ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 31 № 4 2025

УДК 519.716.32, 517.518.244, 512.563

КРИТЕРИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ВОГНУТОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ФУНКЦИИ k-ЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

Д. Н. Баротов

В настоящей статье исследуется существование и единственность вогнутого продолжения на отрезок $[0, k-1]$ произвольной унарной функции k-значной логики $f_L\colon \{0, 1, \dots, k-1\} \to \{0, 1, \dots, k-1\}$ при любом натуральном $k \geq 2$. В результате исследования для произвольного натурального $k \geq 2$ формулируется и доказывается критерий существования вогнутого продолжения унарной функции k-значной логики f_L. Доказывается, что найденный критерий существования вогнутого продолжения функции k-значной логики f_L является также критерием существования минимального вогнутого продолжения функции k-значной логики f_L, но не является достаточным условием единственности вогнутого продолжения функции k-значной логики f_L. Также находится и доказывается критерий единственности вогнутого продолжения произвольной унарной функции k-значной логики f_L.

Ключевые слова: функция k-значной логики, вогнутое продолжение функции k-значной логики, критерий существования и единственности вогнутого продолжения.

D. N. Barotov. Criteria for the existence and uniqueness of a concave continuation of a function of k-valued logic.

In this paper we study the existence and uniqueness of a concave continuation to the segment $[0, k-1]$ of an arbitrary unary function of k-valued logic $f_L : \{0, 1, \dots, k-1\} \to \{0, 1, \dots, k-1\}$ for any natural $k \geq 2$. As a result of the study, for an arbitrary natural $k \geq 2$ we formulate and prove a criterion for the existence of a concave continuation of a unary function of k-valued logic f_L. It is proved that the found criterion for the existence of a concave continuation of a function of k-valued logic f_L is also a criterion for the existence of a minimal concave continuation of a function of k-valued logic f_L, but is not a sufficient condition for the uniqueness of a concave continuation of a function of k-valued logic f_L. We also find and prove a criterion for the uniqueness of a concave continuation of an arbitrary unary function of k-valued logic f_L.

Keywords: function of k-valued logic, concave continuation of a function of k-valued logic, criterion for the existence and uniqueness of a concave continuation.

MSC: 03B50, 54C20, 26B25, 06E30

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-4-52-61

1. Введение

В работе [1] исследованы вопросы о вогнутых продолжениях на $[0, 1]^n$ булевых n-арных функций и доказано, что, во-первых, для любой n-арной булевой функции существует бесконечно много функций, каждая из которых является ее вогнутым продолжением на $[0, 1]^n$, а во-вторых, для произвольной n-арной булевой функции построена соответствующая вещественная функция, которая также непрерывна и алгоритмически вычислима и является ее единственным минимальным вогнутым продолжением на $[0, 1]^n$. Также благодаря полученным результатам, в частности, конструктивно доказано, что задача решения системы булевых уравнений, являющаяся важной и трудноразрешаемой проблемой математики [2–6], криптографии [7–11] и многих других наук [2; 10–12], может быть сведена к задаче численной максимизации целевой функции, любой локальный максимум которой в искомой области является глобальным максимумом. В работе [13] результаты, полученные в [1] и соответствующие n-арным булевым функциям, распространены на дискретные функции, подобные булевым функциям и определенные на вершинах n-мерного многогранника $[c_1, d_1] \times [c_2, d_2] \times \ldots \times [c_n, d_n]$. С учетом того, что функция k-значной логики [14; 15], используемая для построения моделей при решении широкого класса задач [15], является расширением для булевой функции, данная работа посвящается обобщению (расширению) результатов, полученных в работе [1] и соответствующих булевым функциям, на унарные функции k-значной логики, а именно исследуются существование и свойства вогнутых продолжений на $[0, k-1]$ унарных функций k-значной логики. В результате исследования, формулируя и доказывая соответствующие критерии, мы выяснили, что, с одной стороны, вопрос о существовании вогнутого продолжения функции k-значной логики вида $f_L\colon \{0,1,\ldots,k-1\} \to \{0,1,\ldots,k-1\}$, который при $k=2$ имеет положительный ответ, вытекающий из утверждения 1 статьи [1], при $k>2$ для некоторых функций k-значной логики вида $f_L\colon \{0,1,\ldots,k-1\} \to \{0,1,\ldots,k-1\}$ имеет отрицательный ответ, а с другой стороны, вопрос о единственности вогнутого продолжения функции k-значной логики вида $f_L\colon \{0,1,\ldots,k-1\} \to \{0,1,\ldots,k-1\}$, который при $k=2$ имеет отрицательный ответ, вытекающий из теоремы 1 работы [1], при $k>2$ для некоторых функций k-значной логики вида $f_L\colon \{0,1,\ldots,k-1\} \to \{0,1,\ldots,k-1\}$ имеет положительный ответ.

Приведем краткий план данной статьи. Во втором разделе даны используемые понятия и обозначения. В третьем разделе формулируется и доказывается критерий существования вогнутого продолжения на отрезок $[0, k-1]$ унарной функции k-значной логики $f_L\colon \{0,1,\ldots,k-1\} \to \{0,1,\ldots,k-1\}$. Помимо этого показано, что найденный критерий существования вогнутого продолжения на $[0,k-1]$ унарной функции k-значной логики f_L является также критерием существования минимального вогнутого продолжения на $[0, k-1]$ унарной функции k-значной логики f_L, но не является достаточным условием единственности вогнутого продолжения на $[0,k-1]$ этой унарной функции k-значной логики f_L. В четвертом разделе доказан критерий единственности вогнутого продолжения на $[0, k-1]$ произвольной унарной функции k-значной логики f_L.

2. Используемые понятия и обозначения

Пусть $2 \le k \in \mathbb{N}$, $E_k = \{0,1,\ldots,k-1\}$ и $S_k = [0, k-1]$.

О п р е д е л е н и е 1. Отображение вида $f_L : E_k \to E_k$ называется функцией (или унарной функцией) k-значной логики.

О п р е д е л е н и е 2. Функция вида $\Delta_{f_L}(z) = f_L(z+1) - f_L(z)$ называется производной (или дискретной производной) функции k-значной логики $f_L(z)$.

О п р е д е л е н и е 3. Отображение вида $f : S_k \to \mathbb{R}$ называется вогнутой функцией на отрезке S_k, если для любых $x, y \in S_k$ и любого $\alpha \in [0,1]$ выполняется

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \ge \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

О п р е д е л е н и е 4. Отображение вида $f_C : S_k \to \mathbb{R}$ назовем вогнутым продолжением на S_k функции k-значной логики $f_L : E_k \to E_k$, если функция f_C на S_k вогнутая и имеет место равенство $f_C(z) = f_L(z)\ \ \forall z \in E_k$.

О п р е д е л е н и е 5. Отображение вида $f_{NR} : S_k \to \mathbb{R}$ назовем минимальным вогнутым продолжением на S_k функции k-значной логики $f_L : E_k \to E_k$, если оно является вогнутым продолжением на S_k функции k-значной логики f_L и имеет место неравенство $f_{NR}(x) \le f_C(x)$ для любого $x \in S_k$ и любого вогнутого продолжения f_C на S_k функции k-значной логики f_L.

3. Критерий существования вогнутых и минимально вогнутых продолжений на S_k функции k-значной логики $f_L : E_k \to E_k$

Теорема 1. *Функция k-значной логики $f_L : E_k \to E_k$ имеет вогнутое продолжение на S_k тогда и только тогда, когда выполняется неравенство*

$$\Delta_{f_L}(i-1) \ge \Delta_{f_L}(i) \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, k-2\}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Сначала докажем в одну сторону. Пусть функция k-значной логики f_L имеет вогнутое продолжение на S_k, т. е. некоторая вещественная функция $f_C(x)$ является вогнутым продолжением на S_k заданной функции f_L. Тогда при любом $i \in \{1, 2, \ldots, k-2\}$ имеет место цепочка

$$\begin{aligned}
\Delta_{f_L}(i-1) - \Delta_{f_L}(i) &= -f_L(i-1) + 2f_L(i) - f_L(i+1) \\
&= -f_L(i-1) - f_L(i+1) + 2f_C\Big(\frac{1}{2}(i-1) + \Big(1-\frac{1}{2}\Big)(i+1)\Big) \\
&\geq -f_L(i-1) - f_L(i+1) + 2\Big(\frac{1}{2}f_C(i-1) + \Big(1-\frac{1}{2}\Big)f_C(i+1)\Big) \\
&= -f_L(i-1) - f_L(i+1) + f_C(i-1) + f_C(i+1) \\
&= -f_L(i-1) - f_L(i+1) + f_L(i-1) + f_L(i+1) = 0.
\end{aligned}$$

Представим доказательство в другую сторону. Пусть функция k-значной логики f_L удовлетворяет условию (3.1). Тогда конструктивно покажем, что функция k-значной логики f_L имеет вогнутое продолжение на S_k, т. е. специальная вещественная функция вида

$$f_C(x) = \min_{m\in\{0,1,\ldots,k-2\}} \big\{f_L(m) + \Delta_{f_L}(m)\cdot(x-m)\big\} \tag{3.2}$$

является вогнутым продолжением на S_k данной функции f_L. Для этого достаточно убедиться в справедливости равенства $f_C(z) = f_L(z)$ $\forall z \in E_k$ ввиду вогнутости функции $f_C(x)$ (3.2), вытекающей из того факта, что минимум набора вогнутых функций есть вогнутая функция. Действительно, для всякого $z \in E_k$ согласно (3.2) получаем

$$f_C(z) = \min_{m\in\{0,1,\ldots,k-2\}} \big\{f_L(m) + \Delta_{f_L}(m)\cdot(z-m)\big\} = f_L(z),$$

так как вследствие (3.1) в случае $0 \leq m \leq z-1$ выполняется неравенство

$$f_L(m) + \Delta_{f_L}(m)\cdot(z-m) \geq f_L(m+1) + \Delta_{f_L}(m+1)\cdot(z-m-1),$$

а в случае $z \leq m \leq k-2$ — неравенство

$$f_L(m) + \Delta_{f_L}(m)\cdot(z-m) \leq f_L(m+1) + \Delta_{f_L}(m+1)\cdot(z-m-1).$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Отметим, что при $k > 2$ не каждая функция k-значной логики f_L удовлетворяет условию (3.1), т. е. имеет вогнутое продолжение на S_k. В качестве наглядного примера функции, не имеющей вогнутого продолжения на S_k, можно привести функцию 3-значной логики вида

$$f_L(z) = (z+1) \mod 2.$$

Действительно, если предположить, что некоторая вещественная функция $f_C(x)$ будет вогнутым продолжением на S_3 данной функции $f_L(z) = (z+1) \mod 2$, то получим противоречие, например, вида

$$0 = f_L(1) = f_C(1) = f_C\Big(\frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 2\Big) \geq \frac{1}{2}\,f_C(0) + \frac{1}{2}\,f_C(2) = 1.$$

Теперь докажем, что если функция k-значной логики f_L удовлетворяет неравенству (3.1), то вещественная функция, определенная в (3.2), является минимальным вогнутым продолжением на S_k этой функции f_L.

Теорема 2. *Если для функции k-значной логики $f_L\colon E_k \to E_k$ выполнено неравенство (3.1), то вещественная функция, определенная в (3.2), является единственным минимальным вогнутым продолжением на S_k данной функции f_L.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть f_{NR} – минимальное вогнутое продолжение на S_k функции k-значной логики f_L. Тогда с учетом (3.2) имеем, что функция, равная

$$\min_{m\in\{0,1,\ldots,k-2\}} \big\{f_L(m)+\Delta_{f_L}(m)\cdot(x-m)\big\},$$

является одним из вогнутых продолжений на S_k функции k-значной логики f_L, и, следовательно, получаем

$$f_{NR}(x)\le \min_{m\in\{0,1,\ldots,k-2\}} \big\{f_L(m)+\Delta_{f_L}(m)\cdot(x-m)\big\} \quad \forall x\in S_k.$$

Для завершения доказательства остается аргументировать справедливость и следующего неравенства:

$$\min_{m\in\{0,1,\ldots,k-2\}} \big\{f_L(m)+\Delta_{f_L}(m)\cdot(x-m)\big\}\le f_{NR}(x) \quad \forall x\in S_k. \tag{3.3}$$

В силу теоремы 1 имеем, что если $x\in E_k$, то в нестрогом неравенстве (3.3) достигается равенство, и поэтому обоснуем справедливость неравенства (3.3) при $x\in S_k\setminus E_k$. Если $x\in S_k\setminus E_k$, то существует единственное целое число $r\in\{0,1,\ldots,k-2\}$ такое, что $r<x<r+1$. Отсюда вследствие вогнутости f_{NR} и неравенства Йенсена [16] получаем

$$\begin{aligned} f_{NR}(x)&=f_{NR}\left((r+1-x)r+(x-r)(r+1)\right)\ge(r+1-x)f_{NR}(r)+(x-r)f_{NR}(r+1)\\ &=f_L(r)+\Delta_{f_L}(r)\cdot(x-r)=\min_{m\in\{0,1,\ldots,k-2\}} \big\{f_L(m)+\Delta_{f_L}(m)\cdot(x-m)\big\},\end{aligned}$$

поскольку ввиду (3.1) имеем, что если $m\in\{0,1,\ldots,r-1\}$, то справедливо неравенство

$$f_L(m)+\Delta_{f_L}(m)\cdot(x-m)\ge f_L(m+1)+\Delta_{f_L}(m+1)\cdot(x-m-1),$$

а если $m\in\{r,r+1,\ldots,k-2\}$, то — неравенство

$$f_L(m)+\Delta_{f_L}(m)\cdot(x-m)\le f_L(m+1)+\Delta_{f_L}(m+1)\cdot(x-m-1).$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что только выполнение условия (3.1) не влечет за собой единственность вогнутого продолжения на S_k функции k-значной логики f_L. Действительно, например, функция 3-значной логики вида $f_L(z)=z \bmod 2$ удовлетворяет условию (3.1), но вещественная функция, равная $1-|x-1|^n$, является ее вогнутым продолжением на S_3 для любого натурального n.

4. Критерий единственности вогнутого продолжения на S_k произвольной функции k-значной логики $f_L: E_k\to E_k$

Теорема 3. *Функция k-значной логики $f_L: E_k\to E_k$ имеет единственное вогнутое продолжение на S_k тогда и только тогда, когда ее производная Δ_{f_L} удовлетворяет следующим двум условиям.*

1°. *Производная Δ_{f_L} является невозрастающей.*

2°. *Для каждого $i\in\{0,1,\ldots,k-2\}$ найдется $j\in\{i-1,i+1\}\cap\{0,1,\ldots,k-2\}$ такой, что выполняется равенство $\Delta_{f_L}(i)=\Delta_{f_L}(j)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Начнем с доказательства в одну сторону. Пусть производная Δ_{f_L} функции k-значной логики f_L удовлетворяет условиям 1° и 2°. В этом случае обоснуем, что вогнутое продолжение на S_k функции k-значной логики f_L определяется однозначно. В силу теоремы 1 и условия 1° получаем, что функция k-значной логики f_L имеет вогнутое продолжение на S_k. Пусть f_C — произвольное вогнутое продолжение на S_k функции k-значной логики f_L. Отсюда согласно равенству $f_C(z) = f_L(z)\ \forall z \in E_k$ имеем, что вогнутое продолжение f_C на S_k функции k-значной логики f_L на множестве E_k определено однозначно. Осталось определить значение вогнутого продолжения f_C на S_k функции k-значной логики f_L в произвольной точке $x \in S_k \backslash E_k$. Пусть x — произвольный элемент множества $S_k \backslash E_k$. Тогда, как отмечено выше, существует единственное целое число $r \in \{0, 1, \dots, k-2\}$ такое, что $r < x < r+1$. Отсюда ввиду вогнутости f_C выпуклого представления $x = (r+1-x)r + (x-r)(r+1)$ и неравенства Йенсена [16] получаем

$$f_C(x) \geq (r+1-x) f_C(r) + (x-r)\, f_C(r+1) = f_L(r) + \Delta_{f_L}(r) \cdot (x-r). \tag{4.1}$$

Теперь докажем, что справедливо и следующее неравенство:

$$f_C(x) \leq f_L(r) + \Delta_{f_L}(r) \cdot (x-r). \tag{4.2}$$

В силу условия 2° имеем, что существует $j \in \{r-1, r+1\} \cap \{0, 1, \dots, k-2\}$ такой, что выполняется равенство $\Delta_{f_L}(r) = \Delta_{f_L}(j)$; на основании этого, чтобы доказать неравенство (4.2), относительно возможного значения j рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $r-1 = j \in \{0, 1, \dots, k-2\}$. Тогда в силу вогнутости f_C, выпуклого представления

$$r = \frac{x-r}{x-r+1}\,(r-1) + \frac{1}{x-r+1}\,x$$

и неравенства Йенсена [16] получаем неравенство

$$f_C(r) \geq \frac{x-r}{x-r+1}\, f_C(r-1) + \frac{1}{x-r+1}\, f_C(x),$$

из которого ввиду $\Delta_{f_L}(r) = \Delta_{f_L}(r-1)$ следует соотношение (4.2).

Случай 2. Пусть $r+1 = j \in \{0, 1, \dots, k-2\}$. Тогда вследствие вогнутости f_C, выпуклого представления

$$r+1 = \frac{1}{r+2-x}\,x + \frac{r+1-x}{r+2-x}\,(r+2)$$

и неравенства Йенсена [16] получаем неравенство

$$f_C(r+1) \geq \frac{1}{r+2-x}\, f_C(x) + \frac{r+1-x}{r+2-x}\, f_C(r+2),$$

из которого в соответствии с $\Delta_{f_L}(r) = \Delta_{f_L}(r+1)$ следует неравенство (4.2).

Итак, из неравенств (4.1), (4.2) и равенства $f_C(z) = f_L(z)\ \forall z \in E_k$ получаем, что значение вогнутого продолжения f_C на S_k функции k-значной логики f_L в произвольной точке $x \in S_k$ определяется единственным образом.

Докажем в другую сторону. Пусть функция k-значной логики f_L имеет единственное вогнутое продолжение на S_k. Тогда согласно теореме 1 о существовании вогнутого продолжения на S_k функции k-значной логики f_L условие 1° выполнено. Обоснуем, что в этом случае выполняется и условие 2°. Выполнение условия 2° докажем от противного: пусть функция k-значной логики f_L имеет единственное вогнутое продолжение на S_k, в частности, для нее условие 1° выполнено, а условие 2° не выполняется. Тогда, с одной стороны, имеем, что соответствующая вещественная функция $f_C(x) = \min\limits_{m \in \{0,1,\dots,k-2\}} \big\{f_L(m) + \Delta_{f_L}(m) \cdot (x-m)\big\}$ в силу теоремы 1 является вогнутым продолжением на S_k функции k-значной логики f_L. С другой стороны, из-за невыполнения условия 2° имеем, что найдется $i^* \in \{0, 1, \dots, k-2\}$ такой, что для каждого $j \in \{i^*-1, i^*+1\} \cap \{0, 1, \dots, k-2\}$ выполняется неравенство $\Delta_{f_L}(i^*) \neq \Delta_{f_L}(j)$. В таком случае докажем, что вещественная функция вида

$$f_{\mathrm{new}}(x) = \min\Big\{ \min_{m \in \{0,1,\dots,k-2\} \backslash \{i^*\}} \big\{f_L(m) + \Delta_{f_L}(m) \cdot (x-m)\big\}, f_{i^*}(x)\Big\}, \tag{4.3}$$

где

$$f_{i^*}(x) = \begin{cases} f_L(0) + \Big(\Delta_{f_L}(0) + \dfrac{1}{2}\Big)(x-0), & \text{если } i^* = 0, \\ +\infty, \quad \text{если } 0 < i^* < k-2, \\ f_L(k-2) + \dfrac{1}{2} + \Big(\Delta_{f_L}(k-2) - \dfrac{1}{2}\Big)(x-k+2), & \text{если } i^* = k-2, \end{cases}$$

также является вогнутым продолжением на S_k функции k-значной логики f_L; тем самым придем к требуемому противоречию. Функция $f_{\text{new}}(x)$ отличается от функции $f_C(x)$ только в интервале (i^*, i^*+1), т. е. получена из функции $f_C(x)$ небольшой модификацией. Чтобы доказать, что вещественная функция $f_{\text{new}}(x)$, определенная формулой (4.3), обладает следующими двумя свойствами: $f_{\text{new}}(x) = f_C(x)$ для каждого $x \in S_k \setminus (i^*, i^*+1)$ и $f_{\text{new}}(x) \neq f_C(x)$ для некоторого $x \in (i^*, i^*+1)$, а также является вогнутым продолжением на S_k функции k-значной логики f_L, относительно возможного значения i^* рассмотрим 3 случая.

С л у ч а й 1. Пусть $i^* = 0$. Тогда $\Delta_{f_L}(0) > \Delta_{f_L}(1)$ и

$$f_{\text{new}}(x) = \min\Big\{ \min_{m\in\{1,\dots,k-2\}} \{f_L(m) + \Delta_{f_L}(m)\cdot(x-m)\}, f_L(0) + \Big(\Delta_{f_L}(0) + \frac{1}{2}\Big)(x-0)\Big\}.$$

Вогнутость функции $f_{\text{new}}(x)$ на S_k ясна, так как она равна минимуму двух вогнутых функций.

а) Покажем, что справедливо равенство $f_{\text{new}}(z) = f_L(z)$ для каждого $z \in E_k$. Пусть z — произвольный элемент множества E_k. Тогда

$$f_{\text{new}}(z) = \min\Big\{ \min_{m\in\{1,\dots,k-2\}} \{f_L(m) + \Delta_{f_L}(m)\cdot(z-m)\}, f_L(0) + \Big(\Delta_{f_L}(0) + \frac{1}{2}\Big)(z-0)\Big\}$$

$$= \min\left\{ \begin{cases} f_L(1) - \Delta_{f_L}(1), & \text{если } z = 0, \\ f_L(z), & \text{если } 1 \le z \le k-2, \\ f_L(k-2) + \Delta_{f_L}(k-2), & \text{если } z = k-1, \end{cases} f_L(0) + \Big(\Delta_{f_L}(0) + \frac{1}{2}\Big)z \right\} = f_L(z),$$

так как в случае $0 \le m \le z-1$ справедливо

$$f_L(0) + \Big(\Delta_{f_L}(0) + \frac{1}{2}\Big)(z-0) \ge f_L(0) + \Delta_{f_L}(0)\cdot(z-0)$$
$$\ge f_L(m) + \Delta_{f_L}(m)\cdot(z-m) \ge f_L(m+1) + \Delta_{f_L}(m+1)\cdot(z-m-1) \ge f_L(z),$$

а в случае $z \le m \le k-3$ выполняется

$$f_L(z) \le f_L(m) + \Delta_{f_L}(m)\cdot(z-m) \le f_L(m+1) + \Delta_{f_L}(m+1)\cdot(z-m-1).$$

б) Покажем, что имеет место равенство $f_{\text{new}}(x) = f_C(x)$ для каждого $x \in S_k \setminus (i^*, i^*+1)$. Ввиду п. а) достаточно рассмотреть случай $x \in S_k \setminus (E_k \cup (i^*, i^*+1))$. Пусть x — произвольный элемент множества $S_k \setminus (E_k \cup (0,1))$. Тогда в силу $\Delta_{f_L}(0) > \Delta_{f_L}(1)$ имеет место цепочка

$$f_L(1) + \Delta_{f_L}(1)\cdot(x-1) \le f_L(0) + \Delta_{f_L}(0)\cdot(x-0) < f_L(0) + \Big(\Delta_{f_L}(0) + \frac{1}{2}\Big)(x-0),$$

и, следовательно, справедливо

$$f_{\text{new}}(x) = \min\Big\{ \min_{m\in\{1,\dots,k-2\}} \{f_L(m) + \Delta_{f_L}(m)\cdot(x-m)\}, f_L(0) + \Big(\Delta_{f_L}(0) + \frac{1}{2}\Big)(x-0)\Big\}$$

$$= \min_{m\in\{1,\dots,k-2\}} \{f_L(m) + \Delta_{f_L}(m)\cdot(x-m)\} = \min_{m\in\{0,1,\dots,k-2\}} \{f_L(m) + \Delta_{f_L}(m)\cdot(x-m)\} = f_C(x).$$

с) Покажем, что имеет место неравенство $f_{\text{new}}(x) > f_C(x)$ для некоторого $x \in (0,1)$. Если $x \in (0,1)$, то согласно неравенству

$$f_L(i) + \Delta_{f_L}(i)\cdot(x-i) \le f_L(i+1) + \Delta_{f_L}(i+1)\cdot(x-i-1) \quad \forall i \in \{1,\dots,k-3\},$$

вытекающему из того, что производная Δ_{f_L} является невозрастающей, имеем

$$f_{new}(x) = \min\Big\{\min_{m\in\{1,\dots,k-2\}}\big\{f_L(m)+\Delta_{f_L}(m)\cdot(x-m)\big\}, f_L(0)+\Big(\Delta_{f_L}(0)+\frac{1}{2}\Big)(x-0)\Big\}$$

$$= \min\Big\{f_L(1)+\Delta_{f_L}(1)\cdot(x-1), f_L(0)+\Big(\Delta_{f_L}(0)+\frac{1}{2}\Big)(x-0)\Big\}$$

$$= \begin{cases} f_L(0)+\Big(\Delta_{f_L}(0)+\dfrac{1}{2}\Big)(x-0), & \text{если } x\in\Big(0, \dfrac{\Delta_{f_L}(0)-\Delta_{f_L}(1)}{\Delta_{f_L}(0)-\Delta_{f_L}(1)+1/2}\Big] \\ f_L(1)+\Delta_{f_L}(1)\cdot(x-1), & \text{если } x\in\Big[\dfrac{\Delta_{f_L}(0)-\Delta_{f_L}(1)}{\Delta_{f_L}(0)-\Delta_{f_L}(1)+1/2}, 1\Big). \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$f_{\text{new}}(x) = f_L(0)+\Big(\Delta_{f_L}(0)+\frac{1}{2}\Big)(x-0) > f_L(0)+\Delta_{f_L}(0)\cdot(x-0)$$

$$= \min_{m\in\{0,1,\dots,k-2\}}\big\{f_L(m)+\Delta_{f_L}(m)\cdot(x-m)\big\} = f_C(x) \quad \forall x\in\Big(0, \frac{\Delta_{f_L}(0)-\Delta_{f_L}(1)}{\Delta_{f_L}(0)-\Delta_{f_L}(1)+1/2}\Big],$$

так как $\forall m\in\{0,1,\dots,k-3\}$ и $\forall x\in\Big(0, \dfrac{\Delta_{f_L}(0)-\Delta_{f_L}(1)}{\Delta_{f_L}(0)-\Delta_{f_L}(1)+1/2}\Big]$ имеет место цепочка неравенств $f_L(0)+\Delta_{f_L}(0)\cdot(x-0)\le f_L(m)+\Delta_{f_L}(m)\cdot(x-m)\le f_L(m+1)+\Delta_{f_L}(m+1)\cdot(x-m-1)$.

С л у ч а й 2. Пусть $0<i^*<k-2$. Тогда $\Delta_{f_L}(i^*-1)>\Delta_{f_L}(i^*)>\Delta_{f_L}(i^*+1)$ и

$$f_{\text{new}}(x) = \min_{m\in\{0,1,\dots,k-2\}\setminus\{i^*\}}\big\{f_L(m)+\Delta_{f_L}(m)\cdot(x-m)\big\}.$$

Вогнутость функции $f_{new}(x)$ на S_k ясна, так как она равна минимуму некоторых линейных (вогнутых) функций.

а) Покажем, что имеет место равенство $f_{\text{new}}(z)=f_L(z)$ для каждого $z\in E_k$. Пусть z — произвольный элемент множества E_k. Тогда согласно тому, что производная Δ_{f_L} является невозрастающей, имеет место

$$f_{\text{new}}(z) = \min_{m\in\{0,1,\dots,k-2\}\setminus\{i^*\}}\big\{f_L(m)+\Delta_{f_L}(m)\cdot(z-m)\big\} = f_L(z),$$

так как в случае $0\le m\le z-1$ выполняется

$$f_L(m)+\Delta_{f_L}(m)\cdot(z-m)\ge f_L(m+1)+\Delta_{f_L}(m+1)\cdot(z-m-1)\ge f_L(z),$$

а в случае $z\le m\le k-3$ справедливо

$$f_L(z)\le f_L(m)+\Delta_{f_L}(m)\cdot(z-m)\le f_L(m+1)+\Delta_{f_L}(m+1)\cdot(z-m-1).$$

б) Покажем, что имеет место равенство $f_{new}(x)=f_C(x)$ для каждого $x\in S_k\setminus(i^*,i^*+1)$. Ввиду п. а) достаточно рассмотреть случай $x\in S_k\setminus(E_k\cup(i^*,i^*+1))$. Пусть x — произвольный элемент множества $S_k\setminus(E_k\cup(i^*,i^*+1))$. Тогда в силу неравенства

$$\min_{m\in\{i^*-1,i^*+1\}}\big\{f_L(m)+\Delta_{f_L}(m)\cdot(x-m)\big\} < f_L(i^*)+\Delta_{f_L}(i^*)\cdot(x-i^*),$$

вытекающего из соотношений

$$f_L(i^*-1)+\Delta_{f_L}(i^*-1)\cdot(x-i^*+1) < f_L(i^*)+\Delta_{f_L}(i^*)\cdot(x-i^*) \quad \forall x\in(-\infty,i^*),$$

$$f_L(i^*+1)+\Delta_{f_L}(i^*+1)\cdot(x-i^*-1) < f_L(i^*)+\Delta_{f_L}(i^*)\cdot(x-i^*) \quad \forall x\in(i^*+1,+\infty),$$

имеем

$$f_{\text{new}}(x) = \min_{m\in\{0,1,\dots,k-2\}\setminus\{i^*\}} \big\{f_L(m) + \Delta_{f_L}(m)\cdot(x-m)\big\}$$
$$= \min_{m\in\{0,1,\dots,k-2\}} \big\{f_L(m) + \Delta_{f_L}(m)\cdot(x-m)\big\} = f_C(x).$$

c) Покажем, что справедливо неравенство $f_{\text{new}}(x) > f_C(x)$ для некоторого $x \in (i^*, i^*+1)$. Если $x \in (i^*, i^*+1)$, то справедливы неравенства

$$f_L(m) + \Delta_{f_L}(m)\cdot(x-m) \geq f_L(m+1) + \Delta_{f_L}(m+1)\cdot(x-m-1) \quad \forall m \in \{0,\dots,i^*-1\},$$

$$f_L(m) + \Delta_{f_L}(m)\cdot(x-m) \leq f_L(m+1) + \Delta_{f_L}(m+1)\cdot(x-m-1) \quad \forall m \in \{i^*+1,\dots,k-3\},$$

и, следовательно,

$$f_{\text{new}}(x) = \min_{m\in\{0,1,\dots,k-2\}\setminus\{i^*\}} \big\{f_L(m) + \Delta_{f_L}(m)\cdot(x-m)\big\}$$
$$= \min_{m\in\{i^*-1,i^*+1\}} \big\{f_L(m) + \Delta_{f_L}(m)\cdot(x-m)\big\} > f_L(i^*) + \Delta_{f_L}(i^*)\cdot(x-i^*)$$
$$= \min_{m\in\{0,1,\dots,k-2\}} \big\{f_L(m) + \Delta_{f_L}(m)\cdot(x-m)\big\} \quad \forall x \in (i^*, i^*+1),$$

так как справедливы неравенства

$$f_L(m) + \Delta_{f_L}(m)\cdot(x-m) \geq f_L(m+1) + \Delta_{f_L}(m+1)\cdot(x-m-1)$$
$$\geq f_L(i^*-1) + \Delta_{f_L}(i^*-1)\cdot(x-i^*+1) > f_L(i^*) + \Delta_{f_L}(i^*)\cdot(x-i^*) \quad \forall m \in \{0,\dots,i^*-1\},$$
$$f_L(i^*) + \Delta_{f_L}(i^*)\cdot(x-i^*) < f_L(i^*+1) + \Delta_{f_L}(i^*+1)\cdot(x-i^*-1) \leq f_L(m)$$
$$+ \Delta_{f_L}(m)\cdot(x-m) \leq f_L(m+1) + \Delta_{f_L}(m+1)\cdot(x-m-1) \quad \forall m \in \{i^*+1,\dots,k-3\}.$$

С л у ч а й 3. Пусть $i^* = k-2$. Данный случай аналогичен случаю 1 (например, рассматривая новую функцию $g_L(z) = f_L(k-1-z)$, его можно свести к случаю 1).

Теорема доказана.

Учитывая, что понятие выпуклости является “противонаправленным” понятию вогнутости, проведя рассуждения, которые подобны рассуждениям, приведенным в данной работе и соответствующим вогнутым продолжениям функций k-значной логики, можно получить аналогичные результаты, которые будут соответствовать выпуклым продолжениям функций k-значной логики. Также отметим, что полученные результаты для класса функций k-значной логики вида $f_L : E_k \to E_k$ без труда распространяются на широкий класс произвольных дискретных функций вида $f_D : \{a_0, a_1, \dots, a_{k-1}\} \to \mathbb{R}$, где $a_0, a_1, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$ и $a_0 < a_1 < \dots < a_{k-1}$, подобных унарным функциям k-значной логики.

Автор искренне благодарит рецензента за внимательное прочтение работы и полезные замечания и рекомендации, позволившие улучшить содержание статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Баротов Д.Н.** Вогнутые продолжения булевых функций и некоторые их свойства и приложения // Изв. Иркут. гос. ун-та. Серия: Математика. 2024. Т. 49. С. 105–123. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.49.105
2. **Abdel-Gawad A.H., Atiya A.F., Darwish N.M.** Solution of systems of Boolean equations via the integer domain // Inf. Sci. 2010. Vol. 180, no. 2. P. 288–300. https://doi.org/10.1016/j.ins.2009.09.010
3. **Gu J.** On optimizing a search problem // Art. Intel. Methods and Appl. 1992. P. 63–105. https://doi.org/10.1142/9789814354707_0002
4. **Gu J.** Global optimization for satisfiability (SAT) problem // IEEE Trans. Knowl. Data Eng. 1994. Vol. 6, no. 3. P. 361–381. https://doi.org/10.1109/69.334864

5. **Gu J., Gu Q., Du D.** On optimizing the satisfiability (SAT) problem // J. Comp. Sci. Technol. 1999. Vol. 14, no. 1. P. 1–17. https://doi.org/10.1007/BF02952482
6. **Файзуллин Р.Т., Дулькейт В.И., Огородников Ю.Ю.** Гибридный метод поиска приближенного решения задачи 3-выполнимость, ассоциированной с задачей факторизации // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 285–294.
7. **Pakhomchik A.I., Voloshinov V.V., Vinokur V.M., Lesovik G.B.** Converting of boolean expression to linear equations, inequalities and QUBO penalties for cryptanalysis // Algorithms. 2022. Vol. 15, no. 2. Art. no. 33. https://doi.org/10.3390/a15020033
8. **Ishchukova E., Maro E., Pristalov P.** Algebraic analysis of a simplified encryption algorithm GOST R 34.12-2015 // Computation. 2020. Vol. 8, no. 2. Art. no. 51. https://doi.org/10.3390/computation8020051
9. **Burek E., Wroński M., Mańk K., Misztal M.** Algebraic attacks on block ciphers using quantum annealing // IEEE Trans. Emerg. Topics Comput. 2022. Vol. 10, no. 2. P. 678–689. https://doi.org/10.1109/TETC.2022.3143152
10. **Bard G.V.** Algorithms for solving linear and polynomial systems of equations over finite fields, with applications to cryptanalysis. College Park: University of Maryland Publ., 2007. 181 p.
11. **Armario J.A.** Boolean functions and permanents of Sylvester Hadamard matrices // Mathematics. 2021. Vol. 9, no. 2. Art. no. 177. https://doi.org/10.3390/math9020177
12. **Ramos-Calderer S., Bravo-Prieto C., Lin R., Bellini E., Manzano M., Aaraj N., Latorre J.** Solving systems of Boolean multivariate equations with quantum annealing // Physical Review Research. 2022. Vol. 4, no. 1. Art. no. 013096. https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.4.013096
13. **Баротов Д.Н.** Вогнутые продолжения булевоподобных функций и некоторые их свойства // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер.: Математика. 2025. Т. 51. С. 82–100. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.51.82
14. **Жук Д.Н.** От двузначной к k-значной логике // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2018. Т. 22, №. 1. С. 131–149.
15. **Селезнева С.Н.** Полиномиальные представления дискретных функций: дисс. . . . д-ра физ.-мат. наук: 01.01.09. Москва, 2016. 257 с.
16. **Jensen J.L.W.V.** Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes // Acta Math. 1906. Vol. 30, no. 1. P. 175–193. https://doi.org/10.1007/BF02418571

Поступила 4.05.2025
После доработки 2.06.2025
Принята к публикации 13.08.2025

Баротов Достонжон Нумонжонович
старший преподаватель кафедры математики и анализа данных
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации
г. Москва
e-mail: DNBarotov@fa.ru

REFERENCES

1. Barotov D.N. Concave continuations of Boolean functions and some of their properties and applications. *Izv. Irkut. Gos. Univer. Ser. Mat.*, 2025, vol. 49, pp. 105–123 (in Russian). https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.49.105
2. Abdel-Gawad A.H., Atiya A.F., Darwish N.M. Solution of systems of Boolean equations via the integer domain. *Inf. Sci.*, 2010, vol. 180, no. 2, pp. 288–300. https://doi.org/10.1016/j.ins.2009.09.010
3. Gu J. On optimizing a search problem. *Art. Intel. Methods and Appl.*, 1992, pp. 63–105. https://doi.org/10.1142/9789814354707_0002
4. Gu J. Global optimization for satisfiability (SAT) problem. *IEEE Trans. Knowl. Data Eng.*, 1994, vol. 6, no. 3, pp. 361–381. https://doi.org/10.1109/69.334864
5. Gu J., Gu Q., Du D. On optimizing the satisfiability (SAT) problem. *J. Comp. Sci. Technol.*, 1999, vol. 14, no. 1, pp. 1–17. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/BF02952482

6. Faizullin R.T., Dulkeyt V.I., Ogorodnikov Yu.Yu. A hybrid search method for the approximate solution of the 3-satisfiability problem associated with the factorization problem. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2013, vol. 19, no. 2, pp. 285–294 (in Russian).
7. Pakhomchik A.I., Voloshinov V.V., Vinokur V.M., Lesovik G.B. Converting of Boolean expression to linear equations, inequalities and QUBO penalties for cryptanalysis. *Algorithms*, 2022, vol. 15, no. 2, art. no. 33, 22 p. https://doi.org/10.3390/a15020033
8. Ishchukova E., Maro E., Pristalov P. Algebraic analysis of a simplified encryption algorithm GOST R 34.12-2015. *Computation*, 2020, vol. 8, no. 2, art. no. 51, 21 p. https://doi.org/10.3390/computation8020051
9. Burek E., Wroński M., Mańk K., Misztal M. Algebraic attacks on block ciphers using quantum annealing. *IEEE Trans. Emerg. Topics Comput.*, 2022, vol. 10, no. 2, pp. 678–689. https://doi.org/10.1109/TETC.2022.3143152
10. Bard G.V. *Algorithms for solving linear and polynomial systems of equations over finite fields, with applications to cryptanalysis.* College Park, University of Maryland Publ., 2007, 181 p.
11. Armario J.A. Boolean functions and permanents of Sylvester Hadamard matrices. *Mathematics*, 2021, vol. 9, no. 2, art. no. 177, 8 p. https://doi.org/10.3390/math9020177
12. Ramos-Calderer S., Bravo-Prieto C., Lin R., Bellini E., Manzano M., Aaraj N., Latorre J. Solving systems of Boolean multivariate equations with quantum annealing. *Phys. Rev. Research*, 2022, vol. 4, no. 1, art. no. 013096, 9 p. https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.4.013096
13. Barotov D.N. Concave continuations of Boolean-like functions and some of their properties. *Izv. Irkut. Gos. Univer. Ser. Mat.*, 2025, vol. 51, pp. 82–100 (in Russian). https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.51.82
14. Zhuk D.N. From two-valued logic to k-valued logic. *Intel. Syst. Theory and Appl.*, 2018, vol. 22, no. 1, pp. 131–149 (in Russian).
15. Selezneva S.N. *Polynomial representations of discrete functions.* Diss. Doct. Phys.-Math. Sci.: 01.01.09, Moscow, 2016, 257 p. (in Russian).
16. Jensen J.L.W.V. Sur les fonctions convexes et les inegalites entre les valeurs moyennes. *Acta Math.*, 1906, vol. 30, no. 1, pp. 175–193. https://doi.org/10.1007/BF02418571

Received May 4, 2025
Revised June 2, 2025
Accepted August 13, 2025

Dostonjon Numonjonovich Barotov, Department of Mathematics and Data Analysis, Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, 109456 Russia,
e-mail: DNBarotov@fa.ru .

Cite this article as: D. N. Barotov. Criteria for the existence and uniqueness of a concave continuation of a function of k-valued logic. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 4, pp. 52–61.