Том 31 № 4 2025

УДК 515.124.3

О R_δ-СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА $\alpha \in (1,2)$ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

Г. Г. Петросян

В настоящей работе исследуется топологическая структура множества решений задачи Коши для полулинейных дифференциальных включений дробного порядка $\alpha \in (1,2)$ в банаховых пространствах. Предполагается, что линейная часть включений является линейным замкнутым оператором, порождающим сильно непрерывное и равномерно ограниченное семейство косинус оператор-функций. Нелинейная часть представлена полунепрерывным сверху многозначным оператором типа Каратеодори. Устанавливается, что множество решений задачи является R_δ-множеством. Работа имеет следующую структуру. После введения приводятся необходимые предварительные сведения из теорий многозначных отображений, мер некомпактности, дробного анализа, а также семейства косинус оператор-функций. Третий раздел посвящен вспомогательным результатам. В четвертом разделе доказываются ряд лемм и главное утверждение в работе (теорема 2). В заключительном разделе в качестве примера применения полученных результатов рассматривается обобщенная периодическая задача для полулинейных дифференциальных включений дробного порядка $\alpha \in (1,2)$.

Ключевые слова: топологическая структура, R_δ-множество, дифференциальное включение, дробная производная, семейство косинус оператор-функций, многозначное отображение, уплотняющий мультиоператор.

G. G. Petrosyan. On the R_δ-structure of the solution set of the Cauchy problem for semilinear differential inclusions of fractional order $\alpha \in (1,2)$ in Banach spaces.

In this paper, we study the topological structure of a solution set to the Cauchy problem for semilinear differential inclusions of fractional order $\alpha(1,2)$ in Banach spaces. It is assumed that the linear part of the inclusions is a linear closed operator generating a strongly continuous and uniformly bounded family of cosine operator functions. The nonlinear part is represented by a upper semicontinuous multivalued operator of Caratheodory type. It is established that the set of solutions to the problem is an R_δ-set.The paper has the following structure. After the introduction, we present the necessary preliminary information from the theories of multivalued mappings, measures of noncompactness, fractional analysis, and the family of cosine operator functions. The third section is devoted to auxiliary results. In the next section, a number of lemmas and the main result of the paper (Theorem 2) are proved. In the final section, as an example of applying the obtained results, a generalized periodic problem for semilinear differential inclusions of fractional order $\alpha \in (1,2)$ is considered.

Keywords: topological structure, R_δ-set, differential inclusion, fractional derivative, family of cosine operator functions, multivalued map, condensing multioperator.

MSC: 34G25, 34A08, 34A60

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-4-260-280

1. Введение

В последние десятилетия происходит интенсивное развитие дробного анализа и теории дифференциальных уравнений и включений дробного порядка. Актуальность данных разделов подтверждается большим количеством приложений в математической физике, биологии, экономике, инженерии, экологии и других областях естествознания (см., например, монографии [1;2], статью [3]). Для дифференциальных уравнений и включений с дробной производной из интервала $(0,1)$ создана достаточно целостная теория. Различные начальные и краевые

[1]Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 25-11-00056), https://rscf.ru/project/25-11-00056/.

задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка $\alpha \in (0,1)$ были рассмотрены в работах [4–11] (см. также ссылки в них). Однако изучение задач для дифференциальных включений дробного порядка из интервала $(1,2)$ не получило еще широкого распространения, несмотря на не меньшую их эффективность и актуальность.

При исследовании краевых задач для дифференциальных уравнений и включений важную роль играют топологические свойства множества решений. В частности, если множество решений задачи Коши обладает R_δ-структурой (см. определение 7), то с помощью оператора сдвига вдоль траекторий решений можно эффективно решать ряд краевых задач, в том числе периодические или антипериодические. Отметим, что впервые R_δ-свойство интегральной воронки задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения в конечномерном пространстве было изучено в работе Н. Ароншайна [12]. В дальнейшем этот результат был развит в различных направлениях, в том числе и на дифференциальные включения (см., например, работы Л. Гурневича [13], В. В. Филиппова [14], а также монографии [15–17] и имеющуюся там библиографию). Результаты настоящей работы были опубликованы в виде краткого сообщения (без доказательств) в журнале “Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления” [18].

В работе [19] была рассмотрена в сепарабельном банаховом пространстве E следующая задача Коши:

$$ {}^C D_0^\alpha x(t) \in Ax(t) + F(t, x(t)), \quad t \in [0,a], \tag{1.1} $$

$$ x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \tag{1.2} $$

где ${}^C D_0^\alpha$ — дробная производная Герасимова—Капуто порядка $1 < \alpha < 2$, A — линейный оператор, порождающий равномерно ограниченное семейство косинус оператор-функций $\{C(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, $F : [0,a] \times E \multimap E$ — многозначное отображение с выпуклыми компактными значениями, а $x_0, x_1 \in E$ наперед заданы. Для данной задачи была установлена непрерывная зависимость множества решений от начальных данных и параметра. В настоящей работе мы более детально опишем топологическую структуру множества решений для задачи (1.1), (1.2). В частности, мы покажем, что множество решений задачи является R_δ-множеством. В заключительном разделе приводится пример приложения полученных результатов для обобщенной периодической задачи.

2. Предварительные сведения

Пусть E – банахово пространство. Кратко напомним определения.

Дробным интегралом порядка $\alpha > 0$ функции $g\colon [0,a] \to E$ называется функция $I_0^\alpha g(t) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s)\,ds$, где Γ — гамма-функция Эйлера $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ (см. [1; 2]). *Дробной производной Герасимова — Капуто порядка $\alpha \geq 0$ функции $g \in C^n([0,a];E)$* называется функция ${}^C D_0^\alpha g$ следующего вида:

$$ {}^C D_0^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} g^{(n)}(s)\,ds, \quad n = [\alpha] + 1. $$

Семейство ограниченных операторов $\{C(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ в банаховом пространстве E называется *сильно непрерывным семейством косинус оператор-функций* (см., например, [20]), если: (1) $C(0) = I$; (2) $C(s+t) + C(s-t) = 2C(s)C(t)$ для всех $t, s \in \mathbb{R}$; (3) отображение $t \to C(t)x$ непрерывно для всех $x \in E$.

Семейством сильно непрерывных синус оператор-функций, ассоциированным с семейством косинус оператор-функций $\{C(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, называют семейство операторов $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ таких, что

$$S(t)x = \int\limits_0^t C(s)xds, \quad x \in E, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Оператор A порождает семейство косинус оператор-функций $\{C(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, если

$$Ax = \frac{d^2}{dt^2}C(t)x|_{t=0}$$

для всех $x \in D(A)$, для которых последнее выражение корректно определено.

Многозначные отображения и меры некомпактности. Рассмотрим некоторые определения (см. работы [17; 21] и [4; 5; 19]). Введем следующие обозначения:

- $P(E) = \{A \subseteq E : A \neq \varnothing\}$;
- $Pb(E) = \{A \in P(E) : A$ — ограничено$\}$;
- $Pv(E) = \{A \in P(E) : A$ — выпукло$\}$;
- $K(E) = \{A \in P(E) : A$ — компактно$\}$;
- $Kv(E) = Pv(E) \cap K(E)$.

Определение 1 (см., например, [17]). Пусть $(\mathcal{A}, \geq)$ — частично упорядоченное множество. Функция $\beta : Pb(E) \to \mathcal{A}$ называется мерой некомпактности (далее МНК) в E, если для любого $\Omega \in Pb(E)$ выполняется $\beta(\overline{\mathrm{co}}\,\Omega) = \beta(\Omega)$, где $\overline{\mathrm{co}}\,\Omega$ обозначает замыкание выпуклой оболочки Ω.

Примером вещественной меры некомпактности в пространстве E является *мера некомпактности Хаусдорфа*:

$$\chi_E(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0, \text{ для которых } \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть}\}.$$

Введем в пространстве $C([0, a]; E)$ меру некомпактности ν со значениями в конусе $\mathbb{R}^2_+$. Для ограниченного подмножества $\Omega \subset C([0, a]; E)$ определим ν следующим образом: $\nu(\Omega) = \big(\psi(\Omega), \mathrm{mod}_C(\Omega)\big)$, где ψ — модуль послойной некомпактности $\psi(\Omega) = \sup_{t\in[0,a]} \chi_E(\{y(t) \colon y \in \Omega\})$, mod_C — модуль равностепенной непрерывности:

$$\mathrm{mod}_C(\Omega) = \lim_{\delta\to 0} \sup_{y\in\Omega} \max_{|t_1-t_2|\leq\delta} \|y(t_1) - y(t_2)\|.$$

Пусть X — метрическое пространство.

Определение 2. Многозначное отображение (мультиотображение) $\mathcal{F} : X \to P(E)$ называется:

- полунепрерывным сверху (п.н.св.) в точке $x \in X$, если для любого открытого множества $V \subset E$ такого, что $\mathcal{F}(x) \subset V$, существует окрестность $U(x)$ точки x такая, что $\mathcal{F}(U(x)) \subset V$;
- полунепрерывным снизу (п.н.сн.) в точке $x \in X$, если для любого открытого множества $V \subset E$ такого, что $\mathcal{F}(x) \cap V \neq \varnothing$, существует окрестность $U(x)$ точки x такая, что $\mathcal{F}(x') \cap V \neq \varnothing$ для любого $x' \in U(x)$;
- непрерывным в точке $x \in X$, если оно п.н.св. и п.н.сн. в x.

Определение 3. Мультиотображение $\mathcal{F} : X \subseteq E \to K(E)$ называется уплотняющим относительно МНК β (β – уплотняющим), если для любого ограниченного множества $\Omega \subseteq X$, не являющегося относительно компактным, выполнено $\beta(\mathcal{F}(\Omega)) \ngeq \beta(\Omega)$.

Определение 4. Мультифункция $G : [0, a] \to K(E)$, для $p \geq 1$, называется:

- L^p-интегрируемой, если она допускает L^p-интегрируемое сечение по Бохнеру, т. е. существует функция $g \in L^p([0, a]; E)$ такая, что $g(t) \in G(t)$ для п. в. $t \in [0, a]$;

- L^p-интегрально ограниченной, если существует функция $\xi \in L^p([0,a])$ такая, что

$$\|G(t)\| := \sup\{\|g(t)\|_E : g(t) \in G(t)\} \leq \xi(t),$$

  для п.в. $t \in [0,a]$.

Множество всех L^p- интегрируемых сечений мультифункции $G : [0,a] \to K(E)$ обозначим через $\mathcal{S}^p_G$.

О п р е д е л е н и е 5. Последовательность функций $\{\xi_n\} \subset L^p([0,a];E)$ называется L^p-полукомпактной, если она L^p-интегрально ограничена и множество $\{\xi_n(t)\}$ относительно компактно в E для п.в. $t \in [0,a]$.

Лемма 1 [17, предложение 4.2.1]. *Всякая L^p-полукомпактная последовательность $\{\xi_n\}$ слабо компактна в $L^1([0,a];E)$.*

Лемма 2 [17, теорема 4.2.1]. *Пусть последовательность функций $\{\xi_n\} \subset L^1([0,a];E)$ является L^1-ограниченной и*

$$\chi_E(\{\xi_n\}(t)) \leq v(t) \quad \text{п.в.} \quad t \in [0,a] \tag{2.1}$$

для всех $n = 1,2,\ldots$, где $v \in L^1_+([0,a])$. Тогда для любого $\delta > 0$ существуют компактное множество $K_\delta \subset E$, множество $m_\delta \subset [0,a]$ с мерой Лебега $meas(m)_\delta < \delta$ и множество функций $G_\delta \subset L^1([0,a];E)$ со значениями в K_δ такие, что для каждого $n \geq 1$ существует функция $b_n \in G_\delta$, для которой

$$\|\xi_n(t) - b_n(t)\|_E \leq 2v(t) + \delta, \quad t \in [0,a] \setminus m_\delta.$$

Более того, последовательность $\{b_n\}$ может быть выбрана так, что $b_n \equiv 0$ на m_δ, и эта последовательность слабо компактна.

Лемма 3 [17, теорема 4.2.3]. *Пусть E — сепарабельное банахово пространство и $G\colon [0,\tau] \to K(E)$ — L^1-интегрируемая и L^1-интегрально ограниченная мультифункция, такая что*

$$\chi_E(G(t)) \leq v(t) \quad \text{п.в.} \quad t \in [0,\tau],$$

где χ_E — МНК Хаусдорфа в E и $v(\cdot) \in L^1_+([0,\tau])$. Тогда $\chi_E\Big(\int_0^\tau G(s)\,ds\Big) \leq \int_0^\tau v(s)\,ds$.

Если G сильно измерима и L^p интегрально ограничена, то она L^p интегрируема. Для L^p-интегрируемой мультифункции G определен многозначный интеграл

$$\int_0^t G(s)ds := \Big\{\int_0^t g(s)ds : g \in \mathcal{S}^p_G\Big\},$$

для любого $t \in [0,a]$.

О п р е д е л е н и е 6. Метрическое пространство X называется стягиваемым, если существуют точка $x_0 \in X$ и непрерывное отображение (гомотопия) $h : [0,1] \times X \to X$, такие что $h(0,x) = x$ и $h(1,x) = x_0$ для всех $x \in X$.

Очевидно, что выпуклые и звездообразные множества стягиваемы.

О п р е д е л е н и е 7 (см., например, [22]).] Компактное метрическое пространство A называется R_δ-множеством, если существует убывающая последовательность компактных стягиваемых множеств $\{A_n\}$, таких что

$$A = \bigcap_{n\geq 1} A_n.$$

Отметим, что R_δ-множество в общем случае не является стягиваемым (см. пример в [15]).

3. Вспомогательные результаты

Будем полагать, что мультиотображение $F : [0,a] \times E \to Kv(E)$ удовлетворяет следующим условиям:

$(F1)$ для каждого $x \in E$ мультифункция $F(\cdot, x) : [0,a] \to Kv(E)$ допускает измеримое сечение;

$(F2)$ для п.в. $t \in [0,a]$ мультиоператор $F(t, \cdot) : E \to Kv(E)$ п.н.св.;

$(F3)$ для каждого $r > 0$ существует функция $\omega_r \in L^\infty([0,a])$ такая, что для каждого $x \in E$ с $\|x\|_E \le r$, мы имеем

$$\|F(t,x)\|_E \le \omega_r(t),$$

для п.в. $t \in [0,a]$;

$(F4)$ существует функция $\mu \in L^\infty([0,a])$ такая, что для каждого ограниченного множества $Q \subset E$ мы имеем

$$\chi_E(F(t,Q)) \le \mu(t)\chi_E(Q),$$

для п.в. $t \in [0,a]$, где χ_E — мера некомпактности Хаусдорфа в E.

На оператор A мы наложим условие

(A) $A : D(A) \subseteq E \to E$ — линейный замкнутый оператор, порождающий равномерно ограниченное и сильно непрерывное семейство косинус оператор-функций $\{C(t)\}_{t\ge 0}$.

Обозначим через $M = \sup\{\|C(t)\|; t \in [0;+\infty)\}$.

Задача (1.1), (1.2) разрешается по следующей схеме. Для $x \in C([0,\tau];E), \tau \in (0,a]$, рассматривается мультифункция

$$\Phi_F : [0,\tau] \to Kv(E), \quad \Phi_F(t) = F(t, x(t)).$$

Из условий $(F1)$–$(F3)$ следует (см., например, [17, теорема 1.3.5]), что мультифункция Φ_F является L^p-интегрируемой для всех $p \ge 1$. Затем вводится в рассмотрение суперпозиционный мультиоператор $\mathcal{P}_F^\infty : C([0,\tau];E) \multimap L^\infty([0,\tau];E)$, определенный как

$$\mathcal{P}_F^\infty(x) = \mathcal{S}_{\Phi_F}^\infty.$$

Интегральным решением задачи Коши (1.1), (1.2) *на промежутке* $[0,\tau]$, $\tau \in (0,a]$, называется функция $x \in C([0,\tau];E)$, которая может быть представлена как

$$x(t) = \mathcal{G}(t)x_0 + \mathcal{K}(t)x_1 + \int\limits_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)f(s)ds, \quad t \in [0,\tau],$$

где $f \in \mathcal{P}_F^\infty(x)$, $q = \dfrac{\alpha}{2}$ и

$$\mathcal{G}(t) = \int\limits_0^\infty \xi_q(\theta)C(t^q\theta)d\theta, \quad \mathcal{K}(t) = \int\limits_0^t \mathcal{G}(s)ds, \quad \mathcal{T}(t) = q\int\limits_0^\infty \theta\xi_q(\theta)S(t^q\theta)d\theta,$$

$$\xi_q(\theta) = \frac{1}{q}\theta^{-1-\frac{1}{q}}\Psi_q(\theta^{-1/q}), \quad \Psi_q(\theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\theta^{-qn-1}\frac{\Gamma(nq+1)}{n!}\sin(n\pi q), \quad \theta \in (0,+\infty).$$

З а м е ч а н и е 1 (см. [3, с. 30, формула (A.40)]).

$$\xi_q(\theta) \ge 0, \quad \int\limits_0^\infty \xi_q(\theta)\,d\theta = 1, \quad \int\limits_0^\infty \theta\xi_q(\theta)\,d\theta = \frac{1}{\Gamma(q+1)}.$$

Лемма 4 [23, лемма 3.2]. *Оператор-функции $\mathcal{G}$, $\mathcal{K}$ и $\mathcal{T}$ удовлетворяют следующим условиям:*

1) *для каждого $t \in [0,a]$, $\mathcal{G}(t)$, $\mathcal{K}(t)$ и $\mathcal{T}(t)$ — линейные операторы, более того, для каждого $x \in E$ справедливы оценки*

$$\|\mathcal{G}(t)x\|_E \le M\,\|x\|_E\,, \quad \|\mathcal{K}(t)x\|_E \le M\,\|x\|_E\, t, \quad \|\mathcal{T}(t)x\|_E \le \frac{M}{\Gamma(2q)}\,\|x\|_E\, t^q;$$

2) *оператор-функции $\mathcal{G}(\cdot), \mathcal{K}(\cdot)$ и $t^{q-1}\mathcal{T}(\cdot)$ сильно непрерывны, т.е. функции $t \in [0,a] \to \mathcal{G}(t)x$, $t \in [0,a] \to \mathcal{K}(t)x$ и $t \in [0,a] \to t^{q-1}\mathcal{T}(t)x$ непрерывны для каждого $x \in E$.*

Введем в рассмотрение интегральный оператор $S : L^\infty([0,\tau];E) \to C([0,\tau];E)$, заданный по формуле

$$S(\phi)(t) = \int_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)\phi(s)ds.$$

Разрешимость задачи (1.1), (1.2) во многом обеспечивается за счет следующих утверждений относительно оператора S.

Лемма 5 [24, лемма 4]. *Пусть последовательность $\{\eta_n\} \subset L^p([0,\tau];E)$, где $1/q < p \le \infty$, ограничена и $\eta_n \rightharpoonup \eta_0$ в $L^1([0,\tau];E)$. Тогда $S(\eta_n) \rightharpoonup S(\eta_0)$ в $C([0,\tau];E)$.*

Лемма 6 [24, лемма 6]. *Оператор S обладает свойствами*

(S_1) *если $1/q < p < \infty$, то существует константа $C \ge 0$ такая, что*

$$\|S(\xi)(t) - S(\eta)(t)\|_E \le C \int_0^t \|\xi(s) - \eta(s)\|_E\, ds, \quad \xi, \eta \in L^1([0,\tau];E);$$

(S_2) *для каждого компактного множества $N \subset E$ и ограниченной последовательности $\{\eta_n\} \subset L^1([0,\tau];E)$ такой, что $\{\eta_n(t)\} \subset N$ для п.в. $t \in [0,\tau]$, слабая сходимость $\eta_n \rightharpoonup \eta_0$ в $L^1([0,\tau];E)$ влечет сходимость $S(\eta_n) \to S(\eta_0)$ в $C([0,\tau];E)$.*

В дальнейшем нам будет полезна следующая лемма.

Лемма 7. *Пусть $\{\xi_n\}$ является L^∞-полукомпактной последовательностью в пространстве $L^\infty([0,\tau];E)$. Тогда множество $\{S\xi_n\}$ компактно в пространстве $C([0,\tau];E)$.*

Доказательство. Ввиду оценки для оператор-функций $\mathcal{T}(t)$ из первого пункта леммы 4 мы получаем, что последовательность $\{S\xi_n\}$ ограничена. В то же время из леммы 2 следует, что для любого $\delta > 0$ существуют компактное множество $K_\delta \subset E$, множество $m_\delta \subset [0,\tau]$ с лебеговой мерой $meas(m_\delta) < \delta$ и множество функций $\Upsilon_\delta \subset L^1([0,\tau];E)$ со значениями в K_δ, такие что для всех $n \ge 1$ существуют функции $b_n \in \Upsilon_\delta$, для которых

$$\|\xi_n(t) - b_n(t)\|_E \le \delta, \quad t \in [0,\tau] \setminus m_\delta.$$

Положим, что каждая функция b_n равна нулю на m_δ, тогда мы получим функции $\overline{b}_n \in L^\infty([0,\tau];E)$, удовлетворяющие оценке

$$\|\overline{b}_n(t)\| \le v(t) + \delta \quad \text{п.в.} \quad t \in [0,\tau],$$

где $v(\cdot)$ — функция из формулы (2.1).

Применяя лемму 1 и условие (S_2) из леммы 6, мы получаем компактность последовательности $\{S\overline{b}_n\}$ в пространстве $C([0,\tau];E)$.

Теперь, снова используя оценку для оператор-функций $\mathcal{T}(t)$ из первого пункта леммы 4, мы для всех $t \in [0,\tau]$ и $n = 1, 2, \ldots,$ имеем

$$\|S\xi_n(t) - S\overline{b}_n(t)\| = \left\| \int_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)(\xi_n(s) - \overline{b}_n(s))\, ds \right\|$$

$$\leq \left\| \int_{[0,t]\cap m_\delta} (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)\xi_n(s)\, ds \right\| + \frac{M\delta}{\Gamma(2q)} \int_{[0,t]\setminus m_\delta} (t-s)^{2q-1}\, ds$$

$$\leq \frac{M}{\Gamma(2q)}\left(\int_{[0,t]\cap m_\delta} (t-s)^{2q-1} v(s)\, ds + \delta \int_0^t (t-s)^{2q-1}\, ds \right)$$

$$\leq \frac{M}{\Gamma(2q)}\left(\|v\|_{L^\infty} \int_{[0,t]\cap m_\delta} (t-s)^{2q-1}\, ds + \frac{\delta\tau^{2q}}{2q} \right).$$

Для заданного $\varepsilon > 0$ возьмем $\kappa > 0$ таким, что $\dfrac{\kappa^{2q}}{2q} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, и подберем $\delta > 0$ настолько малым, что $\dfrac{\delta\tau^{2q}}{2q} < \varepsilon$ и $\dfrac{\delta}{\kappa^{2q}} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда, если $t \leq \kappa$, мы имеем

$$\int_{[0,t]\cap m_\delta} (t-s)^{2q-1}\, ds \leq \frac{\kappa^{2q}}{2q} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если же $t > \kappa$, то справедлива оценка

$$\int_{[0,t]\cap m_\delta} (t-s)^{2q-1}\, ds \leq \int_{[0,t-\kappa]\cap m_\delta} (t-s)^{2q-1}\, ds + \int_{t-\kappa}^t (t-s)^{2q-1}\, ds \leq \frac{\delta}{\kappa^{2q}} + \frac{\kappa^{2q}}{2q} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, мы получаем

$$\|S\xi_n - S\overline{b}_n\|_C \leq \frac{M}{\Gamma(2q)}(\|v\|_{L^\infty} + 1)\varepsilon,$$

т. е. последовательность $\{S\overline{b}_n\}$ образует компактную $\dfrac{M}{\Gamma(2q)}(\|v\|_{L^\infty} + 1)\varepsilon$-сеть для $\{S\xi_n\}$, что и доказывает компактность последовательности $\{S\xi_n\}$.

Лемма доказана.

Далее вводится в рассмотрение многозначное отображение $G : C([0,\tau]; E) \multimap C([0,\tau]; E)$, заданное как

$$G(x) = g_0 + S \circ \mathcal{P}_F^\infty(x), \quad t \in [0,\tau],$$

где оператор g_0 определен по формуле $g_0(t) = \mathcal{G}(t)x_0 + \mathcal{K}(t)x_1$.

Функция $x \in C([0,\tau]; E)$ является интегральным решением задачи (1.1), (1.2) на промежутке $[0,\tau]$ тогда и только тогда, когда она является неподвижной точкой мультиоператора G, т. е. $x \in G(x)$.

Если выполняются условия (A), $(F1)$–$(F4)$, то можно доказать локальную теорему существования решений задачи (1.1), (1.2). Для доказательства глобальной теоремы существования решений необходимо условие $(F3)$ заменить на

$(F'3)$ существует функция $\zeta \in L_+^\infty([0,a])$ такая, что

$$\|F(t,x)\|_E \leq \zeta(t)(1 + \|x\|_E) \text{ для п.в. } t \in [0,a].$$

Из результатов работы [25] (теоремы 1 и 2) вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *При выполнении условий* (A), $(F1)$, $(F2)$, $(F'3)$, $(F4)$ *множество решений задачи* (1.1), (1.2) *является непустым компактным подмножеством пространства* $C([0,a];E)$.

О п р е д е л е н и е 14. Будем говорить, что задача (1.1), (1.2) удовлетворяет условию (Q), если

$(Q1)$ $\Sigma^F_{x_0,x_1}[0,a]$ — непустое компактное подмножество $C([0,a];E)$;

$(Q2)$ выполняется условие продолжимости решений

$$\Sigma^F_{x_0,x_1}[0,\tau] = \Sigma^F_{x_0,x_1}[0,a]|_{[0,\tau]}$$

для любого $\tau \in (0,a]$.

З а м е ч а н и е 2. В работе [19, теорема 2] было доказано, что при выполнении условий (A), $(F1)$, $(F2)$, $(F'3)$, $(F4)$ справедливо и условие (Q).

4. Основные результаты

Наша цель в настоящей работе — более детально изучить топологическую структуру множества $\Sigma^F_{x_0,x_1}[0,a]$. Предположим, что условия (A), $(F1)$–$(F4)$ и (Q) выполнены.

Рассмотрим компактное множество

$$Z = \{(t,y)|\ \exists\ x \in \Sigma^F_{x_0,x_1}[0,a],\ x(t) = y\}$$

в метрическом пространстве $[0,a] \times E$. Для $r > 0$ определим функцию Урысона $\kappa\colon [0,a]\times E \to [0,1]$:

$$\kappa(t,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (t,y) \in \overline{W}_r(Z), \\ 0, & \text{если } (t,y) \notin W_{2r}(Z), \end{cases}$$

где $\overline{W}_\varepsilon$ обозначает замыкание ε-окрестности множества. Рассмотрим мультиотображение $\widetilde{F} : [0,a] \times E \to Kv(E)$, определенное как

$$\widetilde{F}(t,x) = \kappa(t,y)F(t,x). \tag{4.1}$$

В дальнейшем нам понадобится следующий вспомогательный результат, проверка которого повторяет доказательство леммы 5.1.2 из [17].

Лемма 8. *При выполнении условий* (A), $(F1)$–$(F4)$ *и* (Q) *мультиоператор* $\widetilde{F} : [0,a]\times E \to Kv(E)$ *также подчиняется условиям* $(F1)$–$(F4)$. *Более того,*

$$\Sigma^{\widetilde{F}}_{x_0,x_1}[0,a] = \Sigma^F_{x_0,x_1}[0,a].$$

Итак, переопределив мультиотображение F по формуле (4.1) и применив лемму 8, мы можем без ограничения общности предположить, что F удовлетворяет следующему *глобальному условию интегральной ограниченности*:

$(F''3)$

$$\|F(t,x)\|_E \le \gamma(t) \quad \text{для п.в. } t \in [0,a], \quad x \in E,$$

для заданной функции $\gamma \in L^\infty_+([0,a])$.

Лемма 9. *При выполнении вышеуказанных условий, а также оценки*

$$c = \frac{a^{2q}Ml}{\Gamma(2q+1)} < 1, \tag{4.2}$$

где $l = \max\{\|\mu\|_\infty, \|\gamma\|_\infty\}$*, существует непустое компактное выпуклое множество* $X \subset C([0,a];E)$*, такое что*

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1 \quad \textit{для всех} \quad x \in X;$$

$$\mathcal{G}(t)x_0 + \mathcal{K}(t)x_1 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t-s)\,\overline{\mathrm{co}}\,F(s, X(s))ds \subseteq X(t) \quad \textit{для всех} \quad t \in [0,a];$$

$$\Sigma^F_{x_0,x_1}[0,a] \subset X,$$

где $X(t) = \{x(t) \colon x \in X, t \in [0,a]\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что решение x задачи (1.1), (1.2) подчиняется оценке

$$\|x\|_{C([0,a];E)} \le N,$$

где

$$N = M\Big(\|x_0\|_E + a\,\|x_1\|_E + \frac{\|\gamma\|_\infty\, a^{2q}}{\Gamma(2q+1)}\Big).$$

Теперь построим убывающую последовательность замкнутых выпуклых множеств

$$\{X^n\}_{n=1}^\infty \subset C([0,T];E)$$

в соответствии со следующим индуктивным подходом. Пусть

$$X^0 = \big\{x \in C([0,a];E) \colon x(0) = x_0,\ x'(0) = x_1,\ \|x\|_{C([0,a];E)} \le N\big\},$$

а $X^n = \overline{Y^n}, n \ge 1$, где

$$Y^n = \left\{y \in C([0,a];E) \colon y(t) = \mathcal{G}(t)x_0 + \mathcal{K}(t)x_1 + \int_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)f(s)ds, f \in \mathcal{P}^\infty_{\overline{\mathrm{co}}\,F(\cdot, X^{n-1}(\cdot))}\right\}.$$

Заметим, что $X^n, n \ge 1$ непусты, поскольку $\Sigma^F_{x_0,x_1}[0,a] \subset X^n$ для всех $n \ge 0$.

В пространстве $C([0,a];E)$ введем МНК:

$$\psi(\Omega) = \sup_{t\in[0,a]} \chi_E(\{z(t) \colon z \in \Omega\}).$$

Отметим, что ψ является монотонной и несингулярной. Из условия $(F3)$ для всех $0 \le s \le t \le a$ следует оценка

$$\begin{aligned} &\chi_E\left(\mathcal{T}(t-s)\,\overline{\mathrm{co}}\,F\left(s, X^{n-1}(s)\right)\right) \\ &\le \|\mathcal{T}(t-s)\|\,\chi_E\left(\overline{\mathrm{co}}\,F\left(s, X^{n-1}(s)\right)\right) \le \frac{(t-s)^q M}{\Gamma(2q)}\chi_E\left(F\left(s, X^{n-1}(s)\right)\right) \\ &\le \frac{(t-s)^q M}{\Gamma(2q)}\mu(s)\chi_E\left(X^{n-1}(s)\right) \le \frac{(t-s)^q M}{\Gamma(2q)}\mu(s)\psi\left(X^{n-1}\right). \end{aligned}$$

Используя оценку для оператор-функций $\mathcal{T}(t)$ из первого пункта леммы 4 и $(F''3)$ получаем, что при каждом $t \in [0,a]$, мультифункция

$$s \multimap \mathcal{T}(t-s)\,\overline{\mathrm{co}}\,F\left(s, X^{n-1}(s)\right), \quad s \in [0,t],$$

интегрируема и п.в. ограничена. Тогда, применяя лемму 3, для каждого $t \in [0,a]$ имеем

$$\chi_E\left(Y^n(t)\right) = \chi_E\Bigg(\mathcal{G}(t)x_0 + \mathcal{K}(t)x_1 + \int\limits_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)\,\overline{\mathrm{co}}\,F\left(s, X^{n-1}(s)\right)ds\Bigg)$$

$$= \chi_E\Bigg(\int\limits_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)\,\overline{\mathrm{co}}\,F\left(s, X^{n-1}(s)\right)ds\Bigg)$$

$$\le \frac{M\|\mu\|_\infty}{\Gamma(2q)}\int\limits_0^t (t-s)^{2q-1}\psi\left(X^{n-1}\right)ds = \frac{M\|\mu\|_\infty}{\Gamma(2q)}\psi\left(X^{n-1}\right)\int\limits_0^t (t-s)^{2q-1}ds$$

$$= \frac{M\|\mu\|_\infty}{\Gamma(2q)}\psi\left(X^{n-1}\right)\frac{t^{2q}}{2q} \le \frac{a^{2q}M\|\mu\|_\infty}{\Gamma(2q+1)}\psi\left(X^{n-1}\right).$$

Таким образом, мы пришли к оценке $\psi\left(Y^n\right) \le c\psi\left(X^{n-1}\right)$, где $c<1$ из (4.2). Следовательно, $\psi\left(X^n\right) \le c\psi\left(X^{n-1}\right)$ и $\psi\left(X^n\right) \to 0$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим множество $\widetilde{X} = \bigcap_{n\ge 1} X^n$. Из свойства монотонности МНК ψ следует, что $\psi\big(\widetilde{X}\big) = 0$, и поэтому $\chi_E\big(\widetilde{X}(t)\big) = 0$ для всех $t \in [0,a]$.

Более того, из условия $(F4)$ следует равенство

$$\chi_E\big(F\big(t, \widetilde{X}(t)\big)\big) = 0 \quad \text{для всех} \quad t \in [0,a],$$

и затем, применяя $(F''3)$, получаем, что каждая последовательность $\{f_n\} \subset \mathcal{P}^\infty_{\overline{\mathrm{co}}\,F(\cdot,\widetilde{X}(\cdot))}$ полукомпактна в $L^\infty([0,a];E)$.

Теперь определим $X \subseteq \widetilde{X}$ по формуле

$$X = \left\{y \in C([0,T];E)\colon y(t) = \mathcal{G}(t)x_0 + \mathcal{K}(t)x_1 + \int\limits_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)f(s)ds,\ f \in \mathcal{P}^\infty_{\overline{\mathrm{co}}\,F(\cdot,\widetilde{X}(\cdot))}\right\}. \quad (4.3)$$

Согласно лемме 7 мы получаем, что X — компактное множество.

Лемма доказана.

Рассмотрим метрический проектор $Pr : [0,a] \times E \to Kv(E)$,

$$Pr(t,x) = \{y \in X(t), \|x-y\| = \mathrm{dist}(x, X(t))\}$$

и мультиоператор $\widehat{F} : [0,a] \times E \to Kv(E)$,

$$\widehat{F}(t,x) = \overline{\mathrm{co}}\,F\left(t, Pr\left(t,x\right)\right).$$

Лемма 10 [17, лемма 5.3.2]. *Мультиоператор $\widehat{F}$ удовлетворяет условиям* $(F1)$, $(F2)$, $(F''3)$, $(F4)$.

Из леммы 10 следует, что множество интегральных решений $\Sigma^{\widehat{F}}_{x_0,x_1}[0,a]$ задачи

$$D^\alpha x(t) \in Ax(t) + \widehat{F}(t, x(t)), \quad t \in [0,a], \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1,$$

непусто и компактно, и, более того, можно установить следующее утверждение.

Лемма 11. $\Sigma^{\widehat{F}}_{x_0,x_1}[0,a] = \Sigma^{F}_{x_0,x_1}[0,a]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, пусть $x \in \Sigma^{\widehat{F}}_{x_0,x_1}$. Тогда

$$x(t) \in \mathcal{G}(t)x_0 + \mathcal{K}(t)x_1 + \int\limits_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)\widehat{F}(s,x(s))ds$$

$$= \mathcal{G}(t)x_0 + \mathcal{K}(t)x_1 + \int\limits_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)\,\overline{\text{co}}\,F(s,Pr(s,x(s)))ds$$

$$\subseteq \mathcal{G}(t)x_0 + \mathcal{K}(t)x_1 + \int\limits_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)\,\overline{\text{co}}\,F(s,X(s))ds \subset X(t),$$

поэтому $Pr(t,x(t)) = \{x(t)\}$. Таким образом, мы имеем

$$x(t) = \mathcal{G}(t)x_0 + \mathcal{K}(t)x_1 + \int\limits_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)f(s)ds,$$

где $f \in \mathcal{S}_{\widehat{F}(\cdot,x(\cdot))} = \mathcal{S}_{F(\cdot,x(\cdot))}$, и, следовательно, $x \in \Sigma^{F}_{x_0,x_1}$. Включение $\Sigma^{F}_{x_0,x_1} \subseteq \Sigma^{\widehat{F}}_{x_0,x_1}$ легко получается благодаря тому факту, что $\Sigma^{F}_{x_0,x_1} \subset X$.

Лемма доказана.

Далее, следуя [17, лемма 5.3.4], мы можем аналогичным образом доказать следующее.

Лемма 12. *Существует последовательность мультиоператоров* $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}, F_n : [0,a] \times E \to Kv(E)$, *такая что*

(i) *каждый мультиоператор* $F_n(t,\cdot)\colon E \to Kv(E), n \geq 1$, *является непрерывным для почти всех* $t \in [0,a]$;

(ii) $\widehat{F}(t,x) \subset \ldots \subset F_{n+1}(t,x) \subset F_n(t,x) \subset \overline{\text{co}}\,F\left(t, X\left(t\right)\right), n \geq 1$;

(iii) $\widehat{F}(t,x) = \bigcap_{n\geq 1} F_n(t,x)$;

(iv) *для любого* $n \geq 1$ *существует селектор* $g_n(t,x) \in F_n(t,x)$ *такой, что* $g_n(\cdot,x)$ *измеримо для каждого* $x \in E$ *и* $g_n(t,\cdot)$ *для п.в.* $t \in [0,a]$ *удовлетворяют локальному условию Липшица, т. е. для каждого* $x \in E$ *существуют открытая окрестность* $U_x \subset E$ *и константа* $k_x > 0$ *такая, что для всех* $x', x'' \in U_x$ *мы имеем*

$$\|g_n(t,x') - g_n(t,x'')\| \leq \gamma(t)k_x\|x' - x''\|,$$

где $\gamma(\cdot)$ — *функция из условия* $(F''3)$.

Теперь, согласно леммам 11 и 12 можно установить главный результат настоящей статьи.

Теорема 2. *При выполнении условий*

$$(A),\ (F1),\ (F2),\ (F'3),\ (F4),\ (Q)$$

множество $\Sigma^{F}_{x_0,x_1}[0,a]$ *является* R_δ*-множеством в пространстве* $C([0,a];E)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий (i), (ii) и (iv) леммы 12 следует, что все мультиоператоры F_n удовлетворяют условиям $(F1)$–$(F4)$, и поэтому каждое множество $\Sigma^{F_n}_{x_0,x_1}[0,a], n \geq 1$, является непустым компактом. Покажем, что каждое множество $\Sigma^{F_n}_{x_0,x_1}[0,a], n \geq 1$, является стягиваемым.

Действительно, возьмем произвольное $x_n \in \Sigma^{F_n}_{x_0,x_1}[0,a]$, и пусть $f_n \in \mathcal{P}^{\infty}_{F_n}(x_n)$ таково, что

$$x_n(t) = \mathcal{G}(t)x_0 + \mathcal{K}(t)x_1 + \int\limits_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)f_n(s)\,ds.$$

Для заданного $0 \le \lambda \le 1$ определим оператор $\mathcal{B}_n^\lambda : C([0,a];E) \to C([0,a];E)$ по формуле

$$\mathcal{B}_n^\lambda z(t) = \begin{cases} \mathcal{G}(t)x_0 + \mathcal{K}(t)x_1 + \int\limits_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)f_n(s)\,ds, & 0 \le t \le \lambda a, \\ x_n(\lambda a) + \int\limits_{\lambda a}^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)g_n(s,z(s))\,ds, & \lambda a \le t \le a. \end{cases}$$

Заметим, что оператор $\mathcal{B}_n^\lambda$ преобразует в себя множество X. Возьмем $z(\cdot) \in X$. Отображение $g_n(t,z(t))$ является сечением $F_n(t,z(t)) \subset \overline{\mathrm{co}}\, F(t,X(t))$, поэтому функция

$$\phi_n(t) = \left\{ \begin{array}{cc} f_n(t), & 0 \le t \le \lambda a; \\ g_n(t,z(t)), & \lambda a \le t \le a, \end{array} \right\}$$

также является сечением $\overline{\mathrm{co}}\mathrm{F}(\mathrm{t},\mathrm{X}(\mathrm{t}))$. Последнее означает, что значения оператора $\mathcal{B}_n^\lambda$, которые могут быть определены с помощью функции ϕ_n, по формуле

$$\mathcal{B}_n^\lambda z(t) = \mathcal{G}(t)x_0 + \mathcal{K}(t)x_1 + \int\limits_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)\phi_n(s)\,ds,$$

принадлежат множеству X (см. (4.3) в доказательстве леммы 9).

Далее, поскольку X компактно, множество $\mathcal{X} \subset E$, $\mathcal{X} = \bigcup_{t\in[0,a]} X(t)$ также компактно, и мы можем предположить, что отображение $g_n(t,x)$ для п.в. $t \in [0,a]$ липшецево по второму аргументу на $\mathcal{X}$ с коэффициентом $\gamma(t)k_n > 0$.

Введем в пространстве $C([0,a];E)$ эквивалентную норму $\|x\|^* = \sup_{t\in[0,a]} e^{-\xi t}\|x(t)\|$, где константа $\xi > 0$ выбрана таким образом, что

$$L := \frac{Mk_n\|\gamma\|_\infty}{\Gamma(1+2q)} \sup_{t\in[0,a]} \left(\int\limits_0^t (t-s)^{2q-1} e^{-\xi(t-s)} ds \right) < 1.$$

Теперь покажем, что оператор $\mathcal{B}_n^\lambda$ — сжимающий на множестве X относительно нормы $\|\cdot\|^*$. Используя свойство (iv) из леммы 12, мы для произвольных $z, \overline{z}$ из X и $t \in [0,a]$ имеем

$$\begin{aligned} & e^{-\xi t}\left\|\mathcal{B}_n^\lambda z(t) - \mathcal{B}_n^\lambda \overline{z}(t)\right\|_E \\ & \le e^{-\xi t}\left\| \int\limits_{\lambda a}^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)(g_n(s,z(s)) - g_n(s,z'(s)))ds \right\|_E \\ & \le \frac{M}{\Gamma(2q)} e^{-\xi t} \int\limits_{\lambda a}^t (t-s)^{2q-1}\|g_n(s,z(s)) - g_n(s,\overline{z}(s))\|_E\, ds \\ & \le \frac{M}{\Gamma(2q)} e^{-\xi t} \int\limits_{\lambda a}^t (t-s)^{2q-1}\|\gamma\|_\infty k_n e^{\xi s} e^{-\xi s}\|z(s) - \overline{z}(s)\|_E\, ds \\ & \le \frac{Mk_n\|\gamma\|_\infty}{\Gamma(1+2q)}\|z - \overline{z}\|^* \sup_{t\in[0,a]} \left(\int\limits_0^t (t-s)^{2q-1} e^{-\xi(t-s)} ds \right) < L\|z - \overline{z}\|^*. \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathcal{B}_n^\lambda$ имеет единственную неподвижную точку $z_n^\lambda \in X$, которая принадлежит $\Sigma_{x_0,x_1}^{F_n}[0,a]$. Поскольку оператор $\mathcal{B}_n^\lambda$ непрерывно зависит от x_n и λ, функция z_n^λ также непрерывно зависит от x_n и λ. Следовательно, отображение $h\colon [0,1]\times\Sigma^{F_n}_{x_0,x_1}[0,a]\to\Sigma^{F_n}_{x_0,x_1}[0,a]$, определенное по формуле $h(\lambda,x_n)=z_n^\lambda$, является непрерывным. Теперь заметим, что $z_n^1=x_n$, т. е. h — гомотопия на $\Sigma^{F_n}_{x_0,x_1}[0,a]$ между тождественным отображением $h(1,\cdot)$ и постоянным отображением $h(0,x_n)\equiv z_n^0$. Это означает, что множество $\Sigma^{F_n}_{x_0,x_1}[0,a]$ стягиваемое.

Далее докажем равенство

$$\Sigma^{F}_{x_0,x_1}[0,a]=\bigcap_{n\geq 1}\Sigma^{F_n}_{x_0,x_1}[0,a]. \tag{4.4}$$

Из леммы 11 следует, что достаточно показать, что

$$\Sigma^{\widehat{F}}_{x_0,x_1}[0,a]=\bigcap_{n\geq 1}\Sigma^{F_n}_{x_0,x_1}[0,a]. \tag{4.5}$$

Очевидно, что

$$\Sigma^{\widehat{F}}_{x_0,x_1}[0,a]\subset\bigcap_{n\geq 1}\Sigma^{F_n}_{x_0,x_1}[0,a].$$

Докажем обратное включение. Возьмем $x\in\bigcap_{n\geq 1}\Sigma^{F_n}_{x_0,x_1}[0,a]$, тогда для всех $n\geq 1$ мы имеем

$$x(t)=\mathcal{G}(t)x_0+\mathcal{K}(t)x_1+\int_0^t(t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)f_n(s)ds,\quad f_n\in\mathcal{P}^\infty_{F_n}(x). \tag{4.6}$$

Поскольку последовательность $\{f_n\}$ является L^∞-полукомпактной, в силу леммы 7 без ограничения общности можно предположить, что $f_n\rightharpoonup f_0$ в $L^1([0,a];E)$. Тогда по лемме Мазура (см., например, [21]) существует двойная последовательность неотрицательных чисел $\{\lambda_{ik}\}_{i=1}^\infty{}_{k=1}^\infty$ такая, что для всех $i\geq 1$: $\sum_{k=i}^\infty\lambda_{ik}=1$, $\lambda_{ik}=0$ для всех $k\geq k_0(i)$ и последовательность линейных комбинаций

$$\overline{f}_i=\sum_{k=i}^\infty\lambda_{ik}f_k$$

сходится в $L^1([0,a];E)$ к функции f_0. Из последовательности $\{\overline{f}_i\}$ можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к f_0 для п.в. $t\in[0,a]$. Так как каждое $\overline{f}_i$ подчиняется оценке

$$\|\overline{f}_i(t)\|\leq v(t)\ \text{ п.в. }\ t\in[0,a],$$

этой же оценке подчиняется предельная функция f_0, и поэтому она принадлежит пространству $L^\infty([0,a];E)$.

Поскольку множества $F_i(t,x)$ выпуклы и компактны, учитывая включения из п. (ii) леммы 12, мы для всех $i\geq 1$ имеем $\overline{f}_i(t)\in F_i(t,x(t))$ п.в. $t\in[0,a]$, откуда следует, что $\overline{f}_i(t)\in F_n(t,x(t))$ п.в. $t\in[0,a]$ для всех $i\geq n$. Но тогда для предельной функции f_0 мы получаем, что

$$f_0(t)\in\bigcap_{n\geq 1}F_n(t,x(t))=\widehat{F}(t,x(t))\ \text{ п.в. }\ t\in[0,a],$$

т. е. $f_0\in\mathcal{P}^\infty_{\widehat{F}}[0,a]$.

По лемме 5 $Sf_n\rightharpoonup Sf_0$ в $C([0,a];E)$, но по лемме 7 последовательность $\{Sf_n\}$ компактна, поэтому $Sf_n\to Sf_0$ в $C([0,a];E)$.

Теперь, переходя к пределу в равенстве (4.6), мы получим

$$x(t)=\mathcal{G}(t)x_0+\mathcal{K}(t)x_1+\int\limits_0^t(t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)f_0(s)ds,$$

поэтому $x\in\Sigma^{\widehat{F}}_{x_0,x_1}[0,a]$, следовательно, справедливо равенство (4.5), а это значит, что выполняется равенство (4.4).

Теорема доказана.

5. Пример. Обобщенная периодическая задача

Рассмотрим в сепарабельном банаховом пространстве E краевую задачу для дифференциального включения (1.1):

$$ {}^{C}D_0^{\alpha}x(t) \in Ax(t) + F(t, x(t)), \quad t \in [0, a], $$

со следующими обобщенным периодическим условием для решения и начальным условием для его производной:

$$ x(0) = kx(a), \quad x'(0) = x_1, \tag{5.1} $$

где k — положительная константа.

В теории дробного интегро-дифференцирования особую и важную роль играет функция Миттаг-Леффлера, являющаяся обобщением экспоненциальной функции.

Определение 15. Функция вида

$$ E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \quad \alpha > 0,\ z, \beta \in \mathbb{C}, $$

называется функцией Миттаг–Леффлера.

Нам понадобятся следующие соотношения (см. [26])

$$ E_{\alpha,\gamma}(z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} + zE_{\alpha,\gamma+\alpha}(z), \tag{5.2} $$

$$ E_{\alpha,\gamma}(z) + E_{\alpha,\gamma}(-z) = 2E_{2\alpha,\gamma}(z^2), \tag{5.3} $$

$$ E_{\alpha,\gamma}(z) - E_{\alpha,\gamma}(-z) = 2zE_{2\alpha,\alpha+\gamma}(z^2), \tag{5.4} $$

$$ \left(\frac{d}{dz}\right)^n (z^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}(\lambda z^{\alpha})) = z^{\gamma-n-1}E_{\alpha,\gamma-n}(\lambda z^{\alpha}), \tag{5.5} $$

$$ \int_0^z t^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}(\lambda t^{\alpha})dt = z^{\gamma}E_{\alpha,\gamma+1}(\lambda z^{\alpha}). \tag{5.6} $$

Замечание 3. Справедливы следующие равенства:

$$ \int_0^{\infty} \xi_q(\theta)\, e^{-\sqrt{\lambda}t^q\theta} d\theta = E_{q,1}(-\sqrt{\lambda}t^q), \quad \int_0^{\infty} q\theta\xi_q(\theta)\, e^{-\sqrt{\lambda}t^q\theta} d\theta = E_{q,q}(-\sqrt{\lambda}t^q). $$

Первое равенство можно найти в других обозначениях в [3, с. 30, формула (A.37)]. Второе равенство получается из первого дифференцированием обеих частей по переменной t и последующим применением для правой части формул (5.5) и (5.2).

Лемма 13. *Пусть семейство косинус оператор-функций $\{C(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ сильно непрерывно. Тогда для каждого $t \in \mathbb{R}_+$ справедливы неравенства*

$$ \|\mathcal{G}(t)\| \le E_{\alpha,1}(\lambda t^{\alpha}), $$

$$ \|\mathcal{K}(t)\| \le tE_{\alpha,2}(\lambda t^{\alpha}), $$

$$ \|\mathcal{T}(t)\| \le t^q E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^{\alpha}). $$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как семейство косинус оператор-функций $\{C(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ сильно непрерывно, по теореме 2.5 из [20] существует константа $\lambda \geq 0$ такая, что $\|C(t)\| \leq \operatorname{ch}\sqrt{\lambda}t$. Тогда, учитывая замечание 3 и формулу (5.3), для $\mathcal{G}(t)$ имеем

$$\|\mathcal{G}(t)\| = \left\|\int\limits_0^\infty \xi_q(\theta)C(t^q\theta)d\theta\right\| \leq \int\limits_0^\infty \xi_q(\theta)\|C(t^q\theta)\|d\theta \leq \int\limits_0^\infty \xi_q(\theta)\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}t^q\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \xi_q(\theta)\left(e^{\sqrt{\lambda}t^q\theta} + e^{-\sqrt{\lambda}t^q\theta}\right)d\theta \leq \frac{1}{2}\Bigg(\int\limits_0^\infty \xi_q(\theta)e^{\sqrt{\lambda}t^q\theta}d\theta + \int\limits_0^\infty \xi_q(\theta)e^{-\sqrt{\lambda}t^q\theta}d\theta\Bigg)$$

$$= \frac{E_{q,1}(\sqrt{\lambda}t^q) + E_{q,1}(-\sqrt{\lambda}t^q)}{2} = E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha).$$

Используя последнюю оценку для $\mathcal{K}(t)$ и формулу (5.6), получаем

$$\|\mathcal{K}(t)\| \leq \int\limits_0^t \|\mathcal{G}(s)\|ds \leq \int\limits_0^t E_{\alpha,1}(\lambda s^\alpha)ds = tE_{\alpha,2}(\lambda t^\alpha).$$

Снова применяя замечание 3 и формулу (5.4), перейдем к оценке нормы $\mathcal{T}(t)$:

$$\|\mathcal{T}(t)\| = \left\|\int\limits_0^\infty q\theta\xi_q(\theta)S(t^q\theta)d\theta\right\| \leq \int\limits_0^\infty q\theta\xi_q(\theta)\|S(t^q\theta)\|d\theta \leq \int\limits_0^\infty q\xi_q(\theta)\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}t^q\theta)}{\sqrt{\lambda}t^q}d\theta$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\lambda}t^q}\int\limits_0^\infty q\theta\xi_q(\theta)\left(e^{\sqrt{\lambda}t^q\theta} - e^{-\sqrt{\lambda}t^q\theta}\right)d\theta$$

$$\leq \frac{1}{2\sqrt{\lambda}t^q}\Bigg(\int\limits_0^\infty q\theta\xi_q(\theta)e^{\sqrt{\lambda}t^q\theta}d\theta - \int\limits_0^\infty q\theta\xi_q(\theta)e^{-\sqrt{\lambda}t^q\theta}d\theta d\theta\Bigg)$$

$$= \frac{E_{q,q}(\sqrt{\lambda}t^q) - E_{q,q}(-\sqrt{\lambda}t^q)}{2\sqrt{\lambda}t^q} = t^q E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha).$$

Нам потребуются следующие понятия (см. [15]).

О п р е д е л е н и е 16. Пусть X – метрическое пространство. П.н.св. мультиотображение $\mathcal{F} : X \to K(E)$ называется J-мультиотображением, если для каждого $x \in X$ множество $\mathcal{F}(x)$ обладает R_δ свойством.

О п р е д е л е н и е 17. Мультиотображение $\mathcal{F}\colon X \to K(E)$ называется CJ-мультиотображением, если существуют банахово пространство E', J-мультиотображение $\mathcal{F}'\colon X \to K(E')$ и непрерывное отображение $\theta\colon E' \to E$ такие, что $\mathcal{F}$ может быть представлено в виде композиции $\mathcal{F} = \theta \circ \mathcal{F}'$.

Имеет место следующая теорема о неподвижной точке (см. следствие 3.4.3 из [17]).

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{M}$ — выпуклое замкнутое подмножество банахова пространства E и $\mathcal{F}\colon \mathcal{M} \to K(\mathcal{M})$ — CJ-мультиотображение, являющееся (l, χ_E)–уплотняющим для некоторого $0 \leq l < 1$, т. е.*

$$\chi_E(\mathcal{F}(\Omega)) \leq l\,\chi_E(\Omega)$$

для каждого $\Omega \subset \mathcal{M}$. Тогда существует точка $x_* \in \mathcal{M}$ такая, что $x_* \in \mathcal{F}(x_*)$.

Введем в рассмотрение мультиоператор сдвига вдоль траекторий дифференциального включения (1.1) $P_a : D \subset E \multimap E$, определенный как

$$P_a(x_0) = \left\{ y(a) \colon y \in \Sigma^F_{x_0,x_1}[0,a] \right\},$$

где $D \subset E$ — открытое множество.

Заметим, что мультиоператор P_a может быть представлен в виде $P_a = \theta \circ \Sigma$, где $\Sigma\colon D \multimap C([0,a];E)$, $\Sigma(x_0) = \Sigma^F_{x_0,x_1}[0,a]$ и $\theta : C([0,a];E) \to E$, $\theta(y) = y(a)$ — непрерывное отображение.

Из теоремы 2 следует, что мультиоператор P_a является CJ-мультиотображением. Благодаря этому мы можем доказать существование решения задачи (1.1), (5.1), воспользовавшись теоремой 3. Последние рассуждения реализуются в следующих утверждениях.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (A), $(F1)$–$(F4)$, (Q) *и дополнительно условия*

$$\frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda} < \frac{1}{E_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha) - 1},$$

$$l = \frac{kE_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha)}{1 - \dfrac{\|\mu\|_\infty}{\lambda}\left(E_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha) - 1\right)} < 1,$$

тогда мультиоператор kP_a *является* (l,χ_E)*-уплотняющим.*

Доказательство. Пусть $\Omega \subset D$ — непустое ограниченное множество. Для $0 \le t \le a$ определим множество

$$\Sigma(\Omega)(t) = \left\{ y(t) \colon y \in \Sigma^F_{x_0,x_1}[0,a],\ x \in \Omega \right\}.$$

Очевидно, что в этом случае $\Sigma(\Omega)(0) = \Omega$ и

$$\Sigma(\Omega)(t) \subseteq \mathcal{G}(t)\Omega + \mathcal{K}(t)x_1 + \int_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)F(s,\Sigma(\Omega)(s))ds, \quad 0 \le t \le a.$$

Поскольку множество $\Sigma(\Omega)[0,a] \subset C([0,a];E)$ — ограничено, по теореме 4.2.4 из [17] функция $t \in [0,a] \to \chi_E(\Sigma(\Omega)(t))$ является измеримой и существенно ограниченной.

Применяя свойства меры некомпактности χ_E и лемму 13, получим оценки

$$\chi_E\left(\Sigma(\Omega)(t)\right) \le \chi_E\left(\mathcal{G}(t)\Omega + \mathcal{K}(t)x_1 + \int_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)F(s,\Sigma(\Omega)(s))ds \right)$$

$$\le \|\mathcal{G}(t)\|\,\chi_E(\Omega) + \int_0^t (t-s)^{q-1}\,\|\mathcal{T}(t-s)\|\,\|\mu\|_\infty \chi_E(\Sigma(\Omega)(s))ds$$

$$\le E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha)\chi_E(\Omega) + \int_0^t (t-s)^{q-1}(t-s)^q E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)\|\mu\|_\infty \sup_{s\in[0,a]} \chi_E(\Sigma(\Omega)(s))ds$$

$$\le E_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha)\chi_E(\Omega) + \|\mu\|_\infty \sup_{t\in[0,a]} \chi_E(\Sigma(\Omega)(t)) \int_0^a (a-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(a-s)^\alpha)ds.$$

Для дальнейшей оценки вычислим интеграл в последнем выражении с помощью формулы (5.6):

$$\int_0^a (a-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(a-s)^\alpha)ds = -\int_0^a (a-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(a-s)^\alpha)d(a-s)$$

$$= \int_0^a y^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda y^\alpha)dy = a^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\lambda a^\alpha).$$

Теперь, замечая, что если мы возьмем $\gamma = 1$ в формуле (5.2), мы получим

$$E_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha) = \frac{1}{\Gamma(1)} + \lambda a^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\lambda a^\alpha) = 1 + \lambda a^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\lambda a^\alpha).$$

Следовательно, справедливы равенства

$$\int\limits_0^a (a-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(a-s)^\alpha)ds = a^\alpha \frac{1}{\lambda a^\alpha}\left(E_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha) - 1\right) = \frac{1}{\lambda}\left(E_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha) - 1\right).$$

Продолжая оценку, имеем

$$\sup_{t\in[0,a]} \chi_E\left(\Sigma(\Omega)(t)\right) \leq E_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha)\chi_E(\Omega) + \|\mu\|_\infty \sup_{t\in[0,a]} \chi_E(\Sigma(\Omega)(t))\frac{1}{\lambda}\left(E_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha) - 1\right).$$

Преобразовывая последнее, мы получим неравенство

$$\sup_{t\in[0,a]} \chi_E\left(\Sigma(\Omega)(t)\right) \leq \frac{E_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha)}{1 - \frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda}\left(E_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha) - 1\right)}\chi_E(\Omega).$$

Теперь, мы можем установить требуемую оценку МНК χ_E для образа Ω при действии оператора kP_a

$$\chi_E(kP_a(\Omega)) = k\chi_E\left(\Sigma(\Omega)(a)\right) \leq k \sup_{t\in[0,a]} \chi_E\left(\Sigma(\Omega)(t)\right) \leq \frac{kE_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha)}{1 - \frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda}\left(E_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha) - 1\right)}\chi_E(\Omega) = l\chi_E(\Omega).$$

Теорема доказана.

Теорема 5. *При выполнении условий* (A), $(F1)$, $(F2)$, $(F'3)$, $(F4)$, (Q), *а также условий*

$$\frac{h}{\lambda} < \frac{1}{E_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha) - 1}, \tag{5.7}$$

$$\frac{kE_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha)}{1 - \frac{h}{\lambda}\left(E_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha) - 1\right)} < 1, \tag{5.8}$$

где $h = \max\{\|\mu\|_\infty, \|\zeta\|_\infty\}$, *краевая задача* (1.1), (5.1) *имеет решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольного $x_0 \in E$ возьмем функцию $x \in \Sigma^F_{x_0,x_1}[0,a]$. Тогда для всех $t \in [0,a]$:

$$x(t) \in \mathcal{G}(t)x_0 + \mathcal{K}(t)x_1 + \int\limits_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)f(s,P_s x_0)ds.$$

Введем в рассмотрение функцию $\rho\colon [0,a] \to \mathbb{R}$, заданную по формуле $\rho(t) = \max_{y\in P_t x_0} \|y\|_E$. В таком случае ввиду свойства $(F'3)$ и леммы 13 для функции ρ справедливы оценки

$$\rho(t) \leq \left\| \mathcal{G}(t)x_0 + \mathcal{K}(t)x_1 + \int\limits_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)f(s,P_s x_0)ds \right\|_E$$

$$\leq \|\mathcal{G}(t)\|\,\|x_0\|_E + \|\mathcal{K}(t)\|\,\|x_1\|_E + \int\limits_0^t (t-s)^{q-1}\,\|\mathcal{T}(t-s)\|\,\|\zeta\|_\infty\,(1+\rho(s))ds$$

$$\leq E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha)\|x_0\|_E + tE_{\alpha,2}(\lambda t^\alpha)\|x_1\|_E + \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)\,\|\zeta\|_\infty\,(1+\rho(s))ds$$

$$\leq E_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha)\|x_0\|_E + aE_{\alpha,2}(\lambda a^\alpha)\|x_1\|_E + \frac{\|\zeta\|_\infty}{\lambda}\Big(1+\sup_{t\in[0,a]}\rho(t)\Big)\left(E_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha)-1\right)$$

$$= E_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha)\|x_0\|_E + m + \frac{\|\zeta\|_\infty}{\lambda}\left(E_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha)-1\right)\sup_{t\in[0,a]}\rho(t)$$

$$\leq E_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha)\|x_0\|_E + m + \frac{h}{\lambda}\left(E_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha)-1\right)\sup_{t\in[0,a]}\rho(t),$$

где

$$m = aE_{\alpha,2}(\lambda a^\alpha)\|x_0\|_E + \frac{\|\zeta\|_\infty}{\lambda}\left(E_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha)-1\right).$$

Таким образом, мы имеем

$$\sup_{t\in[0,a]}\rho(t) \leq E_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha)\|x_0\|_E + m + \frac{h}{\lambda}\left(E_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha)-1\right)\sup_{t\in[0,a]}\rho(t).$$

Преобразовывая последнее, получим неравенство

$$\sup_{t\in[0,a]}\rho(t) \leq \frac{E_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha)}{1-\dfrac{h}{\lambda}\left(E_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha)-1\right)}\|x_0\|_E + \frac{m}{1-\dfrac{h}{\lambda}\left(E_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha)-1\right)}.$$

С учетом последнего выражения для мультиоператора kP_a справедлива следующая оценка:

$$\|kP_a(x_0)\|_E = k\rho(a) \leq \frac{kE_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha)}{1-\dfrac{h}{\lambda}\left(E_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha)-1\right)}\|x_0\|_E + C,$$

где

$$C = \frac{km}{1-\dfrac{h}{\lambda}\left(E_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha)-1\right)}.$$

Если мы возьмем

$$R \geq \left(1-\frac{kE_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha)}{1-\dfrac{h}{\lambda}\left(E_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha)-1\right)}\right)^{-1}C,$$

тогда неравенство $\|x_0\|_E \leq R$ влечет оценку $\|kP_a(x_0)\|_E \leq R$. Поэтому мультиоператор kP_a преобразует замкнутый шар $B_R(0) \subset E$ в себя. По теореме 3 мультиоператор kP_a имеет неподвижную точку, которая является решением задачи (1.1), (1.2).

З а м е ч а н и е 4. Легко проверить, что условия (5.7), (5.8) выполняются, если

$$k < \frac{1}{E_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha)} \quad \text{и} \quad \frac{hE_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha)}{\lambda\left(1-kE_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha)\right)} < 1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.** Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier Science B.V., North-Holland Mathematics Studies, 2006. 540 p.
2. **Podlubny I.** Fractional differential equations. San Diego: Acad. Press, 1999. 340 p.
3. **Mainardi F., Rionero S., Ruggeri T.** Probability distributions generated by fractional diffusion equations. 2007. 46 p. https://doi.org/10.48550/arXiv.0704.0320

4. **Обуховский В.В., Петросян Г.Г., Сорока М.С.** О начальной задаче для невыпуклозначных дифференциальных включений дробного порядка в банаховом пространстве // Мат. заметки. 2024. Т. 115, № 3. С. 392–407. https://doi.org/10.4213/mzm13750
5. **Петросян Г.Г.** О краевой задаче для класса дифференциальных уравнений дробного порядка типа Ланжевена в банаховом пространстве // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32, № 3. С. 415–432. https://doi.org/10.35634/vm220305
6. **Benedetti I., Obukhovskii V., Taddei V.** On generalized boundary value problems for a class of fractional differential inclusions // Fract. Calc. Appl. Anal. 2017. Vol. 20. P. 1424–1446. https://doi.org/10.1515/fca-2017-0075
7. **Гомоюнов М.И.** К теории дифференциальных включений с дробными производными Капуто // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. Р. 1419–1432. https://doi.org/10.1134/S0374064120110011
8. **Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю.** Об оптимальной обратной связи в линейно-квадратичной задаче оптимального управления системой дробного порядка // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 8. С. 1110–1122. https://doi.org/10.31857/S0374064123080101
9. **Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю.** Построение решений задач управления линейными системами дробного порядка на основе аппроксимационных моделей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 1. С. 39–50. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-1-39-50
10. **Ke T.D., Obukhovskii V., Wong N.C., Yao J.C.** On a class of fractional order differential inclusions with infinite delays // Applicable Anal. 2013. Vol. 92, no. 1. P. 115–137. https://doi.org/10.1080/00036811.2011.601454
11. **Kamenskii M.I., Obukhoskii V.V., Petrosyan G.G., Yao J.C.** Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space // Applicable Anal. 2017. Vol. 97. no. 4. P. 571–591. https://doi.org/10.1080/00036811.2016.1277583
12. **Aronszajn N.** Le correspondant topologique de l'unicité dans la theorie des equations differentielles // Annals of mathematics, second series. 1942. Vol. 43, no. 4. P. 730–738. [in French] https://doi.org/10.2307/1968963
13. **Górniewicz L.** On the solution sets of differential inclusions // J. Math. Anal. Appl. 1986. Vol. 113, no. 1. P. 235–244. https://doi.org/10.1016/0022-247X(86)90347-1
14. **Филиппов В.В.** О теореме Ароншайна // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 1. С. 75–79.
15. **Górniewicz L.** Topological fixed point theory of multivalued mappings, 2nd edt. Ser. Topological Fixed Point Theory and Its Applications. Dordrecht: Springer, 2006. 538 p. https://doi.org/10.1007/1-4020-4666-9
16. Djebali S., Górniewicz L., Ouahab A. *Solution sets for differential equations and inclusions.* De Gruyter Ser. in Nonlinear Analysis and Applications, vol. 18. Berlin: Walter de Gruyter, 2012. 453 p. https://doi.org/10.1515/9783110293562
17. **Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.** Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces. Berlin; NY: Walter de Gruyter, 2001. 232 p. https://doi.org/10.1515/9783110870893
18. **Петросян Г.Г.** О топологической структуре множества решений задачи Коши для дифференциальных включений дробного порядка с полунепрерывной сверху правой частью // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2025. Т. 522. С. 33–39. https://doi.org/10.31857/S2686954325020064
19. **Kamenskii M.I., Obukhoskii V.V., Petrosyan G.G.** A continuous dependence of a solution set for fractional differential inclusions of an order $q \in (1,2)$ on parameters and initial data // Lobachevskii J. Math. 2023. Vol. 44, no. 8. P. 3331–3342. https://doi.org/10.1134/S1995080223080243
20. **Sova M.** Cosine operator functions. Ser. Rozprawy Mat., vol. 49. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1966. 47 p.
21. **Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.** Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: Книжный дом “Либроком”, 2011. 224 с.
22. **Hyman D.H.** On decreasing sequences of compact absolute retracts // Fund. Math. 1969. Vol. 64, no. 1. P. 91–97.
23. **Zhou Y., He J.W.** New results on controllability of fractional evolution systems with order $\alpha \in (1,2)$ // Evol. Eq. Control Theory. 2021. Vol. 10, no. 3. P. 491–509. https://doi.org/10.3934/eect.2020077
24. **Петросян Г.Г.** О системах управления, описываемых дифференциальными включениями дробного порядка с обратной связью // Дифференц. уравнения. 2025. Т. 60, № 11. С. 1499–1518. https://doi.org/10.31857/S0374064124110067

25. **He J.W., Liang Y., Ahmad B., Zhou Y.** Nonlocal fractional evolution inclusions of order $\alpha \in (1, 2)$ // Mathematics. 2019. Vol. 7, no. 2. P. 1–17. https://doi.org/10.3390/math7020209
26. **Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V.** Mittag-Leffler functions, related topics and applications. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2014. 443 p.

Поступила 12.08.2025
После доработки 7.09.2025
Принята к публикации 15.09.2025

Петросян Гарик Гагикович
канд. физ.-мат. наук, доцент
ведущий научный сотрудник
НИИ математики, ФГБОУ ВО Воронежский государственный университет
г. Воронеж
e-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

REFERENCES

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and applications of fractional differential equations*, Amsterdam, Elsevier Science Publ., 2006, 540 p. ISBN-13: 978-0444518323.
2. Podlubny I. *Fractional differential equations*. San Diego, Acad. Press, 1999, 340 p. ISBN-10: 0125588402 .
3. Mainardi F., Rionero S., Ruggeri T. *Probability distributions generated by fractional diffusion equations*, 2007, 46 p. https://doi.org/10.48550/arXiv.0704.0320
4. Obukhovskii V.V., Petrosyan G.G., Soroka M.S. On an initial value problem for nonconvex-valued fractional differential inclusions in a Banach space. *Math. Notes*, 2024, vol. 115, no. 3–4, pp. 358–370. https://doi.org/10.1134/S0001434624030088
5. Petrosyan G.G. On a boundary value problem for a class of fractional Langevin type differential equations in a Banach space. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2022, vol. 32, iss. 3, pp. 415–432 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm220305
6. Benedetti I., Obukhovskii V., Taddei V. On generalized boundary value problems for a class of fractional differential inclusions. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2017, vol. 20, pp. 1424–1446. https://doi.org/10.1515/fca-2017-0075
7. Gomoyunov M.I. To the theory of differential inclusions with Caputo fractional derivatives. *Diff. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 11, pp. 1387–1401. https://doi.org/10.1134/S00122661200110014
8. Gomoyunov M.I., Lukoyanov N.Yu. Optimal feedback in a linear–quadratic optimal control problem for a fractional-order system. *Diff. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 8, pp. 1117–1129. https://doi.org/10.1134/S0012266123080104
9. Gomoyunov M.I., Lukoyanov N.Yu. Construction of solutions to control problems for fractional-order linear systems based on approximation models. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2021, vol. 313, no. 1, pp. S73–S82. https://doi.org/10.1007/s13235-018-0281-7
10. Ke T.D., Obukhovskii V., Wong N.C., Yao J.C. On a class of fractional order differential inclusions with infinite delays. *Applicable Anal.*, 2013, vol. 92, no. 1, pp. 115–137. https://doi.org/10.1080/00036811.2011.601454
11. Kamenskii M.I., Obukhoskii V.V., Petrosyan G.G., Yao J.C. Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space. *Applicable Anal.*, 2017, vol. 97, no. 4, pp. 571–591. https://doi.org/10.1080/00036811.2016.1277583
12. Aronszajn N. Le correspondant topologique de l'unicité dans la théorie des équations différentielles. *Annals Math.*, 1942, vol. 43, no. 4, pp. 730–738. https://doi.org/10.2307/1968963
13. Górniewicz L. On the solution sets of differential inclusions. *J. Math. Anal. Appl.*, 1986, vol. 113, no. 1, pp. 235–244. https://doi.org/10.1016/0022-247X(86)90347-1
14. Filippov V.V. On a theorem of Aronszajn. *Differ. Equ.*, 1997, vol. 33, no. 1, pp. 75–79 (in Russian).
15. Górniewicz L. *Topological fixed point theory of multivalued mappings*, 2nd edt. Ser. Topological Fixed Point Theory and Its Applications. Dordrecht, Springer, 2006, 538 p. https://doi.org/10.1007/1-4020-4666-9
16. Djebali S., Górniewicz L., Ouahab A. *Solution sets for differential equations and inclusions*. De Gruyter Ser. in Nonlinear Analysis and Applications, 18. Berlin, Walter de Gruyter, 2012, 453 p. https://doi.org/10.1515/9783110293562

17. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. *Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces*. Berlin, New York, Walter de Gruyter, 2001, 231 p. https://doi.org/10.1515/9783110870893
18. Petrosyan G.G. On a topological structure of a solution set to a Cauchy problem for fractional differential inclusions with a upper semicontinuous right-hand side. *Dokl. RAN. Matem., Inform., Prots. Upr.*, 2025, vol. 522, pp. 33–39 (in Russian).
19. Kamenskii M.I., Obukhoskii V.V., Petrosyan G.G. A continuous dependence of a solution set for fractional differential inclusions of an order $q \in (1,2)$ on parameters and initial data. *Lobachevskii J. Math.*, 2023, vol. 44, no. 8, pp. 3331–3342. https://doi.org/10.1134/S1995080223080243
20. Sova M. *Cosine operator functions*. Ser. Rozprawy Mat., vol. 49. Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1966, 47 p.
21. Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V. *Vvedenie v teoriyu mnogoznachnykh otobrazhenii i differentsial'nykh vklyuchenii* [Introduction to the theory of multivalued maps and differential inclusions], Moscow, Librokom, 2011, 224 p. ISBN: 978-5-397-01526-4 .
22. Hyman D.H. On decreasing sequences of compact absolute retracts. *Fund. Math.*, 1969, vol. 64, no. 1, pp. 91–97.
23. Zhou Y., He J.W. New results on controllability of fractional evolution systems with order $\alpha \in (1,2)$. *Evol. Eq. Control Theory*, 2021, vol. 10, no. 3, pp. 491–509. https://doi.org/10.3934/eect.2020077
24. Petrosyan G.G. On feedback control systems governed by fractional differential inclusions. *Diff. Equat.*, 2024, vol. 60, no. 11, pp. 1572–1591. https://doi.org/10.1134/S0012266124110077
25. He J.W., Liang Y., Ahmad B., Zhou Y. Nonlocal fractional evolution inclusions of order $\alpha \in (1,2)$. *Mathematics*, 2019, vol. 7, no. 2, pp. 1–17. https://doi.org/10.3390/math7020209
26. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V. *Mittag – Leffler functions, related topics and applications*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2014, 443 p. ISBN: 9783662439296 .

Received August 12, 2025
Revised September 7, 2025
Accepted September 15, 2025

Funding Agency: This work was supported by Russian Science Foundation, project № 25-11-00056, https://rscf.ru/project/25-11-00056/ .

Garik Gagikovich Petrosyan, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Leading Researcher, Research Institute of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, 394018 Russia,
e-mail: garikpetrosyan@yandex.ru .

Cite this article as: G. G. Petrosyan. On the R_δ-structure of the solution set of the Cauchy problem for semilinear differential inclusions of fractional order $\alpha \in (1,2)$ in Banach spaces. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 4, pp. 260–280.