

УДК 519.176

ОПЕРАЦИЯ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ РЕБЕР И РАСЩЕПЛЯЕМЫЕ ПРЕДКИ ГРАФА

В. А. Баранский, Т. А. Сеньчонок

Пусть r — ранг Дёрфи графа $G = (V, E)$, т. е. ранг Дёрфи его степенного разбиения $\text{dpt}(G)$. Пусть V_1, V_2 — теоретико-множественное разбиение множества вершин V на два непустых подмножества такое, что $\deg v \geq r$ для любого v из V_1 и $\deg v \leq r$ для любого v из V_2 . Двудольный граф (V_1, E', V_2) называется сэндвич подграфом графа G , отвечающим паре V_1, V_2 , где E' — множество всех ребер из E , которые идут из V_1 в V_2 . Граф называется расщепляемым, если его множество вершин можно представить в виде объединения клики и коклики. Расщепляемый предок графа — это расщепляемый граф, который можно получить из G с помощью некоторого последовательного выполнения повышающих вращений ребер. Расщепляемый предок графа G , имеющего ранг Дёрфи r , называется ближайшим расщепляемым r -предком графа G , если его можно получить из G с помощью наименьшего возможного числа s повышающих вращений ребер. Отметим, что $s = \frac{1}{2}(\text{sum tl}(\lambda) - \text{sum hd}(\lambda))$, где $\lambda = \text{dpt}(G)$, $\text{tl}(\lambda)$ — хвост и $\text{hd}(\lambda)$ — голова разбиения λ . Цель работы состоит в доказательстве следующих двух утверждений. Пусть r — ранг Дёрфи графа G , граф G_1 получен из графа G с помощью процедуры переключения ребер, отвечающей некоторому чередующемуся 4-циклу C .

1. Если C не является чередующимся 4-циклом сэндвич подграфа (V_1, E, V_2) графа G , то графы G и G_1 имеют общего ближайшего расщепляемого r -предка.

2. Если C содержится в сэндвич подграфе (V_1, E', V_2) графа G , то графы G и G_1 имеют общего расщепляемого предка, который получается из каждого из них с помощью последовательности, состоящей не более чем из $s + 1$ повышающих вращений ребер.

Ключевые слова: целочисленное разбиение, графическое разбиение, степенное разбиение, расщепляемый граф, вращение ребра.

V. A. Baransky, T. A. Senchonok. An edge switching procedure and splittable ancestors of a graph.

Let r be the Durfey rank of a graph $G = (V, E)$, i. e. the Durfey rank of its degree partition. Let V_1, V_2 be a set-theoretic partition of the vertex set V into two nonempty subsets such that $\deg v \geq r$ for any $v \in V_1$ and $\deg v \leq r$ for any $v \in V_2$. The bipartite graph (V_1, E', V_2) is called the sandwich subgraph of G corresponding to the pair V_1, V_2 , where E' is the set of all edges in E that go from V_1 to V_2 . A graph G is splittable graph if its set of vertices can be represented as the union of a clique and a coclique. We will call a graph H a splittable ancestor of a graph G if the graph G is reducible to the graph H using some sequential lifting rotations of edges and H is a splittable graph. A splittable ancestor of a graph G of Durfey rank r is called nearest splittable r -ancestor of G if it can be obtained from G using the smallest possible number s of lifting rotations of edges. Note that $s = \frac{1}{2}(\text{sum tl}(\lambda) - \text{sum hd}(\lambda))$, where $\lambda = \text{dpt}(G)$, $\text{tl}(\lambda)$ is the tail and $\text{hd}(\lambda)$ is the head of the partition λ . The aim of this paper is to prove the following two statements. Let r be the Durfey rank of a graph G , and let G_1 be a graph obtained from G using an edge switching procedure corresponding to some alternating 4-cycle C .

1. If C is not an alternating 4-cycle of the sandwich subgraph (V_1, E', V_2) of G , then G and G_1 have a common nearest splittable r -ancestor.

2. If C is contained in a sandwich subgraph (V_1, E', V_2) of G , then G and G_1 have a common splittable ancestor that is obtained from each of them by a sequence of at most $s + 1$ lifting rotations of edges.

Keywords: integer partition, graphical partition, degree partition, splittable graph, rotation of an edge.

MSC: 05C35, 05C07

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-4-39-51

1. Введение

Всюду под графом мы будем понимать обыкновенный граф, т. е. граф без петель и кратных ребер. Мы будем придерживаться терминологии и обозначений из [1].

Целочисленным разбиением или просто разбиением будем называть невозрастающую последовательность $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ целых неотрицательных чисел, которая содержит конечное число ненулевых компонент (см. [2]). Через $\text{sum } \lambda$ будем обозначать сумму всех компонент разбиения λ и называть ее *весом разбиения* λ . Часто говорят, что разбиение λ является разбиением целого неотрицательного числа $n = \text{sum } \lambda$. *Длиной* $\ell(\lambda)$ разбиения λ будем называть число его ненулевых компонент. Для удобства разбиение λ часто будем записывать в виде $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$, где $t \geq \ell(\lambda)$, т. е. будем опускать нули, начиная с некоторой нулевой компоненты, не забывая при этом, что последовательность является бесконечной.

Теория разбиений является одним из классических направлений комбинаторики, основы которого заложил Л. Эйлер и которое активно развивается в настоящее время. Сведения о достижениях теории разбиений можно найти в [2].

Данная работа продолжает исследования авторов, в которых используется метод элементарных преобразований для разбиений и связанный с ним метод вращения ребер в графах. Краткий обзор ранее полученных результатов можно найти в [1].

Разбиения будем изображать в виде диаграмм Ферре, состоящих из конечного набора квадратных блоков одинакового размера, составляющих “ступенчатую” фигуру (см. рис. 1, на котором представлена диаграмма Ферре разбиения $(6, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1)$ длины 8 и веса 26).

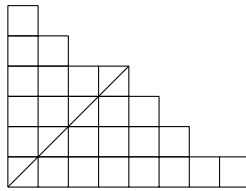


Рис. 1. Диаграмма Ферре разбиения $(6, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1)$.

Для каждого разбиения λ рассмотрим *сопряженное разбиение* λ^* такое, что для любого $i \in \mathbb{N}$ его i -компонента равна числу блоков в i -строке диаграммы Ферре разбиения λ . Диаграмму Ферре разбиения λ^* можно получить из диаграммы Ферре разбиения λ с помощью зеркальной симметрии относительно главной диагонали.

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ — произвольное разбиение. Определим *ранг Дёрфи* $r(\lambda)$ (или просто *ранг*) разбиения, полагая $r(\lambda) = \max\{i \mid \lambda_i \geq i\}$. Очевидно, ранг $r = r(\lambda)$ равен числу блоков на главной диагонали диаграммы Ферре разбиения (см. рис. 1). Максимальный квадрат, составленный из блоков и симметричный относительно главной диагонали, называют *квадратом Дёрфи* разбиения λ .

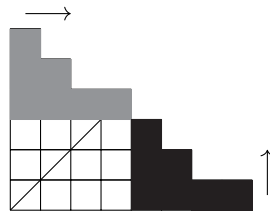


Рис. 2. Голова $\text{hd}(\lambda) = (3, 2, 1, 1)$ и хвост $\text{tl}(\lambda) = (4, 2, 1)$ разбиения $(6, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1)$.

Головой $\text{hd}(\lambda)$ разбиения λ назовем разбиение, которое получается из λ уменьшением первых r компонент на одно и то же число $r - 1$ и обнулением всех остальных компонент с номерами $r + 1, r + 2, \dots$. *Хвостом* $\text{tl}(\lambda)$ разбиения λ назовем разбиение, для которого диаграмма Ферре сопряженного разбиения $\text{tl}(\lambda)^*$ получается из диаграммы Ферре разбиения λ удалением первых r столбцов, т. е. диаграмма Ферре разбиения $\text{tl}(\lambda)^*$ расположена справа от квадрата Дёрфи (см. рис. 2, на этом рисунке выделены голова и хвост, а стрелки указывают направления, в которых считываются компоненты разбиений $\text{hd}(\lambda)$ и $\text{tl}(\lambda)$).

Пусть (x, v, y) — тройка различных вершин графа $G = (V, E)$ такая, что $xv \in E$ и $vy \notin E$. Такую тройку назовем

- 1) *повышающей*, если $\deg(x) \leq \deg(y)$,
- 2) *понижающей*, если $\deg(x) \geq 2 + \deg(y)$,
- 3) *сохраняющей*, если $\deg(x) = 1 + \deg(y)$.

Преобразование φ графа G такое, что $\varphi(G) = G - xv + vy$, т. е. из G сначала удаляется ребро xv , а затем добавляется ребро vy , называется *вращением ребра* (в графе G вокруг вершины v), *отвечающим тройке* (x, v, y) .

Вращение ребра в графе G , отвечающее тройке (x, v, y) , называется

- 1) *повышающим*, если тройка (x, v, y) повышающая,
- 2) *понижающим*, если тройка (x, v, y) понижающая,
- 3) *сохраняющим*, если тройка (x, v, y) сохраняющая.

Случаи, когда $\deg(x) = 1$ или $\deg(y) = 0$ будем рассматривать как допустимые, т. е. после вращения ребра может возникнуть изолированная вершина или вращение ребра произойдет в графе G с добавлением новой изолированной вершины.

Заметим, что вращение ребра в графе G является понижающим тогда и только тогда, когда обратное к нему вращение ребра является повышающим.

Граф G называется *расщепляемым* [3], если его множество вершин можно представить в виде объединения клики и коклики.

Расщепляемый предок графа G — это расщепляемый граф, который можно получить из G с помощью некоторого последовательного выполнения повышающих вращений ребер.

Расщепляемые графы были введены в [4], а в [5] было показано, что граф G расщепляем тогда и только тогда, когда он не содержит вершинно порожденных подграфов вида C_4 , C_5 , $2K_2$. Р. И. Тышкевич [6] использовала расщепляемые графы для изучения униграфических разбиений, т. е. графических разбиений, имеющих единственную реализацию с точностью до изоморфизма и изолированных вершин.

Отметим, что разными авторами были найдены иные характеристики и свойства расщепляемых графов (см., например, [7, разд. 8–9] и [8]). Было найдено условие, характеризующее расщепляемые графы с помощью степенного разбиения $\text{dpt}(G)$ графа G . В нашей терминологии это условие эквивалентно равенству $\text{sum}(\text{hd}(\lambda)) = \text{sum}(\text{tl}(\lambda))$, где $\lambda = \text{dpt}(G)$ [1]. Заметим, что граф G является пороговым тогда и только тогда, когда $\text{hd}(\lambda) = \text{tl}(\lambda)$ [3].

Рангом Дёрфи графа G будем называть ранг Дёрфи его степенного разбиения [1].

В дальнейшем через G всегда будем обозначать произвольный граф, для которого $V = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ — множество его вершин, $\lambda = \text{dpt}(G) = (\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n)$ — его степенное разбиение, где r — *ранг* разбиения λ , т. е. r удовлетворяет неравенствам

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r \geq r \geq \lambda_{r+1} \geq \dots \geq \lambda_n.$$

Будем считать также, что $\lambda_1 = \deg v_1, \dots, \lambda_r = \deg v_r, \lambda_{r+1} = \deg v_{r+1}, \dots, \lambda_n = \deg v_n$.

Положим $V_1 = \{v_1, \dots, v_r\}$ и $V_2 = \{v_{r+1}, \dots, v_n\}$.

Через E обозначим множество ребер графа G , соединяющих вершины из V_1 с вершинами из V_2 . Множество E будем называть *сечением* графа G , а двудольный граф (V_1, E, V_2) — *сэндвич подграфом* графа G , отвечающим паре V_1, V_2 .

Заметим, что в силу ht-критерия графичности разбиений [1] выполняется $\text{hd}(\lambda) \leq \text{tl}(\lambda)$, где $\text{hd}(\lambda)$ и $\text{tl}(\lambda)$ — голова и хвост разбиения λ , а число $\text{sum} \text{tl}(\lambda) - \text{sum} \text{hd}(\lambda)$ четно [1]. Положим $s = (1/2)(\text{sum} \text{tl}(\lambda) - \text{sum} \text{hd}(\lambda))$.

Если граф G с помощью некоторого последовательного выполнения повышающих вращений ребер приводится к расщепляемому графу H' вида $H' = (K(V_1), E', V_2)$, где

- 1) $K(V_1)$ — полный подграф, вершинно порожденный множеством V_1 , т. е. V_1 — клика;
- 2) V_2 — коклика;
- 3) E' — сечение графа H' , отвечающее паре V_1, V_2 ;
- 4) ранг Дёрфи графа H' равен r ,

то граф H' будем называть *расщепляемым r -предком графа G* .

Легко видеть, что из [9, теорема 1] вытекает следующее утверждение, которое мы будем применять при доказательстве теорем 1 и 2.

Предложение 1. 1. *Граф G с помощью некоторого последовательного выполнения s повышающих вращений ребер приводится к некоторому расщепляемому r -предку.*

2. *Число s является наименьшим неотрицательным целым числом с таким свойством.*

Ясно, что расщепляемый граф $H' = (K(V_1), E', V_2)$ с помощью обратной последовательности, состоящей из s понижающих вращений ребер, обратных к исходным повышающим вращениям ребер, преобразуется в граф G . Поэтому степенное разбиение $\text{dpt}(G)$ графа G получается из степенного разбиения $\text{dpt}(H')$ графа H' посредством последовательности из s элементарных преобразований первого типа (см. [1]).

Для графа G любой граф H' с указанными свойствами будем называть его *ближайшим расщепляемым r -предком* [9].

Четверка различных вершин (a, b, c, d) графа G называется *чередующимся 4-циклом*, если $ab \in EG$, $bc \notin EG$, $cd \in EG$ и $da \notin EG$, где EG — множество всех ребер графа G .

Операция *переключения ребер* в графе G , отвечающая такому чередующему 4-циклу, состоит в переходе от графа G к графу $G - ab + bc - cd + da$.

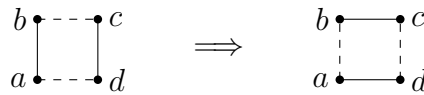


Рис. 3

Отметим, что операция переключения ребер в графах весьма популярна. Она применялась и исследовалась в значительном количестве работ.

Хорошо известно [10], что если для двух графов H_1 и H_2 на одном и том же множестве вершин степени любой вершины одинаковы в них, то H_1 можно получить из H_2 с помощью применения конечной последовательности операций переключения ребер.

Кроме того, два графа H_1 и H_2 являются реализациями одного и того же разбиения λ тогда и только тогда, когда граф H_1 изоморфен с точностью до изолированных вершин некоторому графу, полученному из H_2 с помощью применения конечной последовательности операций переключения ребер.

Важной задачей для графических разбиений является задача изучения совокупности всех реализаций заданного графического разбиения. Эту совокупность можно порождать из одной произвольной реализации разбиения λ путем применения процедур переключения ребер, отвечающих чередующимся 4-циклам. С другой стороны, эту же совокупность можно порождать, зная расщепляемых предков реализаций разбиения λ и используя понижающие вращения ребер.

Целью данной работы является доказательство следующих двух утверждений о взаимосвязи операции переключения ребер в графе с расщепляемыми предками этого графа.

Теорема 1. *Пусть граф G_1 получен из графа G с помощью процедуры переключения ребер, отвечающей некоторому чередующемуся 4-циклу C , который не является чередующимся 4-циклом сэндвич подграфа (V_1, E, V_2) графа G . Тогда графы G и G_1 имеют общего ближайшего расщепляемого r -предка.*

Теорема 2. *Пусть граф G_1 получен из графа G с помощью процедуры переключения ребер, отвечающей некоторому чередующемуся 4-циклу C , содержащемуся в сэндвич подграфе (V_1, E, V_2) графа G . Тогда графы G и G_1 имеют общего расщепляемого предка, который получается из каждого из них с помощью последовательности, состоящей не более чем из $s + 1$ повышающих вращений ребер.*

Теоремы 1 и 2 показывают одну из имеющихся взаимосвязей между двумя способами порождения совокупности реализаций графических разбиений. Конечно, было бы интересно для заданного разбиения λ уметь выделять наименьшую по числу графов совокупность расщепляемых предков реализаций разбиения λ , из которых можно получить все реализации этого разбиения, применяя к ним не более чем $s + 1$ понижающих вращений ребер. Теоремы 1 и 2 показывают, что в указанной в теоремах ситуации можно выбрать одного расщепляемого предка вместо двух, из которого обе реализации могут быть получены применением не более чем $s + 1$ понижающих вращений ребер.

2. Доказательства основных результатов

В формулировках лемм 1 и 2 мы используем обозначения для множеств вершин, $V_1 = \{v_1, \dots, v_r\}$ и $V_2 = \{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ графа G , введенные ранее перед формулировками теорем 1 и 2. Эти обозначения мы будем использовать и при доказательстве теорем 1 и 2.

Лемма 1 [9, лемма 2]. Пусть $e = vx$ — ребро графа G такое, что $v, x \in V_2$. Тогда существует вершина $y \in V_1$, для которой тройка (x, v, y) является повышающей.

Обозначим через H граф, который получен из графа G с помощью повышающего вращения, отвечающего этой тройке.

Тогда в графе H выполняется следующее:

- $\deg u \geq r$ для любой вершины $u \in V_1$;
- $\deg u \leq r$ для любой вершины $u \in V_2$ (т. е. ранг Дёрфи графа H равен r);
- $\text{sum hd}(\lambda) + 1 = \text{sum hd}(\eta)$, $\text{sum tl}(\lambda) - 1 = \text{sum tl}(\eta)$, где $\eta = \text{dpt}(H)$.

Лемма 2 [9, лемма 3]. Пусть вершины $y, v \in V_1$ графа G различны и не смежны. Тогда существует вершина $x \in V_2$, для которой тройка (x, v, y) является повышающей.

Обозначим через H граф, который получен из графа G с помощью повышающего вращения, отвечающего этой тройке.

Тогда в графе H выполняется следующее:

- $\deg u \geq r$ для любой вершины $u \in V_1$;
- $\deg u \leq r$ для любой вершины $u \in V_2$ (т. е. ранг Дёрфи графа H равен r);
- $\text{hd}(\lambda) + 1 = \text{sum hd}(\eta)$, $\text{sum tl}(\lambda) - 1 = \text{sum tl}(\eta)$, где $\eta = \text{dpt}(H)$.

В доказательствах теорем 1 и 2 нам понадобится алгоритм приведения графа G к расщепляемому предку, найденный в [9]. Мы его приведем здесь в упрощенном виде, достаточном для достижения наших целей.

Пусть w_1 — число пар различных не смежных вершин из V_1 , а w_2 — число пар смежных вершин из V_2 в графе G . В [9, теорема 1] установлено, что $w_1 + w_2 = s = (1/2)(\text{sum tl}(\lambda) - \text{sum hd}(\lambda))$.

Алгоритм 1 (см. [9, Algorithm 1]).

1. Полагаем $H_0 = G$.
2. Пусть граф H_i построен из графа H_0 с помощью i последовательных повышающих вращений ребер, указанных в леммах 1 или 2, где $0 \leq i < s$.

Выполняем любое из следующих двух действий (a) или (b).

- (a) Если существует ребро $e = vx$ — графа H_i такое, что $v, x \in V_2$, то в силу леммы 1 существует вершина $y \in V_1$, для которой тройка (x, v, y) является повышающей. Обозначим через H_{i+1} граф, который получен из графа H_i с помощью повышающего вращения, отвечающего этой тройке.
- (b) Если существуют две различные не смежные вершины $y, v \in V_1$ графа H_i , то в силу леммы 2 существует вершина $x \in V_2$, для которой тройка (x, v, y) является повышающей. Обозначим через H_{i+1} граф, который получен из графа H_i с помощью повышающего вращения, отвечающего этой тройке.

3. Шаг 2 выполняем s раз. В результате будет построен расщепляемый r -предок $H_t = (K(V_1), E_t, V_2)$ графа G .

Как замечено в [9], при построении последовательности повышающих вращений ребер при приведении к ближайшим расщепляемым предкам, указанные в леммах 1 и 2 вращения ребер, можно применять в произвольном порядке, при этом лемму 1 нужно использовать w_1 раз, а лемму 2 — w_2 раз.

Такой алгоритм построения последовательности повышающих вращений ребер был назван алгоритмом приведения графа G к ближайшему расщепляемому r -предку (относительно пары V_1, V_2).

Конечно, различные реализации алгоритма 1 могут давать различные графы, которые для исходного графа G являются ближайшими расщепляемыми r -предками.

Доказательство теоремы 1. Пусть граф G_1 получен из графа G , ранг Дёрфи которого равен r , с помощью переключения ребер в некотором чередующемся 4-цикле C , который не является чередующимся 4-циклом сэндвич подграфа (V_1, E, V_2) графа G .

Пусть чередующийся 4-цикл C состоит из четверки различных вершин (a, b, c, d) графа G , т. е. $ab \in EG$, $bc \notin EG$, $cd \in EG$ и $da \notin EG$, и граф G_1 получен переключением ребер в этом чередующемся 4-цикле.

Рассмотрим теперь 7 возможных случаев расположения вершин чередующегося 4-цикла C в графе G относительно множеств V_1 и V_2 .

1-й случай. В V_2 нет вершин чередующегося 4-цикла C , т. е. $a, b, c, d \in V_1$. Заметим, что при переходе от G к G_1 числа w_1 , w_2 и s сохраняются (см. рис. 4).

В силу леммы 2 существуют вершины $x_1, x_2 \in V_2$ такие, что b смежна с x_2 , а d смежна с x_1 (случай $x_1 = x_2$ не исключается). В графе G совершим повышающие вращения ребер, отвечающие тройке (x_2, b, c) и тройке (x_1, d, a) , а в графе G_1 совершим повышающие вращения ребер, отвечающие тройке (x_2, b, a) и тройке (x_1, d, c) (см. рис. 4).

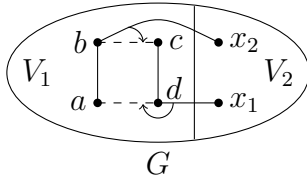


Рис. 4

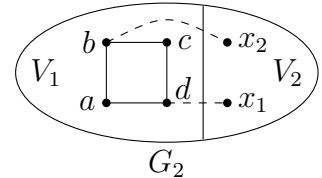
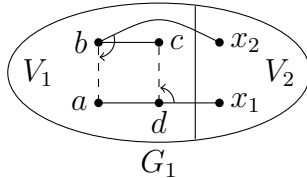


Рис. 5

После выполнения указанных вращений оба графа G и G_1 преобразуются в один и тот же граф G_2 (см. рис. 5).

Отметим, что степени вершин множества V_1 в графах G , G_1 и G_2 будут больше или равны r , а степени вершин множества V_2 в графах G , G_1 и G_2 будут меньше или равны r .

Ясно, что для каждого из графов G и G_1 мы израсходовали по два вращения ребер из w_1 вращений ребер, которые нужно выполнить при приведении каждого из них к ближайшему расщепляемому r -предку.

Далее, в силу алгоритма 1 граф G_2 с помощью $s - 2$ повышающих вращений ребер можно привести к его ближайшему расщепляемому r -предку H' . Полученный граф H' ввиду предложения 1 является общим ближайшим расщепляемым r -предком графов G и G_1 .

2-й случай. В V_2 имеется точно одна вершина чередующегося 4-цикла C . Без ограничения общности можно считать, что $a, b, c \in V_1$ и $d \in V_2$. Заметим, что при переходе от G к G_1 числа w_1 , w_2 и s сохраняются (см. рис. 6).

В графе G совершим повышающее вращение ребра, отвечающие тройке (d, a, b) , а в графе G_1 совершим повышающее вращение ребра, отвечающие тройке (d, c, b) (см. рис. 6).

После выполнения указанных вращений оба графа G и G_1 преобразуются в один и тот же граф G_2 (см. рис. 7).

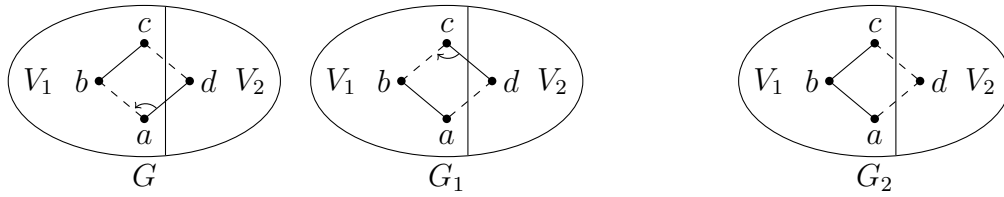


Рис. 6

Рис. 7

Отметим, что степени вершин множества V_1 в графах G , G_1 и G_2 будут больше или равны r , а степени вершин множества V_2 в графах G , G_1 и G_2 будут меньше или равны r .

Ясно, что для каждого из графов G мы израсходовали по одному вращению ребра из w_1 вращений ребер, которые нужно выполнить при приведении каждого из них к ближайшему расщепляемому r -предку.

Далее граф G_2 с помощью $s - 1$ повышающих вращений ребер можно привести к его ближайшему расщепляемому r -предку H' . Полученный граф H' в силу предложения 1 является общим ближайшим расщепляемым r -предком графов G и G_1 .

3-й случай. В V_2 имеется точно две смежных вершины чередующегося 4-цикла C . Без ограничения общности можно считать, что $a, b \in V_1$ и $c, d \in V_2$. Заметим сначала, что в G_1 число пар различных не смежных вершин в V_1 равно $w_1 + 1$, а число пар смежных вершин в V_2 равно $w_2 - 1$ и $(w_1 + 1) + (w_2 - 1) = s$ (см. рис. 8).

В графе G совершим повышающее вращение ребра, отвечающие тройке (d, c, b) , а в графе G_1 совершим повышающее вращение ребра, отвечающие тройке (d, a, b) (см. рис. 8).

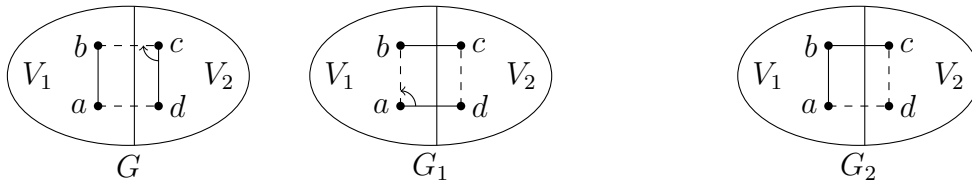


Рис. 8

Рис. 9

После выполнения указанных вращений оба графа G и G_1 преобразуются в один и тот же граф G_2 (см. рис. 9).

Отметим, что степени вершин множества V_1 в графах G , G_1 и G_2 будут больше или равны r , а степени вершин множества V_2 в графах G , G_1 и G_2 будут меньше или равны r .

Заметим, что в G_2 число пар различных не смежных вершин в V_1 равно w_1 , а число пар смежных вершин в V_2 равно $w_2 - 1$.

Ясно, что для каждого из графов G и G_1 мы израсходовали по одному вращению ребра из w_2 и w_1 вращений ребер, соответственно, которые нужно выполнить при приведении каждого из них к ближайшему расщепляемому r -предку.

Далее, граф G_2 с помощью $s - 1$ повышающих вращений ребер можно привести к его ближайшему расщепляемому r -предку H' . Полученный граф H' в силу предложения 1 является общим ближайшим расщепляемым r -предком графов G и G_1 .

4-й случай. В V_2 имеется точно две не смежных соседних вершины чередующегося 4-цикла C . Без ограничения общности можно считать, что $d, a \in V_1$ и $b, c \in V_2$. Этот случай совершенно аналогичен предыдущему случаю (достаточно G и G_1 поменять ролями).

5-й случай. В V_2 имеется точно две не смежных и не соседних вершины чередующегося 4-цикла C . Без ограничения общности можно считать, что $a, c \in V_1$ и $b, d \in V_2$ (случай $a, c \in V_2$ и $b, d \in V_1$ совершенно аналогичен). В этом случае рассматриваемый чередующийся 4-цикл C является чередующимся 4-циклом в сэндвич подграфе (V_1, E, V_2) графа G , что исключено условием теоремы 1.

6-й случай. В V_2 имеется точно три вершины чередующегося 4-цикла C . Без ограничения общности можно считать, что $a \in V_1$ и $b, c, d \in V_2$. Заметим, что при переходе от G к G_1 числа w_1 , w_2 и s сохранятся (см. рис. 10).

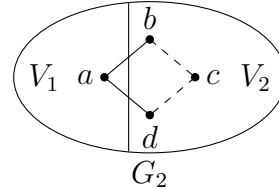
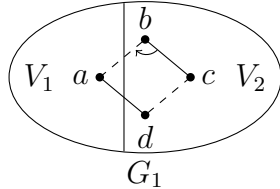
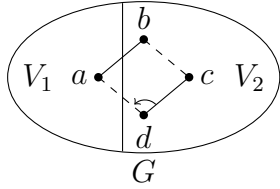


Рис. 10

Рис. 11

В графе G совершим повышающее вращение ребра, отвечающие тройке (c, d, a) , а в графе G_1 совершим повышающее вращение ребра, отвечающие тройке (c, b, a) (см. рис. 10).

После выполнения указанных вращений оба графа G и G_1 преобразуются в один и тот же граф G_2 (см. рис. 11).

Отметим, что степени вершин множества V_1 в графах G , G_1 и G_2 будут больше или равны r , а степени вершин множества V_2 в графах G , G_1 и G_2 будут меньше или равны r .

Ясно, что для каждого из графов G и G_1 мы израсходовали по одному вращению ребра из w_2 вращений ребер, которые нужно выполнить при приведении каждого из них к ближайшему расщепляемому r -предку.

Далее граф G_2 с помощью $s - 1$ повышающих вращений ребер можно привести к его ближайшему расщепляемому r -предку H' . Полученный граф H' в силу предложения 1 является общим ближайшим расщепляемым r -предком графов G и G_1 .

7-й случай. В V_2 содержатся все вершины чередующегося 4-цикла C , т.е. $a, b, c, d \in V_2$. Заметим, что при переходе от G к G_1 числа w_1 , w_2 и s сохранятся (см. рис. 12).

В силу леммы 1 существуют вершины $y_1, y_2 \in V_1$ такие, что b не смежна с y_1 , а d не смежна с y_2 (случай $y_1 = y_2$ не исключается). В графе G совершим повышающие вращения ребер, отвечающие тройке (a, b, y_1) и тройке (c, d, y_2) , а в графе G_1 совершим повышающие вращения ребер, отвечающие тройке (c, b, y_1) и тройке (a, d, y_2) (см. рис. 12).

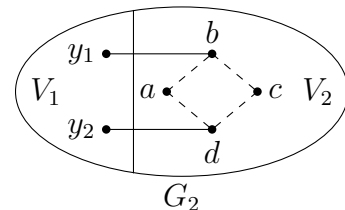
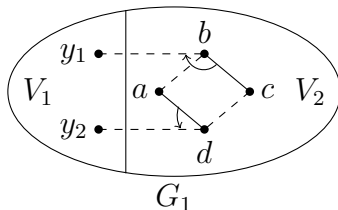
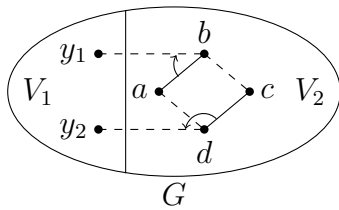


Рис. 12

Рис. 13

После выполнения указанных вращений оба графа G и G_1 преобразуются в один и тот же граф G_2 (см. рис. 13).

Отметим, что степени вершин множества V_1 в графах G , G_1 и G_2 будут больше или равны r , а степени вершин множества V_2 в графах G , G_1 и G_2 будут меньше или равны r .

Ясно, что для каждого из графов G и G_1 мы израсходовали по два вращение ребер из w_2 вращений ребер, которые нужно выполнить при приведении каждого из них к ближайшему расщепляемому r -предку.

Далее, граф G_2 с помощью $s - 2$ повышающих вращений ребер можно привести к его ближайшему расщепляемому r -предку H' . Полученный граф H' в силу предложения 1 является общим ближайшим расщепляемым r -предком графов G и G_1 .

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть граф G_1 получен из графа G , ранг Дёрфи которого равен r , с помощью переключения ребер в некотором чередующемся 4-цикле (a, b, c, d) сэндвич подграфа (V_1, E, V_2) графа G такого, что

$$ab \in E, bc \notin E, cd \in E \text{ и } da \notin E.$$

Заметим, что при переходе от G к G_1 числа w_1, w_2 и s сохранятся (см. рис. 14).

Без ограничения общности будем предполагать, что $\deg a \leq \deg c$ (случай $\deg a \geq \deg c$ рассматривается совершенно аналогично).

В графе G совершим повышающее вращение ребра, отвечающие тройке (a, b, c) , а в графе G_1 — повышающее вращение ребра, отвечающие тройке (a, d, c) (см. рис. 14).

После выполнения указанных вращений оба графа G и G_1 преобразуются в один и тот же граф G_2 (см. рис. 15).

Степени вершин в графе G_2 такие же, как у соответствующих вершин в графах G и G_1 , за исключением вершин a и c . Степень вершины c увеличилась на 1, а степень вершины a уменьшилась на 1. Поэтому в графе G_2 все вершины из V_1 имеют степени больше или равные r , за исключением быть может вершины a , степень которой может стать равной $r - 1$.

Ясно, что для каждого из графов G и G_1 при переходе к графу G_2 числа w_1, w_2 и s сохраняются (см. рис. 14 и рис. 15).

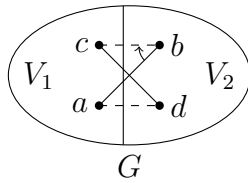


Рис. 14

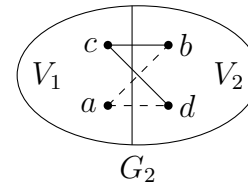
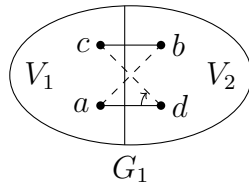


Рис. 15

Если вершина a имеет степень больше или равную r , то граф G_2 с помощью s повышающих вращений ребер можно привести к его ближайшему расцепляемому r -предку H' . Полученный граф H' является общим расцепляемым предком графов G и G_1 . Для получения общего расцепляемого предка H' для каждого из графов G и G_1 нужно применить $s + 1$ повышающих вращений ребер.

Предположим теперь, что вершина a имеет в G_2 степень $r - 1$.

Отметим, что в G_2 все вершины из V_1 имеют степени больше или равные r , за исключением вершины a , а все вершины из V_2 — степени меньше или равные r .

Если вершина a не смежна в G_2 с некоторой вершиной y из V_1 , не равной a , то она смежна в G_2 не более чем с $r - 2$ вершинами из V_1 . Тогда существует вершина $x \in V_2$, которая смежна в G_2 с вершиной a , поэтому тройка (x, a, y) является повышающей. После применения отвечающего ей повышающего вращение ребра в полученном графе появится новое ребро ay , степень вершины $y \in V_1$ увеличится на 1, а степень вершины $x \in V_2$ уменьшится на 1, степень вершины a останется равной $r - 1$. Если в полученном графе имеются еще вершины, не смежные с a и не равные a , то, применяя к ним по очереди указанный процесс, мы с помощью повышающих вращений ребер перейдем к некоторому графу $G_2^{(1)}$, в котором вершина a смежна со всеми вершинами из V_1 , отличным от a . Поэтому вершина a не смежна с каждой вершиной из V_2 .

Если в $G_2^{(1)}$ есть еще пары различных не смежных вершин, то входящие в них вершины отличны от a и имеют степени больше или равные r . Применяя к ним по очереди процесс, описанный в лемме 2, мы с помощью соответствующих повышающих вращений ребер перейдем к графу $G_2^{(2)}$, в котором множество V_1 является кликой. Отметим, что при переходе от G_2 к $G_2^{(2)}$ мы совершим точно w_1 повышающих вращений ребер.

Рассмотрим теперь пары смежных вершин из V_2 в графе $G_2^{(2)}$. Число таких пар равно w_2 .

Если $w_2 = 0$, то граф $G_2^{(2)}$ является расщепляемым. Тогда, очевидно, он является общим расщепляемым предком для графов G и G_1 . Для его получения, начиная с любого из этих графов, нужно последовательно совершить $1 + w_1 = 1 + s$ повышающих вращений ребер.

Будем теперь считать, что $w_2 \neq 0$.

1-й случай. Пусть среди w_2 пар смежных вершин множества V_2 в графе $G_2^{(2)}$ имеется пара $f, g \in V_2$, в которой степень хотя бы одной из вершин f и g меньше r .

Пусть без ограничения общности у вершины g степень меньше r . Тогда мы совершим повышающее вращение ребра в графе $G_2^{(2)}$, отвечающее повышающей тройке (g, f, a) , и получим граф $G_2^{(3)}$, в котором вершина a будет иметь степень r (см. рис. 16 и 17).

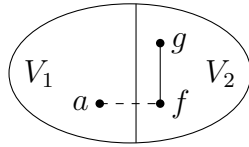


Рис. 16

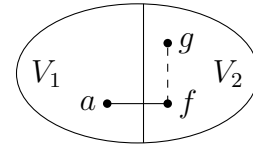


Рис. 17

Теперь все вершины множества V_1 в графе $G_2^{(3)}$ будут иметь степени больше или равные r . Число пар смежных вершин из V_2 в графе $G_2^{(3)}$ будет равно $w_2 - 1$. Используя алгоритм 1, граф $G_2^{(3)}$ с помощью $w_2 - 1$ повышающих вращений ребер мы приведем к графу H' , в котором V_1 является кликой, а V_2 — кокликкой. Тогда граф H' является общим расщепляемым предком для графов G и G_1 . Для его получения для каждого из этих графов нужно последовательно совершить $1 + w_1 + w_2 = 1 + s$ повышающих вращений ребер.

2-й случай. Будем предполагать теперь, что если две вершины из V_2 смежны в $G_2^{(2)}$, то обе они имеют степень r (напомним, что вершины из V_2 имеют в графе $G_2^{(2)}$ степени меньше или равные r).

Возьмем две различные смежные вершины f и g из V_2 в графе $G_2^{(2)}$. Каждая из них имеет степень r . Вершина a не смежна с вершиной f (она не смежна со всеми вершинами из V_2 , имеет степень $r - 1$ и смежна с каждой вершиной из множества $V_1 \setminus \{a\}$). Отметим, что мощность множества $V_1 \setminus \{a\}$ равна $r - 1$.

Рассмотрим множество $\{g, g_1, \dots, g_k\}$ всех вершин из V_2 , смежных с вершиной f в графе $G_2^{(2)}$, где $k \geq 0$.

Ясно, что $k + 1 \leq \deg f = r$. Поэтому число вершин множества $V_1 \setminus \{a\}$, смежных с вершиной f , равно $r - (k + 1) = (r - 1) - k$, поэтому вершина f не смежна точно с k вершинами h_1, \dots, h_k из множества $V_1 \setminus \{a\}$.

Начиная с графа $G_2^{(2)}$, совершим k последовательных повышающих вращений ребер, отвечающих повышающим тройкам (g_i, f, h_i) для $i = 1, \dots, k$. Мы получим граф $G_2^{(3)}$, в котором вершина f будет смежна со всеми вершинами из множества $V_1 \setminus \{a\}$ и в котором вершина f смежна точно с одной вершиной множества V_2 , а именно с вершиной g .

Кроме того, число пар смежных вершин графа $G_2^{(3)}$, содержащихся в множестве V_2 , будет равно $w_2 - k$. Заметим, что $w_2 - k > 0$, так как среди таких пар содержится пара $\{f, g\}$.

Ясно, что множество $(V_1 \setminus \{a\}) \cup \{f\}$ является кликой графа $G_2^{(3)}$, поскольку вершина f смежна со всеми вершинами из клики $V_1 \setminus \{a\}$ графа $G_2^{(3)}$.

Теперь мы сможем привести граф $G_2^{(3)}$ с помощью $w_2 - k - 1$ повышающих вращений ребер к некоторому расщепляемому графу H' , в котором $(V_1 \setminus \{a\}) \cup \{f\}$ является кликой, а $(V_2 \setminus \{f\}) \cup \{a\}$ — кокликкой.

Опишем эту последовательность повышающих вращений ребер.

Пусть u_1v_1, \dots, u_tv_t — множество всех ребер графа $G_2^{(3)}$, отличных от ребра fg , таких что $u_1, v_1, \dots, u_t, v_t \in V_2$ и $t = w_2 - k - 1$.

Рассмотрим ребро u_1v_1 . Ясно, что $u_1 \neq g$ или $v_1 \neq g$. Без ограничения общности можно считать, что $u_1 \neq g$. Ясно, что $u_1 \neq f$, поскольку ребро u_1v_1 отлично от ребра fg и для f ребро fg — единственное ребро, соединяющее f с вершиной из множества V_2 . Следовательно, вершина f не смежна с вершиной u_1 .

Совершаем повышающее вращение ребра, отвечающее повышающей тройке (v_1, u_1, f) (см. рис. 18, случай $v_1 = g$ не исключается). Отметим, что $\deg v_1 \leq r = \deg f$.

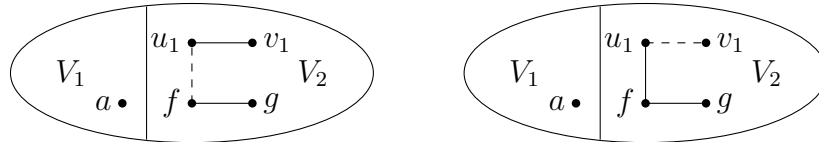


Рис. 18

Аналогичным образом поступаем по очереди с ребрами u_2v_2, \dots, u_tv_t . Совершив $t = w_2 - k - 1$ повышающих вращений ребер, мы получим расщепляемый граф H' .

Заметим, что в расщепляемом графе H' множество $(V_1 \setminus \{a\}) \cup \{f\}$ является кликой, а множество $(V_2 \setminus \{f\}) \cup \{a\}$ — кокликой. Ребро fg будет содержаться в сэндвич подграфе графа H' .

Ясно, что H' является общим расщепляемым предком для графов G и G_1 . Для получения общего расщепляемого предка H' для каждого из графов G и G_1 нужно последовательно применить $1 + w_1 + k + w_2 - k - 1 = s$ повышающих вращений ребер.

Теорема 2 доказана.

Заметим, что теорему 2 нельзя усилить, заменив $s + 1$ на s . Простой пример, говорящий об этом, можно получить, взяв два графа G и G_1 в соответствии с рис. 19. Положим $V_1 = \{a, b, c\}$ и $V_2 = \{x, y, z\}$.

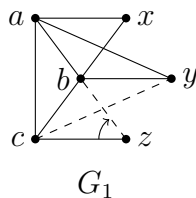
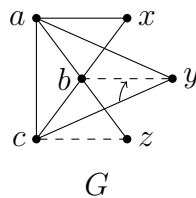


Рис. 19

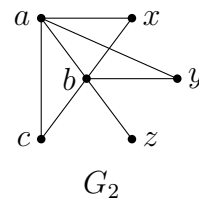


Рис. 20

Графы G и G_1 не изоморфны, и у каждого из них $s = 0$ (каждый из них является расщепляемым графом), а также требуется хотя бы одно повышающее вращение ребра в каждом из графов, чтобы получить общего расщепляемого предка (один из них, а именно G_2 , указан на рис. 20).

В заключение отметим, что в связи с теоремами 1 и 2 интерес представляет следующая

Задача. Пусть G — произвольный граф и $G = G_0, G_1, \dots, G_t$ — семейство графов такое, что каждый граф G_i , где $i = 1, 2, \dots, t$, получается из графа G_{i-1} с помощью переключения ребер в некотором чередующемся 4-цикле. Исследовать семейство расщепляемых предков графов G_0, G_1, \dots, G_t и найти для них аналоги теорем 1 и 2.

Авторы благодарны рецензенту за целый ряд полезных замечаний, способствовавших улучшению первоначального текста статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baransky V.A., Senchonok T.A. Around the Erdos–Gallai criterion // Ural Math. J. 2023. Vol. 9, no. 1. P. 19–48. <https://doi.org/10.15826/umj.2023.1.003>

2. **Andrews G.E.** The theory of partitions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1976. 255 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511608650>
3. **Mahadev N.V.R., Peled U.N.** Threshold graphs and related topics. Ser. Annals Discr. Math. Vol. 56. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1995. 542 p.
4. **Foldes S., Hammer P.L.** Split graphs // Proc. of the 8th South-Eastern Conf. on Comb.: Graph Theory and Computing. 1977. P. 311–315.
5. **Hammer P.L., Simeone B.** The splittance of a graph // Combinatorica. 1981. Vol. 1. P. 275–284. <https://doi.org/10.1007/BF02579333>
6. **Tyshkevich R.I.** Decomposition of graphical sequences and unigraphs // Discrete Math. 2000. Vol. 220. P. 201–238. [https://doi.org/10.1016/S0012-365X\(99\)00381-7](https://doi.org/10.1016/S0012-365X(99)00381-7)
7. **Merris R.** Graph theory. NY: J. Wiley and Sons Inc., 2001. 256 p. <https://doi.org/10.1002/9781118033043>
8. **Merris R.** Split graphs // European J. Combin. 2003. Vol. 24. P. 413–430. [https://doi.org/10.1016/S0195-6698\(03\)00030-1](https://doi.org/10.1016/S0195-6698(03)00030-1)
9. **Baransky V.A., Zuev V.V., Senchonok T.A.** Reducing graphs by lifting rotations of edges to splittable graphs // Ural Math. J. Vol. 10, № 2. 2024. P. 25–36. <https://doi.org/10.15826/umj.2024.2.003>
10. **Fulkerson D.R., Hoffman A.J., McAndrew M.H.** Some properties of graphs with multiple edges // Canadian J. Math. Vol. 17. 1965. P. 166–177. <https://doi.org/10.4153/CJM-1965-016-2>

Поступила 8.07.2025

После доработки 7.09.2025

Принята к публикации 15.09.2025

Баранский Виталий Анатольевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: vitaly.baransky@urfu.ru

Сеньчонок Татьяна Александровна
канд. физ.-мат. наук
доцент
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: tatiana.senchonok@urfu.ru

REFERENCES

1. Baransky V.A., Senchonok T.A. Around the Erdős — Gallai criterion. *Ural Math. J.*, 2023, vol. 9, no. 1, pp. 19–48. <http://dx.doi.org/10.15826/umj.2023.1.003>
2. Andrews G.E. *The theory of partitions*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1984, 255 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511608650>
3. Mahadev N.V.R., Peled U.N. *Threshold graphs and related topics*. Ser. Ann. Discr. Math., vol. 56. Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1995, 542 p. [https://doi.org/10.1016/S0167-5060\(13\)71063-X](https://doi.org/10.1016/S0167-5060(13)71063-X)
4. Foldes S., Hammer P.L. Split graphs. In: *Proc. of the 8th South-Eastern Conf. on Comb.: Graph Theory and Computing*, Baton Rouge, Louisiana State Univ., 1977, pp. 311–315.
5. Hammer P.L., Simeone B. The splittance of a graph. *Combinatorica*, 1981, vol. 1, pp. 275–284. <https://doi.org/10.1007/BF02579333>
6. Tyshkevich R.I. Decomposition of graphical sequences and unigraphs. *Discrete Math.*, 2000, vol. 220, no. 1–3, pp. 201–238. [https://doi.org/10.1016/S0012-365X\(99\)00381-7](https://doi.org/10.1016/S0012-365X(99)00381-7)
7. Merris R. *Graph theory*. NY, J. Wiley and Sons Inc., 2001, 256 p. <https://doi.org/10.1002/9781118033043>
8. Merris R. Split graphs. *Eur. J. Comb.*, 2003, vol. 24, iss. 4, pp. 413–430. [https://doi.org/10.1016/S0195-6698\(03\)00030-1](https://doi.org/10.1016/S0195-6698(03)00030-1)

9. Baransky V.A., Zuev V.V., Senchonok T.A. Reducing graphs by lifting rotations of edges to splittable graphs. *Ural Math. J.*, 2024, vol. 10, no. 2, pp. 25–36. <http://dx.doi.org/10.15826/umj.2024.2.003>
10. Fulkerson D.R., Hoffman A.J., McAndrew M.H. Some properties of graphs with multiple edges. *Canadian J. Math.*, 1965, vol. 17, pp. 166–177. <https://doi.org/10.4153/CJM-1965-016-2>

Received July 8, 2025

Revised September 7, 2025

Accepted September 15, 2025

Vitaly Anatol'evich Baransky, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: vitaly.baransky@urfu.ru.

Tatiana Aleksandrovna Senchonok, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: tatiana.senchonok@urfu.ru.

Cite this article as: V. A. Baransky, T. A. Senchonok. An edge switching procedure and splittable ancestors of a graph. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 4, pp. 39–51.