ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 31 № 4 2025

УДК 517.982.256 + 515.124.4

ПОЛУПРОСТРАНСТВО В $\mathbb{Z}^n$ ОБРАЗУЕТ ЧЕБЫШЁВСКОЕ ПОДПРОСТРАНСТВО В $L_1[0,1]^n$

Б. Б. Беднов

В банаховом пространстве X подпространство Y называется чебышёвским, если для каждого $x \in X$ существует и единствен ближайший в Y элемент. В 1940 году Дуб доказал, что пространство Харди H_1 образует чебышёвское подпространство в пространстве $L_1[0,1]$ комплекснозначных функций. При этом пространство Харди H_1 изометрически изоморфно подпространству $Y_{\mathbb{N}} \subset L_1[0,1]$, определенному как замыкание линейной оболочки комплексных экспонент со спектром в $\mathbb{N}$. В 1974 году Кахан описал все множества M в $\mathbb{Z}$, для которых замыкание линейной оболочки комплексных экспонент со спектром из такого множества образует чебышёвское подпространство в $L_1[0,1]$. Это бесконечные арифметические последовательности с нечетной разностью. То есть возможны два вида таких множеств с точностью до сдвига на целое число: $(2n+1)\mathbb{N}$ и $(2n+1)\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. В работе Кахана доказательства для множеств $\mathbb{N}$ и $(2n+1)\mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, различны. В настоящей работе предпринята попытка частично обобщить результат Кахана на случай многих переменных. Так, в пространстве $L_1[0,1]^n$ комплекснозначных функций n действительных переменных исследуются существование и единственность элемента наилучшего приближения в замыкании линейной оболочки экспонент со спектром из пересечения $\mathbb{Z}^n$ с полупространством, ограниченном гиперплоскостью. Доказательство следует доказательству Кахана для множества $\mathbb{N}$.

Ключевые слова: комплексное пространство L_1, чебышевское подпространство, теорема Кахана, хорошо расположенное подмножество, дискретная абелева группа.

B. B. Bednov. Half-space from $\mathbb{Z}^n$ forms a Chebyshev subspace in $L_1[0,1]^n$.

A subspace Y in a Banach space X is called Chebyshev subspace if for every $x \in X$ there exists a unique best approximation element in Y. J.L.Doob proved in 1940 that the Hardy space H_1 is a Chebyshev subspace in the space $L_1[0,1]$ of complex-valued functions. So, the Hardy space H_1 is isometrically isomorphic to the subspace $Y_{\mathbb{N}} \subset L_1[0,1]$ defined as the closure of a linear hull of exponents with spectrum in $\mathbb{N}$. J.-P. Kahane described in 1974 all sets M in $\mathbb{Z}$ for which the closure of a linear hull of exponents with spectrum in M forms a Chebyshev subspace in $L_1[0,1]$. There are infinite arithmetic sequences with odd difference. Two types of such sets are possible up to an integer shift: $(2n+1)\mathbb{N}$ and $(2n+1)\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. There are different proofs for the sets $\mathbb{N}$ and $(2n+1)\mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ in Kahane's theorem. In the present paper we attempt to partially generalizing Kahane's result in the case of several variables. Thus, we investigate existence and uniqueness of best approximation element in the closure of a linear hull of exponents with spectrum in the intersection of $\mathbb{Z}^n$ with a half-space bounded by a hyperplane in the space $L_1[0,1]^n$ of complex-valued functions of n real variables. The proof follows Kahane's proof for the set $\mathbb{N}$.

Keywords: complex L_1 space, Chebyshev subspace, Kahane's theorem, nicely placed subset, Abelian discrete group.

MSC: 41A30, 41A50, 41A52, 41A65, 43A20

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-4-62-70

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — банахово пространство. Подпространство $Y \subset X$ называется подпространством существования, если для каждого $x \in X$ найдется такой элемент $y \in Y$, что $\|x-y\| = \inf_{z\in Y} \|x-z\|$. Любой такой элемент y называется элементом наилучшего приближения в Y для x. Подпространство $Y \subset X$ называется подпространством единственности, если для каждого $x \in X$ ближайший в Y элемент единствен или не существует. Подпространство $Y \subset X$ называется *чебышёвским* [1], если Y есть и подпространство существования, и подпространство единственности в X, т.е. для каждого $x \in X$ существует и единствен элемент наилучшего приближения в Y. Множество $P_Y(x) = \{y \in Y : \|x-y\| = \inf_{z\in Y} \|x-z\|\}$ называется метрической проекцией точки $x \in X$ на Y.

Обозначим через $Y_M = \overline{\operatorname{span}\{e^{2\pi i \mathbf{lt}}\}}_{\mathbf{l}\in M}$ замыкание линейной оболочки комплексных экспонент $e^{2\pi i \mathbf{lt}}$ со спектром показателей $\mathbf{l}$ из некоторого множества $M \subset \mathbb{Z}^n$ в пространстве $L_1[0,1]^n$ комплекснозначных функций n действительных переменных, суммируемых на $[0,1]^n$, $\mathbf{t} \in [0,1]^n$, $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)$.

Пусть гиперплоскость Π задается уравнением $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = C$, $C \in \mathbb{R}$, а множество R есть множество всех $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$, для которых $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n \geq C$. Такие множества R будем называть *полупространствами* в $\mathbb{Z}^n$.

Цель работы — доказать, что любое полупространство R в $\mathbb{Z}^n$ задаёт чебышёвское подпространство Y_R в $L_1[0,1]^n$.

Напомним, что для ненулевого комплексного числа z определена функция $\operatorname{sgn}(z) = z/|z|$; считаем $\operatorname{sgn}(z) = 0$ при $z = 0$. Множество $Y^\perp$ содержится в сопряженном пространстве, состоит из всех линейных непрерывных функционалов, которые равны нулю на каждом элементе из Y, и называется *аннулятором подпространства* Y.

Следующая лемма характеризует элемент наилучшего приближения в произвольном подпространстве комплексного L_1.

Лемма A [2, Corollary 1.4]. *Пусть V — линейное подпространство из $L_1[0,1]^n$, $p_0 \in V$. В этом случае $\|f - p_0\| \leq \|f - p\|$ для всех $p \in V$ тогда и только тогда, когда выполнено неравенство*

$$|(p, \operatorname{sgn}(f - p_0))| \leq \int\limits_{\{\mathbf{t}\colon (f-p_0)(\mathbf{t})=0\}} |p|\, d\mathbf{t}.$$

В заданных выше обозначениях эта лемма формулируется следующим образом. Элемент y из линейного пространства Y является ближайшим к $x \in L_1[0,1]^n$ тогда и только тогда, когда для каждого $z \in Y$ выполнено неравенство

$$\int\limits_{\{\mathbf{t}:(x-y)(\mathbf{t})=0\}} |z|\, d\mathbf{t} \geq \int\limits_{[0,1]^n} z\,\overline{\operatorname{sgn}(x-y)}\, d\mathbf{t}. \tag{1}$$

Сформулируем хорошо известный критерий элемента наилучшего приближения, впервые доказанный в [3].

Лемма B (см. [3, теорема]). *Пусть M — выпуклое множество в линейном нормированном пространстве E и $a_1, \dots, a_n \in E$, $m_1, \dots, m_n$ — фиксированные положительные числа,*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} m_i \|a_i - x\|.$$

Для того чтобы на точке $x_0 \in M$ достигался минимум функции $f(x)$, необходимо и достаточно существование линейных функционалов $L_1, \dots, L_n$, удовлетворяющих условиям

(1) $\|L_i\| \leq 1$, *причем в этих неравенствах достигается равенство для всех i, при которых $a_i \neq x_0$;*
(2) $L_i(a_i - x_0) = \|a_i - x_0\|$ $(i = 1, \dots, n)$;
(3) $\sum_{i=1}^{n} m_i L_i(a_i - x) \leq 0$ *для всех $x \in M$.*

В случае $n = 1$, $m_1 = 1$ для линейного подпространства M лемма B упрощается до следующего вида.

Лемма C (см. [4]). *Элемент $y \in M$ является ближайшим к $x \in X$ тогда и только тогда, когда найдется такой функционал $f \in X^*$, что*

(1) $f(x - y) = \|f\|\|x - y\|$;
(2) $\|f\| = 1$;
(3) $f \in M^\perp$.

Лемма A является частным случаем леммы C с указанием конкретных функционалов для рассматриваемого пространства.

Напомним, что пространство Харди H_1 изометрически изоморфно подпространству $Y_{\mathbb{N}} \subset L_1[0,1]$.

В 1940 году Дуб [5] доказал, что пространство Харди H_1 является чебышёвским подпространством в пространстве $L_1[0,1]$.

В 1974 году Кахан (см. (3.1) в [6]) описал все чебышёвские подпространства Y_M в $L_1[0,1]$.

Теорема A [6]. *Метрическая проекция из $L_1[0,1]$ в Y_Λ определена однозначно тогда и только тогда, когда Λ — бесконечная арифметическая прогрессия с нечетной разностью.*

В приведенных выше обозначениях теорема Кахана переформулируется следующим образом. Подпространство Y_M является чебышёвским в $L_1[0,1]$ тогда и только тогда, когда M — бесконечная (хотя бы в одну сторону) арифметическая прогрессия с нечетной разностью.

П. А. Бородин (см. [7]) описал все чебышевские подпространства Y_M в пространстве Харди H_1.

Теорема B [7, теорема 3]. *Пусть M — некоторое подмножество целых неотрицательных чисел, а Y_M — подпространство тех функций из H_1, у которых все тейлоровские коэффициенты с номерами $n \notin M$ равны 0. Подпространство Y_M является чебышёвским в H_1 тогда и только тогда, когда M — конечная или бесконечная арифметическая прогрессия с нечетной разностью.*

О чебышёвских множествах в виде замыкания линейной оболочки экспонент в пространстве $L_1[0,1]^n$ больше не найдено работ. При этом велись исследования отдельно для подпространств существования такого вида и подпространств единственности. Об этих результатах будет написано позже.

Множества R являются прямыми обобщениями множества $M = \mathbb{N}$ из теоремы Кахана на случай многих переменных. Действительно, пространство Харди H_1 при $n \geq 2$ переменных изометрически изоморфно $Y_{\mathbb{Z}_+^n}$ и $Y_{\mathbb{N}^n}$ и не является подпространством единственности в $L_1[0,1]^n$.

Теорема 1. *Подпространство $Y_{\mathbb{Z}_+^n} \subset L_1[0,1]^n$ не является подпространством единственности при $n \geq 2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим точку $\mathbf{m} = (1,-1,0,\dots,0) \notin \mathbb{Z}_+^n$. Следуя [6], докажем, что для функции

$$v(\mathbf{t}) = \operatorname{sgn}(\sin 2\pi(t_1 - t_2)) = \operatorname{sgn}(\sin 2\pi\mathbf{mt})$$

нарушается единственность элемента наилучшего приближения в $Y_{\mathbb{Z}_+^n}$. Для этого сначала докажем, что спектр v не пересекается с $\mathbb{Z}_+^n$.

Для произвольной экспоненты $e^{2\pi i\mathbf{kt}}$ с $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^n$ покажем, что

$$\mathcal{I} = \int\limits_{[0,1]^n} v(\mathbf{t}) e^{-2\pi i\mathbf{kt}}\, d\mathbf{t} = 0. \tag{2}$$

В силу 1-периодичности по каждой координате $\mathbf{t}$ интеграл от функции $v(\mathbf{t})e^{-2\pi i\mathbf{kt}}$ по любому единичному кубу со сторонами, параллельными осям координат, равен $\mathcal{I}$.

Существует вектор $\mathbf{a}$, ортогональный вектору $\mathbf{k}$, со скалярным произведением $\mathbf{am}$, равным $1/2$. При изменении аргумента $\mathbf{t}$ на $\mathbf{a}$ подынтегральная функция меняет знак на противоположный:

$$v(\mathbf{t}+\mathbf{a})e^{-2\pi i\mathbf{k}(\mathbf{t}+\mathbf{a})} = \operatorname{sgn}(\sin 2\pi\mathbf{m}(\mathbf{t}+\mathbf{a}))e^{-2\pi i\mathbf{kt}}$$
$$= \operatorname{sgn}(\sin(2\pi\mathbf{mt}+\pi)e^{-2\pi i\mathbf{kt}} = -\operatorname{sgn}(\sin(2\pi\mathbf{mt})e^{-2\pi i\mathbf{kt}} = -v(\mathbf{t})e^{-2\pi i\mathbf{kt}}.$$

Отсюда следует, что интеграл от $v(\mathbf{t})e^{-2\pi i\mathbf{k}\mathbf{t}}$ по любому параллелепипеду с ребром $2l\mathbf{a}$ будет равен нулю: параллелепипед можно разрезать на $2l$ слоев так, что интегралы по соседним слоям противоположны. Возьмем один такой параллелепипед Q с вершиной в начале координат и, увеличивая его гомотетично с натуральным коэффициентом $N \in \mathbb{N}$, получим множество NQ.

Интеграл по NQ равен нулю при любом N. Рассмотрим описанное около NQ множество Π, составленное из единичных кубов сетки с шагом 1, на которую делят пространство параллельные координатным плоскости. Интеграл по Π равен числу единичных кубов, его составляющих, умноженному на $\mathcal{I}$, и имеет порядок $\mathcal{I} \cdot N^n \cdot V(Q)$, где $V(Q)$ — объем множества Q. С другой стороны, интеграл по Π отличается от интеграла по NQ на величину, не превышающую $K \cdot N^{n-1} \cdot S(Q)$, где $S(Q)$ — площадь полной поверхности множества Q, K — const. Значит,

$$\mathcal{I} \cdot N^n \cdot V(Q) = O(N^{n-1}) \text{ при } N \to \infty.$$

Это возможно только при $\mathcal{I} = 0$.

Далее, тождественный 0 является ближайшим элементом в Y_M для $v \in L_1[0,1]^n$ по лемме B. Действительно, $v \in L_\infty[0,1]^n$ в силу ограниченности функции sgn; $v \in Y^\perp_{\mathbb{Z}^n_+}$ в силу (2); очевидно, что

$$\|v\|_\infty = 1, \quad \|v\|_1 = 1;$$

при этом

$$1 = \int\limits_{[0,1]^n} v(\mathbf{t})\overline{v(\mathbf{t})}\, d\mathbf{t} = \|v\|_\infty \cdot \|v\|_1.$$

Все условия леммы C выполнены при $y = 0, x = v, f = v$.

В то же время понятно, что

$$\|v - 0\|_1 = \int\limits_{[0,1]^n} |v(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t} = \int\limits_{[0,1]^n} |v(\mathbf{t}) - 1|\, d\mathbf{t} = \|v - 1\|_1,$$

поскольку для тех $\mathbf{t}$, где $v(\mathbf{t}) = 1$, функция $v(\mathbf{t}) - 1$ равна нулю, и для тех $\mathbf{t}$, где $v(\mathbf{t}) = -1$, функция $v(\mathbf{t}) - 1$ равна -2. Значит, и тождественная $1 \in Y_{\mathbb{Z}^n_+}$ является ближайшим элементом для v. Следовательно, исследуемое подпространство не является подпространством единственности.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть* $R = \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n : a_1\lambda_1 + \cdots + a_n\lambda_n \geq C\}$ *при некоторых* $a_1, \ldots, a_n, C \in \mathbb{R}$, $a_1^2 + \cdots + a_n^2 \neq 0$. *Подпространство* Y_R *является чебышёвским в* $L_1[0,1]^n$.

Доказательству теоремы 2 предпошлем две леммы. Структура рассуждений следует структуре доказательства теоремы A. Разберем его основные моменты.

Сдвиг множества M на любой целочисленный вектор $\mathbf{m}$ сохраняет аппроксимативные свойства пространства Y_M для пространства $Y_{M+\mathbf{m}}$. Поэтому в доказательстве теоремы A рассматриваются отдельно три множества: $M = n\mathbb{Z}$, $M = \mathbb{N}$, $M = n\mathbb{N}$ при некотором нечетном n. Для каждого такого множества доказывается существование и единственность элемента наилучшего приближения в Y_M своим способом.

Доказательство существования элемента наилучшего приближения в подпространстве $Y_\mathbb{N}$ в теореме Кахана основывается на теореме братьев Рисс (см. [8, гл. 3, § 8] и [9, Ch. 17, Theorem 17.13]).

Теорема C. *Мера* μ, *определенная на единичном круге* T *с условием*

$$\int\limits_T e^{-int}\, d\mu(t) = 0 \quad \text{при каждом} \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

абсолютно непрерывна по отношению к мере Лебега.

Далее понадобятся следующие обозначения. Пусть
Γ — абелева дискретная группа,
$\hat{\Gamma}$ — двойственная компактная группа,
$M(\hat{\Gamma})$ — пространство радоновых мер на $\hat{\Gamma}$,
для $\mu \in M(\hat{\Gamma})$ обозначим символом $\hat{\mu}$ ее преобразование Фурье,
$\hat{\mu}(\alpha)$ — коэффициент Фурье меры μ с индексом $\alpha \in \Gamma$.
Для подмножества Λ абелевой дискретной группы Γ обозначим

$$M_\Lambda(\hat{\Gamma}) = \{\mu \in M(\hat{\Gamma}) : \hat{\mu}(\alpha) = 0 \text{ для любого } \alpha \in \Lambda\}.$$

В рассматриваемом случае $\Gamma = \mathbb{Z}^n, \hat{\Gamma} = [0,1]^n$.

Подмножество Λ абелевой дискретной группы Γ называется *множеством братьев Рисс* (Riesz set), если каждая радонова мера $\mu \in M_\Lambda(\hat{\Gamma})$ абсолютно непрерывна по отношению к мере Хаара на $\hat{\Gamma}$.

Вспомним, что ранее определялись и другие множества в Γ. Так, есть множества Шапиро [10], Бохнера [11], Рудина [12], Александрова [13] (которые даже имеют некоторые обобщения) и Мейера [14]. Их объединяет понятие хорошо расположенного (nicely placed) множества [15].

Множество Λ в абелевой дискретной группе Γ называется *хорошо расположенным*, если единичный шар пространства $Y_\Lambda(\hat{\Gamma})$ замкнут относительно квазинормы $L(1,\infty)$, которая определяется формулой

$$\|f\|_{1,\infty} = \sup_{r\geq 0}\{r\mu(|f| \geq r)\}.$$

Хорошо расположенное множество задает подпространство существования в $L_1(\hat{\Gamma})$ в силу определения и теоремы 5 из [16, гл. X, § 5]. Например, множества $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ хорошо расположены в абелевой дискретной группе $\mathbb{Z}$, множество $\mathbb{N}$ — множество братьев Рисс, множество $\mathbb{Z}$ — нет. В [15] приведен пример множества братьев Рисс, которое не является хорошо расположенным (см. [15, § 3.8]). Это множество является множеством Александрова.

Множества Шапиро определяются через хорошо расположенные множества следующим образом: множество $S \subset \Gamma$ называется *множеством Шапиро*, если каждое подмножество множества S хорошо расположено в Γ. В [15, Theorem 2.7] доказана следующая

Теорема D. *Пусть* Λ *и* $\widetilde{\Lambda}$ — *хорошо расположенные подмножества* (*подмножества Шапиро*) *в счетных дискретных группах* Γ *и* $\widetilde{\Gamma}$. *Тогда* $\Lambda \times \widetilde{\Lambda}$ — *хорошо расположенное подмножество* (*подмножество Шапиро*) *в* $\Gamma \times \widetilde{\Gamma}$.

Из этой теоремы следует, что множество $3\mathbb{Z} \times 4\mathbb{Z}$ хорошо расположено, следовательно, $Y_{3\mathbb{Z}\times 4\mathbb{Z}}$ — подпространство существования.

Также из теоремы D следует, что $\mathbb{N}^n$ — множество Шапиро и, следовательно, хорошо расположено. То есть пространство Харди $Y_{\mathbb{N}^n}$ является подпространством существования. Вероятнее всего, любое множество Шапиро в $\mathbb{Z}^n$, $n \geq 2$, не образует чебышёвское подпространство в $L_1[0,1]^n$.

Аналогично подпространство $Y_{\mathbb{N}\times\mathbb{Z}}$ является подпространством существования.

Несложно вывести из теоремы D, что если полупространство R ограничено гиперплоскостью Π, которая параллельна подпространству с базисом из $n-1$ целочисленного вектора (рациональная гиперплоскость), то Y_R хорошо расположено. Следовательно, такое подпространство Y_R является подпространством существования в $L_1[0,1]^n$. Рассматриваемый нами случай такими полупространствами не ограничивается.

Так, ограничивающая R гиперплоскость Π может содержать всего одну целую точку (полностью иррациональная гиперплоскость) или быть параллельной такой плоскости. С другой стороны, плоскость Π может быть параллельна подпространству, у которого можно выбрать в базис только $k < n-1$ целочисленных векторов, а остальные $n-k-1$ базисные векторы не могут быть выбраны целочисленными. Примером такой плоскости Π является плоскость в трехмерном пространстве, ортогональная вектору $(\sqrt{3}, 0, 1)$: требумым базисом в Π будут векторы $(0, 1, 0)$, $(-1, 0, \sqrt{3})$. При этом все целочисленные точки в Π имеют вид $(0, k, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому необходимо следующее обозначение.

Множество $[\Lambda]$ обозначает наименьшее хорошо расположенное множество в Γ, которое содержит Λ. При этом $[\Lambda]$ содержится в замкнутой выпуклой оболочке множества Λ [15]. Следовательно, $[R] = R$. Значит, верна

Лемма 1. *Множество Y_R — подпространство существования в $L_1[0,1]^n$.*

Множества Бохнера очень близки к полуплоскостям. Так, Бохнер доказал (см. [11]), что если множество $\Lambda \in \mathbb{Z}^2$ содержится в замкнутом углу A раствора меньше π, то Λ — множество братьев Рисс. Годфруа [15] доказал, что множества Бохнера являются множествами Шапиро, и обобщил множества Бохнера в $\mathbb{Z}^n$. При этом из теоремы D можно вывести, что в $\mathbb{R}^3$ пересечение $A \times \mathbb{Z}$ с $\mathbb{Z}^3$ образует подпространство существования в $L_1[0,1]^3$. Аналогично теореме 1 доказывается, что такое множество и множества Бохнера не образуют чебышёвское подпространство в L_1 с соответствующим числом переменных.

Основываясь на работе [15], Хенсген (см. [17]) затронул вопрос об отсутствии элемента наилучшего приближения в Y_M в случае пространства $L_1[0,1]^2$. В частности, он доказал, что подпространство $Y_{\mathbb{N}\times\mathbb{Z}\cup\mathbb{Z}\times\mathbb{N}}$ не является подпространством существования в $L_1[0,1]^2$. Из результатов его работы следует, что множество $\Lambda \in \mathbb{Z}^2$, являющееся дополнением к замкнутому углу раствора меньше π, не задает подпространство существования в $L_1[0,1]^2$. В этой же работе доказано, что множество $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ задает подпространство существования альтернативным способом.

Вопрос единственности элемента наилучшего приближения (без исследования его существования) в подпространствах Y_M специального вида исследовался в работе [18].

Напомним, что для подпространства $Y_M \subset L_1[0,1]^n$ множество $Y_M^\perp$ есть замыкание в $L_\infty[0,1]^n$ линейной оболочки экспонент со спектром из

$$\mathbb{Z}^n \setminus M =: M'.$$

Обозначим $Y_\Lambda^\perp Y_\Lambda = \{\overline{h}y : h \in Y_\Lambda^\perp, y \in Y_\Lambda\}$. При этом $Y_\Lambda^\perp Y_\Lambda \subset L_1[0,1]^n$.

Лемма 2. *Множество Y_R — подпространство единственности в $L_1[0,1]^n$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности считаем, что $\mathbf{0} \in R$, поскольку сдвиг множества R на целочисленный вектор не меняет аппроксимативных свойств подпространства Y_R. Поскольку $(\Pi \cap \mathbb{Z}^n) \subset R$, тогда $-(\Pi \cap \mathbb{Z}^n) \subset R$ и $-(\Pi \cap \mathbb{Z}^n) \cap R' = \varnothing$. Обозначим через Π_0 плоскость, параллельную Π и содержащую $\mathbf{0}$. Возможно, $\Pi = \Pi_0$ и тогда $-\Pi = \Pi$. Обозначим

$$R_0 = \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n : a_1\lambda_1 + \cdots + a_n\lambda_n > 0\},$$

т. е. R_0 — пересечение $\mathbb{Z}^n$ с открытым полупространством с границей Π_0. Тогда $Y_R^\perp Y_R = Y_{R_0}$. В R_0 нет центрально-симметричных точек, значит, в Y_{R_0} нет отличных от нуля вещественных функций. Следуя рассуждениям Кахана, докажем единственность элемента наилучшего приближения.

Без ограничения общности рассматриваем такой $x \in L_1[0,1]^n$, для которого тождественный ноль является ближайшим элементом. Действительно, если для элемента x функция $y \in Y_R$ является ближайшей и тождественный ноль не является ближайшим, но нарушается единственность, то для элемента $x - y$ единственость также нарушается, но тождественный ноль ближайшим является. Тогда по лемме B существует $u \in Y_R^\perp$ единичной нормы с условием $(u, x) = \|x\|$. Последнее условие означает $\overline{u}x = |x|$ почти всюду. Для $y \in Y_R$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \int |x - y|\, d\mathbf{t} &\geq \int |\overline{u}(x - y)|\, d\mathbf{t} = \int \big||x| - \overline{u}y\big|\, d\mathbf{t} \geq \int \big||x| - \mathrm{Re}\,(\overline{u}y)\big|\, d\mathbf{t} \\ &\geq \int (|x| - \mathrm{Re}\,(\overline{u}y))\, d\mathbf{t} = \int |x|\, d\mathbf{t} - \int \mathrm{Re}\,(\overline{u}y)\, d\mathbf{t} = \int |x|\, d\mathbf{t}. \end{aligned} \tag{3}$$

Последнее равенство выполнено за счет $u \in Y_R^{\perp}$. Для ближайшего к x элемента $y \in Y_R$ (с условием $\|x\| = \|x-y\|$) все неравенства в цепочке (3) обращаются в равенства. Значит, для почти всех $\mathbf{t}$ выполнены условия

$$(1-|u|)y = 0, \tag{4}$$

$$\mathrm{Im}\,(\overline{u}y) = 0, \tag{5}$$

$$|x| \geq \mathrm{Re}\,(\overline{u}y).$$

Поскольку $\overline{u}y \in Y_R^{\perp}Y_R$ и в рассматриваемом случае множество $Y_R^{\perp}Y_R$ не содержит ненулевых вещественных функций, равенство (5) влечет $\overline{u}y = 0$, а вместе с (4) получается $y = 0$.

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 2 следует непосредственно из лемм 1 и 2: из леммы 1 следует существование элемента наилучшего приближения в Y_R, из леммы 2 — единственность.

В заключение отметим, что это всего лишь один из нескольких классов подмножеств в $\mathbb{Z}^n$, задающих чебышёвские подпространства в $L_1[0,1]^n$ как замыкание линейной оболочки экспонент со спектром из заданного множества. Например, обобщением множества $(2n+1)\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}^n$ являются *решетки*, т. е. множества всех целочисленных линейных комбинаций n целочисленных векторов. Так, для целочисленных векторов $\omega_1, \dots, \omega_n \in \mathbb{Z}^n$ множество

$$\Lambda = \Lambda(\omega_1, \dots, \omega_n) = \{k_1\omega_1 + \dots + k_n\omega_n \colon k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}\}$$

называется решеткой в $\mathbb{Z}^n$. Некоторые решетки также задают чебышёвские подпространства в $L_1[0,1]^n$, и доказательство сильно отличается от представленного выше. Например, упомянутое выше множество $3\mathbb{Z} \times 4\mathbb{Z}$ является решеткой и задает подпространство существования, но подпространство $Y_{3\mathbb{Z}\times 4\mathbb{Z}}$ не является подпространством единственности в $L_1[0,1]^2$. Это утверждение доказывается несложно. Для простоты выкладок рассмотрим пространство

$$Y_{3\mathbb{Z}\times 4\mathbb{Z}+(0,2)} = Y_M.$$

Это сдвиг на целочисленный вектор $(0,2)$ решетки $3\mathbb{Z}\times 4\mathbb{Z}$. В получившемся множестве M не содержится точка $(0,0)$, но содержатся точки $(0,2)$ и $(0,-2)$. Значит, в пространстве Y_M не содержится тождественная единица, но содержится функция

$$\cos 4\pi t_2 = \frac{1}{2}(e^{4\pi i t_2} + e^{-4\pi i t_2}).$$

Докажем, что для тождественной единицы (x) ближайшей функцией в Y_M является тождественный ноль (y). Левый интеграл в (1) равен нулю, поскольку $x - y = x$ нигде не ноль. Правый интеграл в (1) также равен нулю, поскольку $\mathrm{sgn}(x-y) = x$ и спектр x содержится в M'. Согласно лемме A получается требуемое. Далее, функция $\cos 4\pi t_2$ также является ближайшей для тождественной единицы, поскольку

$$\|x\|_1 = \int\limits_{[0,1]^2} |1(\mathbf{t}) - 0(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t} = \int\limits_{[0,1]^2} |1(\mathbf{t}) - \cos 4\pi t_2|\,d\mathbf{t} = \|x - \cos 4\pi t_2\|_1,$$

что нарушает единственность ближайшего элемента.

Автор благодарит П. А. Бородина и О. Н. Косухина за внимание к работе и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ефимов Н.В., Стечкин С.Б.** Некоторые свойства чебышёвских множеств // Докл. АН СССР. 1958. Vol. 118, № 1. С. 17–19.
2. **Kripke B.R., Rivlin T.J.** Approximation in the metric of $L^1(X, \mu)$ // Trans. Am. Math. Soc. 1965. Vol. 119, no. 1. P. 101–122. https://doi.org/10.2307/1994233
3. **Рубинштейн Г.Ш.** Об одной экстремальной задаче в линейном нормированном пространстве // Сиб. мат. журн. 1965. Vol. 6, № 3. С. 711–714.
4. **Singer I.** Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces. Berlin; Heidelberg: Springer, 1970. 415 p. https://doi.org/10.1007/978-3-662-41583-2
5. **Doob J.L.** A minimum problem in the theory of analytic functions // Duke Math. J. 1941. Vol. 8, № 3. P. 413–424. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-41-00834-7
6. **Kahane J.-P.** Best approximation in $L^1(T)$ // Bull. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 80, № 5. P. 788–804. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1974-13518-4
7. **Бородин П.А.** Чебышевские подпространства в пространстве Харди H^1 // Anal. Math. 1999. Vol. 25, no. 1. 243–264. https://doi.org/10.1007/BF02908440
8. **Привалов И.И.** Граничные свойства аналитических функций, Москва; Ленинград: ГИТТЛ, 1950. 338 с.
9. **Rudin W.** Real and complex analysis. Singapore: McGraw-Hill Book Company, 1966. 430 p.
10. **Shapiro J.** Subspaces of $L^p(G)$ spanned by characters, $0 < p < 1$ // Israel J. Math. 1978. Vol. 29. P. 248–264. https://doi.org/10.1007/BF02762013
11. **Bochner S.** Boundary values of analytic functions in several variables and of almost periodic functions // Ann. Math. 1944. Vol. 45, no. 4. P. 708–722. https://doi.org/10.2307/1969298
12. **Rudin W.** Trigonometric series with gaps // J. Math. Mech. 1960. Vol. 9. no. 2, pp. 203–227. https://doi.org/10.1512/IUMJ.1960.9.59013
13. **Alexandrov A.B.** Essays on non-locally convex Hardy classes. Berlin: Springer-Verlag, 1980. P. 1–89. (Ser. Lecture Notes in Math; vol. 864). https://doi.org/10.1007/BFb0096996
14. **Meyer Y.** Spectres des mesures et mesures absolument continues // Studia Math. 1968. Vol. 30, no. 1. P. 87–99. http://eudml.org/doc/217267
15. **Godefroy G.** On Riesz subsets of Abelian discrete groups // Israel J. Math. 1988. Vol. 61, № 3. P. 301–331. https://doi.org/10.1007/BF02772575
16. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. 3-е изд. Москва: Наука, 1984. 752 с.
17. **Hensgen W.** Extremal problems for the vector-valued $\langle L^1/H_0^1, H^\infty \rangle$ duality // J. Approx. Theory. 1996. Vol. 84, no. 2. P. 162–171. https://doi.org/10.1006/jath.1996.0013
18. **Arias A., Mascioni V.** Best approximations in preduals of von Neumann algebras // J. London Math. Soc. 1992. Vol. 46. P. 491–498. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-46.3.491

Поступила 10.06.2025
После доработки 1.09.2025
Принята к публикации 8.09.2025

Беднов Борислав Борисович
канд. физ.-мат. наук
Сеченовский университет
г. Москва
e-mail: noriiii@inbox.ru

REFERENCES

1. Efimov N.V., Stechkin S.B. Some properties of Chebyshev sets. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1958, vol. 118, no. 1, pp. 17–19 (in Russian).
2. Kripke B.R., Rivlin T.J. Approximation in the metric of $L^1(X, \mu)$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1965, vol. 119, no. 1, pp. 101–122. https://doi.org/10.2307/1994233
3. Rubinstein G.S. On one extremal problem in a linear normed space. *Sib. Math. J.*, 1965, vol. 6, no. 3, pp. 711–714 (in Russian).

4. Singer I. *Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces.* Berlin, Heidelberg, Springer, 1970, 415 p. https://doi.org/10.1007/978-3-662-41583-2
5. Doob J.L. A minimum problem in the theory of analytic functions. *Duke Math. J.*, 1941, vol. 8, no. 3, pp. 413–424. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-41-00834-7
6. Kahane J.-P. Best approximation in $L^1(T)$. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1974, vol. 80, no. 5, pp. 788–804. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1974-13518-4
7. Borodin P.A. Chebyshev subspaces in the Hardy space H_1. *Anal. Math.*, 1999, vol. 25, no. 1, pp. 243–264 (in Russian). https://doi.org/10.1007/BF02908440
8. Privalov I.I. *Granichnyye svoystva analiticheskikh funktsiy* [Boundary properties of analytic functions], Moskva, Leningrad, Gos. izd-vo tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1950, 338 p.
9. Rudin W. *Real and complex analysis.* NY, London, Sydney, McGraw-Hill, Inc., 1966, 412 p.
10. Shapiro J. Subspaces of $L^p(G)$ spanned by characters: $0 < p < 1$. *Israel J. Math.*, 1978, vol. 29, pp. 248–264. https://doi.org/10.1007/BF02762013
11. Bochner S. Boundary values of analytic functions in several variables and of almost periodic functions. *Ann. Math.*, 1944, vol. 45, no. 4, pp. 708–722. https://doi.org/10.2307/1969298
12. Rudin W. Trigonometric series with gaps. *J. Math. Mech.*, 1960, vol. 9, no. 2, pp. 203–227. https://doi.org/10.1512/IUMJ.1960.9.59013
13. Alexandrov A.B. Essays on non locally convex hardy classes. In: Havin V. P., Nikol'skii N. K. (eds.) *Complex analysis and spectral theory. Lecture notes in mathematics*, vol. 864. Berlin, Heidelberg, Springer, 1981, pp. 1–89. https://doi.org/10.1007/BFb0096996
14. Meyer Y. Spectres des mesures et mesures absolument continues. *Studia Math.*, 1968, vol. 30, no. 1, pp. 87–99. http://eudml.org/doc/217267
15. Godefroy G. On Riesz subsets of Abelian discrete groups. *Israel J. Math.*, 1988, vol. 61, no. 3, pp. 301–331. https://doi.org/10.1007/BF02772575
16. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Functional analysis.* NY, Pergamon Press, 1982, 604 p. doi: 10.1016/C2013-0-03044-7 . Original Russian text published in Kantorovich L. V., Akilov G. P. *Funktsional'nyi analiz*, Moscow, Nauka Publ., 1977, 741 p.
17. Hensgen W. Extremal problems for the vector-valued $\langle L^1/H_0^1, H^\infty\rangle$ duality. *J. Approx. Theory*, 1996, vol. 84, no. 2, pp. 162–171. https://doi.org/10.1006/jath.1996.0013
18. Arias A., Mascioni V. Best approximations in preduals of von Neumann algebras. *J. London Math. Soc.*, 1992, vol. S2-46, no. 3, pp. 491–498. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-46.3.491

Received June 10, 2025
Revised September 1, 2025
Accepted September 8, 2025

Borislav Borisovich Bednov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Sechenov University, Moscow, 119991 Russia, e-mail: noriiii@inbox.ru .

Cite this article as: B. B. Bednov. Half-space from $\mathbb{Z}^n$ forms a Chebyshev subspace in $L_1[0,1]^n$. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 4, pp. 62–70 .