[r/2]}I^1_\tau\right)\bigcup I^1_0\bigcup I^2_0. \tag{1.36}$$

Пусть $s_2(\tau)$ из леммы 2, $s\in s_2(\{1,\ldots,[r/2]\})$, т.е.

$$s=s_2(\tau)=m\tau-r\left[\frac{\tau m}{r}\right],\qquad \tau=1,\ldots,\left[\frac{r}{2}\right].$$

Тогда согласно (1.15), (1.16), (1.29) для $i=0,1,\ldots,i_s$

$$\langle s\overline{r}+ik\rangle=\left\langle\left(m\tau-r\left[\frac{\tau m}{r}\right]\right)\overline{r}+ik\right\rangle=\left\langle -\tau-\tau tk-k\left[\frac{\tau m}{r}\right]+ik\right\rangle$$

$$=\left\langle\left(\left[\frac{\tau m}{r}\right]+\tau t-i\right)k+\tau\right\rangle=\langle jk+\tau\rangle=jk+\tau,$$

где $j=[\tau m/r]+\tau t-i=[\tau p/r]-i$.

Покажем, что

$$\left[\frac{\tau p}{r}\right]-i_s=\left[\frac{(\tau-1)p}{r}\right]+1. \tag{1.37}$$

Отсюда будет следовать, что $j=[(\tau-1)p/r]+1,\dots,[\tau p/r]$ и согласно (1.11)

$$\{\langle s\overline{r}+ik\rangle\colon\ i=0,1,\dots,i_s\}=\left\{jk+\tau\colon\ j=\left[\frac{(\tau-1)p}{r}\right]+1,\dots,\left[\frac{\tau p}{r}\right]\right\}=I_\tau^2.$$

Ввиду формулы (1.14) для доказательства (1.37) достаточно убедиться, что для $s=s_2(\tau)$ справедливо равенство

$$1+i_s=\begin{cases}t+1, & (\tau m)\mod r\leqslant m-1,\\ t, & (\tau m)\mod r\geqslant m.\end{cases}$$

Оно вытекает из определения i_s (1.27) и равенства $(m\tau)\mod r=s$.

Таким образом,

$$\{\langle s\overline{r}+ik\rangle\colon\ s\in s_2\left(\{1,\dots,[r/2]\}\right),i=0,1,\dots,i_s\}=\bigcup_{\tau=1}^{[r/2]}I_\tau^2,$$

что вместе с (1.12), (1.36) доказывает равенство (1.25), если выполнено (1.26).

Пусть теперь $ru-ml=-1$. Тогда с помощью аналогичных рассуждений получим

$$r\overline{r}=lq-k,\qquad m\overline{r}=uq+1+tk,\qquad \langle(ri+s)\overline{r}\rangle=\langle s\overline{r}-ik\rangle.$$

Этот случай сводится к предыдущему (1.26). Действительно, если $s=r-m\tau+r\left[\tau m/r\right]$, $\tau=0,1,\dots,[(r-1)/2]$, то

$$\langle s\overline{r}-ik\rangle=\left\langle -k-\tau-\tau tk-k\left[\frac{\tau m}{r}\right]-ik\right\rangle=\left\langle\left(\tau t+\left[\frac{\tau m}{r}\right]+1+i\right)k+\tau\right\rangle=\langle jk+\tau\rangle,$$

где

$$j=\tau t+\left[\frac{\tau m}{r}\right]+1+i=\left[\frac{\tau p}{r}\right]+1+i,\qquad i=0,1,\dots,i_s.$$

Далее действуем так же, как и в случае (1.26).

Если $s=m\tau-r\left[\tau m/r\right]$, $\tau=1,\dots,[r/2]$, то

$$\langle s\overline{r}-ik\rangle=\left\langle \tau+\tau tk+k\left[\frac{\tau m}{r}\right]-ik\right\rangle=\left\langle\left(\tau t+\left[\frac{\tau m}{r}\right]-i\right)k+\tau\right\rangle=\langle jk+\tau\rangle.$$

где $j=\tau t+[\tau m/r]-i=[\tau p/r]-i$, $i=0,1,\dots,i_s$.

Далее действуем так же, как и в случае (1.26). Лемма 3 доказана полностью.

Согласно (1.15), (1.17), (1.18), (1.25) неотрицательный дискретный полином $F_{p,q}$ (1.8) может быть записан в виде

$$F_{p,q}\left(r/q\right)=\lambda_0\prod_{k=1}^{p-1}\left(c\left(r/q\right)-c\left(\overline{r}k/q\right)\right). \tag{1.38}$$

Нас интересуют знаки его коэффициентов $\widehat{F}_k^{p,q}$.

Рассмотрим четный тригонометрический полином порядка $p-1$

$$t_{p-1}(x,\varphi)=\prod_{k=1}^{p-1}(c(x)-c(k\varphi))$$

от переменного x с нулями $\pm k\varphi$, $k=1,\dots,p-1$, и запишем для него разложение

$$t_{p-1}(x,\varphi)=\frac{1}{2^{p-2}}\left\{\sum_{k=0}^{p-2}(-1)^kA_k^p(\varphi)c((p-1-k)x)+\frac{1}{2}\left(-1\right)^{(p-1)}A_{p-1}^p(\varphi)\right\},$$

в котором коэффициенты $A_k^p(\varphi)$ являются четными тригонометрическими полиномами переменной φ порядка $m_k = pk - k(k+1)/2$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$.

Коэффициенты полиномов $A_k^p(\varphi)$ имеют арифметическую природу. Если $\chi_k^p(s)$ — число решений диофантова уравнения

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = s,$$

где $n_i \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(p-1)\}$, $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$, $s \in \{-m_k, \ldots, m_k\}$, то, как вытекает из [24],

$$A_k^p(\varphi) = \chi_k^p(0) + 2\sum_{s=1}^{m_k} \chi_k^p(s) c(s\varphi). \tag{1.39}$$

Числа $\chi_k^p(s)$ для всех p, k, s, по-видимому, неизвестны. Но даже если бы они были известны, исследовать знаки $A_k^p(\varphi)$ при $\varphi = \overline{r}/q$, исходя из разложения (1.39), затруднительно.

Для полиномов $A_k^p(\varphi)$ справедливы рекуррентные соотношения

$$\begin{gathered} A_k^p(\varphi) = A_k^{p-1}(\varphi) + A_{k-2}^{p-1}(\varphi) + 2c((p-1)\varphi) A_{k-1}^{p-1}(\varphi), \qquad k = 1, \ldots, p-2, \\ A_{p-1}^p(\varphi) = 2A_{p-3}^{p-1}(\varphi) + 2c((p-1)\varphi) A_{p-2}^{p-1}(\varphi), \qquad A_0^p(\varphi) = 1, \qquad A_{-1}^p(\varphi) = 0. \end{gathered} \tag{1.40}$$

Они легко выводятся по индукции.

С помощью (1.40) можно, например, доказать следующие формулы:

$$A_1^p = \frac{2s\left((p-1)\varphi/2\right)\ c\left(p\varphi/2\right)}{s\left(\varphi/2\right)},$$

$$A_2^p(\varphi) = \frac{s\left((p-1)\varphi/2\right)}{s\left(\varphi/2\right)\ s(\varphi)} \left\{ s\left(\frac{p-2}{2}\,\varphi\right) + s\left(\frac{p}{2}\,\varphi\right) - s\left(\frac{p+2}{2}\,\varphi\right) + s\left(\frac{3p-2}{2}\,\varphi\right) \right\},$$

$$A_3^p(\varphi) = \frac{2s\left((p-1)\varphi/2\right)\ s\left((p-2)\varphi/2\right)\ c\left(p\varphi/2\right)}{s\left(\varphi/2\right)\ s(\varphi)\, s\left(3\varphi/2\right)}$$

$$\times \left\{ s\left(\frac{p-1}{2}\,\varphi\right) + s\left(\frac{p+1}{2}\,\varphi\right) - s\left(\frac{p+3}{2}\,\varphi\right) + s\left(\frac{3p-3}{2}\,\varphi\right) \right\}.$$

В этих разложениях $A_k^p(\varphi)$ последний сомножитель с увеличением k становится все сложнее. Причем он уже не допускает более простой факторизации, что делает исследование его знака затруднительным. Поэтому мы поступим следующим образом.

Положим

$$B_k^p(\varphi) = A_{k-1}^p(\varphi) + A_k^p(\varphi), \qquad k = 1, \ldots, p-1, \qquad B_0^p(\varphi) = 1, \qquad B_{-1}^p(\varphi) = 0.$$

С помощью (1.40) выводим рекуррентные соотношения

$$\begin{gathered} B_k^p(\varphi) = B_k^{p-1}(\varphi) + B_{k-2}^{p-1}(\varphi) + 2c((p-1)\varphi) B_{k-1}^{p-1}(\varphi), \qquad k = 1, \ldots, p-2, \\ B_{p-1}^p(\varphi) = B_{p-3}^{p-1}(\varphi) + (1 + 2c((p-1)\varphi) B_{p-2}^{p-1}(\varphi). \end{gathered} \tag{1.41}$$

Лемма 4. *Для* $k = 1, \ldots, p-1$

$$B_k^p(\varphi) = \prod_{\nu=1}^{k} \frac{s\left((p - \nu/2)\,\varphi\right)}{s\left(\nu\varphi/2\right)}. \tag{1.42}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$A_0^2(\varphi)=1,\qquad A_1^2(\varphi)=2c(\varphi),\qquad B_1^2(\varphi)=A_0^2(\varphi)+A_1^2(\varphi)=1+2c(\varphi)=\frac{s\,(3\varphi/2)}{s\,(\varphi/2)},$$

поэтому (1.42) справедливо для $p=2,\ k=1$. Предположим, что

$$B_k^{p-1}(\varphi)=\prod_{\nu=1}^{k}\frac{s\left(\left(p-1-\frac{\nu}{2}\right)\varphi\right)}{s\,(\nu\varphi/2)},\qquad k=1,\dots,p-2.$$

Если $k=1,\dots,p-2$, то согласно (1.41)

$$B_k^p(\varphi)\prod_{\nu=1}^{k}s\left(\frac{\nu}{2}\varphi\right)=\prod_{\nu=1}^{k}s\left(\left(p-1-\frac{\nu}{2}\right)\varphi\right)+s\left(\frac{k-1}{2}\varphi\right)s\left(\frac{k}{2}\varphi\right)\prod_{\nu=1}^{k-2}s\left(\left(p-1-\frac{\nu}{2}\right)\varphi\right)$$

$$+2c((p-1)\varphi)s\left(\frac{k}{2}\varphi\right)\prod_{\nu=1}^{k-1}s\left(\left(p-1-\frac{\nu}{2}\right)\varphi\right)=\left\{s\left(\left(p-\frac{k+1}{2}\right)\varphi\right)s\left(\left(p-\frac{k+2}{2}\right)\varphi\right)\right.$$

$$\left.+s\left(\frac{k-1}{2}\varphi\right)s\left(\frac{k}{2}\varphi\right)+2c((p-1)\varphi)s\left(\frac{k}{2}\varphi\right)s\left(\left(p-\frac{k+1}{2}\right)\varphi\right)\right\}\prod_{\nu=3}^{k}s\left(\left(p-\frac{\nu}{2}\right)\varphi\right)$$

$$=\left\{s\left(\left(p-1+\frac{k}{2}\right)\varphi\right)s\left(\left(p-\frac{k+1}{2}\right)\varphi\right)+s\left(\frac{k-1}{2}\varphi\right)s\left(\frac{k}{2}\varphi\right)\right\}\prod_{\nu=3}^{k}s\left(\left(p-\frac{\nu}{2}\right)\varphi\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{c\left(\frac{\varphi}{2}\right)-c\left(\left(2p-\frac{3}{2}\right)\varphi\right)\right\}\prod_{\nu=3}^{k}s\left(\left(p-\frac{\nu}{2}\right)\varphi\right)=\prod_{\nu=1}^{k}s\left(\left(p-\frac{\nu}{2}\right)\varphi\right).$$

Аналогично, если $k=p-1$, то

$$B_{p-1}^p(\varphi)\prod_{\nu=1}^{p-1}s\left(\frac{\nu}{2}\varphi\right)=s\left(\frac{p-1}{2}\varphi\right)\left\{s\left(\frac{p-2}{2}\varphi\right)+(1+2c((p-1)\varphi))s\left(\frac{p}{2}\varphi\right)\right\}$$

$$\times\prod_{\nu=3}^{p-1}s\left(\left(p-\frac{\nu}{2}\right)\varphi\right)=s\left(\frac{p-1}{2}\varphi\right)\left\{s\left(\frac{p}{2}\varphi\right)+s\left(\left(\frac{3}{2}p-1\right)\varphi\right)\right\}\prod_{\nu=3}^{p-1}s\left(\left(p-\frac{\nu}{2}\right)\varphi\right)$$

$$=2s\left(\frac{p-1}{2}\varphi\right)c\left(\frac{p-1}{2}\varphi\right)s\left(\left(p-\frac{1}{2}\right)\varphi\right)\prod_{\nu=3}^{p-1}s\left(\left(p-\frac{\nu}{2}\right)\varphi\right)=\prod_{\nu=1}^{p-1}s\left(\left(p-\frac{\nu}{2}\right)\varphi\right).$$

Таким образом, (1.42) верно для p и $k=1,\dots,p-1$. Лемма 4 доказана.

Если $\overline{r}=(lt+u)k+l$ (1.21), $ru-lm=\pm1$ (1.19), то

$$\frac{\overline{r}}{q}=\frac{lt+u}{p}\mp\frac{1}{pq}.$$

Согласно (1.22), (1.42) $(lt+u,p)=1$ и $B_k^p\left((lt+u)/p\right)=(-1)^k$. Нетрудно убедиться, что каждый сомножитель в произведении (1.42) имеет одинаковые по знаку значения в точках $\frac{\overline{r}}{q}$ и $\frac{lt+u}{p}$, поэтому справедлива следующая

Лемма 5. *Для* $k=1,\dots,p-1$ $\operatorname{sgn}B_k^p\left(\overline{r}/q\right)=(-1)^k$.

Из леммы 5 вытекает, что для $k = 0, \ldots, p-1$

$$\left|B_k^p\left(\overline{r}/q\right)\right| = (-1)^k B_k^p\left(\overline{r}/q\right) = (-1)^k A_k^p\left(\overline{r}/q\right) - (-1)^{k-1} A_{k-1}^p\left(\overline{r}/q\right) > 0.$$

Отсюда

$$(-1)^k A_k^p\left(\overline{r}/q\right) = \sum_{s=0}^{k} \left|B_s^p\left(\overline{r}/q\right)\right| > 0, \qquad k = 0, \ldots, p-1,$$

поэтому для коэффициентов полинома $F_{p,q}$ (1.8), (1.38) справедливы неравенства

$$2\widehat{F}_0^{p,q} = 2 > \widehat{F}_1^{p,q} > \widehat{F}_2^{p,q} > \ldots > \widehat{F}_{p-1}^{p,q} > 0. \tag{1.43}$$

Они могут быть вычислены по формулам

$$\widehat{F}_k^{p,q} = \frac{2\sum\limits_{s=0}^{p-1-k} \left|B_s^p\left(\overline{r}/q\right)\right|}{\sum\limits_{s=0}^{p-1} \left|B_s^p\left(\overline{r}/q\right)\right|}, \qquad k = 1, \ldots, p-1. \tag{1.44}$$

Значение полинома $F_{p,q}$ в нуле равно

$$F_{p,q}(0) = 1 + \sum_{k=1}^{p-1} \widehat{F}_k^{p,q} = 1 + \frac{2\sum\limits_{k=1}^{p-1}\sum\limits_{s=0}^{p-1-k} \left|B_s^p\left(\overline{r}/q\right)\right|}{\sum\limits_{s=0}^{p-1} \left|B_s^p\left(\overline{r}/q\right)\right|} = \frac{2\sum\limits_{s=0}^{p-1} (p-s)\left|B_s^p\left(\overline{r}/q\right)\right|}{\sum\limits_{s=0}^{p-1} \left|B_s^p\left(\overline{r}/q\right)\right|} - 1. \tag{1.45}$$

Отметим, что для классического полинома Фейера F_{p-1} (1.5) $\varphi = 1/p$, $\left|B_k^p(1/p)\right| = 1$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$, и его коэффициенты и значение в нуле могут быть вычислены по формулам (1.44), (1.45).

Рассмотрим следующий четный дискретный полином порядка r_{p-1} (1.7):

$$G_{p,q}\left(r/q\right) = \sum_{k=0}^{p-1} \widehat{G}_k^{p,q} c\left(\overline{r}kr/q\right), \tag{1.46}$$

у которого коэффициенты вычисляются по формулам

$$\widehat{G}_k^{p,q} = \frac{\widehat{F}_k^{p,q}}{F_{p,q}(0)}, \qquad k = 0, 1, \ldots, p-1. \tag{1.47}$$

Согласно (1.9), (1.38), (1.43) он обладает следующими свойствами:

$$\widehat{G}_0^{p,q} = \frac{1}{F_{p,q}(0)}, \qquad \widehat{G}_k^{p,q} > 0, \qquad k = 1, \ldots, p-1; \tag{1.48}$$

$$G_{p,q}\left(r/q\right) \geqslant 0, \qquad r/q \in \Theta_q; \tag{1.49}$$

$$G_{p,q}(0) = 1, \qquad G_{p,q}\left(r/q\right) = 0, \qquad r = 1, \ldots, p-1. \tag{1.50}$$

Лемма 6. *Если $p, q \in \mathbb{N}$, $p \leqslant q/2$, $(p,q) = 1$, то для любого тригонометрического полинома $t_{p-1} \in T_p$ справедлива квадратурная формула*

$$a_0(t_{p-1}) = \int_0^1 t_{p-1}(x)\,dx = \sum_{k=0}^{p-1} \widehat{G}_k^{p,q}\, t_{p-1}\left(\overline{r}k/q\right). \tag{1.51}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формулу (1.51) достаточно проверить для полиномов $c(kx)$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$, для которых она вытекает из равенств (1.50). Лемма 6 доказана.

Аналогичная квадратурная формула справедлива и для дискретных тригонометрических полиномов порядка $p-1$. В этом случае

$$a_0(t_{p-1}) = \frac{1}{q}\sum_{r=0}^{q-1} t_{p-1}\left(r/q\right) = \sum_{k=0}^{p-1} \widehat{G}_k^{p,q}\, t_{p-1}\left(\overline{r}k/q\right).$$

Теперь мы в состоянии доказать основную теорему этого параграфа.

Теорема 1. *Если* $p, q \in \mathbb{N}$, $p \leqslant q/2$, $(p,q) = 1$, *то*

$$\Lambda(p,q) = \lambda(p,q) = F_{p,q}(0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценка снизу величины (1.4) $\lambda(p,q) \geqslant F_{p,q}(0)$ получается с помощью полинома (1.8), (1.38)

$$F_{p,q}(r/q) = \sum_{k=0}^{p-1} \widehat{F}_k^{p,q} c(kr/q), \qquad \widehat{F}_0^{p,q} = 1.$$

Согласно (1.9), (1.43) $F_{p,q} \in T_{p,q}^{+}$ и его коэффициенты положительные.

Оценка сверху величины (1.3) получается с помощью квадратурной формулы (1.51). Если $t_{p-1} \in T_{p,q}^{+}$, то согласно (1.48)

$$1 = \sum_{k=0}^{p-1} \widehat{G}_k^{p,q}\, t_{p-1}\left(\overline{r}k/q\right) \geqslant \widehat{G}_0^{p,q} t_{p-1}(0).$$

Отсюда

$$t_{p-1}(0) \leqslant \frac{1}{\widehat{G}_0^{p,q}} = F_{p,q}(0),$$

поэтому $\Lambda(p,q) \leqslant F_{p,q}(0)$. Остается заметить, что $\lambda(p,q) \leqslant \Lambda(p,q)$. Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е 1. Если p не делит q, $(p,q) = d$, $p = dp'$, $q = dq'$, то

$$\Lambda(p,q) = \lambda(p,q) = d\Lambda(p', q')$$

и экстремальный полином имеет вид

$$F_{p,q}(r/q) = F_{d-1}(r/q) \sum_{k=0}^{p'-1} \widehat{F}_k^{p',q'} c(dkr/q).$$

Его порядок равен $p-1$. Для доказательства отметим, что согласно [6] дискретная задача Фейера $\Lambda(p,q)$ (1.3) эквивалентна дискретной задаче Турана $a_T(p,q)$ (см. следующий раздел). Величина $a_T(p,q)$ в задаче Турана зависит только от отношения p/q, в чем легко убедиться, рассматривая сужения функций из класса $L_T(p,q)$ (2.6)–(2.8) на сетку $\Theta_{q'} \subset \Theta_q$.

Пусть δ_{sk} — символ Кронекера. Система косинусов

$$\{c\left(kr/q\right)\colon\ k = 0, 1, \ldots, [q/2]\,,\ r \in \mathbb{Z}_q\} \tag{1.52}$$

является ортогональной на сетке Θ_q :

$$d_s\delta_{sk} = \frac{1}{q}\sum_{r=0}^{q-1} c\left(kr/q\right)\, c\left(sr/q\right) = \begin{cases} 1, & k = s = 0,\ q/2 \quad (q \text{ — четное}),\\ 1/2, & k = s = 1, \ldots, [(q-1)/2]\,,\\ 0, & k \neq s. \end{cases} \tag{1.53}$$

Поэтому для четного дискретного полинома порядка $[q/2]$

$$U_{p,q}\left(s/q\right)=\frac{1}{q}\sum_{r=0}^{q-1}F_{p,q}\left(r/q\right)c\left(rs/q\right)=\sum_{k=0}^{[q/2]}\widehat{U}_{k}^{p,q}c\left(ks/q\right)=\begin{cases}\widehat{F}_{s}^{p,q}d_{s}, & s=0,1,\ldots,p-1,\\ 0, & s=p,\ldots,q-p,\end{cases} \tag{1.54}$$

согласно (1.8), (1.9), (1.43) выполняются следующие свойства:

$$\widehat{U}_{k}^{p,q}\geqslant 0,\qquad k=0,1,\ldots,[q/2]\,; \tag{1.55}$$

$$\widehat{U}_{0}^{p,q}=F_{p,q}(0)/q,\qquad \widehat{U}_{k}^{p,q}=0,\qquad k\in S_{p,q}; \tag{1.56}$$

$$1=U_{p,q}(0)>U_{p,q}\left(1/q\right)>\ldots>U_{p,q}\left((p-1)/q\right)>0; \tag{1.57}$$

$$U_{p,q}\left(s/q\right)=0,\qquad s=p,\ldots,q-p. \tag{1.58}$$

З а д а ч а 1. Доказать, что полином

$$U_{p,q}(x)=\sum_{k=0}^{[q/2]}\widehat{U}_{k}^{p,q}c(kx) \tag{1.59}$$

положителен на интервале $(-p/q,p/q)$.

Вследствие (1.22) система косинусов

$$\left\{c\left(\overline{r}kr/q\right)\colon\ k=0,1,\ldots,[q/2]\,,\ r\in\mathbb{Z}_{q}\right\}$$

является перестановкой системы (1.52), и для нее справедливы равенства (1.53). Поэтому для четного дискретного полинома порядка $[q/2]$

$$V_{p,q}\left(s/q\right)=\frac{F_{p,q}(0)}{q}\sum_{r=0}^{q-1}G_{p,q}\left(r/q\right)c\left(\overline{r}rs/q\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{[q/2]}\widehat{V}_{k}^{p,q}c\left(\overline{r}ks/q\right)=\begin{cases}F_{p,q}(0)\widehat{G}_{s}^{p,q}d_{s}, & s=0,1,\ldots,p-1,\\ 0, & s=p,\ldots,q-p,\end{cases} \tag{1.60}$$

согласно (1.43) и (1.47)–(1.50) выполняются следующие свойства:

$$\widehat{V}_{k}^{p,q}\geqslant 0,\qquad k=0,1,\ldots,[q/2]\,; \tag{1.61}$$

$$\widehat{V}_{0}^{p,q}=F_{p,q}(0)/q,\qquad \widehat{V}_{k}^{p,q}=0,\qquad k=1,\ldots,p-1; \tag{1.62}$$

$$1=V_{p,q}(0)>V_{p,q}\left(1/q\right)>\ldots>V_{p,q}\left((p-1)/q\right)>0; \tag{1.63}$$

$$V_{p,q}\left(s/q\right)=0,\qquad s=p,\ldots,q-p. \tag{1.64}$$

З а м е ч а н и е . Все результаты этого параграфа получены В.И. Ивановым и Ю.Д. Рудомазиной.

2. Задачи Турана, Дельсарта и Монтгомери

Пусть $p,q\in\mathbb{N}$, $p\leqslant q/2$, $(p,q)=1$, $h=p/q$ – несократимая дробь.

В определении класса функций $K_T\,(p/q)$ условие (0.3) заменим на более слабое

$$f(x)=0,\qquad p/q\leqslant|x|\leqslant 1/2,\qquad x\in\Theta_q. \tag{2.1}$$

Новый класс обозначим $K_T(p,q)$.

Аналогично в определении класса функций $K_D(p/q)$ условие (0.5) заменим на более слабое

$$f(x)\leqslant 0,\qquad p/q\leqslant|x|\leqslant 1/2,\qquad x\in\Theta_q. \tag{2.2}$$

Новый класс обозначим $K_D(p,q)$.

Наибольшие значения нулевых коэффициентов на классах $K_T(p,q)$, $K_D(p,q)$ обозначим $A_T(p,q)$, $A_D(p,q)$ соответственно.

Так как для введенных классов справедливы вложения

$$K_T\,(p/q)\subset K_D\,(p/q)\subset K_D(p,q),\qquad K_T\,(p/q)\subset K_T(p,q)\subset K_D(p,q),$$

то имеют место следующие неравенства:

$$A_T\,(p/q)\leqslant A_D\,(p/q)\leqslant A_D(p,q),\qquad A_T\,(p/q)\leqslant A_T(p,q)\leqslant A_D(p,q).$$

Поэтому, чтобы доказать равенства

$$A_T\,(p/q)=A_D\,(p/q)=A_T(p,q)=A_D(p,q),$$

необходимо величину $A_T\,(p/q)$ оценить снизу, а величину $A_D(p,q)$ — сверху.

Теорема 2. *Если $p,q\in\mathbb{N}$, $p\leqslant q/2$, $(p,q)=1$, то*

$$A_T\,(p/q)=A_D\,(p/q)=A_T(p,q)=A_D(p,q)=\frac{F_{p,q}(0)}{q}. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Здесь $F_{p,q}$ — дискретный полином Фейера (1.8), (1.38). Рассмотрим также полином $G_{p,q}$ (1.46). Для функции $f\in K_D(p,q)$ составим сумму

$$I=\sum_{k=0}^{q-1}G_{p,q}\,(k/q)\,f\,(k/q)\,.$$

Согласно (1.49), (1.50), (2.2), (0.2)

$$I=f(0)+\sum_{k=p}^{q-p}G_{p,q}\,(k/q)\,f\,(k/q)\leqslant f(0)=1. \tag{2.4}$$

С другой стороны,

$$f\,(k/q)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nc\,(nk/q)=\sum_{r=0}^{q-1}s_rc\,(rk/q)\,,$$

где $s_r=\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}a_{q\nu+\tau}$. Ввиду (0.1) $s_r\geqslant 0$, $s_0\geqslant a_0$. Воспользовавшись (1.46), (1.48), (1.53), получим

$$I=\sum_{k=0}^{q-1}\sum_{m=0}^{p-1}\widehat{G}_m^{p,q}c\,(\overline{r}mk/q)\sum_{r=0}^{q-1}s_rc\,(rk/q)=\sum_{m=0}^{p-1}\widehat{G}_m^{p,q}\sum_{r=0}^{q-1}s_r\sum_{k=0}^{q-1}c\,(\overline{r}mk/q)\,c\,(rk/q)$$

$$= q\sum_{m=0}^{p-1}\widehat{G}_m^{p,q}\sum_{r=0}^{q-1}s_r d_r\delta_{\langle\overline{r}m\rangle r} = q\sum_{m=0}^{p-1}\widehat{G}_m^{p,q}s_{\langle\overline{r}m\rangle}d_{\langle\overline{r}m\rangle} \geqslant q\widehat{G}_0^{p,q}s_0d_0 = \frac{q}{F_{p,q}(0)}\,s_0 \geqslant \frac{q}{F_{p,q}(0)}\,a_0.$$

Отсюда и из (2.4) имеем

$$a_0 \leqslant F_{p,q}(0)/q,$$

поэтому

$$A_D(p,q) \leqslant F_{p,q}(0)/q. \tag{2.5}$$

Найдем оценку снизу для величины $A_T\,(p/q)$. Рассмотрим кусочно-линейную функцию $\varphi_{p,q}(x)$ с вершинами в точках с координатами $(\pm k/q, b_k)$ ($k = 0,1,\ldots,p$, $b_0 = 1$, $b_p = 0$), $(\pm 1/2, 0)$. Она записывается в виде

$$\varphi_{p,q}(x) = \begin{cases} b_k + (b_k - b_{k+1})(k - q|x|), & k/q \leqslant |x| < (k+1)/q, \quad k = 0,1,\ldots,p-1,\\ 0, & p/q \leqslant |x| \leqslant 1/2, \end{cases}$$

и имеет разложение в ряд Фурье

$$\varphi_{p,q}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n c(nx),$$

где, как показывают несложные расчеты,

$$\alpha_0 = \frac{1}{q}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{p-1}b_k\right), \quad \alpha_n = 2q\left(\frac{s\,(n/(2q))}{\pi n}\right)^2\left(1 + 2\sum_{k=1}^{p-1}b_k c\,(nk/q)\right).$$

Положим $b_k = \widehat{F}_k^{p,q}/2$, $k = 1,\ldots,p-1$ (1.8). Согласно (1.43) $\varphi_{p,q} \in K_T\,(p/q)$ и $\alpha_0 = F_{p,q}(0)/q$. Значит,

$$A_T\,(p/q) \geqslant F_{p,q}(0)/q.$$

Отсюда и из (2.5) вытекают равенства (2.3). Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 3. Согласно (1.43), четная экстремальная функция $\varphi_{p,q}(x)$ положительна и убывает на интервале $[0, p/q)$. Помимо $\varphi_{p,q}(x)$, экстремальными функциями в задаче Дельсарта (0.6) могут быть и тригонометрические полиномы. Последние могут быть экстремальными и в задачах на классах $K_T(p,q)$, $K_D(p,q)$. Было бы интересно построить такие полиномы.

Определим дискретные аналоги классов $K_T\,(p/q)$, $K_D\,(p/q)$. Пусть $L_T(p,q)$ — класс дискретных четных функций $f\,(r/q) = \sum\limits_{k=0}^{[q/2]}\widehat{f}_k c\,(kr/q)$ на Θ_q, для которых выполнены условия

$$\widehat{f}_k \geqslant 0, \qquad k = 1,\ldots,[q/2]\,; \tag{2.6}$$

$$f(0) = \sum_{k=0}^{[q/2]}\widehat{f}_k = 1; \tag{2.7}$$

$$f\,(r/q) = 0, \qquad r = p,\ldots,q-p. \tag{2.8}$$

В определении класса $L_D(p,q)$ условие (2.8) заменим на условие

$$f\,(r/q) \leqslant 0, \qquad r = p,\ldots,q-p. \tag{2.9}$$

Наибольшие значения нулевых коэффициентов на классах $L_T(p,q)$, $L_D(p,q)$ обозначим $a_T(p,q)$, $a_D(p,q)$ соответственно.

Теорема 3. *Если* $p,q\in\mathbb{N},\ p\leqslant q/2,\ (p,q)=1,$ *то*

$$a_T(p,q)=a_D(p,q)=F_{p,q}(0)/q. \tag{2.10}$$

Доказательство. Так как $L_T(p,q)\subset L_D(p,q)$, то $a_T(p,q)$ оцениваем снизу, а $a_D(p,q)$ — сверху.

Согласно (1.55), (1.56), (1.58) полином $U_{p,q}\in L_T(p,q)$ и $\widehat{U}_0^{p,q}=F_{p,q}(0)/q$, поэтому

$$a_T(p,q)\geqslant F_{p,q}(0)/q. \tag{2.11}$$

Рассмотрим полином $V_{p,q}$ (1.60) и для $f\in L_D(p,q)$ составим сумму

$$I=\sum_{k=0}^{[q/2]}\widehat{V}_k^{p,q}f\left(k/q\right).$$

Вследствие (1.61), (1.62), (2.7), (2.9) имеем

$$I=\widehat{V}_0^{p,q}f(0)+\sum_{k=p}^{[q/2]}\widehat{V}_k^{p,q}f\left(k/q\right)\leqslant F_{p,q}(0)/q. \tag{2.12}$$

В силу условия $(\overline{r},q)=1$ для любого $r=0,1,\ldots,[q/2]$ существует единственное $s_r=0,1,\ldots,[q/2]$, для которого $r=\langle\overline{r}s_r\rangle$, поэтому ввиду (1.15), (1.60), (1.63), (1.64), (2.6)

$$I=\sum_{r=0}^{[q/2]}\widehat{f}_r\sum_{k=0}^{[q/2]}\widehat{V}_k^{p,q}c\left(rk/q\right)=\sum_{r=0}^{[q/2]}\widehat{f}_r\sum_{k=0}^{[q/2]}\widehat{V}_k^{p,q}c\left(\overline{r}s_rk/q\right)=\sum_{r=0}^{[q/2]}\widehat{f}_rV_{p,q}\left(s_r/q\right)\geqslant\widehat{f}_0.$$

Отсюда и из (2.12) $\widehat{f}_0\leqslant F_{p,q}(0)/q$. Значит,

$$a_D(p,q)\leqslant F_{p,q}(0)/q, \tag{2.13}$$

что вместе с (2.11) дает (2.10). Теорема 3 доказана.

Замечание 4. Если $p\mid q$, то можно показать, что

$$a_T(p,q)=a_D(p,q)=p/q.$$

Если p не делит q, $(p,q)=d$, $p=dp'$, $q=dq'$, то

$$a_T(p,q)=a_D(p,q)=a_T(p',q').$$

Замечание 5. А.Г. Бабенко [19] в связи с задачей о дискретных константах Джексона в пространстве l_2 на Θ_q исследовал задачу Дельсарта на классе $L_D(p,q,n)$ дискретных полиномов порядка n

$$f\left(r/q\right)=\sum_{k=0}^{n}\widehat{f}_kc\left(kr/q\right),$$

для которых выполнены условия (2.6), (2.7), (2.9) (отметим, что $L_D\left(p,q,[q/2]\right)=L_D(p,q)$). Он нашел наибольшие значения нулевых коэффициентов $a_D(p,q,n)$ в двух случаях:

1) $q=2m(n+1),\ p=m,\ a_D(p,q,n)=0;$

2) $q=ml$ — четное, $p=m,\ 2\leqslant l\leqslant n+2,\ a_D(p,q,n)=1/l=p/q.$

Во всех этих случаях $p\mid q$.

В заключение приведем решение одного случая экстремальной задачи Монтгомери для неотрицательных тригонометрических полиномов, которое опирается на решение дискретной задачи Фейера. Последняя формулируется следующим образом: для заданного множества $K \subset \mathbb{N}$ найти величину

$$\delta(K) = \inf\left\{a_0(t)\colon\ t \in T_H^+,\ t(0) = 1,\ t(0) = 1,\ a_k(t) = 0\ (k \notin K)\right\}.$$

Здесь число $H \in \mathbb{N}$ произвольно.

Задача $\delta(K)$ находит приложения в аналитической теории чисел, в частности при изучении множеств ван дер Корпута.

Точное значение величины $\delta(K)$ известно в немногих случаях. Приведем три примера из [25], когда величина $\delta(K)$ вычислена.

1. $\delta(\mathbb{N}) = 0$. Этот классический результат был доказан ван дер Корпутом.

2. Пусть $K_q^0 = \{1, 2, \ldots, q-1\},\ K_q = q\mathbb{Z}_+ + K_q^0 = \{k \in \mathbb{N} : q$ не делит $k\},\ q = 2, 3, \ldots$ Тогда $\delta(K_q^0) = \delta(K_q) = 1/q$.

3. $\delta(\{2, 3\}) = c(\pi/10)/(1 + c(\pi/10)) = 0{,}44721\ldots$

Примеры 2 и 3 допускают обобщение. Пусть, как и выше, $p, q \in \mathbb{N},\ p \leqslant q/2,\ (p, q) = 1$. Введем множества

$$K_{p,q}^0 = \{p, p+1, \ldots, q-p\}, \qquad K_{p,q} = q\mathbb{Z}_+ + K_{p,q}^0, \qquad K_{p,q}^0 \subset K_{p,q}.$$

Теорема 4. *Справедливы равенства*

$$\delta(K_{p,q}) = \delta(K_{p,q}^0) = A(p/q) = \frac{F_{p,q}(0)}{q}.$$

Экстремальный полином t^* имеет вид

$$t^*(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\widehat{G}_k^{p,q}}{\widehat{G}_0^{p,q}} \cdot \frac{F_{q-1}(x + \overline{r}k/q) + F_{q-1}(x - \overline{r}k/q)}{2q} = \frac{F_{p,q}(0)}{q} + 2\sum_{r=p}^{q-p} \frac{G_{p,q}(r/q)}{\widehat{G}_0^{p,q}} \left(1 - \frac{r}{q}\right) c(rx). \tag{2.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство (2.14) легко доказывается с помощью подстановки в него разложения полинома Фейера (1.5) и с учетом определения полинома $G_{p,q}$ (1.46).

Неравенство $\delta(K_{p,q}) \leqslant \delta(K_{p,q}^0)$ вытекает из включения $K_{p,q}^0 \subset K_{p,q}$.

Докажем оценку снизу $\delta(K_{p,q}) \geqslant A(p/q)$. Пусть $f(x)$ — произвольная функция из класса $K_T(p/q)$ и $t^{(\varepsilon)}$ — допустимый полином в задаче $\delta(K_{p,q})$ ($t^{(\varepsilon)}(0) = 1,\ a_k(t^{(\varepsilon)}) = 0$ при $k \notin K_{p,q}$, порядок $t^{(\varepsilon)}$ меньше некоторого числа H), для которого

$$a_0(t^{(\varepsilon)}) \leqslant \delta(K_{p,q}) + \varepsilon, \tag{2.15}$$

где $\varepsilon > 0$ — малое число. Так как $a_k(t^{(\varepsilon)}) = 0$ при $k \in \mathbb{N} \setminus K_{p,q}$ и $k \geqslant H,\ f(k/q) = 0$ при $k = q\nu + k'$ ($\nu \in \mathbb{Z}_+,\ k' = p, \ldots, q-p$), т.е. при $k \in K_{p,q}$, то

$$a_0(t^{(\varepsilon)}) = \sum_{k \in K_{p,q} \cup \{0\}} a_k(t^{(\varepsilon)}) f(k/q) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k \in K_{p,q} \cup \{0\}} a_k(t^{(\varepsilon)}) c(nk/q) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{(\varepsilon)}(nk/q).$$

Отсюда, в силу неотрицательности коэффициентов $a_n,\ n \in \mathbb{N}$, и полинома $t^{(\varepsilon)}(x),\ x \in \mathbb{R}$, равенства $t^{(\varepsilon)}(0) = 1$ и неравенства (2.15), следует неравенство

$$a_0 \leqslant \delta(K_{p,q}) + \varepsilon.$$

Так как это неравенство установлено для произвольной функции $f \in K_T(p/q)$, то

$$\sup_{f \in K_T(p/q)} a_0 = A(p/q) \leqslant \delta(K_{p,q}) + \varepsilon.$$

При $\varepsilon \to 0$ отсюда получаем оценку снизу $\delta(K_{p,q}) \geqslant A(p/q)$.

Докажем теперь оценку сверху $\delta(K^0_{p,q}) \leqslant A(p/q)$. Для этого рассмотрим полином $t^*(x)$ (2.14), имеющий порядок не больший $q-1$. Покажем, что он является допустимым в задаче $\delta(K^0_{p,q})$, т.е. $a_k(t^*) = 0$ при $k \notin K^0_{p,q}$ и $t^*(0) = 1$. Отсюда и из равенства $a_0(t^*) = A(p/q) = F_{p,q}(0)/q$ следует оценка сверху $\delta(K^0_{p,q}) \leqslant A(p/q)$, что вместе с оценкой снизу влечет за собой экстремальность полинома t^*.

По определению полинома t^* (2.14) имеем

$$t^*(x) = \frac{F_{p,q}(0)}{q} + 2\sum_{r=p}^{q-p} \frac{G_{p,q}(r/q)}{\widehat{G}^{p,q}_0}\left(1-\frac{r}{q}\right)c(rx) = \frac{F_{p,q}(0)}{q} + \sum_{r\in K^0_{p,q}} a_r(t^*)c(rx).$$

Все числа $\widehat{G}^{p,q}_k,\ k = 0,1,\ldots,p-1$, положительны. Отсюда в силу неотрицательности полинома $F_{q-1}(x)$ и определения полинома $t^*(x)$ (2.14) следует, что $t^*(x) \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}$.

Найдем значение полинома t^* в нуле. Имеем

$$t^*(0) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\widehat{G}^{p,q}_k}{q\widehat{G}^{p,q}_0} F_{q-1}(\overline{r}k/q).$$

Но $F_{q-1}(k/q) = 0$, если k не делится на q, а все числа $\overline{r}k$ при $k = 1,\ldots,p-1$ не делятся на q. Следовательно, $F_{q-1}(\overline{r}k/q) = 0$ при $k = 1,\ldots,p-1$ и $t^*(0) = F_{q-1}(0)/q = 1$.

Итак, полином t^* является допустимым в задаче $\delta(K^0_{p,q})$. Теорема 4 доказана.

З а м е ч а н и е 6. Поскольку выполняются равенства $K^0_{1,q} = K^0_q,\ K_{1,q} = K_q,\ K^0_{2,3} = \{2,3\}$ и $A(1/q) = 1/q,\ A(2/5) = c(\pi/10)/(1+c(\pi/10))$, то из теоремы 4 в качестве следствия получаем результаты из примеров 2 и 3.

З а м е ч а н и е 7. Можно определить дискретный вариант задачи Монтгомери $\delta(K^0_{p,q})$. Если ее рассматривать как задачу линейного программирования, то двойственной к ней будет задача Дельсарта $a_D(p,q)$.

З а м е ч а н и е 8. Равенства

$$A_T\,(p/q) = a_T(p,q) = \frac{\Lambda(p,q)}{q}$$

доказаны в [6]. Оценка (2.5) в предположении существования полиномов $F_{p,q},\ G_{p,q}$ доказана Д.В. Горбачевым. Оценка (2.13) получена Ю.Д. Рудомазиной. Теорема 4 доказана Д.В. Горбачевым.

Поступила 10.09.04

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Стечкин С.Б.** Одна экстремальная задача для тригонометрических рядов с неотрицательными коэффициентами // Acta Math. Acad. Scient. Hungaricae. 1972. Т. 23, № 3–4. P. 289–291.
2. **Стечкин С.Б.** Избр. тр. Математика. М.: Наука, 1998.
3. **Горбачев Д.В., Маношина А.С.** Экстремальная задача Турана для периодических функций с малым носителем // Чебышевский сб. Труды 4-й Междунар. конф. «Современные проблемы теории чисел и ее приложения» (Тула, 2001). Тула: Изд-во ТГПУ, 2001. Т. 2. С. 31–40.
4. **Маношина А.С.** Экстремальная задача Турана для функций с малым носителем // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. 2000. Т. 6, вып. 3. С. 113–116.
5. **Горбачев Д.В.** Экстремальная задача для периодических функций с носителем в шаре // Мат. заметки. 2001. Т. 69, № 3. С. 346–352.
6. **Горбачев Д.В. Маношина А.С.** Экстремальная задача Турана для периодических функций с малым носителем и ее приложения // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 5. С. 688–700.
7. **Arestov V.V., Berdysheva E.E.** Turán's problem for positive definite functions with supports in a hexagon // Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. 2001. Vol. 1. P. S20–S29.

8. **Arestov V.V., Berdysheva E.E.** The Turán problem for a class of polytopes // East J. Approx. 2002. Vol. 8. №3. P. 381–388.
9. **Arestov V.V., Berdysheva E.E., Berens H.** On pointwise Turán's problem for positive definite functions // East J. Approx. 2003. Vol. 9. №1. P. 31–42.
10. **Kolountzakis M., Rěvěsz S.G.** On a problem of Turán about positive definite functions // Proc. Amer. Math. Soc. 2003. Vol. 131. P. 3423–3430.
11. **Kolountzakis M., Rěvěsz S.G.** Turán's extremal problem for positive definite functions on groups. Режим доступа: arXiv: math.CA/0312218 v1 10 Dec 2003.
12. **Дельсарт Ф.** Алгебраический подход к схемам отношений теории кодирования. М.: Мир, 1976.
13. **Сидельников В.М.** Об экстремальных многочленах, используемых при оценке мощности кода // Пробл. передачи информации. 1980. Т. 16, №3. С. 17–30.
14. **Левенштейн В.И.** Границы для упаковок метрических пространств и некоторые их приложения // Пробл. кибернетики. 1983. Вып. 40. С. 43–110.
15. **Арестов В.В., Бабенко А.Г.** О схеме Дельсарта оценки контактных чисел // Труды МИРАН. 1997. Т. 219. С. 44–73.
16. **Горбачев Д.В.** Экстремальная задача для целых функций экспоненциального сферического типа, связанная с оценкой Левенштейна плотности упаковки $\mathbb{R}^n$ шарами // Известия ТулГУ. Сер. Математика. 2000. Т. 6, вып. 1. С. 71–78.
17. **Cohn H., Elkies N.** New upper bounds on sphere packings I // Ann. Math. 2003. Vol. 157. P. 689-714.
18. **Cohn H., Kumar A.** The densest lattice in twenty-four dimensions // Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 2004. Vol. 10. P. 58–67.
19. **Бабенко А.Г.** Неравенство Джексона для среднеквадратичных приближений периодических функций тригонометрическими полиномами на равномерной сетке // Мат. заметки. 1988. Т. 43, №3. С. 460–472.
20. **Иванов В.И., Смирнов О.И.** Константы Джексона в пространстве $l_2(\mathbb{Z}_2^n)$ // Труды МИРАН. 1997. Т. 219. С. 183–210.
21. **Fejér L.** Gesammelte Arbeiten. Budapest: Akad. Kiado, 1970. Bd. 1.
22. **Полиа Г., Сеге Г.** Задачи и теоремы из анализа. Т. 2. М.: Наука, 1978.
23. **Чандрасекхаран К.** Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Мир, 1974.
24. **Турецкий А.Х.** Теория интерполирования в задачах. Минск: Выш. шк., 1968.
25. **Montgomery H.L.** Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 11 № 2 2005

УДК 517.518.45

О РАСХОДИМОСТИ ВСЮДУ ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ЧАСТНЫХ СУММ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ[1]

С. В. Конягин

Доказано, что для любой возрастающей последовательности $\{m_j\}$ натуральных чисел и любой неубывающей функции $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, удовлетворяющей условию

$$\varphi(u) = o(u \ln\ln u) \qquad (u \to \infty),$$

найдется функция $f \in L[0, 2\pi]$ такая, что

$$\int\limits_0^{2\pi} \varphi(|f(x)|)dx < \infty$$

и частные суммы Фурье $S_{m_j}(f)$ неограниченно расходятся всюду.

Введение

Пусть $f \in L[0, 2\pi]$, т.е. функция f интегрируема на $[0, 2\pi]$. Определим коэффициенты Фурье и частные суммы Фурье функции f :

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx)\ dx, \qquad S_m(f, x) = \sum_{k=-m}^{m} \hat{f}(k) \exp(ikx).$$

Знаменитая теорема Л. Карлесона [1] утверждает, что если $f \in L^2[0, 2\pi]$, то $S_m(f, x) \to f(x)$ при $m \to \infty$ для почти всех $x \in [0, 2\pi]$. Вопрос о максимально возможном ослаблении условия на функцию f, гарантирующего сходимость к ней ее ряда Фурье почти всюду, является одним из центральных в теории тригонометрических рядов. Наиболее сильный результат в этом направлении принадлежит Н.Ю. Антонову [2], который, усилив теорему П. Шёлина [3], показал, что если $f \in L[0, 2\pi]$ и

$$\int\limits_0^{2\pi} |f(x)| \ln(1 + |f(x)|) \ln\ln\ln(20 + |f(x)|)\ dx < \infty,$$

то $S_m(f, x) \to f(x)$ при $m \to \infty$ для почти всех $x \in [0, 2\pi]$. С другой стороны, А.Н. Колмогоров [4] построил классический пример тригонометрического ряда Фурье интегрируемой на $[0, 2\pi]$ функции, расходящегося почти всюду. Затем им была показана возможность расходимости ряда Фурье всюду ([5], см. также [6, гл. 5, § 20]). Далее, установлено (Т.В. Кёрнер [7]), что если неубывающая функция $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ удовлетворяет условию

$$\varphi(u) = o(u \ln\ln u) \qquad (u \to \infty), \tag{0.1}$$

[1]Работа выполнена при участии гранта РФФИ 05-01-00066 и программы поддержки ведущих научных школ, грант НШ-304.2003.1.

то найдется функция $f \in L[0, 2\pi]$ такая, что

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|f(x)|)\, dx < \infty \tag{0.2}$$

и

$$\limsup_{m\to\infty} |S_m(f, x)| = \infty \qquad \forall\, x \in [0, 2\pi].$$

В [8] доказано следующее усиление этого результата.

Теорема A. *Пусть функция $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ удовлетворяет следующим условиям: функция $\varphi(u)/u$ является неубывающей на $(0, +\infty)$ и $\varphi(u) = o(u\sqrt{\ln u}/\sqrt{\ln\ln u})$ при $u \to \infty$. Тогда найдется функция $f \in L[0, 2\pi]$ такая, что*

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|f(x)|)\, dx < \infty$$

и

$$\limsup_{m\to\infty} |S_m(f, x)| = \infty \qquad \forall\, x \in [0, 2\pi].$$

В данной работе обсуждается вопрос о поведении подпоследовательностей $\{S_{m_j}(f, x)\}$ почти всюду. Если последовательность $\{m_j\}$ достаточно редкая, то класс функций со сходящейся почти всюду подпоследовательностью $\{S_{m_j}(f, x)\}$ существенно шире класса функций со сходящимся почти всюду рядом Фурье. Пусть, например, ряд Фурье функции $f \in L[0, 2\pi]$ есть ряд степенного типа, т.е.

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) \exp(ikx).$$

Тогда последовательность $\{S_m(f, x)\}$ может расходиться почти всюду [9, гл. 8, теорема 3.6], в то время как для подпоследовательности $\{m_j\}$, удовлетворяющей условию лакунарности $\inf\limits_j m_{j+1}/m_j > 1$, последовательность $\{S_{m_j}(f, x)\}$ сходится к $f(x)$ почти всюду [9, гл. 15, теорема 5.11]. Из последнего результата с помощью теоремы 5.11 из [9, гл. 7] вытекает, что если измеримая функция f удовлетворяет условию

$$\int_0^{2\pi} |f(x)| \ln(1 + |f(x)|) < \infty, \tag{0.3}$$

а $\{m_j\}$ лакунарна, то $\{S_{m_j}(f, x)\}$ сходится к $f(x)$ почти всюду. Напомним, что вопрос о том, достаточно ли условия (0.3) для сходимости почти всюду ряда Фурье функции f, остается открытым.

В. Тотик [10] доказал, что для любой возрастающей последовательности $\{m_j\}$ натуральных чисел найдется функция $f \in L[0, 2\pi]$ такая, что

$$\forall x \in [0, 2\pi] \qquad \sup_j |S_{m_j}(f; x)| = \infty. \tag{0.4}$$

Целью данной работы является объединение этого факта с теоремой Кернера.

Теорема. *Для любой возрастающей последовательности $\{m_j\}$ натуральных чисел и любой неубывающей функции $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, удовлетворяющей условию* (0.1), *найдется функция $f \in L[0, 2\pi]$, удовлетворяющая условиям* (0.2) *и* (0.4).

Доказательство проводится методом Ш.В. Хеладзе [11].

1. Построение тригонометрических полиномов с большими частными суммами

Лемма 1. *Для $n \in \mathbb{N}$ обозначим*

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n-k} \cos(n+k)x - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cos(2n+k)x.$$

Тогда

(1) *для любого $x \in [-\pi/(6n), \pi/(6n)]$ справедливо неравенство $S_{2n-1}(Q_n; x) \geq \frac{1}{2}\ln n$;*

(2) *для любого $x \in [0, 2\pi]$ справедливо неравенство $|Q_n(x)| \leq 2(\pi+1)$.*

Лемма доказана в [11].

В дальнейшем мы фиксируем возрастающую последовательность $\{m_j\}$ натуральных чисел. Ключевой леммой настоящей работы, соответствующей лемме 1 из [11], является следующая. (Через $|E|$ обозначается мера Лебега множества E.)

Лемма 2. *Для $n \geq 2$ существует тригонометрический полином*

$$P_n(x) = 1 + \sum_{k=n}^{M_n} \left(a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx \right) \tag{1.1}$$

и множество $E_n \subset [0, 2\pi]$ такие, что

(1) *для любого $x \in [0, 2\pi]$ справедливо неравенство*

$$0 \leq P_n(x) \leq 2^{6n}, \tag{1.2}$$

(2) *для любого $k = 1, 2, \ldots, 6n-1$ справедливо неравенство*

$$\left| E_n \cap \left[\frac{\pi k}{3n} - \frac{\pi}{6n}, \frac{\pi k}{3n} + \frac{\pi}{6n} \right] \right| \geq \frac{\pi}{18n}, \tag{1.3}$$

(3) *для любого $x \in E_n$ справедливо неравенство*

$$\max_{n \leq m_j \leq M_n} |S_{m_j}(P_n; x)| \geq \frac{\ln n}{150}. \tag{1.4}$$

Доказательство. Пусть

$$Q_{n,k}(x) = \frac{1}{2(\pi+1)} Q_n \left(x - \frac{\pi}{3n} k \right),$$

где Q_n — тригонометрический полином, определенный в лемме 1. Рассмотрим тригонометрический полином

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{6n-1} \left(1 + \cos \lambda_k x \cdot Q_{n,k}(x) \right), \tag{1.5}$$

где натуральные числа λ_k будут выбраны ниже по индукции. Отметим, что неравенство (1.2) немедленно вытекает из утверждения (2) леммы 1.

Мы будем требовать, чтобы $\lambda_1 \geq 16n$ и последовательность $\{\lambda_k\}$ достаточно быстро возрастала, так что частоты гармоник, получающиеся при раскрытии скобок произведения (1.5), были бы попарно различны. Отсюда, в частности, следует, что P_n имеет вид (1.1). Далее, в [11] установлено равенство

$$S_{\lambda_k+2n-1}(P_n; x) - S_{\lambda_k-2n}(P_n; x) = \cos \lambda_k x \cdot S_{2n-1}(Q_{n,k}; x). \tag{1.6}$$

(В [11] рассмотрен тригонометрический полином, несколько отличающийся от P_n, но на доказательстве (1.6) это не отражается.)

Множество E_n мы будем строить в виде

$$E_n = \bigcup_{k=1}^{6n-1} E_{n,k}, \qquad E_{n,k} \subset \Delta_k := \left[\frac{\pi k}{3n} - \frac{\pi}{6n}, \frac{\pi k}{3n} + \frac{\pi}{6n}\right].$$

Множества $E_{n,k}$ выбираются индуктивно вместе с выбором λ_k.

Допустим, что $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$ уже выбраны. Мы имеем

$$S_{\lambda_k - 2n}(P_n; x) = U(x) + V_1(x)e^{i\lambda_k x} + \overline{V_1(x)}e^{-i\lambda_k x},$$

где

$$U(x) = \prod_{l=1}^{k-1} \left(1 + \cos\lambda_l x \cdot Q_{n,l}(x)\right),$$

а V_1 — тригонометрический полином, тоже зависящий только от $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$, но не от λ_k. В силу (1.6)

$$S_{\lambda_k + 2n-1}(P_n; x) = U(x) + V_2(x)e^{i\lambda_k x} + \overline{V_2(x)}e^{-i\lambda_k x},$$

где

$$V_2(x) = V_1(x) + \frac{1}{2} S_{2n-1}(Q_{n,k}; x).$$

Обозначив $q_1 = -2n$, $q_2 = 2n-1$, мы можем записать, что при $\nu = 1, 2$ справедливо представление

$$S_{\lambda_k + q_\nu}(P_n; x) = U(x) + V_\nu(x)e^{i\lambda_k x} + \overline{V_\nu(x)}e^{-i\lambda_k x}. \tag{1.7}$$

Положим

$$F_\nu = \left\{x \in \Delta_k : |V_\nu(x)| \geq \frac{\ln n}{16(\pi+1)}\right\} \qquad (\nu = 1, 2).$$

Тогда в силу утверждения (1) леммы 1 $F_1 \cup F_2 = \Delta_k$. Поэтому можно выбрать такое ν, что

$$|F_\nu| \geq \frac{\pi}{6n}. \tag{1.8}$$

Обозначим

$$A_k = \max\left(\max_x |U'(x)|, \max_x |V'_\nu(x)|\right).$$

Мы будем требовать следующих ограничений на λ_k :

$$\lambda_k \geq \frac{1000 A_k}{\ln n}. \tag{1.9}$$

Зафиксировав x_0, обозначим

$$W(x) = U(x_0) + V_\nu(x_0)e^{i\lambda_k x} + \overline{V_\nu(x_0)}e^{-i\lambda_k x},$$

$$x_j = x_0 + \frac{2\pi j}{3\lambda_k}.$$

Легко видеть, что

$$\sum_{j=-1}^{1} e^{-i\lambda_k x_j} W(x_j) = 3V_\nu(x_0).$$

Значит,

$$\max_{j=-1,0,1} |W(x_j)| \geq |V_\nu(x_0)|.$$

Далее, в силу (1.7)

$$|S_{\lambda_k+q_\nu}(P_n;x)-W(x)|\le 3A_k|x-x_0|,$$

и воспользовавшись условием (1.9), мы получаем для $x=x_{\pm1}$

$$|S_{\lambda_k+q_\nu}(P_n;x)-W(x)|<\frac{\ln n}{150}.$$

Значит, если $x\in F_\nu$, то

$$\max_{j=-1,0,1}|S_{\lambda_k+q_\nu}(P_n;x_j)|\ge\frac{\ln n}{16(\pi+1)}-\frac{\ln n}{150}>\frac{\ln n}{150}. \tag{1.10}$$

Обозначим

$$E_{n,k}=\left\{x\in\Delta_k:\,|S_{\lambda_k+q_\nu}(P_n;x)|\ge\frac{\ln n}{150}\right\}.$$

Мы выбираем достаточно большое число λ_k таким образом, что $\lambda_k+q_\nu=m_j$ при некотором j, т.е. для любого $x\in E_{n,k}$ мы имеем

$$|S_{m_j}(P_n;x)|\ge\frac{\ln n}{150}.$$

Тем самым обеспечено выполнение требования (1.4), и нам осталось проверить условие (1.3).

Используя (1.10) и (1.8), мы получаем

$$3|E_{n,k}|\ge\left|F_\nu\bigcap\left[\frac{\pi k}{3n}-\frac{\pi}{6n}+\frac{2\pi}{3\lambda_k},\frac{\pi k}{3n}+\frac{\pi}{6n}-\frac{2\pi}{3\lambda_k}\right]\right|\ge|F_\nu|-\frac{4\pi}{3\lambda_k}\ge\frac{\pi}{6n}-\frac{4\pi}{3\lambda_k},$$

и учитывая, что $\lambda_k\ge\lambda_1\ge16n$, приходим к неравенству

$$3|E_{n,k}|\ge\frac{\pi}{12n}.$$

Отсюда вытекает (1.3), и лемма доказана.

2. Доказательство теоремы

Ясно, что мы можем предполагать, что $\varphi(u)>0$ при $u>0$. Вначале рассмотрим случай, когда неубывающая функция $\varphi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ удовлетворяет, кроме условия (0.1), ограничениям

$$\varphi(0)=0,\quad \varphi\quad\text{выпукла}\quad\text{и}\quad\forall u\ge u_0\qquad\varphi(2u)\le K\varphi(u), \tag{2.1}$$

где $u_0=u_0(\varphi)$, $K=K(\varphi)$. Тогда множество $\varphi(L)$ измеримых на $[0,2\pi]$ функций f, удовлетворяющих условию (0.2), является пространством Орлича [12, стр. 91], на котором можно ввести норму Люксембурга [12, стр. 95]

$$\|f\|_{(\varphi)}=\inf\left\{\lambda>0:\int\limits_0^{2\pi}\phi(|f(x)|/\lambda)dx\le1\right\},$$

и $\varphi(L)$ вложено в пространство $L[0,2\pi]$. Будем сперва строить функцию $f\in\varphi(L)$, для которой условие

$$\sup_j|S_{m_j}(f;x)|=\infty \tag{2.2}$$

выполнено почти всюду.

Для $n\ge2$ обозначим

$$\psi(n)=\frac{\varphi\left(2^{6n}\right)}{2^{6n}\ln n}.$$

Тогда в силу (0.1)
$$\psi(n) \to 0 \qquad (n \to \infty), \tag{2.3}$$
а в силу выпуклости φ
$$\forall u \in [0, 2^{6n}] \qquad \varphi(u) \le u\psi(n)\ln n. \tag{2.4}$$
Возьмем $c > 0$, удовлетворяющее условиям
$$c \le \min\left(\varphi(1), \frac{1}{4\pi}\right). \tag{2.5}$$
Пусть $n \ge 2$ и P_n — тригонометрический полином, построенный в лемме 2. Обозначим
$$R_n = \frac{c(P_n - 1)}{\psi(n)\ln n}.$$
Так как
$$\frac{c}{\psi(n)\ln n} = \frac{c2^{6n}}{\varphi(2^{6n})} \le \frac{c}{\varphi(1)} \le 1,$$
то вследствие (1.2) для любого $x \in [0, 2\pi]$ справедливо неравенство
$$|R_n(x)| \le 2^{6n}.$$
Отсюда и из (2.4) следует, что
$$\int\limits_0^{2\pi} \varphi(|R_n(x)|)\ dx \le \psi(n)\ln n \int\limits_0^{2\pi} |R_n(x)|\ dx = c\int\limits_0^{2\pi} |P_n(x) - 1|\ dx.$$
Но в силу (1.1) и (1.2)
$$\int\limits_0^{2\pi} |P_n(x) - 1|\ dx \le 2\pi + \int\limits_0^{2\pi} P_n(x)\ dx = 4\pi$$
и, вспоминая (2.5), мы получаем
$$\int\limits_0^{2\pi} \varphi(|R_n(x)|)\ dx \le 1,$$
т.е.
$$||R_n||_{(\varphi)} \le 1. \tag{2.6}$$

Возьмем теперь последовательность $\{n_i\}$ натуральных чисел, возрастающую настолько быстро, что для всех $i \ge 1$ выполнены неравенства
$$\psi(n_i) \le 4^{-i} \tag{2.7}$$
(этого возможно добиться ввиду (2.3)) и
$$n_{i+1} > m_{j_i} > M_{n_i} \tag{2.8}$$
для некоторого j_i. Определим функцию
$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{R_{n_i}}{2^i},$$
где ряд рассматривается в пространстве $\varphi(L)$. Вследствие (2.6), этот ряд является сходящимся в этом пространстве. Значит, $f \in \varphi(L)$.

Условие (2.8) означает разделенность спектров тригонометрических полиномов P_{n_i}; таким образом, если $n_i \le m < n_{i+1}$, то

$$S_m(f;x) = \sum_{l=1}^{i-1} \frac{R_{n_l}}{2^l} + \frac{1}{2^i} S_m(R_{n_i};x).$$

Пусть E_{n_i} — множества, определенные в лемме 2. Из (1.4) следует, что для любого $x \in E_{n_i}$

$$\max_{n_i \le m_j < n_{i+1}} \left| S_{m_j}(f;x) - S_{m_{j_{i-1}}}(f;x) \right| = \frac{1}{2^i} \max_{n_i \le m_j < n_{i+1}} |S_{m_j}(R_{n_i};x)|$$

$$\ge \frac{c}{2^i \psi(n_i) \ln n_i} \frac{\ln n_i}{150} = \frac{c}{150 \psi(n_i) 2^i},$$

откуда в силу (2.7)

$$\sup_j |S_{m_j}(f;x)| \ge \frac{c}{300 \psi(n_i) 2^i} \ge \frac{2^i c}{300}. \tag{2.9}$$

Обозначив

$$F_l = \bigcup_{i \ge l} E_{n_i}, \qquad F = \bigcap_l F_l,$$

мы выводим из (2.9), что для любого $x \in F$ справедливо равенство

$$\sup_j |S_{m_j}(f;x)| = \infty,$$

и нам достаточно проверить, что $|F| = 2\pi$. Для любого l и для любой точки $x \in (0, 2\pi)$ в силу (1.3) найдется сколь угодно малый отрезок Δ такой, что $x \in \Delta$ и $|F_l \cap \Delta| \ge |\Delta|/9$, откуда вытекает, что $|F_l| = 2\pi$. Следовательно, и $|F| = 2\pi$.

Итак, мы показали, что для любой функции φ, удовлетворяющей условию (2.1), найдется функция $f \in \varphi(L)$, для которой частные суммы Фурье $S_{m_j}(f)$ неограниченно расходятся почти всюду. Отсюда, применяя теорему 3 из [10], получаем существование функции $f \in \varphi(L)$ со всюду неограниченно расходящимися частными суммами $S_{m_j}(f)$.

Для завершения доказательства нашей теоремы нам осталось свести случай произвольной неубывающей функции φ, удовлетворяющей условию (0.1), к случаю, когда φ удовлетворяет также и ограничениям (2.1). Возможность такого сведения вытекает из следующего утверждения.

Лемма 3. *Пусть неубывающая функция* $\varphi_0 : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *удовлетворяет условию*

$$\varphi_0(u) = o(u \ln \ln u) \qquad (u \to \infty).$$

Тогда найдется функция $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, *удовлетворяющая условиям* (0.1) *и* (2.1), *и число* u_1 *такое, что* $\varphi(u) \ge \varphi_0(u)$ *для всех* $u \ge u_1$.

Доказательство. Рассмотрим функции

$$\varphi_j(u) = \frac{u \ln \ln u}{2^j} \qquad (j \ge 1,\ u \ge e^e).$$

Возьмем возрастающую последовательность положительных чисел $\{u_1, u_2, \dots\}$. При этом элемент u_1 должен удовлетворять условиям

$$u_1 \ge e^e, \qquad \varphi_0(u) \le \varphi_1(u) \qquad (u \ge u_1).$$

Если $\{u_1, u_2, \dots, u_j\}$ построены, то элемент u_{j+1} должен удовлетворять условиям

$$\varphi_j(u_j) + \varphi_j'(u_j)(u_{j+1} - u_j) \le \varphi_{j+1}(u_{j+1})$$

и

$$\varphi_0(u) \le \varphi_{j+1}(u) \qquad (u \ge u_{j+1}).$$

Тогда для любого натурального j существует число $v_j \in [u_j, u_{j+1})$ такое, что

$$\varphi_j(v_j) + \varphi_j'(v_j)(u_{j+1} - v_j) = \varphi_{j+1}(u_{j+1}).$$

Искомая функция φ строится следующим образом. Положим

$$\varphi(u) = 2u\varphi_1(u_1)/u_1 \quad \text{при } 0 \le u < u_1,$$

$$\varphi(u) = 2\varphi_j(u) \quad \text{при } u_j \le u < v_j, \ \ j \ge 1,$$

$$\varphi(u) = 2(\varphi_j(v_j) + \varphi_j'(v_j)(u - v_j)) \quad \text{при } v_j \le u < u_{j+1}, \ \ j \ge 1.$$

Из построения видно, что $\varphi(0) = 0$, функция φ выпукла. Далее, при $j \ge 1$, $u \in [u_j, u_{j+1}]$ мы имеем

$$2^{-j} \le \frac{\varphi(u)}{u \ln\ln u} \le 2^{1-j},$$

откуда вытекают (2.1) и неравенство $\varphi(u) \ge \varphi_0(u)$ для всех $u \ge u_1$. Лемма доказана.

Поступила 20.09.04

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Carleson L.** On convergence and growth of partial sums of Fourier series // Acta Math. 1966. Vol. 116. P. 135–157.
2. **Antonov N.Yu.** Convergence of Fourier series // East J. Approx. 1996. Vol. 2. P. 187–196.
3. **Sjölin P.** An inequality of Paley and convergence a.e. of Walsh–Fourier series // Ark. Mat. 1969. Vol. 7. P. 551–570.
4. **Kolmogoroff A.N.** Une série de Fourier–Lebesgue divergente presque partout // Fund. Math. 1923. Vol. 4. P. 324–328.
5. **Kolmogoroff A.N.** Une série de Fourier–Lebesgue divergente partout// C. R. Acad. sci. Paris. 1926. Vol. 183. P. 1327–1329.
6. **Бари Н.К.** Тригонометрические ряды. М.: ГИФМЛ, 1961.
7. **Körner T.W.** Everywhere divergent Fourier series // Colloq. Math. 1981. Vol. 45. P. 103–118.
8. **Конягин С.В.** О расходимости всюду тригонометрических рядов Фурье // Матем. сб. 2000. Т. 191. С. 103–126.
9. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды, Т. 1,2. М.: Мир, 1965.
10. **Totik V.** On the divergence of Fourier series // Publ. Math. (Debrecen). 1982. Vol. 29. P. 251–264.
11. **Хеладзе Ш.В.** О расходимости всюду рядов Фурье функций из класса $L\varphi(L)$ // Тр. Тбил. мат. ин-та. 1988. Т. 89. С. 51–59.
12. **Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б.** Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: ГИФМЛ, 1958.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 11 № 2 2005

УДК 519.652.3

НОВЫЙ КУБИЧЕСКИЙ ЭЛЕМЕНТ В МКЭ[1]

Ю. Н. Субботин

В работе предложен новый двумерный кубический элемент в методе конечных элементов. Доказано, что в отличие от классического элемента с интерполяцией в центре тяжести новый элемент при аппроксимации любых допустимых производных свободен от известного условия "синуса наименьшего угла" триангуляции. Указанное условие удалось заменить на более слабое условие "синуса наибольшего угла" триангуляции. Установлена с точностью до абсолютных констант неулучшаемость полученных оценок погрешности аппроксимации производных. Для нового элемента оценки погрешности аппроксимации ухудшаются лишь для треугольников с двумя малыми углами. В терминах барицентрических координат явно выписаны фундаментальные интерполяционные многочлены для предложенного элемента.

Введение

В связи с методом конечных элементов (МКЭ) достаточно интенсивно изучаются аппроксимативные свойства интерполяционных кусочно-полиномиальных функций на различных классах дифференцируемых функций. В несколько вольном изложении в двумерном случае оценки погрешности аппроксимации i-х производных $k+1$ раз дифференцируемых функций i-ми производными интерполяционных кусочно-полиномиальных функций степени k по совокупности переменных (сумма степеней любого монома не превосходит k) имеют вид $CH^{k+1-i}\sin^{-i}\alpha$, где H — диаметр триангуляции, α — наименьший из углов треугольников триангуляции ($0 \le i \le k$) (см., например, [1, 2]).

С точностью до абсолютных констант $\sin\alpha$ эквивалентен отношению радиуса вписанной в треугольник окружности к радиусу описанной окружности. Аналогичная характеристика используется в [3] вместо $\sin\alpha$ для функций n переменных при $n \ge 3$ с триангуляцией, осуществляемой посредством n-симплексов.

В некоторых статьях в двумерном случае указанная выше оценка фигурировала даже при $k = 1$, хотя в [4] было показано, что для остроугольных треугольников оценка не зависит от α, где α по-прежнему наименьший угол треугольника. С другой стороны, классический пример Шварца показывает, что на множестве всех треугольников с двумя равными углами эта оценка неулучшаема. Возникает вопрос, какова правильная зависимость оценок погрешности от характера вырождения триангуляции. В [5] для полиномов второй степени и лагранжевой интерполяции показано, что фактически оценки погрешности аппроксимации зависят от синуса наибольшего, а не наименьшего угла, но явный вид зависимости не был указан. В случае лагранжевой интерполяции результат из [4] в двумерном случае был перенесен [6, 7] на любые натуральные k. Точнее, в указанных в первом абзаце оценках угол α был заменен на наибольший или, что эквивалентно, на средний угол треугольника и были приведены примеры функций, показывающие, что такая зависимость от этих углов по существу. Соответствующая правильная характеристика была введена [6, 7] и для функций n переменных, $n \ge 3$.

Для кратной интерполяции ситуация значительно сложнее. И это по существу. В работах [8–10] для некоторых типов кратной интерполяции для "малых" i наименьший угол удалось заменить на наибольший. Для "средних" i начинает нарастать степень синуса наименьшего угла. Затем влияние наименьшего угла прекращается и нарастает влияние наибольшего

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05–01–00949) и Ведущих научных школ РФ НШ-1347.2003.1

угла. Показано, что часть полученных оценок неулучшаема. Ни в одном из случаев не удалось полностью исключить влияние наименьшего угла.

В МКЭ достаточно популярным (см., например, [11, 12]) является кубический элемент, который интерполирует функцию в вершинах треугольника и в его центре тяжести (в точке пересечения медиан), а его производные первого порядка по x и по y совпадают с соответствующими производными функции в вершинах треугольника. В [7] показано, что существует функция, для которой приведенные в первом абзаце введения при $k = 3$ оценки погрешности аппроксимации ее производных соответствующими производными указанного выше кубического элемента неулучшаемы, т.е. в этом случае так называемое условие "синуса наименьшего угла" триангуляции является существенным.

В [13] предприняты значительные усилия по построению кубических элементов с менее ограничительными условиями на константы в оценках погрешности аппроксимации. Однако во всех рассмотренных случаях при аппроксимации хотя бы одной из производных появляется условие "синуса наименьшего угла" триангуляции.

Естественно возникает вопрос о существовании кубического элемента с кратной интерполяцией, для которого условие "синуса наименьшего угла" триангуляции можно заменить на условие "синуса наибольшего угла" триангуляции. В этом случае оценки ухудшаются, когда наибольший угол стремится к π, т.е. два угла стремятся к нулю.

В работе дан положительный ответ на этот вопрос и показано, что для построенного кубического элемента с точностью до абсолютных констант полученные оценки неулучшаемы. Другой кубический элемент с подобными свойствами построен Н.В. Байдаковой [14].

1. Основной результат

Так как на каждом треугольнике кубический полином, являющийся сужением кусочно-кубической функции на этот треугольник, интерполяционными условиями будет определяться однозначно, то в дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь одного треугольника. Введем следующие обозначения для полинома третьей степени (кубического) по совокупности переменных

$$P_3(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^3 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9y^3. \tag{1.1}$$

Пусть Δ — невырожденный треугольник и функция $f(x,y)$ непрерывна на нем вместе с частными производными до четвертого порядка включительно. Будем предполагать, что равномерные нормы на треугольнике Δ любых четвертых производных функции $f(x,y)$ не превосходят M, где M — некоторое заданное число. При оценках погрешности аппроксимации константы, не зависящие от $f(x,y)$ и от триангуляции, не выписываются в явном виде и иногда обозначаются одной и той же буквой K. Без ограничения общности мы можем считать, что треугольник Δ расположен так, как показано на рисунке.

Пусть BD — перпендикуляр, опущенный из вершины D на наибольшую сторону AC треугольника Δ; h — длина отрезка BD; AD — наименьшая сторона треугольника; E — середина AD. Соответственно, α — наименьший, β — средний, γ — наибольший угол треугольника Δ; $AB = a$; $BC = b$; $H = a + b$ — длина наибольшей стороны треугольника Δ. Заметим, что при этом $0 < a \leq b$.

На интерполяционный полином $P_3(x,y) = P_3(f;x,y)$ налагаются следующие условия:

I. Значения этого полинома в точках A, C, D совпадают со значениями функции $f(x,y)$ в этих точках.

II. Значения первых производных полинома по x и y в точках A, C, D совпадают со значениями соответствующих производных функции в тех же точках.

III. Значения производных по x полинома и функции в точке E совпадают.

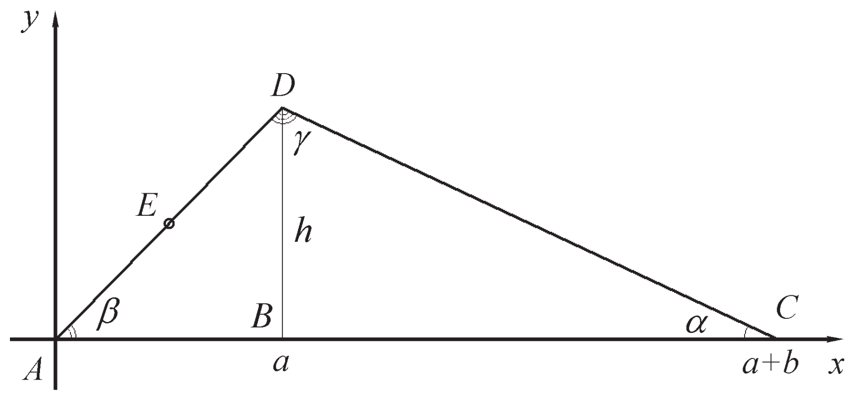


Рисунок.

Задаваемые значения функции и ее производных назовем определяющими параметрами этой функции.

Положим

$$\rho(\gamma) = \max\left(1, \frac{1}{\sin\gamma}\right), \tag{1.2}$$

$$e(x,y) = f(x,y) - P_3(f;x,y).$$

Теорема 1. *Справедливы следующие неравенства:*

$$\left\| \frac{\partial^k e(x,y)}{\partial x^k} \right\|_{C(\Delta)} \le KMH^{4-k} \qquad (0 \le k \le 3), \tag{1.3}$$

$$\left\| \frac{\partial^k e(x,y)}{\partial y \partial x^{k-1}} \right\|_{C(\Delta)} \le KM\rho(\gamma)H^{4-k} \qquad (1 \le k \le 3), \tag{1.4}$$

$$\left\| \frac{\partial^k e(x,y)}{\partial y^2 \partial x^{k-2}} \right\|_{C(\Delta)} \le KM\rho^2(\gamma)H^{4-k} \qquad (2 \le k \le 3), \tag{1.5}$$

$$\left\| \frac{\partial^3 e(x,y)}{\partial y^3} \right\|_{C(\Delta)} \le KM\rho^3(\gamma)H, \tag{1.6}$$

где K — константы, не зависящие от f и Δ.

Пусть $\xi^1 = (\xi_1^1, \xi_2^1)$ — единичный вектор. Как и ранее, $e(x,y) = e(f;x,y) = f(x,y) - P_3(f;x,y)$, где $P_3(f;x,y)$ — полином, удовлетворяющий условиям I–III. Через $\mathcal{D}_{\xi^i} e(f;x,y)$ обозначим производную функции $e(f;x,y)$ по направлению ξ^i и положим $\mathcal{D}_{\xi^1,\dots,\xi^s} e(f;x,y) = \mathcal{D}_{\xi^s}[\mathcal{D}_{\xi^1,\dots,\xi^{s-1}} e(f;x,y)]$ (если $s = 1$, то выражение в квадратных скобках заменяется на $e(f;x,y)$).

Под W^4M будем понимать класс функций, непрерывных на Δ, у которых на Δ существуют непрерывные производные четвертого порядка по всем направлениям $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$, и для любых $x, y \in \Delta$ и любых ξ^s $(s = 1,2,3,4)$ выполняется неравенство

$$\left|\mathcal{D}_{\xi^1,\xi^2,\xi^3,\xi^4} f(x,y)\right| \le M.$$

Кроме того, полагаем $\|f\|_{C(\Delta)} = \max\limits_{x,y\in\Delta} |f(x,y)|$.

Теорема 2. *Пусть $f \in W^4 M$, тогда существуют константы K_1 и K_2, $0 < K_1 \le K_2 < \infty$, не зависящие от f и Δ, при которых имеют место неравенства*

$$K_1 H^{4-s} \rho^s(\gamma) M \le E(s, \Delta, M) = \sup_{\xi_1,\ldots,\xi_s} \sup_{f \in W^4 M} \|\mathcal{D}_{\xi^1,\ldots,\xi^s} e(f; x, y)\|_{C(\Delta)}$$

$$\le K_2 H^{4-s} \rho^s(\gamma) M \qquad (0 \le s \le 3).$$

Оценка сверху следует из теоремы 1. Оценка снизу будет установлена в § 3.

2. Вспомогательные результаты

Положим $e_{i,j}(x, y) = \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j}[f(x, y) - P_3(x, y)]$. Тогда в силу условий в точке A имеем

$$e_{0,0} = e_{1,0}(0, 0) = e_{0,1}(0, 0) = 0, \tag{2.1}$$

или

$$a_0 = f(0, 0), \qquad a_1 = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}, \qquad a_2 = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y}. \tag{2.2}$$

Лемма 1. *Справедливы следующие равенства:*

$$e_{2,0}(0, 0) = \int_0^H (H - t)^2 \frac{t}{H^2} \cdot \frac{\partial^4 f(t, 0)}{\partial t^4}\, dt, \tag{2.3}$$

$$e_{3,0}(0, 0) = -\int_0^H \frac{(H - t)^2 (H + 2t)}{H^3} \cdot \frac{\partial^4 f(t, 0)}{\partial t^4}\, dt. \tag{2.4}$$

Доказательство. Учитывая равенство $a+b = H$ и условие интерполяции функции и ее производной по x в точке $(H, 0)$, имеем

$$a_3 H^2 + a_6 H^3 = f(H, 0) - f(0, 0) - \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} H,$$

$$2a_3 H^2 + 3a_6 H^3 = \left[\frac{\partial f(H, 0)}{\partial x} - \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}\right] H.$$

Находя отсюда a_3 и a_6 и записывая формулу Тейлора с остаточным членом в форме Коши, получаем

$$a_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \int_0^H (H - t)^2 \frac{t}{H^2} \cdot \frac{\partial^4 f(t, 0)}{\partial t^4}\, dt, \tag{2.5}$$

$$a_6 = \frac{1}{6} \cdot \frac{\partial^3 f(0, 0)}{\partial x^3} + \frac{1}{6} \int_0^H \frac{(H - t)^2 (H + 2t)}{H^3} \cdot \frac{\partial^4 f(t, 0)}{\partial t^4}\, dt, \tag{2.6}$$

что равносильно (2.3), (2.4).

Лемма 2. *Справедливы следующие неравенства:*

$$|e_{1,1}(0, 0)| \le K M H^2 \max\left(\frac{a}{h}, 1\right), \tag{2.7}$$

$$|e_{2,1}(0, 0)| \le K M H \max\left(\frac{a}{h}, 1\right), \tag{2.8}$$

$$|e_{1,2}(0, 0)| \le K M H \max\left(\frac{a^2}{h^2}, 1\right). \tag{2.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая интерполяцию производной по y в точке $(H,0)$ и производных по x в точках $(0,h)$ и $\left(\frac{a}{2},\frac{h}{2}\right)$, выводим систему уравнений

$$a_4H + a_7H^2 = \frac{\partial f(H,0)}{\partial y} - \frac{\partial f(0,0)}{\partial y},$$

$$a_4h + 2aha_7 + h^2a_8 = \frac{\partial f(a,h)}{\partial x} - \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} - 2aa_3 - 3a^2a_6, \tag{2.10}$$

$$2ha_4 + 2aha_7 + h^2a_8 = 4\left[\frac{\partial f\left(\frac{a}{2},\frac{h}{2}\right)}{\partial x} - \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}\right] - 4aa_3 - 3a^2a_6.$$

В дальнейшем ради упрощения мы используем следующее символическое равенство:

$$\mathcal{A} \doteqdot \mathcal{B} + KM\max(\varphi(a,h),\psi(a,h)),$$

которое понимается в том смысле, что

$$|\mathcal{A}-\mathcal{B}| \le KM\max(\varphi(a,h),\psi(a,h)).$$

Здесь $\varphi(a,h)$ и $\psi(a,h)$ — явно выписываемые простые функции от указанных аргументов, различные в различных ситуациях; M — константа, определяющая класс аппроксимируемых функций; K — константа, не зависящая от функций $f(x,y)$ и триангуляции области; $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — некоторые выражения, зависящие от коэффициентов полинома $P_3(x,y)$, от функции $f(x,y)$, ее производных и интегралов от них. При этом в отдельных выражениях может оказаться несколько слагаемых типа $KM\max(\varphi(a,h),\psi(a,h))$ с различными функциями φ и ψ.

Вычитая из последнего уравнения предпоследнее и представляя $\frac{\partial f(a,h)}{\partial x}$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, а другие выражения для f и ее производных — с остаточным членом в интегральной форме Коши, находим

$$a_4 \doteqdot \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y} + \frac{a}{hH^2}\int\limits_0^H t(H-t)^2\frac{\partial^4 f(t,0)}{\partial t^4}\,dt + KM\max(a^3,h^3)h^{-1}, \tag{2.11}$$

т.е.

$$a_4 \doteqdot \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y} + KMH^2\max\left(\frac{a}{h},1\right). \tag{2.12}$$

Отсюда и из первого уравнения, разлагая правую часть в нем по формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме Коши, получаем

$$a_7 \doteqdot \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x^2\partial y} + \frac{1}{2}\int\limits_0^H \frac{(H-t)^2}{H^2}\cdot\frac{\partial^4 f(t,0)}{\partial t^3\partial y}\,dt$$

$$-\frac{a}{h}\int\limits_0^H \frac{t(H-t)^2}{H^3}\cdot\frac{\partial^4 f(t,0)}{\partial t^4}\,dt + KM\max(a^3,h^3)H^{-1}h^{-1},$$

т.е.

$$a_7 \doteqdot \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x^2\partial y} + KMH\max\left(\frac{a}{h},1\right). \tag{2.13}$$

Далее, из (2.10)–(2.12) следует, что

$$a_8 \doteqdot h^{-2}\left[\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2}a + \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}h + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x^3}a^2\right.$$

$$+\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x^2 \partial y}ah + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x \partial y^2}h^2 + K\max(a^3,h^3)M - \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2}a + a\int\limits_0^H (H-t)^2\frac{t}{H^2}\cdot\frac{\partial^4 f(t,0)}{\partial t^4}\,dt$$

$$-\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\partial^3 f(t,0)}{\partial x^3} - a^2\int\limits_0^H \frac{(H-t)^2\left(\frac{1}{2}H+t\right)}{H^3}\cdot\frac{\partial^4 f(t,0)}{\partial t^4}\,dt - \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y}h$$

$$-\frac{a}{H^2}\int\limits_0^H t(H-t)^2\frac{\partial^4 f(t,0)}{\partial t^4}\,dt - ah\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x^2 \partial y}$$

$$\left.+ah\int\limits_0^H \frac{(H-t)^2}{H^2}\cdot\frac{\partial^4 f(t,0)}{\partial t^4}\,dt - 2a^2\int\limits_0^H \frac{t(H-t)^2}{H^3}\cdot\frac{\partial^4 f(t,0)}{\partial t^4}\,dt + \frac{2a}{H}KM\max(a^3,h^3)\right].$$

Отсюда

$$a_8 \doteqdot \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x \partial y^2} - \frac{a^2}{h^2}\int\limits_0^H \frac{(H-t)^2\left(\frac{1}{2}H+t\right)}{H^3}\cdot\frac{\partial^4 f(t,0)}{\partial t^4}\,dt$$

$$+\frac{a}{h}\int\limits_0^H \frac{(H-t)^2}{H^2}\cdot\frac{\partial^4 f(t,0)}{\partial t^4}\,dt + KM\frac{2a}{Hh^2}\max(a^3,h^3),$$

т.е.

$$a_8 \doteqdot \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x \partial y^2} + KMH\max\left(\frac{a^2}{h^2},1\right). \tag{2.14}$$

Из (2.11)–(2.13) следуют утверждения леммы 2.

Лемма 3. *Справедливы следующие неравенства:*

$$|e_{0,2}(0,0)| \le KMH^2\max\left(\frac{a^2}{h^2},1\right),$$

$$|e_{0,3}(0,0)| \le KMH\max\left(\frac{a^3}{h^3},1\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Осталось удовлетворить двум условиям в точке D. Учитывая (2.2), их можно записать в виде

$$a_5h^2 + a_9h^3 = f(a,h) - f(0,0) - a\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} - h\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} - a_3a^2 - a_4ah - a_6a^3 - a_7a^2h - a_8ah^2,$$

$$2a_5h^2 + 3a_9h^3 = h\left[\frac{\partial f(a,h)}{\partial y} - \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} - aa_4 - a^2a_7 - 2aha_8\right].$$

Вычтя из второго равенства удвоенное первое, находим

$$a_9 = h^{-3}\left\{h\left[\frac{\partial f(a,h)}{\partial y} - \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}\right] + 2a^2a_3 + aha_4 + 2a^3a_6 + a^2ha_7\right.$$

$$\left.-2\left[f(a,h) - f(0,0) - \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}a - \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}h\right]\right\}. \tag{2.15}$$

Разлагая по формуле Тейлора и подставляя найденные в (2.5), (2.6), (2.11) и (2.13) значения a_3, a_6, a_4 и a_7, получим

$$a_9 \doteqdot h^{-3}\left\{\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y}ah + \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2}h^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x^2 \partial y}a^2h\right.$$

$$+\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x\partial y^2}ah^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial y^3}h^3+KMh\max(a^3,h^3)+a^2\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2}$$

$$-a^2\int\limits_0^H (H-t)^2\frac{t}{H^2}\cdot\frac{\partial^4 f(t,0)}{\partial t^4}\,dt+\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}\,ah+\frac{a^2}{H^2}\int\limits_0^H t(H-t)^2\frac{\partial^4 f(t,0)}{\partial t^4}\,dt$$

$$+aKM\max(a^3,h^3)+\frac{1}{3}a^3\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x^3}+\frac{a^3}{3}\int\limits_0^H\frac{(H-t)^2(H+2t)}{H^3}\cdot\frac{\partial^4 f(t,0)}{\partial t^4}\,dt$$

$$+\frac{a^2h}{2}\cdot\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x^2\partial y}+\frac{a^2h}{2}\int\limits_0^H\frac{(H-t)^2}{H^2}\cdot\frac{\partial^4 f(t,0)}{\partial t^4}\,dt$$

$$-\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2}a^2-2\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}ah-\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2}h^2-\frac{1}{3}\cdot\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x^3}a^3-\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x^2\partial y}a^2h$$

$$-\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x\partial y^2}ah^2-\frac{1}{3}\cdot\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial y^3}h^3+KM\max(a^4,h^4)\Bigg\}.$$

Отсюда

$$a_9\doteqdot\frac{1}{6}\cdot\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial y^3}+\frac{a^2}{2h^2}\int\limits_0^H\frac{(H-t)^2}{H^2}\cdot\frac{\partial^4 f(t,0)}{\partial t^4}\,dt$$

$$+\frac{1}{3}\cdot\frac{a^3}{h^3}\int\limits_0^H\frac{(H-t)^2(H+2t)}{H^3}\cdot\frac{\partial^4 f(t,0)}{\partial t^4}\,dt+KM\max\left(a\cdot\frac{a^3}{h^3},h\right)$$

или

$$a_9\doteqdot\frac{1}{6}\cdot\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial y^3}+KMH\max\left(\frac{a^3}{h^3},1\right). \qquad (2.16)$$

Далее, из второго уравнения системы находим

$$2a_5\doteqdot h^{-1}\left[\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}a+\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2}h+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x^2\partial y}a^2+\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x\partial y^2}ah\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial y^3}h^2+KM\max(a^3,h^3)-aa_4-a^2a_7-2aha_8\right]-3ha_9$$

$$\doteqdot\frac{a}{h}\cdot\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2}+\frac{a^2}{2h}\cdot\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x^2\partial y}+a\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x\partial y^2}+\frac{1}{2}h\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial y^3}$$

$$+KM\max\left(a^2\frac{a}{h},h^2\right)-\frac{a}{h}\cdot\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}-\frac{a^2}{h^2H^2}\int\limits_0^H t(H-t)^2\frac{\partial^4 f(t,0)}{\partial t^4}\,dt$$

$$+KM\max(a^3,h^3)\frac{a}{h^2}-\frac{a^2}{2h}\cdot\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x^2\partial y}-\frac{a^2}{2h}\int\limits_0^H\frac{(H-t)^2}{H^2}\cdot\frac{\partial^4 f(t,0)}{\partial t^4}\,dt$$

$$+\frac{a^3}{h^2}\int\limits_0^H\frac{t(H-t)^2}{H^3}\cdot\frac{\partial^4 f(t,0)}{\partial x^4}\,dt+KM\frac{a^2}{h^2}\cdot\frac{1}{H}\max(a^3,h^3)-a\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x\partial y^2}$$

$$+\frac{a^3}{h^2}\int\limits_0^H\frac{(H-t)^2(H+2t)}{H^3}\cdot\frac{\partial^4 f(t,0)}{\partial t^4}\,dt-\frac{2a^2}{h}\int\limits_0^H\frac{(H-t)^2}{H^2}\cdot\frac{\partial^4 f(t,0)}{\partial t^4}\,dt$$

$$+KM\frac{4a^2}{Hh^2}\max(a^3,h^3)-\frac{h}{2}\cdot\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial y^3}-\frac{3}{2}\cdot\frac{a^2}{h}\int\limits_0^H\frac{(H-t)^2}{H^2}\cdot\frac{\partial^4 f(t,0)}{\partial t^4}\,dt$$

$$-\frac{a^3}{h^2}\int\limits_0^H\frac{(H-t)^2(H+2t)}{H^3}\cdot\frac{\partial^4 f(t,0)}{\partial t^4}\,dt+KM\max\left(a^2\frac{a^2}{h^2},h^2\right).$$

Из последнего равенства имеем

$$a_5 \doteqdot \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2}+KMH^2\max\left(\frac{a^2}{h^2},1\right). \tag{2.17}$$

Из (2.16), (2.17) следует справедливость леммы 3.

Используя формулу Тейлора в окрестности точки $(0,0)$ с остаточным членом в форме Лагранжа, учитывая леммы 1–3 и неравенство $\frac{a}{h}=\operatorname{ctg}\beta\le\frac{1}{\sin\beta}\le\frac{2}{\sin\gamma}$, получаем оценки (1.3)–(1.6). Теорема доказана.

3. Неулучшаемость оценок

Приведем пример функции, заданной на треугольнике ACD (см. рисунок), показывающий справедливость левой оценки в теореме 2. Положим $\overset{*}{f}(x,y)=x^2(b+a-x)^2$, тогда $\overset{*}{f}(x,y)\in W^4M$ при $M=24$. Как и в п. 1, полином, удовлетворяющий условиям 1–3, будем искать в виде (1.1).

Тогда из условий $P_3(0,0)=\overset{*}{f}(0,0)$, $\frac{\partial P_3(0,0)}{\partial x}=\frac{\partial\overset{*}{f}(0,0)}{\partial x}=0$, $\frac{\partial P_3(0,0)}{\partial y}=\frac{\partial\overset{*}{f}(0,0)}{\partial y}=0$ сразу находим

$$a_0=a_1=a_2=0. \tag{3.1}$$

Из (3.1) и условий $0=\overset{*}{f}(a+b,0)=P_3(a+b,0)$, $0=\frac{\partial\overset{*}{f}(a+b,0)}{\partial x}=\frac{\partial P_3(a+b,0)}{\partial x}$ имеем

$$a_3(b+a)^2+a_6(b+a)^3=0,$$

$$2a_3(b+a)+3a_6(b+a)^2=0.$$

Из последних равенств получаем

$$a_3=a_6=0. \tag{3.2}$$

Далее, учитывая равенства

$$\overset{*}{f}{}'_y(a+b,0)=0,\qquad \overset{*}{f}{}'_x(a,h)=2ab(b-a)\quad\text{и}\quad \overset{*}{f}{}'_x\left(\frac{a}{2},\frac{h}{2}\right)=ab\left(b+\frac{a}{2}\right),$$

а также равенства (3.1), (3.2) и условия

$$\frac{\partial P_3(a+b,0)}{\partial y}=\overset{*}{f}{}'_y(a+b,0)=0,\qquad \frac{\partial P_3(a,h)}{\partial x}=\overset{*}{f}{}'_x(a,h)=2ab(b-a),$$

$$\frac{\partial P_3\left(\frac{a}{2},\frac{h}{2}\right)}{\partial x}=\overset{*}{f}{}'_x\left(\frac{a}{2},\frac{h}{2}\right)=ab\left(b+\frac{a}{2}\right),$$

имеем

$$\begin{cases} a_4(b+a)+a_7(b+a)^2=0,\\ a_4h+2a_7ah+a_8h^2=2ab(b-a),\\ a_4\frac{h}{2}+2a_7\frac{ah}{4}+a_8\frac{h^2}{4}=ab\left(b+\frac{a}{2}\right). \end{cases}$$

Отсюда находим

$$a_4 = 2b(b+2a)\frac{a}{h}, \qquad a_7 = -\frac{2b(b+2a)}{b+a}\cdot\frac{a}{h}, \qquad a_8 = -\frac{2b(b-a)}{b+a}\cdot\frac{a^2}{h^2}. \tag{3.3}$$

Остались два условия. Так как $\overset{*}{f}{}'_y(a,h) = a^2b^2$ и $\overset{*}{f}{}'_y(a,h) = 0$, то из условий $P_3(a,h) = \overset{*}{f}(a,h) = a^2b^2$, $\frac{\partial P_3(a,h)}{\partial y} = \overset{*}{f}{}'_y(a,h) = 0$ имеем

$$a_4ah + a_5h^2 + a_7a^2h + a_8ah^2 + a_9h^3 = a^2b^2,$$

$$a_4a + 2a_5h + a_7a^2 + 2a_8ah + 3a_9h^2 = 0.$$

После подстановки значений a_4, a_7 и a_8 получаем

$$a_5h^2 + a_9h^3 = -\frac{a^2b(b^2+ab+2a^2)}{b+a},$$

$$a_52h^2 + a_93h^3 = -\frac{2a^2b(b^2+2a^2)}{b+a}.$$

Из последней системы следует, что

$$a_5 = -\frac{2b(b^2+2a^2)}{b+a}\cdot\frac{a^2}{h^2}, \tag{3.4}$$

$$a_9 = \frac{2b^2}{b+a}\cdot\frac{a^3}{h^3}. \tag{3.5}$$

Так как $P_3(\overset{*}{f},x,0) \equiv 0$, то

$$\left\|\frac{\partial^s \overset{*}{f}(x,y)}{\partial x^s} - \frac{\partial^s P_3(\overset{*}{f},x,y)}{\partial x^s}\right\|_{C(\Delta)} \geq \max_{0\leq x\leq H}\left|\frac{\partial^s \overset{*}{f}(x,0)}{\partial x^s}\right| \qquad (s=0,1,2,3). \tag{3.6}$$

Правые части (3.6) имеют следующие значения:

$$\|\overset{*}{f}(x,0)\|_{C[0,H]} = \frac{1}{16}H^4, \qquad \left\|\frac{\partial \overset{*}{f}(x,0)}{\partial x}\right\|_{C[0,H]} = \frac{2\sqrt{3}}{3}H^3,$$

$$\left\|\frac{\partial^2 \overset{*}{f}(x,0)}{\partial x^2}\right\|_{C[0,H]} = H^2, \qquad \left\|\frac{\partial^3 \overset{*}{f}(x,0)}{\partial x^3}\right\|_{C[0,H]} = H.$$

Из последних равенств, неравенств (3.6) получаем оценки снизу в теореме 2 при $a \leq h$, так как

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\overset{*}{f}(0,0) - P_3(\overset{*}{f},0,0)\right]\right| = |a_5| = \frac{2b(b^2+2a^2)}{b+a}\cdot\frac{a^2}{h^2} \geq \frac{1}{4}H^2\frac{a^2}{h^2},$$

$$\left|\frac{\partial^3}{\partial y^3}\left[\overset{*}{f}(x,y) - P_3(\overset{*}{f},x,y)\right]\right| = a_3 = \frac{2b^2}{b+a}\cdot\frac{a^3}{h^3} \geq \frac{1}{2}H\frac{a^3}{h^3}.$$

При $a > h$ из последних соотношений, учитывая, что в рассматриваемом случае $\beta \leq \frac{\pi}{4}$ и $\frac{a}{h} = \operatorname{ctg}\beta \geq \frac{\sqrt{2}}{2\sin\beta} \geq \frac{\sqrt{2}}{2\sin\gamma}$, и используя функцию $\widehat{f}(x,y) = \frac{M}{24}\overset{*}{f}(x,y)$, устанавливаем справедливость оценок снизу для $s = 2, 3$.

При $a > h$ и $s = 1$, учитывая (3.1) и явные формулы для a_4 и a_7 (см. (3.3)), имеем

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}\left[\overset{*}{f}\left(\frac{1}{2}H,0\right) - P_3\left(\overset{*}{f};\frac{1}{2}H,0\right)\right]\right| = \frac{1}{2}b(b+2a)(b+a)\frac{a}{h} \geq \frac{1}{4}H^3\frac{a}{h}.$$

Отсюда получаем и здесь, как в предыдущем случае, оценку снизу в теореме 2.

4. Явные формулы для фундаментальных многочленов рассматриваемого интерполяционного многочлена

Пусть $A=(x_1,y_1),\ C=(x_2,y_2),\ D=(x_3,y_3)$ — вершины произвольного невырожденного треугольника Δ. При этом AC — наибольшая сторона Δ, а CD — наименьшая. Точка E лежит на середине стороны CD.

Используя барицентрические координаты, запишем следующее преобразование:

$$x = x_3 + (x_1 - x_3)\lambda_1 + (x_2 - x_3)\lambda_2,$$

$$y = y_3 + (y_1 - y_3)\lambda_1 + (y_2 - y_3)\lambda_2, \qquad 0 \le \lambda_1, \lambda_2, \qquad \lambda_1 + \lambda_2 \le 1.$$

При этом вершинам A, C, D треугольника Δ соответствуют вершины $A' = (1,0),\ C' = (0,1),\ D' = (0,0)$ треугольника Δ'; точке $E = \left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$ соответствует точка $E' = \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Положим

$$\varphi(\lambda_1,\lambda_2) = f[x_3 + (x_1-x_3)\lambda_1 + (x_2-x_3)\lambda_2,\ y_3 + (y_1-y_3)\lambda_1 + (y_2-y_3)\lambda_2],$$

и пусть $Q_3(\varphi;\lambda_1,\lambda_2) = P_3(f;x,y)$, где последний полином определяется условиями I–III из § 1 применительно к рассматриваемому здесь треугольнику, а полином $Q_3(\varphi;\lambda_1,\lambda_2)$ определяется теми же условиями, но при этом f заменено на φ, а x, y заменены на λ_1, λ_2.

Для того чтобы определить полином $Q_3(\varphi;\lambda_1,\lambda_2)$, нужно выразить определяющие параметры функции $\varphi(\lambda_1,\lambda_2)$ через определяющие параметры функции $f(x,y)$ и построить 10 фундаментальных полиномов той же степени, у каждого из которых лишь один определяющий параметр равен единице, а остальные равны нулю.

Если $B=(x,y)$, то точку с соответствующими x и y барицентрическими координатами λ_1, λ_2 будем обозначать B' и будем писать

$$f(x,y) = f(B), \qquad \varphi(\lambda_1,\lambda_2) = \varphi(B'), \qquad Q_3(\varphi;\lambda_1,\lambda_2) = Q_3(B').$$

Знак ":=" означает "равно по определению". Имеем

$$Z_1 := Q_3(A') = \varphi(A') = f(A), \qquad Z_2 := Q_3(C') = f(C),$$

$$Z_3 := Q_3(D') = f(D), \qquad Z_4 := \frac{\partial Q_3(A')}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial f(A)}{\partial x}(x_1 - x_3) + \frac{\partial f(A)}{\partial y}(y_1 - y_3),$$

$$Z_5 := \frac{\partial Q_3(A')}{\partial \lambda_2} = \frac{\partial f(A)}{\partial x}(x_2 - x_3) + \frac{\partial f(A)}{\partial y}(y_2 - y_3),$$

$$Z_6 := \frac{\partial Q_3(C')}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial f(C)}{\partial x}(x_1 - x_3) + \frac{\partial f(C)}{\partial y}(y_1 - y_3),$$

$$Z_7 := \frac{\partial Q_3(C')}{\partial \lambda_2} = \frac{\partial f(C)}{\partial x}(x_2 - x_3) + \frac{\partial f(C)}{\partial y}(y_2 - y_3),$$

$$Z_8 := \frac{\partial Q_3(D')}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial f(D)}{\partial x}(x_1 - x_3) + \frac{\partial f(D)}{\partial y}(y_1 - y_3),$$

$$Z_9 := \frac{\partial Q_3(D')}{\partial \lambda_2} = \frac{\partial f(D)}{\partial x}(x_2 - x_3) + \frac{\partial f(D)}{\partial y}(y_2 - y_3).$$

Обозначим единичное направление, параллельное направлению из C в A, через l, единичное направление из E', параллельное направлению из C' в A', через l'. Тогда 10-й определяющий параметр имеет вид

$$Z_{10} := \frac{\partial Q_3(E')}{\partial l'} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{\partial f(E)}{\partial x}(x_1 - x_2) + \frac{\partial f(E)}{\partial y}(y_1 - y_2)\right].$$

Пусть $Q_{3,i}(\lambda_1,\lambda_2)$ — кубический полином третьей степени по совокупности переменных λ_1,λ_2, определяющие параметры которого имеют вид $\delta_{k,i}$ $(k=1,2,\ldots,10)$, где $\delta_{k,i}$ — символ Кронекера.

Непосредственной проверкой устанавливаем, что

$$Q_{3,1}(\lambda_1,\lambda_2)=\lambda_2^2(3-2\lambda_1),\qquad Q_{3,2}(\lambda_1,\lambda_2)=\lambda_2(6\lambda_1+3\lambda_2-6\lambda_1^2-6\lambda_1\lambda_2-2\lambda_2^2),$$

$$Q_{3,3}(\lambda_1,\lambda_2)=(1-\lambda_1-\lambda_2)[1+\lambda_1+\lambda_2-2(\lambda_1+\lambda_2)^2],\qquad Q_{3,4}(\lambda_1,\lambda_2)=\lambda_1^2(\lambda_1-1),$$

$$Q_{3,5}(\lambda_1,\lambda_2)=\lambda_2\lambda_1^2,\qquad Q_{3,6}(\lambda_1,\lambda_2)=\lambda_2(-\lambda_1+2\lambda_1\lambda_2+\lambda_1^2),$$

$$Q_{3,7}(\lambda_1,\lambda_2)=\lambda_2(-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_1^2+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2),$$

$$Q_{3,8}(\lambda_1,\lambda_2)=(1-\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_1^2-2\lambda_1\lambda_2),$$

$$Q_{3,9}(\lambda_1,\lambda_2)=(1-\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_2^2),\qquad Q_{3,10}(\lambda_1,\lambda_2)=4\sqrt{2}\lambda_1\lambda_2(1-\lambda_1-\lambda_2).$$

Используя найденные значения фундаментальных полиномов и вычисленные определяющие параметры функции $\varphi(\lambda_1,\lambda_2)$, получаем требуемое представление

$$Q_3(\varphi;\lambda_1,\lambda_2)=\sum_{i=1}^{10}Z_iQ_{3,i}(\lambda_1,\lambda_2).$$

Поступила 24.12.04

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Zenišek A.** Interpolation polynomials on the triangle // Numer. Math., 1970. Vol. 15. P. 283–296.
2. **Zlamal M., Zenišek A.** Mathematical aspect of the finite element method // Technical, physical and mathematical principles of the finite element method / Ed. V.Kolar et al. Praha: Acad. VED, 1971. P. 15–39.
3. **Ciarlet P.G., Raviart P.-A.** General Lagrange and Hermite interpolation in R^n with application to finite element methods // Arch. Rational Mech. Anal. 1972. Vol. 46. P. 177–199.
4. **Synge J.L.** The hypercircle in mathematical physics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1957.
5. **Babuška I., Aziz A.K.** On the angle condition in the finite element method // SIAM J. Numer. Anal. 1976. Vol. 13, № 2. P. 214–226.
6. **Jamet P.** Estimations d'erreur pour des éléments finis droits presque dégénérées // Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle. Sér. Rouge Anal. Numer. 1976. № 10. P. 43–61.
7. **Субботин Ю.Н.** Зависимость оценок многомерной кусочно-полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик триангуляции // Тр. МИАН. 1989. Т. 189. С. 117–137.
8. **Субботин Ю.Н.** Зависимость оценок аппроксимации интерполяционными полиномами пятой степени от геометрических характеристик треугольника // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1992. Т. 2. С. 110–119.
9. **Baidakova N.V.** On same interpolation process by polynomials of degree $4m+1$ on the triangle // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modeling. 1999. Vol. 14, № 2. P. 87–107.
10. **Latypova N.V.** Error estimates for approximation by polynomials of degree $4k+3$ on the triangle // Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. 1. 2002. P. S190–S213.
11. **Деклу Ж.** Метод конечных элементов. Москва: Мир, 1976. 96 с.
12. **Сьярле Ф.** Метод конечных элементов для эллиптических задач. Москва: Мир, 1980. 512 с.
13. **Латыпова Н.В.** Погрешность кусочно-кубической интерполяции на треугольнике // Вестн. Удмурт. ун-та. Сер. Математика. 2003. С. 3–10.
14. **Байдакова Н.В.** Об одном способе эрмитовой интерполяции многочленами 3-й степени на треугольнике // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2005. Т. 11. С. 47–52.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 11 № 2 2005

УДК 517.51

КОНСТРУКЦИЯ ВСПЛЕСКОВ В $W_2^m(\mathbb{R})$ И ИХ АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА В РАЗНЫХ МЕТРИКАХ [1]

Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных

Построены базисы всплесков в соболевском пространстве $W_2^m(\mathbb{R})$ на оси $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, ортогональные относительно произвольного заданного скалярного произведения, порождающего одну из эквивалентных норм в $W_2^m(\mathbb{R})$. Изучена скорость сходимости рядов по этим базисам для гладких функций из $L_q(\mathbb{R})$ $(2 \le q \le \infty)$.

Введение

В настоящее время теория всплесков достаточно хорошо развита и находит многочисленные приложения. За небольшим исключением, рассматриваемые ортонормированные системы всплесков ортогональны относительно обычного скалярного произведения в $L_2(\mathbb{R})$ $(\mathbb{R} = (-\infty, \infty))$ или $L_2[0, 2\pi]$. Однако во многих ситуациях полезно иметь системы всплесков, ортонормированные относительно более общего скалярного произведения. Соответствующие мотивировки см. в [1–5].

Пусть вещественные числа $p_\nu \ge 0$ $(0 \le \nu \le m)$, $p_0 > 0$, $p_m > 0$ заданы. Далее $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $k, m \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{Z}$, $\overline{g}(x)$ — функция, комплексно сопряженная к $g(x)$. В работе строится система всплесков на $\mathbb{R}$, ортонормированная относительно скалярного произведения

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{\nu=0}^{m} p_\nu f^{(\nu)}(x) \overline{g^{(\nu)}}(x)\, dx, \tag{0.1}$$

порождающего одну из эквивалентных норм $\|f\|_{W_2^m(\mathbb{R})} = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ в пространстве $W_2^m(\mathbb{R})$. Пространство Соболева $W_2^m(\mathbb{R})$ определяется как нормированное пространство функций из $L^2(\mathbb{R})$, обладающих локально абсолютно непрерывными производными порядка $\nu = 0, 1, \ldots, m-1$, суммируемыми с квадратом вместе с m-й производной на $\mathbb{R}$. При построении всплесков, ортогональных относительно скалярного произведения (0.1), применены L-сплайны. Для этих L-сплайнов установлено первое интегральное соотношение (см., например, [6]), тесно связанное со скалярным произведением (0.1). Исследование аппроксимативных свойств построенных здесь ортогональных базисов всплесков пространства $W_2^m(\mathbb{R})$ предваряется изучением аппроксимативных свойств интерполяционных L-сплайнов.

1. L-сплайны

В этом разделе рассматривается частный случай L-сплайнов [6, 7], порожденных линейным дифференциальным оператором с постоянными коэффициентами. С целью определения

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 05–01–00489 и 05–01–00409) и программы Ведущих научных школ (проект НШ–1347.2003.1)

соответствующих L-сплайнов введем дифференциальный оператор

$$L(\mathcal{D}) = L_{2m+2k}(\mathcal{D}) = \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^{\nu+k} p_\nu \mathcal{D}^{2\nu+2k} \qquad \left(\mathcal{D} = \frac{d}{dx},\ k > 1,\ m > 1\right) \tag{1.1}$$

и множества узлов

$$\Delta_j := \{x_s = x_{j,s} = s2^{-j}:\ s \in \mathbb{Z}\} \qquad (j \in \mathbb{Z}). \tag{1.2}$$

Функцию $S_{L,j}(x)$ на $\mathbb{R}$ называют L-сплайном порядка $2m + 2k$ с узлами (1.2), если выполнены следующие условия:

(1) $L_{2m+2k}(\mathcal{D})S_{L,j}(x) = 0$ при $x \in (x_{j,s}, x_{j,s+1}) \qquad (s \in \mathbb{Z})$;

(2) функция $S_{L,j}(x)$ и ее производные по $(2m+2k-2)$-й порядок включительно непрерывны на $(-\infty, \infty)$.

Так как внутри каждого интервала любая производная $S^{(r)}_{L,j}(x)$ есть абсолютно непрерывная (даже аналитическая) функция, то производная $S^{(2m+2k-2)}_{L,j}(x)$ локально абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}$, а функция

$$\sum_{\nu=0}^{m} (-1)^{\nu+k} p_\nu \mathcal{D}^{2\nu+2k-1} S_{L,j}(x)$$

кусочно-постоянна на $\mathbb{R}$ с возможными разрывами в узлах сплайна.

Будем говорить, что L-сплайн $S_{L,j}(x) = S_{L,j}(f, x)$ является интерполяционным для непрерывной функции $f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$, если $S_{L,j}(f, x_s) = f(x_s),\ x_s = x_{j,s},\ s \in \mathbb{Z}$.

Далее везде, где интегралы берутся в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, пределы интегрирования не указываются. Аналогично считается, что в суммах вида $\sum a_l,\ \sum\limits_j a_{j,\nu},\ \sum P(x+s)$ суммирование ведется по всем l, j, s из $\mathbb{Z}$. Вместо $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left(\int |f(x)|^2\ dx\right)^{1/2}$ пишется $\|f\|_2$, а символ $\|f\|_q$ принимается для обозначения нормы f в $L^q(\mathbb{R})$. Символ типа $C_{r,k}(j, P_{2m})$ в оценках применяется для обозначения разных констант, зависящих только от r, k, j и от коэффициентов $p_0, p_1, \ldots, p_m$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $f \in W_2^{m+k}(\mathbb{R})$. Тогда интерполяционный сплайн $S_{L,j}(f, x)$, удовлетворяющий условиям $S_{L,j}(f, x) \in L_2(\mathbb{R})$ и $S^{(2k+2m-1)}_{L,j}(f, x) \in L_2(\mathbb{R})$, существует и справедливо следующее равенство (первое интегральное соотношение)*

$$\int \sum_{\nu=0}^{m} p_\nu \left| f^{(k+\nu)}(x) - S^{(k+\nu)}_{L,j}(f, x) \right|^2\ dx$$

$$= \int \sum_{\nu=0}^{m} p_\nu \left| f^{(k+\nu)}(x) \right|^2\ dx - \int \sum_{\nu=0}^{m} p_\nu \left| S^{(k+\nu)}_{L,j}(f, x) \right|^2\ dx. \tag{1.3}$$

При этом $S^{(2m+2k)}_{L,j}(f) \in L^2(\mathbb{R})$ и $S^{(r)}_{L,j}(f, x) \to 0$ $(|x| \to \infty,\ r = 0, 1, \ldots, 2m - 2k - 1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство (1.3) докажем в предположении существования сплайна (доказательство существования дано в лемме 3). Тогда $f^{(r)} \in L_2(\mathbb{R})$ $(0 \le r \le m + k)$, и в силу неравенства Колмогорова $S^{(r)}_{L,j}(f) \in L_2(\mathbb{R})$ $(0 \le r \le 2m + 2k - 1)$. В частности, $S_{L,j}(f) \in W_2^{2m+2k-1}(\mathbb{R})$. Так как на каждом интервале (x_s, x_{s+1}) производная $S^{(2m+2k)}_{L,j}(f, x)$ выражается через младшие производные, то и $S^{(2m+2k)}_{L,j} \in L_2(\mathbb{R})$.

Для всех указанных r эти производные, кроме, быть может, $S^{(2m+2k)}_{L,j}(f, x)$ и $f^{(m+k)}(x)$, на бесконечности обращаются в нуль. Для $f^{(r)}$ $(0 \le r < m + k)$ и $S^{(r)}_{L,j}$ $(0 \le r < 2m + 2k - 1)$ это хорошо известный факт, вытекающий из абсолютной непрерывности функций $(f^{(r)})^2,\ (S^{(r)}_{L,j})^2$ и суммируемости на $\mathbb{R}$ их самих и их производных. Для функции $S_{L,j}^{(2m+2k-1)}(f,x)$, определенной на каждом интервале (x_{s-1},x_s) и доопределенной в его концах через односторонние пределы, обозначим через $\widetilde{x}_s$ точку из отрезка $\overline{\Delta x_s}=[x_{s-1},x_s]$, где достигается минимум ее модуля ($s\in\mathbb{Z}$). Тогда при $x\in\overline{\Delta x_s}$

$$\left|S_{L,j}^{(2m+2k-1)}(f,x)-S_{L,j}^{(2m+2k-1)}(f,\widetilde{x}_s)\right|\le\int\limits_{\Delta x_s}\left|S_{L,j}^{(2m+2k)}(f,t)\right|\,dt$$

$$\le 2^{-j/2}\left(\int\limits_{\Delta x_s}\left|S_{L,j}^{(2m+2k)}(f,t)\right|^2\,dt\right)^{1/2}\longrightarrow 0\qquad(|x|\to\infty).$$

С другой стороны,

$$\sum_s\left|S_{L,j}^{(2m+2k-1)}(f,\widetilde{x}_s)\right|^2\le 2^j\int\left|S_{L,j}^{(2m+2k-1)}(f,t)\right|^2\,dt,$$

откуда $S_{L,j}^{(2m+2k-1)}(\widetilde{x}_s)\to 0$ $(|s|\to\infty)$, а значит, и $S_{L,j}^{(2m+2k-1)}(f,x)\to\ 0$ $(|x|\to\infty)$. $(*)$

Отсюда следует, что конечны все интегралы в (1.3) и все интегралы, возникающие далее при интегрировании по частям, а внеинтегральные члены при этом не появятся.

Не уменьшая общности, можно считать f и $S_{L,j}(f)$ вещественными. Обозначим левую часть (1.3) через I, а правую — через I_1. Тогда для вещественных f и $S_{L,j}(f,x)$ $I=I_1-2I_2$, где

$$I_2=\int\sum_{\nu=0}^m p_\nu\left[f^{(k+\nu)}(x)-S_{L,j}^{(k+\nu)}(f,x)\right]S_{L,j}^{(k+\nu)}(f,x)\,dx. \tag{1.4}$$

Проинтегрируем каждое слагаемое в (1.4) $k+\nu-1$ раз по частям. В итоге получим

$$I_2=\int\sum_{\nu=0}^m p_\nu(-1)^{k+\nu-1}\left[f'(x)-S'_{L,j}(f,x)\right]S_{L,j}^{(2k+2\nu-1)}(f,x)\,dx$$

$$=-\int\left[f'(x)-S'_{L,j}(f,x)\right]\sum_{\nu=0}^m(-1)^{k+\nu}p_\nu S_{L,j}^{(2k+2\nu-1)}(f,x)\,dx.$$

Разбивая последний интеграл на интегралы по отрезкам $[x_s,x_{s+1}]$, учитывая условие интерполяции в точках x_s и условие (1) определения L-сплайна, эквивалентное тождеству

$$\sum_{\nu=0}^m(-1)^{\nu+k}p_\nu S_{L,j}^{(2\nu+2k-1)}(f,x)\equiv\mathrm{const}\;,\qquad x\in(x_s,x_{s+1}),$$

выводим, что $I_2=0$, и (1.3) доказано.

Следствие 1. *Для каждой функции $f\in C_0(\mathbb{R})$ интерполяционный сплайн $S_{L,j}(f,x)$ из $W_2^{2m+2k-1}(\mathbb{R})$ единствен. Здесь $C_0(\mathbb{R})$ — пространство непрерывных на $\mathbb{R}$ функций, обращающихся в 0 на бесконечности. В силу теоремы* 1 *условие $f(x)\to 0$ $(|x|\to\infty)$ необходимо для существования $S_{L,j}(f,x)\in W_2^{2m+2k-1}(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Пусть для некоторой функции $f\in C^0(\mathbb{R})$ существуют два различных интерполяционных L-сплайна из $W_2^{2m+2k-1}$. Тогда их разность $S_j(x)$ является интерполяционным L-сплайном для $\eta(x)\equiv 0$ и пара $\eta(x)$ и $S_j(x)=S_{L,j}(\eta,x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Поэтому

$$\int\sum_{\nu=0}^m p_\nu\left|S_j^{(k+\nu)}\right|^2\,dx=0.$$

Отсюда следует, что $S_j(x)$ есть многочлен, и тогда из условий $S_j(x_s) = 0$ $(s \in \mathbb{Z})$ следует тождество $S_j(x) \equiv 0$, противоречащее предположению.

Пусть $P_{2m+2k}(x)$ — характеристический полином дифференциального оператора (1.1), $P_{2m+2k}(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{m} (-1)^{\nu+k} p_\nu x^{2\nu+2k}$ и

$$P_{m,k}(u) = P_{2m+2k}(iu) = u^{2k} \sum_{\nu=0}^{m} p_\nu u^{2\nu} = u^{2k} P_{2m}(u) \qquad (p_\nu \geq 0,\ p_0 > 0,\ p_m > 0). \tag{1.5}$$

Отсюда видно, что полином $P_{m,k}(u) = P_{2m+2k}(iu)$ имеет единственный вещественный нуль $u = 0$ и порядок этого нуля равен $2k$.

Наряду с сеткой (1.2), введем сетку

$$\Delta(a) := \{\xi_s = \xi_s(a) = s/a : \ s \in \mathbb{Z},\ a > 0\} \tag{1.6}$$

и определим связанный с ней фундаментальный L-сплайн $L_{2m+2k}(x,a)$, т.е. L-сплайн с узлами (1.6), удовлетворяющий условиям

$$L_{2m+2k}(x,a) \in W_2^{2m+2k-1}(\mathbb{R}), \qquad L_{2m+2k}(\xi_s, a) = \delta_{s,0} \qquad (s \in \mathbb{Z}). \tag{1.7}$$

В [8], в случае L-сплайнов, порожденных линейным дифференциальным оператором с постоянными коэффициентами, характеристический многочлен которых имеет лишь вещественные нули, фундаментальные L-сплайны выписаны в терминах преобразования Фурье. Аналогичные формулы справедливы, если характеристический полином не имеет чисто мнимых нулей. Для сетки (1.6) формулы имеют вид

$$L_{2m+2k}(x,a) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{ix\omega a} d\omega}{P_{2m+2k}(ia\omega) \sum\limits_{l \in \mathbb{Z}} 1/P_{2m+2k}(ia(\omega + 2\pi l))}, \tag{1.8}$$

и

$$L_{2m+2k}(x,a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sum\limits_{l \in \mathbb{Z}} \frac{e^{iax(\omega+2l\pi)}}{P_{2m+2k}(i\omega a + 2\pi lia)}}{\sum\limits_{l \in \mathbb{Z}} 1/P_{2m+2k}(i\omega a + 2\pi lia)}\, d\omega. \tag{1.9}$$

Докажем это. Заметим, что знаменатель в (1.8) не обращается в нуль. Так как ряд в этом знаменателе представляет собой 2π-периодическую положительную функцию с полюсами в точках $-2\pi l$ $(l \in \mathbb{Z})$, то в целом знаменатель в (1.8) растет на бесконечности не медленнее, чем $|w|^{2m+2k}$, поэтому формулы (1.8) и (1.9) эквивалентны. Например, представление (1.9), как и в [8], получается из (1.8), если интеграл по $\mathbb{R}$ разбить на сумму интегралов по отрезкам $[-\pi + 2\pi\nu, \pi + 2\pi\nu]$. Из (1.8) видно, что все производные по x до порядка $2m + 2k - 2$ включительно от интеграла в правой части представляют собой интегралы Фурье от суммируемых функций и потому непрерывны. Непосредственно проверяется, что определяемая формулой (1.9) функция $L_{2m+2k}(x,a)$ удовлетворяет условиям (1.7). Осталось показать, что при $x \in (\xi_s, \xi_{s+1})$ $(s \in \mathbb{Z})$ для этой функции справедливо тождество

$$L_{2m+2k}(\mathcal{D}) L_{2m+2k}(x,a) \equiv 0. \tag{1.10}$$

Пусть $x = s/a + t,\ 0 < t < \frac{1}{a}$ и $P_{2m+2k-1}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}^{2k-1} \sum\limits_{\nu=0}^{m} p_\nu \mathcal{D}^{2\nu}$. Полагая

$$\theta(\omega) = \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{1}{P_{2m+2k}(i\omega a + 2\pi lai)} \right)^{-1}$$

и формально дифференцируя под знаком интеграла в (1.9), получаем

$$P_{2m+2k-1}(\mathcal{D})L_{2m+2k}(x,a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\frac{e^{iat(\omega+2l\pi)}}{a(\omega+2l\pi)i}\ \theta(\omega)e^{is\omega}\ d\omega.$$

Здесь ряд $\sum\limits_{l\neq 0} e^{iat2\pi l}/(\omega+2\pi l)$ отличается от классического ряда $\sum\limits_{l\neq 0} e^{iat2\pi l}/2\pi l$, сходящегося при всех $t\in(0,1/a)$ и не зависящего от ω, на ряд $\sum\limits_{l\neq 0}\omega e^{iat2\pi l}/(2\pi l(\omega+2\pi l))$, равномерно сходящийся при $|\omega|\leq\pi$, и потому при каждом $t\in(0,1/a)$ сам сходится равномерно по ω на промежутке $[-\pi,\pi]$. Кроме того, в последнем интеграле члены каждого из двух рядов — явно выписанного и входящего в $\theta(\omega)$ — можно умножить на $\sin\frac{\omega}{2} = (-1)^l\sin\left(\frac{\omega+2\pi l}{2}\right)$, не изменяя подынтегрального выражения, которое, как теперь видно, есть функция непрерывная. Значит, дифференцирование под знаком интеграла было законным.

Покажем, что последний интеграл при любом $s\in\mathbb{Z}$ и $x = s/a+t,\ 0<t<\frac{1}{a}$ является константой, откуда будет вытекать (1.10). Положим

$$\psi_\omega(t,\rho) = \sum_{l\in\mathbb{Z}}\rho^{|l|}\frac{e^{iat(\omega+2l\pi)}}{a(\omega+2l\pi)i} \qquad (0<\rho<1). \tag{1.11}$$

Из (1.11) следует, что

$$\psi_\omega(0,\rho) = \frac{1}{ai}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\rho^{|l|}\frac{1}{\omega+2\pi l} = \frac{1}{ai}\left\{\frac{1}{\omega}-\sum_{l=1}^{\infty}\rho^l\frac{2\omega}{4\pi^2l^2-\omega^2}\right\}$$

и что (см. [9], стр. 256)

$$\lim_{\rho\to 1-0}\psi_\omega(0,\rho) = \frac{1}{ai}\left(\frac{1}{\omega}-\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2\omega}{4\pi^2l^2-\omega^2}\right) = \frac{1}{2ia}\operatorname{ctg}\frac{\omega}{2}. \tag{1.12}$$

Далее

$$\frac{d}{dt}\psi_\omega(t,\rho) = e^{ia\omega t}\left\{1+\frac{\rho e^{i2\pi at}}{1-\rho e^{i2\pi at}}+\frac{\rho e^{-i2\pi at}}{1-\rho e^{-i2\pi at}}\right\} = \frac{(1-\rho^2)e^{ia\omega t}}{1-2\rho\cos 2\pi at+\rho^2}. \tag{1.13}$$

Из (1.11)–(1.13) имеем

$$\psi_\omega(t,\rho) = \frac{1}{ai}\left\{\frac{1}{\omega}-\sum_{l=1}^{\infty}\rho^l\frac{2\omega}{4\pi^2l^2-\omega^2}\right\}+\int_0^t\frac{(1-\rho^2)e^{ia\omega\tau}\ d\tau}{1-2\rho\cos 2\pi a\tau+\rho^2} = \psi_\omega(0,\rho)+\varphi(t,\omega,\rho).$$

Отсюда, учитывая (1.11)–(1.13), получим при $t\neq 0, 1/a$

$$P_{2m+2k-1}(\mathcal{D})L_{2m+2k}\left(\frac{s}{a}+t,a\right) = \lim_{\rho\to 1-0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\theta(\omega)\psi_\omega(t,\rho)e^{is\omega}\ d\omega$$

$$= \lim_{\rho\to 1-0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\theta(\omega)\psi_\omega(0,\rho)e^{is\omega}\ d\omega+\lim_{\rho\to 1-0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\theta(\omega)\varphi(t,\omega,\rho)e^{is\omega}\ d\omega. \tag{1.14}$$

Легко видеть, что $\theta(\omega)$ — непрерывная четная 2π-периодическая функция, имеющая при $\omega=0$ нуль порядка $2k\geq 2$. Отсюда, из формулы для $\psi_\omega(0,\rho)$ и из (1.12) видно, что произведение

$\theta(\omega)\psi_\omega(0,\rho)$ можно считать непрерывной на $[-\pi,\pi]$ функцией, которая при $\rho\to 1-0$ равномерно стремится на $[-\pi,\pi]$ к непрерывной функции $\left(\theta(\omega)\operatorname{ctg}\frac{\omega}{2}\right)/(2ai)$, доопределенной нулем в точке $\omega=0$. Поэтому предел первого слагаемого в (1.14), ввиду возможности предельного перехода под знаком интеграла, существует и не зависит от t.

Покажем, что второе слагаемое в правой части (1.14) тоже не зависит от t при $t\in(0,1/a)$. Пусть $0<t_1<t_2<\frac{1}{a}$, тогда существует $\delta\in[2\pi a t_1, 2\pi a t_2]$ такое, что

$$|\varphi(t_2,\omega,\rho)-\varphi(t_1,\omega,\rho)|=\left|\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{(1-\rho^2)e^{ia\tau\omega}\,d\tau}{1-2\rho\cos 2\pi a\tau+\rho^2}\right|\le\frac{(1-\rho^2)(t_2-t_1)}{1-2\rho\cos\delta+\rho^2}.$$

Следовательно, для любых таких t_1,t_2 знаменатель здесь равномерно отделен от нуля при $\rho\to 1-0$. Отсюда ясно, что при $0<t<\frac{1}{a}$ второе слагаемое в (1.14) также не зависит от t. Тем самым доказано, что тождество (1.10) справедливо при $\frac{s}{a}<x=\frac{s}{a}+t<\frac{s+1}{a}$ и любом $s\in\mathbb{Z}$.

Таким образом, формулы (1.8) и (1.9) действительно задают фундаментальный L-сплайн $L_{2m+2k}(x,a)$, однозначно определяемый условиями (1.7).

Заметим, что $L_{2m+2k}\left(x-\frac{m}{a},a\right)$ удовлетворяет условию $L_{2m+2k}\left(\xi_s-\frac{m}{a},a\right)=\delta_{s,m}$, где $s,m\in\mathbb{Z}$.

Как уже отмечалось, формула (1.8) есть преобразование Фурье непрерывной (после устранения особенности в нуле) суммируемой на $\mathbb{R}$ функции, являющейся произведением непрерывной 2π-периодической функции на функцию, убывающую на бесконечности как $|\omega|^{-(2k+2m)}$. Отсюда и из теоремы Планшереля сразу получается, что $L^{(r)}_{2m+2k}(x,a)\in L^2(\mathbb{R})$ $(0\le r\le 2m+2k-1)$, а так как на каждом интервале (ξ_s,ξ_{s+1})

$$L^{(2k+2m)}_{2m+2k}(x,a)=\frac{1}{p_m}\sum_{\nu=0}^{m-1}(-1)^{\nu+m}p_\nu L^{(2\nu+2k)}_{2m+2k}(x,a), \tag{1.15}$$

то и $L^{(2m+2k)}_{2m+2k}(x,a)\in L_2(\mathbb{R})$. Кроме того, как и выше (см. $(*)$), имеем $L^{(r)}_{2m+2k}(x,a)\to 0$ при $|x|\to\infty$ $(r=0,1,\ldots,2m+2k-1)$, что позволит при доказательстве леммы 1 выполнить интегрирование по частям. (В лемме 2 сформулировано более сильное утверждение о поведении производных $L^{(r)}_{2m+2k}(x,a)$ на бесконечности.)

Далее положим $a=2^j$ и

$$g_{j,p}(x)=L_{2m+2k}(x-p2^{-j},2^j),\qquad p,j\in\mathbb{Z}. \tag{1.16}$$

Лемма 1. *Система функций*

$$\left\{\frac{d^k}{dx^k}g_{j+1,2p+1}(x):\ p\in\mathbb{Z}\right\}$$

ортогональна системе

$$\left\{\frac{d^k}{dx^k}g_{j,p}(x):\ p\in\mathbb{Z}\right\}$$

относительно скалярного произведения (0.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Интегрируя $\nu+k-1$ раз по частям ν-е слагаемое в сумме, фигурирующей в скалярном произведении, и разбивая полученный интеграл на сумму интегралов по отрезкам $[x_{j,s},x_{j,s+1}]$, находим

$$\left\langle\frac{d^k}{dx^k}g_{j+1,2p+1}(x),\ \frac{d^k}{dx^k}g_{j,r}(x)\right\rangle$$

$$= (-1)^{k-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}}\int\limits_{x_{j,s}}^{x_{j,s+1}}\frac{d}{dx}g_{j+1,2p+1}(x)\left[\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^{\nu}p_{\nu}\frac{d^{2k-1+2\nu}}{dx^{2k-1+2\nu}}g_{j,r}(x)\right]\,dx = 0,$$

так как по определению L-сплайнов выражение в квадратных скобках равно константе на $(x_{j,s}, x_{j,s+1})$ и функции $g_{j+1,2p+1}(x) = 0$ при $x = x_{j,s} = x_{j+1,2s},\ p\in\mathbb{Z},\ s\in\mathbb{Z}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Существует число $\sigma_0 > 0$ такое, что*

$$L^{(r)}_{2m+2k}(x,a) = O(e^{-a\sigma_0|x|}) \tag{1.17}$$

при $|x|\to\infty,\ 0\le r\le 2m+2k$. Существует $a_0>0$ такое, что при $a>a_0$ константа в O не превосходит $C_r(a) = a^rC_{r,k}(P_{2m})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, в силу (1.8) и (1.5) имеет место равенство

$$L^{(r)}_{2m+2k}(x,a) = \frac{1}{2\pi}\int\left(\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\omega a}\right)^{2k}\frac{(i\omega a)^re^{ix\omega a}\,d\omega}{P_{2m}(\omega a)\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{a(\omega+2\pi l)}\right)^{2k}\frac{1}{P_{2m}(a(\omega+2\pi l))}}, \tag{1.18}$$

где ввиду (1.5) $P_{2m}(\omega a)>0$ при $\omega\in\mathbb{R}$, и, следовательно, существуют $\delta_0,\delta_1>0$ такие, что $|P_{2m}[(\omega+i\sigma)a]|>\delta_0$ при $0\le\sigma\le\delta_1,\ \omega\in\mathbb{R}$. Далее, функция

$$\theta_1(\omega) = \theta_1(\omega,a) = \sum_{l\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{a(\omega+2\pi l)}\right)^{2k}\frac{1}{P_{2m}[a(\omega+2\pi l)]} \tag{1.19}$$

положительна при $\omega\in\mathbb{R}$ и является 2π-периодической непрерывной по ω в комплексной окрестности вещественной оси. Поэтому существует такое $\delta_2>0$, что $|\theta_1(\omega+i\sigma)|>0$ при $0\le\sigma\le\delta_2,\ \omega\in\mathbb{R}$. Кроме того, функция $\theta_1(z)$ $(z=\omega+i\sigma)$ является аналитической в указанной полосе. Отметим также, что $L^{(r)}_{2m+2k}(x,a)$ является четной или нечетной функцией по x в зависимости от четности или нечетности r. Поэтому лемму 2 достаточно доказать при $x>0$.

Положим $\sigma_0=\min(\delta_1,\delta_2)>0$ и рассмотрим прямоугольник $Q(T,\sigma_0)$ с вершинами в точках $-T,\ T,\ T+i\sigma_0,\ -T+i\sigma_0$ комплексной плоскости. Подынтегральная функция в представлении (1.18) функции $L^{(r)}_{2m+2k}(x,a)$ является аналитической по ω в $Q(T,\sigma_0)$ для любого $r>0$. Применяя к этому прямоугольнику интегральную теорему Коши и учитывая, что на вертикальных сторонах прямоугольника $Q(T,\sigma_0)$ подынтегральная функция при $2k+2m-r\ge1$ равномерно стремится к нулю при $T\to\infty$, мы получаем в пределе

$$L^{(r)}_{2m+2k}(x,a) = \frac{e^{-xa\sigma_0}}{2\pi}\int\left(\frac{\sin\frac{\omega+i\sigma_0}{2}}{(\omega+i\sigma_0)a}\right)^{2k}\frac{(i(\omega+i\sigma_0)a)^re^{ix\omega a}\,d\omega}{P_{2m}[a(\omega+i\sigma_0)]\theta_1(\omega+i\sigma_0,a)}. \tag{1.20}$$

Отсюда вытекает оценка (1.17) при $r<2m+2k-1$. При $r=2m+2k-1$ подынтегральная функция здесь не принадлежит $L(\mathbb{R})$, а только суммируется с квадратом. Поэтому этот интеграл нужно понимать как обычно в преобразованиях Фурье, в смысле сходимости в $L^2(\mathbb{R})$. Обозначим его значение через $g(x,\sigma_0)$. Тогда $\left|L^{(2m+2k-1)}_{2m+2k}(x,a)\right| = e^{-|x|a\sigma_0}|g(x,\sigma_0)|$, где $g(x,\sigma_0)\in L^2(\mathbb{R})$. Покажем, что и в этом случае $g(x,\sigma_0)$ — ограниченная функция.

Сократив дробь в последнем интеграле на множитель $(\sin(\omega+i\sigma_0)/2)^{2k-1}$ и положив

$$\widetilde{\theta}(\omega) = \left\{\sum_{l\in\mathbb{Z}}\frac{\sin((\omega+i\sigma_0)/2)}{(a(\omega+i\sigma_0+2\pi l))^{2k}P_{2m}(a(\omega+i\sigma_0+2\pi l))}\right\}^{-1},$$

получим при $r = 2m + 2k - 1$ и $x > 0$

$$|g(x,\sigma_0)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int \frac{\sin((\omega+i\sigma_0)/2)}{a(\omega+i\sigma_0)}\cdot\frac{(a(\omega+i\sigma_0))^{2m}}{P_{2m}(a(\omega+i\sigma_0))}\,\widetilde{\theta}(\omega)e^{ixa\omega}\,d\omega\right|,$$

где $\widetilde{\theta}(\omega)$ — 4π-периодическая непрерывная функция. Дополняя числитель второй дроби под этим интегралом до $P_{2m}(a(\omega+i\sigma_0))$, получим

$$|g(x,\sigma_0)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int \frac{\sin((\omega+i\sigma_0)/2)}{a(\omega+i\sigma_0)}\frac{1}{p_m}\,\widetilde{\theta}(\omega)e^{ixa\omega}\,d\omega\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\pi}\int \frac{\sin((\omega+i\sigma_0)/2)}{a(\omega+i\sigma_0)p_m}\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{m-1}p_\nu(a(\omega+i\sigma_0))^{2\nu}}{\sum\limits_{\nu=0}^{m}p_\nu(a(\omega+i\sigma_0))^{2\nu}}\,\widetilde{\theta}(\omega)e^{ixa\omega}\,d\omega\right| = |\Im_1 - \Im_2|.$$

Видно, что $\Im_2$ есть интеграл Фурье от суммируемой функции, и, значит, $\Im_2(x) \in C_0(\mathbb{R})$, $\Im_2(x) \to 0$ $(|x| \to \infty)$. Далее, учитывая, что преобразование Фурье характеристической функции $\chi_{[-1,1]}(x)$ отрезка $[-1,1]$ есть $(2\sin\omega)/\omega$, легко проверить, что

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{\sin((\omega+i\sigma_0)/2)}{a(\omega+i\sigma_0)}\frac{1}{p_m}e^{ixa\omega}\,d\omega = \frac{1}{2ap_m}\chi_{[-\frac{1}{2a},\frac{1}{2a}]}(x)e^{xa\sigma_0}.$$

Пусть $\sum \widetilde{\theta}_\nu e^{i\nu\omega/2}$ — тригонометрический ряд Фурье функции $\widetilde{\theta}(\omega)$. Так как

$$\int \left|\sum_{\nu=M}^{N}\widetilde{\theta}_\nu e^{i\nu\omega/2}\frac{\sin(\omega+i\sigma_0)/2}{\omega+i\sigma_0}\right|^2 d\omega = \int_0^{4\pi}\sum_l\left|\frac{\sin(\omega+4l\pi+i\sigma_0)/2}{\omega+4l\pi+i\sigma_0}\right|^2\left|\sum_{\nu=M}^{N}\widetilde{\theta}_\nu e^{i\nu\omega/2}\right|^2 d\omega$$

$$\le C(\sigma_0)\sum_{\nu=M}^{N}|\widetilde{\theta}_\nu|^2 \to 0 \qquad (M,N\to+\infty,\ M,N\to-\infty),$$

то ряд

$$\sum_\nu \widetilde{\theta}_\nu e^{i\nu\omega/2}\frac{\sin(\omega+i\sigma_0)/2}{\omega+i\sigma_0}$$

сходится в $L^2(\mathbb{R})$. Отсюда, в силу линейности оператора преобразования Фурье в $L_2(\mathbb{R})$, получим

$$\Im_1 = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}}(2ap_m)^{-1}\widetilde{\theta}_\nu\chi_{[-\frac{1}{2a},\frac{1}{2a}]}\left(x+\frac{\nu}{2a}\right)e^{\left(xa+\frac{\nu}{2}\right)\sigma_0}.$$

Так как по предположению здесь $x > 0$, то из определения характеристической функции следует, что при $\nu \ge 1$ члены этого ряда равны нулю. Для $x \in \left(\frac{l}{2a},\frac{l+1}{2a}\right)$ $(l \ge 0)$ очевидно

$$\Im_1(x) = (2ap_m)^{-1}\left[\widetilde{\theta}_{-l}e^{\left(xa-\frac{l}{2}\right)\sigma_0} + \widetilde{\theta}_{-(l+1)}e^{\left(xa-\frac{l+1}{2}\right)\sigma_0}\right] = O\left(|\theta_{-l}| + |\theta_{-(l+1)}|\right) \qquad (l\to\infty),$$

где константа в O не зависит от x. Следовательно, $\Im_1(x) \to 0$ $(x \to +\infty)$. В итоге получаем, что $g(x,\sigma_0) \to 0$ $(x \to +\infty)$. Тем самым оценка (1.17) доказана и при $r = 2m+2k-1$. Из формулы (1.15) вытекает ее справедливость также для $r = 2m+2k$.

Подынтегральное выражение в (1.20), умноженное на $a^{-r}e^{-iax\omega}$, при $a \to \infty$ стремится, для $r < 2m+2k-1$, к суммируемой, а если $r = 2m+2k-1$, — к суммируемой с квадратом функции. Поэтому константа в O в оценке (1.17) ведет себя как a^r. Отсюда вытекает последнее утверждение леммы.

Следующая лемма завершает доказательство теоремы 1.

Лемма 3. *Пусть* $f \in W_2^1(\mathbb{R})$. *Тогда при любых* $m, k \in \mathbb{N}$ *интерполяционный сплайн* $S_{L,j}(f,x)$, *удовлетворяющий условиям теоремы* 1, *существует.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если в точках $x_s = x_{js}$ сетки (1.2) $f(x_s) = \delta_{s,0}$ $(s \in \mathbb{Z})$, то сплайн $S_{L,j}(f,x)$ существует и совпадает с фундаментальным L-сплайном $L_{2m+2k}(x, 2^j)$ $(a = 2^j)$, явно заданным формулой (1.8) и в силу леммы 2 удовлетворяющим условиям теоремы 1. Считая далее f финитной функцией из $W_2^1(\mathbb{R})$, видим, что L-сплайн

$$S(f,x) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{s}{a}\right) L_{2m+2k}\left(x - \frac{s}{a}, a\right), \qquad a = 2^j,$$

удовлетворяет интерполяционным условиям $S\left(f, \frac{s}{2^j}\right) = f\left(\frac{s}{2^j}\right)$ $(s \in \mathbb{Z})$, а ряд вырождается в конечную сумму. Тогда в силу леммы 2 $S^{(r)}(f,x) \in L_2(\mathbb{R})$ при всех $r = 0, 1, \ldots, 2m+2k-1$, а в силу равенства Парсеваля из (1.18), (1.19) получаем

$$\int |S^{(r)}(f,x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi a} \int \left| \left(\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{a\omega}\right)^{2k} \frac{(ia\omega)^r \sum\limits_{s\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{s}{a}\right) e^{-is\omega}}{P_{2m}(a\omega)\theta_1(\omega)} \right|^2 d\omega.$$

Разбивая последний интеграл на сумму интегралов по промежуткам длины 2π и приводя каждый из них к интегралу по $(0, 2\pi)$, получаем

$$\int |S^{(r)}(f,x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi a} \int\limits_0^{2\pi} R_{j,r}(\omega) \left|\sum f\left(\frac{s}{a}\right) e^{is\omega}\right|^2 d\omega,$$

где

$$R_{j,r}(\omega) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\sin(\omega+2\pi l)/2}{a(\omega+2\pi l)}\right)^{4k} \frac{(a(\omega+2\pi l))^{2r}}{P_{2m}^2(a(\omega+2\pi l))\theta_1^2(\omega)}$$

— 2π-периодическая непрерывная при всех $r = 0, 1, \ldots, 2m+2k-1$ функция. Оценив ее сверху константой $C_r = C(r, j, P_{2m})$, получаем

$$\left\|S^{(r)}(f)\right\|_2^2 \le \frac{C_r}{a} \sum_{s\in\mathbb{Z}} \left|f\left(\frac{s}{a}\right)\right|^2 \qquad (a = 2^j).$$

Правая часть здесь легко оценивается через $\|f\|_{W_2^1(\mathbb{R})}$: используя сетку (1.2) с $2^j = a$, имеем

$$\frac{1}{a}\sum \left|f\left(\frac{s}{a}\right)\right|^2 = \sum_{s\in\mathbb{Z}} \left(\int\limits_{x_s}^{x_{s+1}} |f(x)|^2\, dx + \int\limits_{x_s}^{x_{s+1}} \left(\left|f\left(\frac{s}{a}\right)\right|^2 - |f(x)|^2 \right) dx \right)$$

$$= \int |f(x)|^2\, dx - \sum_s \int\limits_{x_s}^{x_{s+1}} \int\limits_{x_s}^{x} (f(t)\overline{f}(t))'\, dt\, dx$$

$$\le \int |f(x)|^2\, dx + \sum_s \frac{1}{a} \int\limits_{x_s}^{x_{s+1}} |(f(t)\overline{f}(t)'|\, dt = \int |f(x)|^2\, dx + \frac{1}{a}\int |(f(x)\overline{f}(x))'|\, dx$$

$$\le \int |f(x)|^2\, dx + \frac{2}{a}\left(\int |f(x)|^2\, dx \int |f'(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(\int |f|^2\, dx + \int |f'|^2\, dx\right).$$

Таким образом,

$$\|S^{(r)}(f)\|_{L_2(l)} \le C_r \|f\|_{W_2^1(\mathbb{R})},$$

где $C_r = C_r(j, P_{2m})$ конечно. Следовательно, оператор $S^{(r)}_{L,j}(f)$ продолжается по непрерывности на все пространство $W^1_2(\mathbb{R})$ с сохранением последней оценки и представляется формулой

$$S^{(r)}_{L,j}(f,x) = \sum_s f\left(\frac{s}{2^j}\right) L^{(r)}_{2m+2k}\left(x - \frac{s}{2^j}; 2^j\right).$$

Для оценки погрешности аппроксимации частичными суммами разложений по системам всплесков, ортонормированных относительно скалярного произведения (0.1), нам потребуется следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $f \in W^{2m+2k}_2(\mathbb{R})$ *и* $S_{L,j}(f,x)$ *— интерполяционный сплайн, удовлетворяющий условиям теоремы* 1. *Тогда*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{\nu=0}^m p_\nu \left| f^{(k+\nu)}(x) - S^{(k+\nu)}_{L,j}(f,x)\right|^2 \, dx = \int\limits_{\mathbb{R}} [f(x) - S_{L,j}(f,x)]\, L_{2m+2k}(\mathcal{D})\overline{f(x)}\, dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о основано на интегрировании по частям $k+\nu$ раз ν-го слагаемого в левой части $\Im$ этого тождества с учетом условий на бесконечности. При последнем интегрировании по частям интеграл предварительно разбивается на сумму интегралов по отрезкам $[x_{j,s}, x_{j,s+1}]$ $(s \in \mathbb{Z})$, и учитываются условия интерполяции, а также первое свойство в определении L-сплайнов. Поскольку в отличие от теоремы 1 здесь $f \in W^{2m+2k}_2(\mathbb{R})$, то не только производные $S^{(r)}_{L,j}(x,f)$, но и все производные $f^{(r)}$ при $0 \le r \le 2m+2k-1$ стремятся к нулю при $|x| \to \infty$. Реализуя без дополнительных пояснений этот план, получаем

$$\Im = \int \sum_{\nu=0}^m p_\nu (-1)^{k+\nu-1} (f'(x) - S'_{L,j}(f,x))\overline{(f^{2k+2\nu-1}(x) - S^{2k+2\nu-1}_{L,j}(f,x))}\, dx$$

$$= \sum_s \left\{ \int\limits_{x_{j,s}}^{x_{j,s+1}} (f'(x) - S'_{L,j}(f,x)) \sum_{\nu=0}^m p_\nu (-1)^{k+\nu-1}\overline{f^{(2k+2\nu-1)}(x)}\, dx \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{\nu=0}^m p_\nu (-1)^{k+\nu}\overline{S^{(2k+2\nu-1)}_{L,j}(f,x)}\right) \int\limits_{x_{j,s}}^{x_{j,s+1}} (f'(x) - S'_{L,j}(f,x))\, dx \right\}$$

$$= \sum_s \int\limits_{x_{j,s}}^{x_{j,s+1}} (f(x) - S_{L,j}(f,x)) \sum_{\nu=0}^m p_\nu (-1)^{k+\nu}\overline{f^{(2k+2\nu)}}\, dx$$

$$= \int (f(x) - S_{L,j}(f,x)) L_{2m+2k}(\mathcal{D})\bar{f}(x)\, dx.$$

З а м е ч а н и е 1. Как видно из доказательства, справедливо несколько более общее утверждение: для $f, g \in W^{2m+2k}_2(\mathbb{R})$

$$\left\langle f^{(k)} - S^{(k)}_{L,j}(f), g^{(k)} - S^{(k)}_{L,j}(g)\right\rangle = (f - S_{L,j}(f), L_{2m+2k}(\mathcal{D})g) = (L_{2m+2k}(\mathcal{D})f, g - S_{L,j}(g)),$$

где (u, v) — символ скалярного произведения функций u и v в $L_2(\mathbb{R})$.

2. Построение масштабирующих функций

В этом разделе мы построим систему вложенных подпространств $V_j \subset V_{j+1}$ $(j \in \mathbb{Z})$ кратномасштабного анализа пространства $W_2^m(\mathbb{R})$ и для каждого $j \in \mathbb{Z}$ построим масштабирующую функцию $\varphi_j(x)$, сдвиги которой $\varphi_j(x-\nu h)$ $(\nu \in \mathbb{Z}, h = 2^{-j})$ образуют ортонормированный относительно скалярного произведения (0.1) базис пространства V_j.

Положим $\alpha(x,a) = L_{2m+2k}^{(k)}(x,a)$,

$$\theta(u,a) = \frac{1}{aP_{2m+2k}(iu)\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} 1/P_{2m+2k}(iu+i2\pi la)}, \tag{2.1}$$

$$V(a) = \overline{\mathrm{Lin}}\left\{\alpha\left(x-\frac{s}{a},a\right):\ s\in\mathbb{Z}\right\},$$

где замыкание линейной оболочки берется в метрике пространства $W_2^m(\mathbb{R})$. Отметим, что если доопределить функцию $\theta(u,a)$, положив $\theta(0,a) = \frac{1}{a}$, $\theta(2\pi la,a) = 0$ $(l \in \mathbb{Z}\backslash\{0\})$, то она станет непрерывной функцией, убывающей на бесконечности не медленнее, чем $|u|^{-2m-k}$. Тогда из (1.8) имеем

$$\alpha\left(x-\frac{s}{a},a\right) = \frac{1}{2\pi}\int (iu)^k\theta(u,a)e^{-isu/a}e^{ixu}\,du. \tag{2.2}$$

При $a = 2^j$ $(j \in \mathbb{Z})$ положим

$$V_j = V(2^j)$$

и рассмотрим такую функцию $\varphi_j(x) \in V_j$, что ее преобразование Фурье имеет вид

$$\widehat{\varphi}_j(u) = 2^{-j/2}\frac{u^k(\sin u/2^{j+1})^k e^{i\lambda_k u/2^{j+1}}}{P_{2m+2k}(iu)\left(\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}}\left(\sin\frac{u}{2^{j+1}}\right)^{2k}/P_{2m+2k}(iu+i2\pi l2^j)\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{2.3}$$

где $\lambda_k = 0$ при k четном, $\lambda_k = 1$ при k нечетном, а степень $1/2$ понимается как корень арифметический. Функция $\widehat{\varphi}_j(u)$ при k четном совпадает с $u^k(\theta(u,a)/P_{2m+2k}(iu))^{1/2} =: \widetilde{\varphi}_j(u)$, только теперь от добавления в числитель и знаменатель множителя $\left(\sin\frac{u}{2^{j+1}}\right)^k$ ряд в знаменателе сходится равномерно на $\mathbb{R}$ и представляет собой непрерывную положительную $(2\pi 2^j)$-периодическую функцию. При k нечетном $\widehat{\varphi_j}(u)$ отличается от $\widetilde{\varphi}_j(u)$ на $(2\pi 2^j)$-периодический множитель sign $(\sin u/2^{j+1})e^{iu/2^{j+1}}$, по модулю равный 1. Заметим, что без множителя $e^{iu/2^{j+1}}$ в формуле для $\widehat{\varphi}_j(u)$ отношение $\widehat{\varphi_j}(u)/\widehat{\alpha}(u,2^j)$ не было бы $(2\pi 2^j)$-периодической функцией, что исключало бы включение $\varphi_j(x) \in V_j$.

Теорема 3. *Система функций*

$$\varphi_{j,k}(x) = \varphi_j(x-k2^{-j}) = \frac{1}{2\pi}\int \widehat{\varphi}_j(u)e^{i(x-k2^{-j})u}\,du \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

является ортонормированным относительно скалярного произведения (0.1) *базисом пространства* V_j $(j \in \mathbb{Z})$, *инвариантным относительно сдвига на* $h = 2^{-j}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства построим ортонормированный базис пространства $V(a)$, инвариантный относительно сдвигов на $h = 1/a$. Функцию $\varphi(x,a) \in W_2^m(\mathbb{R})$, порождающую такой базис $\left\{\varphi\left(x-\frac{s}{a},a\right):\ s\in\mathbb{Z}\right\}$, будем искать в виде сходящегося в $W_2^m(\mathbb{R})$ ряда

$$\varphi(x,a) = \sum C_{r,a}\alpha\left(x+\frac{r}{a},a\right). \tag{2.4}$$

Из (2.2) для $\nu = 0, 1, \ldots, m$ имеем

$$\varphi^{(\nu)}(x,a) = \frac{1}{2\pi}\int \sum_{r\in\mathbb{Z}} C_{r,a} e^{i\frac{ur}{a}} (iu)^{\nu+k}\theta(u,a)e^{ixu}\, du. \tag{2.5}$$

Пусть $s, n \in \mathbb{Z},\ \mu = n - s$ и $\varphi_s(x,a) = \varphi\left(x - \frac{s}{a}, a\right)$. Тогда $\langle\varphi_s, \varphi_n\rangle = \langle\varphi, \varphi_\mu\rangle$, и условия на коэффициенты $C_{r,a}$ в (2.4) запишутся в виде

$$\langle\varphi, \varphi_\mu\rangle = \sum_{\nu=0}^{m} p_\nu(\varphi^{(\nu)}, \varphi_\mu^{(\nu)}) = \delta_{0,\mu} \qquad (\mu \in \mathbb{Z}),$$

где $\left(\varphi^{(\nu)}, \varphi_\mu^{(\nu)}\right)$ — обычное скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R})$ производных $\varphi^{(\nu)}$ и $\varphi_\mu^{(\nu)}$ функций $\varphi(x) = \varphi(x,a)$ и $\varphi_\mu(x) = \varphi_\mu(x,a)$. С помощью равенства Парсеваля из (1.20) с учетом (2.1) и (1.5) получаем

$$\begin{aligned}\langle\varphi, \varphi_\mu\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int \sum_{\nu=0}^{m} p_\nu u^{2\nu+2k} \left|\sum_{r\in\mathbb{Z}} C_{r,a} e^{iur/a}\right|^2 \theta^2(u,a) e^{i\mu u/a}\, du \\ &= \frac{1}{2\pi a^2}\int \left|\sum_{r\in\mathbb{Z}} C_{r,a} e^{iur/a}\right|^2 \frac{(1/P_{2m+2k}(iu))e^{i\mu u/a}\, du}{\left(\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} 1/P_{2m+2k}(iu + i2\pi la)\right)^2}.\end{aligned}$$

Разобьем последний интеграл на интегралы по промежуткам длины $2\pi a$. После замены переменных интегрирования и перестановки суммы и интеграла получим

$$\langle\varphi, \varphi_\mu\rangle = \frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^{2\pi a} \left|\sum_{r\in\mathbb{Z}} C_{r,a} e^{iur/a}\right|^2 \frac{e^{i\mu u/a}\, du}{a\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} 1/P_{2m+2k}(iu + i2\pi la)} = \delta_{0,\mu}.$$

Учитывая, что $\left\{\frac{e^{iur/a}}{\sqrt{2\pi a}}\right\}_{r\in\mathbb{Z}}$ — ортонормированная полная система в $L_2[0, 2\pi a]$, получаем дополнительное условие на $\{C_{r,a}\}$: подынтегральная функция без множителя $e^{i\mu u/a}$ почти всюду на периоде равна 1, т.е.

$$\sum_{r\in\mathbb{Z}} C_{r,a} e^{iru/a} = e^{i\lambda(u)} \sqrt{\sum_{l\in\mathbb{Z}} a/P_{2m+2k}(iu + i2\pi al)} \ \text{ п.в. на } \mathbb{R}, \tag{2.6}$$

где $\lambda(u)$ — аргумент пока не определенного ряда в левой части (2.6). Хотя ряд под знаком корня сходится равномерно на любом компакте из $\mathbb{R}$, не содержащем нулей $u = -2\pi al$ полиномов $P_{2m+2k}(iu + i2\pi al)$ $(l \in \mathbb{Z})$, правая часть (2.6) не суммируема на периоде $(0, 2\pi a)$, так что тригонометрический ряд в (2.6) не есть ряд Фурье, что затрудняет явное определение коэффициентов $\{C_{r,a}\}$.

Вместо прямого решения уравнения (2.6) подставим выражение $\sum C_{r,a} e^{iru/a}$ из (2.6) в (1.20) и проверим, что получающаяся при этом функция $\varphi(x,a)$ при должном выборе $\lambda(u)$ удовлетворяет требуемым условиям.

С учетом (2.1) будем иметь

$$\varphi^{(\nu)}(x,a) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{e^{i\lambda(u)} \left|\sin\frac{u}{2a}\right|^k (iu)^{\nu+k} e^{ixu}\, du}{\sqrt{a}P_{2m+2k}(iu)\sqrt{\sum\limits_{l} \left(\sin\frac{u}{2a}\right)^{2k} \Big/ P_{2m+2k}(iu + i2\pi al)}}. \tag{2.7}$$

Так как $k \geq 1,\ m \geq 1$, то подынтегральная функция здесь, очевидно, принадлежит $L(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ при всех $\nu \leq m$, и, следовательно, функция $\varphi(x,a)$, задаваемая этой же формулой при

$\nu = 0$, принадлежит $W_2^m(\mathbb{R})$. Применяя равенство Парсеваля, из (2.7) получаем

$$\left\langle \varphi(x,a), \varphi\left(x - \frac{s}{a}, a\right)\right\rangle = \sum_{\nu=0}^{m} p_\nu \left(\varphi^{(\nu)}(x,a),\ \varphi^{(\nu)}\left(x - \frac{s}{a}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int \frac{\left(\sin\frac{u}{2a}\right)^{2k} \sum\limits_{\nu=0}^{m} p_\nu u^{2\nu+2k} e^{isu/a}\ du}{aP^2_{2m+2k}(iu)\sum\limits_{l}\left(\sin\frac{u}{2a}\right)^{2k}\Big/ P_{2m+2k}(iu+i2\pi al)}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int \theta(u,a)e^{isu/a}\ du = \frac{1}{2\pi}\int \widehat{L}_{2m+2k}(u)e^{isu/a}\ du = L_{2m+2k}\left(\frac{s}{a}, a\right) = \delta_{s,0}.$$

Таким образом, при любом выборе вещественной $2\pi a$-периодической функции $\lambda(u)$ система функций $\left\{\varphi\left(x - \frac{s}{a}\right) :\ s \in \mathbb{Z}\right\}$ является ортонормированной относительно скалярного произведения (0.1). Остается проверить, что $\varphi(x,a) \in V(a)$.

Из формулы (2.7) следует, что $\hat{\varphi}^{(\nu)}(u,a)$ отличается от $\hat{\alpha}^{(\nu)}(u,a)$ периодическим множителем $e^{i\lambda(u)}\sqrt{\sum a/P_{2m+2k}(iu+i2\pi al)}$, который, к сожалению, не разлагается в ряд Фурье, так как не интегрируется по периоду из-за особенности в нуле. Поэтому формулу (2.7) использовать непосредственно для проверки включения $\varphi(x,a) \in V(a)$ затруднительно.

При k четном положим $\lambda(u) \equiv \lambda_k = 0$. Легко видеть, что при k нечетном и $\lambda_k = 1$ функция $e^{i(\lambda(u)-\lambda_k u/2a)} = \sum \gamma_r e^{i(2r-1)u/2a}$ имеет такую же структуру, что и sign sin $\frac{u}{2a}$. В общем случае $\lambda(u)$ выберем так, чтобы $e^{i\lambda(u)} = e^{i\lambda_k u/2a}$sign sin $\frac{u}{2a}$. Докажем, что соответствующая функция

$$\varphi(x,a) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{e^{i\lambda_k u/2a}\left(\sin\frac{u}{2a}\right)^k (iu)^k e^{ixu}\ du}{\sqrt{a}P_{2m+2k}(iu)\sqrt{\sum\left(\sin\frac{u}{2a}\right)^{2k}\Big/ P_{2m+2k}(iu+i2\pi al)}} \tag{2.8}$$

принадлежит $V(a)$.

Обозначим через $H_{k,\nu}(u) = (iu)^{\nu+k}\theta(u,a)$ преобразование Фурье функции $\alpha^{(\nu)}(x,a)$. Выделяя его в виде множителя в последнем интеграле, получаем

$$\varphi(x,a) = \frac{1}{2\pi}\int H_{k,0}(u)R_k(u)e^{ixu}\ du,$$

где

$$R_k(u) = \frac{\left\{a\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}}\left(\sin\frac{u}{2a}\right)^{2k}\Big/ P_{2m+2k}(iu+i2\pi al)\right\}^{1/2}}{\left(\sin\frac{u}{2a}\right)^k e^{-i\lambda_k u/2a}}.$$

Хотя $2\pi a$-периодическая функция $R_k(u)$ имеет в нулях синуса неинтегрируемые особенности, преобразования Фурье $H_{k,\nu}(u)R_k(u)$ функций $\varphi^{(\nu)}(x,a)$ непрерывны, убывают на бесконечности как $|u|^{-2m-k+\nu}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, m)$, и, следовательно, суммируемы вместе с их квадратами. Поэтому, обозначив через $\chi_\varepsilon(u)$ характеристическую функцию множества

$$\mathbb{R}\backslash\bigcup_{\nu\in\mathbb{Z}}(2\pi\nu a - \varepsilon, 2\pi\nu a + \varepsilon),$$

через $\varphi_\varepsilon(x,a)$ — функцию

$$\varphi_\varepsilon(x,a) = \frac{1}{2\pi}\int \chi_\varepsilon(u)R_k(u)H_{k,0}(u)e^{ixu}\ du,$$

а через

$$S_N^\varepsilon(u) = \sum_{|r|<N} C^\varepsilon_{r,a}e^{iru/a}$$

— частную сумму тригонометрического ряда Фурье $2\pi a$-периодической кусочно-непрерывной функции $\chi_\varepsilon(u)R_k(u)\in L^2(-\pi a,\pi a)$, получим $\varphi(x,a),\varphi_\varepsilon(x,a)\in W_2^m(\mathbb{R})$ и

$$\|\varphi(x,a)-\varphi_\varepsilon(x,a)\|^2_{W_2^m(\mathbb{R})}=\sum_{\nu=0}^m p_\nu\frac{1}{2\pi}\|(R_k(u)-\chi_\varepsilon(u)R_k(u))H_{k,\nu}(u)\|_2^2$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=0}^m p_\nu\int(1-\chi_\varepsilon(u))^2|R_k^2(u)|H^2_{k,\nu}(u)|\,du\longrightarrow 0\qquad(\varepsilon\to 0);$$

$$\left\|\varphi_\varepsilon(x,a)-\sum_{|r|<N}C^\varepsilon_{r,a}\alpha\left(x+\frac{r}{a};a\right)\right\|^2_{W_2^m(\mathbb{R})}=\frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=0}^m p_\nu\|(\varphi_\varepsilon^{(\nu)})\hat{}\,(u)-S_N^\varepsilon(u)H_{k,\nu}(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$=\sum_{\nu=0}^m p_\nu\frac{1}{2\pi}\int|\chi_\varepsilon(u)R_k(u)-S_N^\varepsilon(u)|^2\,|H^2_{k,\nu}(u)|\,du$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int|\chi_\varepsilon(u)R_k(u)-S_N^\varepsilon(u)|^2\sum_{\nu=0}^m p_\nu|H^2_{k,\nu}|(u)\,du$$

$$=\sum_{l\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi la}^{2\pi(l+1)a}|\chi_\varepsilon(u)R_k(u)-S_N^\varepsilon(u)|^2\sum_{\nu=0}^m p_\nu|H^2_{k,\nu}|(u)\,du$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi a}|\chi_\varepsilon(u)R_k(u)-S_N^\varepsilon(u)|^2\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{\nu=0}^m p_\nu|H^2_{k,\nu}|(u+2\pi la)\,du$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi a}|\chi_\varepsilon(u)R_k(u)-S_N^\varepsilon(u)|^2\,\frac{\left(\sin\frac{u}{2a}\right)^{2k}\sum\limits_l\frac{\sum_0^m p_\nu(u+2\pi la)^{2\nu+2k}\left(\sin\frac{u}{2a}\right)^{2k}}{a^2P^2_{2m+2k}(iu+i2\pi al)}}{\left(\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}}\left(\sin\frac{u}{2a}\right)^{2k}\Big/P_{2m+2k}(iu+i2\pi al)\right)^2}\,du$$

$$=\frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^{2\pi a}|\chi_\varepsilon(u)R_k(u)-S_N^\varepsilon(u)|^2\,\frac{\left(\sin\frac{u}{2a}\right)^{2k}\,du}{\left(a\sum\limits_l\left(\sin\frac{u}{2a}\right)^{k}\Big/P_{2m+2k}(iu+i2\pi al)\right)}$$

$$\le C(a,k,P_{2m})\|\chi_\varepsilon(u)R_k(u)-S_N^\varepsilon(u)\|^2_{L^2(0,2\pi a)}\longrightarrow 0\qquad(N\to\infty).$$

Отсюда следует, что можно выбрать последовательность $\varepsilon_N\to 0$ так, что

$$\left\|\varphi(x,a)-\sum_{|r|<N}C^{\varepsilon_N}_{r,a}\alpha\left(x+\frac{r}{a};a\right)\right\|_{W_2^m(\mathbb{R})}\longrightarrow 0\qquad(N\to\infty).$$

Значит, и сама функция $\varphi(x;a)$ принадлежит подпространству $V(a)$.

Проверим обратное, т.е., что каждая функция $\alpha\left(x+\frac{s}{a}\right)$ разлагается в сходящийся по норме пространства $W_2^m(\mathbb{R})$ ряд по системе $\left\{\varphi\left(x+\frac{r}{a},a\right):\ r\in\mathbb{Z}\right\}$. Имеем

$$\alpha^{(\nu)}(x,a)=\frac{1}{2\pi}\int H_{k,\nu}(u)e^{ixu}\,du=\frac{1}{2\pi}\int\frac{1}{R_k(u)}(\varphi^{(\nu)})\hat{}\,(u)e^{ixu}\,du,$$

и если $d_{r,a}$ — коэффициенты тригонометрического ряда Фурье непрерывной периодической функции $1/R_k(u)$ по системе $\{e^{iru/a},\ r\in\mathbb{Z}\}$, то

$$\alpha^{(\nu)}(x,a)=\sum_{r\in\mathbb{Z}}d_{r,a}\varphi^{(\nu)}\left(x+\frac{r}{a},a\right)\qquad(\nu=0,1,\dots,m),$$

причем все эти ряды в $L^2(\mathbb{R})$ сходятся. Действительно, если

$$S_N(u,R_k^{-1})=\sum_{|r|<N} d_{r,a}e^{iru/2a},$$

то

$$\left\|\alpha(x,a)-\sum_{|r|<N} d_{r,a}\varphi\left(x+\frac{r}{a};a\right)\right\|^2_{W_2^m(\mathbb{R})}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{m}p_\nu\frac{1}{2\pi}\int\left|\frac{1}{R_k(u)}-S_N(u,R_k^{-1})\right|^2\frac{\left(\sin\frac{u}{2a}\right)^{2k}u^{2k+2\nu}\ du}{(P_{2m+2k}(iu))^2a\sum\limits_l\left(\sin\frac{u}{2a}\right)^{2k}\Big/P_{2m+2k}(iu+i2\pi al)}$$

$$=\sum_{s\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{2\pi as}^{2\pi a(s+1)}|R_k^{-1}(u)-S_N(u,R_k^{-1})|^2\frac{\left(\sin\frac{u}{2a}\right)^{2k}\ du}{(P_{2m+2k}(iu))\sum\limits_l\left(\sin\frac{u}{2a}\right)^{2k}\Big/P_{2m+2k}(iu+i2\pi al)}$$

$$=\frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^{2\pi a}|R_k^{-1}(u)-S_N(u,R_k^{-1})|^2\ du\longrightarrow 0\qquad (N\to\infty).$$

Так как уже доказана ортонормированность системы функций $\left\{\varphi\left(x+\frac{r}{a};a\right):\ r\in\mathbb{Z}\right\}$, то отсюда получаем, что эта система является ортонормированным относительно скалярного произведения (0.1) базисом подпространства $V(a)$ пространства $W_2^m(\mathbb{R})$. Тем самым теорема 3 доказана.

Замечание 2. Из доказательства видно, что в (2.7) в качестве $\lambda(u)$ можно было взять любую вещественную функцию такую, что $e^{i\lambda(u)}$ — измеримая $2\pi a$-периодическая функция, в частности, положить $e^{i\lambda(u)}$, как в (2.8). Сокращая в (2.7) на $\left|\sin\frac{u}{2^j}\right|^k$, получим вместо (2.8)

$$\varphi(x,a)=\frac{1}{2\pi}\int\frac{e^{i\lambda(u)}u^ke^{ixu}\ du}{\sqrt{a}\ P_{2m+2k}(iu)\sqrt{\sum\limits_l 1/P_{2m+2k}(i(u+2\pi la))}}.$$

При существенно отличных $\lambda(u)$ это будут разные функции, порождающие разные базисы пространства $V(a)$. Отличительная особенность формул (2.3), (2.8) в том, что $2\pi a$-периодическая часть ядра $\widehat{\varphi}(u)$ формулы (2.8) представляет собой след на $\mathbb{R}$ аналитической в некоторой полосе $|\mathrm{Im}\ (u+i\sigma)|<\delta$ функции, и, значит, ее коэффициенты Фурье по системе $\{e^{i\nu u/a}:\ \nu\in\mathbb{Z}\}$ на бесконечности убывают быстро — по геометрической прогрессии.

3. Построение ортонормированного базиса пространства W_j

Для сокращения выписываемых формул будем как и ранее при фиксированном j обозначать $2^j=a$, $2^{j+1}=2a$, $L^{(k)}_{2m+2k}(x,a)=\alpha(x,a)$ и, соответственно, подпространства V_j и V_{j+1} пространства $W_2^m(\mathbb{R})$ обозначим как $V(a)$ и $V(2a)$. Тогда $V(a)\subset V(2a)$ и пространство $W(a)$ определим, применяя обозначение $W(a)=V(2a)\dot{-}V(a)$, что означает $W(a)\dot{+}V(a)=V(2a)$, $W(a)\perp V(a)$ (относительно скалярного произведения (0.1)). Таким образом, мы имеем нестационарный анализ соболевского пространства $W_2^m(\mathbb{R})$, т.е. последовательность вложенных подпространств

$$\ldots\subset V_j\subset V_{j+1}\subset\ldots,$$

инвариантных относительно сдвигов на шаг своей сетки узлов (V_j — на шаг $1/2^j$), объединение которых всюду плотно в $W_2^m(\mathbb{R})$ (нестационарность состоит в том, что из включения $f(x)\in V_j$ не следует, что $f(2x)\in V_{j+1}$, и обратно, $g(x)\in V_{j+1}\not\Rightarrow g\left(\frac{x}{2}\right)\in V_j$).

В этом разделе построим ортонормированные (относительно (0.1)) базисы пространств $W_j := W(a)$. Так как сетка $\Delta(a)$ после ее сдвига на $\frac{1}{2a}$ остается частью сетки $\Delta(2a)$, то наряду с вложением $V(a) \subset V(2a)$ будет справедливо и вложение $\left\{g\left(x+\frac{1}{2a}\right):\ g(x) \in V(a)\right\} \subset V(2a)$. В частности, множество линейных комбинаций нечетных сдвигов $\alpha\left(x-\frac{2r+1}{2a}; 2a\right)$ k-х производных фундаментального сплайна $\alpha(x, 2a)$ тоже образует часть $V(2a)$. Более того, эти сдвиги и определяют $W(a)$.

Лемма 4. *Справедливо равенство*

$$W(a) = \overline{\mathrm{Lin}}\left\{\alpha\left(x - \frac{1}{2a} - \frac{r}{a}, 2a\right)\right\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пока лемма не доказана, обозначим правую часть последней формулы через $\widetilde{W}(a)$. В силу леммы 1 функции $\alpha\left(x-\frac{2s+1}{2a}, 2a\right)$ ортогональны $V(a)$, откуда следует, что $\widetilde{W}(a) \subset W(a)$. С другой стороны, так как функция $L_{2m+2k}(x,a) - L_{2m+2k}(x,2a) \in S_{L,j+1}$ и зануляется в четных узлах сетки $\Delta(2a)$, то

$$\alpha(x,2a) = \alpha(x,a) + \sum_s (L_{2m+2k}(t,2a) - L_{2m+2k}(t,a))\Big|_{t=s/2a}\ \alpha\left(x - \frac{s}{2a}; 2a\right)$$

$$= \alpha(x,a) - \sum_s L_{2m+2k}\left(\frac{2s+1}{2a}; a\right)\alpha\left(x - \frac{2s+1}{2a}; 2a\right),$$

причем в силу леммы 2 последний ряд сходится не только равномерно, но и в $W_2^m(\mathbb{R})$, поэтому является элементом класса $\widetilde{W}(a)$. Из этой формулы и получающихся из нее разложений каждой функции $\alpha\left(x-\frac{2\nu}{2a}; 2a\right)$ в сумму функций из $V(a)$ и $\widetilde{W}(a)$ видно, что $V(2a)$ можно представить как замыкание в $W_2^m(\mathbb{R})$ линейной оболочки элементов из $\widetilde{W}(a)$ и $V(a)$. А так как $V(a) \perp W(a) \subset V(2a)$, то $\widetilde{W}(a)$ лежит всюду плотно в подпространстве $W(a)$ и, значит, совпадает с ним. Лемма доказана.

Из этой леммы видно, что всплеск $\psi(x,a)$, сдвиги которого $\{\psi_r(x,a) = \psi\left(x-\frac{r}{2a}; a\right):\ r \in \mathbb{Z}\}$ образуют ортогональный базис пространства $W(a)$, естественно искать в виде

$$\psi(x,a) = \sum_s C_{a,s}\alpha\left(x + \frac{(2s-1)}{2a}\right). \tag{3.1}$$

В силу (2.2) имеем

$$\alpha^{(\nu)}\left(x + \frac{(2s-1)}{2a}, 2a\right) = \frac{1}{2\pi}\int (iu)^{k+\nu}\theta(u,2a)e^{(2s-1)u/2a}\ du. \tag{3.2}$$

Пусть $q, n \in \mathbb{Z},\ r = n - q$. Тогда

$$\langle \psi_q, \psi_n \rangle = \langle \psi, \psi_r \rangle = \sum_{\nu=0}^{m} p_\nu(\psi^{(\nu)}, \psi_r^{(\nu)}).$$

Из (3.1) и (3.2) находим, что

$$(\psi^{(\nu)})(\widehat{u}) = \sum C_{a,s}e^{isu/a}e^{-iu/2a}(iu)^{k+\nu}\theta(u,2a).$$

Отсюда и из равенства Парсеваля получаем

$$\langle \psi, \psi_r \rangle = \sum_{\nu=0}^{m} p_\nu \sum_s C_{a,s} \sum_\mu C_{a,\mu}\frac{1}{2\pi}\int u^{2k+2\nu}|\theta(u,2a)|^2 e^{i(2s-1)u/2a}e^{-1(2\mu-1-r)u/2a}\ du$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m} \frac{1}{2\pi} \int \left| \sum_s C_{a,s} e^{isu/a} \right|^2 p_\nu u^{2k+2\nu} \left|\theta(u,2a)\right|^2 e^{iru/a} \, du,$$

где $\theta(u,2a)$ определяется с помощью (2.1). Внося сумму под знак интеграла и учитывая, что $\sum\limits_{\nu=0}^{m} p_\nu u^{2k+2\nu} = P_{2m+2k}(iu)$, получаем

$$\langle \psi, \psi_r \rangle = \frac{1}{2\pi} \int \left| \sum_s C_{a,s} e^{isu/a} \right|^2 \frac{e^{iru/a} \, du}{(2a)^2 P_{2m+2k}(iu) \left(\sum\limits_l 1/P_{2m+2k}(i(u+4\pi a l)) \right)^2}.$$

Здесь сумма в знаменателе есть $4\pi a$-периодическая функция. Разбивая интеграл на сумму интегралов по отрезкам $[4\pi a n, 4\pi a(n+1)]$ и сводя интегрирование к отрезку $[0, 4\pi a]$, получаем

$$\langle \psi, \psi_r \rangle = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{4\pi a} \left| \sum_s C_{a,s} e^{isu/a} \right|^2 \frac{\sum\limits_n 1/P_{2m+2k}(i(u+4\pi a n))}{4a^2 \left(\sum\limits_l 1/P_{2m+2k}(i(u+4\pi a l)) \right)^2} \, e^{iru/a} \, du$$

$$= \frac{1}{2\pi a} \int\limits_0^{4\pi a} \left| \sum_s C_{a,s} e^{isu/a} \right|^2 \frac{e^{iru/a} \, du}{4a \sum\limits_l 1/P_{2m+2k}(i(u+4\pi a l))}.$$

Система $\{e^{iru/a} \,:\, r \in \mathbb{Z}\}$ полна в $L^2(0, 2\pi a)$. Для использования этого свойства сведем последний интеграл к интегралу по отрезку $[0, 2\pi a]$

$$\langle \psi, \psi_r \rangle = \frac{1}{2\pi} \left(\int\limits_0^{2\pi a} + \int\limits_{2\pi a}^{4\pi a} \right) = \frac{1}{2\pi a} \int\limits_0^{2\pi a} \left| \sum_s C_{a,s} e^{isu/a} \right|^2 \frac{e^{iru/a} \, du}{4a \sum\limits_l 1/P_{2m+2k}(i(u+4\pi a l))}$$

$$+ \frac{1}{2\pi a} \int\limits_0^{2\pi a} \left| \sum_s C_{a,s} e^{isu/a} \right|^2 \frac{e^{iru/a} \, du}{4a \sum\limits_l 1/P_{2m+2k}(i(u+2\pi a(2l+1)))} = \frac{1}{2\pi a} \int\limits_0^{2\pi a} \frac{e^{iru/a}}{4a} \left| \sum_s C_{a,s} e^{isu/a} \right|^2$$

$$\times \left(\frac{1}{\sum\limits_l 1/P_{2m+2k}(iu + i4\pi a l)} + \frac{1}{\sum\limits_l 1/P_{2m+2k}(iu + i2\pi a(2l+1))} \right) du.$$

Отсюда находим, что для ортонормированности системы $\{\psi_r(x,a) \;:\; r \in \mathbb{Z}\}$ относительно скалярного произведения (0.1) необходимо и достаточно, чтобы ядро последнего интеграла (подынтегральное выражение за исключением $e^{iru/a}$) почти всюду совпадало с единицей. Это равносильно тому, что

$$\sum_s C_{a,s} e^{isu/a} = 2\sqrt{a} e^{i\mu(u)} \left\{ \frac{\sum\limits_l 1/P_{2m+2k}(iu + i4\pi a l) \sum\limits_l 1/P_{2m+2k}(iu + i2\pi a(2l+1))}{\sum\limits_l 1/P_{2m+2k}(iu + i2\pi a l)} \right\}^{1/2}, \quad (3.3)$$

где $\mu(u) = \arg \sum\limits_s C_{a,s} e^{isu/a}$. Не нарушая условия на $\left| \sum C_{a,s} e^{isu/a} \right|$, в качестве $\mu(u)$ можно взять любую вещественную измеримую функцию, для которой $e^{j\mu(u)}$ была бы $2\pi a$-периодической функцией. Здесь выбрана положительная ветвь степени $1/2$. Выражение в фигурных скобках можно представить в виде

$$\frac{\sum\limits_l \left(\sin \frac{u}{4a}\right)^{2k} / P_{2m+2k}(iu + i4\pi a l) \sum\limits_l \left(\cos \frac{u}{4a}\right)^{2k} / P_{2m+2k}(iu + i2\pi a(2l+1))}{\sum\limits_l \left(\frac{1}{2} \sin \frac{u}{2a}\right)^{2k} / \, P_{2m+2k}(iu + i2\pi a l)}, \quad (3.4)$$

где все ряды на любом конечном отрезке сходятся равномерно. Следовательно, эта функция представляет собой положительную непрерывную $2\pi a$-периодическую функцию. Поэтому условия (3.3) на последовательность $\{C_{a,s}\}_{s\in\mathbb{Z}}$ значительно проще аналогичных условий (2.6) на последовательность $\{C_{r,a}\}_{r\in\mathbb{Z}}$. Здесь $\{C_{a,s}\}$ — коэффициенты Фурье при разложении правой части (3.3) в тригонометрический ряд по системе $\{e^{isu/a}\}_{s\in\mathbb{Z}}$. Более того, все ряды в (3.4) в комплексной окрестности любого отрезка $[(2\nu-1)\pi a,(2\nu+1)\pi a]$, не содержащей комплексных нулей сдвижек полиномов $P_{2m+2k}(iu)$, сходятся равномерно. Поэтому при хорошем выборе функции $\mu(u)$, допускающем ее аналитическое продолжение в окрестность вещественной прямой, например, при $\mu(u)\equiv 0$ или $\mu(u)\equiv u/a$, правая часть в (3.3) будет $2\pi a$-периодической функцией, аналитической в некоторой полосе $|\mathrm{Im}\ u|<\delta$. Тогда, как известно, коэффициенты Фурье будут убывать по геометрической прогрессии:

$$|C_{a,s}|\le Ke^{-(\delta-\varepsilon)|s|}\qquad (0<\varepsilon<\delta,\quad K=K(\varepsilon,a,k,P_{2m})). \tag{3.5}$$

Из последней оценки и леммы 2 легко вывести, что при хорошем выборе $\mu(u)$ ряд $\sum\limits_s C_{a,s}\alpha\left(x+\frac{2s-1}{2a}\right)$ с коэффициентами, определяемыми из (3.3), сходится в $W_2^m(\mathbb{R})$, поэтому его сумма $\psi(x,a)$ лежит в $W(a)$. Действительно, тогда при $0\le\nu\le 2m+k-1$

$$\left\|\sum_{s=M}^{N} C_{a,s}\alpha^{(\nu)}\left(x+\frac{2s-1}{2a};2a\right)\right\|_2\le\sum_{s=M}^{N}|C_{a,s}|\left\|\alpha^{(\nu)}\left(x+\frac{2s-1}{2a};2a\right)\right\|_2$$

$$=\|\alpha^{(\nu)}(x;2a)\|_2\sum_{s=M}^{N}|C_{a,s}|\le K\|\alpha^{(\nu)}(x;2a)\|_2\sum_{s=M}^{N}e^{-|s|(\delta-\varepsilon)}\longrightarrow 0\qquad (M,N\to\infty,\ M,N\to-\infty)$$

и по критерию Коши ряды с указанными производными сходятся в $L^2(\mathbb{R})$, а значит, сам ряд сходится в $W_2^m(\mathbb{R})$. И, как уже было доказано, функция $\psi(x,a)$ порождает ортонормированную в W_2^m относительно скалярного произведения (0.1) систему $\psi_r(x,a)=\psi\left(x-\frac{r}{a}\right)$ $(r\in\mathbb{Z})$.

Из (3.1), (3.2) получим, что

$$\widehat{\psi}(u,a)=\left(\sum_s C_{a,s}e^{isu/a}\right)e^{-iu/2a}\widehat{\alpha}(u,2a). \tag{3.6}$$

Отсюда и из (3.2), (3.3) находим явное выражение для $\widehat{\psi}(u,a)$:

$$\widehat{\psi}(u,a)=\frac{e^{i(\mu(u)-u/2a)}u^k}{\sqrt{a}P_{2m+2k}(iu)}\left\{\frac{\sum\limits_l 1/P_{2m+2k}(iu+i2\pi a(2l+1))}{\sum\limits_l 1/P_{2m+2k}(iu+i2\pi al)\sum\limits_l 1/P_{2m+2k}(iu+i4\pi al)}\right\}^{1/2}$$

$$=\frac{e^{i(\mu(u)-u/2a)}}{\sqrt{a}}\frac{u^k(\sin u/4a)^{2k}}{P_{2m+2k}(iu)}$$

$$\times\left\{\frac{\sum\limits_l(\cos\frac{u}{4a})^{2k}/P_{2m+2k}(iu+i2\pi a(2l+1))}{\left(\sum\limits_l\left(\frac12\sin\frac{u}{2a}\right)^{2k}/P_{2m+2k}(iu+i2\pi al)\right)\left(\sum\limits_l\left(\sin\frac{u}{4a}\right)^{2k}/P_{2m+2k}(iu+4\pi al)\right)}\right\}^{1/2}, \tag{3.7}$$

с помощью которого можно определить $\psi(x,a)$ через обратное преобразование Фурье:

$$\psi(x,a)=\frac{1}{2\pi}\int\widehat{\psi}(u,a)e^{iux}\,du. \tag{3.8}$$

Еще одно представление $\psi(x,a)$ дается в виде ряда (3.1) с коэффициентами $C_{a,s}$, определенными из (3.3).

Покажем, наконец, что $\{\psi(x-r/a;a):\ r\in\ \mathbb{Z}\}$ — базис пространства $W(a)$. Из (3.6) имеем

$$\widehat{\alpha}(u,2a)e^{-iu/2a}=\widehat{\psi}(u,a)\left(\sum C_{a,s}e^{isu/a}\right)^{-1}.$$

Как было показано выше, периодическая функция (3.3) при аналитичности $e^{i\mu(u)}$ сама является аналитической в некоторой комплексной окрестности вещественной оси и строго отделена от нуля. Поэтому такой же будет и функция $\left(\sum C_{a,s}e^{isu/a}\right)^{-1}$. Через ее убывающие со скоростью геометрической прогрессии коэффициенты $b_{a,r}$ последнее равенство переписывается как

$$\left(\alpha\left(x-\frac{1}{2a},2a\right)\right)^{\wedge}(u)=\sum_r b_{a,r}\widehat{\psi}(u,a)e^{-ru/a},$$

$$\alpha\left(x+\frac{2s-1}{2a},2a\right)=\sum_r b_{a,r}\psi\left(x+\frac{s-r}{a},a\right),$$

где последний ряд сходится в топологии $W_2^m(\mathbb{R})$. Отсюда и из определения подпространства $W(a)$ следует, что множество сходящихся в $W_2^m(\mathbb{R})$ рядов вида $A(x)=\sum A_r\psi_r(x,a)$ лежит всюду плотно в $W_2^m(\mathbb{R})$. А так как в силу ортонормированности системы $\{\psi_r(x,a):\ r\in\mathbb{Z}\}$ для любой функции $f(x)\in W_2^m(\mathbb{R})$ уклонение $\|f(x)-A(x)\|_{W_2^m(\mathbb{R})}$ будет минимальным при $A(x)=A_f(x)=\sum\limits_r\langle f,\psi_r\rangle\psi_r(x,a)$, то при $f(x)\in W_2^m(\mathbb{R})$ имеем $\|f-A_f\|_{W_2^m(\mathbb{R})}=0$. Полученные в этих рассуждениях результаты составляют часть следующей теоремы.

Теорема 4. *Функция* $\psi_j(x)=\psi(x;2^j)$, *определяемая формулами* (3.7), (3.8) *при* $a=2^j$, *или, что равносильно, формулами* (3.1), (3.3), *порождает ортонормированный относительно скалярного произведения* (0.1) *базис* $\{\psi_{j,r}(x)=\psi_j(x-r/2^j):\ r\in\mathbb{Z}\}$ *подпространства* $W_j=V_{j+1}\dot{-}V_j\ \ (j\in\mathbb{Z})$, *инвариантный относительно сдвига на* $1/2^j$. *Вся система функций*

$$\{\psi_{j,r}(x):\ (j,r)\in\mathbb{Z}^2\}\tag{3.9}$$

образует ортонормированный базис пространства $W_2^m(\mathbb{R})$.

Доказательство. Все утверждения теоремы, кроме последнего, уже доказаны. По построению $V_j=\{s_{L,j}^{(k)}(x):\ s_{L,j}\in S_{L,j}\}$, где $S_{L,j}$ — множество всех L-сплайнов с узлами на сетке Δ_j из (1.2). Поэтому, при $V_{j'}\subset V_j\subset V_{j+1}$,

$$W_j=(V_{j+1}\dot{-}V_j)\perp V_{j'},\tag{3.10}$$

откуда вытекает, что при $j'\neq j\quad\langle\psi_{j',r'},\psi_{j,r}\rangle=0$ для любых $r,r'\in\mathbb{Z}$. Следовательно, система (3.9) действительно ортонормированная относительно скалярного произведения (0.1).

В силу (3.10) для доказательства того, что система (3.9) является базисом $W_2^m(\mathbb{R})$, осталось проверить, что $\overline{\cup V_j}=W_2^m(\mathbb{R})$.

В следующем разделе доказано (теорема 7), что если непрерывно дифференцируемая функция $g(x)$ с абсолютно непрерывной производной $g^{(m+k-1)}$ такова, что $g^{(k)}\in W_2^m(\mathbb{R})$, то производные порядка ν ($k\le\nu\le m+k$) интерполяционного сплайна $S_{L,j}(g,x)$ при $j\to\infty$ сходятся в $L^2(\mathbb{R})$ к соответствующим производным функции $g(x)$. А так как $S_{L,j}^{(k)}(g,x)\in V_j$, то из свойства минимальности частных сумм ортогональных разложений следует

$$\left\|g^{(k)}(x)-(\mathcal{P}_jg^{(k)})(x)\right\|_{W_2^m(\mathbb{R})}\le\left\|g^{(k)}(x)-S_{L,j}^{(k)}(g,x)\right\|_{W_2^m(\mathbb{R})}\longrightarrow 0\qquad(j\to\infty),$$

где $(\mathcal{P}_ju)(x)$ — ортогональная в смысле скалярного произведения (0.1) проекция функции $u\in W_2^m(\mathbb{R})$ на подпространство V_j. Полагая $g^{(k)}(x)=f(x)\in W_2^m(\mathbb{R})$,

$$g(x)=\frac{1}{(k-1)!}\int\limits_0^x(x-t)^{k-1}f(t)\,dt,$$

видим отсюда, что $\cup V_j$ плотно в $W_2^m(\mathbb{R})$. Теорема 4 доказана.

4. Погрешность аппроксимации L-сплайнами

В этом разделе будут установлены оценки погрешности аппроксимации в $L_q(\mathbb{R})$ $(q \geq 2)$ функций $f(x)$ из классов $W_2^{m+k}(\mathbb{R})$ и $W_2^{2m+2k}(\mathbb{R})$ и их производных интерполяционными L-сплайнами $S_{L,j}(f,x)$ и их производными и аналогичные оценки для $f(x)$ с $f^{(k)}(x) \in W_2^m(\mathbb{R})$, $W_2^{2m+k}(\mathbb{R})$.

Следующее утверждение, в частных случаях известное, выделено (с доказательством) в отдельную лемму в форме, удобной для последующих ссылок.

Лемма 5. *Пусть $N \geq 2$ и у функции $F(x)$ производная $F^{(N-1)}(x)$ абсолютно непрерывна, $F^{(N)}(x) \in L^2(\mathbb{R})$ и $F(x_\nu) = 0$ $(\nu \in \mathbb{Z},\ x_\nu = \nu h)$. Тогда $F^{(l)}(x) \in L^2(\mathbb{R})$ $(l = 0, 1, \ldots, N-1)$ и для этих производных при $q \geq 2$ справедливы оценки*

$$\left\|F^{(l)}(x)\right\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq C_N(l,q)\left(\frac{h}{2}\right)^{N-l-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}}\left\|F^{(N)}(x)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}, \tag{4.1}$$

где

$$C_N(l,q) \leq \frac{\pi}{2}(\sqrt{2})(N-1)^{1/2+1/q} \quad (0 < l < N-1),$$

$$C(0,q) \leq \frac{2^{1+1/q}}{\sqrt{\pi}}(N-1)^{1/2}, \quad C(0,\infty) \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}, \quad C(N-1,q) \leq \sqrt{2}(N-1)^{1/2+1/q} \quad (2 \leq q \leq \infty).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $F^{(N)}(x)$ локально суммируема. Поэтому для любого $x \in \mathbb{R}$

$$F^{(N-1)}(x) = \int_\eta^x F^{(N)}(t)\,dt,$$

если $F^{(N-1)}(\eta) = 0$. Так как $F(x_\nu) = 0$ в точках x_ν, то по теореме Ролля на любом интервале $\Delta = (x_\mu, x_{\mu+N-1})$ такая точка $\eta = \eta_\Delta$ найдется. Тогда для $x \in (x_\mu, x_{\mu+N-1})$ будет выполняться оценка

$$\left|F^{(N-1)}(x)\right| \leq |x-\eta|^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Delta |F^{(N)}(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.2}$$

Полагая здесь $\mu = n(N-1),\ \Delta = \Delta_n = (x_{n(N-1)}, x_{(n+1)(N-1)})$ $(n \in \mathbb{Z})$, получаем при $q \geq 2$

$$\left\|F^{(N-1)}\right\|_q = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{\Delta_n}\left|F^{(N-1)}(x)\right|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_n \int_{\Delta_n}|x-\eta|^{\frac{q}{2}}\,dx\left(\int_{\Delta_n}\left|F^{(N)}(t)\right|^2\,dt\right)^{\frac{q}{2}}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Легко проверить (например, дифференцированием), что максимум по $\eta \in \Delta_n$ первого интеграла в правой части неравенства достигается на концах промежутка и равен $(1+q/2)^{-1}((N-1)h)^{1+q/2}$. Так как $\|\cdot\|_{l^{q/2}(\mathbb{Z})} \leq \|\cdot\|_{l^1(\mathbb{Z})}$ и $(1+q/2)^{-1} \leq 2^{-1}$ при $q \geq 2$, то окончательно получаем оценку

$$\|F^{(N-1)}\|_q \leq \sqrt{2}(N-1)^{\frac{1}{q}+\frac{1}{2}}\left(\frac{h}{2}\right)^{\frac{1}{q}+\frac{1}{2}}\|F^{(N)}\|_2. \tag{4.3}$$

Это доказывает (4.1) при $l = N-1,\ 2 \leq q \leq \infty$.

Далее рассмотрим случай $l = 0$. Применим по известной [10, стр. 91] схеме теорему Ролля к функции

$$\Phi(z) = F(z)\prod_{r=\mu}^{\mu+N-2}(x-x_r) - F(x)\prod_{r=\mu}^{\mu+N-2}(z-x_r).$$

Тогда для любого $x \in \Delta = (x_\mu, x_{\mu+N-1})$ найдется точка $z = z(x) \in \Delta$ такая, что выполняется равенство $\Phi^{(N-1)}(z(x)) = 0$, т.е.

$$F(x) = \frac{F^{(N-1)}(z(x))}{(N-1)!} \prod_{r=\mu}^{\mu+N-2} (x - x_r). \tag{4.4}$$

Эту известную формулу будем применять, выбирая специальным образом интервалы Δ в зависимости от ν и от положения x на интервалах Δ_ν^h длины h, а именно, для любого $\nu \in \mathbb{Z}$ положим:

$$\Delta_\nu^h = (x_\nu, x_{\nu+1}),$$

$$\Delta = \Delta_\nu = \begin{cases} (x_{\nu-n}, x_{\nu+n}), & \text{если } x \in \left(x_\nu, x_\nu + \frac{h}{2}\right), \\ (x_{\nu+1-n}, x_{\nu+1+n}), & \text{если } x \in \left(x_\nu + \frac{h}{2}, x_{\nu+1}\right), \end{cases}$$

при $N - 1 = 2n + 1$ и

$$\Delta_\nu^h = (x_\nu - h/2, x_\nu + h/2),$$

$$\Delta = \Delta_\nu = \begin{cases} (x_{\nu-n}, x_{\nu+n-1}), & \text{если } x \in \left(x_\nu - \frac{h}{2}, x_\nu\right), \\ (x_{\nu-n+1}, x_{\nu+n}), & \text{если } x \in \left(x_\nu, x_\nu + \frac{h}{2}\right) \end{cases}$$

при $N - 1 = 2n$. Оценим модуль соответствующего произведения $\pi_{\Delta_{\nu,N}}(x)$ при дроби в (4.4). В силу симметрии достаточно рассмотреть только случай $x \in (x_\nu, x_\nu + h/2)$ при нечетном и четном $N - 1$. Имеем

$$\pi_{\Delta_{\nu,2n}}(x) = \prod_{s=0}^{n-1} (x - x_\nu + sh)((s+1)h - (x - x_\nu)),$$

$$\pi_{\Delta_{\nu,2n+1}}(x) = \pi_{\Delta_{\nu,2n}}(x)(x - x_\nu + sh),$$

$$\frac{d}{dx}\pi_{\Delta_{\nu,2n}}(x) = \pi_{\Delta_{\nu,2n}}(x) \sum_{s=0}^{n-1} \frac{h - 2(x - x_\nu)}{(x - x_\nu + sh)((s+1)h - (x - x_\nu))} > 0.$$

Таким образом, функции $\pi_{\Delta_{\nu,2n}}(x)$ и $\pi_{\Delta_{\nu,2n+1}}(x)$ возрастают. Следовательно, для $x \in \Delta_\nu^h$ $\pi_{\Delta_{\nu,2n}}(x) \le \pi_{\Delta_{\nu,2n}}(x_\nu + h/2)$, $\pi_{\Delta_{\nu,2n+1}}(x) \le \pi_{\Delta_{\nu,2n}}(x_\nu + h/2)(x - x_\nu + nh)$.

Пусть далее $N - 1 = 2n$. Из (4.4) с $z(x) \in \widetilde{\Delta}_\nu$ вместо x, последней оценки для $\pi_{\Delta_{\nu,2n}}$ и из (4.2) при $\eta \in (x_{\nu-n}, x_{\nu+n})$ получаем для $x \in \Delta_h^\nu$ оценку

$$|F(x)| \le \sqrt{2nh} \left(\int\limits_{x_{\nu-n}}^{x_{\nu+n}} |F^{(N)}(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{h}{2}\right)^{2n} A_n,$$

где

$$A_n = \left(\frac{2}{h}\right)^{2n} \frac{\pi_{\Delta_{\nu,2n}}\left(x_\nu + \frac{h}{2}\right)}{(2n)!} = \frac{(2n-1)!!^2}{(2n)!} = \frac{(2n+1)!!}{(2n+1)2^n!} = \frac{2\Gamma\left(1 + n + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1)(2n+1)}.$$

Применяя формулу Сонина $\Gamma(1+x) = \sqrt{2\pi x}(x/e)^x e^{12^{-1}(\theta+x)^{-1}}$ $(0 < \theta < 1/2)$, уточняющую формулу Стирлинга, находим

$$A_n \le \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^{n+1} e^{-(n+1/2)} e^{12^{-1}(n+1/2+\theta_n)^{-1}}}{\sqrt{\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n} \left(n + \frac{1}{2}\right) e^{12^{-1}(n+\theta_n)^{-1}}} \le \frac{e^{-1/2}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n e^{12^{-1}(n+1/2)^{-1}}}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{n}\, e^{12^{-1}(n+1/2)^{-1}}} < \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2n}},$$

$$|F(x)| \le \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{h} \left(\frac{h}{2}\right)^{2n}.$$

Следовательно, при $q \geq 2$

$$\|F(x)\|_q = \left(\sum_{\nu \in Z} \int\limits_{\Delta_\nu^h} |F(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{h} \left(\frac{h}{2}\right)^{2n} \left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} h \left(\int\limits_{x_{\nu-n}}^{x_{\nu+n}} |F^N(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{q}{2}} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Воспользовавшись монотонностью нормы $\|\cdot\|_{lq/2}$, получаем отсюда

$$\|F(x)\|_q \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{q}} \left(\frac{h}{2}\right)^{2n+\frac{1}{2}+\frac{1}{q}} \left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \int\limits_{x_{\nu-n}}^{x_{\nu+n}} |F^{(N)}(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Так как интервалы $(x_{\nu-n}, x_{\nu+n}]$ $(\nu \in \mathbb{Z})$ $2n$-кратно покрывают $\mathbb{R}$, то

$$\|F(x)\|_q \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \, 2^{1+\frac{1}{q}} \sqrt{2n} \left(\frac{h}{2}\right)^{2n+\frac{1}{2}+\frac{1}{q}} \|F^{(N)}(t)\|_2. \tag{4.5}$$

Отметим, что при $q = \infty$ из оценок $|F(x)|$ и A_n вытекает неравенство

$$\|F(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{h}{2}\right)^{2n+\frac{1}{2}} \|F^{(N)}(t)\|_2, \tag{4.6}$$

более точное, чем получающееся предельным переходом $q \to \infty$ из (4.5).

Пусть теперь $N - 1 = 2n + 1$. Тогда аналогично, но с учетом оценки $\pi_{\Delta_\nu, 2n+1}(x) \leq \pi_{\Delta_{n,2n}} \left(x_\nu + \frac{h}{2}\right) a_\nu(x)$, где, как доказано, $a_\nu(x) = x - x_{\nu-n}$ при $x \in \left(x_\nu, x_\nu + \frac{h}{2}\right)$ и ввиду симметрии $a_\nu(x) = (x_{\nu+1+n} - x)$ при $x \in \left(x_\nu + \frac{h}{2}, x_{\nu+1}\right)$, будем иметь

$$\left(\int\limits_{\Delta_\nu^h} |F(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq \sqrt{2nh} \left(\int\limits_{x_{\nu-n}}^{x_{\nu+1+n}} |F^{(N)}(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(2n+1)} \left(\frac{h}{2}\right)^{2n} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

$$\times \left(\int\limits_{x_\nu}^{x_\nu + \frac{h}{2}} (x - x_{\nu-n})^q \, dx + \int\limits_{x_\nu + \frac{h}{2}}^{x_{\nu+1}} (x_{\nu+1+n} - x)^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{h}{2}\right)^{2n+\frac{1}{2}} \frac{1}{2n+1} h^{1+\frac{1}{q}}$$

$$\times \left(\frac{2}{q+1}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(n + \frac{1}{2}\right)^{q+1} - n^{q+1} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{x_{\nu-n}}^{x_{\nu+1+n}} |F^{(N)}(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

По формуле конечных приращений Лагранжа, $\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)^{q+1} - n^{q+1}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{2}{q+1}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(n + \frac{\theta}{2}\right) \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)$. Следовательно,

$$\left(\int\limits_{\Delta_\nu^h} |F(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{2^{1+\frac{1}{q}}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{h}{2}\right)^{2n+\frac{3}{2}+\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{x_{\nu-n}}^{x_{\nu+n+1}} |F^{(N)}(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (\nu \in \mathbb{Z}).$$

Отсюда предельным переходом при $q \to \infty$ получаем

$$\|F\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{h}{2}\right)^{2n+\frac{3}{2}} \|F^{(N)}\|_2,$$

а при $2 \le q < \infty$, учитывая, что промежутки $(x_{\nu-n}, x_{\nu+n+1}]$ $(\nu \in \mathbb{Z})$ образуют $(2n+1)$-кратное покрытие $\mathbb{R}$, как и в случае $N-1=2n$, выводим оценку

$$\|F\|_q \le \frac{2^{1+\frac{1}{q}}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{2n+1}\left(\frac{h}{2}\right)^{2n+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{q}}\|F^{(N)}\|_2.$$

Объединяя последние два неравенства с (4.6), (4.5), получаем при $N-1 \ge 1$ неравенства

$$\begin{aligned} &\|F\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{h}{2}\right)^{N-\frac{1}{2}}\|F^{(N)}\|_2, \\ &\|F\|_q \le \frac{2^{1+\frac{1}{q}}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{N-1}\left(\frac{h}{2}\right)^{N-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}}\|F^{(N)}\|_2, \end{aligned} \tag{4.7}$$

из которых вытекает утверждение доказываемой леммы при $l=0$.

Из (4.3), (4.7) и неравенства Колмогорова

$$\|F^{(l)}\|_q \le \frac{\pi}{2}\|F\|_q^{\frac{N-l-1}{N-1}}\|F^{(N-1)}\|_q^{\frac{l}{N-1}} \qquad (0 \le l \le N-1)$$

следует, что при $0 < l < N-1$

$$\|F^{(l)}\|_q \le C_{(l,N,q)}\left(\frac{h}{2}\right)^{N-l-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}}\|F^{(N)}\|_2,$$

где $C_{(l,N,q)} \le \frac{\pi}{2}\sqrt{2}(N-1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{q}}$. Лемма 5 полностью доказана.

Теорема 5. *Для функций $f(x) \in W_2^{m+k}(\mathbb{R})$ при $q \ge 2$ и $l = 0,1,\ldots,m+k-1$ справедливы оценки*

$$\|f^{(l)}(x) - S_{L,j}^{(l)}(f,x)\|_q \le C(l,q)\left(\frac{h}{2}\right)^{m+k-l-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}}\|f^{(N)}\|_{W_2^m(\mathbb{R})}, \tag{4.8}$$

где $h = 1/2^j$, $C(l,q) \le \frac{\pi}{2}(2/p_m)^{1/2}(m+k-1)^{1/2+1/q}$ при $0 < l < m+k-1$, $C(0,q) \le \frac{2^{1+1/q}}{\sqrt{\pi p_m}}(m+k-1)^{1/2}$, $C(0,\infty) \le \frac{2}{\sqrt{\pi p_m}}$, $C(m+k-1,q) \le \sqrt{\frac{2}{p_m}}(m+k-1)^{1/2+1/q}$ $(2 \le q \le \infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $F(x) = f(x) - S_{L,j}(f,x)$. В силу теоремы 1 $F(x) \in W_2^{m+k}(\mathbb{R})$ и

$$\|F^{(m+k)}(x)\|_2 \le \sqrt{p_m^{-1}}\|F^{(k)}(x)\|_{W_2^m(\mathbb{R})} \le \sqrt{p_m^{-1}}\|f^{(k)}(x)\|_{W_2^m(\mathbb{R})}.$$

Применение леммы 5 при $N = m+k$ заканчивает доказательство теоремы. □

В доказательстве теоремы 4 использовано аналогичное теореме 5 утверждение, но при ослабленном ограничении на $f(x)$. Для его обоснования предварительно изучим нужные нам свойства аналогов полиномиальных B-сплайнов для дифференциальных операторов вида (1.1). Соответствующие аналоги B-сплайнов ранее рассматривались, например, в [11–14].

Напомним, что, как и раньше, $h = 2^{-j}$, $x_s = x_{s,j} = sh$ $(s \in \mathbb{Z})$. Для краткости положим $e_{h,\lambda}(x) = e^{\lambda x}\chi_{[0,h]}(x)$ и для каждой n-ки $\Lambda_n = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ комплексных чисел будем обозначать через $N(x,\Lambda_n)$ свертку

$$N(x,\Lambda_n) = N(x,\Lambda_n,h) = (e_{h,\lambda_1} * \cdots * e_{h,\lambda_n})(x),$$

которую в случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda$ будем записывать также в виде $e_{h,\lambda}^{*n}(x)$. Условимся, что $e_{h,\lambda}^{*1}(x) = e_{h,\lambda}(x)$, $e_{h,\lambda}^{*0}(x) = e_{h,0}(x) = \chi_{[0,h]}(x)$. При $\Lambda_n = \Lambda_n(\overline{o}) = (0,0,\ldots,0)$ функция

$N(x, \Lambda_n(\overline{o}), 1)$ с точностью до множителя $1/(n-1)!$ совпадает с полиномиальным сплайном $B_{n-1}(x)$ степени $n-1$ (порядка n) и известная формула для конечных разностей $\Delta_h^n f(x) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r C_n^r f(x - rh)$ в этих терминах принимает вид

$$\Delta_h^n f(x) = \int N(x-t; \Lambda_n(\overline{o}), h) f^{(n)}(t)\, dt.$$

Функцию $N(x, \Lambda_n)$ будем называть B-сплайном, соответствующим набору Λ_n и сетке с шагом h. Если $n = 2m + 2k$ и

$$\Lambda_{2m+2k} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2m+2k}) = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{2k}, \underbrace{\gamma_1, \dots, \gamma_1}_{\mu_1}, \dots, \underbrace{\gamma_r, \dots, \gamma_r}_{\mu_r} \right) \tag{4.9}$$

— набор нулей характеристического полинома оператора $L = L_{2m+2k}$ (1.1) с учетом их кратности ($\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r = 2m$), то B-сплайн, соответствующий этому набору (оператору L (1.1)), будем обозначать также через $N_{L,j}(x)$. Таким образом,

$$N_{L,j}(x) = \left(e_{h,0}^{*2k}\right) * \left(e_{h,\gamma_1}^{*\mu_1}\right) * \dots * \left(e_{h,\gamma_r}^{*\mu_r}\right)(x).$$

Нам потребуются еще B-сплайны, соответствующие подмножествам набора Λ_n. В качестве таких подмножеств будем выбирать либо первые l элементов, либо последние $n-l$ элементов набора Λ_n $(0 \le l \le n)$. Соответствующие B-сплайны будем для краткости обозначать через $N_l(x, \Lambda_n)$ и $N_{-l}(x, \Lambda_n)$ $(0 \le l \le n)$. В частности, для крайних значений $l = n, (-l) = (-0)$ будем иметь $N_n(x, \Lambda_n) = N_{-0}(x, \Lambda_n) = N(x, \Lambda_n)$. Пусть также $N_0(x, \Lambda_n) = N_{-n}(x, \Lambda_n) = N(x, \varnothing) \equiv 0$.

Лемма 6. *Для любого набора $\Lambda_n = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ $(n \ge 1)$ комплексных чисел B-сплайн $N(x, \Lambda_n, h)$ есть функция, абсолютно непрерывная вместе с производными до порядка $n-2$ включительно, сосредоточенная на $[0, nh]$ и бесконечно дифференцируемая всюду, кроме точек $x_s = sh$ $(s = 0, 1, \dots, n)$, в которых производные порядка $\ge n-1$ определены только как односторонние. Дифференциальный оператор*

$$\mathcal{L}^{\Lambda_l}(\mathcal{D}) = \prod_{\nu=1}^{l} (\mathcal{D} - \lambda_\nu I)$$

при $1 \le l \le n$ действует на B-сплайн в соответствии с формулой

$$\mathcal{L}^{\Lambda_l}(\mathcal{D}) N(x, \Lambda_n, h) = \Delta_h^{\Lambda_l} N_{-l}(x, \Lambda_n, h), \tag{4.10}$$

где $\Delta_h^{\Lambda_l}$ — оператор обобщенной разности

$$\Delta_h^{\Lambda_l} = \prod_{\nu=1}^{l} \left(I - e^{\lambda_\nu h} T_h\right),$$

I — тождественный оператор, T_h — оператор сдвига, $T_h f(x) = f(x-h)$. Действие оператора $\Delta_h^{\Lambda_l}$ на произвольную достаточно гладкую функцию можно представить в виде

$$\Delta_h^{\Lambda_l} f(x) = \int N_l(x-t, \Lambda_n, h) \sum_{\nu=0}^{l} (-1)^\nu \sigma_\nu(\Lambda_l) f^{(l-\nu)}(t)\, dt, \tag{4.11}$$

где $\sigma_\nu(\Lambda_l)$ — симметрический многочлен степени ν от переменных $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$, $\sigma_0(\Lambda_l) \equiv 1$, $\sigma_1(\Lambda_l) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_l, \dots,$ $\sigma_l(\Lambda_l) = \sigma_l \cdot \sigma_2 \cdots \sigma_l$.

Отметим, что сумму в интеграле (4.11) можно записать в виде $\mathcal{L}^{\Lambda_l}(\mathcal{D})f(t)$, а $\sum\limits_{\nu=0}^{l}(-1)^\nu \times \sigma_\nu(e^{\lambda_1 h},\dots,e^{\lambda_n h})T_{\nu h} = \Delta_h^{\Lambda_l}$. Такие обобщенные разности рассматривались ранее в связи с дифференциальными операторами (см., например, [11–14] и приведенные там ссылки).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим индукцию по n. При $n=1$ утверждения леммы почти очевидны. Действительно, в соответствии с принятыми обозначениями $N(x,\Lambda_1) = e_{h,\lambda_1}(x) = \chi_{[0,h]}(x)e^{\lambda_1 x}$, откуда видна справедливость утверждений леммы относительно производных порядка $\geq n-1$ $(=0)$. Производную порядка $n-2$ $(=-1)$ считаем первообразной от самой функции, а значит, она будет абсолютно непрерывной. Далее, при $n=1$ имеем $l=1$, $N_{-1}(x,\Lambda_1) = N(x,\varnothing)\equiv 0$ и во всех точках x (в том числе в точках 0 и h для односторонних производных) $\mathcal{L}^{\Lambda_1}(\mathcal{D})N(x,\Lambda_1) = \mathcal{D}e_{h,\lambda_1}(x) - \lambda_1 e_{h,\lambda}(x) = \chi_{[0,h]}(x)\left((e^{\lambda,x})' - \lambda_1 e^{\lambda_1 x}\right)\equiv 0$, так что равенство (4.10) выполняется. Формула (4.11) при $n=l=1$ переписывается в виде

$$f(x) - e^{\lambda_1 h}f(x-h) = \int e_{h,\lambda_1}(x-t)(f'(t)-\lambda_1 f(t))\,dt = \int\limits_{x-h}^{x} e^{\lambda_1(x-t)}(f'(t)-\lambda_1 f(t))\,dt$$

и легко проверяется интегрированием по частям. Кроме того, $\operatorname{supp} N(x,\Lambda_1,h) = [0,h]$.

Допустим, что теорема верна для любого набора из n комплексных чисел. Для любого набора $\Lambda_{n+1} = (\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n,\lambda_{n+1})$ обозначим $\widetilde{\Lambda}_n = (\lambda_2,\lambda_3,\dots,\lambda_n,\lambda_{n+1})$. В силу коммутативности операции свертки B-сплайн $N(x,\Lambda_{n+1},h)$ можно представить в виде

$$N(x;\Lambda_{n+1},h) = e_{h,\lambda_1} * N(\cdot\,;\widetilde{\Lambda}_n,h)(x) = \chi_{[0,h]}(x)\int\limits_{0}^{x} e^{\lambda_1(x-t)}N(t,\widetilde{\Lambda}_n,h)\,dt$$

$$+\ \chi_{[h,nh]}(x)\int\limits_{x-h}^{x} e^{\lambda_1(x-t)}N(t;\widetilde{\Lambda}_n,h)\,dt + \chi_{[nh,(n+1)h]}(x)\int\limits_{x-h}^{nh} e^{\lambda_1(x-t)}N(t;\widetilde{\Lambda}_n,h\,dt, \tag{4.12}$$

откуда получаем

$$N'(x;\Lambda_{n+1},h) = \lambda_1 N(x;\Lambda_{n+1},h) + \chi_{[0,nh]}(x)N(x;\widetilde{\Lambda}_n,h) - \chi_{[h,(n+1)h]}(x)e^{\lambda_1 h}N(x-h,\widetilde{\Lambda}_n,h). \tag{4.13}$$

Из последней формулы видно, что производная $N'(x;\Lambda_{n+1},h)$ обладает всеми дифференциальными свойствами функции $N(x;\widetilde{\Lambda}_n,h)$, и, следовательно, из предположения индукции вытекает, что сама функция $N(x;\Lambda_{n+1},h)$ вместе с производными $N^{(l)}(x;\Lambda_{n+1},h)$ $(l=1,2,\dots,(n+1)-2)$ абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}$, а более старшие производные определены всюду, кроме точек $0,h,2h,\dots,(n+1)h$, в которых определены только лево- и правосторонние производные. Кроме того, из (4.13) также видно, что

$$(\mathcal{D}-\lambda_1 I)N(x;\Lambda_{n+1},h) = (I - e^{\lambda_1 h}T_h)N(x;\widetilde{\Lambda}_n,h), \tag{4.14}$$

откуда, используя предположение индукции и очевидный факт, что $N_{-l}(x;\widetilde{\Lambda}_n,h) = N_{-(l+1)}(x;\Lambda_{n+1},h)$, получаем при любом $l\leq n$ равенства

$$\mathcal{L}_{l+1}(\mathcal{D})N(x;\Lambda_{n+1},h) = \mathcal{L}_l(\mathcal{D},\widetilde{\Lambda}_n)(\mathcal{D}-\lambda_1 I)N(x;\Lambda_{n+1},h) = \mathcal{L}_l(\mathcal{D};\widetilde{\Lambda}_n)(I-e^{\lambda_1 h}T_h)N(x;\widetilde{\Lambda}_n,h)$$

$$= (I-e^{\lambda_1 h}T_h)\mathcal{L}_l(\mathcal{D};\widetilde{\Lambda}_n)N(x;\widetilde{\Lambda}_n,h) = \prod_{\nu=1}^{n+1}(I-e^{\lambda_\nu h}T_h)N_{-(l+1)}(x;\Lambda_{n+1},h),$$

доказывающие справедливость (4.10) с Λ_{n+1} вместо Λ_n при $1\leq l\leq n+1$.

Наконец, записывая (4.11) для $\widetilde{\Lambda}_n$, получаем справедливое по предположению индукции равенство

$$\prod_{\nu=2}^{l+1}(I-e^{\lambda_\nu h}T_h)f(x) = \int N_l(x-t;\widetilde{\Lambda}_n,h)\sum_{\nu=0}^{l}(-1)^\nu\sigma_\nu(\widetilde{\Lambda}_l)f^{(l-\nu)}(t)\,dt,$$

где $\widetilde{\Lambda}_l = (\lambda_2, \ldots, \lambda_{l+1})$, из которого следует, что

$$\Delta_h^{\Lambda_{l+1}} f(x) = \int (I - e^{\lambda, h} T_h)(N_l(x-t, \widetilde{\Lambda}_n, h)) \sum_{\nu=0}^{l} (-1)^\nu \sigma_\nu(\widetilde{\Lambda}_l) f^{(l-\nu)}(t)\ dt.$$

Так как $N_l(x, \widetilde{\Lambda}_n, h) = N(x, \widetilde{\Lambda}_l, h)$, то, применяя равенство (4.14) при $n = l$, можем в последнем интеграле заменить выражение $(I - e^{\lambda_1} T_h)(N_l(x-t, \widetilde{\Lambda}_n, h))$ на $(\mathcal{D} - \lambda_1 I) N(x; \Lambda_{l+1}, h) = (\mathcal{D} - \lambda_1 I) N_{l+1}(x-t; \Lambda_{n+1}, h)$. Освобождаясь затем от производной $\mathcal{D} N_{l+1}(\xi, \Lambda_{n+1}, h)$ при $\xi = x - t$ за счет интегрирования по частям, получим

$$\Delta_h^{\Lambda_{l+1}} f(x) = \int N_{l+1}(x-t, \Lambda_{n+1}, h) \left[\sum_{\nu=0}^{l} (-1)^\nu \sigma_\nu(\widetilde{\Lambda}_l) f^{(l+1-\nu)}(t) - \lambda_1 \sum_{\nu=0}^{l} (-1)^\nu \sigma_\nu(\widetilde{\Lambda}_l) f^{(l-\nu)}(t) \right] dt.$$

Выражение в квадратных скобках из последнего интеграла преобразуется к виду

$$f^{(l+1)}(t) + \sum_{\nu=1}^{l} (-1)^\nu \left(\sigma_\nu(\widetilde{\Lambda}_l) + \lambda_1 \sigma_{\nu-1}(\widetilde{\Lambda}_l) \right) f^{(l+1-\nu)}(t) + (-1)^{l+1} \lambda_1 \sigma_{l+1}(\widetilde{\Lambda}_l) f(t)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{l+1} (-1)^\nu \sigma_\nu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{l+1}) f^{(l+1-\nu)}(t).$$

Подставляя это выражение в рассматриваемый интеграл, получим формулу (4.11) с Λ_{n+1} вместо Λ_n. По индукции заключаем, что лемма 6 верна при любом $n \in \mathbb{N}$.

Следствие 2. *Для любой n-ки $\Lambda_n = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ комплексных чисел и любого $l = 0, 1, \ldots, n-1$ справедлива оценка*

$$\left| N^{(l)}(x; \Lambda_n, h) \right| \le C_l(\Lambda_n) h^{n-1-l} \tag{4.15}$$

с константой, зависящей при $h \le 1$ только от l и Λ_n.

Для $n = 1$ это тривиально: $|N(x; \Lambda_1, h)| = |e_{h,\lambda_1}(x)| \le \max\{1, |e^{\lambda_1 h}|\}$, $|N'(x, \Lambda_1, h)| \le |\lambda_1| e^{|\lambda_1| h}$. Дальнейшее вытекает по индукции из (4.12) и (4.13).

Следствие 3. *Для фундаментального сплайна* (1.8) $\mathcal{L}_j(x) = L_{2m+2k}(x; 2^j)$ *и его производных справедливы представления*

$$\mathcal{L}_j^{(l)}(x) = \sum_s a_s N_{L,j}^{(l)}(x - sh) \qquad (l = 0, 1, \ldots, 2m+2k), \tag{4.16}$$

где для любого j коэффициенты $a_s = a_s(h)$ убывают при $|s| \to \infty$ со скоростью геометрической прогрессии, кроме того, справедливо тождество

$$\sum a_s e^{ishu} \equiv \widehat{\mathcal{L}}_j(u) / \widehat{N}_{L,j}(u). \tag{4.17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство (4.16) при $l = 0$ в терминах преобразования Фурье эквивалентно равенству

$$\widehat{\mathcal{L}}_j(u) = \sum a_s e^{-isuh} \widehat{N}_{L,j}(u),$$

из которого вытекает (4.17). Используя выражение для $\widehat{\mathcal{L}}_j(u)$ из (1.8) и формулу

$$\widehat{N}_{L,j}(u) = (\widehat{e}_{h,0}(u))^{2k} \prod_{\nu=1}^{r} (\widehat{e}_h, \gamma_\nu)^{\mu_\nu} = \left(\frac{1 - e^{-iuh}}{iu} \right)^{2k} \prod_{\nu=1}^{r} \left(\frac{e^{-(iu-\gamma_\nu)h} - 1}{iu - \gamma_\nu} \right)^{\mu_\nu}$$

$$= (2\sin uh/2)^{2k} \prod_{\nu=1}^{r} \left(e^{-(iu-\gamma_\nu)h} - 1\right)^{\mu_\nu} \frac{p_m e^{-iuhk}}{P_{2m+2k}(iu)},$$

следующую из определения $N_{L,j}(x)$ и (4.9), получим

$$\sum a_s e^{-isuh} = \frac{p_m^{-1} e^{ikuh} \left(\prod\limits_{\nu=1}^{r} \left(e^{-(iu-\gamma_\nu)h} - 1\right)^{\mu_\nu}\right)^{-1}}{2^j \sum\limits_l (2\sin uh/2)^{2k} \Big/ \left((u+2\pi l 2^j)^{2k} P_{2m}(u+2\pi l 2^j)\right)} =: g_h(u),$$

где $P_{2m+2k}(iu)$ — характеристический полином оператора (1.1) при $x = iu$, который в обозначениях, введенных в (1.5), записывается в виде $u^{2k}P_{2m}(u)$. Отсюда видно, что $g_h(u)$ является следом на вещественной оси $2\pi 2^j$-периодической аналитической функции $g_h(z)$, все полюса которой лежат на положительном расстоянии $\sigma = \sigma(h, P_{2m})$ от вещественной оси плоскости $z = u + iv$. Последнее замечание следует из положительности при $|u| \le 2^j\pi$ функции $(\sin uh/2)/u$ и условия $P_{2m}(u) > 0$ $(u \in \mathbb{R})$, означающего, в частности, что среди устранимых особых точек $-\gamma_\nu i + 2\pi s 2^j$ $(\nu = 1, 2, \ldots, r;\ s \in \mathbb{Z})$ функции $g_h(z)$ нет вещественных. Аналитичность функции $g_h(z)$ в полосе $|\mathrm{Im}\ z| < \sigma$, как хорошо известно, обеспечивает оценку $|a_s| \le C_\delta e^{-|s|\delta h}$ при любом $\delta \in (0, \sigma)$, где $C_\delta = C_\delta(g_h) = \max\{|g_h(z)| :\ |\mathrm{Im}\ z| \le \delta\}$. Следствие 3 доказано.

Теорема 6. *Пусть* $\mathcal{L}_j(x) = L_{2m+2k}(x, 2^j)$ — *фундаментальный сплайн* (1.7), $\Lambda_l = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ — *элементы набора* (4.9), $h = 2^{-j}$. *Для любой функции* $f(x)$ *с* $f^{(k)}(x) \in L^2(\mathbb{R})$ *ряд*

$$S_{L,j}(f, x) = \sum f(sh)\mathcal{L}_j(x - sh) \tag{4.18}$$

определяет ее интерполяционный L-*сплайн на сетке* (1.2), *при этом* $S_{L,j}^{(l)}(f, x) \in L^2(\mathbb{R})$ *для* $l = k, k+1, \ldots, 2k+2m$. *При* $h \le 1$ *в случае* $f^{(k)} \in W_2^m(\mathbb{R})$ *справедливы оценки*

$$\left\|\mathcal{L}^{\Lambda_l}(\mathcal{D})S_{L,j}(f, x)\right\|_2 \le C_l \left\|\mathcal{L}^{\Lambda_l}(\mathcal{D})f\right\|_2 \qquad (l = k, \ldots, m+k), \tag{4.19}$$

$$\left\|S_{L,j}^{(l)}(f, x)\right\|_2 \le C_l \|f^{(l)}(x)\|_2 \qquad (l = k, k+1, \ldots, \min\{2k, m+k\}), \tag{4.20}$$

а при $k < m$ — *оценки*

$$\left\|S_{L,j}^{(l)}(f, x)\right\|_2 \le C_l \left(\|f^{(2k)}\|_2 + \|f^{(l)}\|_2\right) \qquad (l = 2k+1, \ldots, m+k) \tag{4.21}$$

с константами $C_l = C_{l,k}(P_{2m})$. *Если* $f^{(k)} \in W_2^{k+2m}(\mathbb{R})$, *то неравенства* (4.19) *верны при* $l = k, k+1, \ldots, 2m+2k-1$, *а неравенства* (4.20) *и* (4.21) — *при* $l = k, \ldots, 2k$ *и при* $l = 2k+1, \ldots, 2k+2m$. *При* $l = 2k+2m$ *неравенство* (4.21) *справедливо также с* $\|f^{(2m+2k-1)}\|_2$ *в правой части вместо* $\|f^{(2m+2k)}\|_2$.

Отметим, что здесь дифференциальный оператор $\mathcal{L}^{\Lambda_l}(\mathcal{D})$ не содержит степеней $\mathcal{D}^\nu$ с $\nu < k$.

Условие на h здесь можно было бы не налагать, но тогда при больших h $(j \ll -1)$ константы C_l могут быть очень большими.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала заметим, что условие $f^{(k)} \in W_2^m(\mathbb{R})$ гарантирует соотношение $f(x_s) = O(|x_s|^{k-1/2})$ $(|s| \to \infty)$. А так как по лемме 2 $|\mathcal{L}_j^{(l)}(x)| = O(e^{-\delta|x|/2^j})$ $(l = 0, 1, \ldots, 2m)$, то ряд в (4.18), почленно продифференцированный l раз $(l = 0, 1, \ldots, 2m+2k-2)$, сходится равномерно на любом отрезке $[a, b]$, а продифференцированный $2m+2k-1$ и $2m+2k$ раз, сходится равномерно на отрезках $[x_s, x_{s+1}]$. Следовательно, все почленные дифференцирования законны, и потому, как и $\mathcal{L}_j^{(l)}(x - x_s)$, производные $S_{L,j}^{(l)}(f, x)$ при $l = 0, 1, \ldots, 2m+2k-2$ абсолютно непрерывны. При $l = 2m+2k-1$ и $2m+2k$ они по определению L-сплайнов кусочно-непрерывны, а внутри отрезков $[x_s, x_{s+1}]$ $L_{2m+2k}(\mathcal{D})S_{L,j}(f,x) \equiv 0$. Так что, несмотря на возможный рост коэффициентов $f(x_s)$ ряда (4.18), он действительно определяет интерполяционный $S_{L,j}$-сплайн функции $f(x)$ (условия $S_{L,j}(x_s) = f(x_s)$ здесь тривиальны). Сформулированные в теореме оценки показывают, что среди интерполяционных $S_{L,j}$-сплайнов функции $f(x)$ ряд (4.18) выделяет достаточно регулярный сплайн. Докажем эти оценки.

Здесь мы воспользуемся только что доказанными утверждениями, применяя их к набору Λ_{2m+2k} (4.9), из которого выбираем $\Lambda_l = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$. Оценим вначале нормы функций $\mathcal{L}^{\Lambda_l}(\mathcal{D})S_{L,j}(f,x) =: A_{h,l}(x)$. Используя следствие 3 и лемму 6, получаем

$$A_{h,l}(x) = \sum_\nu f(x_\nu) \sum_s a_s \mathcal{L}^{\Lambda_l}(\mathcal{D}) N(x - x_\nu - x_s, \Lambda_{2m+2k}, h)$$

$$= \sum_\nu f(x_\nu) \sum_s \Delta_h^{\Lambda_l} N_{-l}(x - x_{\nu+s}, \Lambda_{2m+2k}, h).$$

Пусть $\Delta_h^{\Lambda_l} F(x) = \sum\limits_{r=0}^{l} C_{r,l}(h) F(x - rh)$. Подставляя это в предыдущую формулу, после замены индексов суммирования $\nu + s + r = s'$ и $\nu + r = \mu$ получим

$$A_{h,l}(x) = \sum_\mu \sum_{r=0}^{l} C_{r,l}(h) f(x_\mu - x_r) \sum_{s'} a_{s'-\mu} N_{-l}(x - x_{s'}, \Lambda_{2m+2k}, h)$$

$$= \sum_\mu \Delta_h^{\Lambda_l} f(x_\mu) \sum_s a_{s-\mu} N_{-l}(x - x_s, \Lambda_{2m+2k}, h),$$

$$\widehat{A}_{h,l}(u) = \sum_\mu \Delta_h^{\Lambda_l} f(x_\mu) \sum a_{s-\mu} e^{-iush} \widehat{N}_{-l}(u, \Lambda_{2m+2k}, h)$$

$$= \sum_\mu \Delta_h^{\Lambda_l} f(x_\mu) e^{-i\mu uh} \sum_{s'} a_s e^{-is'uh} \widehat{N}_{-l}(u, \Lambda_{2m+2k}, h)$$

$$= \sum_\mu \Delta_h^{\Lambda_l} f(x_\mu) e^{-i\mu uh} \frac{\widehat{L}_{2m+2k}(u)}{\widehat{N}(u, \Lambda_{2m+2k}, h)} \widehat{N}_{-l}(u, \Lambda_{2m+2k}, h)$$

$$= \sum_\mu \Delta_h^{\Lambda_l} f(x_\mu) e^{-i\mu uh} \frac{\widehat{L}_{2m+2k}(u)}{(e_{h,\lambda_1} * \cdots * e_{h,\lambda_l})^\wedge(u)}.$$

Обозначим последнюю дробь через $G_l(u)$. В силу (1.8)

$$G_l(u) = E_l(u) \frac{1}{2^j u^{2k} P_{2m}(u) \sum\limits_s 1/[(u + 2\pi l 2^j)^{lk} P_{2m}(u + 2\pi s 2^j)]},$$

где

$$E_l(u) = \prod_{\nu=1}^{l} \left(\frac{iu - \lambda_\nu}{1 - e^{-(iu - \lambda_\nu)h}} \right).$$

Применяя теорему Планшереля, находим

$$\|A_{h,l}\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int \left| \widehat{A}_{h,l}(u) \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_\nu \int\limits_{2\pi\nu 2^j}^{2\pi(\nu+1)2^j} \left| \widehat{A}_{h,l}(u) \right|^2 \, du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi 2^j} \sum_\nu \left| \widehat{A}_{h,l}(u + 2\pi\nu 2^j) \right|^2 \, du = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi 2^j} \left| \sum_\mu \Delta_h^{\Lambda_l} f(x_\mu) e^{-i\mu uh} \right|^2 \sum \left| G_l(u + 2\pi\nu 2^j) \right|^2 \, du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi 2^j}^{\pi 2^j} \sum_\nu \left|\sum_\mu \Delta_h^{\Lambda_l} f(x_\mu) e^{-i\mu u h}\right|^2 \left|\sum_s a_s e^{-isuh}\right|^2 \left|\widehat{N}_{-l}(u+2\pi\nu 2^j)\right|^2 \, du$$

$$= \frac{2^j}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\sum_\mu \Delta_h^{\Lambda_l} f(x_\mu) e^{-i\mu t}\right|^2 \left|\sum_s a_s e^{-ist}\right|^2 \sum_\nu \left|\widehat{N}_{-l}(2^j(t+2\pi\nu))\right|^2 \, dt.$$

Обозначим две последних суммы здесь через $a_j(t)$ и $b_j(t)$ соответственно и оценим их сверху. Из следствия 3 имеем

$$|a_j(t)| = h\left(\sum_l \left(\frac{2\sin t/2}{2^j(t+2\pi l)}\right)^{2k} \frac{p_m \prod\limits_{\nu=1}^{r} \left|e^{-(it-\gamma_\nu h)}-1\right|^{\mu_\nu}}{P_{2m}((t+2\pi l)2^j)}\right)^{-1}.$$

Оставляем здесь одно слагаемое при $l=0$. Получим при $|t|<\pi$

$$|a_j(t)| \le h^{-2k+1}\left(\frac{t/2}{\sin t/2}\right)^{2k} \prod_{\nu=1}^{r}\left|\frac{2^j it-\gamma_\nu}{e^{-(it-\gamma_\nu h)}-1}\right|^{\mu_\nu} \le h^{-2k-2m+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} C(P_{2m}),$$

где константу $C(P_{2m})$ можно выбрать не зависящей от h, полагая ее равной

$$\max_{|t|\le\pi,\ h\le 1}\left|\prod_{\nu=1}^{r}\left(\frac{it-\gamma_\nu h}{e^{-(it-\gamma_\nu h)}-1}\right)^{\mu_\nu}\right|.$$

Так как $P_{2m}(u)>0$, то $\mathrm{Re}\gamma_\nu \ne 0$ $(\nu=1,2,\ldots,r)$ и, следовательно, каждая дробь под знаком модуля рассматриваемого максимума в прямоугольнике $|t|\le\pi,\ 0\le h\le 1$ имеет только одну особую точку $t=0$, $h=0$, которая является устранимой. Поэтому константа $C(P_{2m})$ здесь конечна и зависит при $h\le 1$ только от нулей полинома $P_{2m}(\lambda)$.

Аналогично оценивается функция $b_j(t)$. Для более компактной записи $\widehat{N}_{-l}(u,\Lambda_{2m+2k},h)$ будем применять для Λ_{2m+2k} первое равенство из (4.9). Имеем

$$\widehat{N}_{-l}(u,\Lambda_{2m+2k},h) = \prod_{s=l+1}^{2m+2k}\widehat{e}_{h,\lambda_s}(u) = \prod_{s=l+1}^{2m+2k}\frac{e^{-(iu-\lambda_s)h}-1}{-(iu-\lambda_s)},$$

$$b_j(t) = \sum_\nu \prod_{s=l+1}^{2m+2k}\frac{\left|e^{-(i(t+2\pi\nu)-\lambda_s h)}-1\right|^2}{|i2^j(t+2\pi\nu)-\lambda_s|^2} = h^{4m+4k-2l}\sum_\nu \prod_{s=l+1}^{2m+2k}\frac{\left|e^{-(it-\lambda_s h)}-1\right|^2}{|i(t+2\pi\nu)-\lambda_s h|^2}.$$

Общий член последнего ряда при $l+1\le 2m+2k$ убывает при $|\nu|\to\infty$ не медленнее, чем $O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)$. В прямоугольнике $|t|\le\pi,\ 0\le h\le\rho(P_m)$ только нулевой член ряда имеет особенность, причем только в точке $t=0$, $h=0$, но она устранимая. Поэтому весь ряд сходится в этом прямоугольнике равномерно и ограничен константой, зависящей лишь от l,k и $P_{2m}(\lambda)$. Используя эти оценки $|a_j(t)|^2$ и $b_j(t)$, получаем

$$\|A_{h,l}\|_2^2 \le C_l(\Lambda_{2m+2k})h^{-2l+1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_\mu \Delta_h^{\Lambda_l} f(x_\mu)e^{-i\mu t}\right|^2 \, dt$$

$$= C_l(\Lambda_{2m+2k})h^{-2l+1}\sum_\mu |\Delta_h^{\Lambda_l} f(x_\mu)|^2.$$

По лемме 6

$$\left|\Delta_h^{\Lambda_l} f(x_\mu)\right|^2 = \left|\int\limits_{x_\mu-lh}^{x_\mu} N_l(x_\mu-t;\Lambda_{2m+2k},h)L^{\Lambda_l}(\mathcal{D})f(t)\, dt\right|^2$$

$$\leq \int\limits_0^{lh} |N(\tau;\Lambda_l,h)|^2\,d\tau \int\limits_{x_\mu - lh}^{x_\mu} \left|L^{\Lambda_l}(\mathcal{D})f(t)\right|^2\,dt. \tag{4.22}$$

Применяя оценку следствия 2, приходим к неравенству

$$\|A_{h,l}\|_2^2 \leq C_{l,k}(P_{2m}) \int\limits_{\mathbb{R}} \left|L^{\Lambda_l}(\mathcal{D})f(t)\right|^2\,dt. \tag{4.23}$$

Вспоминая обозначение $A_{h,l} = L^{\Lambda_l}(\mathcal{D})S_{L,j}(f,x)$, получаем неравенство (4.19), содержательное в случае конечности $\|L^{\Lambda_l}(\mathcal{D})f\|_2$, т.е. для $f^{(k)}(x) \in W_2^m(\mathbb{R})$ при $l = k, k+1, \ldots, m+k$, а для $f^{(k)}(x) \in W_2^{2m+k}(\mathbb{R})$ оно доказано для $l = k, k+1, \ldots, 2m+2k-1$. При $l = 2m+2k$ оператор $L^{\Lambda_{2m+2k}}(\mathcal{D})$ совпадает с оператором (1.1), и неравенство становится тривиальным. При $l = k, k+1, \ldots, 2k$ и $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{2k} = 0$ имеем $L^{\Lambda_l}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}^l$, откуда получаем неравенства (4.20) соответственно для $f^{(k)}(x) \in W_2^m(\mathbb{R})$ и $f^{(k)}(x) \in W_2^{2m+k}(\mathbb{R})$. Для доказательства оценок (4.21) перепишем неравенство (4.19) при $l > 2k$ в развернутом виде:

$$\left\|\sum_{\nu=0}^{l}(-1)^\nu \sigma_\nu(\Lambda_l) S_{L,j}^{(l-\nu)}(f,x)\right\|_2 \leq C_l(\Lambda_{2m+2k}) \left\|\sum_{\nu=0}^{l}(-1)^\nu \sigma_\nu(\Lambda_l) f^{(l-\nu)}(x)\right\|_2.$$

Здесь $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{2k} = 0$, поэтому $\sigma_\nu(\Lambda_l) = 0$ при $l - 2k < \nu \leq l$, $\sigma_\nu(\Lambda_l) = \sigma_\nu(\Lambda_l^{2k})$ при $0 \leq \nu \leq l-2k$, где $\Lambda_l^{2k} = (\lambda_{2k+1}, \ldots, \lambda_l)$. Отсюда видно, что

$$\left\|S_{L,j}^{(l)}(f,x)\right\|_2 \leq \sum_{\nu=1}^{l-2k} |\sigma_\nu(\Lambda_l^{2k})| \left\|S_{L,j}^{(l-\nu)}\right\|_2 + C_l \sum_{\nu=0}^{l-2k} |\sigma_\nu(\Lambda_l^{2k})| \left\|f^{(l-\nu)}\right\|_2.$$

При $l = 2k$ неравенство (4.21) совпадает с (4.20). Допустим, что неравенство (4.21) верно при $l \leq l' - 1$. Тогда из предыдущей оценки получаем

$$\left\|S_{L,j}^{(l')}(f,x)\right\|_2 \leq \sum_{\nu=1}^{l'-2k} \left|\sigma_\nu(\Lambda_{l'}^{2k})\right| C_{l'-\nu}\left(\|f^{(2k)}\|_2 + \|f^{(l'-\nu)}\|_2\right) + C_l \sum_{\nu=0}^{l'-2k} \left|\sigma_\nu(\Lambda_{l'}^{2k})\right| \left\|f^{(l'-\nu)}\right\|_2.$$

Здесь $2k \leq l'-\nu \leq l'$. Оценивая нормы производных $f^{(l'-\nu)}$ через нормы $f^{(2k)}$ и $f^{(l')}$ с помощью неравенства Колмогорова в аддитивной форме, получим

$$\left\|S_{L,j}^{(l')}(f,x)\right\|_2 \leq C_{l'}\left(\|f^{(2k)}\|_2 + \|f^{(l')}\|_2\right)$$

с некоторой константой $C_{l'} = C_{l'}(\Lambda_{2m+2k})$. Отсюда по индукции заключаем, что при $l \geq 2k$ неравенство (4.21) всегда верно. В теореме выделены те значения l, при которых правая часть в (4.21) конечна. При $l = 2m+2k$ имеем $L^{\Lambda_{2m+2k}}(\mathcal{D})S_{L,j}(f,x) = 0$ почти всюду на $\mathbb{R}$, и потому

$$\left\|S_{L,j}^{(2m+2k)}(f,x)\right\|_2 \leq \sum_{\nu=1}^{2m} \left|\sigma_\nu\left(\Lambda_{2m+2k}^{2k}\right)\right| \|S^{(2m+2k-\nu)}\|_2.$$

Отсюда и из доказанного неравенства (4.21) видно, что при $l = 2m+2k$ правую часть в нем можно заменить на $C_{2m+2k}\left(\|f^{(2k)}\|_2 + \|f^{(2m+2k-1)}\|_2\right)$ и условие $f^{(k)} \in W_2^{2m+k}(\mathbb{R})$ в теореме можно ослабить, заменив его на условие $f^{(k)} \in W_2^{2m+k-1}(\mathbb{R})$.

Наконец, допустим, что известно только то, что $f^{(k)}(x) \in L^2(\mathbb{R})$. Представляя $\Delta_h^{\Lambda_l} f(x)$ при $l \geq k$ в виде $\Delta_h^k \Delta_h^{\Lambda_l^k} f(x) - \sum\limits_{\nu=0}^{l-k} c_\nu(\Lambda_l, h)\Delta_h^k f(x-\nu h)$, где $|c_\nu(\Lambda_l,h)| = |\sigma_\nu(e^{\lambda_{k+1}h}, \ldots, e^{\lambda_l h})| \leq c(\Lambda_l)$ при $h \leq 1$, а Δ_h^k — классическая конечная разность k-го порядка, вместо (4.11) и (4.22) получим

$$\Delta_h^{\Lambda_l} f(x_\mu) = \int\limits_{x_{\mu-kh}}^{x_\mu} N(x_\mu - t; \Lambda_k(\bar{o}), h) \sum_{\nu=0}^{l-k} c_\nu(\Lambda_l, h) f^{(k)}(t-\nu h)\,dt,$$

$$\left|\Delta_h^{\Lambda_l} f(x_\mu)\right|^2 \le \int_0^{kh} |N(t;\Lambda_k(\bar{o}),h)|^2\, dt \left(\sum_{\nu=0}^{l-k} |c_\nu(\Lambda_l,h)|\right)^2 \int_{x_{\mu-lh}}^{x_\mu} \left|f^{(k)}(t)\right|^2\, dt$$

$$\le C_k(\Lambda_l) h^{2(k-1)+1} \int_{x_{\mu-lh}}^{x_\mu} \left|f^{(k)}(t)\right|^2\, dt.$$

Отсюда, продолжая так же, как и выше, вместо (4.23) при $h \le 1$ получим

$$\|A_{h,l}\|_2^2 \le C_l(\Lambda_{2m+2k}) h^{2(k-l)} \left\|f^{(k)}\right\|_2^2,$$

$$\left\|S_{L,j}^{(k)}(f,x)\right\|_2 \le C_k(\Lambda_{2m+2k}) \left\|f^{(k)}\right\|_2,$$

откуда, по индукции,

$$\left\|S_{L,j}^{(l)}(f,x)\right\|_2 \le C_l(\Lambda_{2m+2k}) h^{2(k-l)} \left\|f^{(k)}\right\|_2.$$

Следовательно, условие $f^{(k)} \in L^2(\mathbb{R})$ действительно обеспечивает интегрируемость с квадратом на $\mathbb{R}$ всех производных $S^{(l)}(f,x)$ при $l = k, k+1, \ldots, 2m+2k$. Теперь теорема 6 полностью доказана.

В следующем утверждении устанавливается равенство (1.3) с конечными нормами при наиболее слабых ограничениях на $f(x)$.

Следствие 4. *Пусть* $k \ge 1$, $f^{(k)} \in W_2^m(\mathbb{R})$, $S_{L,j}(f,x)$ *— интерполяционный сплайн* (4.18). *Тогда* $S_{L,j}^{(k)}(x) \in W_2^{k+2m-1}(\mathbb{R})$ *и выполняется равенство* (1.3). *Для функций* f *с* $f^{(k)} \in W_2^{2m+k}(\mathbb{R})$ *выполняется равенство теоремы* 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 6 вытекает, что $S_{L,j}^{(l)}(f,x) \in L^2(\mathbb{R})$ для $l = k, k+1, \ldots, 2m+2k$. Так как производная $S^{(2m+2k-2)}(f,x)$ абсолютно непрерывна, то $S^{(k)}(f,x) \in W_2^{k+2m-1}(\mathbb{R})$. Отсюда, как и в доказательстве теоремы 1, вытекают соотношения

$$S_{L,j}^{(l)}(f,x) \longrightarrow 0 \qquad (|x| \to \infty,\ l = k, k+1, \ldots, 2m+2k-1).$$

По неравенству треугольника $f^{(\nu)}(x) - S^{(\nu)}(f,x) \in L^2(\mathbb{R})$ для $\nu = k, k+1, \ldots, m+k$ — в случае $f^{(k)} \in W_2^m(\mathbb{R})$ и для $\nu = k, k+1, \ldots, 2m+2k$ — в случае $f^{(k)} \in W_2^{2m+k}(\mathbb{R})$. Применяя в обоих случаях лемму 5 к функции $F(x) = f(x) - S_{L,j}(f,x)$ с $N = k$, получаем конечность норм $\|F^{(\nu)}(x)\|_2$ и для $\nu = 0, 1, \ldots, k-1$. Отсюда и из абсолютной непрерывности производных $F^{(\nu)}(x),\ \nu = 0, 1, \ldots, 2m+2k-2$ заключаем, что справедливы соотношения

$$f^{(\nu)} - S^{(\nu)}(f,x) \longrightarrow 0 \qquad (|x| \to \infty)$$

для $\nu = 1, 2, \ldots, m+k-1$ или $\nu = 1, 2, \ldots, 2m+2k-2$ в соответствии с указанными выше случаями.

В дальнейшем можно повторить все заключительные рассуждения доказательств теорем 1 и 2, поскольку там при выполнении всех интегрирований по частям, помимо условий интерполяции и необходимой гладкости функций, использовались только выписанные предельные соотношения для $S^{(l)}(f,x)$ и $f^{(\nu)}(x) - S^{(\nu)}(f,x)$.

З а м е ч а н и е 3. Следствие 4 не перекрывает теорем 1 и 2, так как, помимо соответствующих равенств, там было фактически доказано (см. лемму 3), что $S_{L,j}^{(l)}(f,x) \in L^2(\mathbb{R})$ также и при $0 \le l \le k-1$. Здесь же при ослабленных ограничениях на $f(x)$ мы имеем для таких l только включения $f^{(l)}(x) - S_{L,j}^{(l)}(f,x) \in L^2(\mathbb{R})$.

Следствие 5. *Пусть у функции $f(x)$ производная $f^{(k)}(x) \in W_2^m(\mathbb{R})$ и $S_{L,j}(f,x)$ — интерполяционный сплайн* (4.18). *Тогда все оценки теоремы* 5 *остаются справедливыми, т.е.*

$$\left\|f^{(l)}(x) - S^{(l)}(f,x)\right\|_q \le C(l,q)\left(\frac{h}{2}\right)^{m+k-l-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}} \|f^{(k)}\|_{W_2^m(\mathbb{R})} \qquad (l = 0,1,\dots,m+k-1,\ q \ge 2)$$

(*с теми же константами* $C(l,q)$).

Доказательство. Из теоремы 6 вытекает неравенство $\left\|S_{L,j}^{(m+k)}(f,x)\right\|_2 \le C(k,P_{2m})\left(\|f^{(k)}(x)\|_2 + \|f^{(m+k)}(x)\|_2\right)$. Поэтому для функции $F(x) = f(x) - S_{L,j}(f,x)$ конечна норма $\|F^{(m+k)}(x)\|_2$ и по лемме 5 все нормы $\|F^{(l)}\|_q$ оцениваются через $\|F^{(m+k)}(x)\|_2$. По следствию 4 последняя величина, как и в теореме 5, оценивается как

$$\left\|F^{(m+k)}(x)\right\|_2 \le \frac{1}{\sqrt{p_m}}\left\|f^{(k)}(x)\right\|_{W_2^m(\mathbb{R})}.$$

Объединяя эти оценки, получаем утверждение следствия 5.

Теперь мы в состоянии ослабить предположения в теореме 5, одновременно усилив ее заключение в части оценок порядка величин $\left\|f^{(l)} - S_{L,j}^{(l)}(f)\right\|_2$ относительно $h = 2^{-j} \to 0$.

Теорема 7. *Если у функции $f(x)$ производная $f^{(k)}(x) \in W_2^m(\mathbb{R})$, то для ее интерполяционного сплайна* (4.18) *при $1 \le n \le m+k$ для $l = 0,1,\dots,m+k-1,\ 2 \le q \le \infty$ и для $l = m+k,\ q = 2$ справедливы оценки*

$$\left\|f^{(l)}(x) - S_{L,j}^{(l)}(f,x)\right\|_q \le C_{l,n}\left(h^{m+k-l+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\omega_n(f^{(k+m)},h)_2 + h^{n+m+k-l+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\|f^{(k)}(x)\|_2\right),$$

где $\omega_n(g,\delta)_2$ — модуль непрерывности порядка n функции g в $L^2(\mathbb{R}),\ C_{l,n} = C_{l,n}(P_{2m})$.

Доказательство. По аналогии с тем, как С.Б. Стечкин изменил многочлен Джексона, "исправим" n-кратные средние Стеклова, положив для функций $f(x)$, у которых $f^{(k)}(x) \in W_2^m(\mathbb{R})$,

$$(A_h f)(x) = \frac{1}{h^n}\underbrace{\int_0^h \dots \int_0^h}_{n} \sum_{s=1}^{n}(-1)^{s+1}C_n^s f(x + s(t_1+t_2+\dots+t_n))\,dt_1\dots dt_n.$$

Как и для средних Стеклова, $(A_h f)^{(l)}(x) = (A_h f^{(l)})(x)$ $(l \le m+k)$. Отсюда получаем, в частности, что $(A_h f)^{(k)}(x) \in W_2^m(\mathbb{R})$. Но мы можем дифференцирование еще продолжить. У функции f с $f^{(k)} \in W_2^m(\mathbb{R})$ может не быть производной порядка $m+k+1$, тем не менее из формулы

$$(A_h f)^{(m+k)}(x) = \frac{1}{h^n}\underbrace{\int_0^h \dots \int_0^h}_{n-1}\int_{x/s}^{h+x/s} \sum_{s=1}^{n}(-1)^{s+1}C_n^s f^{(m+k)}(s(t_1+t_2+\dots+t_n))\,dt_1\dots dt_n$$

видно, что $(A_n f)^{(m+k)}(x)$ — абсолютно непрерывная функция и

$$(A_h f)^{(m+k+1)}(x) = \frac{1}{h^n}\underbrace{\int_0^h \dots \int_0^h}_{n-1} \sum_{s=1}^{n}(-1)^{s+1}C_n^s \frac{1}{s}\left\{f^{(m+k)}(x + sh + s(t_1+t_2+\dots+t_{n-1}))\right.$$

$$-f^{(m+k)}(x+s(t_1+t_2+\cdots+t_{n-1}))\Big\}\ dt_1dt_2\dots dt_{n-1}.$$

Ясно, что эту процедуру можно продолжить до исчезновения всех интегралов, и в конце мы получим, используя свойство $\Delta_\tau^l=\Delta_\tau\Delta_\tau^{l-1}$ классических конечных разностей (здесь $\Delta_\tau^1 f(x)=f(x+\tau)-f(x)$),

$$(A_hf)^{(m+k+n)}(x)=\frac{1}{h^n}\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s+1}C_n^s\frac{1}{s^n}\Delta_{sh}^n f^{(m+k)}(x).$$

Следовательно,

$$\left\|(A_hf)^{(m+k+n)}(x)\right\|_2\le\frac{C_n}{h^n}\omega_n\left(f^{(m+k)},nh\right)_2.$$

Из доказанного в следствии 4 первого интегрального соотношения (1.3), как обычно, вытекает следующее свойство минимальности интерполяционного сплайна: для функций f, у которых $f^{(k)}\in W_2^m(\mathbb{R})$,

$$\left\|f^{(k)}(x)-S_{L,j}^{(k)}(f,x)\right\|_{W_2^m(\mathbb{R})}\le\left\|f^{(k)}(x)-S^{(k)}(x)\right\|_{W_2^m(\mathbb{R})},$$

где $S(x)$ — любой $S_{L,j}$-сплайн ($L(\mathcal{D})=L_{2m+2k}(\mathcal{D})$ (1.1)). При выводе этого неравенства достаточно предположить, что $S^{(k)}(x)\in W_2^m(\mathbb{R})$, и применить равенство (1.3) к $f(x)-S(x)$ вместо $f(x)$. Так как $(A_hf)^{(k)}(x)\in L^2(\mathbb{R})$, то по теореме 6 $S_{L,j}^{(k)}(A_hf,x)\in W_2^m(\mathbb{R})$. Следовательно, по свойству минимальности

$$\sqrt{p_m}\left\|f^{(m+k)}(x)-S_{L,j}^{(m+k)}(f,x)\right\|_2\le\left\|f^{(k)}(x)-S_{L,j}^{(k)}(f,x)\right\|_{W_2^m(\mathbb{R})}$$

$$\le\left\|f^{(k)}(x)-S^{(k)}(A_hf,x)(f,x)\right\|_{W_2^m(\mathbb{R})}.$$

Отсюда и из эквивалентности всех соболевских норм в пространстве $W_2^m(\mathbb{R})$ (или с помощью неравенства Колмогорова) получаем

$$\left\|f^{(m+k)}(x)-S_{L,j}^{(m+k)}(f,x)\right\|_2\le C(P_{2m})\left(\left\|f^{(k)}(x)-S_{L,j}^{(k)}((A_hf),x)\right\|_2\right.$$

$$\left.+\left\|f^{(m+k)}(x)-S_{L,j}^{(m+k)}((A_hf),x)\right\|_2\right)$$

$$\le C(P_{2m})\left(\left\|f^{(k)}-(A_hf^{(k)})\right\|_2+\left\|f^{(m+k)}-(A_hf^{(k+m)})\right\|_2+\left\|(A_hf)^{(k)}-S_{L,j}^{(k)}(A_hf)\right\|_2\right.$$

$$\left.+\left\|(A_hf)^{(m+k)}-S_{L,j}^{(m+k)}(A_hf)\right\|_2\right)=C(P_{2m})(I_1+I_2+I_3+I_4).$$

Так как нормы $\|(A_hf)^{(k)}\|_2$ конечны, то по теореме 6 конечны нормы $\|S_{L,j}^{(l)}(A_hf,x)\|_2$ производных порядка l ($l=k,k+1,\dots,2m+2k$) L-сплайнов, интерполирующих $(A_hf)(x)$ на сетке (1.2). Так как $m+k+n\le 2m+2k$, то отсюда и из конечности нормы $\|(A_hf)^{(m+k+n)}(x)\|_2$ следует, что функция $F(x)=(A_hf)(x)-S_{L,j}(A_hf,x)$ удовлетворяет условиям леммы 5 при $N=m+k+n$, и, значит, слагаемые I_3 и I_4 оцениваются следующим образом:

$$I_3\le Ch^{m+n}\left\|(A_hf)^{(m+k+n)}(x)-S_{L,j}^{(m+k+n)}(A_hf,x)\right\|_2,$$

$$I_4\le Ch^{n}\left\|(A_hf)^{(m+k+n)}(x)-S_{L,j}^{(m+k+n)}(A_hf,x)\right\|_2,$$

где C зависит только от m,k,n. Применяя еще раз теорему 6, в частности, неравенство (4.21), получаем

$$I_s\le Ch^{n_s}\left(\left\|(A_hf)^{(k)}(x)\right\|_2+\left\|(A_hf)^{(m+k+n)}(x)\right\|_2\right)\qquad(s=3,4),$$

где $n_2 = m+n,\ n_3 = n,\ C = C(k,m,P_{2m})$. Далее по неравенству Минковского имеем

$$\left\|(A_h f)^{(k)}(x)\right\|_2 = \left\|(A_h f^{(k)})(x)\right\|_2$$

$$= \left\| \sum_{s=1}^{n} C_n^s (-1)^{s+1} \frac{1}{h^n} \underbrace{\int_0^h \dots \int_0^h}_{n} f^{(k)}(x+s(t_1+\dots+t_n))\, dt_1 \dots dt_n \right\|$$

$$\le \sum_{s=1}^{n} C_n^s \left\| f^{(k)}(x)\right\|_2 = (2^n-1)\left\|f^{(k)}(x)\right\|_2 .$$

Объединяя эти оценки с полученной выше оценкой $\|(A_h f)^{m+k+n}(x)\|_2$, получаем при $h \le 1$

$$I_3 + I_4 \le C\left(h^n \left\|f^{(k)}(x)\right\|_2 + \omega_n\left(f^{(m+k)}, nh\right)_2\right).$$

Оценим I_1 и I_2. Имеем

$$I_2 = \left\| \frac{1}{h^n} \underbrace{\int_0^h \dots \int_0^h}_{n} \sum_{s=0}^{n} (-1)^s C_n^s f^{(k+m)}(x+s(t_1+\dots+t_n))\, dt_1 \dots dt_n \right\|_2$$

$$= \left\| \frac{1}{h^n} \underbrace{\int_0^h \dots \int_0^h}_{n} \Delta^n_{s(t_1+\dots+t_n)} f^{(k+m)}(x)\, dt_1 \dots dt_n \right\|_2$$

$$\le \frac{1}{h^n} \underbrace{\int_0^h \dots \int_0^h}_{n} \left\|\Delta^n_{s(t_1+\dots+t_n)} f^{(k+m)}(x)\right\|_2\, dt_1 \dots dt_n \le \omega_n\left(f^{(k+m)}, nh\right)_2 .$$

Совершенно аналогично получается, что $I_1 \le \omega_n(f^{(k)}, nh)_2$. Применяя равенство Парсеваля, находим, что

$$\left\|\Delta_h f^{(k)}\right\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int \left|(1-e^{ihu})^n (iu)^k \widehat{f}(u)\right|^2\, du \le \frac{h^{2n}}{2\pi}\int\limits_{|u|<1} \left|(iu)^k \widehat{f}(u)\right|^2\, du$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|u|>1} \left|(1-e^{ihu})^n (iu)^{k+m} \widehat{f}(u)\right|^2\, du \le h^{2n}\left\|f^{(k)}(x)\right\|_2^2 + \left\|\Delta_h^n f^{(k+m)}(x)\right\|_2^2 .$$

Следовательно, для I_1 справедлива такая же оценка, что и для I_2, I_3, I_4. В итоге получаем утверждение теоремы сначала при $q=2,\ l=m+k$, а затем с помощью леммы 5 — для остальных значений l и q. Теорема 7 доказана.

С помощью теоремы 2 и ее обобщения в следствии 5 для более гладких функций полученные оценки можно усилить. Докажем следующее утверждение.

Теорема 8. *Если* $f^{(k)}(x) \in W_2^{2m+k}(\mathbb{R})$, *то при* $l = 0, 1, \ldots, m+k-1$ *справедливо неравенство*

$$\left\| f^{(l)}(x) - S_{L,j}^{(l)}(f,x) \right\|_q \le C_{l,m} h^{2m+2k-l+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \| L_{2m+2k}(\mathcal{D}) f \|_2,$$

а при $l = m+k, m+k-1, \ldots, 2m+2k-1$ — *неравенство*

$$\left\| f^{(l)}(x) - S_{L,j}^{(l)} \right\|_q \le C_{l,m} h^{2m+2k-l+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \left(\left\| f^{(2k)} \right\|_2 + \left\| f^{(2m+2k-1)} \right\|_2 \right),$$

где $C_{l,m} = C_{l,m}(P_{2m})$.

Доказательство. Из условия $f^{(k)} \in W_2^{2m+k}(\mathbb{R})$ и теоремы 6 следует, что нормы $\|S_{L,j}^{(l)}(f,x)\|_2$ ($l = k, k+1, \ldots, 2m+2k$) конечны, а значит, для тех же l конечны и нормы $\|f^{(l)}(x) - S_{L,j}^{(l)}(f,x)\|_2$, а тогда по лемме 5 они конечны и при $l = 0, 1, \ldots, k-1$, причем

$$\left\| f^{(l)}(x) - S_{L,j}^{(l)}(f,x) \right\|_q \le C_l h^{m+k-l+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \left\| f^{(m+k)}(x) - S_{L,j}^{(m+k)}(f,x) \right\|_2 \qquad (l = 0, 1, \ldots, m+k),$$

$$\left\| f^{(l)}(x) - S_{L,j}^{(l)}(f,x) \right\|_q \le C_l h^{2m+2k-l+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \left\| f^{(2m+2k-1)}(x) - S_{L,j}^{(2m+2k-1)}(f,x) \right\|_2 \tag{4.24}$$

$$(l = 0, 1, \ldots, 2m+2k-1),$$

где $C_l = C_{l,k,m}$. Первое из этих неравенств получается из леммы 5 при $F = f(x) - S_{L,j}(f,x)$ и $N = m+k$, а второе — при $N = 2m+2k-1$ и той же F. По тождеству из теоремы 2, доказанному при рассматриваемых условиях в следствии 4,

$$p_m \left\| f^{(k+m)}(x) - S_{L,j}^{(k+m)}(f,x) \right\|_2^2 \le \left\| f^{(k)}(x) - S_{L,j}^{(k)}(f,x) \right\|_2^2$$

$$= \int (f(x) - S_{L,j}(f,x)) L_{2m+2k}(\mathcal{D}) \overline{f}(x)\, dx \le \| f(x) - S_{L,j}(f,x) \|_2$$

$$\times \left\| L_{2m+2k}(\mathcal{D}) \overline{f}(x) \right\|_2 \le C_0 h^{m+k} \left\| f^{(m+k)}(x) - S_{L,j}^{(m+k)}(f,x) \right\|_2 \| L_{2m+2k}(\mathcal{D}) f(x) \|_2,$$

откуда

$$p_m \left\| f^{(k+m)}(x) - S_{L,j}^{(k+m)}(f,x) \right\|_2 \le C_0 h^{m+k} \| L_{2m+2k}(\mathcal{D}) f(x) \|_2.$$

Подставляя это в неравенство, предшествующее (4.24), получаем утверждение теоремы при $l < m+k$.

Так как по теореме 6 (оценки (4.21)) имеем неравенство $\left\| S^{(2m+2k-1)}(f,x) \right\|_2 \le \|f^{(2k)}\|_2 + \|f^{(2m+2k-1)}\|_2$, то неравенства (4.24) дают нужный результат при $l \ge m+k$. Теорема доказана.

5. Оценки погрешности при аппроксимации всплесками

Для функций $f(x) \in W_2^{m+k}(\mathbb{R})$ положим $f^{(k)}(x) = g(x) = g(x,f)$, где $k \ge 1$ задано. Ясно, что $g(x) \in W_2^m(\mathbb{R})$. Обратно, для любой функции $g(x) \in W_2^m(\mathbb{R})$ определим $f(x)$ как k-кратный интеграл от $g(x)$, так что $f^{(k)}(x) \equiv g(x)$. Функция $f(x) = f(x,g)$ определяется по $g(x)$ с точностью до многочлена степени $k-1$

$$f(x) = p_{k-1}(x) + \frac{1}{(k-1)!} \int\limits_0^x (x-t)^{k-1} g(t)\, dt.$$

В обоих случаях для $f(x)$ существует интерполяционный сплайн $S_{L,j}(x,f)$, для которого все разности $f^{(l)} - S_{L,j}^{(l)}(f,x)$ ($l = 0, 1, \ldots, m+k$) лежат в $L^2(\mathbb{R})$. Если $g(x) \in W_2^{(2m+k)}(\mathbb{R})$, то

$f^{(l)}(x) - S^{(l)}_{L,j}(f,x) \in L^2(\mathbb{R})$ при $l = 0,1,\ldots,2m+2k-1$. Это вытекает из лемм 3, 6, 5. При этом в силу $p_{k-1}(x) \in S_{L,j}$ эти разности не зависят от полинома $p_{k-1}(x)$ в определении $f(x,g)$, как не зависят от него и функции

$$s_{2^j}(x,g) := S^{(k)}_{L,j}(f,x), \tag{5.1}$$

где $f(x) = f(x,g)$, т.е. функция $s_{2^j}(x,g)$ определяется по функции $g(x) \in W_2^m(\mathbb{R})$ однозначно. Поясним последнее чуть подробнее. Пусть функция $f_1(x)$ определяется по $g(x)$ так же как и $f(x)$, но с другим многочленом $q_{k-1}(x)$ степени $k-1$ вместо $p_{k-1}(x)$. Тогда $S_{L,j}(f_1,x) - S_{L,j}(f,x) = q_{k-1}(x) - p_{k-1}(x)$, и, следовательно, $S^{(k)}_{L,j}(f_1,x) \equiv S^{(k)}_{L,j}(f,x)$.

Поскольку пространство V_j было определено так, что

$$V_j = \left\{ S^{(k)}(x):\ S(x) \in S_{L,j},\ S^{(k)}(x) \in W_2^m(\mathbb{R}) \right\} \tag{5.2}$$

и по лемме 6 $s_{2^j}(x,g) \in W_2^m(\mathbb{R})$, то $s_{2^j}(x,g) \in V_j$. Более того, в силу доказанного в теореме 1 и в следствии 5 первого интегрального соотношения имеем

$$\|u(x) - s_{2^j}(x,u)\|^2_{W_2^m(\mathbb{R})} = \left\| f^{(k)}(x,u) - S^{(k)}_{L,j}(u,x) \right\|^2_{W_2^m(\mathbb{R})} \le \left\| f^{(k)}(x,u) \right\|^2_{W_2^m(\mathbb{R})} = \|u(x)\|^2_{W_2^m(\mathbb{R})}.$$

Отсюда, заменяя $u(x) \in W_2^m(\mathbb{R})$ на $g(x) - s(x)$ с $s(x) \in V_j$ и учитывая очевидное тождество $s_{2^j}(x,s) \equiv s(x)$, получим

$$\|g(x) - s_{2^j}(x,g)\|^2_{W_2^m(\mathbb{R})} = \|(g(x) - s(x)) - s_{2^j}(x, g-s)\|^2_{W_2^m(\mathbb{R})} \le \|g(x) - s(x)\|^2_{W_2^m(\mathbb{R})}.$$

Следовательно, определенная выше по функции $g(x) \in W_2^m(\mathbb{R})$ функция $s_{2^j}(x,g)$ является ортогональной в смысле скалярного произведения (0.1) проекцией функции $g(x)$ на пространство V_j, т.е.

$$s_{2^j}(x,g) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle g, \varphi_{j,k}\rangle\ \varphi_{j,k}(x), \tag{5.3}$$

где $\varphi_{j,k}$ — базис всплесков пространства V_j (теорема 3). Из определения пространств W_j и всплесков $\psi_j(x)$ следует также, что

$$s_{2^j}(x,g) = \sum_{l=-\infty}^{j-1} \sum_k \langle g, \psi_{l,k}\rangle\ \psi_{l,k}(x).$$

Так что приведенные ниже оценки уклонений $g^{(r)}(x) - s^{(r)}_{2^j}(x,g)$ можно рассматривать как оценки для специальных частных сумм ряда

$$g(x) = \sum_l \sum_k \langle g, \psi_{l,k}\rangle\ \psi_{l,k}(x).$$

Таким образом, полученные в п. 4 оценки для $f^{(l)}(x) - S^{(l)}_{L,j}(f,x)$ при $l = r+k$ и $f(x) = f(x,g)$ являются оценками для $g^{(r)}(x) - s^{(r)}_{2^j}(x,g)$, и, значит, справедливы следующие два утверждения.

Теорема 9. *Пусть $g(x) \in W_2^m(\mathbb{R})$ и $s_{2^j}(x,g)$ — ортогональная проекция* (5.3) *$g(x)$ на V_j* (5.2). *Тогда для $s_{2^j}(x,g)$ справедливы представление* (5.1) *и оценки*

$$\left\| g^{(r)}(x) - s^{(r)}_{2^j}(x,g) \right\|_q \le C_r(n) h^{m-r+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \left(h^n \|g\|_2 + \omega_n(g^{(m)}, nh)_2 \right) \qquad (q \ge 2,\ n \in \mathbb{N}),$$

где $C_r(n) = C_r(n, P_{2m}),\ h = h_j = 2^{-j}$.

Теорема 10. *Для* $g(x) \in W_2^{2m+k}(\mathbb{R})$ *при* $q \geq 2$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *справедливы оценки*

$$\left\| g^{(r)}(x) - s_{2^j}^{(r)}(x,g) \right\|_q \leq C_r h^{2m+k-r+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \left\| \mathcal{D}^k L_{2m}(\mathcal{D}) g(x) \right\|_2 \qquad (r = 0, 1, \ldots, m-1),$$

$$\left\| g^{(r)}(x) - s_{2^j}^{(r)}(x,g) \right\|_q \leq C_r h^{2m+k-1-r+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \left(\left\| g^{(k)} \right\|_2 + \left\| g^{(2m+k-1)} \right\|_2 \right)$$

$$(r = m, m+1, \ldots, 2m+k-1),$$

где $C_r = C_{r,m}(P_{2m})$, $h = 2^{-j}$ *и* $L_{2m}(\mathcal{D}) = \sum\limits_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu p_\nu \mathcal{D}^{2\nu}$.

Теорема 9 является следствием теоремы 7, а теорема 10 — следствием теоремы 8.

Поступила 24.12.04

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bastin F., Laubin P.** Compactly supported wavelets in Sobolev spaces // Duke Math. J. 1997. Vol. 87, № 3. P. 481–508.
2. **Chernykh N.I., Subbotin Yu.N.** Wavelets Which are Orthonormal with Respect to an Inner Product in the Sobolev Space W_2^m of Periodic Functions // Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. 1. 2001. P. 71–84.
3. **Chernykh N.I., Subbotin Yu.N.** Approximating properties of the $\widetilde{W}_2^m$-orthogonal wavelets // East J. Approx. 2004. Vol. 10, № 1–2. P. 219–230.
4. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Новые типы периодических всплесков // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: Материалы шк.-конф., посвящ. 130-летию со дня рождения Д.Ф.Егорова. Казань, 13–18 сентября 1999 г. Казань: Казан. мат. о-во. 1999. С. 209–212.
5. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Конструкция всплесков в $W_2^m(\mathbb{R})$ и их аппроксимативные свойства в разных метриках // Докл. РАН. 2004. Т. 399, № 1. С. 1–3.
6. **Алберг Дж.Х., Нильсон Е.Н., Уолш Дж.Л.** Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. 248 с.
7. **Schumaker L.L.** Spline Functions: Basic Theory. New York: Wiley, 1981. 553 p.
8. **Micchelli C.A.** Cardinal $\mathcal{L}$-splines // Studies in spline functions and approximation theory. New-York: Acad. Press. INC, 1976. P. 203–250.
9. **Привалов И.И.** Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1960. 244 с.
10. **Березин И.С., Жидков Н.П.** Методы вычислений. Т. 1. М.: Физматгиз, 1959. 464 с.
11. **Шарма А., Цимбаларио И.** Некоторые линейные дифференциальные операторы и обобщенные разности // Мат. заметки. 1977. Т. 21, № 2. С. 161–173.
12. **Scherer K., Schumaker L.L.** A dual basis for L-splines and Applications // J. Approx. Theory. 1980. Vol. 29, № 2. P.151–169.
13. **Шевалдин В.Т.** Об одной задаче экстремальной интерполяции // Мат. заметки. 1981. Т. 29, № 4. С. 603–622.
14. **Schumaker L.L.** On recursions for generalized splines // J. Approx. Theory. 1982. Vol. 36, № 1. P. 16–31.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 11 № 2 2005

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЯДОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ. II[1]

С. А. Теляковский

Исследуется, на какие блоки можно разбить ряд Фурье функции ограниченной вариации, чтобы сумма ряда из абсолютных величин этих блоков была интегрируема с квадратом на периоде.

Введение

Пусть 2π-периодическая функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию и

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \bigl(a_k \cos kx + b_k \sin kx\bigr) \tag{0.1}$$

— ее ряд Фурье.

В работах автора [1,2] были усилены теоремы Дирихле–Жордана (см. [3, глава II, теоремы 8.1 и 8.6]) о поточечной и равномерной сходимости рядов Фурье функций ограниченной вариации. Именно, показано, что в этих теоремах можно утверждать не только сходимость или равномерную сходимость рядов Фурье (0.1), но и сходимость (соответственно, равномерную сходимость) рядов

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \bigl(a_k \cos kx + b_k \sin kx\bigr) \right|, \tag{0.2}$$

где $n_1 = 1 < n_2 < n_3 < \ldots$ — произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел, представимая в виде объединения конечного числа лакунарных по Адамару последовательностей.

В [4] было продолжено изучение свойств рядов (0.2): рассмотрен вопрос об интегрируемости на $[-\pi, \pi]$ суммы ряда (0.2) и установлено, что если $m_j := \min(n_j, n_{j+1} - n_j)$ и сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j} \log(1 + m_j), \tag{0.3}$$

то функция (0.2) принадлежит $L[-\pi, \pi]$.

В настоящей работе получены условия на последовательность $\{n_j\}$, достаточные для того, чтобы для каждой функции ограниченной вариации сумма ряда (0.2) принадлежала $L^2[-\pi, \pi]$.

Через C будем обозначать абсолютные положительные постоянные, в разных случаях различные.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00986) и программ "Современные проблемы теоретической математики" ОМН РАН и "Ведущие научные школы" (грант НШ – 1549.2003.1).

1. Частный случай

Сначала рассмотрим задачу для функции

$$\varphi(x) := \frac{\pi - x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}, \qquad x \in (0, 2\pi),$$

которая часто (и в этом случае тоже) играет роль модельной функции при изучении произвольных функций ограниченной вариации.

Теорема 1. *Пусть* $n_1 = 1 < n_2 < n_3 < \ldots$ *— строго возрастающая последовательность натуральных чисел и* $m_j := \min(n_j, n_{j+1} - n_j)$. *Если сходится ряд*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sqrt{m_j}}{n_j}, \tag{1.1}$$

то ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{\sin kx}{k} \right| \tag{1.2}$$

сходится при всех x *и его сумма принадлежит* $L^2[0, \pi]$.

Доказательство. Пусть

$$u_j(x) := \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{\sin kx}{k} \right|. \tag{1.3}$$

Тогда ряд (1.2) записывается как $\sum\limits_{j=1}^{\infty} u_j(x)$. В силу хорошо известной оценки

$$u_j(x) \leqslant \frac{\pi}{n_j x}, \qquad x \in (0, \pi], \tag{1.4}$$

легко доказываемой с помощью преобразования Абеля, этот ряд сходится при каждом $x \in [0, \pi]$, если

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j} < \infty.$$

Докажем равномерную по N ограниченность интегралов

$$\int_0^{\pi} \left(\sum_{j=1}^{N} u_j(x) \right)^2 dx = \int_0^{\pi} \sum_{j=1}^{N} u_j(x) \sum_{i=1}^{N} u_i(x)\, dx = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\pi} u_j(x) u_i(x)\, dx.$$

Воспользуемся оценкой

$$u_j(x) \leqslant \frac{C}{n_j} \min\left(\frac{1}{x}, m_j\right), \qquad x \in (0, \pi]. \tag{1.5}$$

Это неравенство вытекает из (1.4) и оценки $u_j(x) \leqslant \frac{C m_j}{n_j}$. Последняя следует из очевидного неравенства

$$u_j(x) \leqslant \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{n_j} \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} 1 = \frac{n_{j+1} - n_j}{n_j},$$

если $m_j = n_{j+1} - n_j$, и из равномерной ограниченности частных сумм ряда $\sum(\sin kx)/k$, если $m_j = n_j$:

$$u_j(x) \leqslant C = C\,\frac{m_j}{n_j}.$$

Разобьем промежуток $[0,\pi]$ на отрезки $[0,\alpha]$ и $[\alpha,\pi]$. Пользуясь оценкой (1.5), находим

$$\int\limits_0^\alpha u_j(x)\,u_i(x)\;dx \leqslant C\int\limits_0^\alpha \frac{m_j}{n_j}\,\frac{m_i}{n_i}\;dx = C\,\frac{m_j m_i}{n_j n_i}\,\alpha$$

и

$$\int\limits_\alpha^\pi u_j(x)\,u_i(x)\;dx \leqslant C\int\limits_\alpha^\pi \frac{1}{n_j x}\,\frac{1}{n_i x}\;dx = \frac{C}{n_j n_i}\int\limits_\alpha^\pi \frac{dx}{x^2} < \frac{C}{n_j n_i}\,\frac{1}{\alpha}.$$

Поэтому, положив

$$\alpha := \frac{1}{\sqrt{m_j m_i}},$$

получаем

$$\int\limits_0^\pi u_j(x)\,u_i(x)\,dx \leqslant C\frac{\sqrt{m_j m_i}}{n_j n_i}.$$

Значит,

$$\int\limits_0^\pi \left(\sum_{j=1}^N u_j(x)\right)^2\;dx \leqslant C\sum_{j=1}^N\sum_{i=1}^N \frac{\sqrt{m_j}}{n_j}\cdot\frac{\sqrt{m_i}}{n_i}. \tag{1.6}$$

В силу сходимости ряда (1.1) выражение в правой части (1.6) ограничено абсолютной постоянной. Поэтому согласно теореме Б. Леви сумма ряда (1.2) принадлежит $L^2[0,\pi]$.

Теорема доказана.

2. Лемма

При изучении произвольных функций ограниченной вариации воспользуемся следующим утверждением о свертках.

Лемма. *Пусть неотрицательные 2π-периодические четные функции $U(x)$ и $V(x)$ убывают на $[0,\pi]$. Тогда функция*

$$W(t) := \int\limits_{-\pi}^{\pi} U(x)\,V(x-t)\;dx$$

наибольшее значение принимает при $t=0$.

Доказательство. В силу четности и 2π-периодичности функций $U(x)$ и $V(x)$ имеем

$$W(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} U(-x)\,V(-x+t)\;dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} U(x)\,V(x+t)\;dx.$$

Таким образом, функция $W(t)$ четна и, не ограничивая общности, далее будем считать, что t — фиксированное число из $(0,\pi]$.

Пусть n — натуральное число. Рассмотрим бесконечную в обе стороны последовательность чисел $X := \{x_k\}$, где $x_k := kt/n,\ k\in\mathbb{Z}$. Имеем $x_{-k} = -x_k,\ t = x_n$ и для всех k числа $x_k - t$ входят в последовательность X. Если $K := [n\pi/t]$, то x_{-K} и x_K являются соответственно самой левой и самой правой точками последовательности X, содержащимися в отрезке $[-\pi,\pi]$.

Построим сумму

$$S(X) := \sum_{k=-K}^{K} U(x_k)V(x_k - t)\frac{t}{n}. \tag{2.1}$$

Для каждой точки x_k, $|k| \leqslant K$, построим отрезок длины t/n с серединой в точке x_k. Длина объединения всех этих отрезков может отличаться от 2π (длины отрезка $[-\pi, \pi]$) не более, чем на t/n.

Поэтому $S(X)$ с точностью до величины, не превосходящей $U(0)V(0)\,t/n$, представляет собой интегральную сумму Римана для интеграла

$$\int_{-\pi}^{\pi} U(x)\,V(x-t)\;dx. \tag{2.2}$$

С точностью до такой же величины сумма

$$S_0(X) := \sum_{k=-K}^{K} U(x_k)V(x_k)\frac{t}{n} \tag{2.3}$$

представляет собой интегральную сумму Римана для интеграла

$$\int_{-\pi}^{\pi} U(x)\,V(x)\;dx. \tag{2.4}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и будем рассматривать настолько большие n, что суммы (2.1) отличаются от интеграла (2.2), а суммы (2.3) отличаются от интеграла (2.4) не более, чем на ε.

Запишем числа $U(x_k)$, $|k| \leqslant K$, в порядке убывания:

$$U(x_0),\ U(x_1),\ U(x_{-1}),\ U(x_2),\ U(x_{-2}), \ldots, U(x_K),\ U(x_{-K}).$$

Возьмем теперь последовательность величин $V(x_k - t)$, входящих в сумму (2.1), и запишем члены этой последовательности в порядке убывания.

Сначала будут идти числа

$$V(x_n - t),\ V(x_{n+1} - t),\ V(x_{n-1} - t),\ V(x_{n+2} - t),\ V(x_{n-2} - t), \ldots, V(x_K - t),\ V(x_{2n-K} - t). \tag{2.5}$$

Все эти числа являются значениями функции $V(x-t)$, когда $x \in [2t - \pi, \pi]$. Заметим, что в этом случае точки x_{n-i} и x_{n+i} и в частности точки x_K и x_{2n-K} симметричны относительно точки t.

Последовательность (2.5) должна быть продолжена значениями функции $V(x-t)$ в точках x_k, принадлежащих промежутку $[-\pi, 2t-\pi)$. Отметим, что в точках из $[-\pi, 2t-\pi)$, симметричных относительно $t - \pi$, функция $V(x-t)$ принимает одинаковые значения.

Точки x_{-K} и x_{2n-K-1} являются соответственно самой левой и самой правой точками из X, принадлежащими $[-\pi, 2t-\pi)$. Если двигаться от точек x_{-K} и x_{2n-K-1} соответственно направо и налево, то следующими точками из X будут соответственно точки x_{-K+1} и x_{2n-K-2}.

Покажем, что значения функции $V(x-t)$ в точках x_{-K+1} и x_{2n-K-2} меньше каждого из чисел $V(x_{-K})$ и $V(x_{2n-K-1})$. В самом деле, $V(x_{-K+1} - t) \leqslant V(x_{-K} - t)$ в силу убывания функции $V(x-t)$ на $[-\pi, t-\pi]$. А оценку $V(x_{-K+1} - t) \leqslant V(x_{2n-K-1} - t)$ можно доказать так. Если x'_{-K} — точка, симметричная x_{-K} относительно $t - \pi$, то

$$x'_{-K} = 2t - 2\pi - x_{-K} = 2t - 2\pi + K\frac{t}{n}$$

и расстояние между точками x'_{-K} и x_{2n-K-1} равно

$$\left|2t - 2\pi + K\frac{t}{n} - (2n - K - 1)\frac{t}{n}\right| = \left|-2\pi + 2K\frac{t}{n} + \frac{t}{n}\right|.$$

Так как

$$\frac{n\pi}{t} - 1 < K \leqslant \frac{n\pi}{t},$$

это расстояние не превышает t/n.

Значит, если точка x'_{-K+1} симметрична x_{-K+1} относительно точки $t-\pi$, то $x'_{-K} - x'_{-K+1} = t/\pi$ и $x'_{-K+1} \leqslant x_{2n-K-1}$, и остается воспользоваться возрастанием функции $V(x-t)$ на $[t-\pi, 2t-\pi]$.

Аналогично устанавливается оценка $V(x_{2n-K-2} - t) \leqslant V(x_{-K} - t)$.

Отсюда следует наше утверждение.

Поэтому, продолжая последовательность (2.5), мы должны сначала записать большее из чисел $V(x_{-K})$ и $V(x_{2n-K-1})$, а затем — меньшее из них.

Точно так же устанавливается, что далее нужно записать большее из чисел $V(x_{-K+1})$ и $V(x_{2n-K-2})$, потом — меньшее из них и т.д.

Воспользуемся теперь следующим известным результатом (см. [5, стр. 184]). Заданы две группы неотрицательных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ и $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$, причем $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \dots \geqslant \alpha_m$, а числа $\beta_1, \dots, \beta_m$ можно переставлять произвольным образом, получая наборы $\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_m^*$. Тогда наибольшее значение суммы

$$\alpha_1\beta_1^* + \alpha_2\beta_2^* + \dots + \alpha_m\beta_m^*$$

достигается, если числа $\beta_1^*, \dots, \beta_m^*$ расположены в порядке убывания: $\beta_1^* \geqslant \beta_2^* \geqslant \dots \geqslant \beta_m^*$.

Поэтому, если в сумме из (2.1) числа $U(x_k)$ оставить на месте, а числа $V(x_k - t)$, $|k| \leqslant K$, заменить на числа из этой последовательности, расположенные в порядке убывания, то значение суммы (2.1) не уменьшится. Таким образом,

$$S(X) \leqslant \frac{t}{n}\bigl(U(x_0)V(x_n - t) + U(x_1)V(x_{n+1} - t) + U(x_{-1})V(x_{n-1} - t) + \dots\bigr). \tag{2.6}$$

При этом в каждом слагаемом полученной суммы значение функции V равно ее значению либо в той же точке, что и у множителя U, либо в точке, отличающейся от точки из множителя U не более, чем на t/n.

Пусть дополнительно функция $V(x)$ непрерывна (в дальнейшем будет показано, как от этого условия можно избавиться); через $\omega(V, \delta)$ обозначим ее модуль непрерывности. Если в каждом слагаемом суммы из правой части (2.6) значение функции V заменить на ее значение в той же точке, в которой взято значение функции U, то в правой части (2.6) получим $S(X)$, а суммарная ошибка от такой замены не превосходит величины

$$\frac{t}{n}\,\omega\left(V, \frac{t}{n}\right),$$

умноженной на число слагаемых, т.е. на $2K+1$. Таким образом, эта суммарная ошибка не превышает $C\omega(t/n)$, и, если n достаточно велико, она меньше ε.

Проведенные рассуждения показывают, что отсюда следует оценка $W(t) - \varepsilon \leqslant W(0) + 2\varepsilon$, а это в силу произвольности ε дает $W(t) \leqslant W(0)$.

Покажем теперь, что использованное нами условие непрерывности функции $V(x)$ не ограничивает общности. В самом деле, если $V(x)$ имеет разрывы, то, задав произвольно $\varepsilon > 0$, мы можем построить четную 2π-периодическую убывающую на $[0, \pi]$ непрерывную функцию $V_0(x)$ такую, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \bigl|V(z) - V_0(z)\bigr|\, dz < \varepsilon.$$

Тогда при каждом t

$$\left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} U(x)V(x-t)\ dx - \int\limits_{-\pi}^{\pi} U(x)V_0(x-t)\ dx \right| < U(0)\,\varepsilon.$$

Поэтому из справедливости леммы для непрерывных функций V вытекает ее справедливость для функций V без условия непрерывности.

Лемма доказана.

Отметим, что лемма и ее доказательство в определенном смысле близки содержанию пунктов 10.13–10.15 монографии [6].

3. Общий случай

Теорема 2. *Пусть $n_1 = 1 < n_2 < n_3 < \ldots$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что сумма ряда* (2.2) *принадлежит $L^2[0,\pi]$. Тогда для каждой 2π-периодической функции $f(x)$ ограниченной вариации с рядом Фурье* (0.1) *сумма ряда* (0.2) *принадлежит $L^2[-\pi,\pi]$.*

Доказательство. Положим

$$u_j^*(x) := \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right|$$

и докажем равномерную по N ограниченность интегралов

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{j=1}^{N} u_j^*(x) \right)^2\ dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=1}^{N} u_j^*(x) \sum_{i=1}^{N} u_i^*(x)\ dx = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{-\pi}^{\pi} u_j^*(x)\, u_i^*(x)\ dx.$$

С помощью интегрирования по частям находим

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos k(t-x)\ dt$$

$$= \frac{1}{\pi} f(t) \frac{\sin k(t-x)}{k} \bigg|_{t=-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin k(t-x)}{k}\, df(t) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin k(t-x)}{k}\, df(t).$$

Поэтому

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} u_j^*(x)\, u_i^*(x)\ dx = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{\sin k(t-x)}{k}\ df(t) \right| \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sum_{l=n_i}^{n_{i+1}-1} \frac{\sin l(z-x)}{l}\ df(z) \right| dx.$$

Пусть $v(t)$ обозначает вариацию функции f на отрезке $[-\pi, t]$, а функции $u_j(x)$ заданы формулой (1.3). Тогда

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} u_j^*(x)\ u_i^*(x)\ dx \leqslant \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} u_j(t-x)\ dv(t) \right) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} u_i(z-x)\ dv(z) \right) dx$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} u_j(t-x)\, u_i(z-x)\, dx \right) dv(t)\, dv(z).$$

Благодаря периодичности функций u_j имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} u_j(t-x)\, u_i(z-x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} u_j(x)\, u_i(x+z-t)\, dx,$$

а согласно лемме наибольшее значение этого интеграла равно

$$\int_{-\pi}^{\pi} u_j(x)\, u_i(x)\, dx.$$

Значит,

$$\int_{-\pi}^{\pi} u_j^*(x)\, u_i^*(x)\, dx \leqslant \frac{v^2(\pi)}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} u_j(x)\, u_i(x)\, dx,$$

и, таким образом,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{j=1}^{N} u_j^*(x) \right)^2 dx \leqslant \frac{v^2(\pi)}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{j=1}^{N} u_j(x) \right)^2 dx.$$

В силу интегрируемости с квадратом функции (1.2) выражения в правой части полученного неравенства ограничены равномерно относительно N. Следовательно, равномерно ограничены и интегралы из левой части. Отсюда согласно теореме Б. Леви вытекает принадлежность суммы ряда (0.2) пространству $L^2[-\pi,\pi]$.

Теорема доказана.

Выясним на примерах, при какой скорости роста чисел n_j могут сходиться ряды (0.3) и (1.1). Легко убедиться, что если $n_j = [j^\alpha],\ \alpha > 1$, то $m_j \leqslant \alpha(j+1)^{\alpha-1} + 1$ и, таким образом, оба ряда (0.3) и (1.1) сходятся.

Пусть теперь $n_j = j + [j \log^\alpha j],\ \alpha > 1$. Тогда числа n_j строго возрастают и при $j \to \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$m_j \approx \log^\alpha j.$$

Поэтому ряд (0.3) сходится, а ряд (1.1) сходится при $\alpha > 2$ и расходится при $\alpha = 2$.

Наконец, если $n_j = j + [j \log j \cdot \log^\alpha \log(j+2)]$, то

$$m_j \approx \log j \cdot \log^\alpha \log j, \qquad j \to \infty.$$

Значит, в этом случае ряд (0.3) сходится при $\alpha > 2$ и расходится, если $\alpha = 2$.

Поступила 29.06.05

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Теляковский С.А.** О частных суммах рядов Фурье функций ограниченной вариации // Тр. МИАН. 1997. Т. 219. С. 378–386.
2. **Теляковский С.А.** О равномерной сходимости рядов Фурье функций ограниченной вариации // Тр. МИАН. 2001. Т. 232. С. 318–326.
3. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды. Т. I. М.: "Мир". 1965.
4. **Telyakovskii S.A.** Some properties of Fourier series of functions with bounded variation // East J. Approx. 2004. Vol. 10. №1–2, P. 215–218.
5. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир. 1965.
6. **Харди Г.Г., Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г.** Неравенства. М.:ИЛ. 1948.

Том 11 № 2 2005

УДК 517.5

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ПО ВОЗРАСТАЮЩЕМУ ЧИСЛУ ПЕРЕМЕННЫХ[1]

Н. Н. Холщевникова

Для рядов по системе Йессена доказан аналог теоремы Кантора о единственности тригонометрического ряда.

Системой Йессена называется система функций бесконечного числа переменных $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $x_n \in \mathbb{R}$:

$$\prod_{r=1}^{p} e^{2\pi i n_r x_r} = \theta_{n_1,\ldots,n_p}(x), \quad p \in \mathbb{N},\ n_r \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Функции системы можно считать определенными на бесконечномерном торе $\mathbb{T}^\infty$, рассматриваемом как декартово произведение счетного числа одномерных торов $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{T}^\infty = \{x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) : 0 \leqslant x_n < 1,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Тор $\mathbb{T}^\infty$ рассматривается в тихоновской топологии. На $\mathbb{T}^\infty$ естественным образом определяется мера Лебега как на пространстве-произведении пространств $\mathbb{T}$ с одномерной мерой Лебега m_1, $m_1(\mathbb{T}) = 1$. Систематическое исследование системы (1) проведено Йессеном [1] в 1934г. Система Йессена является полной ортонормированной системой на $\mathbb{T}^\infty$. Всякой интегрируемой на $\mathbb{T}^\infty$ функции ставится в соответствие ее ряд Фурье вида

$$\sum c_{n_1,\ldots,n_p} e^{2\pi i(n_1 x_1 + \ldots + n_p x_p)},$$

где суммирование ведется и по n и по p (с ростом p добавляются только новые гармоники).

Ранее общие тригонометрические ряды вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{2\pi i x_k} \tag{2}$$

рассматривал Штейнгауз. Переводя на язык теории функций вероятностный результат Колмогорова, Штейнгауз получил его модификацию: ряд (2) почти всюду сходится (расходится), если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$ $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \infty\right)$.

Обозначим через $\mathbb{Z}^{<\infty}$ множество бесконечномерных векторов $n = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ с целочисленными координатами $n_k \in \mathbb{Z}$ $(k \in \mathbb{N})$, лишь конечное число которых отлично от нуля. Операция сложения векторов и операция умножения вектора на число выполняются в $\mathbb{Z}^{<\infty}$ покоординатно.

Будем рассматривать тригонометрические ряды по возрастающему числу переменных, т.е. по системе Йессена, и обозначать их

$$\sum_{n} a_n e^{2\pi i n x}, \tag{3}$$

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №05-01-00206.

где

$$n \in \mathbb{Z}^{<\infty}, \qquad x \in \mathbb{T}^{\infty}, \qquad nx = \sum_{k=1}^{\infty} n_k x_k, \qquad a_n \in \mathbb{C}, \quad a_{-n} = \overline{a_n}.$$

Если для $n \in \mathbb{Z}^{<\infty}$ координаты n_k равны нулю для $k > p$, то для коэффициента a_n будем пользоваться также обозначением

$$a_n = a_{n_1,\ldots,n_p}.$$

Хотя при этом каждый из коэффициентов a_n ряда (3) получает бесконечное число обозначений, по каждому из них n и a_n однозначно определяются.

Определим поточечную сходимость по прямоугольникам ряда (3). Обозначим соответствующие частичные суммы через

$$S_{p,N_1,\ldots,N_p}(x) = \sum_{n_1=-N_1}^{N_1} \cdots \sum_{n_p=-N_p}^{N_p} a_{n_1,\ldots,n_p} e^{2\pi i n_1 x_1} \ldots e^{2\pi i n_p x_p}$$

$$= \sum_{n_1=-N_1}^{N_1} a_{n_1} e^{2\pi i n_1 x_1} + \sum_{n_1=-N_1}^{N_1} \sum_{n_2=-N_2, n_2\neq 0}^{N_2} a_{n_1,n_2} e^{2\pi i n_1 x_1} e^{2\pi i n_2 x_2} + \ldots$$

$$+ \sum_{n_1=-N_1}^{N_1} \sum_{n_2=-N_2}^{N_2} \cdots \sum_{n_p=-N_p, n_p\neq 0}^{N_p} a_{n_1,\ldots,n_p} e^{2\pi i n_1 x_1} \ldots e^{2\pi i n_p x_p}$$

$$= \sum_{n_2,\ldots,n_p, |n_j|\leqslant N_j (j=2,\ldots,p)} \left(\sum_{n_1=-N_1}^{N_1} a_{n_1,n_2,\ldots,n_p} e^{2\pi i n_1 x_1} \right) e^{2\pi i \sum\limits_{j=2}^{p} n_j x_j}.$$

Скажем, что ряд (3) сходится (по прямоугольникам) в точке $x \in \mathbb{T}^{\infty}$ к числу s, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер P такой, что для всякого $p \geqslant P$ найдется такое натуральное N, что для всех $N_1, \ldots, N_p \geqslant N$ выполняется неравенство

$$|S_{p,N_1,\ldots,N_p}(x) - s| < \varepsilon,$$

и будем обозначать этот предел

$$\lim_{p\to\infty, \min(N_1,\ldots,N_p)\to\infty} S_{p,N_1,\ldots,N_p}(x) = s.$$

Для рядов (3) мы докажем аналог теоремы Кантора о единственности тригонометрического ряда. Обратимся сначала к одномерным тригонометрическим рядам:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}, \quad a_n \in \mathbb{C}, \quad a_{-n} = \overline{a_n} \quad \text{с частичными суммами } S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}.$$

Одним из основных результатов о единственности представления функции тригонометрическим рядом является

Теорема A (Валле Пуссен, см., например, [2, гл. XIV, §4].) *Если тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, имеет пределы неопределенности* $\overline{\lim}\, S_n(x)$ *и* $\underline{\lim}\, S_n(x)$ *конечными всюду, кроме, быть может, некоторого счетного множества* E, *и обе функции суммируемы на* $[-\pi, \pi]$, *то этот тригонометрический ряд суммируется методом Римана почти всюду и является рядом Фурье от своей римановской суммы.*

Из доказательства этой теоремы следует, что справедлива

Теорема B. *Если для частичных сумм тригонометрического ряда выполняются неравенства*

$$-C \leqslant \underline{\lim}\, S_n(x) \leqslant \overline{\lim}\, S_n(x) \leqslant C \quad \text{для всех } x,$$

где C — положительная постоянная, то этот ряд есть ряд Фурье некоторой интегрируемой функции (своей римановской суммы).

В формулировке теоремы B нет априорного требования сходимости к нулю коэффициентов ряда. В доказательстве теоремы Валле-Пуссена это требование обеспечивало гладкость функции Римана

$$F(x) = \frac{a_0 x^2}{2} - \sum_{n \neq 0} \frac{a_n e^{inx}}{n^2} + Ax + B,$$

полученной формальным двукратным почленным интегрированием исходного тригонометрического ряда, в точках исключительного множества E. Так как в нашем случае E пусто, то для доказательства достаточно, чтобы $F(x)$ была непрерывна. Непрерывность же $F(x)$ вытекает из ограниченности коэффициентов нашего ряда вследствие неравенств для частичных сумм.

Отметим также, что теорема B является следствием теоремы об M^2-интегрируемости римановской суммы тригонометрического ряда с ограниченными в каждой точке частичными суммами ([3, гл. XI, §7]).

Для дальнейшего нам понадобится следующая

Лемма. *Пусть*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}, \qquad a_n \in \mathbb{C}, \quad a_{-n} = \overline{a}_n \ (n \in \mathbb{Z}) \tag{4}$$

— тригонометрический ряд, причем

$$|a_0| \geqslant 1. \tag{5}$$

Тогда найдутся точка $x_0 \in \mathbb{T}$ и строго возрастающая последовательность номеров $\{N_k\}$ такие, что для частичных сумм ряда (4) *выполняются неравенства*

$$|S_{N_k}(x_0)| \geqslant 1.$$

Доказательство. Допустим, что это не так. Тогда всюду

$$-1 \leqslant \varliminf_{n\to\infty} S_n(x) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} S_n(x) \leqslant 1. \tag{6}$$

Отсюда по теореме B следует, что ряд (4) есть ряд Фурье некоторой функции $f(x)$ (римановской суммы ряда (4)). По теореме Фейера–Лебега [2, гл. I, §49], ряд Фурье суммируется почти всюду методом Фейера к $f(x)$. Отсюда и из (6) следует, что $|f(x)| \leqslant 1$ почти всюду. С другой стороны,

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(x)dx\right| = |a_0| \geqslant 1.$$

Это возможно лишь если $f(x) = 1$ почти всюду или $f(x) = -1$ почти всюду. Тогда ряд (4) состоит из одного ненулевого члена $a_0 = 1$ или $a_0 = -1$, и $S_N(x) = 1$ или $S_N(x) = -1$, соответственно, для любых N и x, что противоречит допущению. Лемма доказана.

Теорема. *Если ряд* (3) *сходится по прямоугольникам к нулю всюду на $\mathbb{T}^\infty$, то все его коэффициенты равны нулю.*

Доказательство. Допустим, что некоторый коэффициент $a_{n_1\ldots n_p}$ ряда (3) отличен от нуля. Умножая ряд (3) на произведение соответствующих синусов и косинусов, получим тригонометрический ряд вида (3), со свободным членом не равным нулю. Можно показать, что он также всюду сходится к нулю. Не ограничивая общности (если нужно, умножая ряд на $\frac{1}{a_0}$) можем считать, что $a_0 = 1$. Тогда в силу леммы найдутся число x_1^0 и возрастающая последовательность номеров $\{N_1^K\}$ такие, что

$$\left|\sum_{n_1=-N_1^K}^{N_1^K} a_{n_1} e^{2\pi i n_1 x_1^0}\right| \geqslant 1. \tag{7}$$

Из сходимости ряда (3) всюду на $\mathbb{T}^\infty$ к нулю следует, в частности, что для всякого $x = (x_1^0, x_2, \ldots)$ существует номер P такой, что для всякого $p \geqslant P$ найдется такое натуральное N, что для всех номеров $N_i \geqslant N$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$

$$|S_{p,N_1,\ldots,N_p}(x)| < \frac{1}{2}. \tag{8}$$

Положим (при $p \geqslant 2$)

$$A_{pN} = \{x = (x_1^0, x_2, \ldots) : |S_{p,N_1,\ldots,N_p}(x)| < \frac{1}{2} \text{ при } N_i \geqslant N \ (i = 1, \ldots, p)\}. \tag{9}$$

Обозначим

$$\mathbb{T}_1^\infty = \{x \in \mathbb{T}^\infty : x_1 = x_1^0\}.$$

Это тоже бесконечномерный тор, меру Лебега на котором обозначим через μ_1. Тогда $\mu_1(\mathbb{T}_1^\infty) = 1$. Из (8) и (9) следует, что

$$\bigcup_{P=1}^\infty \bigcap_{p=P}^\infty \bigcup_{N=1}^\infty A_{pN} = \mathbb{T}_1^\infty.$$

Тогда найдется такое натуральное число r, что

$$\mu_1(\bigcap_{p=P}^\infty \bigcup_{N=1}^\infty A_{pN}) > 0 \quad \text{при } P \geqslant r. \tag{10}$$

Зафиксируем $q \geqslant \max(r, 2)$. Из (10) следует, что найдется номер M такой, что $\mu_1(A_{qM}) > 0$, и в силу (9)

$$|S_{q,N_1,\ldots,N_q}(x)| < \frac{1}{2} \quad \text{при } N_i \geqslant M \ (i = 1, \ldots, q) \tag{11}$$

для всех $x = (x_1^0, x_2, \ldots) \in A_{qM}$.

Отсюда и из вида частичных сумм следует, что множество A_{qM} представимо в виде

$$A_{qM} = B_1 \times \mathbb{T}_q^\infty, \text{где } B_1 \subset \mathbb{T}^{q-1},$$

и $T^{q-1} = \{x = (x_1^0, x_2, \ldots, x_q) : 0 \leqslant x_k < 1 \ (k = 2, \ldots, q)\}$ — $(q-1)$-мерный тор, меру Лебега на котором обозначим через m_{q-1}, а $\mathbb{T}_q^\infty = \{x = (x_{q+1}, x_{q+2}, \ldots) : 0 \leqslant x_k < 1 \ (k = q+1, q+2, \ldots)\}$ — бесконечномерный тор, и при этом $\mu_1(A_{qM}) = m_{q-1}(B_1)$.

Так как для $x = (x_1, \ldots, x_q, x_{q+1}, \ldots) \in \mathbb{T}^\infty$ частичная сумма $S_{q,N_1,\ldots,N_q}(x)$ зависит только от первых q координат вектора x, то, чтобы не усложнять обозначения, эту сумму для $x = (x_1, \ldots, x_q)$ будем обозначать также через $S_{q,N_1,\ldots,N_q}(x)$.

Выберем далее натуральное $Q \geqslant M$ и положим $N_2 = \ldots = N_q = Q$. Тогда для $N_1 \geqslant M$

$$|S_{q,N_1,Q,\ldots,Q}(x)| < \frac{1}{2} \quad \text{для } x \in B_1.$$

Если $N_1 < M$, то для любых q

$$|S_{q,N_1,Q,\ldots,Q}(x)| \leqslant (2Q+1)^q \sup_{|n_i| \leqslant Q \, (i=1,\ldots,q)} |a_{n_1,\ldots,n_q}|.$$

Отсюда следует, что

$$|S_{q,N_1,Q,\ldots,Q}(x)| \leqslant C(q, Q) \quad \text{для всех } N_1 \text{ и } x \in B_1. \tag{12}$$

Пространство полиномов $p(x)$ $(x \in \mathbb{T}^{q-1})$ от функций $e^{2\pi i(n_2x_2+\cdots+n_qx_q)}$ $(|n_j| \leqslant Q,\ j = 2, \ldots, q)$ конечномерно; так как $m_{q-1}(B_1) > 0$, то величина $\sup_{x\in B_1} |p(x)|$ является нормой. Поскольку в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, из (12) следует, что и нормы

$$\sup_{n_2,\ldots,n_q,|n_j|\leqslant Q\,(j=2,\ldots,q)} \left| \sum_{n_1=-N_1}^{N_1} a_{n_1,\ldots,n_q} e^{2\pi i n_1 x_1^0} \right|$$

полиномов $S_{q,N_1,Q,\ldots,Q}(x)$ ограничены в совокупности, т.е.

$$\left| \sum_{n_1=-N_1}^{N_1} a_{n_1,\ldots,n_q} e^{2\pi i n_1 x_1^0} \right| \leqslant C_1(q,Q) \quad \text{для всех } N_1 \text{ и для } |n_j| \leqslant Q\ (j = 2, \ldots, q).$$

Так как q и Q могут быть сколь угодно большими, то

$$\left| \sum_{n_1=-N_1}^{N_1} a_{n_1,\ldots,n_p} e^{2\pi i n_1 x_1^0} \right| \leqslant C(n_2,\ldots,n_p) \quad \text{для всех } N_1 \text{ и любых } n_2,\ldots,n_p. \tag{13}$$

Тогда можно выбрать подпоследовательность $\{M_1^l\}$ последовательности $\{N_1^k\}$ (см.(7)) такую, что будут существовать конечные пределы

$$\lim_{l\to\infty} \sum_{n_1=-M_1^l}^{M_1^l} a_{n_1,n_2,\ldots,n_p} e^{2\pi i n_1 x_1^0} = \alpha^1_{n_2,\ldots,n_p} \tag{14}$$

для произвольных $n_2, \ldots, n_p$.

Согласно с обозначениями для коэффициентов a_n имеем

$$\alpha^1_{n_2,\ldots,n_p,0,\ldots,0} = \alpha^1_{n_2,\ldots,n_p},$$

в частности, $\alpha^1_{0,\ldots,0} = \alpha^1_0$. В силу (7) имеем $|\alpha^1_0| \geqslant 1$. Для ряда

$$\sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \alpha^1_{n_2} e^{2\pi i n_2 x_2}$$

в силу леммы найдется число x_2^0 и возрастающая последовательность номеров $\{N_2^k\}$ такие, что

$$\left| \sum_{n_2=-N_2^k}^{N_2^k} \alpha^1_{n_2} e^{2\pi i n_2 x_2^0} \right| \geqslant 1\ (k = 1,2,3,\ldots). \tag{15}$$

Далее, рассуждая аналогично тому, как при получении формул (8)–(11), только фиксируя уже и первую и вторую координату $x : x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0$, придем к неравенству

$$|S_{\nu,N_1,N_2,\ldots N_\nu}(x)| < \frac{1}{2} \quad \text{при } N_j \geqslant K\ (j = 1,\ldots,\nu)$$

для всех достаточно больших $\nu \geqslant 3$, $K = K(\nu) > 0$, и для x из соответствующих множеств $E_{\nu K} \subset \mathbb{T}_2^\infty$ с $\mu_2 E_{\nu K} > 0$ (множества $E_{\nu K}$ определяются подобно множествам A_{qM}, рассмотренным выше).Отсюда ввиду (14) получим

$$\left| \sum_{n_\nu=-N_\nu}^{N_\nu} \cdots \sum_{n_2=-N_2}^{N_2} \alpha^1_{n_2,\ldots,n_\nu} e^{2\pi i n_2 x_2^0} \ldots e^{2\pi i n_\nu x_\nu} \right| \leqslant \frac{1}{2}$$

при $N_j \geqslant K$ $(j = 2, \ldots, \nu)$ для $x \in E_{\nu K}$.

Далее, так же, как это было сделано в (13), доказываем, что

$$\left| \sum_{n_2=-N_2}^{N_2} \alpha^1_{n_2,\ldots,n_p} e^{2\pi i n_2 x_2^0} \right| \leqslant C_2(n_3, \ldots, n_p) \quad \text{для всех } N_2 \text{ и произвольных } n_3, \ldots, n_p.$$

Затем выбираем такую подпоследовательность $\{M_2^l\}$ последовательности $\{N_2^k\}$ (см.(15)), что существуют конечные пределы

$$\lim_{l\to\infty} \sum_{n_2=-M_2^l}^{M_2^l} \alpha^1_{n_2,\ldots,n_p} e^{2\pi i n_2 x_2^0} =: \alpha^2_{n_3,\ldots,n_p}$$

для произвольных $n_3, \ldots, n_p$.

При этом в силу (15) $|\alpha^2_0| \geqslant 1$.

Продолжая аналогичным образом построение, определим $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0, \ldots) \in \mathbb{T}^\infty$ так, что для всякого натурального p найдется последовательность номеров $\{M_p^l\}$ такая, что пределы

$$\lim_{l\to\infty} \sum_{n_p=-M_p^l}^{M_p^l} \alpha^{p-1}_{n_p,n_{p+1},\ldots,n_m} e^{2\pi i n_p x_p^0} =: \alpha^p_{n_{p+1},\ldots,n_m}$$

конечны для произвольных $n_{p+1}, \ldots, n_m$, причем

$$|\alpha^p_0| \geqslant 1. \tag{16}$$

Так как в точке x^0 ряд (3) сходится к нулю, то найдется $P > 0$ такое, что для всякого $p \geqslant P$ найдется такое $N > 0$, что для $N_i \geqslant N$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$

$$|S_{p,N_1,\ldots,N_p}(x^0)| < \frac{1}{2}. \tag{17}$$

Фиксируем $p \geqslant P$ и соответствующее ему N. Переходя к пределу в (17) по $N_1 = M_1^l \to \infty$ при $l \to \infty$ получим

$$\left| \sum_{n_p=-N_p}^{N_p} \cdots \sum_{n_2=-N_2}^{N_2} \alpha^1_{n_2,\ldots,n_p} e^{2\pi i n_2 x_2^0} \ldots e^{2\pi i n_p x_p^0} \right| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Затем, переходя в последнем неравенстве к пределу по $N_2 = M_2^l \to \infty$, и так далее, до $N_p = M_p^l \to \infty$, получим $|\alpha^p_0| \leqslant \frac{1}{2}$, что противоречит (16).

Полученное противоречие доказывает, что все коэффициенты ряда (3) равны нулю. Теорема доказана.

Для кратных тригонометрических рядов в случае сходимости по прямоугольникам теорему единственности (о том, что из сходимости к нулю всюду следует, что коэффициенты ряда равны 0) для размерности $d = 2$ доказали в 1972 г. Эш и Велланд [4], а для размерности $d \geqslant 3$ — Тетунашвили [5] в 1990 г. Центральная идея доказательства Тетунашвили состоит в том, что из сходимости кратного тригонометрического ряда по прямоугольникам всюду следует сходимость повторных рядов. Эш и Вонг в [6] упростили доказательство Тетунашвили, а совсем другое, полученное независимо, доказательство этой теоремы единственности дано в [7]. В настоящей работе реализуется подход Тетунашвили.

Поступила 03.01.05

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Jessen B.** The theory of integration in a space of infinite number of dimensions // Acta math. 1934. Vol. 63. P.249–323.
2. **Бари Н.К.** Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
3. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.
4. **Ash J.M., Welland G.V.** Convergence, uniqueness, and summability of multiple trigonometric series // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 163. P. 401–436.
5. **Тетунашвили Ш.Т.** О некоторых кратных функциональных рядах и решение проблемы единственности кратных тригонометрических рядов для сходимости по Прингсхейму // Мат. сб. 1991. Т. 182, № 8. С. 1158–1176.
6. **Ash J.M., Wang G.** A survey of uniqueness questions in multiple trigonometric series // Contemporary Math. 1997. Vol. 208. P. 35–71.
7. **Ash J.M., Freiling C., Rinee D.** Uniqueness of rectangularly convergent trigonometric series // Ann. of Math. 1993. Vol. 137. P. 145–166.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 11 № 2 2005

УДК 519.00000

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ГЛАДКИХ И СГЛАЖИВАНИЕ РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

И. Г. Царьков

Решается задача о представлении гладкой функции в виде суммы финитных функций той же гладкости, носители которых имеют сколь угодно малый размер, а также задача равномерного приближения равномерно непрерывных (гладких) отображений отображениями, имеющими по возможности наибольшую локальную и равномерную гладкость.

1. Введение

В работе решаются две задачи:

(a) о представлении гладкой функции в виде суммы финитных функций той же гладкости, носители которых имеют сколь угодно малый размер (см. теорему 1), и

(b) о равномерном приближении равномерно непрерывных (гладких) отображений отображениями, имеющими по возможности наибольшую локальную и равномерную гладкость (см. теоремы 2 и 3).

Одной из первых аппроксимативных теорем в бесконечномерных пространствах в случае равномерной аппроксимации была известная теорема Бонича и Фремптона (см. [1]), которая устанавливает тесную связь между гладкостью банахова пространства X и аппроксимативными свойствами гладких функций на X. Под гладкостью пространства X они понимали такое наибольшее число r (может быть, ∞), для которого существует ненулевая финитная функция класса $C^r(X,\mathbb{R})$. Если X сепарабельно и имеет гладкость r, то, как они доказали, для любых $\varepsilon > 0$, банахова пространства Y, открытого множества $U \subset X$ и отображения $f \in C(U,Y)$ существует сглаживающее отображение $g \in C^r(U,Y)$ такое, что $\|f-g\| < \varepsilon$. Имеются варианты этой теоремы и для аналитических функций (см. [2]). Отметим, что сглаживающие отображения в [1] не являются равномерно гладкими. Валентайном [3] получена теорема о возможности продолжения липшицева отображения с сохранением константы Липшица с произвольного подмножества гильбертова пространства на все это пространство. Отсюда легко выводится, что всякое равномерно непрерывное со значениями в гильбертовом пространстве отображение, заданное на произвольном подмножестве гильбертова пространства, можно равномерно приблизить равномерно липшицевым отображением. Сглаживанием равномерно непрерывных действительных функций, заданных на шарах в гильбертовых пространствах и пространствах L_p, многочленами и некоторыми классами равномерно гладких функций занимались также А.С. Немировский и С.М. Семенов [4–7]. В работах автора [8, 9] изучались задачи равномерного приближения равномерно непрерывного отображения в пространствах L_p функциями, имеющими максимально возможную локальную и равномерную гладкость. В этой работе продолжается развитие этих исследований в более общих пространствах. В частности, равномерно гладкое отображение сглаживается до максимально возможной локальной гладкости (до гладкости пространства прообразов) с сохранением его равномерной гладкости.

2. Локализация гладких отображений

В дальнейшем через $\lfloor\alpha\rfloor$ обозначается наибольшее целое число, строго меньшее вещественного числа $\alpha > 0$.

О п р е д е л е н и е 1. Будем писать, что отображение $f : M \to Y$, где X, Y — банаховы пространства, $M \subset X$, принадлежит классу $H^\alpha(M) = H^\alpha(M, Y)$ $(\alpha > 0)$, если $f \in D^{\lfloor\alpha\rfloor}(M)$, где $f^{\lfloor\alpha\rfloor}$ принадлежит классу Гёльдера порядка $\alpha - \lfloor\alpha\rfloor$ на любом ограниченном подмножестве множества M. При этом под классом $H^\infty(M) = H^\infty(M, Y)$ будем подразумевать класс всех бесконечно дифференцируемых отображений $f : M \to Y$, производные которых ограничены на любом ограниченном подмножестве множества M. Будем говорить, что $f \in H^\alpha(M, Y)$ суть *отображения гладкости* α (на множестве M). Здесь, как обычно, $f^{(0)} \overset{\text{def}}{=} f$, а класс $D^{\lfloor\alpha\rfloor}(M)$ — множество всех отображений из M в Y, имеющих в каждой точке $x \in M$ все производные до порядка $\lfloor\alpha\rfloor$ включительно.

О п р е д е л е н и е 2. Через $(\mathcal{H}^\alpha)$ обозначим класс всех действительных банаховых пространств с нормами, принадлежащими классу $H^\alpha(X \setminus B, \mathbb{R})$, где $B = \{x \in X \mid \|x\| \leqslant 1\}$ — единичный шар в этом пространстве. Такие пространства будем называть *α-гладкими.*

Для произвольных множества $M \subset X$ и точки $x \in X$ через $\varrho(x, M)$ обозначим величину $\inf\{\|x - y\| \mid y \in M\}$. Через $O_\varepsilon(M)$ обозначим ε-окрестность множества M $(\varepsilon > 0)$, т.е. множество $\{x \in X \mid \varrho(x, M) < \varepsilon\}$. Если в пространстве X есть базис Шаудера $E = \{e_i\}_{i\in\mathcal{B}}$, то для любой координатной плоскости

$$L = L(\mathcal{A}) = \{\sum \alpha_i e_i \mid \alpha_j = 0 \ \forall j \in \mathcal{A}\},$$

определяемой подмножеством $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, будем рассматривать координатный проектор

$$P_L(x) = \sum_{i\notin\mathcal{A}} \alpha_i e_i, \qquad x = \sum_i \alpha_i e_i,$$

на эту плоскость. В случае когда множество индексов $\mathcal{B} = \mathbb{N}$, через $C_0 = C_0(E)$ обозначим

$$\sup\{\|P_L\| \mid P_L : X \to L = L(\mathcal{A}),\ \mathcal{A} = \overline{1, n},\ n \in \mathbb{N}\}.$$

В случае же, когда $E = \{e_i\}_{i\in\mathcal{B}}$ — безусловный базис Шаудера, через $C = C(E)$ обозначим

$$\sup\{\|P_L\| \mid P_L : X \to L = L(\mathcal{A})\},$$

где верхняя грань берется по всем подмножествам $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

Отметим, что $C(E) \geqslant C_0(E) \geqslant 1$ и для всех $x \in X$, множеств индексов $\mathcal{A}$ и плоскостей $L = L(\mathcal{A})$ верны неравенства:

$$\varrho(x, L) \leqslant \|P_L(x)\| \leqslant C\varrho(x, L)$$

$$(\|P_L(x)\| \leqslant C_0\varrho(x, L), \quad \text{если} \quad \mathcal{A} = \overline{1, n}).$$

Лемма 1. *Пусть $X \in (\mathcal{H}^\alpha)$ $(\alpha \geqslant 1)$, $E = \{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — счетный базис Шаудера в X, $C_0 = C_0(E) < \infty$, $\delta > 0$ и пусть L_n — координатная плоскость, натянутая на векторы $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Тогда существует последовательность функций $\{\varrho_{L_n} : X \to \mathbb{R}\}$ такая, что для всех $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ и $x \in X$*

$$\varrho_{L_n} \in H^\alpha(X \setminus O_\varepsilon(L_n), \mathbb{R}), \qquad \{\varrho_{L_n}(x)\} \downarrow_n$$

и выполняются неравенства

$$\varrho(x, L_n) \leqslant \varrho_{L_n}(x) \leqslant C_0\varrho(x, L_n) + \frac{\delta}{2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим действительную функцию на $\mathbb{R}^n$:

$$s_n(t) = s_n(t_1,\dots,t_n) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{t_1,\dots,t_n\} \qquad (t=(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n).$$

Рассмотрим координатные проекторы $Q_k = \mathrm{Id} - P_{L_k}$ на плоскость L^k, натянутую на векторы $\{e_i\}_{i>k}$. Существует функция $b_n \in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ (см. [1]) такая, что

$$|b_n(t) - s_n(t)| \leqslant \frac{\delta}{4^{n+1}} \quad \forall t\in\mathbb{R}^n.$$

Тогда

$$s_n(t) \leqslant b_n(t) + \frac{\delta}{4^{n+1}}, \qquad b_n(t) \leqslant s_n(t) + \frac{\delta}{4^{n+1}} \quad \forall t\in\mathbb{R}^n.$$

Положим

$$\varrho_{L_n}(x) \stackrel{\text{def}}{=} b_n(\|Q_1(x)\|,\dots,\|Q_n(x)\|) + \frac{\delta}{4^n}.$$

Справедливы неравенства:

$$\varrho(x,L_n) = \min\{\varrho(x,L_1),\dots,\varrho(x,L_n)\} \leqslant \min\{\|Q_1(x)\|,\dots,\|Q_n(x)\|\}$$

$$\leqslant \varrho_{L_n}(x) \leqslant \min\{\|Q_1(x)\|,\dots,\|Q_n(x)\|\} + \frac{2\delta}{4^n}$$

$$\leqslant \min\{C_0\varrho(x,L_1),\dots,C_0\varrho(x,L_n)\} + \frac{2\delta}{4^n} \leqslant C_0\varrho(x,L_n) + \frac{2\delta}{4^n}.$$

Кроме того, для всех $n\in\mathbb{N}$

$$\varrho_{L_{n+1}}(x) = b_{n+1}(\|Q_1(x)\|,\dots,\|Q_{n+1}(x)\|) + \frac{\delta}{4^{n+1}}$$

$$\leqslant \min\{\|Q_1(x)\|,\dots,\|Q_{n+1}(x)\|\} + \frac{\delta}{4^{n+2}} + \frac{\delta}{4^{n+1}}$$

$$\leqslant \min\{\|Q_1(x)\|,\dots,\|Q_n(x)\|\} + \frac{\delta}{4^{n+2}} + \frac{\delta}{4^{n+1}}$$

$$\leqslant b_n(\|Q_1(x)\|,\dots,\|Q_n(x)\|) + \frac{\delta}{4^{n+1}} + \frac{\delta}{4^{n+2}} + \frac{\delta}{4^{n+1}} \leqslant \varrho_{L_n}(x).$$

Утверждение

$$\forall \varepsilon>0\ \forall n\in\mathbb{N}\ \ \varrho_{L_n} \in H^\alpha(X\setminus O_\varepsilon(L_n),\mathbb{R})$$

следует из определения этой функции. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $X\in(\mathcal{H}^\alpha)$ $(\alpha\geqslant 1)$, $E=\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — счетный безусловный нормализованный базис Шаудера в X, $C=C(E)<\infty$, $\delta>0$. Тогда существует счетное семейство неотрицательных функций $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty \subset H^\alpha(X,\mathbb{R})$, диаметры носителей которых не превосходят $22C\delta$, и таких, что ряд $\sum_{k\in\mathbb{N}}\psi_k$ равномерно сходится к 1 на любом компакте $K\subset X$. Более того, найдется номер $l=l(K)\in\mathbb{N}$ такой, что $\psi_k\equiv 0$ на $\frac{\delta}{4C}$-окрестности K для всех $k>l$, и, следовательно, $\sum_{k\leq l}\psi_k\equiv 1$ на $\frac{\delta}{4C}$-окрестности K. Кроме того, $0\leqslant\psi_k\leqslant 1$ для всех $k\in\mathbb{N}$ и найдется последовательность $\{x_k\}\subset X$ такая, что $\psi_k(x_k)=1$ для всех $k\in\mathbb{N}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без потери общности можно считать, что $\delta\in(0,1)$. Пусть $\psi_0\in C^\infty(\mathbb{R})$ — нечетная функция такая, что $|\psi_0|\leqslant\frac12$ и $\psi_0(x)\equiv-\frac12$ на $[\frac12,+\infty)$. Положим $\psi(x)=\psi_0(x-\frac12)+\frac12$, тогда $\psi\in C^\infty(\mathbb{R})$, $0\leqslant\psi\leqslant 1$, при этом $\psi\equiv 0$ на $[1,+\infty)$ и $\psi\equiv 1$ на $(-\infty,0]$. Рассмотрим четную функцию $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, положив

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x|\in[0,1],\\ \psi(|x|-1), & \text{если } |x|\in[1,+\infty). \end{cases}$$

Тогда $g \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, $g \equiv 0$ вне $[-2,2]$, $g \equiv 1$ на $[-1,1]$, $0 \leqslant g \leqslant 1$ на $\mathbb{R}$.

Для каждого $j \in \mathbb{Z}$ рассмотрим

$$g_j(x) \stackrel{\text{def}}{=} g(x-3j) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Поскольку

$$\psi(x)+\psi(1-x) = 1+\psi_0\left(x-\frac{1}{2}\right)+\psi_0\left(\frac{1}{2}-x\right) = 1,$$

то $g(x)+g(x-3) = g(x)$ на $(-\infty,1]$, $g(x)+g(x-3) = g(x)+g(3-x) = \psi(x-1)+\psi(2-x) = 1$ на $[1,2]$, $g(x)+g(x-3) = g(3-x)$ на $[2,+\infty)$. Поэтому для $j \in \mathbb{Z}$

$$g_j(x)+g_{j+1}(x) = g_j(x)+g_j(x-3) = \begin{cases} g_j(x), & \text{если } x \in (-\infty, 3j+1], \\ 1, & \text{если } x \in [3j+1, 3j+2], \\ g_{j+1}(x), & \text{если } x \in [3j+2, +\infty). \end{cases}$$

Следовательно,

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} g_j \equiv 1 \ \text{ на } \ \mathbb{R}, \qquad \sum_{|j|\leqslant N} g_j \equiv 1 \ \text{ на } \ [-N,N] \ \ \forall N \in \mathbb{N}.$$

Для произвольных $\varepsilon > 0$ и $x \in \mathbb{R}$ положим

$$v_\varepsilon(x) = g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \qquad v_{\varepsilon,j}(x) = g_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = v(x-3\varepsilon j).$$

Отсюда

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} v_{\varepsilon,j} \equiv 1 \ \text{ на } \ \mathbb{R}, \qquad \sum_{|j|\leq N} v_{\varepsilon,j} \equiv 1 \ \text{ на } \ [-\varepsilon N, \varepsilon N].$$

Определим также монотонно убывающую функцию $\theta_{\delta,k} \in C^{\infty}(\mathbb{R}_+)$ такую, что $\theta_{\delta,k} \equiv 1$ на $[0, \frac{2k-1}{k}\delta]$, $\theta_{\delta,k} \equiv 0$ на $[\frac{2k+1}{k+1}\delta, +\infty)$ и $0 \leqslant \theta_{\delta,k} \leqslant 1$ на $\mathbb{R}_+$. Из определения следует

$$\theta_{\delta,k}\theta_{\delta,k+1} = \theta_{\delta,k} \ \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Для произвольных $n \in \mathbb{N}$ и плоскости L_n, натянутой на векторы $\{e_1,\ldots,e_n\}$, введем функции $\varrho_n(x) = \varrho_{L_n}(x)$ (см. лемму 1) и $m_{\delta,n} = \theta_{\delta,n} \circ \varrho_n$ на пространстве X. Отметим, что $m_{\delta,n} \in H^{\alpha}(X,\mathbb{R})$ и $0 \leqslant m_{\delta,n} \leqslant 1$. Кроме того, имеем

$$m_{\delta,n} = \theta_{\delta,n}(\varrho_n) = \theta_{\delta,n}(\varrho_n)\theta_{\delta,n+1}(\varrho_n) \leqslant \theta_{\delta,n}(\varrho_n)\theta_{\delta,n+1}(\varrho_{n+1}),$$

поскольку функция $\theta_{\delta,n}(x)$ монотонно убывает по x и $\varrho_n(x)$ монотонно убывает по n для каждой фиксированной точки $x \in X$. Так как $0 \leqslant \theta_{\delta,n+1} \leqslant 1$, то

$$\theta_{\delta,n}(\varrho_n)\theta_{\delta,n+1}(\varrho_{n+1}) = m_{\delta,n}m_{\delta,n+1} \leqslant m_{\delta,n}.$$

Таким образом, $m_{\delta,n}m_{\delta,n+1} = m_{\delta,n}$ на X.

Для каждого $i \in \mathbb{N}$ положим $r_{\varepsilon,i} = v_\varepsilon \circ q_i$, где $q_i(\cdot) = \|P_{L(i)}(\cdot)\|$, $L(i)$ — плоскость, натянутая на векторы $\{e_i\}_{j\neq i}$. Отметим, что $r_{\varepsilon,i} \in H^{\alpha}(X,\mathbb{R})$ и $q_i(x) = |x_i|$ $(x = (x_1,\ldots,x_n,\ldots))$. Положим

$$\chi^j_{n,\varepsilon,\delta}(x) = m_{\delta,n}(x)\prod_{i=1}^{n} r_{\varepsilon,i}(x-3\varepsilon J),$$

где $x \in X$, $J = \sum_{i=1}^n j_i e_i$, $j = (j_1,\ldots,j_n) \in \mathbb{Z}^n$.

Покажем, что

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}^n} \chi^j_{n,\varepsilon,\delta} \equiv m_{\delta,n}.$$

Действительно,

$$r_{\varepsilon,i}(x-3\varepsilon J)=v_\varepsilon(q_i(x-3\varepsilon J))=v_\varepsilon(|x_i-3\varepsilon j_i|)=v_\varepsilon(x_i-3\varepsilon j_i),$$

и, следовательно, для всех $x\in X$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}^n}\chi^j_{n,\varepsilon,\delta}(x)=m_{\delta,n}(x)\sum_{j\in\mathbb{Z}^n}\prod_{i=1}^n r_{\varepsilon,i}(x-3\varepsilon J)=m_{\delta,n}(x)\sum_{j\in\mathbb{Z}^n}\prod_{i=1}^n v_\varepsilon(x_i-3\varepsilon j_i)$$

$$=m_{\delta,n}(x)\prod_{i=1}^n\sum_{j_i\in\mathbb{Z}}v_\varepsilon(x_i-3\varepsilon j_i)=m_{\delta,n}(x)\prod_{i=1}^n\sum_{j_i\in\mathbb{Z}}v_{\varepsilon,j_i}(x_i)=m_{\delta,n}(x)$$

(так как $\sum_{j_i\in\mathbb{Z}}v_{\varepsilon,j_i}(x_i)\equiv 1$).

Положим

$$\varepsilon_n=\frac{\delta}{10n},\quad m_{\delta,0}\equiv 0,\quad \Phi_{n,j,\delta}(x)=(1-m_{\delta,n-1}(x))\chi^j_{n,\varepsilon_n,\delta}(x)\quad (x\in X).$$

Тогда

$$\sum_{n,j}\Phi_{n,j,\delta}(x)=\sum_{n,j}(1-m_{\delta,n-1}(x))\chi^j_{n,\varepsilon_n,\delta}(x)=\sum_n(1-m_{\delta,n-1}(x))\sum_j\chi^j_{n,\varepsilon_n,\delta}(x)$$

$$=\sum_n(1-m_{\delta,n-1}(x))m_{\delta,n}(x)=\sum_n(m_{\delta,n}(x)-m_{\delta,n-1}(x)m_{\delta,n}(x))$$

$$=\sum_n(m_{\delta,n}(x)-m_{\delta,n-1}(x))=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N(m_{\delta,n}(x)-m_{\delta,n-1}(x))$$

$$=\lim_{N\to\infty}(m_{\delta,N}(x)-m_{\delta,0}(x))=\lim_{N\to\infty}m_{\delta,N}(x)=1\quad(x\in X).$$

Поскольку функции $\Phi_{n,j,\delta}$ для любых $n\in\mathbb{N}, j\in\mathbb{Z}$ неотрицательны, непрерывны и ряд $\sum_{n,j}\Phi_{n,j,\delta}(x)$ при любом упорядочивании его членов сходится к непрерывной функции, равной тождественно 1, то по теореме Дини этот ряд при любом упорядочивании его членов сходится равномерно на произвольном компакте $K\subset X$. При этом диаметр носителя функции $\Phi_{n,j,\delta}$ не превосходит числа $4\delta+4\varepsilon_n nC\leqslant 6C\delta$. Перенумеруем счетное семейство функций $\{\Phi_{n,j,\delta}\}$, образуя систему финитных функций $\{\varphi_k=\Phi_{n(k),j(k),\delta}\}$, $k\in\mathbb{N}$. Докажем, что для произвольного непустого компакта $K\subset X$ найдется число $l=l(K)\in\mathbb{N}$ такое, что

$$\sum_{k\le l}\varphi_k(x)=1\quad\forall x\in O_{\frac{\delta}{4C}}(K).$$

Действительно, поскольку K — компакт, найдется $n\in\mathbb{N}$ такое, что

$$\varrho(x,L_n)<\frac{\delta}{4C}\quad\forall x\in K,$$

и, следовательно,

$$\varrho(x,L_n)<\frac{\delta}{2C}\quad\forall x\in O_{\frac{\delta}{4C}(K)},$$

т.е.

$$\varrho_{L_n}(x)\leqslant C\varrho(x,L_n)+\frac{\delta}{2}<\delta\quad\forall x\in O_{\frac{\delta}{4C}}(K).$$

Отсюда $m_{\delta,m}(x)=1$ для всех $m\geqslant n$ и $x\in O_{\frac{\delta}{4C}}(K)$. Кроме того, существует $N\in\mathbb{N}$ такое, что для параллелепипеда

$$\Pi_{n,N}=\{x=\sum_{i=1}^n\alpha_ie_i\mid|\alpha_i|\leqslant N,\ i=\overline{1,n}\}$$

и произвольного $x \in K$

$$\varrho(x, \Pi_{n,N}) = \varrho(x, L_n) < \frac{\delta}{4C}, \qquad Q_{L_n}(O_{\frac{\delta}{4C}}(K)) \subset \Pi_{n,N},$$

где Q_{L_n} — координатный проектор на L_n. Найдется $l = l(K) \in \mathbb{N}$ такое, что среди пар индексов $\{(n(k), j(k))\}_{k \leqslant l}$ содержатся все пары индексов из множества

$$\mathcal{A} = \left\{(m, j) \mid m \leqslant n, |j_i| \leqslant \frac{10n}{\delta} N + 1, i = \overline{1, m}\right\}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k \leq l} \varphi_k(x) \geqslant \sum_{(m,j) \in \mathcal{A}} \Phi_{m,j,\delta}(x) = \sum_{m \leq n} \sum_{j:(m,j) \in \mathcal{A}} \Phi_{m,j,\delta}(x)$$
$$= \sum_{m \leq n} (1 - m_{\delta,m-1}(x)) \sum_{j:(m,j) \in \mathcal{A}} \chi^j_{m,\varepsilon_m,\delta}(x)$$

и

$$\sum_{j:(m,j) \in \mathcal{A}} \chi^j_{m,\varepsilon_m,\delta}(x) = m_{\delta,m}(x) \sum_{j=(j_1,\ldots,j_m):|j_k| \leq \varepsilon_n^{-1} N+1} \prod_{j=1}^m v_{\varepsilon_m,j}(x_i)$$
$$\geqslant m_{\delta,m}(x) \sum_{j=(j_1,\ldots,j_m):|j_k| \leq \varepsilon_m^{-1} N+1} \prod_{j=1}^m v_{\varepsilon_m,j}(x_i)$$
$$= m_{\delta,m}(x) \prod_{i=1}^m \sum_{|j_i| \leq \varepsilon_m^{-1} N+1} v_{\varepsilon_m,j_i}(x_i) = m_{\delta,m}(x) \quad \forall x \in Q^{-1}_{L_n}(\Pi_{n,N})$$

(так как $\sum_{i=1}^m x_i e_i \in \Pi_{n,N}$ при $m \leqslant n$). Поскольку

$$\sum_{m \leq n} (1 - m_{\delta,m-1}(x)) m_{\delta,m}(x) = m_{\delta,n}(x)$$

и для всех $x \in O_{\frac{\delta}{4C}}(K)$ $m_{\delta,n}(x) \equiv 1$, то

$$1 \leqslant \sum_{k \leq l} \varphi_k(x) \leqslant \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi_k(x) = 1 \quad \forall x \in O_{\frac{\delta}{4C}}(K).$$

Отсюда следует, что $\sum_{k > l} \varphi_k(x) \equiv 0$ на $O_{\frac{\delta}{4C}}(K)$, а значит, $\varphi_k \equiv 0$ на $O_{\frac{\delta}{4C}}(K)$ для всех $k > l$.

Построим последовательность $\{\psi_m\}$ из последовательности $\{\varphi_k\}$, сгруппировав некоторые члены $\{\varphi_k\}$ в суммы (в каждой сумме конечное число членов), что соответствует расстановке скобок в ряде $\sum_k \varphi_k$. Для этой последовательности также будет выполняться условие:

$$\exists l = l(K) \in \mathbb{N} \ \ \forall m > l \ \ \psi_k \equiv 0 \ \text{ на } \ O_{\frac{\delta}{4C}}(K) \ \text{ и } \ \forall m \in \mathbb{N} \ \ 0 \leqslant \psi_m \leqslant 1.$$

Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим произвольный мультииндекс $z = (z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ и число $b \geqslant a \overset{\text{def}}{=} [2C\delta\varepsilon_n^{-1}] + 1$. Тогда для точки $t = t_{(z,b)} = 3\varepsilon_n(\sum_{i=1}^{n-1} z_i e_i + b e_n) \in L_n$ верны неравенства:

$$\varrho_{n-1}(t) \geqslant \varrho(t, L_{n-1}) \geqslant \frac{1}{C} \|Q_{n-1}(t)\| = \frac{3\varepsilon_n b}{C} \geqslant 6\delta.$$

Следовательно, $m_{\delta,n-1}(t) = 0$, т.е. $1 - m_{\delta,n-1}(t) = 1$. И поскольку $t \in L_n$, то $\varrho_n(t) \leqslant C\varrho(t, L_n) + \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}$, и $m_{\delta,n}(t) = 1$. Тогда для мультииндекса $j = (z, b)$ выполняются равенства $t - 3\varepsilon_n J = 0$ ($J = \sum_{i=1}^{n-1} z_i e_i + b e_n$) и

$$\chi^j_{n,\varepsilon_n,\delta}(t) = m_{\delta,n}(t) \prod_{i=1}^n r_{\varepsilon_n,i}(t - 3\varepsilon_n J) = m_{\delta,n}(t) = 1.$$

Поэтому для множества индексов

$$\mathcal{B}_z^n = \{j = (z, j_n) \mid z \in \mathbb{Z}^{n-1}, j_n \in \mathbb{Z}, |j_n| \leqslant a\}$$

и $j_0 = (z, a)$ верны неравенства:

$$1 \geqslant \sum_{j \in \mathcal{B}_z^n} \Phi_{n,j,\delta}(t) \geqslant \Phi_{n,j_0,\delta}(t) \geqslant (1 - m_{\delta,n-1}(t))\chi_{n,\varepsilon_n,\delta}^{j_0}(t) = 1,$$

и, следовательно, $\sum_{j\in\mathcal{B}_z^n} \Phi_{n,j,\delta}(t) = 1$.

Для множества индексов

$$\mathcal{C}_z^n = \{j = (z, j_n) \mid z \in \mathbb{Z}^{n-1}, j_n \in \mathbb{Z}, |j_n| > a\},$$

произвольного мультииндекса $j \in \mathcal{C}_z^n$ и числа $t = t_j = 3\varepsilon_n \sum_{i=1}^n j_i e_i$ справедливо равенство $\Phi_{n,j,\delta}(t) = 1$. Исходя из этого, будем группировать в сумму те φ_k, для которых выполнено условие $n(k) = n$, $j \in \mathcal{B}_z^n$ для некоторых произвольных фиксированных $n \in \mathbb{N}$ и $z \in \mathbb{Z}^{n-1}$, образуя функции $\Psi_{n,z} = \sum_{j\in\mathcal{B}_z^n} \Phi_{n,j,\delta}$. Тем самым будет построен набор функций

$$\{\Psi_{n,z}\ (n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{Z}^{n-1}); \Phi_{n,j,\delta}\ (n \in \mathbb{N}, j = (j_1, \ldots, j_n), |j_n| > a)\}.$$

Расположим их в последовательность $\{\psi_m\}$. Финитные функции ψ_m являются суммами функций из некоторых конечных наборов из последовательности $\{\varphi_k\}$, причем эти наборы попарно не пересекаются. Следовательно, $\sum_m \psi_m \equiv 1$. Оценим диаметр носителя каждой функции ψ_m. Для этого достаточно оценить диаметр носителя каждой $\Psi_{n,z}$. Последний не превосходит диаметра $(n + 1)$-мерного параллелепипеда, две стороны которого равны 4δ и $4\varepsilon_n(2a + 1)$, а остальные — $4\varepsilon_n$, т.е. не превосходит величины

$$4\delta + 4\varepsilon_n(2a + 1) + 4\varepsilon_n n \leqslant 4\frac{2}{5}\delta + 4\varepsilon_n(4C\varepsilon_n^{-1}\delta + 3) \leqslant 22C\delta.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть $X \in (\mathcal{H}^\alpha)$ $(\alpha \geqslant 1)$ — пространство со счетным безусловным базисом Шаудера, $M \subset X$, Y — произвольное банахово пространство, $\beta \in (0, \alpha]$, $f \in H^\beta(M, Y)$, $\Delta > 0$. Тогда существует счетное семейство отображений $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset H^\beta(X, Y)$ таких, что диаметр их носителей не превосходит Δ и для всех $i \in \mathbb{Z}_+, i < \beta$, ряд $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k^{(i)}$ равномерно сходится на любом компакте $K \subset X$ к $f^{(i)}$. Более того, существует такая константа $D > 0$, что ряд $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k^{(i)}$ равномерно сходится к $f^{(i)}$ на окрестности $O_{\frac{\Delta}{D}}(K)$, вырождаясь на этой окрестности в конечную сумму.*

Доказательство. Применим лемму 2, построив для $\delta = \frac{\Delta}{22C}$ (здесь $C = C(E)$, а E — безусловный базис Шаудера в X) последовательность соответствующих (см. лемму 2) финитных функций $\{\psi_k\}$. Положив $f_k = f\psi_k$ $(k \in \mathbb{N})$, получим утверждение теоремы для $D = 88C^2$.

Следствие 1. *Пусть $X = L_p$ (l_p) $(1 < p < \infty)$, $M \subset X$ и*

$$\alpha = \begin{cases} p, & \text{если } \frac{p}{2} \notin \mathbb{N}, \\ \infty, & \text{если } \frac{p}{2} \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Тогда для произвольных чисел $\beta \in (0, \alpha], \Delta > 0$, банахова пространства Y и отображения $f \in H^\beta(M, Y)$ найдется последовательность отображений $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset H^\beta(X, Y)$ таких, что диаметр их носителей не превосходит Δ и для всех $i \in \mathbb{Z}_+, i < \beta$, ряд $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k^{(i)}$ равномерно сходится на любом компакте $K \subset X$ к $f^{(i)}$. Более того, существует такая константа $D > 0$, что ряд $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k^{(i)}$ равномерно сходится к $f^{(i)}$ на окрестности $O_{\frac{\Delta}{D}}(K)$, вырождаясь на этой окрестности в конечную сумму.

Для отображения $f : X \to Y$ через $\omega(f, \Delta)$ $(\Delta \geqslant 0)$ обозначим его модуль непрерывности, т.е. величину $\sup\{\|f(x_1) - f(x_2)\| \mid x_1, x_2 \in X, \|x_1 - x_2\| \leqslant \Delta\}$.

Теорема 2. *Пусть $X \in (\mathcal{H}^\alpha)$ $(\alpha \geqslant 1)$ — пространство со счетным безусловным базисом Шаудера, Y — произвольное банахово пространство, $\Delta > 0$. Тогда существуют число $D > 0$ и счетное семейство неотрицательных функций $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty \subset H^\alpha(X, \mathbb{R})$, имеющих свойства:*

(1) диаметр носителей этих функций не превосходит Δ и $0 \leqslant \psi_k \leqslant 1$ $(k \in \mathbb{N})$, $\sum_{k\in\mathbb{N}} \psi_k \equiv 1$ на X; кроме того, существует последовательность точек $\{x_k\}$, в которых функции ψ_k принимают значения, равные 1;

(2) для любого равномерно непрерывного отображения $f : X \to Y$ ряд $\sum_{k\in\mathbb{N}} f(x_k)\psi_k(x)$ равномерно сходится на любом компакте $K \subset X$ к некоторой функции $\varphi : X \to Y$, которая на $\frac{\Delta}{D}$-окрестности K является α-гладкой (более того, на этой окрестности ряд вырождается в конечную сумму). При этом $\|f - \varphi\| \leqslant \omega(f, \Delta)$ и $f(x_k) = \varphi(x_k)$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Применим лемму 2, построив для $\delta = \frac{\Delta}{22C}$ (здесь $C = C(E)$, а E — безусловный базис Шаудера в X) последовательность соответствующих (см. лемму 2) финитных функций $\{\psi_k\}$. Пусть $\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} f(x_k)\psi_k(x)$. Поскольку $\sum_{k\in\mathbb{N}} \psi_k \equiv 1$, то $\psi_m(x_k) = 0$ для всех $k \neq m$, и, следовательно, $\varphi(x_k) = f(x_k)$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Для произвольной точки $x \in X$ рассмотрим множество индексов $\mathcal{C}_x \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{m \in \mathbb{N} \mid \psi_m(x) \neq 0\}$. Тогда $\|x - x_k\| \leqslant \Delta$ для всех $k \in \mathcal{C}_x$, и, значит,

$$\|f(x) - \varphi(x)\| = \left\| f(x) \sum_k \psi_m(x) - \sum_{k\in\mathbb{N}} f(x_k)\psi_k(x) \right\|$$

$$= \left\| \sum_{k\in\mathcal{C}_x} (f(x) - f(x_k))\psi_k(x) \right\| \leqslant \sum_{k\in\mathcal{C}_x} \|f(x) - f(x_k)\|\psi_k(x)$$

$$\leqslant \omega(f, \Delta) \sum_{k\in\mathcal{C}_x} \psi_k(x) = \omega(f, \Delta).$$

Учитывая, что лишь конечное число функций последовательности ψ_k имеют носители, пересекающиеся с $\frac{\Delta}{D}$-окрестностью некоторого произвольного компакта $K \subset X$, получаем α-гладкость отображения φ на $\frac{\Delta}{D}$-окрестности K. Остальные утверждения следуют из леммы 2. Теорема доказана.

3. Сглаживание равномерно непрерывных отображений

Пусть X — действительное банахово пространство, а $E = \{L'_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ — набор его подпространств, соответствующий шаудеровскому разложению пространства X, т.е. каждый элемент $x \in X$ однозначно представляется в виде суммы $\sum_{m\in\mathbb{N}} x_m$, где $x_m \in L'_m$ — m-й член разложения. При этом оператор T_m, ставящий элементу x в соответствие m-й член его разложения, будет непрерывным проектором на L'_m. Такое разложение называется безусловным, если существует константа $C = C(E) > 0$ (константа безусловности) такая, что для любых $x = \sum_{m\in\mathbb{N}} x_m \in X$, $n \in \mathbb{N}$, всех наборов чисел $\alpha_i \in \mathbb{R}$ и чисел $\varkappa_i$, равных 1 или -1 $(i = \overline{1, n})$, верны неравенства:

$$C^{-1} \left\| \sum_{i=1}^n \varkappa_i \alpha_i x_n \right\| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_n \right\| \leqslant C \left\| \sum_{i=1}^n \varkappa_i \alpha_i x_n \right\|.$$

При этом линейное многообразие $\mathcal{L} = \bigcup_{m=1}^\infty L_m$, где $L_m \stackrel{\mathrm{def}}{=} L'_1 \oplus \ldots \oplus L'_m$, всюду плотно в X и $P_m = \sum_{i=1}^m T_m$ является проектором пространства X на L_m. Без потери общности можно считать, что его норма и норма оператора $Q_m =\mathrm{Id}-P_m$ ограничены той же константой C.

Отметим простейшие свойства проекторов: $P_m = P_{m+1} \circ P_m = P_m^2$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Заметим также, что последовательность $\{\varrho(x, L_k)\}$ монотонно убывает по k. Через $B(x,r)$ обозначим шар с центром x радиуса r в пространстве X, т.е. множество $\{y \in X \mid \|x-y\| \leqslant r\}$. В силу плотности в X линейного многообразия $\mathcal{L}$ верно равенство $\lim_{k\to\infty} P_k(x) = x$ для произвольного элемента $x \in X$. Для произвольных $\varepsilon > 0$ и $\delta \in (0, \varepsilon/3)$ построим бесконечно дифференцируемую монотонно возрастающую функцию $\varphi = \varphi_\delta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, являющуюся C_δ-липшицевой, где $C_\delta = (\varepsilon - 3\delta)^{-1}$, и такую, что $\varphi \equiv 0$ на $[0, \delta]$, $\varphi \equiv 1$ на $[\varepsilon, +\infty)$.

Для всех $x \in X$ и $n \in \mathbb{N}$ положим

$$\theta_n(x) = \varphi \circ \varrho_n(x),$$

где

$$\varrho_n(x) = \|x - P_n x\| = \|Q_n(x)\|, \qquad e_n(x) = P_n(x) - P_{n+1}(x) = -T_{n+1}(x) = -x_{n+1}.$$

Рассмотрим отображение

$$F(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \theta_k(x)) e_k(x) \qquad (x \in X).$$

Для каждого элемента $x \in X$ определим числа

$$m = m(x) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \varrho(x, L_k) < \frac{\delta}{C}\right\}$$

и

$$l = l(x) = \begin{cases} \max\{k \in \mathbb{N} \mid \varrho(x, L_k) > \varepsilon\}, & \text{если } \varrho(x, L_1) > \varepsilon \\ 0, & \text{если } \varrho(x, L_1) \leqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $l < m$. В силу определения этих чисел верны соотношения: $\varrho_n(x) < \delta$ $(n \geqslant m+1)$, $\varrho_n(x) \geqslant \varepsilon$ $(n \leqslant l)$, а следовательно,

$$F(x) = x + \sum_{k=m+1}^{\infty} e_k(x) + \sum_{k=l+1}^{m} (1 - \theta_k(x)) e_k(x) = P_{m+1}(x) + \sum_{k=l+1}^{m} (1 - \theta_k(x)) e_k(x).$$

Лемма 3. *Для произвольных элемента $x \in X$ и чисел $\alpha_k \in \mathbb{R}$ $(k = \overline{l+1, m})$ верно неравенство*

$$\left\|\sum_{k=l+1}^{m} \alpha_k e_k(x)\right\| \leqslant 2C^3 \|x\| \max_{k=\overline{l+1,m}} |\alpha_k|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$\alpha = \max_{k=\overline{l+1,m}} |\alpha_k|, \qquad y = \sum_{k=l+1, k\neq i}^{m} \alpha_k e_k(x).$$

Тогда или $\|y + te_i(x)\| \geqslant \|y\|$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$, или $\|y - te_i(x)\| \geqslant \|y\|$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$. Действительно, если числа $t_1, t_2 > 0$ такие, что нормы элементов $y_1 = y + t_1 e_i(x), y_2 = y - t_2 e_i(x)$ строго меньше $\|y\|$, то

$$\|y\| = \|\frac{t_2}{t_1+t_2} y_1 + \frac{t_1}{t_1+t_2} y_2\| \leqslant \frac{t_2}{t_1+t_2}\|y_1\| + \frac{t_1}{t_1+t_2}\|y_2\| < \|y\|,$$

чего не может быть.

Отсюда вытекает, что найдется число $\varkappa_i$, равное 1 или -1, такое, что для всех $t \in \mathbb{R}_+$ $\|y + \varkappa_i t e_i(x)\| \geqslant \|y\|$, а ввиду выпуклости нормы из этого следует, что $\|y + \varkappa_i t e_i(x)\| \uparrow_t$ на $\mathbb{R}_+$. Поэтому

$$\|y + \alpha \varkappa_i e_i(x)\| \geqslant \|y + |\alpha_i| \varkappa_i e_i(x)\|.$$

Таким образом, индукцией по $i = \overline{l+1, m}$ можно показать, что для некоторых наборов знаков $\{\varkappa_k\}_{k=l+1}^m$ выполняются неравенства:

$$\left\| \sum_{k=l+1}^m \alpha_k e_k(x) \right\| \leqslant C \left\| \sum_{k=l+1}^m \varkappa_k |\alpha_k| e_k(x) \right\| \leqslant C\alpha \left\| \sum_{k=l+1}^m \varkappa_k e_k(x) \right\|$$

$$\leqslant C^2 \alpha \left\| \sum_{k=l+1}^m e_k(x) \right\| = C^2 \alpha \|(P_{l+1} - P_{m+1})(x)\| \leqslant 2C^3 \alpha \|x\|.$$

Лемма доказана.

Докажем, что для всех $x \in X$ образ $F(x)$ принадлежит $B(x, \varepsilon_0)$, где $\varepsilon_0 = (C + 4C^4)\varepsilon$. Для этого сначала заметим, что для всех $k \geqslant l+1$ верно неравенство

$$\|x - P_k(x)\| \leqslant C \varrho(x, L_k) \leqslant C\varepsilon,$$

поэтому в силу леммы 3, с учетом равенства $e_k(x) = e_k(x - P_{l+1}(x))$ для всех $k \geqslant l+1$, получаем оценку

$$\|F(x) - x\| \leqslant \|P_{m+1}(x) - x\| + \| \sum_{k=l+1}^m (1 - \theta_k(x)) e_k(x)\|$$

$$\leqslant C\varepsilon + \| \sum_{k=l+1}^m (1 - \theta_k(x)) e_k(x - P_{l+1}(x))\| \leqslant C\varepsilon + 2C^3 \|x - P_{l+1}(x)\| \leqslant C\varepsilon + 4C^4 \varepsilon = \varepsilon_0.$$

Следовательно, $F(x) \in B(x, \varepsilon_0)$.

Докажем, что отображение F является липшицевым с константой Липшица

$$D = 10C^4 + C.$$

Для этого достаточно доказать, что на некоторой окрестности произвольного элемента $x \in X$ это отображение D-липшицево. Возьмем такую малую окрестность элемента x, чтобы $l(x) \leqslant l(y)$ и $m(x) \geqslant m(y)$ для любого элемента y из этой окрестности. Тогда

$$F(y) = P_{m+1}(y) + \sum_{k=l+1}^m (1 - \theta_k(y)) e_k(y),$$

где $m = m(x), l = l(x)$, и

$$\|F(x) - F(y)\| \leqslant \|P_{m+1}(x - y)\| + \left\| \sum_{k=l+1}^m (\theta_k(y) - \theta_k(x)) e_k(x) \right\|$$

$$+ \left\| \sum_{k=l+1}^m (1 - \theta_k(y))(e_k(x) - e_k(y)) \right\| \leqslant C\|x - y\|$$

$$+ \left\| \sum_{k=l+1}^m (\theta_k(y) - \theta_k(x)) e_k(x - P_{l+1}(x)) \right\| + \left\| \sum_{k=l+1}^m (1 - \theta_k(y))(e_k(x - y)) \right\|$$

$$\leqslant C\|x - y\| + 4C^4 C_\delta \|x - y\| \|x - P_{l+1}(x)\| + 4C^4 \|x - y\|$$

$$\leqslant \|x-y\|(C+4C^4C_\delta\varepsilon+4C^4)\leqslant \|x-y\|\left(C+4C^4+4C^4\frac{\varepsilon}{\varepsilon-3\delta}\right).$$

Выбирая $\delta=\varepsilon/9$, получим

$$\|F(x)-F(y)\|\leqslant (C+10C^4)\|x-y\|=D\|x-y\|,$$

т.е. F является липшицевым отображением с константой Липшица, равной D.

Определение 3. Будем писать, что отображение $f: M\to Y$, где X, Y — банаховы пространства, $M\subset X$, принадлежит классу $H^\alpha_{loc}(M)=H^\alpha_{loc}(M,Y)$ $(\alpha>0)$, если $f\in D^{\lfloor\alpha\rfloor}(M)$ ($\lfloor\alpha\rfloor$ — наибольшее целое число, строго меньшее α) и $f^{(\beta)}$ принадлежит классу Гёльдера порядка $\alpha-\lfloor\alpha\rfloor$ в некоторой окрестности каждой точки множества M. При этом под классом $H^\infty_{loc}(M)=H^\infty_{loc}(M,Y)$ будем подразумевать класс всех бесконечно дифференцируемых отображений $f: M\to Y$ и будем говорить, что $f\in H^\alpha_{loc}(M,Y)$ суть отображения *локальной гладкости* α (на множестве M). Здесь, как обычно, полагаем, что $f^{(0)}\overset{\mathrm{def}}{=}f$.

Определение 4. Будем говорить, что банахово пространство имеет локальную гладкость $\alpha\in(0,\infty]$, если норма этого пространства есть функция класса $H^\alpha_{loc}(X\setminus\{0\},\mathbb{R})$. Класс всех таких пространств будем обозначать через $(\mathcal{H}^\alpha_{loc})$.

Лемма 4. *Пусть $X\in(\mathcal{H}^\alpha_{loc})$. Для любого числа $\varepsilon_0>0$ и линейного многообразия $\mathcal{L}=\bigcup_{m=1}^\infty L_m$ существует D-липшицево отображение $F: X\to\mathcal{L}$ локальной гладкости α, удовлетворяющее свойствам:*

(1) *для всех $x\in X$ верно неравенство $\|x-F(x)\|\leqslant\varepsilon_0$;*

(2) *для каждого элемента $x\in X$ существует номер $n=n(x)$ такой, что*

$$F\left(B\left(x,\frac{\varepsilon_0}{36C(C+4C^4)}\right)\right)\subset L_n.$$

Доказательство. Положим $\varepsilon=\varepsilon_0(4C^4+C)^{-1}$. Утверждение теоремы следует из того, что для всех $k\in\mathbb{N}$ функция $\varrho_k(x)=\|x-P_k(x)\|$ принадлежит классу $H^\alpha_{loc}(X\setminus L_k)$. Поэтому $\theta_k\in H^\alpha_{loc}(X\setminus L_k)$, а учитывая, что $\theta_k(x)\equiv 0$ во всех точках, находящихся на расстоянии от L_k, не превосходящем δ/C, получим $(1-\theta_k(x))e_k(x)\in H^\alpha_{loc}(X)$ $(k\in\mathbb{N})$. Отсюда следует, что отображение $F(x)=P_{m+1}(x)+\sum_{k=l+1}^m(1-\theta_k(x))e_k(x)$ $(l=l(x), m=m(x))$, сохраняющее это представление на некоторой окрестности функции x, принадлежит классу $H^\alpha_{loc}(X)$. Выберем $K=K(x)\in\mathbb{N}$ так, чтобы

$$\varrho(x,L_K)<\frac{\varepsilon_0}{36C(C+4C^4)}.$$

Поскольку для всех $y\in B\left(x,\frac{\varepsilon_0}{36C(C+4C^4)}\right)$ верны неравенства

$$\varrho(y,L_K)\leqslant\varrho(x,L_K)+\|x-y\|<\frac{\varepsilon_0}{18C(C+4C^4)}=\frac{\varepsilon}{18C}\leqslant\frac{\delta}{C},$$

то $\|y-P_K(y)\|\leqslant\delta$ и $F(y)=P_{K+1}(y)+\sum_{k=1}^K(1-\theta_k(y))e_k(y)\in L_{K+1}$. Следовательно,

$$F\left(B\left(x,\frac{\varepsilon_0}{36C(C+4C^4)}\right)\right)\subset\mathcal{L}_{K+1}.$$

Остальные свойства доказаны ранее.

Теорема 3. *Пусть X — банахово пространство локальной гладкости $\alpha\in(0,\infty]$, обладающее набором конечномерных подпространств $E=\{L'_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, представляющих собой безусловное шаудеровское разложение, и $C=C(E)>0$ — константа безусловности; B — единичный шар в пространстве X, $\beta\in(0,1]$. Тогда для любого числа $\varepsilon>0$ и произвольных банахова пространства Y и отображения $f\in H^\beta(B,Y)$ существует локально α-гладкое отображение $\varphi\in H^\beta(B,Y)$ такое, что $\|f-\varphi\|\leqslant\varepsilon$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без потери общности можно считать, что $f(0) = 0$. Продолжим отображение f на все пространство X, положив его равным $(2 - \|x\|)f(x/\|x\|)$ на слое $1 \leqslant \|x\| \leqslant 2$ и равным нулю на множестве $\|x\| \geqslant 2$. Нетрудно проверить, что это продолжение принадлежит классу $H^\beta(X, Y)$. Таким образом, существует константа $K > 0$ такая, что для всех $x_1, x_2 \in X$ верно неравенство $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leqslant K\|x_1 - x_2\|^\beta$. Пусть $\varepsilon_1 = \left(\frac{\varepsilon}{2K+1}\right)^{\frac{1}{\beta}}$. По лемме 4 существует локально α-гладкое D-липшицево отображение $F : X \to \mathcal{L} = \bigcup_{m=1}^\infty L_m$ ($L_m \stackrel{\text{def}}{=} L'_1 \oplus \ldots \oplus L'_m$) такое, что $\|x - F(x)\| \leqslant \varepsilon_1$ для всех $x \in X$ и найдется число $m = m(x) \in \mathbb{N}$ такое, что

$$F\left(B\left(x, \frac{\varepsilon_0}{36C(C + 4C^4)}\right)\right) \subset L_m.$$

Пусть $\{v_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ — такой набор единичных векторов из $\mathcal{L}$, что для каждого $m \in \mathbb{N}$ найдется номер $n_m \in \mathbb{N}$, для которого линейная оболочка векторов $\{v_j\}_{j=1}^{n_m}$ содержит подпространство L_m. Рассмотрим неотрицательную финитную бесконечно дифференцируемую функцию $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, носитель которой содержится в отрезке $[-1, 1]$ и

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \tau(t)dt = 1.$$

Для произвольных $a > 0$ и $j \in \mathbb{N}$ определим оператор

$$R_{j,a} : C(X, Y) \to C(X, Y),$$

положив

$$g_{j,a} = R_{j,a}(g(x)) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x + v_j t)\tau_a(t)dt = g \star \tau_a,$$

где $\tau_a(t) = \frac{1}{a}\tau(\frac{t}{a})$. Тогда

$$\frac{\partial^k g_{j,a}}{\partial v_j^k}(x) = \frac{\partial^k}{\partial u^k} R_{j,a}(g(x + uv_j))\Big|_{u=0} = \frac{\partial^k}{\partial u^k} \int\limits_{\mathbb{R}} g(x + v_j(u + t))\tau_a(t)dt\Bigg|_{u=0}$$

$$= \frac{\partial^k}{\partial u^k} \int\limits_{\mathbb{R}} g(x + v_j v)\tau_a(v - u)dv\Bigg|_{u=0} = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x + v_j v)\ \frac{\partial^k}{\partial u^k}\tau_a(v - u)\Big|_{u=0} dv \in C(X, Y).$$

Аналогично, производная

$$\frac{\partial^k}{\partial v_1^{k_1} \ldots \partial v_n^{k_n}} R_{j_1,a_1} \circ \ldots \circ R_{j_n,a_n}(g) = (-1)^k g \star \frac{\partial^{k_1}}{\partial v_1^{k_1}}\tau_{a_1} \star \ldots \star \frac{\partial^{k_n}}{\partial v_1^{k_n}}\tau_{a_n} \in C(X, Y),$$

и, более того, верно следующее утверждение.

З а м е ч а н и е. Если отображение g ограничено на шаре $B(x, \sum_{i=1}^n a_i)$, то модуль этой производной ограничен константой, зависящей только от чисел $a_1, \ldots, a_n$ и величины $\sup\{\|g(y)\| \mid y \in B(x, \sum_{i=1}^n a_i)\}$. Кроме того, для всех пар (j, a) верно неравенство

$$\|g_{j,a}\| \leqslant \sup_{y \in B(x,a)} \|g\|.$$

Для любой точки $x \in X$ верны соотношения

$$\|g(x) - g_{j,a}(x)\| = \|\int_{\mathbb{R}} g(x)\tau_a(t)dt - \int_{\mathbb{R}} g(x + v_j t)\tau_a(t)dt\|$$

$$= \| \int_{\mathbb{R}} (g(x) - g(x + v_j t))\tau_a(t)dt\| = \| \int_{-a}^{a} (g(x) - g(x + v_j t))\tau_a(t)dt\|$$

$$\leqslant \omega(g, a) \int_{-a}^{a} \tau_a(t)dt \leqslant \omega(g, a),$$

т.е. норма разности $g(x)$ и $g_{j,a}(x)$ оценивается через модуль непрерывности отображения g с шагом a. Для произвольных $x_1, x_2 \in X$ верна оценка

$$\|g_{j,a}(x_1) - g_{j,a}(x_2)\| = \| \int_{\mathbb{R}} (g(x_1 + v_j t) - g(x_2 + v_j t))\tau_a(t)dt\| \leqslant \omega(g, \|x_1 - x_2\|).$$

Следовательно, $\omega(g_{j,a}, t) \leqslant \omega(g, t)$ для всех $t \geqslant 0$.

Положим

$$a_n = \left(\frac{\varepsilon}{2(K+1)} 2^{-n}\right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad f_0 = f, \qquad f_n = R_{n,a_n} \circ \ldots \circ R_{1,a_1}(f).$$

Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ $\omega(f_n, t) \leqslant \omega(f, t)$ $(t \geqslant 0)$ и справедливы неравенства:

$$\|f_n - f_{n+1}\| \leqslant \omega(f_n, a_{n+1}) \leqslant \omega(f_{n-1}, a_{n+1}) \leqslant \ldots \leqslant \omega(f, a_{n+1}) \leqslant K(a_{n+1})^{\beta} < \frac{\varepsilon}{2^{(n+2)}}.$$

Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \overset{\text{def}}{=} f_\infty$ и отображение f_∞ — гельдерово с показателем β. В силу замечания для всех $n, m \in \mathbb{N}, n \geqslant m$, величина $\left\|\frac{\partial^k}{\partial v_1^{k_1} \ldots \partial v_n^{k_m}} f_n(x)\right\|$ ограничена константой, зависящей только от m и

$$A_m \overset{\text{def}}{=} \sup_{y \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})} \left\|\frac{\partial^k}{\partial v_1^{k_1} \ldots \partial v_n^{k_m}} f_m(y)\right\|.$$

Учитывая, что A_m в силу замечания зависит только от m и $\sup\limits_{y \in B(x,\varepsilon)} \|f(y)\|$, получаем, что f_∞ — бесконечно дифференцируемо по направлениям линейного многообразия $\mathcal{L}$. Кроме того, для всех $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство

$$\|f - f_n\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|f_i - f_{i-1}\| < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} < \frac{\varepsilon}{2},$$

поэтому $\|f - f_\infty\| \leqslant \varepsilon/2$. Положим $\varphi = f_\infty \circ F$. Нетрудно проверить, что отображение φ принадлежит $H^\beta(B, Y)$ и для всех точек $x \in X$ верна оценка

$$\|f(x) - \varphi(x)\| \leqslant \|f(x) - f(F(x))\| + \|f(F(x)) - f_\infty(F(x))\|$$

$$\leqslant K\|x - F(x)\|^\beta + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant K\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Поскольку для всех $x \in X$ найдется число $m = m(x) \in \mathbb{N}$ такое, что

$$F\left(B\left(x, \frac{\varepsilon_1}{36C(C + 4C^4)}\right)\right) \subset \mathcal{L}_m,$$

а $f_\infty|_{L_m} \in C^\infty(L_m)$, то

$$\varphi \in H^\alpha_{loc}\left(B\left(x, \frac{\varepsilon_1}{36C(C + 4C^4)}\right)\right).$$

Следовательно, $\varphi \in H^\alpha_{loc}(X)$. Теорема доказана.

Поступила 29.11.04

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Иллс Дж.** Основания глобального анализа // Успехи мат. наук. 1969. Т. 24, №3. С. 157–210.
2. **Kurzweil J.** On approximation in real Banach spaces // Studia Math. 1954. Vol. 14, №2 P. 214–231.
3. **Valentine F.A.** A Lipschitz condition preserving extension for a vector function //Amer. J. Math. 1945. Vol. 67, №1. P. 83–93.
4. **Немировский А.С.** Гладкая и полиномиальная аппроксимация непрерывных функций на гильбертовом пространстве. Дис. на соиск. уч. ст. канд. физ.-мат. наук. МГУ, мех.-мат. 1973.
5. **Семенов С.М.** О симметрических функциях класса $D_u^2(H)$ // Функциональный анализ и его приложения. 1972. Т. 6, №3. С. 85–86.
6. **Семенов С.М.** Симметрические функции на пространствах L_p: Дис. на соиск. уч. ст. канд. физ.-мат. наук. МГУ, мех.-мат. 1973.
7. **Немировский А.С., Семенов С.М.** О полиномиальной аппроксимации на гильбертовом пространстве//Мат. сб. 1973. Т. 92, №2. С. 257-281.
8. **Царьков И.Г.** Сглаживание равномерно непрерывных отображений в пространствах L_p // Мат. заметки. 1993. Т. 54, №3. С. 123-140.
9. **I.G. Tsar'kov.** Smoothing of mappings on L_p spaces// Rus. J. Math. Physics. 2004. Vol. 11, №2. P. 234–241.

Том 11 № 2 2005

УДК 517.518.86+519.147

РАСПОЛОЖЕНИЕ ТОЧЕК НА ТОРЕ И НА ПЛОСКОСТИ[1]

В. А. Юдин

Даются верхние оценки мощности кодов на торе. Для специального вида решетчатых спиралей определяется их радиус упаковки и оценивается радиус покрытия.

Работа состоит из двух частей. Незадолго до своей кончины С.Б. Стечкин интересовался (в связи с оценками тригонометрических сумм), каково наибольшее количество точек из n-мерного тора $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ с большими попарными расстояниями. По его просьбе автор привел несколько оценок, но они не были использованы тогда и не были опубликованы позднее. Недавно О.Р. Мусин вновь поднял этот вопрос. В первой части дадим их вывод.

Вторая часть инициирована работой [1], в которой применяются специальные дискретные множества (решетчатые спирали) из комплексной плоскости $\mathbb{C}$ вида $z_n = \rho_n e^{i\theta_n},\ n = 0, 1, \ldots$ Для одного интересного случая

$$W = \left\{z_n \in \mathbb{C} : z_n = \sqrt{n} e^{2\pi i\alpha n}\right\}_{n=0}^{\infty}, \qquad \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

вычисляем наименьшее расстояние между различными точками из W. Доказываем конечность радиуса покрытия плоскости $\mathbb{C}$ множеством одинаковых кругов с центрами из W.

1. Мощность кодов на торе

За расстояние между точками $x = (x_1, ...x_n),\ y = (y_1, ...y_n)$ из $\mathbb{T}^n$ принимаем величину

$$\rceil x - y\lceil = \left\{\rfloor x_1 - y_1\lfloor^2 + ... + \rfloor x_n - y_n\lfloor^2\right\}^{1/2} \tag{1.1}$$

где $\rfloor x\lfloor$ — расстояние от x до ближайшего целого. Множество $W,\ W \subset \mathbb{T}^n$, называется 2ε-кодом, если для любых двух различных точек $x, y \in W$ выполняется неравенство $\rceil x - y\lceil \geq 2\varepsilon$. Самое большое расстояние между двумя точками на торе равно $\sqrt{n}/2$, поэтому в определении кода необходимо ограничиться изменением параметра ε в пределах $0 < \varepsilon \leq \sqrt{n}/4$. Наибольшее количество точек 2ε-кода обозначим через $N_n(\varepsilon)$. Геометрическая интерпретация: $N_n(\varepsilon)$ — наибольшее количество непересекающихся открытых шаров радиуса ε, которые можно расположить на $\mathbb{T}^n$. Основной вопрос заключается в нахождении границ для $N_n(\varepsilon)$. Простейший случай $\varepsilon = \sqrt{n}/4$ очевиден из рассмотрения множества $W = \{(0, \ldots, 0), (1/2, \ldots, 1/2)\}$: ясно, что $N_n(\sqrt{n}/4) = 2$.

При $\varepsilon < \sqrt{n}/4$ для оценки мощности кода используем соображением Ф. Дельсарта [2, 3] в тригонометрическом варианте. Пусть

$$f(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_\nu e^{2\pi i\nu x} \qquad (\hat{f}_\nu \geq 0, \quad \hat{f}_0 > 0)$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00986)

— тригонометрический полином, удовлетворяющий неравенству

$$f(x) \le 0, \qquad \rceil x \lceil \ge 2\varepsilon, \qquad x \in \mathbb{T}^n.$$

Тогда справедлива оценка

$$N_n(\varepsilon) \le \frac{f(0)}{\hat{f}_0}, \qquad n \in N. \tag{1.2}$$

Ее вывод очевиден [4]. Дадим способ построения таких полиномов.

Так как

$$|\sin \pi x| \ge 2\rfloor x \lfloor, \qquad x \in \mathbb{T},$$

то

$$\sum_{j=1}^{n} \sin^2 \pi x_j \ge 4 \sum_{j=1}^{n} \rfloor x_j \lfloor^2 = 4\rceil x \lceil^2, \qquad x \in \mathbb{T}^n,$$

откуда

$$\sum_{j=1}^{n} \cos 2\pi x_j \le n - 8\rceil x \lceil^2, \qquad x \in \mathbb{T}^n.$$

Следовательно,

$$f(x) = 32\varepsilon^2 - n + \sum_{j=1}^{n} \cos 2\pi x_j \le 0, \qquad \rceil x \lceil \ge 2\varepsilon. \tag{1.3}$$

При $\varepsilon > \sqrt{n/32}$ все коэффициенты построенного тригонометрического полинома положительны, поэтому из (1.2) находим оценку

$$N_n(\varepsilon) \le 1 + \frac{n}{32\varepsilon^2 - n}, \qquad \varepsilon > \sqrt{n/32}. \tag{1.4}$$

Умножая (1.3) на неотрицательные тригонометрические полиномы, можно получить и другие оценки. Например,

$$h(x) = n + \sum_{j=1}^{n} \cos 2\pi x_j \ge 0, \qquad x \in \mathbb{T}^n,$$

и

$$f(x)h(x) = n(32\varepsilon^2 - n + 1/2) + n\sum_{j=1}^{n} \cos 2\pi x_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \cos 4\pi x_j$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i \ne j} \cos 2\pi(x_i + x_j) + \cos 2\pi(x_i - x_j) \ge 0, \qquad \rceil x \lceil \ge 2\varepsilon.$$

При $\varepsilon > \sqrt{(n-1/2)/32}$ коэффициенты Фурье положительны, поэтому из неравенства (1.2) вытекает новая оценка

$$N_n(\varepsilon) \le 2 + \frac{2n-1}{32\varepsilon^2 - n + 1/2}, \qquad \varepsilon > \sqrt{(n-1/2)/32}. \tag{1.5}$$

Через F_2^n обозначим пространство Хемминга [3] элементов $x' = \{x'_1, \dots x'_n\}$; $x'_i \in \{0, 1\}$. Расстояние между x', y' вычисляется по формуле

$$\rho(x', y') = \sum_{x'_i \ne y'_i} 1 = \sum_{i=1}^{n} (x'_i - y'_i)^2. \tag{1.6}$$

Множество W', $W' \subset F_2^n$, называется [2, 3] d-кодом, если для всех x', $y' \in W'$, $x' \ne y'$, выполняется неравенство $\rho(x', y') \ge d$. Пусть $A(n, d)$ — наибольшая мощность d-кода из F_2^n.

Связи между сферическими кодами и кодами из F_2^n давно известны. Подобные соотношения между кодами из $\mathbb{T}^n$ и F_2^n также имеют место.

Каждому x' из F_2^n поставим в соответствие x из $\mathbb{T}^n$ по правилу $x_j = \frac{1}{2}x'_j,\ j = 1,\dots n$. Из (1.1), (1.6) находим, что d-коду W' из F_2^n ставится в соответствие $\sqrt{d}/2$-код W из $\mathbb{T}^n$, поскольку

$$\rceil x - y \lceil = \left\{ \left\rfloor \frac{x'_1 - y'_1}{2} \right\lfloor^2 + \dots + \left\rfloor \frac{x'_n - y'_n}{2} \right\lfloor^2 \right\}^{1/2} = \frac{1}{2}\sqrt{\rho(x', y')}.$$

Для любых $n \in N,\ 1 \le d \le n$, приходим к неравенству

$$A(n, d) \le N_n\left(\frac{\sqrt{d}}{4}\right).$$

Применение (1.4)–(1.5) приводит к оценкам $A(n, d)$, в частности, из (1.4) выводятся известные [2, 3, 5] границы Плоткина. В свою очередь построенные [2, 3, 5] примеры кодов из F_2^n дают нижние границы для мощности кодов из $\mathbb{T}^n$. Рассмотрим пример $n = 7,\ \varepsilon = 1/2$. Из (1.4) находим $N_7\left(\frac{1}{2}\right) \le 8$. Расположим центры восьми шаров на $\mathbb{T}^7$ в точках:

$$x^{(0)} = (0, 0, \dots 0), \qquad x^{(1)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, 0\right),$$

$$x^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \dots, \quad x^{(7)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right).$$

Координаты $x^{(j)}$ получены циклическим сдвигом координат $x^{(1)}$ на $j-1$ позиций влево. Очевидно, $\left\rceil x^{(i)} - x^{(j)} \right\lceil = 1,\ \varepsilon = 1/2$, и, следовательно, $N_7(1/2) \ge 8$. На $\mathbb{T}^7$ можно расположить самое большее 8 шаров радиуса 1/2. Аналогичные конфигурации построены в пространствах некоторых других размерностей; при этом определяющую роль играет наличие матриц Адамара.

2. Решетчатые спирали

Пусть φ — аргумент $z,\ z \in \mathbb{C},\ |z|$ — модуль $z,\ RB_a = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < R\}$ — круг радиуса R с центром в точке a.

Теорема 1. *Пусть*

$$W = \{z_n\}_0^\infty = \left\{\sqrt{n}e^{2\pi i\alpha n}\right\}_0^\infty, \qquad \alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Тогда

$$d(W) = \inf_{n \ne m} |z_n - z_m| = 1. \tag{2.1}$$

Доказательство. Подсчитаем расстояние между точками $z_n,\ z_m$:

$$\begin{aligned} d_{n,m}^2 &= |z_n - z_m|^2 = |z_n|^2 + |z_m|^2 - 2\mathrm{Re} z_n \bar{z}_m \\ &= n + m - 2\sqrt{nm}\cos 2\pi\alpha(n - m) \\ &= (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2 + 2\sqrt{nm}(1 - \cos 2\pi\alpha(n - m)) \\ &= (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2 + 4\sqrt{nm}\sin^2 \pi(n - m)\alpha. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Если n, m таковы, что $|\sqrt{n} - \sqrt{m}| \ge 1$, то из (2.2) находим, что $d_{n,m} \ge 1$. Если одно из чисел n, m равно нулю, то из определения множества W вытекает неравенство $d_{n,m} \ge 1$. Без ограничения общности можно принять $n < m$. В дальнейшем будем считать, что $(n,m) \in D$, $D = \{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 : 1 \le n < m,\ \sqrt{m} < 1 + \sqrt{n}\}$. Оценим снизу $d_{n,m}$ на D. В связи с экстремальными задачами теории приближения функций из пространства L_2 в [6] выделен класс иррациональных чисел $\{\beta\}$, для которых доказано неравенство

$$|\sin \pi\beta q| \ge q^{-1}|\sin \pi\beta|, \qquad q \in N.$$

Золотое сечение α принадлежит этому классу. Из (2.2) находим

$$d_{n,m}^2 \ge (\sqrt{m} - \sqrt{n})^2 + \frac{4\sqrt{nm}}{(m-n)^2}\sin^2 \pi\alpha.$$

По неравенству $a^2 + b^2 \ge 2ab$ получаем

$$d_{n,m}^2 \ge \frac{4(nm)^{1/4}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}\sin \pi\alpha = 4\sin\pi\alpha\frac{(\sqrt{m/n})^{1/2}}{1+\sqrt{m/n}}.$$

В области D $x = \sqrt{m/n} < 1/\sqrt{n} + 1 \le 2,\ x > 1$, функция $y(x) = \sqrt{x}/(1+x)$ монотонно убывает на отрезке $[1,2]$, следовательно,

$$d_{n,m}^2 > (4\sin\pi\alpha)y(2) = 4\sqrt{2}\sin\pi\alpha/3 > 1.$$

Последнее неравенство проверяется непосредственными вычислениями. Неравенство $d_{n,m} \ge 1$ установлено для всех возможных случаев. Равенство $d_{n,m} = 1$ возможно лишь в случаях $n = 0,\ m = 1$ или $n = 1,\ m = 0$. Теорема доказана.

В дальнейшем под обозначением $A \ll B$ понимаем неравенство $A \le cB$ с некоторой константой c, не зависящей от A и B.

Примечание 1. Если рассматривается двусторонняя спираль

$$W^* = \{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \left\{\sqrt{|n|}e^{2\pi i\alpha n}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}, \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

то расстояния между некоторыми точками W^* оказываются сколь угодно малыми. В спирали W^* возьмем две сопряженные точки z_{-n} и z_n. Имеем

$$|z_n - z_{-n}| = |n|^{1/2}\left|e^{4\pi i\alpha n} - 1\right| \ll |n|^{1/2}\rfloor 2\alpha n\lfloor,$$

а по теореме Дирихле [7]

$$\min_{1\le n\le N}|n|^{1/2}\rfloor 2\alpha n\lfloor \ll N^{1/2}N^{-1} \ll N^{-1/2}.$$

Примечание 2. Рассмотрим совокупность кругов $\left\{\frac{1}{2}B(z_n)\right\}_{z_n\in W}$. Из равенства (2.1) вытекает, что плотность упаковки $\mathbb{C}$ этой системой кругов равна $1/4$. Действительно, выберем сколь угодно большой радиус R, тогда из определения спирали W находим, что количество ее точек, попавших в $RB(0)$, удовлетворяет соотношению

$$\sum_{z_n\in W\bigcap RB(0)} 1 = R^2\{1+o(1)\}, \qquad R\to\infty.$$

Занимаемая кругами площадь равна $\frac{\pi R^2}{4}\{1+o(1)\}$, $R\to\infty$, значит, плотность

$$\delta(W) = \lim_{R\to\infty}\frac{\pi R^2/4\{1+o(1)\}}{\pi R^2\{1+o(1)\}} = \frac{1}{4}.$$

Конечно, это значение меньше наилучшей плотности $\pi/\sqrt{12}$. Точное значение радиуса покрытия

$$R(W) = \sup_{z\in\mathbb{C}}\inf_n |z - z_n|$$

спирали W неизвестно, но несложно установить его конечность. Она вытекает из свойств равномерного распределения последовательности $\{k\alpha\}$ на торе $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Теорема 2. $R(W) \ll 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $H = H_n = [\sqrt{n}\,] + 1$; через K_n обозначим кольцо

$$K_n = \{z \in \mathbb{C} : \sqrt{n} \le |z| \le \sqrt{n+H}\}, \qquad n \in N.$$

Очевидно,

$$\mathbb{C} = \{z : |z| \le 1\} \bigcup \left(\bigcup_{n \in N} K_n \right).$$

Рассмотрим точки $\{z_k\}_{n \le k < n+H}$ из W, попавшие в K_n. Проведем через них лучи $\varphi_k = 2\pi k\alpha$, $n \le k < n+H$. Они разбивают кольцо K_n на H частей D_k; оценим их диаметры. С этой целью рассмотрим на $\mathbb{T}$ множество $M = \{k\alpha\}_n^{n+H}$. Его разностным множеством $M^* = \{a - b : a, b \in M, a \ne b\}$, окажется множество $\pm 1\alpha, \pm 2\alpha, \dots, \pm H\alpha$. Следовательно, расстояния между точками из M — это числа $\rfloor\alpha\lfloor$, $\rfloor 2\alpha\lfloor, \dots, \rfloor H\alpha\lfloor$. Подходящими дробями [7] для α являются отношения чисел Фибоначчи P_k/P_{k+1}, которые поочередно — то справа, то слева — приближаются к α. При четном k находим [7]

$$P_{k+1}\alpha - P_k \ll 1/P_k$$

и

$$P_k\alpha - P_{k-1} \gg -1/P_{k-1}.$$

Поскольку $P_{k+1} \ll P_k$, то у любой точки $k\alpha$, $k\alpha \in M$, справа и слева найдутся [7] в M другие точки на расстоянии $\ll H^{-1}$. Значит, угловое расстояние γ между любыми соседними лучами $\varphi = \varphi_k, k = n, \dots, n+H$ по порядку не превосходит H^{-1}, $\gamma \ll H^{-1}$. (На самом деле подобная оценка имеется и снизу).

Пусть $z' = \rho_1 e^{i\varphi_1}$, $z'' = \rho_2 e^{i\varphi_2}$ принадлежат D_k, тогда

$$|z' - z''| = \left|\rho_1 e^{i\varphi_1} - \rho_2 e^{i\varphi_2}\right| = \left|(\rho_1 - \rho_2)e^{i\varphi_1} + \rho_2(e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2})\right|$$

$$\le |\rho_1 - \rho_2| + \rho_2 \left|e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2}\right| \ll |\sqrt{n+H} - \sqrt{n}| + \gamma\sqrt{n+H} \ll H/\sqrt{n} + \sqrt{n}/H.$$

В силу выбора H получаем $|z' - z''| \ll 1$. Так как в каждой области D_k содержится точка из спирали, то все области D_k покрываются кругами конечного радиуса с центрами из W. Оценки радиуса равномерны относительно n, значит, $R(W) \ll 1$. Теорема доказана.

Поступила 15.05.04

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Soljanin E.** Written sequences on the plane // IEEE Trans. Inform. Theory. 2002. Vol. 48, № 6. P. 1344–1354.
2. **Дельсарт Ф.** Алгебраический подход к схемам отношения теории кодирования. М.: Мир, 1973.
3. **Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А.** Теория кодов, исправляющих ошибки. М.: Связь, 1979.
4. **Юдин В.А.** Упаковка шаров в Евклидово пространство и экстремальные свойства тригонометрических полиномов // Дискрет. математика. 1989. Т. 1, № 2. С. 155–158.
5. **Плоткин М.** Двоичные коды с заданным минимальным расстоянием // Киберн. сб. 7. М.: ИЛ, 1963. С. 60–70.
6. **Юдин В.А.** Диофантовы приближения в экстремальных задачах L_2 // Докл. АН СССР. 1980. Т. 251, № 1. С. 54–57.
7. **Хинчин А.Я.** Цепные дроби. М.: Наука, 1978.

R. R. Akopyan. **Kolmogorov's Inequality for Functions Analytic in a Half-Plane.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. Vol. 11, no. 2. P. 3–9.

The exact Kolmogorov inequality

$$\|f^{(k)}\|_p \le \|f\|_p^{\,1-k/n}\,\|f^{(n)}\|_p^{\,k/n}, \quad 1\le k<n, \quad 1\le p\le\infty,$$

is obtained in the Hardy space H_p of functions analytic in a half-plane.

N. Yu. Antonov. **Growth Rate of Sequences of Multiple Rectangular Fourier Sums.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. Vol. 11, no. 2. P. 10–29.

In the case when a sequence of d-dimensional vectors $\mathbf{n}_k = (n_k^1, n_k^2, ..., n_k^d)$ with nonnegative integral coordinates satisfies the condition

$$n_k^j = \alpha_j m_k + O(1), \quad k\in\mathbb{N}, \quad 1\le j\le d,$$

where $\alpha_1,...,\alpha_d$ are nonnegative real numbers and $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ is a sequence of positive integers, the following estimate of the rate of growth of sequences $S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x})$ of rectangular partial sums of multiple trigonometric Fourier series is obtained: if $f\in L(\ln^+ L)^{d-1}([-\pi,\pi)^d)$, then

$$S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x}) = o(\ln k) \quad \text{a.e.}$$

Analogous estimates are valid for conjugate series as well.

V. M. Badkov. **Zeros of Orthogonal Polynomials.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. Vol. 11, no. 2. P. 30–46.

Let $\{T_{\sigma,n}(\tau)\}_{n=0}^{\infty}$ be an orthonormal on $[0,2\pi]$, with respect to some measure $d\sigma(\tau)$, system of trigonometric polynomials obtained from the sequence $1, \sin\tau, \cos\tau, \sin 2\tau, \cos 2\tau, \ldots$ by Schmidt's orthogonalization method. A formula is established for the increment, at a point of the unit circle, of the argument of an algebraic polynomial orthogonal on it with respect to measure $d\sigma(\tau)$. Using this formula, for $n>0$, it is proved that zeros of the polynomial $T_{\sigma,n}(\tau)$ are real and simple and that zeros of the linear combinations $aT_{\sigma,2n-1}(\tau)+bT_{\sigma,2n}(\tau)$ and $-bT_{\sigma,2n-1}(\tau)+aT_{\sigma,2n}(\tau)$ alternate if $a^2+b^2>0$. For a wide class of weights with singularities whose orders are defined by finite products of real powers of concave moduli of continuity, it is proved that there exist positive constants C_1 and C_2, depending only on the weight, such that the distance between neighboring zeros of an orthogonal (with this weight) trigonometric polynomial of order n lies between $C_1 n^{-1}$ and $C_2 n^{-1}$. In the form of corollaries, we deduce both known and new results on zeros of polynomials orthogonal with respect to a measure on a segment (possibly infinite).

N. V. Baidakova. **A Method of Hermite Interpolation by Polynomials of the Third Degree on a Triangle.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. Vol. 11, no. 2. P. 47–52.

As a rule, in constructing triangular finite elements of Hermite or Birkhoff type, the denominators of interpolation error bounds contain the sine of the minimum angle in the triangle. This leads to the necessity to impose some restrictions on the triangulation of the domain. Excluding the paper by Yu.N. Subbotin published in the present issue, the author does not know any description of the cases where the minimum angle is absent in the estimates of all derivatives up to order n inclusive when a function is interpolated by Hermite or Birkhoff's polynomial of degree n. In this paper, a new method of Hermite interpolation of a function in two variables on a triangle by polynomials of degree 3 is suggested. For the proposed method, the sine of the minimum angle is absent in the denominators of error bounds for any derivatives of the function up to the third order, which makes it possible to weaken our requirements on the triangulation.

V. I. Berdyshev. **Problem of Determination of Coordinates, Orientation, and Speed of an Autonomous Vehicle by a Geophysical Field.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. Vol. 11, no. 2. P. 53–59.

A new mathematical model is given for navigation of an autonomously controlled vehicle, i.e., determination on the basis of a geophysical field (as a whole and by fragment of it), not only coordinates and orientation, but also the vehicle speed at each instant. The notion of a field fragment is refined in the model.

In connection with the problem of economical storage of the onboard information about the geophysical field as a whole, the necessary conditions are given for a stored function that belongs to a given class, approximates the field, and minimizes navigation error.

P. Yu. Glazyrina. **Markov–Nikol'skii Inequality for the Spaces L_q, L_0 on a Segment.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. Vol. 11, no. 2. P. 60–71.

For algebraic polynomials of degree n on a segment, an exact constant is found in the Markov–Nikol'skii inequality $\|P^{(k)}\|_q \le M_{q,0}(n,k)\|P\|_0$, $1 \le q \le \infty$.

D. V. Gorbachev. **An Integral Problem of Konyagin and the (C, L)-Constants of Nikol'skii.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. Vol. 11, no. 2. P. 72–91.

An extremal problem concerning functions with small supports posed by Konyagin in connection with number-theoretic applications is considered. It is shown to be related to extremal problems on the best Nikol'skii constants in the inequalities for C- and L-norms of trigonometric polynomials and entire functions of exponential type. New estimates for constants in these problems are obtained.

V. I. Ivanov, D. V. Gorbachev, Yu. D. Rudomazina. **Some Extremal Problems for Periodic Functions with Conditions on Their Values and Fourier Coefficients.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. Vol. 11, no. 2. P. 92–111.

A solution of the discrete variant of the Fejér problem on the greatest value, at zero, of an even nonnegative trigonometric polynomial with fixed average is given. As a corollary, for all rational h, $0 < h \le 1/2$, the greatest averages are obtained for continuous 1-periodic even functions, with nonnegative Fourier coefficients and a fixed value at zero, equal to zero on the segment $[h, 1-h]$ (the Turán problem) or nonpositive on this segment (the Delsarte problem). Similar problems are also solved in the discrete case. In addition, in one case, a solution of the extremal Montgomery problem for nonnegative trigonometric polynomials is given.

S. V. Konyagin. **Divergence Everywhere of Subsequences of Partial Sums of Trigonometric Fourier Series.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. Vol. 11, no. 2. P. 112–119.

It is proved that for any increasing sequence of natural numbers $\{m_j\}$ and any nondecreasing function $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ satisfying the condition

$$\varphi(u) = o(u \ln \ln u) \qquad (u \to \infty)$$

there is a function $f \in L[0, 2\pi]$ such that

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|f(x)|)dx < \infty,$$

and the Fourier partial sums $S_{m_j}(f)$ diverge unboundedly everywhere.

Yu. N. Subbotin. **A New Cubic Element in the FEM.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. Vol. 11, no. 2. P. 120–130.

In the paper, a new two-dimensional cubic element in the finite element method is suggested. It is proved that, in contrast to the classical element with interpolation at the center of gravity, the new element under the approximation of any admissible derivatives is free of the known condition of "sine of the smallest angle" of triangulation. It proved well to replace this condition by a weaker condition of "sine of the greatest angle" of triangulation. It is established, up to absolute constants, that the obtained estimates of approximation errors of derivatives are unimprovable. For the new element, the estimates of approximation error become worse only for triangles with two small angles. In terms of barycentric coordinates, fundamental interpolating polynomials are explicitly written out for the suggested element.

N. I. Chernykh and Yu. N. Subbotin. **Construction of Wavelets in $W_2^m(\mathbb{R})$ and Their Approximative Properties in Different Metrics.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. Vol. 11, no. 2. P. 131–167.

Wavelet bases in the Sobolev space $W_2^m(\mathbb{R})$ on the axis $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ orthogonal with respect to any given inner product generating one of equivalent norms in $W_2^m(\mathbb{R})$ are constructed. The rate of convergence of series in these bases for smooth functions from $L_q(\mathbb{R})$ $(2 \le q \le \infty)$ is investigated.

S. A. Telyakovskii. **Some Properties of Fourier Series of Functions with Bounded Variation. II** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. Vol. 11, no. 2. P. 168–174.

We investigate ways to divide the Fourier series of a function of bounded variation into blocks such that the sum of the series consisting of the absolute values of the blocks is square integrable on the period.

N. N. Kholshchevnikova. **Uniqueness for Trigonometric Series with Respect to an Increasing Number of Variables.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. Vol. 11, no. 2. P. 175–181.

For series with respect to Jessen's system, an analog of the Cantor theorem on the uniqueness of a trigonometric series is proved.

I. G. Tsar'kov. **Localization of Smooth and Smoothing of Uniformly Continuous Mappings.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. Vol. 11, no. 2. P. 182–195.

The problem of representation of a smooth function as a sum of compactly supported functions of the same smoothness with supports of an arbitrarily small size is solved, as well as the problem of uniform approximation of uniformly continuous (smooth) mappings by mappings having the maximal possible local and uniform smoothness.

V. A. Yudin. **Placement of Points on a Torus and in a Plane.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. Vol. 11, no. 2. P. 196–200.

Estimates from above of cardinality of codes on a torus are given. For a special type of lattice spirals their packing radius is determined and covering radius is estimated.

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Сборник научных трудов

Рекомендовано к изданию Ученым советом
Института математики и механики
и НИСО Уральского отделения Российской академии наук

ЛР № 020764 от 24.04.98

Ответственные за выпуск: Л. П. Власов, А. В. Маринов

Оригинал-макет подготовлен в ИММ УрО РАН

НИСО УрО РАН. № 34(06)
Подписано к печати 10.10.05. Формат $60 \times 84^1/_8$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 19, 5. Уч.-изд. л. 25,3. Тираж 200 экз. Заказ № 133

Институт математики и механики УрО РАН
620219 г. Екатеринбург, ГСП-384, ул. С. Ковалевской, 16.

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
“Уральский центр академического обслуживания”.
620219, г. Екатеринбург, ул. Первомайская, 91.