ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 31 № 4 2025

УДК 517.926

О ПОДВИЖНОСТИ ГЛАВНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ ЗНАКОВ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ[1]

А. Е. Артисевич

На множестве линейных однородных дифференциальных уравнений выше второго порядка с непрерывными на положительной полуоси коэффициентами установлены все возможные соотношения между главными значениями показателей колеблемости (строгих и нестрогих) знаков, а также проведено исследование устойчивости всех главных значений относительно бесконечно малых возмущений (т. е. исчезающих на бесконечности) коэффициентов уравнения. Конструктивно в работе построено многопараметрическое семейство дифференциальных уравнений заданного порядка $n \geq 3$, на котором реализуются строгие неравенства между главными значениями характеристических частот и показателей колеблемости. При фиксированных значениях последовательности параметров выделены точки из указанного семейства уравнений, в которых все главные значения показателей колеблемости не являются инвариантными относительно бесконечно малых возмущений. Кроме того, на множестве всех ненулевых решений указанного семейства уравнений все показатели колеблемости являются точными, абсолютными и совпадают с точной характеристической частотой знаков. При построении указанного семейства уравнений и доказательстве требуемых результатов использованы аналитические методы качественной теории дифференциальных уравнений и методы теории возмущений решений линейных дифференциальных уравнений. В частности, был применен метод варьирования уравнения, позволяющий специальным образом преобразовать исходное дифференциальное уравнение так, чтобы оно обладало наперед заданными свойствами. Также приведены примеры перехода от одного дифференциального уравнения к другому с целью обобщения свойств характеристических частот знаков и на показатели колеблемости знаков.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, линейная система, колеблемость, число нулей, показатель колеблемости, характеристическая частота, устойчивость, показатель Ляпунова.

A. E. Artisevich. On the mobility of the main values of the oscillation exponents of the signs of linear differential equations under infinitesimal perturbations.

On a set of linear homogeneous differential equations of higher than second order with continuous coefficients on the positive semi-axis, all possible relationships between the principal values of the oscillation exponents (strict and non-strict) of the signs were established, and a study was also conducted on the stability of all principal values with respect to infinitesimal perturbations (i.e., vanishing at infinity) of the equation coefficients. In the work, a multiparameter family of differential equations of a given order $n \geq 3$ is constructed, on which strict inequalities between the main values of the characteristic frequencies and oscillation exponents are realized. For fixed values of the sequence of parameters, we highlight points from the indicated family of equations in which all the main values of the oscillation exponents are not invariant under infinitesimal perturbations. In addition, on the set of all non-zero solutions of the specified family of equations all oscillation exponents are exact, absolute and coincide with the exact characteristic frequency of signs. In constructing the specified family of equations and proving the required results, analytical methods of the qualitative theory of differential equations and methods of the theory of perturbations of solutions of linear differential equations were used. In particular, the method of varying an equation, which allows the original differential equation to be transformed in a special way so that it has predetermined properties. Examples of the transition from one differential equation to another are also given in order to generalize the properties of the characteristic frequencies of signs and to exponents of the oscillation of signs.

Keywords: differential equation, linear system, oscillation, number of zeros, exponents of oscillation, Characteristic frequency, stability, Lyapunov's exponent.

MSC: 34C10, 34D05

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-4-26-38

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания № 075-03-2024-074/5 по проекту “Исследование асимптотических характеристик колеблемости дифференциальных уравнений и систем, а также оптимизационных методов”.

Введение

Идея качественного описания устойчивости решений дифференциального уравнения и системы путем введения на множестве всех предполагаемых решений специальных функционалов восходит к работам А. М. Ляпунова. Введенные им показатели, впоследствии названные его именем, открыли целое направление в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Оказалось, что с определенной точки зрения свойство колеблемости решений дифференциальных уравнений также поддается качественному описанию с помощью функционалов ляпуновского типа. Так благодаря работам [1–3] И. Н. Сергеева в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений была намечена новая область, в которой методы теории показателей Ляпунова были приложены к теории колебаний. Новые функционалы на пространстве решений линейных однородных дифференциальных систем позволили количественно различать колеблющиеся проекции решения на прямые (проходящие через начало координат) по среднему числу их нулей на числовой полуоси.

Целью работы является реализация возможных соотношений между главными значениями показателей колеблемости линейных однородных дифференциальных уравнений высших порядков при бесконечно малых возмущениях.

Несмотря на большое число работ [4–8] по указанной тематике оставались нерешенными задачи о существовании уравнений любого порядка, выше второго, для которых:

• верхний и нижний показатели с заданным некрайним номером не совпадают друг с другом;

• заданный показатель не инвариантен относительно бесконечно малых возмущений этого уравнения.

Известно, что у любого уравнения второго порядка все верхние (как и все нижние) характеристики колеблемости одинаковы и устойчивы при равномерно малых и бесконечно малых возмущениях коэффициентов уравнения [1; 2], а на множестве линейных однородных двумерных дифференциальных систем наблюдается неинваринатность главных значений показателей колеблемости и блуждаемости относительно бесконечно малых возмущений [6; 7]. На множестве уравнений выше второго порядка задача исследования свойств главных значений даже для характеристических частот становится крайне затруднительным, но тем не менее в [1] было построено многопараметрическое семейство дифференциальных уравнений третьего порядка с ограниченными на положительной полуоси коэффициентами, на котором реализуются различные соотношения между главными значениями характеристических частот. Кроме того, из этого семейства выделены такие уравнения, главные значения характеристических частот которых не были устойчивыми относительно равномерно малых и бесконечно малых возмущений. Через 7 лет этот результат был обобщен на уравнения высших порядков [9]. Для этого И. Н. Сергееву пришлось доказать теорему 3 из [10] об управлении фундаментальной системой решений, с помощью которой построено универсальное семейство дифференциальных уравнений в достаточно малой окрестности произвольного положительного значения параметра, бесконечно дифференцируемое по аргументу и каждому из параметров.

Оказалось, что показатели колеблемости знаков любого нетривиального решения любого уравнения описанных семейств равны нулю. Применяя метод варьирования уравнения к семейству из леммы 15 работы [1], в [8] получено новое многопараметрическое семейство с неограниченными коэффициентами, для которых анализ устойчивости главных значений показателей колеблемости относительно равномерно малых возмущений становится невозможным и обнаружены дифференциальные уравнения, в которых главные значения показателей колеблемости неинвариантны относительно бесконечно малых возмущений.

В настоящей работе, применяя метод варьирования уравнения к семействам из лемм 1, 3 и 4 из работы [9], получим аналогичный эффект для главных значений показателей колеблемости знаков дифференциальных уравнений не ниже третьего порядка.

1. Основные обозначения и определения

Для заданного натурального $n > 1$ рассмотрим множество $\widetilde{\mathcal{E}}^n$ линейных однородных уравнений n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0; +\infty),$$

задаваемых наборами *непрерывных* функций $a \equiv (a_1, \ldots, a_n)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$, с которыми в дальнейшем и будем отождествлять сами уравнения. Подмножество таких уравнений с *ограниченными* на $\mathbb{R}_+$ коэффициентами обозначим через $\mathcal{E}^n$. Пространство решений уравнения $a \in \widetilde{\mathcal{E}}^n$ обозначим через $\mathcal{S}(a)$ и положим

$$\mathcal{S}_*(a) \equiv \mathcal{S}(a) \setminus \{0\}, \qquad \mathcal{S}^n_{\widetilde{\mathcal{E}}} = \bigcup_{a \in \widetilde{\mathcal{E}}^n} \mathcal{S}_*(a).$$

Для более детального ознакомления с основными определениями см. работы [1; 8]. Для вектора $m \in \mathbb{R}^n_* \equiv \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, функции $y \in \mathcal{S}^n_{\widetilde{\mathcal{E}}}$, вектор-функции $\psi^n y = \bigl(y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)}\bigr)$ и чисел $t > 0$, $0 \le s < \tau$ введем следующие обозначения:

$\nu^-(y,t)$ — число точек *строгой смены знака* функции y на промежутке $(0,t]$;

$\nu^\sim(y,t)$ — число точек *нестрогой смены знака* функции y на промежутке $(0,t]$;

$\hat{\omega}^-(y)$ — верхняя характеристическая частота строгих знаков функции y;

$\check{\omega}^-(y)$ — нижняя характеристическая частота строгих знаков функции y;

$\nu^-(y,m,t)$ — число точек *строгой смены знака* скалярного произведения $\langle \psi^n y, m\rangle$ на промежутке $(0,t]$;

$\nu^\sim(y,m,t)$ — число точек *нестрогой смены знака* функции $\langle \psi^n y, m\rangle$ на промежутке $(0,t]$;

$\hat{\nu}^-_\bullet(y)$ — верхний сильный показатель колеблемости строгих знаков функции y;

$\hat{\nu}^\sim_\bullet(y)$ — верхний сильный показатель колеблемости нестрогих знаков функции y;

$\check{\nu}^-_\circ(y)$ — нижний слабый показатель колеблемости строгих знаков;

$\check{\nu}^\sim_\circ(y)$ — нижний слабый показатель колеблемости нестрогих знаков;

$\varkappa_{\bar{i}}(a)$, $\varkappa_{\underline{i}}(a)$, $i = \overline{1,n}$, — главные значения показателя $\varkappa : \mathcal{S}_*(a) \to \mathbb{R}_+$ уравнения $a \in \widetilde{\mathcal{E}}^n$;

$\nu^-(y,s,\tau) \equiv \nu^-(y,\tau) - \nu^-(y,s)\,,\ \nu^\alpha(y,m,s,\tau) \equiv \nu^\alpha(y,m,\tau) - \nu^\alpha(y,m,s)\,,\ \alpha \in \{-,\sim\}$.

З а м е ч а н и е 1. Если для некоторых $\alpha \in \{-,\sim\}$ и $y \in \mathcal{S}^n_{\widetilde{\mathcal{E}}}$ существует такой вектор m^α, что при любом $t > 0$ выполнено $\inf\limits_{m \in \mathbb{R}^n_*} \nu^\alpha(y,m,t) = \nu^\alpha(y,m^\alpha,t)$, то справедливы равенства

$$\hat{\nu}^\alpha_\circ(y) = \hat{\nu}^\alpha_\bullet(y) = \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(y,m^\alpha,t), \quad \check{\nu}^\alpha_\circ(y) = \check{\nu}^\alpha_\bullet(y) = \varliminf_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(y,m^\alpha,t).$$

З а м е ч а н и е 2. Если некоторое решение $y \in \mathcal{S}^n_{\widetilde{\mathcal{E}}}$ обладает свойством $\check{\omega}^-(y) > 0$, то оно является колеблющимся, т. е. имеет на полуоси $[0,+\infty)$ бесконечно много нулей. Заметим, что обратное утверждение неверно, поскольку функция $\sin(\ln(t+1)) \in \mathcal{S}^2_{\widetilde{\mathcal{E}}}$ является колеблющейся, но

$$\check{\omega}^-(\sin(\ln(t+1))) = \varliminf_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\Bigl[\frac{\ln(t+1)}{\pi}\Bigr] = \varliminf_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\Bigl(\frac{\ln(t+1)}{\pi} - \Bigl\{\frac{\ln(t+1)}{\pi}\Bigr\}\Bigr) = 0,$$

где $[\cdot]$ — целая часть числа, а $\{\cdot\}$ — дробная часть числа.

2. Метод варьирования уравнения

Сначала рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найдем спектры характеристик колеблемости знаков уравнения

$$y^{(IV)}+(\omega_1^2+\omega_2^2)\ddot{y}+\omega_1^2\omega_2^2y=0,\quad \omega_2>\omega_1>0,\quad \omega_1/\omega_2\notin\mathbb{Q} \tag{2.1}$$

со строкой коэффициентов $a^4\equiv(0,\omega_1^2+\omega_2^2,0,\omega_1^2\omega_2^2)\in\mathcal{E}^4$.

Решение. Спектры характеристических частот знаков заполняют (см. [11]) целый отрезок $\omega^-(\mathcal{S}_*(a^4))=[\omega_1,\,\omega_2]$, а спектры показателей колеблемости строгих знаков состоят (см. [12]) только из двух чисел $\nu^-(\mathcal{S}_*(a^4))=\{0,\omega_1\}$.

Общее решение уравнения (2.1) запишем в виде

$$y_c=C_1\sin(\omega_1t+\varphi_1)+C_2\sin(\omega_2t+\varphi_2) \tag{2.2}$$

и выберем векторы $m^1=(1,0,0,0)$, $m^2=(\omega_2^2,0,1,0)$. Если $C_1=0$, то для всех векторов $m\parallel m^2$ выполнено тождество $\langle\psi^4y_c,m\rangle\equiv0$, а для всех векторов $m\nparallel m^2$ справедливо представление $\langle\psi^4y_c,m\rangle=A_m\sin(\omega_1t+\varphi_m)$, где $A_m\neq0$. Следовательно, имеет место цепочка равенств

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^3_*}\nu^\sim(y_c,m,t)=\nu^\sim(y_c,m^1,t)=\Big[\frac{\omega_2t+\varphi_2}{\pi}\Big],\quad t>0,$$

из которой на основании замечания 1 вытекает

$$\check{\nu}^\sim(y_c)=\hat{\nu}^\sim(y_c)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\nu^\sim(y_c,m^1,t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\Big(\frac{\omega_2t+\varphi_2}{\pi}-\Big\{\frac{\omega_2t+\varphi_2}{\pi}\Big\}\Big)=\omega_2.$$

Аналогично при $C_2=0$ находим $\check{\nu}^\sim(y_c)=\hat{\nu}^\sim(y_c)=\omega_1$.

Если же $C_1\cdot C_2\neq0$, то на основании рассуждений, проведенных в п. 2 доказательства теоремы IV из [1], будем иметь

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^3_*}\nu^\sim(y_c,m,t)=\nu^\sim(y_c,m^2,t)=\Big[\frac{\omega_1t+\varphi_1}{\pi}\Big],\quad t>0,$$

а значит, $\nu^\sim(y_c)=\omega_1$.

Таким образом, спектры показателей колеблемости нестрогих знаков состоят из модулей мнимых частей корней характеристического многочлена уравнения (2.1). □

Пример 2. Сделаем в уравнении (2.1) замену $y(t)=e^{-t^2}z(t)$. Найдем спектры характеристик колеблемости знаков получившегося уравнения $b^4\in\widetilde{\mathcal{E}}^4$.

Решение. Каждому решению (2.2) поставим в соответствие решение $z_c(t)=e^{t^2}y_c(t)$ уравнения b^4. Очевидно, что $\omega^-(y_c)=\omega^-(z_c)$, поэтому $\omega^-(\mathcal{S}_*(b^4))=[\omega_1,\,\omega_2]$.

Из доказательства теоремы 1 в [13] следует $\nu^-(\mathcal{S}_*(b^4))=\nu^\sim(\mathcal{S}_*(b^4))=[\omega_1,\,\omega_2]$. □

Пример 3. В работе [14] по заданным несоизмеримым $\omega_2>\omega_1>0$ и некоторого $\varepsilon\in(0,1)$ построено такое уравнение $a^3\in\mathcal{E}^3$ с периодическими коэффициентами и фундаментальной системой решений $y_1(t)=\cos\omega_1t+\varepsilon$, $y_2(t)=\cos\omega_2t$, $y_3(t)=\sin\omega_2t$, что $\omega^-(\mathcal{S}_*(a^3))=[\omega_1,\,\omega_2]$ и $0<\omega_2^2-\omega_1^2<\varepsilon\omega_2^2$. Поэтому если в решении $y_c=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3$ коэффициент C_1 отличен от нуля, то для вектора $m^3=(\omega_2^2,0,1)$ справедливо

$$\langle\psi^3y_c,m^3\rangle=C_1(\omega_2^2-\omega_1^2)\cos\omega_1t+C_1\varepsilon\omega_2^2,$$

откуда $\nu^-(y_c)=\nu^\sim(y_c)=0$.

Если же $C_1=0$, то $\langle\psi^3y_c,m^3\rangle\equiv0$, а значит, $\nu^-(y_c)=0$. Для любого вектора $m\nparallel m^3$ имеем представление $\langle\psi^3y_c,m\rangle=B_m\sin(\omega_2t+\varphi_m)$, $B_m\neq0$, поэтому $\nu^\sim(y_c)=\omega_2$.

Таким образом, получили $\nu^-(\mathcal{S}_*(a^3))=\{0\}$, $\nu^\sim(\mathcal{S}_*(a^3))=\{0,\omega_2\}$. □

Пример 4. В работе [13] доказано существование такого уравнения $b^3 \in \widetilde{\mathcal{E}}^3$ с фундаментальной системой решений $z_1(t) = e^{t^2}(\cos\omega_1 t + \epsilon)$, $\quad z_2(t) = e^{t^2}\cos\omega_2 t$, $\quad z_3(t) = e^{t^2}\sin\omega_2 t$, что

$$\omega^-(\mathcal{S}_*(b^3)) = \nu^-(\mathcal{S}_*(b^3)) = \nu^\sim(\mathcal{S}_*(b^3)) = [\omega_1,\, \omega_2].$$

Метод варьирования уравнения (см. [13;15;16]) позволяет в большинстве случаев обобщать известные свойства характеристических частот и на показатели колеблемости. Суть этого метода для характеристик колеблемости *знаков* раскрывают следующие две леммы.

Из результатов работ [17; 18] следует справедливость следующего утверждения.

Лемма 1. *Для любой функции $f \in C^1[a,b]$, имеющей только простые нули $a < x_1 < \ldots < x_k < b$ или вовсе не имеющей нулей (тогда считаем $k = 0$), существует такое $\delta > 0$, что для всякой функции $g \in C^1[a,b]$, удовлетворяющей условию*

$$\max_{t\in[a,b]} \big(|g(t)| + |g'(t)|\big) < \delta,$$

функция $f + g$ имеет ровно k нулей, причем все они простые.

Лемма 2. *Пусть функция $y \in \mathcal{S}^n_{\widetilde{\mathcal{E}}}$ имеет точки строгих смен знаков и удовлетворяет условиям*

1) *для некоторого L выполнена оценка $|\psi^n y(t)| \le L < +\infty$,*

2) *существует такое $\delta > 0$, что для любых соседних точек t_1 и t_2 строгих смен знаков выполнено неравенство*

$$\max_{t\in[t_1,t_2]} |y(t)| > \delta.$$

Тогда имеют место следующие цепочки равенств:

$$\check{\nu}^\alpha_\circ(e^{t^2}y) = \check{\nu}^\alpha_\bullet(e^{t^2}y) = \check{\omega}^-(y), \quad \hat{\nu}^\alpha_\circ(e^{t^2}y) = \hat{\nu}^\alpha_\bullet(e^{t^2}y) = \hat{\omega}^-(y), \quad \alpha \in \{-,\sim\}. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала фиксируем произвольное решение $y \in \mathcal{S}^n_{\widetilde{\mathcal{E}}}$, обладающее свойством 1). Если $\hat{\omega}^-(y) = 0$, то мы оказываемся в условиях [8, лемма 4] и соответственно верны равенства (2.3).

Пусть теперь $\hat{\omega}^-(y) > 0$ и неограниченная последовательность $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ строгих смен знаков функции y удовлетворяет условию 2). В силу [8, замечание 1] при любом $\alpha \in \{-,\sim\}$ имеем очевидные соотношения

$$\check{\nu}^\alpha_\circ(e^{t^2}y) \le \check{\nu}^\alpha_\bullet(e^{t^2}y) \le \check{\omega}^-(e^{t^2}y) = \check{\omega}^-(y), \quad \hat{\nu}^\alpha_\circ(e^{t^2}y) \le \hat{\nu}^\alpha_\bullet(e^{t^2}y) \le \hat{\omega}^-(e^{t^2}y) = \hat{\omega}^-(y).$$

Для завершения доказательства установим противоположные неравенства. Для любого ненулевого вектора $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ и функции $z(t) = e^{t^2}y(t)$ рассмотрим скалярное произведение $\langle\psi^n z, m\rangle = m_1 z + m_2\dot{z} + \cdots + m_n z^{(n-1)}$.

Для каждого случая $m_i \ne 0$, $m_{i+1} = \cdots = m_n = 0$, $i = \overline{1, n-1}$, или $m_n \ne 0$ справедливо представление

$$\frac{\langle\psi^n(e^{t^2}y), m\rangle}{m_i(2t)^{i-1}e^{t^2}} = y + \varphi_i(t), \quad i = \overline{1,n},$$

где $\varphi_i(t) \to 0$ и $\dot{\varphi}_i(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Поэтому при любом $t > 0$ на основании леммы 1 справедливы соотношения $\nu^\sim(e^{t^2}y, m, t) \ge \nu^-(e^{t^2}y, m, t) \ge \nu^-(y, t)$.

Следовательно, установили неравенства $\inf\limits_{m\in\mathbb{R}^3_*} \nu^\alpha(e^{t^2}y, m, t) \ge \nu^-(y,t)$, $t > 0$, $\alpha \in \{-,\sim\}$, из которых вытекают

$$\check{\nu}^\alpha_\circ(e^{t^2}y) \ge \check{\omega}^-(y), \quad \hat{\nu}^\alpha_\circ(e^{t^2}y) \ge \hat{\omega}^-(y), \quad \alpha \in \{-,\sim\}.$$

Лемма 2 полностью доказана.

3. Параметрическое семейство уравнений

Заметим, что в п. 3) леммы 1 из работы [9] главные значения характеристических частот строгих знаков в зависимости от последовательности $\overline{\mu}$ параметров не меняются для следующих пар случаев: 3 б) и 3 в), 3 г) и 3 д), 3 е) и 3 ж). Кроме того, для этих случаев каждое нетривиальное решение семейства $a^3_{\overline{\mu}} \in \mathcal{E}^3$ из леммы 1 в [9] удовлетворяет условиям леммы 2 на тех участках, где производится подсчет количества точек строгих смен знака. Следовательно, применяя метод варьирования уравнения к семейству $a^3_{\overline{\mu}}$, получим для характеристик колеблемости *знаков* следующую лемму.

Лемма 3. *Для любого заданного $\mu_0 > 0$ существует такое $\varepsilon > 0$, что для отрезка $\mathrm{M} \equiv [\mu_0 - \varepsilon; \mu_0 + \varepsilon] \subset \mathbb{R}_+$ существует семейство уравнений $\tilde{a}^3_{\overline{\mu}} \in \widetilde{\mathcal{E}}^3$, зависящее от последовательности $\overline{\mu} \equiv (\mu_1, \mu_2, \dots) \in \mathrm{M}^\infty$ параметров, бесконечно дифференцируемое по t и обладающее следующими свойствами:*

1) *каждое уравнение $\tilde{a}^3_{\overline{\mu}}$ имеет фундаментальную систему решений z_1, z_2, z_3, удовлетворяющую при каждом $p \in \mathbb{N}$ требованиям*

$$(z_1, z_2, z_3)(t) = \begin{cases} (\mu_p e^{t^2},\ e^{t^2}\cos t,\ e^{t^2}\sin t), & t \in (r'_p; r_p), \\ (e^{t^2}\cos t,\ e^{t^2}\sin t,\ \mu_p e^{t^2}), & t \in (s'_p; s_p), \\ (e^{t^2}\sin t,\ \mu_p e^{t^2},\ e^{t^2}\cos t), & t \in (t'_p; t_p), \end{cases} \tag{3.1}$$

где $t_0 \equiv 0$ и при $p = 1, 2, \dots$ последовательно обозначено

$$r'_p \equiv t_{p-1} + 2\pi, \quad r_p \equiv r'_p + 2\pi p, \quad s'_p \equiv r_p + 2\pi, \quad s_p \equiv s'_p + 2\pi p, \quad t'_p \equiv s_p + 2\pi, \quad t_p \equiv t'_p + 2\pi p;$$

2) *существуют такие $\mu^* \in (1; \sqrt{2})$ и $\mu_* > \sqrt{2}$, что если при каком-либо значении $\mu_0 \in \mathrm{M}$ и при всех сразу значениях $p \in \mathbb{N}$ выполнены перечисленные ниже дополнительные условия на числа μ_p, то для каждого*

$$\varkappa = \check{\nu}^-_\circ, \check{\nu}^\sim_\circ, \hat{\nu}^-_\circ, \hat{\nu}^\sim_\circ, \check{\nu}^-_\bullet, \check{\nu}^\sim_\bullet, \hat{\nu}^-_\bullet, \hat{\nu}^\sim_\bullet, \check{\omega}^-, \hat{\omega}^- \tag{3.2}$$

выполняются следующие соотношения:

а) *если $\sqrt{2}/2 < \mu_p < 1$, то*

$$\frac{2}{3} = \varkappa_1(\tilde{a}^3_{\overline{\mu}}) = \varkappa_{\underline{2}}(\tilde{a}^3_{\overline{\mu}}) < \varkappa_{\overline{2}}(\tilde{a}^3_{\overline{\mu}}) = \varkappa_3(\tilde{a}^3_{\overline{\mu}}) = 1;$$

б) *если $1 \le \mu_p < \mu^*$, то*

$$\frac{1}{3} = \varkappa_1(\tilde{a}^3_{\overline{\mu}}) < \varkappa_{\underline{2}}(\tilde{a}^3_{\overline{\mu}}) = \varkappa_{\overline{2}}(\tilde{a}^3_{\overline{\mu}}) = \frac{2}{3} < \varkappa_3(\tilde{a}^3_{\overline{\mu}}) = 1;$$

в) *если $\mu^* \le \mu_p < \sqrt{2}$, то*

$$\frac{1}{3} = \varkappa_1(\tilde{a}^3_{\overline{\mu}}) = \varkappa_{\underline{2}}(\tilde{a}^3_{\overline{\mu}}) < \varkappa_{\overline{2}}(\tilde{a}^3_{\overline{\mu}}) = \frac{2}{3} < \varkappa_3(\tilde{a}^3_{\overline{\mu}}) = 1;$$

г) *если $\sqrt{2} \le \mu_p < \mu_*$, то*

$$0 = \varkappa_1(\tilde{a}^3_{\overline{\mu}}) < \varkappa_{\underline{2}}(\tilde{a}^3_{\overline{\mu}}) = \frac{1}{3} < \varkappa_{\overline{2}}(\tilde{a}^3_{\overline{\mu}}) = \varkappa_3(\tilde{a}^3_{\overline{\mu}}) = \frac{2}{3}.$$

Для любой из характеристических частот $\varkappa$ в доказательстве леммы 2 из [9] нигде не использовались никакие свойства функционала $\varkappa$, кроме равенства $\varkappa(cy) = \varkappa(y)$, $c \neq 0$. Поэтому это утверждение справедливо и для показателей колеблемости знаков.

Лемма 4. *Пусть для заданного* $n = l + q$, $l, q \in \mathbb{N}$, *пространства решений уравнений* $a \in \widetilde{\mathcal{E}}^l$ *и* $b \in \widetilde{\mathcal{E}}^n$ *связаны соотношением* $\mathcal{S}(a) \subset \mathcal{S}(b)$. *Тогда для любой из характеристических частот* $\varkappa$ *из списка* (3.2) *решений справедливы следующие утверждения*:

1) *если выполнено неравенство* $\inf_{z\in\mathcal{S}(b)\setminus\mathcal{S}(a)} \varkappa(z) \geq \sup_{y\in\mathcal{S}_*(a)} \varkappa(y)$, *то имеют место равенства*

$$\varkappa_{\bar{i}}(a) = \varkappa_{\bar{i}}(b), \quad \varkappa_{\underline{i}}(a) = \varkappa_{\underline{i}}(b), \quad i = 1, \dots, l;$$

2) *если выполнено неравенство* $\sup_{z\in\mathcal{S}(b)\setminus\mathcal{S}(a)} \varkappa(z) \leq \inf_{y\in\mathcal{S}_*(a)} \varkappa(y)$, *то имеют место равенства*

$$\varkappa_{\bar{i}}(a) = \varkappa_{\overline{q+i}}(b), \quad \varkappa_{\underline{i}}(a) = \varkappa_{\underline{q+i}}(b), \quad i = 1, \dots, l.$$

Далее рассмотрим две бесконечно дифференцируемые функции $f, g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющие условиям

$$f(\mu) \equiv g(\mu) \equiv e^{1/(\mu-\sqrt{2})}, \quad 0 \leq \mu < \sqrt{2},$$
$$f(\mu) \equiv f\bigl(\sqrt{2} - (\mu - \sqrt{2})\bigr), \quad g(\mu) \equiv 0, \quad \sqrt{2} < \mu < 2\sqrt{2},$$

и заметим, что обе они при $0 \leq \mu < \sqrt{2}$ убывают к нулю.

Выберем последовательность ν'_p ($p \in \mathbb{N}$), обладающую следующими свойствами:

а) $1 < \nu'_1 \leq \nu'_2 \leq \dots < \sqrt{2}$;

б) $\nu'_p \to \sqrt{2}$ при $p \to +\infty$ (откуда, кстати, $f(\nu'_p) \to f(\sqrt{2}) = 0$);

в) для некоторой целочисленной последовательности $p_0 \equiv 0 < p_1 < p_2 < \dots$ выполнены условия

$$\nu'_p \equiv \nu_l, \quad p_{l-1} < p \leq p_l, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Более того, для обеспечения этого свойства предпримем следующие шаги:

— сначала выберем возрастающую и сходящуюся к $\sqrt{2}$ последовательность будущих значений $\nu_l \in (1; \sqrt{2})$, $l \in \mathbb{N}$;

— далее для каждого ν_l определим такое $\varepsilon_l \in (0; \nu_l)$, чтобы для любой функции

$$y_0(t) \equiv \mu + \cos t + \sin t, \quad 0 < \mu \leq \nu_l < \sqrt{2},$$

которая имеет $2k$ смен (строгих и нестрогих) знаков на любом полуинтервале I длины $2k\pi$, любая возмущенная функция $y_0+\varphi$, удовлетворяющая оценкам $|\varphi(t)|+|\dot\varphi(t)| < \epsilon_l$, $t \in I$, имела бы число смен (строгих и нестрогих) знаков, отличающееся от $2k$ не более чем на 2 (см. п. 3.A доказательства леммы 3 из [9]);

— наконец, последовательно при $l = 1, 2, \dots$ выделим упомянутые выше натуральные числа p_l, удовлетворяющие неравенствам

$$\left|\frac{l\,z(t)}{F'(p_l)}\right| < \frac{\varepsilon_l}{8}, \quad \left|\frac{l\,\dot z(t)}{F'(p_l)}\right| < \frac{\varepsilon_l}{8}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad z(t) = \sqrt{2}, \cos t, \sin t, e^{-t},$$

где $F'(p_l) \equiv f(\nu'_1) + f(\nu'_2) + \dots + f(\nu'_{p_l}) \to +\infty$ при $l \to +\infty$.

Тогда, если последовательность $\overline{\mu}$ удовлетворяет неравенствам $\mu_p \leq \nu'_p$ ($p \in \mathbb{N}$), выполнены $F(p) = G(p)$ и $F(p) \geq F'(p_l)$ при $p_l \leq p < p_{l+1}$, где $F(p) \equiv \sum_{j=1}^p f(\mu_j)$, $G(p) \equiv \sum_{j=1}^p g(\mu_j)$.

Теперь выбираем вторую последовательность ν''_p ($p \in \mathbb{N}$), обладающую следующими свойствами:

а) $\mu_* > \nu''_1 \geq \nu''_2 \geq \dots > \sqrt{2}$ (см. лемму 3);

б) $\nu''_p \to \sqrt{2}$ при $p \to +\infty$;

в) $F''(p) \equiv f(\nu''_1) + f(\nu''_2) + \dots + f(\nu''_p) \to +\infty$ при $p \to +\infty$.

Тогда, если последовательность $\overline{\mu}$ удовлетворяет неравенствам $\mu_p \geq \nu''_p$ ($p \in \mathbb{N}$), выполнены соотношения $G(p) = 0$, $F(p) \geq F''(p)$.

С помощью замены $y(t,\overline{\mu}) = e^{-t^2} z(t,\overline{\mu})$ от семейства уравнений $a^4_{\overline{\mu}} \in \mathcal{E}^4$, фигурирующего в [9, лемма 3], можно перейти к новому $\tilde{a}^4_{\overline{\mu}} \in \widetilde{\mathcal{E}}^4$. После этого на основании лемм 2–4 получим следующее утверждение.

Лемма 5. *Для любого заданного* $\mu_0 > 0$ *существует такое* $\varepsilon > 0$*, что для отрезка* $\mathrm{M} \equiv [\mu_0 - \varepsilon; \mu_0 + \varepsilon] \subset \mathbb{R}_+$ *существует семейство уравнений* $\tilde a^4_{\overline{\mu}} \in \widetilde{\mathcal{E}}^4$*, зависящее от последовательности* $\overline{\mu} \equiv (\mu_1, \mu_2, \dots) \in \mathrm{M}^\infty$ *параметров, бесконечно дифференцируемое по* t *и обладающее следующими свойствами:*

1) *каждое уравнение* $\tilde a^4_{\overline{\mu}}$ *имеет набор решений* z_1, z_2, z_3, z_4*, удовлетворяющий при каждом* $p \in \mathbb{N}$ *требованиям* (3.1) *и*

$$z_4(t) = e^{t^2}\left(e^{-t} + F(p)y_1(t) + G(p)(y_2(t) + y_3(t))\right), \quad t \in (r'_p; r_p) \cup (s'_p; s_p) \cup (t'_p; t_p);$$

2) *в каждом из случаев* а)–г) *из формулировки леммы* 3 *при условиях* $\mu_p \le \nu'_p$, $p \in \mathbb{N}$, *и в случае* е) *соответственно при условиях* $\mu_p \ge \nu''_p$, $p \in \mathbb{N}$, *для любого* $\varkappa = \nu^-, \nu^\sim, \omega^-$ *справедливы равенства*

$$\varkappa_4(\tilde a^4_{\overline{\mu}}) = \varkappa_3(\tilde a^3_{\overline{\mu}}), \quad \varkappa_{\underline{i}}(\tilde a^3_{\overline{\mu}}) = \varkappa_{\underline{i}}(\tilde a^4_{\overline{\mu}}), \quad \varkappa_{\overline{i}}(\tilde a^3_{\overline{\mu}}) = \varkappa_{\overline{i}}(\tilde a^4_{\overline{\mu}}), \quad i = 1, 2, 3.$$

Для заданных чисел $r, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $l \in \{3,\, 4\}$, $\mu_0 > 0$ и ε перейдем от семейства уравнений $b_{\overline{\mu}} \in \mathcal{E}^{2r+q+l}$, существование которого утверждается в [9, лемма 4], к семейству $\tilde b_{\overline{\mu}} \in \widetilde{\mathcal{E}}^{2r+q+l}$ с помощью замены $y(t, \overline{\mu}) = e^{-t^2} z(t, \overline{\mu})$. Тогда на основании лемм 2–5 получим общий механизм наращивания порядка уравнения.

Лемма 6. *Для любых чисел* $r, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $l \in \{3,\, 4\}$, $\mu_0 > 0$ *и некоторого отрезка* $\mathrm{M} \equiv [\mu_0 - \varepsilon; \mu_0 + \varepsilon] \subset \mathbb{R}_+$ *существует семейство уравнений* $\tilde a^l_{\overline{\mu}} \in \widetilde{\mathcal{E}}^l$*, описанное в формулировках лемм* 3 *и* 5*, а также семейство уравнений* $\tilde b_{\overline{\mu}} \in \widetilde{\mathcal{E}}^{2r+q+l}$ *(зависящее от тех же последовательностей параметров, бесконечно дифференцируемое по* t*), пространство решений которого раскладывается в прямую сумму подпространств*

$$\mathcal{S}(\tilde b_{\overline{\mu}}) = R \oplus Q \oplus L, \quad \dim R = 2r, \quad \dim Q = q, \tag{3.3}$$

причем пространство L *изоморфно (с сохранением всех характеристик колеблемости знаков всех решений) пространству* $\mathcal{S}(\tilde a^l_{\overline{\mu}})$ *и выполнены равенства*

$$\nu^-(u) = \nu^\sim(u) = \omega^-(u) = 0, \quad u \in (Q \oplus L) \setminus L,$$

$$\nu^-(\xi) = \nu^\sim(\xi) = \omega^-(\xi) = 2, \quad \xi \in (R \oplus Q \oplus L) \setminus (Q \oplus L).$$

4. Формулировки и доказательства основных результатов

Доказательство [1, теорема VI] переносится на рассматриваемые функционалы (3.2). Следовательно, для любого уравнения $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$ справедливы соотношения

$$0 \le \varkappa_{\overline{1}}(a) \le \dots \le \varkappa_{\overline{n}}(a), \quad 0 \le \varkappa_{\underline{1}}(a) \le \dots \le \varkappa_{\underline{n}}(a), \tag{4.1}$$

$$\varkappa_{\underline{1}}(a) = \varkappa_{\overline{1}}(a) = \inf_{y \in \mathcal{S}_*(a)} \varkappa(y), \quad \varkappa_{\underline{n}}(a) = \varkappa_{\overline{n}}(a) = \sup_{y \in \mathcal{S}_*(a)} \varkappa(y),$$

$$\varkappa_{\underline{i}}(a) \le \varkappa_{\overline{i}}(a), \quad i = 2, \dots, n-1. \tag{4.2}$$

Для автономных уравнений неравенства (4.1) при любом $\varkappa = \check\nu^-_\circ, \hat\nu^-_\circ, \check\nu^-_\bullet, \hat\nu^-_\bullet$ — иногда, а неравенства (4.2) — всегда обращаются в равенства (см. [12]). Однако для неавтономных уравнений выше второго порядка неравенства (4.2) бывают и строгими, о чем говорит следующая теорема.

Теорема 1. *При любом $n>2$ для каждого из главных значений показателя колеблемости знаков $\varkappa_{\underline{i}}$, $\varkappa_{\overline{i}}$, $i=2,\ldots,n-1$, существует такое уравнение $a\in\widetilde{\mathcal{E}}^n$, что справедливы неравенства $\varkappa_{\underline{i}}(a)<\varkappa_{\overline{i}}(a)$, причем для любого $y\in\mathcal{S}_*(a)$ выполнена цепочка равенств*

$$\check{\nu}_{\circ}^{-}(y)=\check{\nu}_{\circ}^{\sim}(y)=\hat{\nu}_{\circ}^{-}(y)=\hat{\nu}_{\circ}^{\sim}(y)=\check{\nu}_{\bullet}^{-}(y)=\check{\nu}_{\bullet}^{\sim}(y)=\hat{\nu}_{\bullet}^{-}(y)=\hat{\nu}_{\bullet}^{\sim}(y)=\check{\omega}^{-}(y)=\hat{\omega}^{-}(y).$$

Следующая теорема делает содержательным исследование устойчивости главных значений показателей колеблемости на множестве уравнений порядка выше второго.

Теорема 2. *При любом $n>2$ для каждого из главных значений показателей колеблемости знаков $\varkappa_{\underline{i}}$, $\varkappa_{\overline{i}}$, $i=1,2,\ldots,n$, существует дифференциальное уравнение $a\in\widetilde{\mathcal{E}}^n$, у которого этот показатель сразу при всех $\varkappa$ из списка (3.2) не инвариантен относительно бесконечно малых возмущений.*

Доказательство теорем 1 и 2. Для заданных чисел $r,q\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $l\in\{3,4\}$ введем обозначение $n=2r+q+l$, а по выбранным числам $\mu_0>0$ и $\varepsilon>0$ определим отрезок $\mathrm{M}\equiv[\mu_0-\varepsilon;\mu_0+\varepsilon]\subset\mathbb{R}_+$. Рассмотрим семейства уравнений $\tilde{a}^l_{\overline{\mu}}\in\widetilde{\mathcal{E}}^l$, $\tilde{b}_{\overline{\mu}}\in\widetilde{\mathcal{E}}^n$, существование которых утверждается в лемме 6.

1. Сначала восстановим (см. [19, с. 86]) последнее семейство уравнений

$$z^{(n)}+\tilde{b}_1(t,\overline{\mu})z^{(n-1)}+\tilde{b}_{n-1}(t,\overline{\mu})\dot{z}+\tilde{b}_n(t,\overline{\mu})z=0,\quad \overline{\mu}\equiv(\mu_1,\mu_2,\ldots)\in\mathrm{M}^\infty,\quad t\in\mathbb{R}_+,\tag{4.3}$$

с неограниченными при $t\to+\infty$ коэффициентами

$$\tilde{b}_1(t,\overline{\mu})\;=-e^{-nt^2}\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \ldots & z_n\\ \dot{z}_1 & \dot{z}_2 & \dot{z}_3 & \ldots & \dot{z}_n\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ z_1^{(n-2)} & z_2^{(n-2)} & z_3^{(n-2)} & \ldots & z_n^{(n-2)}\\ z_1^{(n)} & z_2^{(n)} & z_3^{(n)} & \ldots & z_n^{(n)}\end{vmatrix}=o\big(t^{(n^2-n+4)/2}\big),\ldots,$$

$$\tilde{b}_{n-1}(t,\overline{\mu})=(-1)^{n+1}e^{-nt^2}\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \ldots & z_n\\ \ddot{z}_1 & \ddot{z}_2 & \ddot{z}_3 & \ldots & \ddot{z}_n\\ \dddot{z}_1 & \dddot{z}_2 & \dddot{z}_3 & \ldots & \dddot{z}_n\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ z_1^{(n)} & z_2^{(n)} & z_3^{(n)} & \ldots & z_n^{(n)}\end{vmatrix}=o\big(t^{(n^2+n)/2}\big),$$

$$\tilde{b}_n(t,\overline{\mu})\;=(-1)^{n}e^{-nt^2}\begin{vmatrix} \dot{z}_1 & \dot{z}_2 & \dot{z}_3 & \ldots & \dot{z}_n\\ \ddot{z}_1 & \ddot{z}_2 & \ddot{z}_3 & \ldots & \ddot{z}_n\\ \dddot{z}_1 & \dddot{z}_2 & \dddot{z}_3 & \ldots & \dddot{z}_n\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ z_1^{(n)} & z_2^{(n)} & z_3^{(n)} & \ldots & z_n^{(n)}\end{vmatrix}=o\big(t^{(n^2+n+2)/2}\big);$$

здесь определители Вронского фундаментальных систем решений

$$z_1(t,\overline{\mu})=e^{t^2}y_1(t,\overline{\mu}),\quad z_2(t,\overline{\mu})=e^{t^2}y_2(t,\overline{\mu}),\ldots,z_n(t,\overline{\mu})=e^{t^2}y_3(t,\overline{\mu})$$

семейств уравнений (4.3) и $b_{\overline{\mu}}\in\mathcal{E}^n$, фигурирующего в [10, лемма 4], в силу задачи 57 из [20, с. 126] связаны равенством

$$W_{z_1,z_2,\ldots,z_n}(t)=e^{nt^2}W_{y_1,y_2,\ldots,y_n}(t),\quad t\geq 0.$$

2. Справедливость теоремы 1 при $n=3$ реализована на уравнении $a=\tilde{a}^3_{\overline{\mu}}\in\widetilde{\mathcal{E}}^3$, построенном по лемме 3 при выборе постоянной последовательности параметров $\overline{\mu}\equiv\mu_0=1$.

Для доказательства теоремы 2 в случае $n = 3$ достаточно при каждом фиксированном индексе $i \in \{1, 2, 3\}$ сразу при всех $\varkappa$ из списка (3.2) предъявить значение $\mu_0 > 0$ и пару произвольных последовательностей $\overline{\mu}', \overline{\mu}'' \in \mathrm{M}^\infty$, удовлетворяющих условиям

$$\varkappa_{\underline{i}}(\tilde{a}^3_{\overline{\mu}'}) \neq \varkappa_{\underline{i}}(\tilde{a}^3_{\overline{\mu}''}), \quad \varkappa_{\overline{i}}(\tilde{a}^3_{\overline{\mu}'}) \neq \varkappa_{\overline{i}}(\tilde{a}^3_{\overline{\mu}''}),$$

$$\mu'_p < \mu_0 < \mu''_p, \quad \mu'_p = \mu_0 - \exp(-\lambda t_p^2), \quad \mu''_p = \mu_0 + \exp(-\lambda t_p^2), \quad p \in \mathbb{N};$$

здесь параметр $\lambda > 0$ выбирается достаточно большим. Из последнего условия в силу оценок коэффициентов семейства уравнений $\tilde{a}^3_{\mu}(t)$, проведенных в работе [8], будет вытекать условие

$$\lim_{t \to +\infty} \big(\tilde{a}^3_{\overline{\mu}''}(t) - \tilde{a}^3_{\overline{\mu}'}(t)\big) = 0, \tag{4.4}$$

которое и завершит доказательство неинвариантности главных значений сразу всех характеристик колеблемости знаков относительно бесконечно малых возмущений в точке $\tilde{a}^3_{\overline{\mu}''} \in \widetilde{\mathcal{E}}^3$.

Итак, с помощью леммы 3 предъявляем искомые значения μ_0:

— если $\mu_0 = 1$, то $\varkappa_1(\tilde{a}^3_{\overline{\mu}'}) = 2/3$ и $\varkappa_1(\tilde{a}^3_{\overline{\mu}''}) = 1/3$;

— если $\mu_0 = \mu^*$, то $\varkappa_{\underline{2}}(\tilde{a}^3_{\overline{\mu}'}) = 2/3$ и $\varkappa_{\underline{2}}(\tilde{a}^3_{\overline{\mu}''}) = 1/3$;

— если $\mu_0 = 1$, то $\varkappa_{\overline{2}}(\tilde{a}^3_{\overline{\mu}'}) = 1$ и $\varkappa_{\overline{2}}(\tilde{a}^3_{\overline{\mu}''}) = 2/3$;

— если $\mu_0 = \sqrt{2}$, то $\varkappa_3(\tilde{a}^3_{\overline{\mu}'}) = 1$ и $\varkappa_3(\tilde{a}^3_{\overline{\mu}''}) = 2/3$.

3. Теперь для построения полного набора примеров, гарантирующих справедливость теорем 1 и 2, установим, что для любых натуральных чисел $n > 3$, $q \le n - 3$ и любого уравнения $a \in \widetilde{\mathcal{E}}^3$, построенного в п. 2 настоящего доказательства по определенной последовательности $\overline{\mu}$, $\overline{\mu}'$ или $\overline{\mu}''$, существует уравнение $b \in \widetilde{\mathcal{E}}^n$, все показатели (3.2) которого удовлетворяют равенствам

$$\varkappa_{\overline{i}}(a) = \varkappa_{\overline{q+i}}(b), \quad \varkappa_{\underline{i}}(a) = \varkappa_{\underline{q+i}}(b), \quad i = 1, 2, 3. \tag{4.5}$$

Для этого по заданным числам n и q предварительно подберем такое $l \in \{3,\, 4\}$, чтобы число $n - q - l \ge 0$ было четным — обозначим его через $2r$.

а) В случае $l = 3$ по числам r, q и μ_0 для каждого из построенных выше демонстрационных примеров $\tilde{a}^3_{\overline{\mu}} \in \widetilde{\mathcal{E}}^3$ в строгом соответствии с леммой 6 построим новое уравнение $\tilde{b}_{\overline{\mu}} \in \widetilde{\mathcal{E}}^n$ с пространством решений (3.3).

Тогда, применяя утверждение 2) леммы 4, заключаем, что главные значения характеристик колеблемости знаков уравнения b', имеющего пространство решений $\mathcal{S}(b') \equiv Q \oplus L$ (где пространство Q составлено из решений с малыми характеристиками колеблемости знаков), будут удовлетворять равенствам (4.5). Согласно утверждению 1) той же леммы 4 эти неравенства не нарушатся и при переходе к полному пространству (3.3) решений уравнения $\tilde{b}_{\overline{\mu}}$, содержащему дополнительное слагаемое P (составленное из решений с большими характеристиками колеблемости знаков).

Отметим, что если два выбранных дифференциальных уравнения, соответствовавшие последовательностям $\overline{\mu}'$ и $\overline{\mu}''$, удовлетворяли равенству(4.4), то после перехода к новым уравнениям это равенство не нарушится благодаря оценкам коэффициентов (см. п. 1 настоящего доказательства) семейства уравнений $\tilde{b}_{\overline{\mu}} \in \widetilde{\mathcal{E}}^n$.

б) В случае $l = 4$ сначала в соответствии с леммой 5 по каждому выбранному дифференциальному уравнению третьего порядка построим уравнение четвертого порядка и только затем, рассуждая так же как в п. а), по нему с помощью леммы 6 построим семейство $\tilde{b}_{\overline{\mu}} \in \widetilde{\mathcal{E}}^n$.

Таким образом, всякое свойство главных значений характеристик колеблемости знаков, реализованное ранее в частном случае $n = 3$ для индекса $i = 1$ или $i = 2$ или $i = 3$, теперь окажется доказанным в общем случае $n \ge 3$, причем для всех значений $i = 1, \ldots, n-2$ или $i = 2, \ldots, n-1$ или $i = 3, \ldots, n$ соответственно.

Теоремы 1 и 2 полностью доказаны.

Заключение

В данной работе при любом $n \geq 3$ для каждого из главных значений показателей колеблемости и характеристических частот знаков построен пример дифференциального уравнения n-го порядка неинваринатности относительно бесконечно малых возмущений. Также установлены строгие неравенства между i-м нижним и верхним главными значениями характеристик колеблемости знаков при $i = 2, 3, \ldots, n-1$. Интересным остается вопрос о возможности реализации установленных свойств и для остальных показателей колеблемости. Кроме того, вопрос об устойчивости главных значений показателей колеблемости линейных однородных дифференциальных уравнений высших порядков относительно равномерно малых возмущений остается открытым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Сергеев И.Н.** Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294.
2. **Сергеев И.Н.** Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Серия математическая. 2012. Т. 76, № 1. С. 149–172. https://doi.org/10.4213/im5035
3. **Сергеев И.Н.** Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2015. Вып. 2 (46). С. 171–183.
4. **Быков В.В.** О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 4. С. 419–425. https://doi.org/10.1134/S0374064116040026
5. **Войделевич А. С.** О спектрах верхних частот Сергеева линейных дифференциальных уравнений // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2019. № 1. С. 28–32. https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-28-32
6. **Сергеев И.Н.** О показателях колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальных систем, задающих повороты плоскости // Вестн. Москов. ун-та Сер. 1. Математика. Механика. 2019. № 1. С. 21–26. https://doi.org/10.3103/S0027132219010042
7. **Сташ А.Х.** О разрывности крайних показателей колеблемости на множестве линейных однородных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2023. № 1. С. 78–109. https://doi.org/10.21638/11701/spbu35.2023.106
8. **Сташ А.Х., Артисевич А.Е.** О некоторых свойствах главных значений показателей колеблемости линейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2025. Т. 35, № 2. С. 281–295. https://doi.org/10.35634/vm250208
9. **Сергеев И.Н.** Свойства характеристических частот линейных уравнений произвольного порядка // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 2013. Вып. 29. С. 414–442.
10. **Сергеев И.Н.** Об управлении решениями линейного дифференциального уравнения // Вестн. Москов. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2009. № 3. С. 25–33.
11. **Горицкий А.Ю., Фисенко Т.Н.** Характеристические частоты нулей суммы двух гармонических колебаний // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 4. С. 479–486.
12. **Сташ А.Х.** Свойства полных и векторных частот знака решений линейных автономных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 10. С. 1418–1422. https://doi.org/10.1134/S0374064114100203
13. **Сташ А.Х.** О бесконечных спектрах показателей колеблемости линейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Известия вузов. Математика. 2024. № 4. С. 47–66. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2024-4-47-66
14. **Смоленцев М.В.** Пример периодического дифференциального уравнения третьего порядка, спектр частот которого содержит отрезок // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 10. С. 1413–1417. https://doi.org/10.1134/S0374064114100197
15. **Сташ А.Х.** Об управлении спектрами верхних сильных показателей колеблемости знаков, нулей и корней дифференциальных уравнений третьего порядка // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 5. С. 588–595. https://doi.org/10.31857/S0374064123050035

16. **Сташ А.Х., Артисевич А.Е.** Существование бесконечных всюду разрывных спектров верхних показателей колеблемости знаков, нулей и корней дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестн. Москов. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2023, № 5. С. 16–22. https://doi.org/10.55959/MSU0579-9368-1-64-5-3
17. **Барабанов Е.А., Войделевич А.С.** К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. I // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 10. С. 1302–1320. https://doi.org/10.1134/S0374064116100034
18. **Барабанов Е.А., Войделевич А.С.** К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. II //Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 12. С. 1595–1609. https://doi.org/10.1134/S0374064116120013
19. **Филиппов А.Ф.** Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004. 240 с.
20. **Полиа Г., Сегё Г.** Задачи и теоремы из анализа. Ч.2. М., 1978. 432 с.

Поступила 8.09.2025
После доработки 27.09.2025
Принята к публикации 6.10.2025

Артисевич Анжела Евгеньевна
научный сотрудник
Адыгейский государственный университет
г. Майкоп
e-mail: artisevichangela@gmail.com

REFERENCES

1. Sergeev I.N. Definition and properties of characteristic frequencies of a linear equation. *J. Math. Sci.*, 2006, vol. 135, no. 1, pp. 2764–2793. https://doi.org/10.1007/s10958-006-0142-6
2. Sergeev I.N. Oscillation and wandering characteristics of solutions of a linear differential systems. *Izv. Math.*, 2012, vol. 76, no. 1, pp. 139–162. https://doi.org/10.1070/IM2012v076n01ABEH002578
3. Sergeev I.N. The complete set of relations between the oscillation, rotation and wandering indicators of solutions of differential systems. *Izv. In-ta Mat. Inf. Udm. Gos. Univ.*, 2015, no. 2 (46), pp. 171–183 (in Russian).
4. Bykov V.V. On the baire classification of Sergeev frequencies of zeros and roots of solution of linear differential equation. *Diff. Equat.*, 2016, vol. 52, no. 4, pp. 413–420. https://doi.org/10.1134/S0012266116040029
5. Voidelevich A.S. On spectra of upper Sergeev frequencies of linear differential equation. *J. Belarus. Gos. Univ. Mat. Inf.*, 2019, no. 1, pp. 28–32 (in Russian).
6. Sergeev I.N. Oscillation, rotatability, and wandering characteristic indicators for differential systems determining rotations of plane. *Moscow Univ. Math. Bull.*, 2019, vol. 74, pp. 20–24. https://doi.org/10.3103/S0027132219010042
7. Stash A.Kh. On the discontinuity of extreme exponents of oscillation on a set of linear homogeneous differential systems. *Diff. Uravn. i processy upravleniya*, 2023, no. 1, pp. 78–109 (in Russian).
8. Stash A.Kh., Artisevich A.E. On some properties of the main values of the oscillation exponents of signs of linear differential equations of the third order. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2025, vol. 35, no. 2, pp. 281–295 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm250208
9. Sergeev I.N. Properties of characteristic frequencies of linear equations of arbitrary order. *J. Math. Sci.*, 2014, vol. 197, no. 3, pp. 410–426. https://doi.org/10.1007/s10958-014-1723-4
10. Sergeev I.N. Controlling solutions to a linear differential equation. *Vestn. Moskov. Universiteta*, Ser. 1. Matematika. Mekhanika, 2009, no. 3, pp. 25–33 (in Russian).
11. Goritskii A.Y., Fisenko T.N. Characteristic frequencies of zeros of a sum of two harmonic oscillations. *Diff. Equat.*, 2012, vol. 48, no. 4, pp. 486–493. https://doi.org/10.1134/S0012266112040039
12. Stash A.Kh. Properties of complete and vector sign frequencies of solutions of linear autonomous differential equations. *Diff. Equat.*, 2014, vol. 50, no. 10, pp. 1413–1417. https://doi.org/10.1134/S0012266114100206

13. Stash A.Kh. On infinite spectra of oscillation exponents of third-order linear differential equations. *Russ. Math.*, 2024, vol. 68, no. 4, pp. 42–59. https://doi.org/10.3103/S1066369X24700270
14. Smolentsev M.V. Example of a third-order periodic differential equation whose frequency spectrum contains a closed interval. *Diff. Equat.*, 2014, vol. 50, no. 10, pp. 1408–1412. https://doi.org/10.1134/S001226611410019X
15. Stash A.Kh. On the control of the spectra of upper strong oscillation exponents of signs, zeros, and roots of third-order differential equations. *Diff. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 5, pp. 597–605. https://doi.org/10.1134/S0012266123050038
16. Stash A.Kh., Artisevich A.E. Existence of infinite, everywhere discontinuous spectra of upper exponents of oscillation of signs, zeros, and roots of third-order differential equations. *Moscow Univ. Math. Bull.*, 2023, vol. 78, no. 5, pp. 223–229. https://doi.org/10.3103/S0027132223050054
17. Barabanov E.A., Voidelevich A.S. Remark on the theory of Sergeev frequencies of zeros, signs and roots for solution of linear differential equation. I. *Diff. Equat.*, 2016, vol. 52, no. 10, pp. 1249–1267. https://doi.org/10.1134/S0012266116100013
18. Barabanov E.A., Voidelevich A.S. Remark on the theory of Sergeev frequencies of zeros, signs and roots for solution of linear differential equation. II. *Diff. Equat.*, 2016, vol. 52, no. 12, pp. 1523–1538. https://doi.org/10.1134/S0012266116120016
19. Filippov A.F. *Vvedeniye v teoriyu differentsial'nykh uravneniy* [Introduction to the theory of differential equations]. Moscow, Editorial URSS, 2004, 240 p. ISBN: 5-354-00416-0 .
20. Pólya G., Szegö G. *Aufgaben und lehrsätze aus der analysis*, vol. 2. NY, Dover Publ., 1945, 440 p. Translated to Russian under the title *Zadachi i teoremy iz analiza*, Moscow, Nauka Publ., 1978, vol. 2, 432 p.

Received September 8, 2025
Revised September 27, 2025
Accepted October 6, 2025

Funding Agency: The work was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the state assignment No. 075-03-2024-074/5 for the project "Study of asymptotic characteristics of the oscillation of differential equations and systems, as well as optimization methods".

Angela Evgenievna Artisevich, Adyghe state University, Maykop, 385000 Russia,
e-mail: artisevichangela@gmail.com .

Cite this article as: A. E. Artisevich. On the mobility of the main values of the oscillation exponents of the signs of linear differential equations under infinitesimal perturbations. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 4, pp. 26–38.