

УДК 512.558

## ОБ УСЛОВНО ПОЛНЫХ СВЕРХУ ОБОБЩЕННЫХ БУЛЕВЫХ РЕШЕТКАХ<sup>1</sup>

Е. М. Вечтомов

Изучаются обобщенные булевы решетки. Приведены спектральные характеристики обобщенных булевых решеток. Цель статьи — исследование свойств условно полных сверху обобщенных булевых решеток. Получены абстрактные характеристики таких решеток. Доказано обобщение известной теоремы о том, что полнота любой булевой решетки эквивалентна экстремальной несвязности ее максимального спектра. Рассматриваются также условно  $m$ -полные сверху обобщенные булевы решетки для произвольной бесконечной мощности  $m$ . Приведены примеры и замечания.

Ключевые слова: обобщенная булева решетка, максимальный спектр, условная полнота, экстремально несвязное пространство, прямое слагаемое.

**E. M. Vechtomov. On upper conditionally complete generalized Boolean lattices.**

The article studies generalized Boolean lattices. It provides spectral characterizations of generalized Boolean lattices. The purpose of the article is to investigate properties of upper conditionally complete generalized Boolean lattices. The author gives abstract characterizations of such lattices and proves a generalization of the well-known theorem that the completeness of any Boolean lattice is equivalent to the extremally disconnection of its maximal spectrum. The work also considers upper conditionally  $m$ -complete generalized Boolean lattices for arbitrary infinite cardinality  $m$ , and provides examples and comments.

Keywords: generalized Boolean lattice, maximal spectrum, conditional completeness, extremally disconnected space, direct summand.

MSC: 06D05, 08A05

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-4-fon-01

### 1. Введение. Предварительные сведения

Статья служит дополнением предыдущей работы автора [1], с которой читателю желательно ознакомиться. Основной целью настоящей статьи является доказательство двух теорем о характеристике условно полных сверху обобщенных булевых решеток.

Напомним основные необходимые определения. Сразу отметим, что теоретико-решеточные сведения можно найти в книгах [2–4], а общетопологическую информацию — в монографиях [5; 6].

*Решеткой* называется алгебра  $\langle L, +, \cdot \rangle$  с двумя идемпотентными коммутативно-ассоциативными бинарными операциями сложения  $+$  и умножения  $\cdot$ , связанными тождествами *поглощения*  $x + xy = x$  и  $x(x + y) = x$ . Если для произвольных элементов  $a, b$  решетки  $L$  положить  $a \leq b \Leftrightarrow a + b = b$  (равносильно,  $ab = a$ ), то получим упорядоченное множество  $\langle L, \leq \rangle$ , в котором  $x + y = \sup\{x, y\}$  и  $xy = \inf\{x, y\}$  для любых  $x, y \in L$  (см. [2, п. 3.1; 3, с. 20–21, теорема 1]).

Решетка с тождеством  $x(y + z) = xy + xz$  называется *дистрибутивной*. Дистрибутивная решетка  $L$  с нулем  $0$  и ненулевой единицей  $1$  называется *булевой решеткой*, если каждый ее элемент  $a$  имеет *дополнение*  $b \in L$ :  $a + b = 1$  и  $ab = 0$ ; дополнение единственно и обозначается как  $a'$ .

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках проекта “Полукольца и полумодули с условиями идемпотентности” (проект № 24-21-00117, <https://rscf.ru/project/24-21-00117/>).

Элемент  $a \setminus b$  дистрибутивной решетки  $L$  с нулем  $0$  называется *относительным дополнением* элемента  $b \in L$  до (относительно) элемента  $a \in L$ , если  $(a \setminus b) + b = a + b$  и  $(a \setminus b)b = 0$ ; элемент  $a \setminus b$  единственен в случае своего существования. Мы видим, что элемент  $a \setminus b$  служит дополнением элемента  $b$  в подрешетке  $(a + b)L$  решетки  $L$ .

Дистрибутивная решетка с нулем  $0$ , для любых элементов  $a, b$  которой существует относительное дополнение  $a \setminus b$ , называется *обобщенной булевой решеткой*. Всякая булева решетка  $L$  является обобщенной булевой решеткой, поскольку  $a \setminus b = ab'$  для любых элементов  $a, b \in L$ . Обобщенные булевы решетки с ненулевой единицей являются булевыми решетками.

*Интервалом* (нетривиальным) решетки  $L$  называется множество  $[a, b] = \{x \in L: a \leq x \leq b\}$  при  $a < b$  из  $L$ .

**Предложение 1.** *Для произвольной дистрибутивной решетки  $L$  с нулем  $0$  равносильны следующие условия:*

- 1)  $L$  — обобщенная булева решетка;
- 2) все интервалы в  $L$  являются булевыми решетками (как подрешетки решетки  $L$ );
- 3) в  $L$  каждый ненулевой главный идеал является булевой решеткой.

**Доказательство.** 1)  $\Rightarrow$  2). Любой интервал  $[a, b]$  решетки  $L$  является ограниченной дистрибутивной решеткой. Легко видеть, что элемент  $c \in [a, b]$  имеет в решетке  $[a, b]$  дополнение  $b \setminus c + a$ . 2)  $\Rightarrow$  3). Очевидно. 3)  $\Rightarrow$  1). Пусть  $a, b \in L$ . Если  $a = b$ , то  $a \setminus b = 0$ . В противном случае  $[0, a + b] = (a + b)L$  — булева решетка, и элемент  $b$  имеет в ней дополнение  $c$ :  $cb = 0$  и  $c + b = a + b$ . Значит,  $c = a \setminus b$ .

Предложение доказано.

Ассоциативное кольцо с тождеством  $xx = x$  называется *булевым кольцом*. Между обобщенными булевыми решетками и булевыми кольцами существует естественное взаимно однозначное соответствие [3, с. 109]. Именно, если  $\langle L, +, \cdot \rangle$  — обобщенная булева решетка, то  $\langle L, \oplus, \cdot \rangle$  — булево кольцо, где  $a \oplus b = (a \setminus b) + (b \setminus a)$  для любых  $a, b \in L$ . Если же  $\langle L, \oplus, \cdot \rangle$  — булево кольцо, то  $\langle L, +, \cdot \rangle$  — обобщенная булева решетка, где  $a + b = a \oplus ab \oplus b$  для всех  $a, b \in L$ . При этом булевым решеткам соответствуют булевы кольца с ненулевой единицей.

Решетка называется *условно полной сверху (снизу)*, если каждое ее ограниченное сверху (соответственно, снизу) непустое множество обладает точной верхней (соответственно, точной нижней) гранью. Решетка *полная сверху (снизу)*, когда любое непустое множество в ней имеет точную верхнюю (соответственно, точную нижнюю) грань. Решетка, полная сверху и снизу, называется *полной решеткой*.

Идеал  $J$  решетки  $L$  с нулем  $0$  называется *аннуляторным*, если  $J = \text{Ann } I = \{x \in L: xI = \{0\}\}$  для некоторого непустого множества  $I \subseteq L$  (множество  $I$  можно считать идеалом решетки  $L$ ).

Хаусдорфово пространство, в котором любое открытое множество является объединением открыто-замкнутых множеств, называется *нульмерным*. Локально компактное нульмерное хаусдорфово пространство будем называть *стоуновым*, хотя сам М. Стоун назвал такие пространства булевыми [7]. Замыкание открытого множества топологического пространства называется *канонически замкнутым* множеством. Топологическое пространство называется *экстремально несвязным*, если все его канонически замкнутые множества открыты, т. е. открыто-замкнуты. Подмножество топологического пространства  $X$  называется *плотным*, если его замыкание в  $X$  совпадает с  $X$ .

Простой спектр  $\text{Spec } L$  и максимальный спектр  $\text{Max } L$  дистрибутивной решетки  $L$  определяются стандартно. Для замкнутости изложения напомним эти понятия и соответствующие факты (см., например, [2, п. 4.3]).

Пусть  $L$  — произвольная дистрибутивная решетка.

Собственный идеал  $P$  решетки  $L$  ( $P \neq L$ ) называется: *простым*, если  $ab \in P$  влечет  $a \in P$  или  $b \in P$  для любых элементов  $a, b \in L$ ; *максимальным*, если в  $L$  нет собственных идеалов, строго содержащих идеал  $P$ .

Для любых элементов  $a \neq b$  решетки  $L$  существует простой идеал в  $L$ , содержащий ровно один из элементов  $a, b$ . Максимальные идеалы в  $L$  являются простыми идеалами. Каждый собственный идеал в  $L$  равен пересечению всех простых идеалов в  $L$ , его содержащих.

Множество  $\text{Срес } L$  всех простых идеалов дистрибутивной решетки  $L$ , рассматриваемое с топологией Стоуна — Зарисского, называется *простым спектром* полукольца  $L$ . Открытыми множествами простого спектра  $\text{Срес } L$  служат множества  $D(J) = \{P \in \text{Срес } L : J \setminus P \neq \emptyset\}$  по всем идеалам  $J$  решетки  $L$ . Множества  $D(a) = D(aS) = \{P \in \text{Срес } L : a \notin P\}$ ,  $a \in L$ , образуют базу открытых множеств топологического пространства  $\text{Срес } L$ . Если решетка  $L$  неоднородная, то  $\text{Срес } L \neq \emptyset$ , но  $L$  может не иметь максимальных идеалов.

Для любых элементов  $a, b \in L$  имеют место равенства

$$D(a + b) = D(a) \cup D(b), \quad D(ab) = D(a) \cap D(b), \quad D(L) = \text{Срес } L$$

$$D(a) \subseteq D(b) \Leftrightarrow a \leq b;$$

$$D(a) = D(b) \Leftrightarrow a = b, \quad D(a) = \emptyset \Leftrightarrow a \text{ — нуль решетки } L;$$

$$D(a) = \text{Срес } L \Leftrightarrow a \text{ — единица решетки } L.$$

Стало быть, отображение  $D: L \rightarrow \{D(a) : a \in L\}$ ,  $a \mapsto D(a)$  для любого элемента  $a \in L$ , является изоморфизмом дистрибутивной решетки  $L$  на подрешетку  $\{D(a) : a \in L\}$  булеана  $\mathcal{B}(\text{Срес } L)$ . Отсюда вытекает классическая теорема Биркгофа — Стоуна о представлении любой дистрибутивной решетки как решетки множеств [3, с. 93, теорема 19].

Множество  $\text{Мах } L$  всех максимальных идеалов в  $L$  образует подпространство простого спектра  $\text{Срес } L$ , называемое *максимальным спектром* решетки  $L$ , если  $\text{Мах } L \neq \emptyset$ .

Простой спектр  $\text{Срес } L$  является  $T_0$ -пространством: если  $a \in P \setminus Q$  для  $P, Q \in \text{Срес } L$ , то  $P \not\subseteq Q$  и  $Q \subseteq P$ . Максимальный спектр  $\text{Мах } L$  является  $T_1$ -пространством, т.е. в нем все одноточечные множества замкнуты. Компактность каждого из пространств  $\text{Срес } L$  и  $\text{Мах } L$  эквивалентна наличию единицы в  $L$ .

**Лемма 1** [2, с. 168, предложение 5]. *Для неоднородной дистрибутивной решетки  $L$  множества  $D(a)$ ,  $a \in L$ , — это в точности компактные открытые множества простого спектра  $\text{Срес } L$ .*

**Лемма 2** [2, п. 5.4; 3, с. 96, упр. 27]. *Для дистрибутивной решетки  $L$  равенство спектров  $\text{Срес } L = \text{Мах } L$  равносильно тому, что все интервалы в  $L$  — булевы решетки.*

Приведем спектральные характеристики обобщенных булевых решеток:

**Предложение 2.** *Для любой неоднородной дистрибутивной решетки  $L$  эквивалентны следующие утверждения:*

- 1)  $L$  — обобщенная булева решетка;
- 2)  $\text{Срес } L$  — хаусдорфово пространство;
- 3) для любого  $a \in L$  множество  $D(a)$  замкнуто;
- 4)  $\text{Срес } L$  — нульмерное пространство;
- 5)  $\text{Срес } L$  — стоуново пространство.

**Доказательство.** 1)  $\Rightarrow$  2) Пусть  $L$  — обобщенная булева решетка. Возьмем любые точки  $P \neq Q$  в простом спектре  $\text{Срес } L$ . По лемме 2  $\text{Срес } L = \text{Мах } L$ . Поэтому неверны включения  $P \subseteq Q$  и  $Q \subseteq P$ . Значит, существуют элементы  $a \in P \setminus Q$  и  $b \in Q \setminus P$ . Имеем  $(a \setminus b) + b = a + b$  и  $(a \setminus b)b = 0$ . Откуда  $a \setminus b \notin Q$ , так как иначе  $a + b \in Q$  и  $a = a(a + b) \in Q$ , что невозможно. Далее,  $Q \in D(a \setminus b)$ ,  $P \in D(b)$  и  $D(a \setminus b) \cap D(b) = D((a \setminus b)b) = D(0) = \emptyset$ . Следовательно, пространство  $\text{Срес } L$  хаусдорфово.

2)  $\Rightarrow$  3) Возьмем элемент  $a \in L$ . По лемме 1 множество  $D(a)$  компактно. Хорошо известно, что компактные множества в хаусдорфовом пространстве замкнуты.

3)  $\Rightarrow$  4) Выполнение условия 3) означает, что все множества  $D(a)$ ,  $a \in L$ , открыто-замкнуты в  $T_0$ -пространстве  $\text{Spec } L$ . Поэтому пространство  $\text{Spec } L$  нульмерно.

4)  $\Rightarrow$  5) Любое нульмерное  $T_0$ -пространство хаусдорфово. По лемме 1 пространство  $\text{Spec } L$  локально компактно. Значит,  $\text{Spec } L$  — стоуново пространство.

5)  $\Rightarrow$  1) Пусть  $\text{Spec } L$  — стоуново пространство. Тогда пространство  $\text{Spec } L$  хаусдорфово, что влечет равенство  $\text{Spec } L = \text{Max } L$ . По лемме 2 все интервалы дистрибутивной решетки  $L$  являются булевыми решетками. Одноэлементные и двухэлементные решетки являются обобщенными булевыми решетками. Предположим, что  $L$  имеет более двух элементов. Тогда в ней найдутся два различных простых идеала  $P$  и  $Q$ , которые обладают непересекающимися окрестностями  $D(a)$  и  $D(b)$  для некоторых элементов  $a, b \in L$ . Имеем  $D(ab) = D(a) \cap D(b) = \emptyset$ . Поэтому элемент  $ab$  лежит в любом простом идеале дистрибутивной решетки  $L$ , стало быть, является ее нулем. Следовательно, по предложению 1  $L$  будет обобщенной булевой решеткой.

Предложение доказано.

Решетку, содержащую более двух элементов, все интервалы которой являются булевыми решетками, назовем *решеткой с булевыми интервалами*. Очевидно, решетки с булевыми интервалами дистрибутивны.

**Предложение 3.** *Для того чтобы решетка  $L$  с булевыми интервалами не имела нуля, необходимо и достаточно, чтобы каждое непустое открытое множество ее максимального спектра  $\text{Max } L$  было плотным.*

*Доказательство.* Сразу отметим, что  $\text{Max } L = \text{Spec } L$  по лемме 2.

*Необходимость.* Предположим от противного, что дополнение  $V$  замыкания некоторого непустого открытого множества  $U$  топологического пространства  $\text{Max } L$  непусто. Непустые открытые множества  $U$  и  $V$  не пересекаются. В решетке  $L$  найдутся такие элементы  $a$  и  $b$ , что  $D(a) \subseteq U$  и  $D(b) \subseteq V$ . Тогда  $D(ab) = D(a) \cap D(b) = \emptyset$ . Это означает, что  $ab$  — нуль решетки  $L$ .

*Достаточность.* Если решетка  $L$  обладает нулем, то она будет обобщенной булевой решеткой. По предложению 2 максимальный спектр  $\text{Max } L$  является неодноэлементным хаусдорфовым пространством, откуда следует существование в топологическом пространстве  $\text{Max } L$  неплотного непустого открытого множества.

Предложение доказано.

**Следствие 1.** *Максимальный спектр любой решетки без нуля с булевыми интервалами является нехаусдорфовым экстремально несвязным пространством.*

Пусть  $X$  — стоуново пространство и  $\mathbf{B} = \{0, 1\}$  — дискретная топологическая двухэлементная цепь. Через  $C_{00}(X, \mathbf{B})$  обозначается множество всех непрерывных функций  $f : X \rightarrow \mathbf{B}$  с компактным носителем  $\text{supp } f = f^{-1}(1)$ . Ясно, что  $C_{00}(X, \mathbf{B})$  с поточечно определенными операциями сложения и умножения функций будет обобщенной булевой решеткой. Оказывается, такие решетки исчерпывают с точностью до изоморфизма класс всевозможных обобщенных булевых решеток. Именно, имеет место следующая теорема М. Стоуна [3, с. 140, следствие 10 и с. 148, упр. 39].

**Теорема А.** *Произвольная неодноэлементная обобщенная булева решетка  $L$  изоморфна решетке всевозможных компактных открыто-замкнутых множеств стоунова пространства  $\text{Max } L$ .*

Действительно, в силу лемм 1 и 2 и предложения 2 неодноэлементная обобщенная булева решетка  $L$  изоморфна решетке  $\{D(a) : a \in L\}$  всех компактных открыто-замкнутых множеств стоунова пространства  $\text{Spec } L = \text{Max } L$ .

Нам удобнее будет переформулировать теорему А [4; 7] на функционально-топологическом языке — в терминах характеристических функций компактных открытых множеств стоунова пространства.

**Теорема В.** *Всякая неодноэлементная обобщенная булева решетка  $L$  изоморфна решетке  $C_{00}(X, \mathbf{B})$  для стоунова пространства  $X = \text{Max } L$ .*

## 2. Основные результаты

Введем еще несколько полезных понятий и обозначений.

Полагаем  $L = C_{00}(X, \mathbf{B})$ , где  $X$  — произвольное стоуново пространство. Ясно, что  $L$  — решетка с единицей 1 тогда и только тогда, когда пространство  $X$  компактно; в этом случае  $C_{00}(X, \mathbf{B}) = C(X, \mathbf{B})$  — решетка всех непрерывных функций  $X \rightarrow \mathbf{B}$ .

Если  $Y$  — подпространство в  $X$ , то положим

$$M_Y = \{f \in L : Y \subseteq f^{-1}(0)\}, \quad N_Y = \{f \in L : \text{supp } f \subseteq Y\}.$$

Очевидно, что множества  $M_Y$  и  $N_Y$  являются идеалами решетки  $L$ . При этом  $M_Y = M_{[Y]}$  и  $N_Y = N_{Y^0}$  для замыкания  $[Y]$  и внутренности  $Y^0$  множества  $Y$  соответственно. Имеем  $M_\emptyset = L$  и  $M_X = \{0\}$ . Далее будет показано, что любой идеал  $I$  решетки  $L$  имеет вид  $I = M_Y$  для замкнутого множества  $Y$  пространства  $X$ , а также  $I = N_{X \setminus Y}$  для открытого множества  $X \setminus Y$  пространства  $X$ .

Идеал  $I$  решетки  $L$  называется *прямым слагаемым*, если существует такой идеал  $J$  в  $L$ , что каждый элемент решетки  $L$  однозначно представим в виде суммы элемента из  $I$  и элемента из  $J$ ; в обозначениях  $L = I \oplus J$ . Существование прямого слагаемого в решетке  $L$  равносильно наличию нуля в  $L$  [1, лемма 1].

**Лемма 3.** *Для любого идеала  $I$  решетки  $L = C_{00}(X, \mathbf{B})$  над произвольным стоуновым пространством  $X$  справедливы следующие утверждения:*

- (1)  $I = M_Y$  для однозначно определенного замкнутого множества  $Y$  топологического пространства  $X$ ;
- (2)  $I$  — прямое слагаемое решетки  $L \Leftrightarrow I = M_Y$  для однозначно определенного открыто-замкнутого множества  $Y$  топологического пространства  $X$ ;
- (3)  $I$  — аннуляторный идеал решетки  $L \Leftrightarrow I = M_Y$  для однозначно определенного канонически замкнутого множества  $Y$  топологического пространства  $X$ .

**Доказательство.** (1) Пусть  $Y = \bigcap_{f \in I} f^{-1}(0)$ . Множество  $Y$  замкнуто в топологическом пространстве  $X$  и  $X \setminus Y = \bigcup_{f \in I} \text{supp } f$ . Покажем, что  $I = M_Y$  или, равносильно,  $I = N_{X \setminus Y}$ . Ясно, что  $I \subseteq N_{X \setminus Y}$ . Возьмем функцию  $f \in L$ , для которой  $\text{supp } f \subseteq X \setminus Y$ . Компактное множество  $\text{supp } f$ , если содержится в объединении носителей функций из идеала  $I$ , содержится в объединении носителей конечного числа функций  $f_1, \dots, f_n$  из  $I$ . Но тогда  $f = ff_1 + \dots + ff_n \in I$ . Стало быть,  $N_{X \setminus Y} \subseteq I$ , и  $I = N_{X \setminus Y} = M_Y$ . Единственность замкнутого множества  $Y$  вытекает из только что проведенного рассуждения.

(2) Пусть  $I$  — прямое слагаемое решетки  $L$ , т.е.  $L = I \oplus J$  для некоторого идеала  $J$  решетки  $L$ . В силу утверждения (1)  $I = M_Y$  и  $J = M_Z$  для замкнутых множеств  $Y$  и  $Z$  топологического пространства  $X$ . Поскольку пространство  $X$  стоуново, то, как легко видеть,  $Y \cup Z = X$  и  $Y \cap Z = \emptyset$ . Значит, множество  $Y$  открыто-замкнутое.

Обратно, если  $I = M_Y$  для открыто-замкнутого множества  $Y$  пространства  $X$ , то, очевидно,  $L = I \oplus J$  при  $J = M_{X \setminus Y}$ .

(3) Пусть теперь  $J = \text{Ann } I$  есть аннулятор идеала  $I$  решетки  $L$  и  $U = \bigcup_{f \in I} \text{supp } f$ . Множество  $U$  открыто в стоуновом пространстве  $X$ . По утверждению (1)  $I = N_U$ . Достаточно показать, что  $J = M_{[U]}$ . Включение  $M_{[U]} \subseteq \text{Ann } I = J$  очевидно. Если же  $f \in \text{Ann } I$ , то  $\text{supp } f \cap \text{supp } g = \emptyset$  для всех  $g \in I$ , т.е.  $\text{supp } f \cap U = \emptyset$ , значит,  $f \in M_{[U]}$ . Получили  $J = M_{[U]}$  для канонически замкнутого множества  $[U]$  в  $X$ .

Обратно, рассмотрим идеал  $J = M_{[U]}$  для некоторого открытого множества  $U$  пространства  $X$ . Для идеала  $I = N_U$  проверим равенство  $M_{[U]} = \text{Ann } N_U$ . Включение  $M_{[U]} \subseteq \text{Ann } N_U$  очевидно. Если  $f \in L$  аннулирует  $N_U$ , то  $f = 0$  на  $U$ , значит,  $f = 0$  и на  $[U]$ , т.е.  $f \in M_{[U]}$ .

Лемма полностью доказана.

**Лемма 4.** *Пусть  $L$  — обобщенная булева решетка,  $I$  — ее идеал,  $s = \sup A$  для непустого множества  $A$  в  $L$ . Тогда если  $A \subseteq \text{Ann } I$ , то  $s \in \text{Ann } I$ .*

**Доказательство.** Возьмем элемент  $x \in I$ . Тогда  $ax = 0$  для всех  $a \in A$ . Главный идеал  $(s+x)L$  решетки  $L$  является булевой решеткой. Поэтому элемент  $x$  имеет в ней дополнение  $y$ :  $x+y = s+x$  и  $xy = 0$ . Для любого элемента  $a \in A$  имеем  $a \leq a+y = (a+y)(s+x+y) = (a+y)(x+y) = ax+y = y$ . Значит,  $s \leq y$ . Стало быть,  $sx \leq yx = 0$ . Следовательно,  $s \in \text{Ann } I$ .

Лемма доказана.

**Теорема 1** (основная теорема). *Для неодноэлементной обобщенной булевой решетки  $L$  эквивалентны следующие утверждения:*

- 1) все аннуляторные идеалы в  $L$  выделяются прямыми слагаемыми;
- 2)  $L$  — условно полная сверху решетка;
- 3) максимальный спектр  $\text{Max } L$  является экстремально несвязным пространством.

**Доказательство.** В силу **теоремы В** будем считать, что  $L = C_{00}(X, \mathbf{B})$  для стоунова пространства  $X$ , гомеоморфного  $\text{Max } L$ .

Эквиваленция 1)  $\Leftrightarrow$  3) вытекает из леммы 3.

1)  $\Rightarrow$  2) Пусть для  $L$  верно утверждение 1) и  $A$  — непустое подмножество в  $L$ , имеющее верхнюю грань  $e \in L$ . Рассмотрим идеал  $I$  решетки  $L$ , порожденный множеством  $A$ . Имеем:  $I \subseteq eL$  и аннуляторный идеал  $J = \text{Ann } I$  выделяется прямым слагаемым в  $L$ . По п. (2) леммы 3  $J = M_Y$  для открыто-замкнутого подмножества  $Y$  стоунова пространства  $X$ . Положим  $Z = X \setminus Y$ . Для любой функции  $f \in L$  имеем:  $f \in J \Leftrightarrow \text{supp } f \subseteq Z$ . Причем  $Z = \bigcup_{f \in J} \text{supp } f$ . Покажем, что  $e_1 = e|_Y = \sup I = \sup A$ . Ясно, что функция  $e_1$  служит верхней гранью множества  $I$ . Пусть  $e_2$  — произвольная верхняя грань множества  $I$ . Предположим от противного, что неравенство  $e_1 \leq e_2$  неверно. Тогда  $e_1 \setminus e_2 \neq 0$  и  $(e_1 \setminus e_2)e_2 = 0$ . Значит,  $e_1 \setminus e_2 \in \text{Ann } I = J$ , что ведет к противоречию:  $\emptyset \neq \text{supp } (e_1 \setminus e_2) \subseteq Y \cap Z = \emptyset$ .

2)  $\Rightarrow$  3) Пусть для решетки  $L$  верно утверждение 2),  $U$  — открытое множество пространства  $X$ ,  $Y = [U]$  и  $V = X \setminus Y$ . Можно (и будем) считать, что  $U = Y^0$ . Требуется доказать, что множество  $Y$  открыто, т.е.  $Y \setminus U = \emptyset$ . Предположим от противного существование точки  $y \in Y \setminus U$ . Возьмем произвольную базисную окрестность  $\text{supp } f$ ,  $f \in L$ , точки  $y$ . Рассмотрим идеалы  $I = N_U$  и  $J = N_V$  решетки  $L$ . По п. (3) леммы 3 идеалы  $I$  и  $J$  аннуляторные, именно,  $I = \text{Ann } J$  и  $J = \text{Ann } I$ . Открытое множество  $U \cap \text{supp } f$  непусто, так как в противном случае  $f \in \text{Ann } I = N_V$  и  $\text{supp } f \subseteq V$ . Положим

$$A = \{g \in L : \text{supp } g \subseteq U \cap \text{supp } f\}.$$

Для непустого множества  $A$  имеем:  $A \subseteq I = \text{Ann } J$  и  $A$  ограничено сверху элементом  $f$ . По условию существует  $s = \sup A \in fL$ . Возьмем в булевой решетке  $fL$  элемент-функцию  $f \setminus s$ :  $(f \setminus s)s = 0$  и  $(f \setminus s) + s = f$ . Ясно, что  $U \cap \text{supp } (f \setminus s) = \emptyset$  и  $\text{supp } (f \setminus s) \subseteq V$ . Далее, по лемме 4 имеем  $s \in \text{Ann } J = I$ , т.е.  $\text{supp } s \subseteq U$ . Поэтому  $y \notin \text{supp } (f \setminus s) \cup (\text{supp } s) = \text{supp } f$ . Получаем противоречие с допущением существования точки  $y \in Y \setminus U$ .

Теорема доказана.

**Следствие 2** [8, Folk Theorem]. *Булева решетка будет полной решеткой тогда и только тогда, когда ее максимальный спектр экстремально несвязен.*

**Следствие 3.** *Неодноэлементная обобщенная булева решетка условно полна сверху тогда и только тогда, когда все ее интервалы будут полными булевыми решетками.*

Несколько обобщим теорему 1.

Пусть  $m$  — некоторая бесконечная мощность (кардинальное число). Идеал решетки называется  $m$ -порожденным, если он имеет множество образующих мощности  $\leq m$ . Решетку назовем (условно)  $m$ -полной сверху, если любое ее (ограниченное сверху) непустое подмножество мощности  $\leq m$  обладает точной верхней гранью. Наконец, топологическое пространство назовем

$m$ -экстремально несвязным, если замыкание объединения любого непустого семейства мощности  $\leq m$  его открыто-замкнутых множеств открыто. Ясно, что хаусдорфовы экстремально несвязные пространства  $m$ -экстремально несвязны.

**Теорема 2.** Для неодноэлементной обобщенной булевой решетки  $L$  и бесконечной мощности  $m$  эквивалентны следующие утверждения:

- 1) аннулятор любого  $m$ -порожденного идеала решетки  $L$  выделяются прямыми слагаемыми;
- 2)  $L$  — условно  $m$ -полная сверху решетка;
- 3) максимальный спектр  $\text{Max } L$  является  $m$ -экстремально несвязным пространством.

**Доказательство** фактически повторяет доказательство теоремы 1. Действительно, в доказательстве утверждения (3) леммы 3 следует брать в точности те открытые множества  $U$ , которые являются объединениями непустых семейств мощности  $\leq m$  открыто-замкнутых множеств стоунова пространства  $X$ . Откуда сразу получается эквиваленция 1)  $\Leftrightarrow$  3).

В доказательстве импликации 1)  $\Rightarrow$  2) в качестве  $A$  нужно взять непустое ограниченное сверху множество мощности  $\leq m$ .

В доказательстве импликации 2)  $\Rightarrow$  3) берем, во-первых, открытое множество  $U = \bigcup_{k \in K} U_k$ , где  $U_k$  — открыто-замкнутые множества пространства  $X$ , индексированные элементами непустого множества  $K$  мощности  $\leq m$ . Во-вторых, в качестве  $A$  рассматриваем множество

$$\{g \in L : \text{supp } g = U_k \cap \text{supp } f \text{ для некоторого } k \in K\},$$

мощность которого  $\leq m$ . Что завершает обоснование теоремы 2.

Отметим, что теорема 1 является частным случаем теоремы 2 для бесконечных обобщенных булевых решеток  $L$ , имеющих мощность  $m$ .

Выделяется случай счетной мощности  $m$ . В этом случае (условно)  $m$ -полная сверху решетка называется (условно)  $\sigma$ -полной сверху решеткой, а  $m$ -экстремально несвязное пространство назовем *счетно-экстремально несвязным*. И мы получаем

**Следствие 4.** Условная  $\sigma$ -полнота сверху неодноэлементной обобщенной булевой решетки  $L$  равносильна каждому из следующих свойств:

- 1) аннуляторы счетно-порожденных идеалов решетки  $L$  выделяются прямыми слагаемыми;
- 2) максимальный спектр  $\text{Max } L$  является счетно-экстремально несвязным пространством.

**Следствие 5.** Булева решетка  $\sigma$ -полна тогда и только тогда, когда ее максимальный спектр счетно-экстремально несвязен.

### 3. Примеры и замечания

Приведем несколько примеров и дополнений.

**Пример 1.** Максимальный спектр  $\text{Max } L$  любой неполной  $\sigma$ -полной булевой решетки  $L$  в силу следствий 2 и 4, будет счетно-экстремально несвязным компактом, не являющимся экстремально несвязным пространством.

**Пример 2.** Решетка  $L_1 = L(X)$  всех конечных подмножеств бесконечного множества  $X$  является условно полной сверху обобщенной булевой решеткой, причем все ее главные идеалы — конечные булеаны. Легко видеть, что ее идеалы совпадают с идеалами  $L(Y) = \{A \in L_1 : A \subseteq Y\}$  по всевозможным множествам  $Y \subseteq X$ . Поэтому решетка всех идеалов решетки  $L_1$  изоморфна булеану  $\mathcal{B}(X)$ . При этом максимальными идеалами будут в точности *фиксированные идеалы*  $L(X \setminus \{x\})$ ,  $x \in X$ . Стало быть, максимальный спектр  $\text{Max } L_1$  гомеоморфен дискретному топологическому пространству  $X$ , которое, очевидно, экстремально несвязно.

**Пример 3.** Пусть  $m < n$  — бесконечные мощности и пусть  $X$  — множество мощности  $n$ . Рассмотрим решетку  $L_2$  всех подмножеств множества  $X$ , мощности которых  $\leq m$ . Решетка  $L_2$  является небулевой обобщенной булевой решеткой, составляющей идеал в булеане  $\mathcal{B}(X)$ . Решетка  $L_2$   $m$ -полна, именно,  $\sup A = \bigcup A$  и  $\inf A = \bigcap A$  в  $L$  для любого ее непустого подмножества  $A$  мощности  $\leq m$ , тем самым,  $\mathcal{B}(\bigcup A) \subset L_2$ . Поэтому  $L_2$  — полная снизу и условно полная сверху решетка, все интервалы которой суть полные булевы решетки. По теореме 1 максимальный спектр  $\text{Max } L_2$  является экстремально несвязным пространством. Пространство  $\text{Max } L_2$  не дискретное, поскольку любой максимальный идеал решетки  $L_2$ , содержащий все конечные подмножества множества  $X$ , не является фиксированным. Если же взять  $m = n$ , то получим булеан  $L_2 = \mathcal{B}(X)$ .

**Пример 4.** Расширим решетку  $L_2$  из примера 3 до булевой решетки  $L_3$ , добавив к множествам  $Y \in L_2$  их дополнения  $X \setminus Y$ . Получим неполную  $m$ -полную булеву решетку  $L_3$ . На основании следствия 2 и теоремы 2 нульмерный компакт  $\text{Max } L_3$  не является экстремально несвязным, но будет  $m$ -экстремально несвязным пространством.

**Пример 5.** Пусть  $L_4$  — решетка множеств, содержащая все конечные подмножества множества  $\mathbb{N}$  натуральных чисел и множества вида  $(2\mathbb{N} \setminus A) \cup B$ , где  $2\mathbb{N}$  — множество четных натуральных чисел,  $A$  и  $B$  — конечные подмножества в  $\mathbb{N}$ . Получаем обобщенную булеву решетку  $L_4$ , не являющуюся ни условно полной сверху, ни полной снизу. По теореме 1 стоуново пространство  $\text{Max } L_4$  не является экстремально несвязным пространством.

**Замечание 1.** В теоремах 1 и 2 вместо обобщенной булевой решетки  $L = C_{00}(X, \mathbf{B})$  можно взять булево кольцо  $C_{00}(X, \mathbb{Z}_2)$ , где  $\mathbb{Z}_2$  — дискретное топологическое двухэлементное поле.

**Замечание 2.** Рассмотрим решетку  $L_5$ , двойственную решетке  $L_2$  из примера 3. Решетка  $L_5$  не имеет нуля, полна сверху и все ее интервалы являются полными булевыми решетками. По следствию 1 максимальный спектр  $\text{Max } L_5$  является нехаусдорфовым экстремально несвязным пространством. Ни один идеал решетки  $L_5$  не выделяется прямым слагаемым, поскольку в противном случае решетка  $L_5$  имела бы нуль по лемме 1 из [1]. Возьмем также решетку  $L_6$ , двойственную решетке  $L_4$  из примера 5. Все ее интервалы будут булевыми решетками. Но решетка  $L_6$  не является условно полной сверху, хотя по лемме 1 пространство  $\text{Max } L_6$  экстремально несвязно. Решетки  $L_5$  и  $L_6$  показывают, что теорема 1 не распространяется на класс решеток с булевыми интервалами.

**Замечание 3.** Теоремы 1 и 2 имеют аналоги в теории колец непрерывных функций. Пусть  $F$  — произвольное неметрическое топологическое тело. Множество  $C(X, F)$  всех непрерывных  $F$ -значных функций на топологическом пространстве  $X$  с поточечно заданными операциями сложения и умножения функций является кольцом. Хаусдорфово пространство  $X$  называется  $F$ -*вполне регулярным*, если для любых его непересекающихся замкнутого множества  $Y$  и одноточечного множества  $\{x\}$  найдется функция  $f \in C(X, F)$ , равная 0 на множестве  $Y$  и равная 1 в точке  $x$ . Напомним, что  $\mathbb{R}$ -вполне регулярные пространства называются просто *вполне регулярными*, или *тихоновскими*. Кольцо, в котором все аннуляторные идеалы (аннуляторы счетных множеств) выделяются прямыми слагаемыми, называется *бэровским* (соответственно, *счетно бэровским*).

Заменяем в лемме 3 и теореме 1 решетку  $L$  на кольцо  $C(X, F)$ . Тогда утверждение (2) леммы 3 верно для любых  $X$  и  $F$ , а утверждение (3) леммы 3 справедливо для  $F$ -вполне регулярных пространств  $X$ . Следовательно, получаем:  *$F$ -вполне регулярное пространство  $X$  экстремально несвязно тогда и только тогда, когда кольцо  $C(X, F)$  является бэровским* (см. обзорную статью [9, п. 3.3]).

При  $F = \mathbb{R}$  получаем кольцо  $C(X) = C(X, \mathbb{R})$ . Относительно поточечно определенного порядка  $C(X)$  будет дистрибутивной решеткой.

Имеет место следующий результат.

**Теорема С.** Для любого тихоновского пространства  $X$  равносильны следующие утверждения:

- i)  $X$  — экстремально несвязное пространство;
- ii)  $C(X)$  — бэровское кольцо;
- iii) решетка  $C(X)$  условно полна сверху (равносильно, снизу).

Эквивалентность утверждений i) и ii) доказана в статье [7]. А эквиваленция i)  $\Leftrightarrow$  iii) есть теорема Накано — Стоуна [10].

Конуль-множеством функции  $f \in C(X)$  называется открытое множество  $\text{coz} f = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$  топологического пространства  $X$ . Тихоновское пространство называется *базисно несвязным*, если замыкание конуль-множества любой функции из  $C(X)$  открыто. Класс базисно несвязных пространств содержит все экстремально несвязные пространства.

Также справедлива следующая теорема (см. [10; 11]).

**Теорема Д.** Для любого тихоновского пространства  $X$  эквивалентны следующие утверждения:

- 1)  $X$  — базисно несвязное пространство;
- 2)  $C(X)$  — счетно-бэровское кольцо;
- 3) решетка  $C(X)$  условно  $\sigma$ -полна сверху (равносильно, снизу).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вечтомов Е.М. Дистрибутивные решетки с различными аннуляторными свойствами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2025. Т. 31, №1. С. 53–65. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2025-31-1-fon-01>
2. Вечтомов Е.М., Широков Д.В. Упорядоченные множества и решетки. СПб: Лань, 2024. 248 с.
3. Гретцер Г. Общая теория решеток / пер. с англ. М.: Мир, 1982. 456 с.
4. Сикорский Р. Булевы алгебры / пер. с англ. М.: Наука, 1969. 376 с.
5. Энгелькинг Р. Общая топология / пер. с англ. М.: Мир, 1986. 752 с.
6. Gillman J., Jerison M. Rings of continuous functions. NY, Springer, 1976. 300 p. (Ser. The university series in higher mathematics; vol. 43).
7. Stone M.H. The theory of representations for Boolean algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1936. Vol. 40, no. 1. P. 37–111. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1936-1501865-8>
8. Gleason A. Projective topological spaces // Illinois J. Math. 1958. Vol. 2, no. 4A. P. 482–489. <https://doi.org/10.1215/ijm/1255454110>
9. Вечтомов Е.М. Кольца непрерывных функций. Алгебраические аспекты // Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия / ВИНТИ. 1991. Т. 29. С. 119–191.
10. Stone M.H. Boundedness properties in function lattices // Canad. J. Math. 1949. Vol. 1, no. 2. P. 176–186. <https://doi.org/10.4153/CJM-1949-016-5>
11. Johnson D.G., Kist. E. Complemented ideals externally disconnected spaces // Arch. Math. 1961. Vol. 11, no. 5. P. 349–354. <https://doi.org/10.1007/BF01650573>

Поступила 13.10.2024

После доработки 3.12.2024

Принята к публикации 10.01.2025

Опубликована онлайн 20.03.2025

Вечтомов Евгений Михайлович  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
зав. кафедрой фундаментальной математики  
Вятский государственный университет  
г. Киров  
e-mail: vecht@mail.ru

## REFERENCES

1. Vechtomov E.M. Distributive lattices with different annihilator properties. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, vol. 31, no. 1, pp. 53–65 (in Russian). <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2025-31-1-fon-01>
2. Vechtomov E.M., Shirokov D.V. *Uporyadochennyye mnozhestva i reshetki* [Ordered sets and lattices]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2024, 249 p. ISBN: 978-5-507-48266-5.
3. Grätzer G. *General lattice theory*. Basel, Birkhäuser, 1978, 381 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7633-9>. Translated to Russian under the title *Obshchaya teoriya reshetok*, Moscow, Mir Publ., 1982, 452 p.
4. Sikorski R. *Boolean algebras*. NY, Acad. Press, 1964, 237 p. Translated to Russian under the title *Bulevy algebry*, Moscow, Nauka Publ., 1969, 376 p.
5. Engelking R. *General topology*, Warsaw, PWN, 1977. Translated to Russian under the title *Obshchaya topologiya*, Moscow, Mir Publ., 1986, 751 p.
6. Gillman J., Jerison M. *Rings of continuous functions*. Ser. The university series in higher mathematics, vol. 43, NY, Springer, 1976. 300 p. ISBN-10: 0387901981.
7. Stone M.H. The theory of representations for Boolean algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1936, vol. 40, no. 1, pp. 37–111. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1936-1501865-8>
8. Gleason A. Projective topological spaces. *Illinois J. Math.*, 1958, vol. 2, no. 4A, pp. 482–489. <https://doi.org/10.1215/ijm/1255454110>
9. Vechtomov E.M. Rings of continuous functions. Algebraic aspects. *J. Math. Sci.*, 1994, vol. 71, no. 2, pp. 2364–2408. <https://doi.org/10.1007/BF02111022>
10. Stone M.H. Boundedness properties in function-lattices. *Canad. J. Math.*, 1949, vol. 1, no. 2, pp. 176–186. <https://doi.org/10.4153/CJM-1949-016-5>
11. Johnson D.G., Kist J.E. Complemented ideals externally disconnected spaces. *Arch. Math.*, 1961, vol. 11, no. 5, pp. 349–354. <https://doi.org/10.1007/BF01650573>

Received October 13, 2024

Revised December 3, 2024

Accepted January 10, 2025

Published online March 20, 2025

**Funding Agency:** This work was supported by the Russian Science Foundation under the state contract “Semirings and semimodules with idempotent conditions” (project no. 24-21-00117, <https://rscf.ru/project/24-21-00117/>).

*Evgenii Mikhailovich Vechtomov*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Vyatka State University, Kirov, 610000 Russia, e-mail: vecht@mail.ru.

Cite this article as: E. M. Vechtomov. On upper conditionally complete generalized Boolean lattices. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 4, pp. 85–94.