ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Online First 2026

УДК 512.542.5

# О ГЛАВНЫХ РЯДАХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЛИЕВА ТИПА[1]

**А. С. Кондратьев, В. В. Кораблева, В. И. Трофимов**

Конечные группы лиева типа образуют основной массив конечных простых групп, служащий моделью для их классификации, и имеют тесные связи с другими областями математики. Важным классом локальных подгрупп в конечной группе лиева типа являются параболические подгруппы. Пусть $U$ — нормальная подгруппа конечной группы $P$. Для главного ряда группы $P$, содержащего $U$, нормальный ряд подгрупп группы $U$, образованный всеми попавшими в $U$ членами этого главного ряда, будем называть включенным в $U$ фрагментом этого главного ряда. Нахождение всех включенных в $U$ фрагментов главных рядов группы $P$ влечет нахождение всех нормальных подгрупп группы $P$, содержащихся в $U$ Пусть $G$ — конечная простая группа лиева типа над полем характеристики $p$, отличная от группы Титса $^2F_4(2)'$, и $P$ — параболическая подгруппа в $G$ с унипотентным радикалом $U$. Группа $G$ называется специальной, если $p=2$ для групп $G$ типов $C_l$, $G_2$, $F_4$, $^2B_2$ или $^2F_4$ и $p=3$ для групп $G$ типов $G_2$ или $^2G_2$. Задача нахождения всех фрагментов главных рядов группы $P$, включенных в $U$, для всех параболических максимальных подгрупп $P$ группы $G$ исследовалась в работах ряда авторов, особенно в случае неспециальных групп $G$. Представляющий значительный интерес случай специальных групп $G$ был исследован в меньшей общности. В настоящей работе завершается описание всех фрагментов главных рядов группы $P$, включенных в $U$, с указанием нижнего и верхнего центральных рядов группы $U$ для всех специальных групп $G$ исключительного лиева типа и всех их параболических максимальных подгрупп $P$. Кроме того, аналогичные результаты получены для группы Титса $^2F_4(2)'$ и ее 2-локальных максимальных подгрупп.

Ключевые слова: конечная простая группа лиева типа, параболическая максимальная подгруппа, главный ряд, унипотентный радикал, фрагмент главного ряда.

**A. S. Kondrat'ev, V. V. Korableva, V. I. Trofimov. On chief series of parabolic maximal subgroups of finite simple groups of exceptional Lie type.**

Finite groups of Lie type form the main array of finite simple groups, serving as a typical model for their classification, and have close relations with other areas of mathematics. An important class of local subgroups of finite groups of Lie type are their parabolic subgroups. Let $U$ be a normal subgroup of a finite group $P$. For a chief series of $P$, containing $U$ as a member, the normal series of subgroups of $U$ formed by all the members of the original series contained in $U$ is called the fragment of the original chief series of $P$ included in $U$. The determination of all fragments of chief series of $P$ included in $U$ implies the determination of all normal subgroups of $P$ contained in $U$. Let $G$ be a finite simple group of Lie type over a field of characteristic $p$, different from the Tits group $^2F_4(2)'$, and $P$ be a parabolic subgroup in $G$ with the unipotent radical $U$. The group $G$ is called special, if $p=2$ for $G$ of type $C_l$, $G_2$, $F_4$, $^2B_2$ or $^2F_4$ and $p=3$ for $G$ of type $G_2$ or $^2G_2$. The problem of determination of all fragments of chief series of $P$ included in $U$ for all parabolic maximal subgroups $P$ of $G$ was well studied in the case of non-special groups $G$ by several authors. The case of special groups $G$ is of significant interest, but was less studied. In this paper, we complete the determination of all fragments of chief series of $P$ included in $U$ and find the lower and the upper central series of $U$ for all special groups $G$ of exceptional Lie type and all their parabolic maximal subgroups $P$. Furthermore, similar results for the Tits group $^2F_4(2)'$ and all its 2-local maximal subgroups are obtained.

Keywords: finite simple group of Lie type, parabolic maximal subgroup, chief series, unipotent radical, fragment of chief series.

**MSC:** 20D06, 20D30

**DOI**: 10.21538/0134-4889-2026-32-1-fon-02

[1]Работа первого и третьего авторов выполнены в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2025-1549).

## Введение

Конечные группы лиева типа образуют основной массив конечных простых групп, служащий моделью для их классификации, и имеют тесные связи с другими областями математики. Важным классом локальных подгрупп в конечной группе лиева типа являются параболические подгруппы (см. [1; 2]). Нами исследуются нормальные унипотентные подгруппы параболических максимальных подгрупп конечных простых групп исключительного лиева типа.

Под главными рядами конечных групп в этой работе нам будет удобно понимать убывающие главные ряды (с убывающей нумерацией членов). Пусть $U$ — нормальная подгруппа конечной группы $P$. Для главного ряда группы $P$, содержащего $U$, нормальный ряд подгрупп группы $U$, образованный всеми попавшими в $U$ членами этого главного ряда, будем называть *включенным в $U$ фрагментом* этого главного ряда. Если подгруппа $U$ нильпотентна, то этот фрагмент является центральным рядом в $U$. Заметим, что для нормальной подгруппы $U$ конечной группы $P$ задача нахождения всех фрагментов главных рядов группы $P$, включенных в $U$, по существу, равносильна задаче нахождения всех нормальных подгрупп группы $P$, содержащихся в $U$. (Ясно, что множество всех членов всех фрагментов главных рядов группы $P$, включенных в $U$, совпадает с множеством всех нормальных подгрупп группы $P$, содержащихся в $U$; с другой стороны, если известно множество всех нормальных подгрупп группы $P$, содержащихся в $U$, то фрагментами главных рядов группы $P$, включенными в $U$, являются в точности неуплотняемые убывающие ряды таких нормальных подгрупп с первым членом $U$ и последним членом 1.)

Пусть $G$ — конечная простая группа лиева типа над полем характеристики $p$, отличная от группы Титса ${}^2F_4(2)'$, и $P = U \rtimes L$ — параболическая подгруппа в $G$, где $U = O_p(P)$ — унипотентный радикал и $L$ — дополнение Леви в $P$ соответственно (см. [2]). Группа $G$ называется *специальной* (см. [3]) или *сингулярной* [4, определение 1.12.8], если $p = 2$ для групп $G$ типов $C_l$, $G_2$, $F_4$, ${}^2B_2$ или ${}^2F_4$ и $p = 3$ для групп $G$ типов $G_2$ или ${}^2G_2$. В специальных группах $G$ коммутаторные соотношения, определяющие строение унипотентных подгрупп (т. е. $p$-подгрупп), ведут себя особым образом и требуют отдельного рассмотрения.

Нормальное строение параболических подгрупп неспециальных групп лиева типа весьма детально исследованы в [3] и в части 3.2 из [4]. Также в части 3.2 из [4] и в ряде других работ (см. разд. 1) для специальных групп лиева типа в отдельных случаях были построены фрагменты главных рядов их параболических максимальных подгрупп, включенные в унипотентные радикалы, и найдены нижние и верхние центральные ряды этих унипотентных радикалов. В настоящей работе для конечных простых групп исключительного лиева типа, являющихся специальными, завершается описание всех фрагментов главных рядов параболических максимальных подгрупп, включенных в их унипотентные радикалы (т. е., по существу, описание всех нормальных подгрупп параболических максимальных подгрупп, содержащихся в их унипотентных радикалах), с указанием нижнего и верхнего центральных рядов унипотентных радикалов (см. теорему 1). Аналогичные результаты получены для группы Титса ${}^2F_4(2)'$ и ее 2-локальных максимальных подгрупп (см. теорему 2). Группа Титса ${}^2F_4(2)'$ (см. [5]) имеет особый статус среди конечных простых групп. В отличие от ${}^2F_4(2)$ она не имеет $BN$-пары, но согласно терминологии из [4], которой мы здесь следуем, считается простой группой лиева типа в характеристике 2 (рассматриваемой нами ни как специальная, ни как неспециальная). Аналогом параболических максимальных подгрупп в ней служат ее 2-локальные максимальные подгруппы, которые являются пересечениями с ${}^2F_4(2)'$ параболических максимальных подгрупп непростой группы ${}^2F_4(2)$ исключительного лиева типа.

Эти результаты потребовались нам при исследовании усиленной версии гипотезы Симса о конечных примитивных группах подстановок с простым цоколем, изоморфным группе исключительного лиева типа.

## 1. Обозначения, терминология и формулировки теорем

Используемые в статье терминология и обозначения в основном стандартны (см., например, [1; 2; 4; 6; 7]).

Зафиксируем некоторые обозначения, которых мы будем придерживаться во всей статье. Пусть $G$ — конечная простая группа лиева типа над полем $GF(q)$ простой характеристики $p$, отличная от ${}^2F_4(2)'$. В группе $G$ подгруппа Бореля $B$ и мономиальная подгруппа $N$, нормализующая подгруппу Картана $H = B \cap N$, образуют естественную $BN$-пару некоторого ранга $l$ с группой Вейля $W = N/H$, группа $B$ есть полупрямое произведение максимальной унипотентной подгруппы $U$ и абелевой $p'$-подгруппы $H$. Подгруппы группы $G$, сопряженные с подгруппами, содержащими подгруппу Бореля $B$, называются параболическими подгруппами в $G$. В группе $G$ имеется с точностью до сопряжения $l$ параболических максимальных подгрупп с представителями $P_k$, $1 \leqslant k \leqslant l$, причем $P_k$ имеет разложение Леви $P_k = U_k \rtimes L_k$, где $U_k = O_p(P_k)$ — унипотентный радикал, а $L_k$ — дополнение Леви параболической подгруппы $P_k$.

Предположим, что $G$ имеет нормальный лиев тип. Пусть $\Phi$ — соответствующая $G$ корневая система из $l$-мерного евклидова пространства, $\pi = \{p_1, \dots, p_l\}$ — множество фундаментальных корней в $\Phi$ и $\Phi^+$ — множество положительных корней в $\Phi$ относительно $\pi$. Упорядочение корней в $\pi$ предполагается согласованным со стандартным упорядочением вершин в диаграмме Дынкина корневой системы $\Phi$ (см. [1, табл. I–IX]). Обозначим произвольный корень $\sum_{i=1}^{l} t_i p_i$ из $\Phi$, где $t_1, \dots, t_l \in \mathbb{Z}$, через $t_1 \dots t_l$. Для любого $k \in \{1, \dots, l\}$ через $\Phi_k$ обозначим множество корней из $\Phi$, натянутых на $\pi \setminus \{p_k\}$, и положим $\Phi_k^+ = \Phi^+ \cap \Phi_k$. Для любого корня $r \in \Phi$ через $X_r$ обозначается соответствующая $r$ корневая подгруппа в $G$, через $x_r(t)$ — корневой элемент из $X_r$, соответствующий элементу $t$ поля $GF(q)$. Положим $x_r = x_r(1)$ для $r \in \Phi$. Группа Вейля $W$ указанной $BN$-пары отождествляется с группой Вейля корневой системы $\Phi$. Для $k \in \{1, \dots, l\}$ полагаем $P_k = U_k \rtimes L_k$, где $U_k = \langle X_r \mid r \in \Phi^+ \setminus \Phi_k^+\rangle$ и $L_k = \langle H, X_r \mid r \in \Phi_k\rangle$.

Если группа $G$ имеет скрученный лиев тип, то в $G$ также определяются корневые подгруппы (см. [2; 4]).

Подгруппа $H$ нормализует каждую корневую подгруппу $X$ из $G$, при этом неединичная $H$-допустимая подгруппа из $X$ совпадает с подгруппой $X$ или ее подгруппой Фраттини (см. [2; 4]). При $q > 5$, более того, из [8, лемма 3] следует, что любая неединичная $H$-допустимая унипотентная подгруппа группы $G$ является произведением подгрупп, каждая из которых равна корневой подгруппе или ее подгруппе Фраттини. Заметим, что, используя рассуждения из доказательства леммы 3 работы [8], можно доказать, что то же заключение справедливо (без привлечения подгрупп Фраттини) и для $G = F_4(4)$.

Пусть $\Phi$ — корневая система типа $G_2$. Тогда $\Phi^+$ состоит из элементов (см. [1, табл. IX]), которые мы занумеруем следующим образом:

$$r_1 = 10, r_2 = 01, r_3 = 11, r_4 = 21, r_5 = 31, r_6 = 32.$$

При этом в дальнейшем для сокращения записи мы для $i \in \{1, \dots, 6\}$ будем обозначать $X_{r_i}$ через $X_i$, $x_{r_i}(t)$, где $t \in GF(q)$, через $x_i(t)$, $X_{-r_i}$ через $X_{-i}$, а $x_{-r_i}(t)$, где $t \in GF(q)$, через $x_{-i}(t)$ (таким образом, $x_i = x_{r_i}(1)$ и $x_{-i} = x_{-r_i}(1)$). Для сокращения записи мы будем, кроме того, для произвольных $r_{i_1}, \dots, r_{i_m} \in \Phi^+$ через $\langle i_1, \dots, i_m\rangle$ обозначать подгруппу $\langle X_{r_{i_1}}, \dots, X_{r_{i_m}}\rangle$. Далее, имеется подстановка $(r_1, r_2)(r_3, r_5)(r_4, r_6)$ на множестве $\Phi^+$, индуцированная симметрией диаграммы Дынкина типа $G_2$ (см. [2, лемма 12.3.2]). Если $p = 3$, то соответствующий этой подстановке графовый автоморфизм группы $G_2(3^f)$ переставляет параболические максимальные подгруппы $P_1$ и $P_2$ этой группы. Поэтому для решения поставленной нами задачи при $G = G_2(3^f)$ достаточно решить ее только для $P_1$.

Пусть $\Phi$ — корневая система типа $F_4$. Тогда $\Phi^+$ состоит из элементов (см. [1, табл. VIII]), которые мы занумеруем следующим образом:

$$r_1 = 1000\,, r_2 = 0100\,, r_3 = 0010\,, r_4 = 0001\,, r_5 = 1100\,, r_6 = 0110\,, r_7 = 0011\,, r_8 = 1110\,,$$
$$r_9 = 0120\,, r_{10} = 0111\,, r_{11} = 1120\,, r_{12} = 1111\,, r_{13} = 0121\,, r_{14} = 1220\,, r_{15} = 1121\,, r_{16} = 0122\,,$$
$$r_{17} = 1221\,, r_{18} = 1122\,, r_{19} = 1231\,, r_{20} = 1222\,, r_{21} = 1232\,, r_{22} = 1242\,, r_{23} = 1342\,, r_{24} = 2342.$$

При этом в дальнейшем для сокращения записи мы (аналогично случаю системы корней типа $G_2$) для $i \in \{1, \ldots, 24\}$ будем обозначать $X_{r_i}$ через $X_i$, $x_{r_i}(t)$, где $t \in GF(q)$, через $x_i(t)$, $X_{-r_i}$ через $X_{-i}$, а $x_{-r_i}(t)$, где $t \in GF(q)$, через $x_{-i}(t)$ (таким образом, $x_i = x_{r_i}(1)$ и $x_{-i} = x_{-r_i}(1)$). Для сокращения записи мы будем, кроме того, для произвольных $r_{i_1}, \ldots, r_{i_m} \in \Phi^+$ через $\langle i_1, \ldots, i_m\rangle$ обозначать подгруппу $\langle X_{r_{i_1}}, \ldots, X_{r_{i_m}}\rangle$. Далее, имеется подстановка

$$(r_1, r_4)(r_2, r_3)(r_5, r_7)(r_6, r_9)(r_8, r_{16})(r_{10}, r_{11})(r_{12}, r_{18})(r_{13}, r_{14})(r_{15}, r_{20})(r_{17}, r_{22})(r_{19}, r_{23})(r_{21}, r_{24})$$

на множестве $\Phi^+$, индуцированная нетривиальной симметрией диаграммы Дынкина типа $F_4$ (см. [2, лемма 12.3.2]). Соответствующий этой подстановке графовый автоморфизм группы $F_4(2^f)$ переставляет параболические максимальные подгруппы этой группы: $P_1$ с $P_4$ и $P_2$ с $P_3$. Поэтому для решения поставленной нами задачи при $G = F_4(2^f)$ достаточно решить ее только для $P_1$ и $P_2$.

Построение и свойства группы $G = {}^2F_4(q)$ для $q = 2^{2f+1} \geqslant 2$ можно найти в [9] или [2]. Р. Ри в [9] ввел в рассмотрение элементы $\alpha_1(t), \ldots, \alpha_{12}(t), \alpha_{-1}(t), \ldots, \alpha_{-12}(t)$, где $t \in GF(q)$. Элементы $\alpha_1(t), \ldots, \alpha_{12}(t)$, где $t \in GF(q)$, порождают максимальную унипотентную подгруппу $U$ в $G$. Любой элемент из $U$ можно однозначно записать в виде $\prod_{i=1}^{12} \alpha_i(t_i)$ для $t_i \in GF(q)$. В $G$ есть точно две параболические максимальные подгруппы, содержащие подгруппу Бореля $B = UH$, а именно: $P_1 = \langle B, \alpha_{-1}(t), \alpha_{-2}(t) \mid t \in GF(q)\rangle$ и $P_2 = \langle B, \alpha_{-3}(t) \mid t \in GF(q)\rangle$ (см., например, раздел II из [10]). Положим $\alpha_i = \alpha_i(1)$ и $\alpha_{-i} = \alpha_{-i}(1)$ для $1 \leqslant i \leqslant 12$.

Как было сказано во введении, в настоящей работе нас будет интересовать задача описания для всех исключительных групп лиева типа, являющихся специальными, всех фрагментов главных рядов их параболических максимальных подгрупп, включенных в унипотентные радикалы (т. е., по существу, всех нормальных подгрупп их параболических максимальных подгрупп, содержащиеся в унипотентных радикалах), а также описания для всех исключительных групп лиева типа, являющихся специальными, нижних и верхних центральных рядов унипотентных радикалов параболических максимальных подгрупп. Кроме того, нас будет интересовать задача описания для группы Титса всех фрагментов главных рядов ее 2-локальных максимальных подгрупп, включенных в их наибольшие нормальные 2-подгруппы, с указанием нижних и верхних центральных рядов этих наибольших нормальных 2-подгрупп.

Конечная простая группа $G$ исключительного лиева типа, является специальной, если $G$ изоморфна одной из следующих групп (где $f \geqslant 1$, если не оговорено противное): ${}^2B_2(2^{2f+1})$; ${}^2G_2(3^{2f+1})$; $G_2(2^f)$, где $f > 1$; $G_2(3^f)$; ${}^2F_4(2^{2f+1})$; $F_4(2^f)$.

Для групп ${}^2B_2(2^{2f+1})$ и ${}^2G_2(3^{2f+1})$, имеющих лиев ранг 1, строение параболических подгрупп исчерпывающим образом исследовано соответственно в [11] и [12], где, в частности, указаны единственные существующие фрагменты их главных рядов, включенные в унипотентные радикалы, и доказано совпадение этих фрагментов с нижним и верхним центральными рядами унипотентных радикалов.

Для группы $G_2(2^f)$, где $f > 1$, и $k = 1, 2$ в [4, пример 3.2.4] указан единственный существующий фрагмент главных рядов группы $P_k$, включенный в $U_k$, а также указаны (совпадающие) нижний и верхний центральные ряды группы $U_k$.

Для группы $G_2(3^f)$ и $k = 1$ в [4, пример 3.2.4] указан единственный существующий фрагмент главных рядов группы $P_1$, включенный в $U_1$, а также указаны нижний и верхний центральные ряды группы $U_1$. (Как отмечено ранее, ввиду наличия у группы $G_2(3^f)$ автоморфизма, меняющего местами подгруппы $P_1$ и $P_2$, случай $k = 2$ для группы $G_2(3^f)$ не требует отдельного рассмотрения.)

Для группы $^2F_4(2^{2f+1})$ и $k = 1$ из [4, пример 3.2.4] и [13] следует, что указанный в [4, пример 3.2.4] фрагмент главного ряда подгруппы $P_1$, включенный в ее унипотентный радикал $U_1$, является единственным. В [13] указаны системы порождающих (из множества $\{\alpha_3(t), \ldots, \alpha_{12}(t) \mid t \in GF(2^{2f+1})\}$) для членов этого ряда и найдены нижний и верхний центральные ряды унипотентного радикала $U_1$. Для группы $^2F_4(2^{2f+1})$ и $k = 2$ вопрос об описании фрагментов главных рядов группы $P_2$, включенных в $U_2$ оставался, насколько известно авторам, открытым (хотя, как представляется, такое описание может быть получено с использованием [14, §10]). В настоящей работе нами строится единственный существующий фрагмент главных рядов группы $P_2$, включенный в $U_2$, и доказывается его совпадение с нижним и верхним центральными рядами группы $U_2$.

Для группы $F_4(2^f)$ и $k = 1$ в [4, пример 3.2.4] указан единственный существующий фрагмент главных рядов группы $P_1$, включенный в $U_1$, а также указаны нижний и верхний центральные ряды группы $U_1$. Однако (оказавшийся более сложным, как это будет видно из дальнейшего) вопрос об описании фрагментов главных рядов группы $P_2$, включенных в $U_2$, оставался открытым. В настоящей работе нами дается ответ на этот вопрос с указанием нижних и верхних центральных рядов унипотентного радикала $U_2$. (Как отмечено ранее, ввиду наличия у группы $F_4(2^f)$ автоморфизма, меняющего местами подгруппы $P_1$ и $P_4$, $P_2$ и $P_3$, случаи $k = 3, 4$ для группы $F_4(2^f)$ не требуют отдельного рассмотрения.)

Таким образом, в настоящей работе завершается описание для конечных простых групп исключительного лиева типа, являющихся специальными, всех фрагментов главных рядов параболических максимальных подгрупп, включенных в их унипотентные радикалы, с указанием нижних и верхних центральных рядов этих унипотентных радикалов (см. теорему 1). В остававшихся нерассмотренными случаях члены всех найденных рядов задаются явным образом их системами порождающих. В связи с этим мы сочли целесообразным включить в формулировку теоремы 1 также перечисленные выше ранее рассмотренные случаи, задавая члены всех указанных в этих случаях рядов явным образом их системами порождающих. При этом мы не включили в доказательство теоремы 1 обоснований того, что члены построенных ранее рядов имеют указанные в теореме системы порождающих, поскольку такие обоснования с использованием коммутаторных соотношений не представляют каких-либо принципиальных трудностей.

**Теорема 1.** *Пусть $G$ — конечная простая группа исключительного лиева типа и лиева ранга $l > 1$, $P_k = U_k \rtimes L_k$, где $1 \leq k \leq l$, — параболическая максимальная подгруппа в $G$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если $G = G_2(2^f)$ и $f > 1$, то при $k = 1$ существует единственный фрагмент главных рядов группы $P_1$, включенный в ее унипотентный радикал $U_1$:*

$$U_1 > Y_2 > Y_1 > 1, \quad \text{где } U_1 = \langle 1, 3, 4, 5, 6 \rangle, \ Y_2 = \langle 4, 5, 6 \rangle, \ Y_1 = \langle 5, 6 \rangle,$$

*при этом нижний и верхний центральные ряды группы $U_1$ совпадают и имеют вид*

$$U_1 > Y_1 > 1;$$

*а при $k = 2$ единственный существующий фрагмент главных рядов группы $P_2$, включенный в ее унипотентный радикал $U_2$, совпадает с нижним и верхним центральными рядами группы $U_2$ и имеет вид $U_2 > Z_1 > 1$, где $U_2 = \langle 2, 3, 4, 5, 6 \rangle$, $Z_1 = \langle 6 \rangle$.*

(2) *Если $G = G_2(3^f)$, то при $k = 1$ существуют точно два фрагмента главных рядов группы $P_1$, включенные в ее унипотентный радикал $U_1$:*

$$U_1 > Y_2 > Y_1 > 1 \quad \text{и} \quad U_1 > Y_2 > Y_0 > 1,$$

*где $U_1 = \langle 1, 3, 4, 5, 6 \rangle$, $Y_2 = \langle 4, 5, 6 \rangle$, $Y_1 = \langle 4 \rangle$, $Y_0 = \langle 5, 6 \rangle$, при этом нижним и верхним центральными рядами группы $U_1$ являются соответственно*

$$U_1 > Y_1 > 1 \quad \text{и} \quad U_1 > Y_2 > 1.$$

(3) *Если* $G = {}^2F_4(q)$, *где* $q = 2^{2f+1} > 2$, *то при* $k = 1$ *существует единственный фрагмент главных рядов группы* $P_1$, *включенный в ее унипотентный радикал* $U_1$:

$$U_1 > Y_3 > Y_2 > Y_1 > 1,$$

*где* $U_1 = \langle \alpha_i(t_i) \mid t_i \in GF(q),\ i = 3\text{–}12\rangle$, $Y_3 = \langle \alpha_i(t_i) \mid t_i \in GF(q), i = 5, 8\text{–}12\rangle$, $Y_2 = \langle \alpha_i(t_i) \mid t_i \in GF(q),\ i = 8\text{–}12\rangle$, $Y_1 = \langle \alpha_{12}(t) \mid t \in GF(q)\rangle$, *при этом нижний и верхний центральные ряды группы* $U_1$ *совпадают и имеют вид*

$$U_1 > Y_2 > Y_1 > 1;$$

*а при* $k = 2$ *единственный существующий фрагмент главных рядов группы* $P_2$, *включенный в ее унипотентный радикал* $U_2$, *совпадает с нижним и верхним центральными рядами группы* $U_2$ *и имеет вид*

$$U_2 > Z_4 > Z_3 > Z_2 > Z_1 > 1,$$

*где* $U_2 = \langle \alpha_i(t_i) \mid t_i \in GF(q), i = 1, 2, 4\text{–}12\rangle$, $Z_4 = \langle \alpha_i(t_i) \mid t_i \in GF(q), i = 2, 5\text{–}12\rangle$, $Z_3 = \langle \alpha_i(t_i) \mid t_i \in GF(q), i = 7, 9\text{–}12\rangle$, $Z_2 = \langle \alpha_i(t_i) \mid t_i \in GF(q), i = 10, 11, 12\rangle$, $Z_1 = \langle \alpha_i(t_i) \mid t_i \in GF(q), i = 11, 12\rangle$.

(4) *Если* $G = F_4(2^f)$, *то при* $k = 1$ *существует единственный фрагмент главных рядов группы* $P_1$, *включенный в ее унипотентный радикал* $U_1$:

$$U_1 > Y_2 > Y_1 > 1,$$

*где* $U_1 = \langle 1, 5, 8, 11, 12, 14,\ 15, 17\text{–}24\rangle$, $Y_2 = \langle 8, 12, 15, 17, 19, 21, 24\rangle$, $Y_1 = \langle 24\rangle$, *при этом нижним и верхним центральными рядами группы* $U_1$ *являются соответственно*

$$U_1 > Y_1 > 1 \quad \text{и} \quad U_1 > Y_2 > 1;$$

*а при* $k = 2$ *в случае* $f > 1$ *существуют точно два фрагмента главных рядов группы* $P_2$, *включенные в ее унипотентный радикал* $U_2$:

$$U_2 > Z_4 > Z_3 > Z_2 > Z_1 > 1 \quad \text{и} \quad U_2 > Z_4 > Z_3 > Z_2 > Z_0 > 1,$$

*где* $U_2 = \langle 2, 5, 6, 8\text{–}24\rangle$, $Z_4 = Z_3\langle 6, 8, 10, 12, 13, 15\rangle$, $Z_3 = Z_2\langle 14, 20, 22\rangle$, $Z_2 = Z_1 \times Z_0$, $Z_1 = \langle 23, 24\rangle$ *и* $Z_0 = \langle 17, 19, 21\rangle$, *при этом нижним и верхним центральными рядами группы* $U_2$ *являются соответственно*

$$U_2 > Z_3 > Z_1 > 1 \quad \text{и} \quad U_2 > Z_4 > Z_2 > 1,$$

*а в случае* $f = 1$ *существуют точно четыре фрагмента главных рядов группы* $P_2$, *включенные в ее унипотентный радикал* $U_2$:

$$U_2 > Z_4 > Z_3 > Z_2 > Z_1 > 1, \qquad U_2 > Z_4 > Z_3 > Z_2 > Z_0 > 1,$$

$$U_2 > Z_4 > \tilde{Z}_3 > Z_2 > Z_1 > 1 \quad \text{и} \quad U_2 > Z_4 > \tilde{Z}_3 > Z_2 > Z_0 > 1,$$

*где* $U_2 = \langle 2, 5, 6, 8\text{–}24\rangle$, $Z_4 = Z_3\langle 6, 8, 10, 12, 13, 15\rangle$, $Z_3 = Z_2\langle 14, 20, 22\rangle$, $Z_2 = Z_1 \times Z_0$, $Z_1 = \langle 23, 24\rangle$, $Z_0 = \langle 17, 19, 21\rangle$ *и* $\tilde{Z}_3 = \langle x_6x_{14}, x_8x_{14}, x_{10}x_{20}, x_{12}x_{20}, x_{13}x_{22}, x_{15}x_{22}\rangle Z_2$, *при этом нижним и верхним центральными рядами группы* $U_2$ *являются соответственно*

$$U_2 > Z_3 > Z_1 > 1 \quad \text{и} \quad U_2 > Z_4 > Z_2 > 1.$$

В группе ${}^2F_4(2)$ подгруппа Бореля $B$ и мономиальная подгруппа $N$ образуют $BN$-пару, причем $N \cap B = 1$ и $N = W \cong D_{16}$. В ${}^2F_4(2)$ есть точно две параболические максимальные подгруппы, содержащие подгруппу $B$, а именно, $P_1 = \langle B, \alpha_{-1}, \alpha_{-2} \rangle$ и $P_2 = \langle B, \alpha_{-3} \rangle$. Простая группа Титса $G = {}^2F_4(2)'$ является подгруппой группы ${}^2F_4(2)$ индекса 2.

Положим $B_0 = B \cap G$. Силовская 2-подгруппа $B_0$ группы $G$ содержится в 2-локальных максимальных подгруппах $P_1 \cap G$ и $P_2 \cap G$ группы $G$, и каждая 2-локальная максимальная подгруппа группы $G$ сопряжена в ней с одной из этих подгрупп (см. [6]). Группа $B_0$ порождается элементами $\alpha_1\alpha_5$, $\alpha_4\alpha_5$, $\alpha_6\alpha_5$, $\alpha_i$, где $i = 3, 7$–$12$, причем элементы $\alpha_i$, $i = 3, 7$–$12$, и элементы $(\alpha_1\alpha_5)^2 = \alpha_2\alpha_{12}$, $(\alpha_4\alpha_5)^2 = \alpha_8\alpha_9$, $(\alpha_6\alpha_5)^2 = \alpha_{10}\alpha_{11}$ являются инволюциями (см. [15]).

Для 2-локальной максимальной подгруппы $P_1 \cap G$ группы $G$ в [16, лемма 1] построен фрагмент главного ряда подгруппы $P_1 \cap G$, включенный в $O_2(P_1 \cap G)$ и совпадающий с нижним и верхним центральными рядами $O_2(P_1 \cap G)$ и потому (будучи включенным в $O_2(P_1 \cap G)$ фрагментом главного ряда $P_1 \cap G$, совпадающим с верхним центральным рядом $O_2(P_1 \cap G)$) являющийся единственным фрагментом главного ряда подгруппы $P_1 \cap G$, включенным в $O_2(P_1 \cap G)$. В [15] приведены наборы указанных порождающих группы $B_0$, которые порождают члены этого единственного фрагмента главного ряда $P_1 \cap G$, включенного в $O_2(P_1 \cap G)$. В настоящей работе для 2-локальной максимальной подгруппы $P_2 \cap G$ группы $G$ найдены все фрагменты главных рядов, включенные в $O_2(P_2 \cap G)$, с указанием нижнего и верхнего центральных рядов подгруппы $O_2(P_2 \cap G)$.

Таким образом, в настоящей работе завершается для группы Титса описание всех фрагментов главных рядов 2-локальных максимальных подгрупп, включенных в их наибольшие нормальные 2-подгруппы, с указанием нижних и верхних центральных рядов этих наибольших нормальных 2-подгрупп (см. теорему 2). Мы сочли целесообразным включить в формулировку теоремы и случай подгруппы $P_1 \cap G$, заключение для которого, как замечено выше, следует из [16, лемма 1] и [15]. Как в случае подгруппы $P_1 \cap G$, так и в случае подгруппы $P_2 \cap G$ члены всех найденных рядов задаются явным образом их системами порождающих.

**Теорема 2.** *Пусть $G = {}^2F_4(2)'$ и $P_k$, где $1 \le k \le 2$, — параболическая максимальная подгруппа в ${}^2F_4(2)$. Тогда при $k = 1$ единственный существующий фрагмент главных рядов группы $P_1 \cap G$, включенный в $O_2(P_1 \cap G)$, совпадает с нижним и верхним центральными рядами группы $O_2(P_1 \cap G)$ и имеет вид*

$$O_2(P_1 \cap G) > Y_2 > Y_1 > 1,$$

*где $O_2(P_1 \cap G) = \langle \alpha_4\alpha_5, \alpha_6\alpha_5, \alpha_3, \alpha_i \mid i = 7\text{–}12 \rangle$, $Y_2 = \langle \alpha_i \mid i = 8\text{–}12 \rangle$, $Y_1 = \langle \alpha_{12} \rangle$); а при $k = 2$ существуют точно два фрагмента*

$$O_2(P_2 \cap G) > Z_5 > Z_4 > Z_3 > Z_2 > Z_1 > 1 \quad \textit{и} \quad O_2(P_2 \cap G) > Z_5 > \tilde{Z}_4 > Z_3 > Z_2 > Z_1 > 1$$

*главных рядов группы $P_2 \cap G$, включенные в $O_2(P_2 \cap G)$, где $O_2(P_2 \cap G) = \langle \alpha_1\alpha_5, \alpha_4\alpha_5, \alpha_6\alpha_5, \alpha_i \mid i = 7\text{–}12 \rangle$, $Z_5 = \langle \alpha_2, \alpha_6\alpha_5, \alpha_i \mid i = 7\text{–}12 \rangle$, $Z_4 = \langle \alpha_6\alpha_5, \alpha_i \mid i = 7, 9\text{–}12 \rangle$, $Z_3 = \langle \alpha_i \mid i = 7, 9\text{–}12 \rangle$, $Z_2 = \langle \alpha_i \mid i = 10\text{–}12 \rangle$, $Z_1 = \langle \alpha_{11}, \alpha_{12} \rangle$ и $\tilde{Z}_4 = \langle \alpha_2\alpha_8, \alpha_6\alpha_5\alpha_8, \alpha_i \mid i = 7, 9\text{–}12 \rangle$, при этом нижним и верхним центральными рядами группы $O_2(P_2 \cap G)$ являются соответственно*

$$O_2(P_2 \cap G) > Z_4 > Z_3 > Z_2 > Z_1 > 1 \quad \textit{и} \quad O_2(P_2 \cap G) > Z_5 > Z_3 > Z_2 > Z_1 > 1.$$

## 2. Доказательство теоремы 1

Как было объяснено перед формулировкой теоремы 1, в доказательстве нуждается лишь п. (3) этой теоремы при $k = 2$ и п. (4) этой теоремы при $k = 2$.

Пусть $G = {}^2F_4(q)$, где $q = 2^{2f+1} > 2$, и $k = 2$.

Будем использовать разложение Леви $P_2 = U_2 \rtimes L_2$, где $U_2 = \langle \alpha_i(t_i) \mid i = 1, 2, 4\text{–}12, t_i \in GF(q)\rangle$ и $L_2 = \langle H, \alpha_3(u), \alpha_{-3}(u) \mid u \in GF(q)\rangle$. В статье [13] приведен список всех нетривиальных коммутаторных соотношений между элементами $\alpha_i(t)$, $i = 1\text{–}12$, $t \in GF(q)$, порождающими силовскую 2-подгруппу группы $P_2$. Дополним его всеми нетривиальными коммутаторными соотношениями между элементами вида $\alpha_{-3}(u)$, $u \in GF(q)$, и порождающими вида $\alpha_i(t)$, где $i = 1, 2, 4\text{–}12$ и $t \in GF(q)$, группы $U_2$ (элементы $\alpha_{-3}(u)$, $u \in GF(q)$, и $\alpha_i(t)$, где $i = 1, 2, 4\text{–}12$ и $t \in GF(q)$, порождают отличную от $\langle \alpha_i(t) \mid i = 1\text{–}12, t \in GF(q)\rangle$ силовскую 2-подгруппу группы $P_2$):

$$\begin{aligned}
[\alpha_4(t), \alpha_{-3}(u)] &= \alpha_1(tu)\alpha_6(t^{2\theta+1}u^{2\theta})\alpha_9(t^{2\theta+2}u)\alpha_{11}(t^{4\theta+3}u^{2\theta+2})\alpha_{12}(t^{4\theta+3}u^{2\theta+1}),\\
[\alpha_5(t), \alpha_{-3}(u)] &= \alpha_2(tu^{2\theta})\alpha_7(t^{2\theta}u)\alpha_{11}(t^{2\theta+1}u),\\
[\alpha_6(t), \alpha_{-3}(u)] &= \alpha_2(tu),\\
[\alpha_8(t), \alpha_{-3}(u)] &= \alpha_2(tu^{2\theta+1})\alpha_5(tu)\alpha_6(tu^{2\theta})\alpha_7(t^{2\theta}u^{2\theta+1})\alpha_9(t^{2\theta}u)\alpha_{10}(t^2u^{2\theta+1})\alpha_{11}(t^{2\theta+1}u^{2\theta+2}),\\
[\alpha_9(t), \alpha_{-3}(u)] &= \alpha_7(tu^{2\theta})\alpha_{10}(t^{2\theta}u),\\
[\alpha_{12}(t), \alpha_{-3}(u)] &= \alpha_{11}(tu).
\end{aligned}$$

В [17], к сожалению, неверно указан фрагмент главных рядов группы $P_2$, включенный в ее унипотентный радикал $U_2$. Далее мы докажем, что один из фрагментов главных рядов группы $P_2$, включенный в $U_2$, имеет вид

$$U_2 > Z_4 > Z_3 > Z_2 > Z_1 > 1,$$

где $Z_4 = \langle \alpha_i(t_i) \mid t_i \in GF(q), i = 2, 5\text{–}12\rangle$, $Z_3 = \langle \alpha_i(t_i) \mid t_i \in GF(q), i = 7, 9\text{–}12\rangle$, $Z_2 = \langle \alpha_i(t_i) \mid t_i \in GF(q), i = 10, 11, 12\rangle$, $Z_1 = \langle \alpha_i(t_i) \mid t_i \in GF(q), i = 11, 12\rangle$.

В [18] доказано, что (в наших обозначениях) подгруппы $Z_i$ для $1 \le i \le 4$ нормальны в $P_2$.

Пусть $S_1 = \langle \alpha_3(u) \mid u \in GF(q)\rangle U_2$ и $S_2 = \langle \alpha_{-3}(u) \mid u \in GF(q)\rangle U_2$ — различные силовские 2-подгруппы группы $O^{2'}(P_2)$. Ввиду $O^{2'}(P_2/U_2) \cong SL_2(q)$ имеем $\langle S_1, S_2\rangle = O^{2'}(P_2)$.

Полагая $Z_0 = 1$ и $Z_5 = U_2$, получаем, что для каждого $i$, $0 \leqslant i < 5$, группа $Z_{i+1}/Z_i$ есть прямое произведение следующего набора элементарных подгрупп порядка $q$: $\alpha_{j_1}(u)Z_i, \ldots, \alpha_{j_{k_i}}(u)Z_i$, где $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{k_i} \leqslant 12$ (однозначно определены для данного $i$) и $u \in GF(q)$. Для каждого $i$, $0 \leqslant i < 5$, естественным образом определим умножение произвольного элемента $\alpha_{j_1}(u_1)\ldots\alpha_{j_{k_i}}(u_{k_i})Z_i \in Z_{i+1}/Z_i$ на произвольный элемент $t \in GF(q)$, полагая $t(\alpha_{j_1}(u_1)\ldots\alpha_{j_{k_i}}(u_{k_i})Z_i) = \alpha_{j_1}(tu_1)\ldots\alpha_{j_{k_i}}(tu_{k_i})Z_i$. С использованием коммутаторных соотношений между $\alpha_3(u)$, $u \in GF(q)$, и $\alpha_j(t)$, $j = 1\text{–}12$, $t \in GF(q)$, и между $\alpha_{-3}(u)$, $u \in GF(q)$, и $\alpha_j(t)$, $j = 1\text{–}12$, $t \in GF(q)$, легко проверяется, что такое умножение на элементы поля $GF(q)$ перестановочно с действием (сопряжением) на $Z_{i+1}/Z_i$ групп $S_1$ и $S_2$, а следовательно, и группы $O^{2'}(P_2/U_2)$. Таким образом, действие (сопряжением) группы $O^{2'}(P_2/U_2) \cong SL_2(q)$ на векторном пространстве $Z_{i+1}/Z_i$ над полем $GF(q)$ (с базисом $\alpha_{j_1}(1)Z_i, \ldots, \alpha_{j_{k_i}}(1)Z_i$) является линейным представлением группы $O^{2'}(P_2/U_2) \cong SL_2(q)$ над полем $GF(q)$. Отождествляя $O^{2'}(P_2/U_2)$ с $SL_2(q)$, мы будем далее говорить о $Z_{i+1}/Z_i$ как о $GF(q)SL_2(q)$-модуле.

В [18] доказано, что (в наших обозначениях) $U_2/Z_4$, $Z_3/Z_2$, $Z_1/1$ — нетривиальные неприводимые $GF(q)SL_2(q)$-модули и $Z_2/Z_1$ — одномерный (тривиальный) $GF(q)SL_2(q)$-модуль. Далее, $Z_4/Z_3$ — 4-мерный $GF(q)SL_2(q)$-модуль. Хорошо известно (см., например, [19, теорема 2.2]), что нетривиальными неприводимыми $GF(q)SL_2(q)$-модулями размерности $< 4$ являются лишь естественный $GF(q)SL_2(q)$-модуль и дуальный к нему. Из коммутаторных соотношений легко следует, что централизатор $S_1$ в $Z_4/Z_3$ есть $\langle \alpha_8(x) \mid x \in GF(q)\rangle Z_3$, а централизатор $S_2$ в $Z_4/Z_3$ есть $\langle \alpha_2(x) \mid x \in GF(q)\rangle Z_3$. Поэтому, во-первых, у $GF(q)SL_2(q)$-модуля $Z_4/Z_3$ отсутствуют одномерные $GF(q)SL_2(q)$-подмодули и, во-вторых, двумерным $GF(q)SL_2(q)$-подмодулем $GF(q)SL_2(q)$-модуля $Z_4/Z_3$ может быть лишь $\langle \alpha_2(x), \alpha_8(y) \mid x, y \in GF(q)\rangle Z_3$. Но $[\alpha_3(u), \alpha_2(x)]Z_3 = \alpha_5(u^{2\theta}x)\alpha_6(ux)\alpha_8(u^{2\theta+1}x)Z_3$ не содержится в $\langle \alpha_2(x), \alpha_8(y) \mid x, y \in GF(q)\rangle Z_3$ при $ux \neq 0$. Следовательно, у $GF(q)SL_2(q)$-модуля $Z_4/Z_3$ отсутствуют двумерные

$GF(q)SL_2(q)$-подмодули. Итак, $Z_4/Z_3$ — неприводимый $GF(q)O^{2'}(P_2/U_2)$-модуль. Наконец, доказательство теоремы 13.7.4 из [2] влечет наличие для произвольных $u, t \in GF(q)$ в $H$ такого элемента $h$, что $h\alpha_{10}(u)h^{-1} = \alpha_{10}(ut^{2-\theta})$. Следовательно, $Z_2/Z_1$ — главный фактор группы $P_2$.

Таким образом, $U_2 > Z_4 > Z_3 > Z_2 > Z_1 > 1$ — один из фрагментов главных рядов группы $P_2$, включенных в $U_2$.

Из приведенных в [13] всех нетривиальных коммутаторных соотношений между порождающими элементами $\alpha_i(t)$ $(i = 1, 2, 4–12,\ t \in GF(q))$ группы $U_2$ следует, что нижний и верхний центральные ряды подгруппы $U_2$ совпадают и имеют вид $U_2 > Z_4 > Z_3 > Z_2 > Z_1 > 1$. Поскольку группа $P_2$ действует неприводимо на каждом факторе верхнего центрального ряда группы $U_2$, приведенный фрагмент $U_2 > Z_4 > Z_3 > Z_2 > Z_1 > 1$ главных рядов группы $P_2$, включенный в $U_2$, единствен.

Таким образом, доказана справедливость утверждения п. (3) теоремы 1 при $k = 2$.

Пусть $G = F_4(2^f)$ и $k = 2$.

При доказательстве теоремы 1 из [20] указаны следующие два разных фрагмента главных рядов группы $P_2$, включенные в ее унипотентный радикал $U_2$:

$$U_2 > Z_4 > Z_3 > Z_2 > Z_1 > 1 \quad \text{и} \quad U_2 > Z_4 > Z_3 > Z_2 > Z_0 > 1,$$

где $U_2 = \langle 2, 5, 6, 8–24\rangle$, $Z_4 = \langle 6, 8, 10, 12, 13, 15\rangle Z_3$, $Z_3 = \langle 14, 20, 22\rangle Z_2$, $Z_2 = Z_1 \times Z_0$, $Z_1 = \langle 23, 24\rangle$ и $Z_0 = \langle 17, 19, 21\rangle$, причем $U_2 > Z_3 > Z_1 > 1$ — нижний центральный ряд в $U_2$. Кроме того, из коммутаторных соотношений из [20, с. 1336] получаются следующие используемые далее равенства: $[Z_4, U_2] = Z_2$, $[Z_4, Z_3] = 1$.

Построим верхний центральный ряд группы $U_2$. С помощью коммутаторных соотношений из [20, с. 1336] можно показать, что $Z_4/Z_2 \leqslant Z(U_2/Z_2)$ и $Z_2 \leqslant Z(U_2)$. Если $Z_4/Z_2 < Z(U_2/Z_2)$, то $Z(U_2/Z_2) = U_2/Z_2$, вопреки, например, тому, что $[U_2, U_2] = Z_3$. Следовательно, $Z_4/Z_2 = Z(U_2/Z_2)$. Если $Z_2 < Z(U_2)$, то при $Z(U_2)/Z_2 \cap Z_3/Z_2 \neq 1$ имеем $Z_3 \leqslant Z(U_2)$, что противоречит $[Z_3, U_2] = Z_1$, а при $Z(U_2)/Z_2 \cap Z_3/Z_2 = 1$ с учетом $Z(U_2)/Z_2 \leqslant Z(U_2/Z_2) = Z_4/Z_2$ имеем $Z_4/Z_2 = Z(U_2)/Z_2 \times Z_3/Z_2$, что влечет $Z_4 = Z(U_2)Z_3$, а это приводит к противоречию $Z_2 = [Z_4, U_2] = [Z(U_2)Z_3, U_2] = Z_1$. Таким образом, $U_2 > Z_4 > Z_2 > 1$ — верхний центральный ряд группы $U_2$.

В случае $f = 1$ определим следующим образом подгруппу

$$\tilde{Z}_3 = \langle x_6x_{14}, x_8x_{14}, x_{10}x_{20}, x_{12}x_{20}, x_{13}x_{22}, x_{15}x_{22}\rangle Z_2.$$

Взяв коммутаторы элементов $x_6x_{14}$, $x_8x_{14}$, $x_{10}x_{20}$, $x_{12}x_{20}$, $x_{13}x_{22}$, $x_{15}x_{22}$ с элементами $x_1$, $x_3$, $x_4$, $x_7$, $x_{-1}$, $x_{-3}$, $x_{-4}$, $x_{-7}$, порождающими группу $L_2$,

$$\begin{array}{lll}
[x_6x_{14}, x_1]Z_2 = x_8x_{14}Z_2, & [x_6x_{14}, x_4]Z_2 = x_{10}x_{20}Z_2, & [x_6x_{14}, x_7]Z_2 = x_{13}x_{22}Z_2, \\
[x_8x_{14}, x_4]Z_2 = x_{12}x_{20}Z_2, & [x_8x_{14}, x_7]Z_2 = x_{15}x_{22}Z_2, & [x_8x_{14}, x_{-1}]Z_2 = x_6x_{14}Z_2, \\
[x_{10}x_{20}, x_1]Z_2 = x_{12}x_{20}Z_2, & [x_{10}x_{20}, x_3]Z_2 = x_{13}x_{22}Z_2, & [x_{10}x_{20}, x_{-4}]Z_2 = x_6x_{14}Z_2, \\
[x_{12}x_{20}, x_3]Z_2 = x_{15}x_{22}Z_2, & [x_{12}x_{20}, x_{-1}]Z_2 = x_{10}x_{20}Z_2, & [x_{12}x_{20}, x_{-4}]Z_2 = x_8x_{14}Z_2, \\
[x_{13}x_{22}, x_1]Z_2 = x_{15}x_{22}Z_2, & [x_{13}x_{22}, x_{-3}]Z_2 = x_{10}x_{20}Z_2, & [x_{13}x_{22}, x_{-7}]Z_2 = x_6x_{14}Z_2, \\
[x_{15}x_{22}, x_{-1}]Z_2 = x_{13}x_{22}Z_2, & [x_{15}x_{22}, x_{-3}]Z_2 = x_{12}x_{20}Z_2, & [x_{15}x_{22}, x_{-7}]Z_2 = x_8x_{14}Z_2
\end{array} \tag{2.1}$$

(тривиальные коммутаторы не указаны), убеждаемся, что $\tilde{Z}_3$ — нормальная подгруппа группы $P_2$, содержащаяся собственным образом $Z_4$ и содержащая собственным образом $Z_2$.

Мы покажем, что рядами $U_2 > Z_4 > Z_3 > Z_2 > Z_1 > 1$ и $U_2 > Z_4 > Z_3 > Z_2 > Z_0 > 1$, а при $f = 1$ дополнительно еще рядами $U_2 > Z_4 > \tilde{Z}_3 > Z_2 > Z_1 > 1$ и $U_2 > Z_4 > \tilde{Z}_3 > Z_2 > Z_0 > 1$ исчерпываются фрагменты главных рядов группы $P_2$, включенные в ее унипотентный радикал $U_2$. Для этого докажем, что каждая содержащаяся в $U_2$ нормальная подгруппа группы $P_2$ совпадает с членом какого-то из указанных фрагментов.

Предположим, что, напротив, имеется содержащаяся в $U_2$ нормальная подгруппа $Z$ группы $P_2$, отличная от членов всех указанных фрагментов. Поскольку подгруппа $Z$ неединична и нормальна в $U_2$, ее пересечение с $Z(U_2) = Z_2$ нетривиально. С помощью коммутаторных соотношений (см. [20, с. 1336]) можно показать, что подгруппа $Z_2$ содержит ровно две минимальные нормальные в $P_2$ подгруппы $Z_1$ и $Z_0$. Поэтому возможны только три случая: $Z \cap Z_2 = Z_2$, $Z \cap Z_2 = Z_1$ и $Z \cap Z_2 = Z_0$.

Предположим, что $Z \cap Z_2 = Z_2$. Тогда $Z_2 < Z$ и $Z_3 < ZZ_3$. Пусть $ZZ_3 \leqslant Z_4$. Ввиду неприводимости действия группы $P_2$ на $Z_4/Z_3$ получаем, что $ZZ_3 = Z_4$. Если $Z/Z_2 \cap Z_3/Z_2 \neq 1$, то в связи с неприводимостью действия группы $P_2$ на $Z_3/Z_2$ имеем $Z_3/Z_2 \leqslant Z/Z_2$, и, следовательно, $Z_3 \leqslant Z$, что влечет $Z = Z_4$; противоречие с выбором $Z$. Пусть $Z/Z_2 \cap Z_3/Z_2 = 1$. В силу того, что $ZZ_3 = Z_4$ и $Z/Z_2 \cap Z_3/Z_2 = 1$, для произвольного ненулевого элемента $d \in GF(2^f)$ и некоторых $a, b, c \in GF(2^f)$ в фактор-группе $Z/Z_2$ найдется элемент вида $x_{10}(d)x_{15}(d)x_{14}(a)x_{20}(b)x_{22}(c)Z_2$. Для этого элемента из коммутаторных соотношений $(t_1, t_2 \in GF(2^f))$ $[x_4(t_1), x_{10}(t_2)] = [x_4(t_1), x_{15}(t_2)] = [x_4(t_1), x_{20}(t_2)] = [x_4(t_1), x_{22}(t_2)] = [x_7(t_1), x_{10}(t_2)] = [x_7(t_1), x_{15}(t_2)] = [x_7(t_1), x_{20}(t_2)] = [x_7(t_1), x_{22}(t_2)] = 1$, $[x_4(t_1), x_{14}(t_2)] = x_{17}(t_1t_2)x_{20}(t_1^2t_2)$, $[x_7(t_1), x_{14}(t_2)] = x_{19}(t_1t_2)x_{22}(t_1^2t_2)$, $[x_{20}(t_1), x_{22}(t_2)] = 1$ получаем равенство

$$[x_{10}(d)x_{15}(d)x_{14}(a)x_{20}(b)x_{22}(c), x_4(v)x_7(v)]Z_2 = x_{20}(v^2a)x_{22}(v^2a)Z_2$$

для произвольного элемента $v \in GF(2^f)$ и $x_4(v)x_7(v) \in P_2$. Выбирая $v \neq 0$, заключаем отсюда, что при $a \neq 0$ элемент $x_{20}(v^2a)x_{22}(v^2a)Z_2 \in Z/Z_2 \cap Z_3/Z_2$ отличен от 1; противоречие с выбором $Z$. Следовательно, $x_{10}(d)x_{15}(d)x_{20}(b)x_{22}(c)Z_2 \in Z/Z_2$.

Для $t_1, t_2 \in GF(2^f)$ коммутаторы $[x_{-3}(t_1), x_{10}(t_2)]$, $[x_{-3}(t_1), x_{12}(t_2)]$, $[x_{-3}(t_1), x_{20}(t_2)]$, $[x_1(t_1), x_{15}(t_2)]$, $[x_1(t_1), x_{20}(t_2)]$, $[x_1(t_1), x_{22}(t_2)]$, $[x_{12}(t_1), x_{15}(t_2)]$, $[x_{15}(t_1), x_{20}(t_2)]$ и $[x_{12}(t_1), x_{20}(t_2)]$ равны 1. С учетом коммутаторных соотношений $(t_1, t_2 \in GF(2^f))$ $[x_{-3}(t_1), x_{15}(t_2)] = x_{12}(t_1t_2)$, $[x_1(t_1), x_{10}(t_2)] = x_{12}(t_1t_2)x_{20}(t_1t_2^2)$, $[x_{-3}(t_1), x_{22}(t_2)] = x_{21}(t_1t_2)x_{20}(t_1^2t_2)$ имеем поэтому равенство

$$[x_{10}(d)x_{15}(d)x_{20}(b)x_{22}(c), x_1(v)x_{-3}(v)]Z_2 = x_{20}(vd^2)x_{20}(v^2c)Z_2$$

для произвольного $v \in GF(2^f)$ и $x_1(v)x_{-3}(v) \in P_2$. За счет выбора элемента $v$ элемент $x_{20}(vd^2)x_{20}(v^2c)Z_2 \in Z/Z_2 \cap Z_3/Z_2$ может быть сделан отличным от 1 при $f > 1$, а также при $f = 1$ и $c = 0$. Следовательно, $f = 1$ и $x_{10}x_{15}x_{20}(b)x_{22}Z_2 \in Z/Z_2$. Если $b = 0$, то из коммутаторного равенства $[x_{10}x_{15}x_{22}, x_{-1}x_3]Z_2 = x_{22}Z_2$, где $x_{-1}x_3 \in L_2$, получаем, что элемент $x_{22}Z_2 \in Z/Z_2 \cap Z_3/Z_2$ отличен от 1; противоречие с выбором $Z$. Таким образом, $f = 1$ и $x_{10}x_{15}x_{20}x_{22}Z_2 \in Z/Z_2$.

Так как группа $L_2$ порождается множеством $\{x_1, x_3, x_4, x_7, x_{-1}, x_{-3}, x_{-4}, x_{-7}\}$, из коммутаторных соотношений

$$\begin{aligned}
&[x_{10}x_{15}x_{20}x_{22}, x_1]Z_2 = x_{12}x_{20}Z_2, && [x_{10}x_{15}x_{20}x_{22}, x_3]Z_2 = x_{13}x_{22}Z_2,\\
&[x_{10}x_{15}x_{20}x_{22}, x_{-1}]Z_2 = x_{13}x_{22}Z_2, && [x_{10}x_{15}x_{20}x_{22}, x_{-3}]Z_2 = x_{12}x_{20}Z_2,\\
&[x_{10}x_{15}x_{20}x_{22}, x_{-4}]Z_2 = x_6x_{14}Z_2, && [x_{10}x_{15}x_{20}x_{22}, x_{-7}]Z_2 = x_8x_{14}Z_2
\end{aligned}$$

и соотношений (2.1) с учетом $Z_2 \leqslant Z$ следует, что $Z = \tilde{Z}_3$; противоречие с выбором $Z$.

Итак, $Z_4 < ZZ_4$. Ввиду неприводимости действия группы $P_2$ на $U_2/Z_4$ получаем, что $ZZ_4 = U_2$.

Поскольку $[U_2, U_2] = Z_3$ и $Z(U_2/Z_2) = Z_4/Z_2$, имеем

$$Z_3/Z_2 = [ZZ_4, ZZ_4]/Z_2 = [Z, Z]Z_2/Z_2,$$

что с учетом $Z_2 \leqslant Z$ влечет $Z_3 \leqslant Z$.

Если $Z/Z_3 \cap Z_4/Z_3 \neq 1$, то в связи с неприводимостью действия группы $P_2$ на $Z_4/Z_3$ имеем $Z_4/Z_3 \leqslant Z/Z_3$, и, следовательно, $Z_4 \leqslant Z$. Но тогда $Z = ZZ_4 = U_2$; противоречие с выбором $Z$.

Пусть $Z/Z_3 \cap Z_4/Z_3 = 1$. Для $t_1, t_2 \in GF(2^f)$ коммутаторы $[x_3(t_1), x_9(t_2)]$, $[x_3(t_1), x_{11}(t_2)]$, $[x_3(t_1), x_{13}(t_2)]$, $[x_3(t_1), x_{15}(t_2)]$, $[x_3(t_1), x_{16}(t_2)]$, $[x_3(t_1), x_{18}(t_2)]$, $[x_{13}(t_1), x_{15}(t_2)]$, $[x_6(t_1), x_3(t_2)]$,

$[x_8(t_1), x_3(t_2)]$ равны 1. В силу того, что $ZZ_4 = U_2$ и $Z/Z_3 \cap Z_4/Z_3 = 1$, для произвольного ненулевого элемента $d \in GF(2^f)$ и некоторых $a_i \in GF(2^f)$ $(1 \le i \le 6)$ в фактор-группе $Z/Z_3$ найдется элемент вида

$$x_9(d)x_{11}(d)x_{16}(d)x_{18}(d)x_6(a_1)x_8(a_2)x_{10}(a_3)x_{12}(a_4)x_{13}(a_5)x_{15}(a_6)Z_3,$$

для которого с учетом указанных выше единичных коммутаторов и коммутаторных соотношений $(t_1, t_2 \in GF(2^f))$

$$[x_3(t_1), x_{10}(t_2)] = x_{13}(t_1t_2), \quad [x_3(t_1), x_{12}(t_2)] = x_{15}(t_1t_2), \quad [x_{13}(t_1), x_{12}(t_2)] = x_{21}(t_1t_2)$$

получаем равенство

$$\begin{gathered}[x_9(d)x_{11}(d)x_{16}(d)x_{18}(d)x_6(a_1)x_8(a_2)x_{10}(a_3)x_{12}(a_4)x_{13}(a_5)x_{15}(a_6), x_3(v)]Z_3 \\ = x_{13}(a_3v)x_{15}(a_4v)Z_3\end{gathered} \tag{2.2}$$

для произвольного элемента $v \in GF(2^f)$ и $x_3(v) \in P_2$. Выбирая $v \neq 0$, заключаем, что при $a_3 \neq 0$ или $a_4 \neq 0$ элемент $x_{13}(a_3v)x_{15}(a_4v)Z_3 \in Z/Z_3 \cap Z_4/Z_3$ отличен от 1, вопреки $Z/Z_3 \cap Z_4/Z_3 = 1$. Следовательно, $x_9(d)x_{11}(d)x_{16}(d)x_{18}(d)x_6(a_1)x_8(a_2)x_{13}(a_5)x_{15}(a_6)Z_3 \in Z/Z_3$. Для любого $v \in GF(2^f)$ с учетом коммутаторных соотношений $(t_1, t_2 \in GF(2^f))$

$$[x_6(t_1), x_7(t_2)] = x_{13}(t_1t_2), \quad [x_8(t_1), x_7(t_2)] = x_{15}(t_1t_2), \quad [x_7(t_1), x_{13}(t_2)] = [x_7(t_1), x_{15}(t_2)] = 1$$

имеем

$$\begin{gathered}[x_9(d)x_{11}(d)x_{16}(d)x_{18}(d)x_6(a_1)x_8(a_2)x_{13}(a_5)x_{15}(a_6), x_7(v)]Z_3 \\ = (x_6(a_1)x_8(a_2)x_{13}(a_5)x_{15}(a_6))^{-1}[x_9(d)x_{11}(d)x_{16}(d)x_{18}(d), x_7(v)] \\ \times x_6(a_1)x_8(a_2)x_{13}(a_5)x_{15}(a_6)[x_6(a_1)x_8(a_2)x_{13}(a_5)x_{15}(a_6), x_7(v)]Z_3 \\ = [x_6(a_1)x_8(a_2)x_{13}(a_5)x_{15}(a_6), x_7(v)]Z_3 \\ = (x_{13}(a_5)x_{15}(a_6))^{-1}[x_6(a_1)x_8(a_2), x_7(v)]x_{13}(a_5)x_{15}(a_6)[x_{13}(a_5)x_{15}(a_6), x_7(v)]Z_3 \\ = (x_{13}(a_5)x_{15}(a_6))^{-1}x_8(a_2)[x_6(a_1), x_7(v)]x_8(a_2)[x_8(a_2), x_7(v)] \\ \times x_{13}(a_5)x_{15}(a_6)x_{15}(a_6)[x_{13}(a_5), x_7(v)]x_{15}(a_6)[x_{15}(a_6), x_7(v)]Z_3 \\ = x_{13}(a_1v)x_{15}(a_2v)Z_3\end{gathered} \tag{2.3}$$

для произвольного $v \in GF(2^f)$ и $x_7(v) \in P_2$. Если $a_1 \neq 0$ или $a_2 \neq 0$, то за счет выбора элемента $v$ элемент $x_{13}(a_1v)x_{15}(a_2v)Z_3 \in Z/Z_3 \cap Z_4/Z_3$ может быть сделан отличным от 1, вопреки $Z/Z_3 \cap Z_4/Z_3 = 1$. Следовательно, $x_9(d)x_{11}(d)x_{16}(d)x_{18}(d)x_{13}(a_5)x_{15}(a_6)Z_3 \in Z/Z_3$.

Из приводимых ниже коммутаторных соотношений $(v \in GF(2^f))$

$$\begin{aligned}&[x_9(d)x_{11}(d)x_{16}(d)x_{18}(d)x_{13}(a_5)x_{15}(a_6), x_4(v)]Z_3 = x_{13}(dv)x_{15}(dv)x_{16}(dv^2)x_{18}(dv^2)Z_3,\\ &[x_9(d)x_{11}(d)x_{16}(d)x_{18}(d)x_{13}(a_5)x_{15}(a_6), x_1(v)]Z_3 = x_{11}(dv)x_{15}(a_5v)x_{18}(dv)Z_3,\\ &[x_{11}(d)x_{15}(a_5)x_{18}(d), x_4(v)]Z_3 = x_{15}(dv)x_{18}(dv^2)Z_3,\\ &[x_{11}(d)x_{15}(a_5)x_{18}(d), x_{-4}(v)]Z_3 = x_{11}(dv^2)x_{15}(dv)Z_3,\\ &[x_{13}(d)x_{16}(d), x_{-3}(v)]Z_3 = x_{10}(dv)Z_3, \quad [x_{10}(d), x_1(v)]Z_3 = x_{12}(dv)Z_3,\\ &[x_{10}(d), x_3(v)]Z_3 = x_{13}(dv)Z_3\end{aligned} \tag{2.4}$$

следует, что подгруппа $Z/Z_3$ группы $U_2/Z_3$ содержит более $q^6$ элементов, вопреки $|U_2/Z_3| = q^{12}$, $|Z_4/Z_3| = q^6$ и $Z/Z_3 \cap Z_4/Z_3 = 1$. Итак, $Z \cap Z_2 \neq Z_2$.

Предположим, что $Z \cap Z_2 = Z_1$. Тогда $Z_1 < Z$ и $Z_2 < ZZ_2$. Пусть $ZZ_2 \leqslant Z_3$. Ввиду неприводимости действия группы $P_2$ на $Z_3/Z_2$ получаем, что $ZZ_2 = Z_3$. Если $Z/Z_1 \cap Z_2/Z_1 \neq 1$, то в связи с неприводимостью действия группы $P_2$ на $Z_2/Z_1$ имеем $Z_2/Z_1 \leqslant Z/Z_1$, и, следовательно, $Z_2 \leqslant Z$, вопреки $Z \cap Z_2 = Z_1$. Пусть $Z/Z_1 \cap Z_2/Z_1 = 1$. Для произвольного ненулевого элемента $d \in GF(2^f)$ и некоторых $a, b, c \in GF(2^f)$ в фактор-группе $Z/Z_1$ найдется элемент вида $x_{20}(d)x_{22}(d)x_{17}(a)x_{19}(b)x_{21}(c)Z_1$, для которого из коммутаторных соотношений $(t_1, t_2 \in GF(2^f))$

$$[x_{20}(t_1), x_4(t_2)] = [x_{21}(t_1), x_4(t_2)] = [x_{22}(t_1), x_4(t_2)] = [x_{17}(t_1), x_4(t_2] = 1,$$
$$[x_{19}(t_1), x_4(t_2)] = x_{21}(t_1t_2)$$

получаем равенство

$$[x_{20}(d)x_{22}(d)x_{17}(a)x_{19}(b)x_{21}(c), x_4(v)]Z_1 = x_{21}(bv)Z_1$$

для произвольного $v \in GF(q)$ и $x_4(v) \in P_2$. Выбирая $v \neq 0$ заключаем отсюда, что при $b \neq 0$ элемент $x_{21}(bv)Z_1 \in Z/Z_1 \cap Z_2/Z_1$ отличен от 1, вопреки $Z/Z_1 \cap Z_2/Z_1 = 1$. Следовательно, $x_{20}(d)x_{22}(d)x_{17}(a)x_{21}(c)Z_1 \in Z/Z_1$.

С учетом коммутаторных соотношений $(t_1, t_2 \in GF(2^f))$

$$[x_{20}(t_1), x_7(t_2)] = [x_{21}(t_1), x_7(t_2)] = [x_{22}(t_1), x_7(t_2)] = 1, \quad [x_{17}(t_1), x_7(t_2)] = x_{21}(t_1t_2)$$

получаем, что для произвольного $v \in GF(2^f)$ имеет место равенство

$$[x_{20}(d)x_{22}(d)x_{17}(a)x_{21}(c), x_7(v)]Z_1 = x_{21}(av)Z_1.$$

Следовательно, для произвольного $0 \neq v \in GF(2^f)$ и $x_7(v) \in L_2$ элемент $x_{21}(av)Z_1 \in Z/Z_1 \cap Z_2/Z_1 = 1$ отличен от 1 при $a \neq 0$. Поэтому $x_{20}(d)x_{22}(d)x_{21}(c)Z_1 \in Z/Z_1$.

Из приводимых ниже коммутаторных соотношений $(v \in GF(2^f))$

$$\begin{aligned}
&[x_{20}(d)x_{22}(d)x_{21}(c), x_{-3}(1)]Z_1 = x_{20}(d)x_{21}(d)Z_1,\\
&[x_{20}(d)x_{21}(d), x_{-7}(v)]Z_1 = x_{17}(dv)Z_1,\\
&[x_{17}(d), x_3(v)]Z_1 = x_{19}(dv)Z_1,\\
&[x_{17}(d), x_7(v)]Z_1 = x_{21}(dv)Z_1
\end{aligned}$$

следует, что подгруппа $Z/Z_1$ группы $Z_3/Z_1$ содержит более $q^3$ элементов, вопреки равенствам $|Z_3/Z_1| = q^6$, $|Z_2/Z_1| = q^3$ и $Z/Z_1 \cap Z_2/Z_1 = 1$. Полученное противоречие влечет включение $Z_3 < ZZ_3$.

Пусть $ZZ_3 \leqslant Z_4$. Ввиду неприводимости действия группы $P_2$ на $Z_4/Z_3$ получаем, что $ZZ_3 = Z_4$. Но тогда с учетом $[Z_4, U_2] = Z_2$ и $[Z_3, U_2] = Z_1$ имеем

$$Z_2 = [Z_4, U_2] = [ZZ_3, U_2] \leqslant [Z, U_2][Z_3, U_2] \leqslant ZZ_1 = Z,$$

что противоречит $Z \cap Z_2 = Z_1$.

Ввиду неприводимости действия группы $P_2$ на $U_2/Z_4$ получаем, что $ZZ_4 = U_2$. Если $ZZ_3/Z_3 \cap Z_4/Z_3 \neq 1$, то в связи с неприводимостью действия группы $P_2$ на $Z_4/Z_3$ имеем $Z_4/Z_3 \leqslant ZZ_3/Z_3$, и, следовательно, $Z_4 \leqslant ZZ_3$. Но тогда с учетом $[Z_4, U_2] = Z_2$ и $[Z_3, U_2] = Z_1$ имеем

$$Z_2 = [Z_4, U_2] \leqslant [ZZ_3, U_2] = Z[Z_3, U_2] \leqslant ZZ_1 = Z,$$

что противоречит $Z \cap Z_2 = Z_1$. Пусть $ZZ_3/Z_3 \cap Z_4/Z_3 = 1$. Для произвольного ненулевого элемента $d \in GF(2^f)$ и некоторых $a_i \in GF(2^f)$ для $1 \leq i \leq 6$ в фактор-группе $ZZ_3/Z_3$ найдется элемент вида

$$x_9(d)x_{11}(d)x_{16}(d)x_{18}(d)x_6(a_1)x_8(a_2)x_{10}(a_3)x_{12}(a_4)x_{13}(a_5)x_{15}(a_6)Z_3,$$

для которого выполняется коммутаторное соотношение (2.2) для произвольного элемента $v \in GF(2^f)$ и $x_3(v) \in L_2$. Выбирая $v \neq 0$, заключаем отсюда, что элемент $x_{13}(a_3v)x_{15}(a_4v)Z_3 \in ZZ_3/Z_3 \cap Z_4/Z_3$ отличен от 1, если $a_3 \neq 0$ или $a_4 \neq 0$. Далее, рассматривая элемент

$$x_9(d)x_{11}(d)x_{16}(d)x_{18}(d)x_6(a_1)x_8(a_2)x_{13}(a_5)x_{15}(a_6)Z_3 \in ZZ_3/Z_3$$

и (2.3), заключаем, что

$$x_9(d)x_{11}(d)x_{16}(d)x_{18}(d)x_{13}(a_5)x_{15}(a_6)Z_3 \in ZZ_3/Z_3,$$

после чего на основании соотношений (2.4) получаем, что подгруппа $ZZ_3/Z_3$ группы $U_2/Z_3$ содержит более $q^6$ элементов, вопреки равенствам $|U_2/Z_3| = q^{12}$, $|Z_4/Z_3| = q^6$ и $ZZ_3/Z_3 \cap Z_4/Z_3 = 1$. Таким образом, $Z \cap Z_2 \neq Z_1$.

Итак, $Z \cap Z_2 = Z_0$. Поэтому $Z_0 < Z$ и $Z_2 < ZZ_2$. Пусть $ZZ_2 \leqslant Z_3$. Ввиду неприводимости действия группы $P_2$ на $Z_3/Z_2$ получаем, что $ZZ_2 = Z_3$. Но тогда с учетом $[Z_3, U_2] = Z_1$ и $[Z_2, U_2] = 1$ имеем $Z_1 = [Z_3, U_2] = [ZZ_2, U_2] \leqslant Z$, что противоречит $Z \cap Z_2 = Z_0$.

Итак, $Z_3 < ZZ_3$. Пусть $ZZ_3 \leqslant Z_4$. Ввиду неприводимости действия группы $P_2$ на $Z_4/Z_3$ получаем, что $ZZ_3 = Z_4$. Если $ZZ_2/Z_2 \cap Z_3/Z_2 \neq 1$, то в связи с неприводимостью действия группы $P_2$ на $Z_3/Z_2$ имеем $Z_3/Z_2 \leqslant ZZ_2/Z_2$, и, следовательно, $Z_3 \leqslant ZZ_2$. Но тогда с учетом $[Z_3, U_2] = Z_1$ и $[Z_2, U_2] = 1$ получаем

$$Z_1 = [Z_3, U_2] = [ZZ_2, U_2] \leqslant Z,$$

что противоречит $Z \cap Z_2 = Z_0$. Предположим, что $ZZ_2/Z_2 \cap Z_3/Z_2 = 1$. Тогда, рассуждая так же, как выше при рассмотрении случая, когда $Z \cap Z_2 = Z_2$, $ZZ_3 = Z_4$ и $ZZ_2/Z_2 \cap Z_3/Z_2 = 1$, получаем, что $f = 1$ и $ZZ_2 = \tilde{Z}_3$. Но тогда $x_{13}x_{22}x \in Z$ для некоторого $x \in Z_2$, что с учетом $[Z_2, U_2] = 1$ и $[x_{13}x_{22}, x_2] = x_{23}$ влечет $x_{23} \in Z$, вопреки $x_{23} \in Z_2 \setminus Z_0$ и $Z \cap Z_2 = Z_0$. Таким образом, $Z_4 < ZZ_4$.

Ввиду неприводимости действия группы $P_2$ на $U_2/Z_4$ получаем, что $ZZ_4 = U_2$. Но тогда с учетом $[Z_3, U_2] = Z_1$ и $[Z_3, Z_4] = 1$ имеем

$$Z_1 = [Z_3, U_2] = [Z_3, ZZ_4] = [Z_3, Z][Z_3, Z_4] \leqslant Z,$$

что противоречит $Z \cap Z_2 = Z_0$.

Таким образом, доказана справедливость утверждения п. (4) теоремы 1 при $k = 2$. $\square$

## 3. Доказательство теоремы 2

Напомним, что содержащаяся в $P_1 \cap G$ и в $P_2 \cap G$ силовская 2-подгруппа $B_0$ группы $G$ порождается элементами $\alpha_1\alpha_5$, $\alpha_4\alpha_5$, $\alpha_6\alpha_5$ и $\alpha_i$, где $i = 3, 7$–$12$, причем, как показано в [15], все нетривиальные коммутаторные соотношения между указанными порождающими группы $B_0$ исчерпываются следующими:

$$\begin{gathered}
[\alpha_1\alpha_5, \alpha_3] = \alpha_4\alpha_5\alpha_7\alpha_8\alpha_9\alpha_{12}, \quad [\alpha_1\alpha_5, \alpha_4\alpha_5] = \alpha_6\alpha_5\alpha_7\alpha_{11}\alpha_{12}, \quad [\alpha_1\alpha_5, \alpha_6\alpha_5] = \alpha_7\alpha_{10}, \\
[\alpha_1\alpha_5, \alpha_7] = \alpha_{11}, \quad [\alpha_1\alpha_5, \alpha_9] = \alpha_{10}\alpha_{11}\alpha_{12}, \quad [\alpha_1\alpha_5, \alpha_{10}] = \alpha_{11}, \quad [\alpha_1\alpha_5, \alpha_8] = \alpha_9\alpha_{11}\alpha_{12}, \\
[\alpha_3, \alpha_4\alpha_5] = \alpha_8, \quad [\alpha_3, \alpha_6\alpha_5] = \alpha_9\alpha_{12}, \quad [\alpha_3, \alpha_7] = \alpha_9\alpha_{10}, \quad [\alpha_3, \alpha_1\alpha_5] = \alpha_4\alpha_5\alpha_7\alpha_{10}, \\
[\alpha_3, \alpha_{11}] = \alpha_{12}, \quad [\alpha_4\alpha_5, \alpha_6\alpha_5] = \alpha_9\alpha_{10}, \quad [\alpha_4\alpha_5, \alpha_7] = \alpha_{10}\alpha_{12}, \quad [\alpha_8, \alpha_7] = \alpha_{12}, \\
[\alpha_4\alpha_5, \alpha_{10}] = \alpha_{12}, \quad [\alpha_4\alpha_5, \alpha_1\alpha_5] = \alpha_6\alpha_5\alpha_7\alpha_{10}\alpha_{11}, \quad [\alpha_6\alpha_5, \alpha_7] = \alpha_{11}, \quad [\alpha_6\alpha_5, \alpha_9] = \alpha_{12}.
\end{gathered} \tag{3.1}$$

Как было объяснено перед формулировкой теоремы 2, в доказательстве нуждается лишь случай $k = 2$ этой теоремы.

Пусть $M = P_2 \cap G$. Согласно работе [6] имеем $M/O_2(M) \cong Sym_3$. При этом $\alpha_{-3} \in M$ (см. [5, 4.3]) и образы элементов $\alpha_{-3}$, $\alpha_3$ в $M/O_2(M)$ — различные инволюции, а образ элемента $\alpha_{-3}\alpha_3$ в $M/O_2(M)$, следовательно, имеет порядок 3. Указанный в [17] фрагмент главных рядов группы $P_2$, включенный в $O_2(P_2)$, имеет вид

$$O_2(P_2) > Z_6 > Z_5 > Z_4 > Z_3 > Z_2 > Z_1 > 1,$$

где $O_2(P_2) = \langle \alpha_i \mid i = 1, 2, 4\text{–}12\rangle$, $Z_6 = \langle \alpha_i \mid i = 2, 5\text{–}12\}\rangle$, $Z_5 = \langle \alpha_6\alpha_5, \alpha_i \mid i = 2, 7\text{–}12\rangle$, $Z_4 = \langle \alpha_6\alpha_5, \alpha_i \mid i = 7, 9\text{–}12\rangle$, $Z_3 = \langle \alpha_i \mid i = 7, 9\text{–}12\}\rangle$, $Z_2 = \langle \alpha_i \mid i = 10\text{–}12\}\rangle$, $Z_1 = \langle \alpha_i \mid i = 11, 12\rangle$. Поскольку $Z_6 \cap G = Z_5$, пересекая этот ряд с $G$, получим фрагмент

$$O_2(M) > Z_5 > Z_4 > Z_3 > Z_2 > Z_1 > 1$$

главных рядов группы $M$, включенный в $O_2(M)$, и $O_2(M) = \langle \alpha_1\alpha_5, \alpha_4\alpha_5, \alpha_6\alpha_5, \alpha_i \mid i = 7\text{–}12\rangle$.

Построим нижний центральный ряд группы $O_2(M)$. Коммутаторные соотношения (3.1), не содержащие $\alpha_3$, влекут $[O_2(M), O_2(M)] = Z_4$. Из приводимых далее (всех) нетривиальных коммутаторных соотношений между указанными порождающими групп $O_2(M)$ и $Z_4$

$$[\alpha_1\alpha_5, \alpha_6\alpha_5] = \alpha_7\alpha_{10},\ [\alpha_1\alpha_5, \alpha_7] = \alpha_{11},\ [\alpha_1\alpha_5, \alpha_9] = \alpha_{10}\alpha_{11}\alpha_{12},\ [\alpha_1\alpha_5, \alpha_{10}] = \alpha_{11},$$
$$[\alpha_1\alpha_5, \alpha_8] = \alpha_9\alpha_{11}\alpha_{12},\ [\alpha_4\alpha_5, \alpha_6\alpha_5] = \alpha_9\alpha_{10},\ [\alpha_4\alpha_5, \alpha_7] = \alpha_{10}\alpha_{12},\ [\alpha_8, \alpha_7] = \alpha_{12},$$
$$[\alpha_4\alpha_5, \alpha_{10}] = \alpha_{12},\ [\alpha_6\alpha_5, \alpha_7] = \alpha_{11},\ [\alpha_6\alpha_5, \alpha_9] = \alpha_{12}$$

следует, что $[Z_4, O_2(M)] = \langle \alpha_7, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}\rangle = Z_3$. Из приводимых далее (всех) нетривиальных коммутаторных соотношений между указанными порождающими групп $O_2(M)$ и $Z_3$

$$[\alpha_1\alpha_5, \alpha_7] = \alpha_{11},\ [\alpha_1\alpha_5, \alpha_9] = \alpha_{10}\alpha_{11}\alpha_{12},\ [\alpha_1\alpha_5, \alpha_{10}] = \alpha_{11},\ [\alpha_4\alpha_5, \alpha_7] = \alpha_{10}\alpha_{12},$$
$$[\alpha_8, \alpha_7] = \alpha_{12},\ [\alpha_4\alpha_5, \alpha_{10}] = \alpha_{12},\ [\alpha_6\alpha_5, \alpha_7] = \alpha_{11},\ [\alpha_6\alpha_5, \alpha_9] = \alpha_{12}$$

следует, что $[Z_3, O_2(M)] = Z_2$.

Из коммутаторных соотношений $[\alpha_1\alpha_5, \alpha_{10}] = \alpha_{11}$ и $[\alpha_4\alpha_5, \alpha_{10}] = \alpha_{12}$ следует, что $[Z_2, O_2(M)] = Z_1$. Наконец, из отсутствия нетривиальных коммутаторных соотношений между указанными порождающими групп $O_2(M)$ и $Z_1$ следует, что $[Z_1, O_2(M)] = 1$ (и, в частности, $Z_1 \leqslant Z(O_2(M))$). Таким образом, нижний центральный ряд группы $O_2(M)$ имеет вид $O_2(M) > Z_4 > Z_3 > Z_2 > Z_1 > 1$.

Построим верхний центральный ряд группы $O_2(M)$. Коммутаторные соотношения из (3.1) между указанными порождающими групп $O_2(M)$ и $Z_5$ влекут $Z_5/Z_3 \leqslant Z(U_2/Z_3)$, что с учетом $[O_2(M), O_2(M)] = Z_4$ дает $Z(O_2(M)/Z_3) = Z_5/Z_3$ и $Z(O_2(M)/Z_5) = O_2(M)/Z_5$. Далее, $Z_3/Z_2 \leqslant Z(O_2(M)/Z_2)$. Если $Z_3/Z_2 < Z(O_2(M)/Z_2)$, то из соотношений (3.1) следует, что $Z(O_2(M)/Z_2) \not\leqslant Z_5/Z_2$, а это противоречит $Z(O_2(M)/Z_3) = Z_5/Z_3$. Таким образом, $Z(O_2(M)/Z_2) = Z_3/Z_2$. Далее, $Z_2/Z_1 \leqslant Z(O_2(M)/Z_1)$. Предположим, что $Z_2/Z_1 < Z(O_2(M)/Z_1)$. Пусть $Z$ — полный прообраз $Z(O_2(M)/Z_1)$ при естественном гомоморфизме $O_2(M) \to O_2(M)/Z_1$. Тогда $Z/Z_2 \leqslant Z(O_2(M)/Z_2) = Z_3/Z_2$, что влечет $Z = Z_3$. Но $[Z, O_2(M)] \leqslant Z_1$, а $[Z_3, O_2(M)] = Z_2$. Полученное противоречие означает, что $Z(O_2(M)/Z_1) = Z_2/Z_1$. Наконец, как было показано выше, $Z_1 \leqslant Z(O_2(M))$. Если $Z_1 < Z(O_2(M))$, то $Z_2 \leqslant Z(O_2(M))$, что противоречит $[Z_2, O_2(M)] = Z_1$. Таким образом, верхний центральный ряд группы $O_2(M)$ имеет вид $O_2(M) > Z_5 > Z_3 > Z_2 > Z_1 > 1$.

Фактор-группа $Z_5/Z_3$ есть элементарная абелева группа порядка 8, централизуемая $O_2(M)$, на которой нетривиально действует элемент $\alpha_{-3}\alpha_3 O_2(M)$ порядка 3 группы $M/O_2(M) \cong Sym_3$. Поэтому $Z_5/Z_3$ есть прямое произведение $M$-допустимых подгруппы $C_{Z_5/Z_3}(\alpha_{-3}\alpha_3 O_2(M))$ порядка 2, совпадающей, очевидно, с $Z_4/Z_3$, и подгруппы $[Z_5/Z_3, \langle \alpha_{-3}\alpha_3 O_2(M)\rangle]$, совпадающей, как это следует из коммутаторных соотношений (3.1) и коммутаторных соотношений для $\alpha_{-3}$, приведенных в начале доказательства теоремы 1, с $\tilde{Z}_4 = \langle \alpha_2\alpha_8 Z_3, \alpha_6\alpha_5\alpha_8 Z_3\rangle$. Таким образом, имеем два ряда подгрупп:

$$O_2(M) > Z_5 > Z_4 > Z_3 > Z_2 > Z_1 > 1 \ \text{ и } \ O_2(M) > Z_5 > \tilde{Z}_4 > Z_3 > Z_2 > Z_1 > 1, \qquad (3.2)$$

являющихся фрагментами главных рядов группы $M$, включенными в $O_2(M)$.

Покажем, что рядами (3.2) исчерпываются фрагменты главных рядов группы $M$, включенные в $O_2(M)$. Для этого докажем, что каждая содержащаяся в $O_2(M)$ нормальная подгруппа группы $M$ совпадает с членом какого-то из указанных фрагментов.

Предположим, что, напротив, имеется содержащаяся в $O_2(M)$ нормальная подгруппа $Z$ группы $M$, отличная от всех членов указанных фрагментов.

Поскольку нетривиальная подгруппа $Z$ нормальна в $O_2(M)$, ее пересечение с $Z(O_2(M)) = Z_1$ нетривиально. Подгруппа $Z_1$ является минимальной нормальной в $M$ подгруппой, поэтому $Z \cap Z_1 = Z_1$ и, следовательно, $Z_1 < Z$.

Так как $Z/Z_1$ — нетривиальная нормальная подгруппа группы $O_2(M)/Z_1$, фактор-группа $Z/Z_1$ имеет нетривиальное пересечение с $Z(O_2(M)/Z_1) = Z_2/Z_1$. Но $|Z_2/Z_1| = 2$, следовательно, $Z_2 < Z$.

Так как $Z/Z_2$ — нетривиальная нормальная подгруппа группы $O_2(M)/Z_2$, фактор-группа $Z/Z_2$ имеет нетривиальное пересечение с $Z(O_2(M)/Z_2) = Z_3/Z_1$. Ввиду неприводимости действия группы $M$ на $Z_3/Z_2$ это влечет $Z_3 < Z$.

Поскольку $|Z_4/Z_3| = 2$, имеем $Z_4 < ZZ_4$.

Пусть $ZZ_4 \leqslant Z_5$. Ввиду неприводимости действия группы $M$ на $Z_5/Z_4$ получаем, что $ZZ_4 = Z_5$. Если $Z_4 \leqslant Z$, то $Z = Z_5$; противоречие с выбором $Z$. Поэтому $Z/Z_3 \cap Z_4/Z_3 = 1$, что, как было показано выше, влечет $Z = \tilde{Z}_4$, а это противоречит выбору $Z$.

Таким образом, $Z_5 < ZZ_5$. Ввиду неприводимости действия группы $M$ на $O_2(M)/Z_5$ получаем, что $ZZ_5 = O_2(M)$. Поскольку согласно [15, с. 476] имеем $(\alpha_1\alpha_5)^2 = \alpha_2\alpha_{12}$ и $(\alpha_4\alpha_5)^2 = \alpha_8\alpha_9\alpha_{12}$, группа $O_2(M)/Z_4$ есть прямое произведение двух циклических групп порядка 4, причем $Z_5/Z_4$ — ее нижний слой. В частности, $ZZ_4/Z_4 \cap Z_5/Z_4 \neq 1$. Ввиду неприводимости действия группы $M$ на $Z_5/Z_4$ это влечет $Z_5/Z_4 \leqslant ZZ_4/Z_4$, и, следовательно, $Z_5 \leqslant ZZ_4$, что дает $O_2(M) = ZZ_5 = ZZ_4$. Но тогда группа $O_2(M)/Z$ изоморфна группе $Z_4/(Z_4 \cap Z)$ порядка, не превосходящего 2, и потому $[O_2(M), O_2(M)] = Z_4 < Z$, что влечет $O_2(M) = Z$; противоречие с выбором $Z$.

Таким образом, для группы $P_2 \cap G$ утверждение теоремы 2 доказано. $\square$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли, гл. IV–VI. М.: Мир, 1972. 332 с.
2. **Carter R.W.** Simple groups of Lie type. London: John Wiley and Sons, 1972. 331 p. ISBN: 0471137359 .
3. **Azad H., Barry M., Seitz G.** On the structure of parabolic subgroups // Comm. Algebra. 1990. Vol. 18, no. 2. P. 551–562. https://doi.org/10.1080/00927879008823931
4. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups. Number 3, Part I. Providence: RI Amer. Math. Soc., 1998. 419 p. ISBN 0821803913 .
5. **Tits J.** Algebraic and abstract simple groups // Ann. Math. 1964. Vol. 80. P. 313–329. https://doi.org/10.2307/1970394
6. **Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A.** Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p. ISBN 0-19-853199-0 .
7. **Gorenstein D.** Finite groups. NY: Harper and Row, 1968. 520 p. ISBN 0-8284-0301-0 .
8. **Seitz G.** Small rank permutation representations of finite Chevalley groups // J. Algebra. 1974. Vol 28, no. 3. P. 508–517. https://doi.org/10.1016/0021-8693(74)90057-X
9. **Ree R.** A family of simple groups associated with simple Lie algebra type $F_4$ // Am. J. Math. 1961. Vol 83. P. 401–420. https://doi.org/10.2307/2372886
10. **Shinoda K.** A characterization of odd order extensions of the Ree groups ${}^2F_4(q)$ // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. 1A. 1975. Vol. 22, no. 1. P. 79–102.
11. **Suzuki M.** On a class of doubly transitive groups // Ann. Math. 1962. Vol. 75. P. 105–145. https://doi.org/10.2307/1970423
12. **Ward H. N.** On Ree's series of simple groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 121, no. 1. P. 62–89. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1966-0197587-8
13. **Parrot D.** A characterization of the Ree groups ${}^2F_4(q)$ // J. Algebra. 1973. Vol. 27, no. 2. P. 341–357.
14. **Fong P., Seitz G.** Groups with a $(B, N)$-pair of rank 2. II // Invent. Math. 1974. Vol. 24, no. 3. P. 191–239.
15. **Assa S.** A characterization of ${}^2F_4(2)'$ and the Rudvalis group // J. Algebra. 1976. Vol. 41, no. 2. P. 473–495. https://doi.org/10.1016/0021-8693(76)90194-0

16. **Parrot D.** A characterization of the Tits' simple group // Can. J. Math. 1972. Vol. XXIV, no 4. P. 672–685.
17. **Кораблева В. В.** Письмо в редакцию // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2022. Т 28, № 2. С. 297–299. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-2-297-299
18. **Кораблева В. В.** О главных факторах параболических максимальных подгрупп группы ${}^2F_4(2^{2n+1})$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т 25, № 4. С. 99–106. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-4-99-106
19. **Liebeck M. W.** The affine permutation groups of rank three // Proc. London Math. Soc. (3). 1987. Vol. 54, no. 3. P. 477–516.
20. **Кораблева В.В.** О главных факторах параболических максимальных подгрупп специальных конечных простых групп исключительного лиева типа // Сиб. мат. журн. 2017. Т 58, № 6. С. 1332–1340. https://doi.org/10.17377/smzh.2017.58.612

Поступила 14.05.2025
После доработки 10.10.2025
Принята к публикации 13.10.2025
Опубликована онлайн 4.12.2025

Кондратьев Анатолий Семенович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский математический центр
г. Екатеринбург
e-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru

Кораблева Вера Владимировна
д-р физ.-мат. наук, доцент, ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург;
профессор каф. компьютерной безопасности и прикладной алгебры
Челябинский государственный университет
г. Челябинск
e-mail: vvkora@gmail.com

Трофимов Владимир Иванович
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский математический центр;
профессор, Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: trofimov@imm.uran.ru

## REFERENCES

1. Bourbaki N. *Groupes et algèbres de Lie. Chap. IV–VI.* Berlin, Heidelberg, Springer, 1968, 282 p. https://doi.org/10.1007/978-3-540-34491-9. Translated to Russian under the title *Gruppy i algebry Li. Gl. IV–VI.* Moscow, Mir Publ., 1972, 334 p.
2. Carter R.W. *Simple groups of Lie type.* London, John Wiley and Sons, 1972, 331 p. ISBN: 0471137359.
3. Azad H., Barry M., Seitz G. On the structure of parabolic subgroups. *Comm. Algebra*, 1990, vol. 18, no. 2, pp. 551–562. https://doi.org/10.1080/00927879008823931
4. Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. *The classification of the finite simple groups.* Number 3, Part I. Providence, RI Amer. Math. Soc., 1998, 420 p. ISBN: 0-8218-0391-3.
5. Tits J. Algebraic and abstract simple groups. *Ann. of Math.*, 1964, vol. 80, pp. 313–329. https://doi.org/10.2307/1970394
6. Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A. *Atlas of finite groups.* Oxford, Clarendon Press, 1985, 252 p. ISBN: 0-19-853199-0.

7. Gorenstein D. *Finite groups.* NY, Harper and Row, 1968, 527 p.
8. Seitz G. Small rank permutation representations of finite Chevalley groups *J. Algebra* 1974, vol. 28, no. 3, pp. 508–517. https://doi.org/10.1016/0021-8693(74)90057-X
9. Ree R. A family of simple groups associated with simple Lie algebra type $F_4$. *Amer. J. Math.*, 1961, vol. 83, no. 3, pp. 401–420. https://doi.org/10.2307/2372886
10. Shinoda K. A characterization of odd order extensions of the Ree groups ${}^2F_4(q)$. *J. Fac. Sci. Univ.*, 1975. vol. 22, pp. 79–102.
11. Suzuki M. On a class of doubly transitive groups. *Ann. Math.*, 1962, vol. 75, no. 1, pp. 105–145. https://doi.org/10.2307/1970423
12. Ward H.N. On Ree's series of simple groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1966, vol. 121, no. 1, pp. 62–89. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1966-0197587-8
13. Parrott D. A characterization of the Ree groups ${}^2F_4(q)$. *J. of Algebra*, 1973, vol. 27, no. 2, pp. 341–357.
14. Fong P., Seitz G. Groups with a $(B,N)$-pair of rank 2. II // Invent. Math. 1974. Vol. 24, no. 3. P. 191–239.
15. Assa S. A characterization of ${}^2F_4(2)'$ and the Rudvalis group. *J. Algebra*, 1976, vol 41, no. 2, pp. 473–495. https://doi.org/10.1016/0021-8693(76)90194-0
16. Parrott D. A characterization of the Tits' simple group. *Canad. J. Math.*, 1972, vol. 24, no. 4, pp. 672–685.
17. Korableva V.V. Letter to the editor. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 2, pp. 297–299 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-2-297-299
18. Korableva V.V. On the chief factors of parabolic maximal subgroups of the group ${}^2F_4(2^{2n+1})$. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2021, vol. 313, suppl. 1, pp. S1–S7. https://doi.org/10.1134/S0081543821030147
19. Liebeck M.W. The affine permutation groups of rank three. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 1987. vol. 54, no. 3, pp. 477–516.
20. Korableva V.V. On the chief factors of parabolic maximal subgroups of special finite simple groups of exceptional Lie type. *Sib. Math. J.*, 2017, vol. 58, no. 6, pp. 1034–1041. https://doi.org/10.1134/S003744661706012X

Received May 14, 2025
Revised October 10, 2025
Accepted October 13, 2025
Published online December 4, 2025

**Funding Agency**: The work was performed as part of research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement number 075-02-2025-1549).

*Anatoly Semenovich Kondrat'ev,* Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences; Ural Mathematical Center, Yekaterinburg, 620077 Russia, e-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru .

*Vera Vladimirovna Korableva,* Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620077 Russia; Prof., Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: vvkora@gmail.com .

*Vladimir Ivanovich Trofimov,* Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620077 Russia; Ural Mathematical Center; Prof., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia,
e-mail: trofimov@imm.uran.ru .

Cite this article as: A. S. Kondrat'ev, V. V. Korableva, V. I. Trofimov. On chief series of parabolic maximal subgroups of finite simple groups of exceptional Lie type. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2026. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2026-32-1-fon-02