ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 31 № 4 2025

УДК 517.988

О МЕТОДАХ УСЛОВНОЙ ВЫПУКЛОЙ МИНИМИЗАЦИИ, ПОРОЖДАЮЩИХ РЕГУЛЯРИЗУЮЩИЕ АЛГОРИТМЫ[1]

В. В. Васин, И. А. Гайнова

Для итерационного метода решения задачи минимизации выпуклой функции, опубликованного ранее, мы предлагаем его модифицированный вариант. Эта модификация связана с новой процедурой вычисления метрической проекции, которая входит в оператор шага базового итерационного процесса. В отличие от основного метода, модифицированный вариант позволяет решать задачу условной выпуклой минимизации как для совместной, так и для несовместной системы ограничений. Исследована сходимость итерационного процесса и его устойчивость к погрешностям входных данных. Выполненные модельные численные примеры подтверждают работоспособность базового и модифицированного методов.

Ключевые слова: некорректно поставленные и несобственные задачи, выпуклые ограничения, итерационный процесс, выпуклая минимизация, регуляризующий алгоритм.

V. V. Vasin, I. A. Gainova. Constrained convex minimization methods generating regularizing algorithms.

We investigate a modified version of the previously published method to solve the problem of minimizing a convex functional. This current modification is related to a new procedure for calculating the metric projection included in the step operator of the basic iterative process. Unlike the basic method, its modified version allows to solve the constrained convex minimization problem for compatible and incompatible system of constraints. Numerical experiments confirm the efficiency of both the basic and modified methods.

Keywords: ill-posed and improper problems, convex constraints, iterative process, convex minimization, regularizing algorithm.

MSC: 65J20, 65K05

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-4-71-84

Введение

В работе [1] первого автора была исследована некорректно поставленная задача условной квадратичной минимизации с ограничениями в форме совместных и несовместных систем равенств и неравенств. В недавно вышедшей работе [2] рассмотрена задача условной выпуклой минимизации на множестве, заданном в виде совместной системы выпуклых неравенств. В этих работах предложены и исследованы итерационные процессы на основе метода проекций градиента, модифицированного с помощью семейства корректирующих множителей. По-видимому, наиболее близким к упомянутым выше статьям является результат, опубликованный в [3] (теорема 4.1). Но в отличие от [1; 2], в которых доказана устойчивость итерационного алгоритма ко всем входным данным, в исследовании [3] метрическая проекция на множество ограничений, входящая в оператор шага, считается точно заданной и устойчивый метод ее реализации в условиях возмущенных данных не предложен.

Такое же замечание справедливо для некоторых монографий по методам оптимизации [4, гл. 5, § 2], [5, гл. 7, § 2, гл. 10, § 3], в которых при исследовании методов типа метода проекций градиента или prox-метода вопросы устойчивой реализации метрической проекции P_Q при наличии погрешностей в задании множества ограничений Q не изучаются. Поскольку

[1]Работа второго автора выполнена в рамках Госзадания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0015).

нахождение P_Q является некорректно поставленной по Адамару задачей, это означает, что предлагаемые методы, вообще говоря, нельзя отнести к регуляризующим алгоритмам.

Следует отметить, что, с одной стороны, выпуклая минимизация относится к разделу современной вычислительной математики и функционального анализа, который касается методов решения некорректно поставленных задач оптимизации. С другой стороны, в терминологии, введенной И. И. Ереминым [6], речь идет о несобственных задачах математического программирования.

В области теории и методов решения несобственных задач можно отметить работы учеников И. И. Еремина для задач линейного программирования (см. [7] и библиографию в ней) и выпуклого программирования (см. [8] и библиографию в ней). Их подход основан на предварительной оптимальной коррекции исходной несобственной задачи к собственной и сведении последней к задаче безусловной минимизации. После дополнительной регуляризации полученная корректная задача решается традиционными методами.

В нашем подходе предварительная редукция исходной некорректной несобственной к собственной, сведение к задаче безусловной минимизации и применение процедур регуляризации не требуется. Приближенные решения строятся с помощью итерационного процесса, в котором необходимо согласование числа итераций с погрешностью входных данных (правило останова итераций). Кроме того, на каждом шаге базового итерационного процесса необходимо предусмотреть устойчивый метод вычисления метрической проекции.

Хорошо известно, что при решении существенно некорректной задачи (например, интегрального уравнения Фредгольма первого рода) с возмущенными данными, при значительном увеличении числа итераций по сравнению с теоретически обоснованным правилом останова итераций, погрешность численного решения неограниченно увеличивается. При численной реализации итерационного процесса в модельных задачах выпуклой минимизации обнаружилась интересная особенность предложенного в данной работе метода, которая заключается в том, что даже при значительном превышении числа итераций по сравнению с обоснованным правилом останова итераций, ошибка численного решения практически не увеличивается после достижения ожидаемой точности.

Статья организована следующим образом. В разд. 1 представлена задача минимизации выпуклой функции на множестве ограничений, заданном системой выпуклых неравенств, и сформулирована основная теорема сходимости базового итерационного метода, предложенного в работе [2]. Для того чтобы охватить случай несовместных систем ограничений, формулируется модификация базового метода. Основную часть этой модификации составляет итерационный метод вычисления метрической проекции на множество ограничений в форме системы выпуклых неравенств. Исследованию данного метода посвящен разд. 2. В разд. 3 сформированы и обоснованы регуляризующие алгоритмы нахождения метрической проекции и задачи выпуклой минимизации. Результаты модельных численных экспериментов и комментарий к ним содержатся в разд. 4.

1. Базовый метод выпуклой минимизации и его модификация

Рассматривается задача минимизации

$$\inf \{\, f_0(u) \colon u \in Q \,\} = F^\star, \tag{1.1}$$

где $f_0 \colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ — дважды дифференцируемая выпуклая функция; Q — выпуклое замкнутое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, в частности, заданное системой выпуклых неравенств

$$Q = \{\, u \in D \subseteq \mathbb{R}^n : \, f_i(u) \le 0, \, i = 1, 2, \dots, m \,\}; \tag{1.2}$$

f_i — выпуклые непрерывно дифференцируемые функции. Предметом нашего рассмотрения также является частный, но важный вариант постановки (1.1), (1.2) — задачи квадратичной минимизации с линейными ограничениями: $\inf \{\, ||Au - f||^2 \colon u \in U, \, Bu = c, \, D_1 u \le d \,\}$, как для совместных, так и несовместных систем ограничений в части численных экспериментов.

Предполагается, что данные задачи (1.1), (1.2) заданы приближенно, т. е. вместо f_i известны $\tilde{f}_i$ с некоторой погрешностью ε: $|f_i(u) - \tilde{f}_i(u)| \le \varepsilon$ $(i = 0, 1, 2, \dots, m)$. Введем обозначение $\tilde{Q}$ для системы (1.2) после замены $f_i(u)$ на $\tilde{f}_i(u)$.

Требуется построить семейство приближенных решений $\{u^{k(\varepsilon)}\}$, аппроксимирующее точное решение задачи (1.1), (1.2) при $\varepsilon \to 0$, т. е. сформировать регуляризующий алгоритм. В работе [2] для решения задачи (1.1), (1.2) был предложен итерационный алгоритм

$$\tilde{u}^{k+1} = \gamma_{k+1}\big[P_{\tilde{Q}}\big(\tilde{u}^k - \lambda\nabla\tilde{f}_0(\tilde{u}^k)\big)\big] + (1 - \gamma_{k+1})v_0 \tag{1.3}$$

и доказана следующая

Теорема 1 [2, Theorem 2]. *Пусть задача* (1.1) *разрешима. Пусть выполнены следующие условия*:

$$\sup_k\big\{||f_0{}''(u^k)||,\, ||\tilde{f}_0''(u^k)||\big\} \le N, \quad \lambda < 2/N; \tag{1.4}$$

$$||\nabla f_0(u^k) - \nabla\tilde{f}_0(u^k)|| \le c_1\varepsilon; \tag{1.5}$$

$$||P_{\tilde{Q}}\tilde{F}(u^k) - P_Q\tilde{F}(u^k)|| \le c_2\varepsilon, \tag{1.6}$$

где $F(u) = u - \lambda\nabla f_0(u)$, $\tilde{F}(u) = u - \lambda\nabla\tilde{f}_0(u)$.

Тогда для любых $\tilde{u}$, v_0 *при выборе числа итераций в соответствии с правилом* $k(\varepsilon)\,\varepsilon \to 0$, $\varepsilon \to 0$, *имеет место сходимость*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}||\tilde{u}^{k(\varepsilon)} - \hat{u}|| = 0,$$

где $\{\tilde{u}^k\}$, $\{u^k\}$ *— последовательности, образованные процессом* (1.3) *при приближенных и точных данных соответственно*; γ_k *— допустимая последовательность* (*см. определение* 1); $\hat{u}$ *—* v_0*-нормальное решение исходной задачи.*

О п р е д е л е н и е 1 [9]. Числовая последовательность $\{\gamma_i\}$ называется допустимой, если выполнены условия: 1) $0 < \gamma_i < 1$, $i = 1, 2, \dots$; 2) $\gamma_i < \gamma_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots$; 3) $\lim\limits_{i\to\infty}\gamma_i = 1$. Кроме того, существует подпоследовательность номеров n_i такая, что 4) $n(i+1) > n(i)$, $i = 1, 2, \dots$; 5) $\lim\limits_{i\to\infty}\varepsilon_{i+n(i)}\,\varepsilon_i^{-1} = 1$; 6) $\lim\limits_{i\to\infty}n(i)\,\varepsilon_i = \infty$, где $\varepsilon_i = 1 - \gamma_i$.

Например, последовательность $\gamma = 1 - i^{-\rho}$ для $0 < \rho < 1$ является допустимой.

Задача нахождения метрической проекции P_Q на множество Q, определяемое системой (1.2), относится к числу некорректно поставленных задач, в которой, в частности, отсутствует непрерывная зависимость от f_i (см. пример в [2], а также пример 1 в разд. 4). Это означает, что в общем случае оценка (1.6) может не выполняться. Чтобы преодолеть это затруднение, естественно заменить реализацию метрической проекции $P_{\tilde{Q}}$ в процессе (1.3) устойчивым алгоритмом вычисления этой величины с точностью $\delta = c_2\varepsilon$ на каждом шаге итераций. В работе [2] для нахождения общей точки системы выпуклых множеств (1.2) применен итерационный метод, предложенный И. И. Ереминым (см., например, [10, гл. 3, § 3]):

$$u^{k+1} = \sum_{i=1}^m \alpha_i S_i(u^k), \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \quad \alpha_i > 0, \tag{1.7}$$

$$S_i(u) = u - \lambda\,\frac{f_i^+(u)\nabla f_i(u)}{||\nabla f_i(u)||^2}, \quad 0 < \lambda < 2, \tag{1.8}$$

где $f_i^+(u)$ — положительная срезка функции $f_i(u)$.

Для того чтобы охватить случай несовместных системы выпуклых неравенств, модифицируем процесс (1.7), (1.8), заменив α_i на $\|\nabla f_i(\bar{u}_i^0)\|^2/\sum_{i=1}^m \|\nabla f_i(\bar{u}_i^0)\|^2$ в (1.7) и $\|\nabla f_i(u)\|^2$ на $\|\nabla f_i(\bar{u}_i^0)\|^2$ в знаменателе формулы (1.8). Окончательно вместо (1.7), (1.8) получаем итерационный процесс с точными данными:

$$u^{k+1} = u^k - \frac{\lambda}{\varkappa^0}\sum_{i=1}^m f_i^+(u^k)\nabla f_i(u^k) = S^0(u^k), \tag{1.9}$$

где $\varkappa^0 = \sum\limits_{i=1}^m \|\nabla f_i(\bar{u}_i^0)\|^2$; $\bar{u}_i^0$ — некоторые элементы, для которых справедливы неравенства $\|\nabla f_i(u^k)\| \le \|\nabla f_i(\bar{u}_i^0)\|$ для любого $k \le k_{\text{stop}}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ (здесь k_{stop} — правило останова итераций, выбранное для исследуемого процесса). В случае приближенных данных в последнем неравенстве необходимо заменить f_i на $\tilde{f}_i$.

2. О сходимости модифицированного метода

Теорема 2. *Пусть система (1.2) разрешима. Тогда оператор S^0, определяемый соотношениями*

$$S^0(u) = \sum_{i=1}^m \alpha_i S_i^0(u), \quad S_i^0(u) = u - \lambda\frac{f_i^+(u)\nabla f_i(u)}{\|\nabla f_i(\bar{u}_i^0)\|^2}, \tag{2.1}$$

где

$$\alpha_i = \|\nabla f_i(\bar{u}_i^0)\|^2/\sum_{i=1}^m \|\nabla f_i(\bar{u}_i^0)\|^2, \quad \max\{\|\nabla f_i(u)\| : u \in D\} \le \|\nabla f_i(\bar{u}_i^0)\|,$$

является сильно Q-фейеровским оператором и генерирует последовательность $u^{k+1} = S^0(u^k)$, для которой справедливы следующие свойства:

1) *$u^k \to \hat{u}$, $\hat{u} \in Fix(S^0) = Q$ и имеет наименьшую норму среди всех $u \in Fix(S^0)$;*

2) $\inf\limits_z \{\lim\limits_{k\to\infty} \|u^k - z\| : z \in Fix(S^0)\} = \lim\limits_{k\to\infty}\|u^k - \hat{u}\|$;

3) *либо $\|u^{k+1} - \hat{u}\| < \|u^k - \hat{u}\|$ $\forall k$, либо, начиная с некоторого $k \ge k_0$, последовательность $\{u^k\}$ становится стационарной.*

Доказательство. Докажем сначала, что свойством сильной Q_i-фейеровости обладает оператор S_i^0, где $Q_i = \{u : u \in D \subseteq U,\ f_i(u) \le 0\}$. Сильная Q_i-фейеровость оператора S_i^0 означает, что $Fix(S_i^0) = Q_i \ne \varnothing$ и для некоторого $\nu \ge 0$ выполнено неравенство (см. определение 1.3 в [10]):

$$\|S_i^0(u) - z\|^2 \le \|u - z\|^2 - \nu\|S_i^0(u) - u\|^2 \quad \forall z \in Q_i, \quad \forall u \in D. \tag{2.2}$$

Класс $\mathcal{P}_{Q_i}^\nu$ — это множество операторов T, для которых $Fix(T) = Q_i$ и выполнено неравенство (2.2). Аналогично определяется сильная Q-фейеровость и класс $\mathcal{P}_Q^\nu$.

Предположив, что $u \notin Q_i$, $z \in Q_i$, имеем равенство

$$\|S_i^0(u) - z\|^2 = \|u - z\|^2 - 2\lambda\frac{f_i(u)\langle\nabla f_i(u), u - z\rangle}{\|\nabla f_i(\bar{u}_i^0)\|^2} + \lambda^2\frac{f_i^2(u)\|\nabla f_i(u)\|^2}{\|\nabla f_i(\bar{u}_i^0)\|^4}.$$

Воспользовавшись условием выбора элементов $\bar{u}_i^0$ и известным неравенством для выпуклого функционала

$$\langle\nabla f_i(u), u - z\rangle \ge f_i(u) - f_i(z),$$

получаем неравенства

$$||S_i^0(u)-z||^2 \le ||u-z||^2 - 2\lambda\left(\frac{f_i(u)^2}{||\nabla f_i(\bar u_i^0)||^2} - \frac{f_i(u)f(z)}{||\nabla f(\bar u_i^0)||^2}\right) + \lambda^2 \frac{f_i^2(u)||\nabla f_i(u)||^2}{||\nabla f_i(\bar u_i^0)||^4}$$

$$\le ||u-z||^2 - 2\lambda\,\frac{f_i^2(u)}{||\nabla f_i(\bar u_i^0)||^2} + \lambda^2\,\frac{f_i^2(u)}{||\nabla f_i(\bar u^0)||^2}\cdot\frac{||\nabla f_i(u)||^2}{||\nabla f_i(\bar u^0)||^2} \tag{2.3}$$

$$\le ||u-z||^2 - \frac{2-\lambda}{\lambda}\,||u-S_i^0(u)||^2.$$

Здесь были использованы оценки $f_i(u)\,f_i(z)<0$, $||\nabla f_i(u)||/||\nabla f_i(\bar u_i^0)||\le 1$. Заметим, что неравенства (2.3) автоматически выполняются при $u=u^k$, $\bar u_i^0=u^k$ (для всех i). Полученное неравенство означает, что S_i^0 — сильно Q_i-фейеровский оператор класса $\mathcal{P}^{\nu}_{Q_i}$, $\nu=(2-\lambda)/\lambda$. Согласно [10, теорема 1.8] это влечет, что оператор S^0, определенный формулами (2.1), также принадлежит классу $\mathcal{P}^{\nu}_{Q}$, $\nu=(2-\lambda)/\lambda$, $S^0=\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i S_i^0$, $Q=Fix(S^0)$, поскольку тот факт, что $Fix(S^0)=Q$, доказывается аналогично [11] (лемма 4.1, теорема 4.1).

После подстановки $u=u^k$ в оценку (2.3) получаем неравенство

$$||u^{k+1}-z||^2 \le ||u^k-z||^2 - \frac{2-\lambda}{\lambda}\,||S^0(u^k)-u^k||^2,$$

из которого для любого $z\in Fix(S^0)$ имеем соотношения

$$\lim_{k\to\infty}||u^k-z|| = d(z), \qquad \lim_{k\to\infty}||S^0(u^k)-u^k|| = 0. \tag{2.4}$$

Из первого соотношения в (2.4) следует существование сходящейся подпоследовательности

$$u^{k_j}\to\bar u, \quad j\to\infty. \tag{2.5}$$

Убедимся, что $\bar u\in Fix(S^0)$. Действительно, из (1.9) следует, что

$$f_i^+(u^{k_j})\,\nabla f_i(u^{k_j})\to 0, \quad j\to\infty.$$

Это свойство выполнено, если по крайней мере один из множителей сходится к нулю. Пусть $f_i^+(u^{k_j})\to 0$, $j\to\infty$. Тогда в силу непрерывности f_i получаем

$$f_i(\bar u)\le f_i^+(\bar u) = \lim_{j\to\infty} f_i^+(u^{k_j}) = 0,$$

т. е. $\bar u\in Fix(S_i^0)=Q_i$. Если $\nabla f_i(u^{k_j})\to 0$, $j\to\infty$, то вместе с $u^{k_j}\to\bar u$ и непрерывной дифференцируемостью f_i это влечет, что существует $\nabla f_i(\bar u)$ и $\nabla f_i(\bar u)=0$, т. е. $\bar u$ — точка минимума выпуклой функции, поэтому $\bar u\in Q_i$. На основе леммы 2.10 из [12] из соотношений (2.4), (2.5) следует, что $\bar u\in Fix(S^0)$.

Единственность предельной точки $\bar u$ доказывается аналогично [13].

Выше установлено, что S^0 — сильно фейеровский оператор. Это означает выполнение соотношения (2.2) при замене S_i^0 на S^0, $u=u^k$, $z\in Fix(S^0)$, что влечет выполнение свойства 3).

Доказательство п. 2) теоремы следует из очевидного равенства

$$||u^k-z||^2 = ||u^k-\bar u||^2 + 2\langle u^k-\bar u,\, \bar u - z\rangle + ||\bar u - z||^2,$$

в котором нужно перейти к пределу при $k\to\infty$ и учесть доказанную сходимость $u^k\to\bar u$.

Свойство минимальности нормы предельной точки $\bar u$ итерационной последовательности $\{u^k\}$, порожденной процессом $\{u^{k+1}=S^0(u^k)\}$, следует из неравенства

$$||\bar u|| \le ||\bar u - u^k|| + ||u^k - z|| + ||z||$$

и доказанного свойства 2). Итак, предельная точка $\bar u$ совпадает с нормальным решением $\hat u$ нахождения $Fix(S^0)$. □

Следствие 1. *Предположим, что система* (1.2) *совместна. Пусть* $w = u - v_0$ *и* $\bar{w}$ *— точка сходимости итерационного процесса*

$$w^{k+1} = S^0(w^k), \quad w^0 \in D \subseteq \mathbb{R}^n. \tag{2.6}$$

Тогда $\bar{u} = \bar{w} + v_0$ *— решение задачи*

$$\inf\{||u - v_0||^2 : u \in Q\}. \tag{2.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 2 предельная точка $\bar{w}$ процесса (2.6), который совпадает с процессом (1.9), принадлежит $Fix(S^0)$ и имеет наименьшую норму среди всех $z \in Fix(S^0)$. Следовательно, $\bar{u}$ является решением задачи (2.7). □

3. Регуляризующие свойства модифицированного метода

Рассмотрим случай, когда система ограничений (1.2) может быть как совместной, так и несовместной. Перепишем оператор шага процесса (1.9) в форме

$$\bar{\Phi}(u) = u - \frac{\lambda}{2\varkappa_0}\nabla\sum_{i=1}^{m}(f_i^+(u))^2.$$

Теорема 3. *Пусть выполнено условие*

$$\bar{Q} = Arg\min\sum_{i=1}^{m}(f_i^+(u))^2 \neq \varnothing.$$

Тогда выполнены следующие свойства:

a) $Fix(\bar{\Phi}) = Arg\min\sum_{i=1}^{m}(f_i^+(u))^2 = \bar{Q}$;

b) *если процесс* (1.9) *сходится, т. е.* $u^k \to \bar{u}$, *тогда* $\bar{u} \in \bar{Q}$;

c) *система* $\tilde{Q} = \{u \in \mathbb{R}^n : f_i(u) \le f_i^+(\bar{u})\}$ *совместна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению

$$Fix(\bar{\Phi}) = \Big\{u \in \mathbb{R}^n : \nabla\sum_{i=1}^{m}(f_i^+(u))^2 = 0\Big\}.$$

Поскольку сумма выпуклых функций является выпуклой, это означает, что $Fix(\bar{\Phi})$ совпадает с множеством точек минимума функции $\Psi(u) = \sum_{i=1}^{m}(f_i^+(u))^2$, т. е. $Fix(\bar{\Phi}) = \bar{Q}$ (свойство a)). Так как f_i — непрерывно дифференцируемые функции, из сходимости $u^k \to \bar{u}$ следует, что $Fix(\bar{\Phi}) = \bar{Q}$ (свойство b)). Свойство c) следует из [8, с. 170]. □

Итак, как для совместной, так и несовместной системы выпуклых неравенств (1.2) итерационный процесс сходится к вектору $\bar{u}$, который реализует минимум функции $\Psi(u)$. Причем, если $\Psi(\bar{u}) = 0$, то $\bar{u} \in Q$. Для несовместной системы $\Psi(\bar{u}) > 0$ и множество Q аппроксимируется совместной системой $\tilde{Q}$ с помощью добавок в правые части выпуклых неравенств, наименьших в евклидовой норме. В этом случае модифицированный метод (1.9) реализует оптимальную коррекцию несобственной задачи собственной с множеством ограничений $\tilde{Q}$.

Лемма 1. *Пусть элементы совместной системы* (1.2) *удовлетворяют дополнительным требованиям в форме* $u \in V$, *где* V *— выпуклое замкнутое множество в* $\mathbb{R}^n$. *Пусть*

$$Arg\min\Big\{\sum_{i=1}^{m}(f_i^+(u))^2 : u \in V\Big\} = \tilde{V} \neq \varnothing. \tag{3.1}$$

Тогда итерационный метод

$$u^{k+1} = P_V\Big(u^k - \frac{\lambda}{2\varkappa^0}\nabla\sum_{i=1}^{m}(f_i^+(u^k))^2\Big), \quad 0<\lambda<2, \tag{3.2}$$

сходится к элементу $\bar{u} \in \tilde{V}$, где множество $\tilde{V}$ определено формулой (3.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как известно, множество $\tilde{V}$ совпадает с множеством неподвижных точек отображения

$$\Psi(u) = P_V\Big(u - \gamma\nabla\sum_{i=1}^{m}(f_i^+(u))^2\Big) = P_V(S^0(u)), \quad \gamma > 0,$$

где P_V, S^0 — два фейеровских оператора, для каждого из которых выполнено условие сходимости. Сходимость процесса (3.2) следует из [1, теорема 3]. □

З а м е ч а н и е 1. Если $V = V_1 \cap V_2$, то в процессе (3.2) можно заменить проекцию P_V на P_1P_2 (см. [10, теорема 3.9]).

Определим множества ограничений Q_s для приближенных данных $\{f_i^{\varepsilon_s}\}$:

$$Q_s = \{u \in D \subseteq \mathbb{R}^n \colon f_i^{\varepsilon_s}(u) \le \varepsilon_s, \ i = 1,2,\dots,m\}, \tag{3.3}$$

где $|f_i(u) - f_i^{\varepsilon_s}| \le \varepsilon_s$, $\varepsilon_s \to 0$.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть f_0 — выпуклая функция, Q — выпуклое замкнутое множество пространства $\mathbb{R}^n$. Задача (1.1) называется корректно поставленной по Адамару, если: 1) решение существует; 2) решение единственно; 3) решение непрерывно зависит от f_0, Q.

О п р е д е л е н и е 3. Задача (1.1) называется корректно поставленной по Тихонову, если: 1) решение существует; 2) решение единственно; 3) каждая минимизирующая последовательность сходится к единственному решению $\hat{u}$ задачи (1.1).

О п р е д е л е н и е 4. Последовательность множеств $Q_n \subseteq \mathbb{R}^n$ сходится к множеству Q в смысле Моско (обозначаем $Q_n \xrightarrow{M} Q$) если:

a) $\forall u \in Q \ \exists\{u_n\} \colon u_n \in Q_n, \ u_n \to u$;

b) $\forall\{u_{n_j}\}, \ u_{n_j} \in Q_{n_j}, \ u_{n_j} \to u \ \Rightarrow u \in Q$.

Теорема 4 (см. [14, Theorem 3.1]). *Если f_0 — равномерно непрерывна на каждом ограниченном множестве, тогда корректность относительно Тихонова на каждом замкнутом выпуклом множестве влечет корректность по Адамару относительно Моско-сходимости.*

Лемма 2. *Пусть множество Q определено формулой* (1.2), *а Q_s — формулой* (3.3). *Тогда задача* (2.7) *корректна по Адамару относительно Моско-сходимости, т. е. ее решение, совпадающее с метрической проекцией $P_Q(v_0)$, устойчиво к возмущениям допустимого множества Q, заданного в форме* (1.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, целевая функция $f_0(u) = ||u - v_0||^2$ — равномерно непрерывная функция на каждом ограниченном множестве из $\mathbb{R}^n$. Кроме того, $f_0(u)$ — сильно выпуклая функция, что влечет корректность по Тихонову задачи (3.3) на каждом выпуклом замкнутом множестве, в частности на Q, заданном формулой (1.2). Это вытекает из известного неравенства

$$||u - \hat{u}||^2 \le \frac{2}{\varkappa}(f_0(u) - f(\hat{u})),$$

где $\varkappa$ — константа из определения сильной выпуклости функции (см. [4, гл. 4, § 3, определение 1]), $\hat{u}$ — решение задачи (2.7). Из непрерывности и выпуклости функций f_i, $f_i^{\varepsilon_s}$ следует, что множества Q, Q_s выпуклы и замкнуты. Покажем, что Q_s сходится к множеству Q в смысле Моско. Поскольку по определению $Q \subseteq Q_s$, условие a), очевидно, выполнено. Пусть $u_{s_j} \in Q_{s_j}$, $u_{s_j} \to \bar{u}$, тогда имеем следующие неравенства:

$$f_i(\bar{u}) = \lim_{j\to\infty} \sup f_i(u_{s_j}) \le \lim_{j\to\infty} \sup \left[f_i(u_{s_j}) - f_i^{\varepsilon_{s_j}}(u_{s_j}) + f_i^{\varepsilon_{s_j}}(u_{s_j})\right] \le 0.$$

Откуда следует, что $\bar{u} \in Q$; это означает выполнение свойства b). □

Из теоремы 3 и леммы 2 получаем

Следствие 2. *Задача (2.7) о нахождении проекции элемента v_0 на множество ограничений (1.2) корректна по Адамару относительно Моско-сходимости $Q_s \xrightarrow{M} Q$ при возмущениях в форме (3.3).*

Теорема 5. *Если в процессе (1.3) проекция $P_{\tilde{Q}}$ вычисляется итерационным методом (2.6) с точностью (1.6), то итерационный метод (1.3) порождает регуляризующий алгоритм решения задачи выпуклой минимизации (1.1), (1.2).*

Доказательство. Пусть $\bar{u}$ и $\bar{u}_{\varepsilon_s}$ решения задач (2.7) при точных и приближенных данных (3.3) соответственно. Согласно лемме 2 $\bar{u}_{\varepsilon_s} \to \bar{u}$ при $\varepsilon_s \to 0$, т. е. проекции $P_{Q_{\varepsilon_s}}$ сходятся к $P_Q(v_0)$ при $\varepsilon_s \to 0$. Это означает, что можно вычислять $P_{\tilde{Q}}(\tilde{u}^k - \lambda\nabla\tilde{f}_0(\tilde{u}^k))$ с точностью $c_1\varepsilon$ (см. оценку (1.6)) сходящимся итерационным процессом (1.9) для совместной системы выпуклых неравенств Q. Поскольку задача (1.1), (1.2) с несовместной системой ограничений может быть сведена к постановке с совместной системой $\tilde{Q}$ (теорема 3, свойство c)), это означает согласно теореме 1, что процесс (1.3) порождает регуляризующий алгоритм решения задачи (1.1), (1.2) как для совместной, так и для несовместной системы ограничений (1.2). □

Алгоритм решения задачи (1.1), (1.2).

Пункт A. Пусть данные задачи известны точно и выполнено условие

$$\bar{Q} = Arg\min\left(\sum_{i=1}^{m}(f_i^+(u))^2\right) \neq \varnothing.$$

Если модифицированный процесс (1.9) сходится к $\bar{u} \in \bar{Q}$ и $\Psi(\bar{u}) = \sum_{i=1}^{m}(f_i^+(u))^2$ (см. следствие 1, теорема 3), тогда система выпуклых ограничений в форме (1.2) совместна, $\bar{u} \in Q$, и метрическая проекция находится по формуле (2.7). Согласно следствию 2 задача нахождения проекции с приближенными данными в форме (3.3) корректна по Адамару относительно Моско-сходимости. Это означает, что вычисление метрической проекции в методе (1.3) устойчиво относительно возмущений множества Q для каждого элемента $\tilde{F}(u^k)$ и выполняется оценка (1.6) между проекцией на точное множество Q и возмущенное $\tilde{Q}$ для одного и того же элемента. Следовательно, вместе с условиями (1.4), (1.5) это влечет сходимость процесса (1.3) к v_0-нормальному решению задачи (1.1), (1.2).

Пункт B. Если процесс (1.9) сходится к $\bar{u} \in \bar{Q}$ (теорема 3) и $\Psi(\bar{u}) > 0$, то система (1.2) несовместна. Согласно теореме 3 (см. свойство c)) в данном случае расширенная система

$$\tilde{Q} = \{u \in \mathbb{R}^n\colon f_i(u) \le f_i^+(\bar{u})\}$$

совместна и образует оптимальную коррекцию несовместной системы [8, с. 170], поправки минимизируют функцию $\Psi(u)$. Причем, в отличие от [8], где наличие такого вектора предполагается, в нашем случае вектор $\bar{u}$ находится итерационным процессом (1.9). Именно совместная система $\tilde{Q}$ используется далее для реализации алгоритма. Поскольку случай несовместной системы ограничений сведен к исследованию расширенной системы неравенств $\tilde{Q}$, п. B завершается по схеме п. A. Таким образом, при задании приближенных данных в форме (3.3) задача нахождения метрической проекции (2.7) для несовместной системы ограничений также корректна по Адамару относительно Моско-сходимости, выполнено условие (1.6) и справедливо заключительное утверждение.

4. Численные примеры

Численные эксперименты были выполнены с помощью программы, реализованной на языке программирования PYTHON.

Пример 1. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим частный случай выпуклой минимизации — задачу квадратичной минимизации, которую также можно рассматривать как задачу нахождения v_0-нормального решения или задачу построения метрической проекции для системы линейных ограничений в форме

$$\inf\left\{||z-v_0||^2 \colon 0 \le z_1 \le 1;\ z_2 \ge 0;\ z_1+z_2-1 \le 0,\ -z_1-z_2+1 \le 0\right\} = F, \tag{4.1}$$

где $v_0 = (1,1)^T$, $z_{\text{opt}} = (0.5, 0.5)^T$, $F_{\text{opt}} = 0.5$.

Задача с приближенными данными имеет вид

$$\begin{gathered}\inf\left\{||z-v_0||^2 \colon 0 \le z_1 \le 1;\ z_2 \ge 0;\right.\\ \left.(1+|\varepsilon|)z_1+z_2-1 \le 0,\ -(1-|\varepsilon|)z_1-z_2+1 \le 0\right\} = F,\end{gathered} \tag{4.2}$$

где $z^{\varepsilon}_{\text{opt}} = (0,1)^T$, $F^{\varepsilon}_{\text{opt}} = 1\ \ \forall|\varepsilon| \le 1$. Решение с приближенными данными показывает, что оно неустойчиво к погрешностям коэффициентов линейных неравенств.

Для решения задачи (4.2) с приближенными данными применим итерационный процесс (см. [1, формулы (4.3)–(4.5)])

$$z^{k+1} = \gamma_{k+1}P^+P_{[0,1]}\left(\bar{T}(z^k)\right) + (1-\gamma_{k+1})v_0,$$

в котором наряду с традиционными неравенствами присутствуют дополнительные ограничения (см. лемму 1 и замечание к ней), где P^+ — операция положительной срезки, т. е. метрическая проекция на положительный ортант,

$$\bar{T}(z) = \left[z - \frac{l_1^+(z)a_1 + l_2^+(z)a_2}{a_1^2+a_2^2}\right], \quad \gamma_{k+1} = 1 - \frac{1}{(1+k)^p}, \quad p = 0.9,$$

$$l_1(z) = (1+|\varepsilon|)z_1+z_2-1, \quad l_2(z) = -(1-|\varepsilon|)z_1-z_2+1,$$

$$a_1 = ((1+|\varepsilon|),1)^T, \quad a_2 = (-(1-|\varepsilon|),-1)^T.$$

Получим следующие результаты:

$$\begin{aligned}&\varepsilon = 0.1, && N = 100, && z^{100}_{\text{opt}} = (0.45, 0.56)^T, && F^{100}_{\text{opt}} = 0.56;\\ &\varepsilon = 0.01, && N = 200, && z^{200}_{\text{opt}} = (0.500, 0.506)^T, && F^{200}_{\text{opt}} = 0.506;\end{aligned}$$

т. е. метод восстанавливает точное решение с погрешностью задания ошибки выходных данных. Следует отметить, что при $\gamma_k = 1$ с числом итераций в диапазоне 100–500 численное решение $\tilde{z} = (0.098, 0.901)^T$, $\tilde{F} = 0.822$, т. е. аппроксимирует не точное решение, а точку $\bar{z} = (0,1)^T$, что означает принципиальную важность использования корректирующих множителей γ_k (см. определение 1).

Пример 2. Задача нахождения v_0-нормального решения, которая совпадает с задачей аппроксимации метрической проекции элемента $v_0 \in \mathbb{R}^2$ для несовместной системы неравенств:

$$\inf\left\{||z-v_0||^2 \colon l_1(z) = z_1 - z_2 + 4 \le 0,\ l_2(z) = -z_1 + z_2 + 2 \le 0\right\} = F. \tag{4.3}$$

Неизвестное квазирешение $\hat{z}$ находим (как и в примере 1) итерационным процессом

$$z^{k+1} = \gamma_{k+1}\bar{T}(z^k) + (1-\gamma_{k+1})v_0, \quad v_0 = (3,3)^T. \tag{4.4}$$

Как показано в [10, гл. 4, разд. 3, теорема 3.6], а также в [2, лемма 1] для несовместной системы ограничений в форме

$$Q = \{z\colon l_i(z) \le 0,\ i \in J_1\}$$

(не обязательно для двух неравенств), если множество

$$\tilde{M} = Arg\min\Big\{\sum_{j\in J_1}(l_j^+(z))^2\Big\} \neq \varnothing \tag{4.5}$$

и процесс сходится, то для оператора

$$T(z) = z - \frac{1}{\varkappa}\nabla\Big[\sum_{j\in J_1}(l_j^+(z))^2\Big]$$

$Fix(T) = \tilde{M}$ и процесс (4.4) сходится к $\hat{z} \in \tilde{M}$.

Для примера (4.3) оказалось, что множеством оптимальности является

$$L = \{z\colon -z_1 + z_2 - 1 = 0\}.$$

Для $v_0 = (3,3)^T$ после $N = 100$ итераций вектор численного решения $z_{\rm opt}^{100} = (2.46, 3.44)^T$, а $z_{\rm opt}^{500} = (2.49, 3.49)^T$, т. е. с точностью 1% аппроксимирует проекцию $z^0 = (3,3)^T$ на оптимальное множество L, $P_L(z^0) = (2.5, 3)^T$.

Это свойство имеет место для всех векторов v_0, которые использовались в эксперименте, т. е. не только для $v_0 = (3,3)^T$, но и для $v_0 = (1,1)^T$ и $v_0 = (0,0)^T$. Таким образом, в случае несовместности системы линейных ограничений при выполнении условия (4.5) итерационный метод (4.4) сходится к вектору, который минимизирует сумму невязок неравенств в системе ограничений, т. е. квазирешению.

З а м е ч а н и е 2. Метод, изложенный при решении примеров 1, 2, порождает регуляризующий алгоритм квадратичной минимизации с линейными ограничениями в отличие от прямых методов (см. задачу 23.3 и проблему LDP в [15]), которые этим свойством не обладают.

Заметим, что задача (4.3), как и задача (4.1) соответствует задаче о нахождении v_0-нормального решения системы линейных неравенств, но, в отличие от (4.1), эта система несовместна. В этом случае приближенное решение аппроксимирует вектор, реализующий минимум суммы квадратов невязок неравенств, т. е. квазирешение.

Пример 3. Нахождение нормального решения несовместной системы выпуклых неравенств:

$$\inf\big\{0.5||z||^2\colon z_1 - z_2 + 4 \le 0,\ -z_1 + z_2 + 2 \le 0,\ 0.5(z_1^2 + z_2^2) - 0.25 \le 0\big\}, \tag{4.6}$$

$$z_{\rm opt} = (-0.5, 0.5)^T, \quad F_{\rm opt} = 0.25.$$

Обозначим через $f_i(z)$ $(i = 1,2,3)$ левые части неравенств в системе ограничений задачи (4.6).

Для решения задачи квадратичной минимизации с выпуклыми ограничениями применяем итерационный метод (1.9):

$$z^{k+1} = z^k - \frac{\lambda}{\varkappa^0}\sum_{i=1}^{3} f_i^+(z^k)\nabla f_i(z^k)\Big(= \frac{\lambda}{2\varkappa^0}\nabla\Big(\sum_{i=1}^{3}(f_i^+(z^k))^2\Big)\Big), \tag{4.7}$$

где $0 < \lambda < 1$, поскольку $||f_0''(z)|| = 2$, $\lambda < 2/||f_0''(z)||$, $\varkappa^0 = 6$ (см. теорему 2).

При возмущенных данных, когда исходные данные $f_1(z)$, $f_2(z)$ заменены на приближенные

$$f_1^\varepsilon(z) = (1+\varepsilon)z_1 - z_2 + 4, \quad f_2^\varepsilon(z) = -z_1 + (1-\varepsilon)z_2 + 2,$$

при $\varepsilon = 0.01$, $\lambda = 0.95$, начальном приближении $z^0 = (0,0)^T$ и числе итераций $N = 500$ численное решение, полученное методом (4.7), составляет

$$z_{\text{opt}}^{500} = (-0.499, 0.513)^T, \quad F_{\text{opt}}^{500} = 0.256,$$

т. е. восстанавливает два верных знака после запятой.

В отличие от примеров 1, 2 в примере 3 допустимое множество Q содержит одно выпуклое неравенство. Поэтому для вычисления метрической проекции используется итерационный процесс (1.9). Метод восстанавливает точное решение с погрешностью входных данных.

Пример 4. Задача выпуклого программирования с противоречивой системой линейных ограничений (см. пример 2 в [8]):

$$\inf\{z_1 + z_2^2 \colon z_1 - z_2 + 4 \le 0,\ -z_1 + z_2 + 2 \le 0\}, \tag{4.8}$$

$$z_{\text{opt}} = (-1.5, -0.5)^T, \quad F_{\text{opt}} = -1.25.$$

Для решения задачи (4.8) применяем внешний итерационный процесс (1.3) с выпуклой квадратичной функцией

$$z^{k+1} = \gamma_{k+1} P_Q(z^k - \lambda \nabla f_0(z^k)), \tag{4.9}$$

где $0 < \lambda < 1$; P_Q — метрическая проекция элемента $v^k = z^k - \lambda \nabla f_0(z^k)$ на множество линейных ограничений задачи (4.8); γ_{k+1} — допустимая последовательность корректирующих множителей.

Для вычисления проекции $P_Q(v^k)$ формируем внутренний итерационный процесс

$$u^{i+1} = \bar\gamma_{i+1} \bar T(u^i) + (1 - \gamma_{i+1}) v^k, \quad v^1 = z^0 - \lambda \nabla f_0(z^0), \quad \bar\gamma_i = \gamma_i; \tag{4.10}$$

здесь оператор $\bar T$ имеет вид $\bar T(z) = \left[z - \dfrac{l_1^+(z) a_1 + l_2^+(z) a_2}{a_1^2 + a_2^2} \right]$,

$$l_1(z) = z_1 - z_2 + 4, \quad l_2(z) = -z_1 + z_2 + 2 \le 0, \quad z = (z_1, z_2)^T, \quad a_1 = (1, -1)^T, \quad a_2 = (-1, 1)^T.$$

После N шагов процесса (4.10) вычисляем $v^{k+1} = z^{k+1} - \lambda \nabla f_0(z^{k+1})$ и снова применяем N раз процесс (4.10).

При $\lambda = 0.5$, $z^0 = (0,0)^T$ и других начальных данных, при числе итераций $N_{\text{ex}} = 200$ внешнего процесса (4.9) и числе итераций $N_{\text{in}} = 250$ внутреннего процесса (4.10) получаем численное квазирешение $\tilde z_{\text{opt}} \simeq (-1.484, -0.483)^T$, $\tilde F_{\text{opt}} \simeq -1.251$.

При зашумленных ограничениях

$$l_1^\varepsilon(z) = (1+\varepsilon) z_1 - z_2 + 4, \quad l_2^\varepsilon(z) = -z_1 + (1+\varepsilon) z_2 + 2, \quad \varepsilon = 0.01,$$

с числом итераций внешнего процесса $N_{\text{ex}} = 350$ и с числом итераций внутреннего процесса $N_{\text{in}} = 400$ имеем численное квазирешение $\tilde z_{\text{opt}} \simeq (-3.39, -2.38)^T$, $\tilde F_{\text{opt}} \simeq 2.29$, которое заметно отличается от квазирешения с точными данными. Однако следует заметить, что полученное $\tilde z_{\text{opt}}$ удовлетворяет с точностью $\varepsilon = 0.01$ уравнению $(-z_1 + z_2 - 1 = 0)$, которое описывает оптимальное множество задачи (4.8), т. е. в соответствии с теоремой 3 аппроксимирует некоторый элемент из $\tilde M$. Поэтому, чтобы получить более точную аппроксимацию z_{opt}, достаточно, например, ввести дополнительные ограничения в систему (4.8), содержащую z_{opt} (см. пример 3), или уменьшить погрешность входных данных. А именно, уменьшив величину ошибки ε на два порядка, получаем следующий результат:

$$\varepsilon = 10^{-4}, \quad N = 500, \quad z_{\text{opt}}^{500} = (-1.527, -0.520), \quad F_{\text{opt}}^{500} = 0.256,$$

т. е. ошибка численного квазирешения не превосходит $\Delta = 0.03$ в равномерной метрике, что существенно улучшает аппроксимацию точного квазирешения.

Заключение

Работа посвящена построению регуляризованного семейства приближенных решений для некорректно поставленной (несобственной) задачи выпуклого программирования (ЗВП) на основе модификации метода, предложенного и исследованного в работе [2]. Модификация способа вычисления метрической проекции, входящей в оператор шага базового итерационного процесса, позволяет охватить случай несовместной системы ограничений. При этом последовательность, порождаемая итерационным процессом, аппроксимирует вектор, минимизирующий сумму квадратов невязок системы выпуклых неравенств (обобщенное решение) при наличии возмущений во всех входных данных. Результаты численных экспериментов для четырех модельных примеров в $\mathbb{R}^2$ показали, что модифицированный алгоритм успешно справляется как с совместными, так и несовместными системами ограничений в ЗВП.

Кроме того, выяснилось, что численное решение обладает повышенной устойчивостью к выбору числа итераций N (в смысле невозрастания погрешности), что позволяет избежать накопления погрешности даже при значительном превышении N по сравнению с N_{opt}. Нахождение N_{opt}, т. е. наименьшего числа итераций, гарантирующего сходимость итерационного метода к решению исходной задачи при стремлении погрешности входных данных к нулю, представляет собой непростую задачу.

В частном, но важном случае выпуклой квадратичной минимизации с ограничениями в форме систем равенств и неравенств, результаты данной работы обобщают изложенные в монографии [14] исследования на основе прямых методов. Отметим, что эти методы не обладают свойством устойчивости для задач, не удовлетворяющих условиям корректности Адамара. Дополнительно уточняются некоторые результаты по выпуклой минимизации, которые получены без учета неустойчивости метрической проекции относительно возмущений допустимого множества (см., например [3; 5]).

В частности, на основе предложенного модифицированного метода решается проблема оптимальной коррекции несобственной задачи при ее сведении к собственной для нахождения метрической проекции. Устойчивый метод вычисления проекции является важным этапом при построении регуляризующего алгоритма исходной задачи выпуклой минимизации. Таким образом, методы решения некорректно поставленных задач, предложенные в данной статье, порождают регуляризующие алгоритмы и применимы для устойчивого решения широкого класса некорректных задач, возникающих в “прикладной математике, физике, статистике, экономике, теории управления, социальной науке и обработке численных результатов” [14, гл. 23, разд. 1, 7]).

Благодарности. Авторы признательны рецензентам за существенные замечания и полезные предложения, которые способствовали повышению качества изложения статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Vasin V.V.** Fejèr type iterative methods in the constrained quadratic minimization problem // Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl). 2023. Vol. 323, suppl. 1. P. S305–S320. https://doi.org/10.1134/S008154382306024X
2. **Vasin V.V.** Stable iterative methods in problem of constrained convex minimizations // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2024. Vol. 12, no. 4. P. 150–157. https://doi.org/10.32523/2306-6172-2024-12-4-150-157
3. **Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.** Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989. 128 с.
4. **Васильев Ф.П.** Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980. 518 с.
5. **Поляк Б.Т.** Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с.
6. **Eremin I.I.** Duality for improper problem of linear and convex programming // Sov. Math. Dokl. 1981. Vol. 23. P. 62–66.

7. **Попов Л.Д.** Барьеры и симметричная регуляризация функции Лагранжа при анализе несобственных задач линейного программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 29, № 3. С. 138–155. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2023-29-3-138-155
8. **Скарин В.Д.** Об оптимальной коррекции несобственных задач выпуклого программирования на основе метода квазирешений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 29, № 3. С. 168–184. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2023-29-3-168-184
9. **Halpern B.** Fixed points of nonexpanding maps // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 73, no. 6. P. 957–961. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1967-11864-0
10. **Vasin V.V., Eremin I.I.** Operators and iterative processes of Fejèr type. Theory and applications. Berlin; NY: Walter de Gruyter, 2009. 155 p.
11. **Васин В.В.**, Основы теории некорректных задач. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2020. 313 с.
12. **Vasin V.V., Ageev A.L.** Ill-posed problem with a priori information. Utrecht: VSP, 1995. 255 p.
13. **Rockafellar R.T.** Monotone operators and the proximal point algorithm // SIAM J. Contr. Optim. 1976. Vol. 14, no. 5. P. 877–898. https://doi.org/10.1137/0314056
14. **Lucchetti R., Patrone F.** Hadamard and Tyhonov well-posedness of a certain class of convex functions // J. Math. Anal. Appl. 1982. Vol. 88, no. 1. P. 204–215. https://doi.org/ 10.1016/0022-247X(82)90187-1
15. **Lawson C.L., Hansen R.J.** Solving least squares problems. New Jersey, Englewoods Cliffs: Prentice-Hall, 1995. 337 p. 1995. 337 p.

Поступила 24.06.2025
После доработки 8.10.2025
Принята к публикации 13.10.2025

Васин Владимир Васильевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
главный научный сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: vasin@imm.uran.ru

Гайнова Ирина Алексеевна
канд. физ.-мат. наук
инженер-исследователь
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
г. Новосибирск
e-mail: gajnova@math.nsc.ru

REFERENCES

1. Vasin V.V. Fejér type iterative methods in the constrained quadratic minimization problem. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2023, vol. 323, suppl. 1, pp. S305–S320. https://doi.org/10.1134/S008154382306024X
2. Vasin V.V. Stable iterative methods in problem of constrained convex minimizations. *Eur. J. Math. Comput. Appl.*, 2024, vol. 12, no. 4, pp. 150–157. https://doi.org/10.32523/2306-6172-2024-12-4-150-157
3. Bakushinskii A.B., Goncharskii A.V. *Iterativnyye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Iterative methods for solving ill-posed problems]. Moscow, Nauka Publ., 1989, 128 p. ISBN: 5-02-013960-2 .
4. Vasil'ev F.P. *Chislennyye metody resheniya ekstremal'nykh zadach* [Numerical methods for solving extremal problems]. Moscow, Nauka Publ., 1980, 518 p.
5. Polyak B.T. *Introduction to optimization.* New York, Division Publ., 1987, 438 p. ISBN-10: 0911575146 . Original Russian text published in Polyak B. T. *Vvedeniye v optimizatsiyu*, Moscow, Nauka Publ., 1983, 384 p.
6. Eremin I.I. Duality for improper problem of linear and convex programming. *Sov. Math. Dokl.*, 1981, vol. 23, pp. 62–66.

7. Popov L.D. Barriers and symmetric regularization of the Lagrange function in the analysis of improper linear programming problems. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 3, pp. 138–155 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2023-29-3-138-155
8. Skarin V.D. The method of quasi-solutions based on barrier functions in the analysis of improper convex programming problems. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 3, pp. 168–184 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2023-29-3-168-184
9. Halpern B. Fixed points of nonexpanding maps. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1967, vol. 73, no. 6, pp. 957–961. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1967-11864-0
10. Vasin V.V., Eremin I.I. *Operators and iterative processes of Fejér type. Theory and applications*, Berlin, NY, Walter de Gruyter, 2009, 155 p. ISBN: 3110218186 . Original Russian text was published in Vasin V.V., Eremin I.I. *Operatory i iteratsionnye protsessy feierovskogo tipa. Teoriya i prolojeniya*, Izhevsk, Regul. Khaot. Dinamika, 2005, 200 p. ISBN: 5-93972-427-2 .
11. Vasin V.V. *Osnovy teorii nekorrektnykh zadach* [Fundamentals of the theory of ill-posed problems], Novosibirsk, Publ. of Syberian Branch of Russian Acad. Sci., 2020, 312 p. ISBN: 978-5-7692-1673-2 .
12. Vasin V.V., Ageev A.L. *Ill-posed problems with a priori information*, Utrecht, VSP, 1995, 255 c. ISBN: 906764191X . Original Russian text was published in Vasin V. V., Ageev A. L. *Nekorrektnye zadachi s apriornoi informatsiei*, Yekaterinburg, Ural Publ. House “Nauka”, 1993, 264 p. ISBN: 5-7691-0390-6 .
13. Rockafellar R.T. Monotone operators and the proximal point algorithm. *SIAM J. Contr. Optim.*, 1976, vol. 14, no. 5, pp. 877–898. https://doi.org/10.1137/0314056
14. Lucchetti R., Patrone F. Hadamard and Tyhonov well-posedness of a certain class of convex functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 1982, vol. 88, no. 1, pp. 204–215.https://doi.org/10.1016/0022-247X(82)90187-1
15. Lawson C.L., Hansen R.J. *Solving least squares problems.* New Jersey, Englewoods Cliffs, Prentice-Hall, 1995, 337 p.

Received June 24, 2025
Revised October 8, 2025
Accepted October 13, 2025

Funding Agency: The second author’s work was carried out within the framework of the State Assignment of the Sobolev Institute of Mathematics SB RAS (project FWNF-2022-0015).

Vladimir Vasil’evich Vasin, Dr. Phys.-Math. Sci., Corresponding Member of the RAS, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: vasin@imm.uran.ru .

Irina Alekseevna Gainova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia,
e-mail: gajnova@math.nsc.ru .

Cite this article as: V. V. Vasin, I. A. Gainova. Constrained convex minimization methods generating regularizing algorithms. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 4, pp. 71–84.