ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 31 № 4 2025

УДК 512.579+512.577+512.534.2

ОБ АНТИЭНДОМОРФИЗМАХ n-ГРУППОИДОВ[1]

А. В. Литаврин

Изучаются антиэндоморфизмы произвольного n-группоида (т. е. алгебраической системы с единственной операцией, которая является n-арной операцией). Строятся биполярные классификации антиэндоморфизмов произвольного n-группоида с индексом j, где j — это произвольное натуральное число меньше либо равное n. Данные классификации антиэндоморфизмов обобщают биполярную классификацию антиэндоморфизмов обычного группоида (т. е. 2-группоида). Устанавливается связь между биполярными типами антиэндоморфизмами (в биполярной классификации с индексом j) в паре изоморфных n-группоидов. Получены формулы вычисления биполярного типа произвольного антиэндоморфизма. Строятся полугруды (т. е. 3-группоиды с условием косо-ассоциативности) антиэндоморфизмов, которые состоят из антиэндоморфизмов одного смешанного биполярного типа.

Ключевые слова: группоид, n-группоид, антиэндоморфизм, биполярная классификация антиэндоморфизмов, биполярный тип антиэндоморфизма.

A. V. Litavrin. On anti-endomorphisms of n-groupoids.

We study the anti-endomorphisms of an arbitrary n-groupoid (i.e., an algebraic system with a single operation, which is an n-ary operation). We construct bipolar classifications of the anti-endomorphisms of an arbitrary n-groupoid with index j, where j is an arbitrary natural number less than or equal to n. These classifications of anti-endomorphisms generalize the bipolar classification of anti-endomorphisms of an ordinary groupoid (i.e., a 2-groupoid). We establish a relationship between bipolar anti-endomorphism types (in the bipolar classification with index j) in a pair of isomorphic n-groupoids. We obtain formulas for calculating the bipolar type of an arbitrary anti-endomorphism. Semi-heaps (i.e. 3-groupoids with the skew-associativity condition) of anti-endomorphisms are constructed, which consist of anti-endomorphisms of one mixed bipolar type.

Keywords: groupoid, n-groupoid, anti-endomorphism, bipolar classification of anti-endomorphisms, bipolar type of anti-endomorphism.

MSC: 20N02, 20M30

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-4-230-246

1. Введение

Пусть G — это непустое множество и f — это n-арная операция на множестве G. Тогда кортеж (G, f) будем называть *n-арным группоидом* (или коротко *n-группоидом*). Прослеживается интерес исследователей к изучению n-группоидов (обычно изучают конкретные классы n-группоидов). Примеры исследования n-групп можно найти, например, в работах [1–5]. Медиальные n-группоиды изучались в [6–9]. В работах [10; 11] исследовались конгруэнции частичных n-группоидов. Примеры исследований других n-группоидов можно найти в [12–15].

В работе [16] для каждого обычного группоида (т. е. 2-группоида) построена *биполярная классификация эндоморфизмов*. Данная классификация строится как инструмент исследования проблемы поэлементного описания моноида всех эндоморфизмов фиксированного группоида (или конкретного класса группоидов). Имеются работы, посвященные решению этой проблемы для конкретных группоидов; в основном рассматриваются случаи, когда группоид является полугруппой или группой.

[1]Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Красноярском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение № 075-02-2025-1790).

Биполярная классификация антиэндоморфизмов обычных группоидов строится в работе [17]. Множество всех антиэндоморфизмов группоида в общем случае не замкнуто относительно композиции двух антиэндоморфизмов; замкнутость имеет место, например, для коммутативных группоидов (в этом случае множества всех эндоморфизмов и антиэндоморфизмов совпадают). При этом множество всех антиэндоморфизмов замкнуто относительно композиции трех антиэндоморфизмов и образует относительно данной операции полугруду (т. е. 3-группоид с условием косо-ассоциативности). Поскольку композиция двух антиэндоморфизмов группоида всегда является эндоморфизмом, поэлементное описание полугруды всех антиэндоморфизмов группоида актуально в контексте проблемы описания моноида всех эндоморфизмов данного группоида (так как дает некоторые эндоморфизмы). Антиэндоморфизмы используются как инструмент проведения выкладок и формализации результатов (см., например, работы [18–20]). Эндоморфизмы полуциклических n-групп исследовались в [2]. Гомоморфизмы из бесконечных полуциклических n-групп в полуабелеву n-группу исследовались в [1]. В работе [21] была получена серия *биполярных классификаций с индексом* j для n-группоида, где $j \leq n$. При $n = 2$ биполярная классификация с индексом $j = 2$ совпадает с классификацией эндоморфизмов, построенной в работе [16]. Данная работа направлена на обобщение биполярной классификации антиэндоморфизмов, полученной в работе [17], на случай n-группоидов, где $n > 1$.

Основными результатами данной работы являются теоремы 1–4. Теорема 1 показывает, что множество всех антиэндоморфизмов можно представить как объединение попарно непересекающихся множеств. Данные множества получают название *базовые множества антиэндоморфизмов* с индексом $j \in \{1, \dots, n\}$ для n-группоида (см. определение 3); для каждого фиксированного индекса j данные множества параметризуются *биполярными типами* (см. определение 1). В общем случае для каждого j получаются различные разложения множества всех антиэндоморфизмов в объединение базовых множеств антиэндоморфизмов. Каждому антиэндоморфизму присваивается биполярный тип такой, что данный антиэндоморфизм содержится в базовом множестве антиэндоморфизмов данного биполярного типа. Поскольку для фиксированного индекса j базовые множества антиэндоморфизмов имеют пустое пересечение, каждому антиэндоморфизму будет соответствовать единственный биполярный тип. Таким образом, для каждого фиксированного j приходим к биполярной классификации антиэндоморфизмов произвольного n-группоида, где $n > 1$. Биполярная классификация антиэндоморфизмов группоида, полученная в работе [17], может быть получена как биполярная классификация антиэндоморфизмов 2-группоида с индексом $j = 2$. Таким образом, результаты данной работы обобщают результаты работы [17].

Теорема 2 устанавливает связь между биполярными типами антиэндоморфизмами (в биполярной классификации с индексом j) в паре изоморфных n-руппоидов. В настоящий момент не установлена связь между биполярными типами эндоморфизмов (из работы [21]) пары изоморфных n-группоидов. Теорема 3 дает способ вычисления биполярного типа всякого фиксированного антиэндоморфизма n-группоида в биполярной классификации с индексом j. Следствия 1, 2 и предложения 1, 2 направлены на изучение способов вычисления биполярных типов для некоторых конкретных классов n-группоидов и обычных группоидов.

В работе [17] выдвигалась гипотеза 1 о полугруде антиэндоморфизмов обычных группоидов специального вида, которая состоит из антиэндоморфизмов фиксированного смешанного биполярного типа. Истинность данной гипотезы тривиально вытекает из теоремы 4, которая дает полугруды антиэндоморфизмов одного фиксированного смешанного биполярного типа.

2. Основные определения и обозначения

В этом разделе $G = (G, f)$ — это n-группоид при $n > 1$. Действие n-арной операции f на элементах из G будем записывать в функциональной нотации, следовательно, результат применения операции f к элементам $x_1, \dots, x_n \in G$ будем обозначать через $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$;

аналогичный подход применялся в работах [1–3; 6; 7] и др. Симметрическую полугруппу всех преобразований множества G будем обозначать через $I(G)$, композицию преобразований α_1, α_2 из $I(G)$ — через $(\cdot)$, а действие композиции на элементе $g \in G$ будем определять равенством $(\alpha_1 \cdot \alpha_2)(g) = \alpha_1(\alpha_2(g))$.

Преобразование ϕ множества G называется *антиэндоморфизмом* данного n-группоида G тогда и только тогда, когда для любых элементов $x_1, \ldots, x_n \in G$ выполняется равенство

$$\phi(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(\phi(x_n), \phi(x_{n-1}), \ldots, \phi(x_1)).$$

Понятие антиэндоморфизм естественным образом получается из понятия антигомоморфизма. Множество всех антиэндоморфизмов n-группоида G будем обозначать через $\mathrm{Aend}(G)$.

Пусть k — натуральное число и X^k — декартова степень множества X (т. е. совокупность всех кортежей длины k с компонентами из множества X). Тогда через $\overline{x}$ будем обозначать кортежи из X^k. Если кортеж $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ лежит в X^k и α — это некоторое преобразование из $I(X)$, то будем использовать обозначения

$$\alpha(\overline{x}) := (\alpha(x_1), \alpha(x_2), \ldots, \alpha(x_k)), \quad [\overline{x}] := (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1),$$

в частности, $\alpha([\overline{x}]) = (\alpha(x_n), \alpha(x_{n-1}), \ldots, \alpha(x_1))$. Для каждого натурального $k > 1$ введем обозначение $J_k := \{1, 2, \ldots, k\}$.

Для всякого кортежа $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in G^{n-1}$ и любого $j \in J_n$ введем преобразование $h_{\overline{x}}^{(j)}$ из $I(G)$, которое на любом $y \in G$ действует по правилу

$$h_{\overline{x}}^{(j)}(y) := f(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, y, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{n-1}).$$

Преобразование $h_{\overline{x}}^{(j)}$ будем называть *внутренним j-м сдвигом* n-группоида G. Если $n = 2$ и $j = 2$, то преобразование $h_{\overline{x}}^{(j)}$ — это внутренний левый сдвиг обычного группоида (т. е. 2-группоида); если $n = 2$ и $j = 1$, то получаем внутренний правый сдвиг группоида. Для любого $n > 1$ преобразование $h_{\overline{x}}^{(n)}$ будем называть *левым сдвигом* n-группоида.

3. Биполярная классификация антиэндоморфизмов

Определение 1. Пусть $n > 1$ и G — это произвольный n-группоид. Множество всевозможных отображений $\gamma : G^{n-1} \to \{1, 2\}$ обозначим через $\mathrm{Bte}(n, G)$. Отображения из $\mathrm{Bte}(n, G)$ будем называть *биполярными типами эндоморфизмов группоида* (или просто биполярными типами). Если биполярный тип γ принимает значение 1 (аналогично, значение 2) на всех кортежах из G^{n-1}, то будем называть γ — *первым типом* (аналогично, вторым типом). Первый биполярный тип будем обозначать через A, а второй биполярный тип через Ω. Если биполярный тип γ не является константой на кортежах из G^{n-1}, то будем называть его *смешанным типом.*

Множество $\mathrm{Bte}(n, G)$, введенное выше, совпадает с соответствующим множеством из работы [21]. Следовательно, понятие *биполярный тип* определяется одинаково для биполярных классификаций эндоморфизмов и антиэндоморфизмов n-группоидов; остальные ключевые объекты, необходимые для построения этих классификаций, будут различаться. Централизатор преобразования α, как обычно, будем обозначать через $C(\alpha)$.

Определение 2. Пусть $n > 1$ и $j \in J_n$. Тогда для любого n-группоида G и всякого кортежа $\overline{s} \in G^{n-1}$ определим множества

$$U_j^{(1)}(\overline{s}) := \{\alpha \in C(h_{\overline{s}}^{(j)}) \mid h_{\overline{s}}^{(j)} = h_{\alpha[\overline{s}]}^{(n-j+1)}\},$$

$$U_j^{(2)}(\overline{s}) := \{\alpha \in I(G) \mid h_{\overline{s}}^{(j)} \neq h_{\alpha[\overline{s}]}^{(n-j+1)}, \;\; \alpha \cdot h_{\overline{s}}^{(j)} = h_{\alpha[\overline{s}]}^{(n-j+1)} \cdot \alpha\}.$$

Данные множества будем называть *типообразующими множествами.*

О п р е д е л е н и е 3. Пусть $n > 1$ и G — это n-группоид. Для всякого индекса $j \in J_n$ и всякого биполярного типа $\gamma \in \mathrm{Bte}(n, G)$ определим множество

$$T_j(\gamma) := \bigcap_{\overline{s} \in G^{n-1}} U_j^{(\gamma(\overline{s}))}(\overline{s}). \tag{3.1}$$

Множество $T_j(\gamma)$ будем называть *базовым множеством антиэндоморфизмов* типа γ с индексом j.

Теорема 1. *Пусть $n > 1$. Тогда для всякого n-группоида $G = (G, f)$ и всякого $j \in J_n$ справедливо равенство множеств*

$$\mathrm{Aend}(G) = \bigcup_{\gamma \in \mathrm{Bte}(n,G)} T_j(\gamma). \tag{3.2}$$

Кроме того, если τ и ω — два различных типа из $\mathrm{Bte}(n, G)$, *то пересечение множеств $T_j(\tau)$ и $T_j(\omega)$ пусто.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Полагаем, что ϕ — произвольный антиэндоморфизм n-группоида G и j — произвольный индекс из J_n. В силу определения антиэндоморфизма n-группоида G это возможно тогда и только тогда, когда для любых $x_1, \ldots, x_n \in G$ справедливо равенство

$$\phi(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(\phi(x_n), \phi(x_{n-1}), \ldots, \phi(x_1)). \tag{3.3}$$

Введем обозначение $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) \in G^{n-1}$ и запишем равенство (3.3) с помощью внутренних сдвигов. С одной стороны, верны соотношения

$$\phi(f(x_1, \ldots, x_n)) = \phi(h^{(j)}_{(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)}(x_j)) = (\phi \cdot h^{(j)}_{\overline{x}})(x_j).$$

С другой стороны, поскольку x_j (аналогично $\phi(x_j)$) в кортеже $[\overline{x}]$ (аналогично $\phi([\overline{x}])$) находится в позиции $(n - j + 1)$, выполняются равенства

$$f(\phi(x_n), \phi(x_{n-1}), \ldots, \phi(x_1)) = h^{(n-j+1)}_{(\phi(x_n), \phi(x_{n-1}), \ldots, \phi(x_{j+1}), \phi(x_{j-1}), \ldots, \phi(x_1))}(\phi(x_j)) = (h^{(n-j+1)}_{\phi[\overline{x}]} \cdot \phi)(x_j).$$

Таким образом, имеем тождество

$$(\phi \cdot h^{(j)}_{\overline{x}})(x_j) = (h^{(n-j+1)}_{\phi[\overline{x}]} \cdot \phi)(x_j),$$

которое показывает, что преобразование $\phi \in I(G)$ является антиэндоморфизмом тогда и только тогда, когда для любого $\overline{x} \in G^{n-1}$ и произвольного $y \in G$ выполняется соотношение

$$(\phi \cdot h^{(j)}_{\overline{x}})(y) = (h^{(n-j+1)}_{\phi[\overline{x}]} \cdot \phi)(y). \tag{3.4}$$

Условия (3.4) равносильны тому, что для любого $\overline{x} \in G^{n-1}$ выполняется равенство преобразований

$$\phi \cdot h^{(j)}_{\overline{x}} = h^{(n-j+1)}_{\phi[\overline{x}]} \cdot \phi. \tag{3.5}$$

2. Покажем, что выполняется равенство множеств

$$\mathrm{Aend}(G) = \bigcap_{\overline{x} \in G^{n-1}} (U_j^{(1)}(\overline{x}) \cup U_j^{(2)}(\overline{x})). \tag{3.6}$$

Для каждого $\overline{x}$ из G^{n-1} возможны две взаимоисключающие ситуации:

$$(\mathrm{I}): \quad h^{(n-j+1)}_{\phi[\overline{x}]} = h^{(j)}_{\overline{x}}; \quad (\mathrm{II}): \quad h^{(n-j+1)}_{\phi[\overline{x}]} \neq h^{(j)}_{\overline{x}}.$$

Полагаем, что ϕ — произвольный антиэндоморфизм n–группоида G. Значит, при любом $\overline{x} \in G^{n-1}$ выполняется тождество (3.5) и возможна альтернатива: либо (I), либо (II). Если выполняется условие (I), то соотношение (3.5) показывает, что преобразования ϕ и $h^{(j)}_{\overline{x}}$ перестановочны, поэтому множество $U^{(1)}_j(\overline{x})$ содержит антиэндоморфизм ϕ. Если выполняется условие (II), то из (3.5) следует, что множество $U^{(2)}_j(\overline{x})$ содержит антиэндоморфизм ϕ.

Для каждого $\overline{x} \in G^{n-1}$ введем обозначение $W_j(\overline{x}) := U^{(1)}_j(\overline{x}) \cup U^{(2)}_j(\overline{x})$. Мы доказали, что ϕ принадлежит множеству $W_j(\overline{x})$ при любом $\overline{x} \in G^{n-1}$. Поэтому ϕ принадлежит правой части равенства (3.6). Таким образом, множество всех антиэндоморфизмов n-группоида G является подмножеством множества из правой части (3.6).

Пусть α — произвольное преобразование из правой части формулы (3.6). Тогда при любом $\overline{x} \in G^{n-1}$ множество $W_j(\overline{x})$ содержит преобразование α.

Предположим, что α принадлежит множеству $U^{(1)}_j(\overline{y})$ при фиксированном $\overline{y} \in G^{n-1}$. Тогда имеют место равенства $\phi \cdot h^{(j)}_{\overline{y}} = h^{(j)}_{\overline{y}} \cdot \phi$, $h^{(n-j+1)}_{\phi[\overline{y}]} = h^{(j)}_{\overline{x}}$, которые дают соотношение $\phi \cdot h^{(j)}_{\overline{y}} = h^{(n-j+1)}_{\phi[\overline{y}]} \cdot \phi$. Поэтому формула (3.5) справедлива при $\phi = \alpha$ и $\overline{x} = \overline{y}$.

Допустим, что α принадлежит множеству $U^{(2)}_j(\overline{y})$ при фиксированном $\overline{y} \in G^{n-1}$. В этом случае определение множества $U^{(2)}_j(\overline{y})$ приводит к выполнению условия (3.5) при $\phi = \alpha$ и $\overline{x} = \overline{y}$.

Мы показали, что если $W_j(\overline{y})$ содержит α, то выполнение условия (3.5) возможно при $\phi = \alpha$ и $\overline{x} = \overline{y}$. Так как α — преобразование из правой части равенства (3.6), α принадлежит $W_j(\overline{x})$ при любом $\overline{x} \in G^{n-1}$. Поэтому при $\phi = \alpha$ условие (3.5) выполняется при любом $\overline{x}$ из G^{n-1}. Значит, преобразование α — антиэндоморфизм n-группоида G. Таким образом, множество из правой части равенства (3.6) является подмножеством множества из левой части. Следовательно, тождество (3.6) справедливо.

3. Покажем, что выполняется равенство (3.2). Пусть ϕ — произвольный антиэндоморфизм n-группоида G. Тогда ϕ принадлежит сечению $W_j(\overline{x})$ при любом $\overline{x}$ из G^{n-1}. Поэтому для любого $\overline{x} \in G^{n-1}$ выполняется альтернатива: либо $\phi \in U^{(1)}_j(\overline{x})$, либо $\phi \in U^{(2)}_j(\overline{x})$ (пересечение типообразующих множеств биполярного типа антиэндоморфизмов пусто для фиксированного $\overline{x}$). Для каждого антиэндоморфизма $\phi \in \mathrm{Aend}(G)$ введем отображение $d_\phi : G^{n-1} \to \{1, 2\}$ так, что для любого $\overline{x} \in G^{n-1}$ выполняются эквиваленции

$$d_\phi(\overline{x}) = 1 \Leftrightarrow \phi \in U^{(1)}_j(\overline{x}), \quad d_\phi(\overline{x}) = 2 \Leftrightarrow \phi \in U^{(2)}_j(\overline{x}).$$

Поскольку пересечение типообразующих множеств $U^{(1)}_j(\overline{x})$ и $U^{(2)}_j(\overline{x})$ пусто для любого $\overline{x}$ из G^{n-1}, d_ϕ — однозначное отображение (образ каждого элемента G^{n-1} под действием этого отображения определен однозначно). Поэтому d_ϕ принадлежит множеству $\mathrm{Bte}(n, G)$ (т. е. является биполярным типом). Определение отображения d_ϕ показывает, что антиэндоморфизм ϕ принадлежит каждому множеству семейства типообразующих множеств $(U^{(d_\phi(\overline{x}))}_j(\overline{x}))_{\overline{x} \in G^{n-1}}$. Следовательно, базовое множество эндоморфизмов $T_j(d_\phi)$ содержит антиэндоморфизм ϕ. Так как ϕ в данных рассуждениях — это произвольный антиэндоморфизм, мы получаем включение

$$\mathrm{Aend}(G) \subseteq \bigcup_{\gamma \in \mathrm{Bte}(n,G)} T_j(\gamma).$$

Покажем теперь, что выполняется включение в обратную сторону. Пусть γ — произвольный тип из $\mathrm{Bte}(n, G)$ такой, что базовое множество антиэндоморфизмов $T_j(\gamma)$ непусто. Полагаем, что α — произвольное преобразование из множества $T_j(\gamma)$. Тогда преобразование α содержится в каждом множестве семейства множеств $(U^{(\gamma(\overline{x}))}_j(\overline{x}))_{\overline{x} \in G^{n-1}}$. Поэтому при любом $\overline{x} \in G^{n-1}$ множество $W(\overline{x})$ содержит преобразование α. Таким образом, α принадлежит пересечению из правой части равенства (3.6). Значит, α — антиэндоморфизм n-группоида G.

Мы доказали, что если базовое множество антиэндоморфизмов непусто, то оно состоит только из антиэндоморфизмов n-группоида G. Поэтому объединение всевозможных (т. е. объединение по всевозможным биполярным типам из $\mathrm{Bte}(n,G)$) базовых множеств с фиксированным индексом j антиэндоморфизмов n-группоида G является подмножеством в множестве $\mathrm{Aend}(G)$. Равенство множеств (3.1) доказано.

4. Покажем, что базовые множества эндоморфизмов разных типов имеют пустое пересечение. Пусть τ и ω — два различных биполярных типа n-группоида G. В этом случае существует $\overline{x} \in G^{n-1}$ такой, что $\tau(\overline{x})$ и $\omega(\overline{x})$ — различные элементы из $\{1,2\}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\tau(\overline{x}) = 1$ и $\omega(\overline{x}) = 2$. Пусть ϕ — произвольный антиэндоморфизм из базового множества $T_j(\tau)$. Тогда выполняется условие $\phi \in U_j^{(1)}(\overline{x})$. Поэтому $\phi \notin U_j^{(2)}(\overline{x})$. Но все эндоморфизмы из $T_j(\omega)$ принадлежат множеству $U_j^{(2)}(\overline{x})$. Поэтому пересечение $T_j(\tau)$ и $T_j(\omega)$ пусто.

Теорема доказана.

Биполярная классификация антиэндоморфизмов с индексом j. Теорема 1 показывает, что при $n > 1$ для каждого фиксированного $j \in J_n$ множество всех антиэндоморфизмов n-группоидов распадается в объединение попарно непересекающихся базовых множеств антиэндоморфизмов с индексом j.

Пусть j — фиксированный индекс из J_n. Тогда к *биполярной классификации антиэндоморфизмов с индексом* j приводит следующее присвоение типов: антиэндоморфизм ϕ — антиэндоморфизм типа γ относительно индекса j (или просто типа γ), если $\phi \in T_j(\gamma)$.

Удобно пользоваться следующей терминологией: ϕ — это антиэндоморфизм *первого типа*, если $\phi \in T_j(A)$; ϕ — это антиэндоморфизм *второго типа*, если $\phi \in T_j(\Omega)$; ϕ — это антиэндоморфизм *смешанного типа*, если $\phi \in T_j(\gamma)$ и γ — это смешанный биполярный тип.

Если $n = 2$ и $j = 2$, то биполярная классификация антиэндоморфизмов с индексом j совпадает с биполярной классификацией антиэндоморфизмов 2-группоида, построенной в работе [17]. В самом деле, если одноэлементные кортежи (x) отождествить с элементом x, то для $j = 2$ будут выполняться равенства множеств $U^{(1)}(s) = U_j^{(1)}((s))$ и $U^{(2)}(s) = U_j^{(2)}((s))$, где $U^{(1)}(s), U^{(2)}(s)$ — это множества из работы [17] (см. определение 4).

4. Биполярные типы эндоморфизмов изоморфных группоидов

В данном разделе исследуется, как между собой связаны биполярные типы антиэндоморфизмов из множеств $\mathrm{Aend}(G)$ и $\mathrm{Aend}(G')$, когда n-группоиды G и G' изоморфны. Основной результат раздела представлен в теореме 2.

Пусть $G = (G,f)$ и $G' = (G',f')$ — два изоморфных n-группоида и отображение $\zeta : G \to G'$ осуществляет изоморфизм между ними. Данных обозначений мы придерживаемся во всем разделе. По определению это означает, что для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$ выполняется тождество: $\zeta(f(x_1,\ldots,x_n)) = f'(\zeta(x_1),\ldots,\zeta(x_n))$. Каждому преобразованию $\alpha \in I(G)$ поставим в соответствие преобразование $\alpha' \in I(G')$, которое на каждом элементе $g' \in G'$ действует по правилу

$$\alpha'(g') = \zeta(\alpha(g)), \tag{4.1}$$

где $g = \zeta^{-1}(g')$. Равенство (4.1) можно записать в виде $\alpha'(\zeta(g)) = \zeta(\alpha(g))$ или $\alpha' = \zeta \cdot \alpha \cdot \zeta^{-1}$. Таким образом, для каждого изоморфизма n-группоидов G и G' мы ввели отображение $(')$: $I(G) \to I(G')$. Будем говорить, что *изоморфизм* ζ *индуцирует отображение* $(')$.

Ограничение на множестве $\mathrm{Aend}(G)$ отображения $(')$ дает отображение $\zeta_{aend} : \mathrm{Aend}(G) \to I(G')$, которое на любом антиэндоморфизме α из $\mathrm{Aend}(G)$ действует по правилу: $\zeta_{aend}(\alpha) = \alpha'$, где α' определяется равенством (4.1).

Лемма 1. *Пусть ζ — это изоморфизм n-группоидов G и G', который индуцирует отображение $(')$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Отображение* $(')$: $I(G) \to I(G')$, *заданное правилом* (4.1), *является изоморфизмом моноидов* $(I(G), \cdot)$ *и* $(I(G'), \cdot)$.

2. *Справедливо равенство*

$$\mathrm{Aend}(G') = \zeta_{aend}(\mathrm{Aend}(G)). \tag{4.2}$$

Доказательство. Введем отображение $('')$: $I(G') \to I(G)$, заданное правилом: $\beta'' = \zeta^{-1} \cdot \beta \cdot \zeta$ для любого $\beta \in I(G')$. Несложно убедиться, что отображение $('')$ является обратным к отображению $(')$. Поэтому отображение $(')$ — это биекция из множества $I(G)$ на множество $I(G')$. Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in I(G)$ и $g' \in G'$. Тогда прямое вычисление элементов $(\alpha_1 \cdot \alpha_2)'(g')$ и $(\alpha_1' \cdot \alpha_2')(g')$ показывает, что $(')$ — это изоморфизм моноидов $I(G)$ и $I(G')$. Первое утверждение леммы доказано. Непосредственная проверка позволяет убедиться в том, что $\zeta_{aend}(\mathrm{Aend}(G))$ — это подмножество множества $\mathrm{Aend}(G')$; верно и обратное включение. Поэтому выполняется равенство (4.2).

Лемма доказана.

Внутренние сдвиги n-группоида G будем обозначать через $h_{\overline{x}}^{(j)}$, а внутренние сдвиги n-группоида G' — через $\tilde{h}_{\overline{x}}^{(j)}$. Для всякого изоморфизма $\zeta : G \to G'$ и всякого кортежа $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in G^{n-1}$ введем обозначение

$$\zeta(\overline{x}) := (\zeta(x_1), \ldots, \zeta(x_n)) \in (G')^{n-1}.$$

Лемма 2. *Пусть отображение* $\zeta : G \to G'$ *является изоморфизмом* G *и* G'. *Тогда для всякого кортежа* $\overline{x} \in G^{n-1}$, *всякого индекса* $j \in J_n$ *и любого элемента* $y \in G$ *выполняются равенства*

$$(h_{\overline{x}}^{(j)})'(\zeta(y)) = \zeta(h_{\overline{x}}^{(j)}(y)) = \tilde{h}_{\zeta(\overline{x})}^{(j)}(\zeta(y)), \tag{4.3}$$

где $\tilde{h}_{\zeta(\overline{x})}^{(j)}$ — *это внутренний сдвиг для кортежа* $\zeta(\overline{x})$ *в* n-*группоиде* G' *и* $(')$ — *это отображение, определенные равенством* (4.1).

Доказательство. В силу (4.1) для любых $\overline{x} \in G^{n-1}$, $j \in J_n$ и $y \in G$ имеем равенства

$$(h_{\overline{x}}^{(j)})'(\zeta(y)) = \zeta(h_{\overline{x}}^{(j)}(y)). \tag{4.4}$$

С другой стороны, для любых $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in G^{n-1}$ и $y \in G$ выполняется равенство

$$\zeta(f(x_1, \ldots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \ldots, x_{n-1})) = f'(\zeta(x_1), \ldots, \zeta(x_{j-1}), \zeta(y), \zeta(x_{j+1}), \ldots, \zeta(x_{n-1})),$$

которое приводит к соотношениям

$$\zeta(f(x_1, \ldots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \ldots, x_{n-1})) = \zeta(h_{\overline{x}}^{(j)}(y)),$$

$$f'(\zeta(x_1), \ldots, \zeta(x_{j-1}), \zeta(y), \zeta(x_{j+1}), \ldots, \zeta(x_{n-1})) = \tilde{h}_{\zeta(\overline{x})}^{(j)}(\zeta(y)).$$

Поэтому имеет место равенство $\zeta(h_{\overline{x}}^{(j)}(y)) = \tilde{h}_{\zeta(\overline{x})}^{(j)}(\zeta(y))$, которое вместе с формулой (4.4) дает тождества (4.3).

Лемма доказана.

Пусть α — антиэндоморфизм n-группоида G. Тогда через $\Upsilon_{\alpha}^{(j)}$ будем обозначать биполярный тип антиэндоморфизма α в биполярной классификации с индексом j.

Теорема 2. *Пусть* $\zeta : G \to G'$ — *изоморфизм* n-*группоидов* G *и* G'. *Тогда для любого индекса* $j \in J_n$, *любого кортежа* $\overline{s} \in G^{n-1}$ *и всякого* $\alpha \in \mathrm{Aend}(G)$ *справедливо равенство*

$$\Upsilon_{\alpha'}^{(j)}(\zeta(\overline{s})) = \Upsilon_{\alpha}^{(j)}(\overline{s}), \tag{4.5}$$

где $\alpha' = \zeta_{aend}(\alpha)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Полагаем, что антиэндоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aend}(G)$ удовлетворяет включению $\alpha \in U_j^{(1)}(\overline{s})$ для некоторого $\overline{s} \in G^{n-1}$. То есть выполняется равенство $\Upsilon_\alpha(\overline{s}) = 1$. Покажем, что антиэндоморфизм $\alpha' = \zeta_e(\alpha)$ группоида G' удовлетворяет включению $\alpha' \in U_j^{(1)}(\zeta(\overline{s}))$, где множество $U_j^{(1)}(\zeta(\overline{s}))$ — это подмножество в множестве $I(G')$. Действительно, так как множество $U_j^{(1)}(\overline{s})$ содержит антиэндоморфизм α, выполняются равенства (см. определение типообразующих множеств)

$$h_{\overline{s}}^{(j)} = h_{\alpha[\overline{s}]}^{(n-j+1)}, \quad \alpha \cdot h_{\overline{s}}^{(j)} = h_{\overline{s}}^{(j)} \cdot \alpha. \tag{4.6}$$

Применяя к первой из (4.6) формуле отображение $(')$ и учитывая лемму 2, имеем

$$(h_{\overline{s}}^{(j)})' = \tilde{h}_{\zeta(\overline{s})}^{(j)}, \quad (h_{\alpha[\overline{s}]}^{(n-j+1)})' = \tilde{h}_{\zeta(\alpha[\overline{s}])}^{(n-j+1)}, \quad \tilde{h}_{\zeta(\overline{s})}^{(j)} = \tilde{h}_{\zeta(\alpha[\overline{s}])}^{(n-j+1)}. \tag{4.7}$$

Применяя отображение $(')$ ко второму равенству из (4.6), учитывая леммы 1 и 2, получаем

$$(\alpha \cdot h_{\overline{s}}^{(j)})' = \alpha' \cdot (h_{\overline{s}}^{(j)})' = \alpha' \cdot \tilde{h}_{\zeta(\overline{s})}^{(j)}, \quad (h_{\overline{s}}^{(j)} \cdot \alpha)' = (h_{\overline{s}}^{(j)})' \cdot \alpha' = \tilde{h}_{\zeta(\overline{s})}^{(j)} \cdot \alpha', \tag{4.8}$$

$$\alpha' \cdot \tilde{h}_{\zeta(\overline{s})}^{(j)} = \tilde{h}_{\zeta(\overline{s})}^{(j)} \cdot \alpha'.$$

Формулы (4.7) и (4.8) дают соотношения $\tilde{h}_{\zeta(\overline{s})}^{(j)} = \tilde{h}_{\zeta(\alpha[\overline{s}])}^{(n-j+1)}$, $\alpha' \cdot \tilde{h}_{\zeta(\overline{s})}^{(j)} = \tilde{h}_{\zeta(\overline{s})}^{(j)} \cdot \alpha'$. Поскольку $\zeta(\alpha(g)) = \alpha'(\zeta(g))$ (см. вторую форму (4.1)), для любого $\overline{s} \in G^{n-1}$ (отметим, что по определению $[\overline{s}] \in G^{n-1}$) выполняется равенство $\zeta(\alpha(\overline{s})) = \alpha'(\zeta(\overline{s}))$. Поэтому имеем

$$\tilde{h}_{\zeta(\overline{s})}^{(j)} = \tilde{h}_{\alpha'(\zeta([\overline{s}]))}^{(n-j+1)}, \quad \alpha' \cdot \tilde{h}_{\zeta(\overline{s})}^{(j)} = \tilde{h}_{\zeta(\overline{s})}^{(j)} \cdot \alpha'.$$

Таким образом, мы показали, что $\alpha' \in U_j^{(1)}(\zeta(\overline{s}))$. Значит, верно равенство $\Upsilon_{\alpha'}(\zeta(\overline{s})) = 1$.

2. Полагаем, что антиэндоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aend}(G)$ удовлетворяет условию $\alpha \in U^{(2)}(\overline{s})$ для некоторого $\overline{s} \in G^{n-1}$. Значит, $\Upsilon_\alpha(\overline{s}) = 2$. Тогда справедливы соотношения

$$h_{\overline{s}}^{(j)} \neq h_{\alpha[\overline{s}]}^{(n-j+1)}, \quad \alpha \cdot h_{\overline{s}}^{(j)} = h_{\alpha[\overline{s}]}^{(n-j+1)} \cdot \alpha. \tag{4.9}$$

Поскольку $(')$ — это изоморфизм $I(G)$ и $I(G')$, для любых $\theta_1, \theta_2 \in I(G)$ из соотношения $\theta_1 \neq \theta_2$ следует неравенство $\theta_1' \neq \theta_2'$. Применяя к неравенству из (4.9) отображение $(')$ и учитывая леммы 1 и 2, получаем

$$(h_{\overline{s}}^{(j)})' = \tilde{h}_{\zeta(\overline{s})}^{(j)}, \quad (h_{\alpha[\overline{s}]}^{(n-j+1)})' = \tilde{h}_{\zeta(\alpha[\overline{s}])}^{(n-j+1)}, \quad \tilde{h}_{\zeta(\overline{s})}^{(j)} \neq \tilde{h}_{\zeta(\alpha[\overline{s}])}^{(n-j+1)}. \tag{4.10}$$

Применяя отображение $(')$ ко второму равенству из (4.9), имеем

$$(\alpha \cdot h_{\overline{s}}^{(j)})' = \alpha' \cdot (h_{\overline{s}}^{(j)})' = \alpha' \cdot \tilde{h}_{\zeta(\overline{s})}^{(j)}, \tag{4.11}$$

$$(h_{\alpha[\overline{s}]}^{(n-j+1)} \cdot \alpha)' = (h_{\alpha[\overline{s}]}^{(n-j+1)})' \cdot \alpha' = \tilde{h}_{\zeta(\alpha[\overline{s}])}^{(n-j+1)} \cdot \alpha', \quad \alpha' \cdot \tilde{h}_{\zeta(\overline{s})}^{(j)} = \tilde{h}_{\zeta(\alpha[\overline{s}])}^{(n-j+1)} \cdot \alpha'.$$

Соотношения (4.11) и (4.10) дают условия

$$\tilde{h}_{\zeta(\overline{s})}^{(j)} \neq \tilde{h}_{\zeta(\alpha[\overline{s}])}^{(n-j+1)}, \quad \alpha' \cdot \tilde{h}_{\zeta(\overline{s})}^{(j)} = \tilde{h}_{\zeta(\alpha[\overline{s}])}^{(n-j+1)} \cdot \alpha'.$$

Поскольку $\zeta(\alpha(\overline{s})) = \alpha'(\zeta(\overline{s}))$, имеем условия

$$\tilde{h}_{\zeta(\overline{s})}^{(j)} \neq \tilde{h}_{\alpha'(\zeta([\overline{s}]))}^{(n-j+1)}, \quad \alpha' \cdot \tilde{h}_{\zeta(\overline{s})}^{(j)} = \tilde{h}_{\alpha'(\zeta([\overline{s}]))}^{(n-j+1)} \cdot \alpha'.$$

Таким образом, мы показали, что $\alpha' \in U_j^{(2)}(\zeta(\overline{s}))$. Значит, верно равенство $\Upsilon_{\alpha'}(\zeta(\overline{s})) = 2$.

Мы показали, что равенство (4.5) выполняется для любых $\alpha \in \mathrm{Aend}(G)$ и $\overline{s} \in G^{n-1}$. В самом деле, для всякого антиэндоморфизма $\alpha \in \mathrm{Aend}(G)$ и всякого кортежа $\overline{s} \in G^{n-1}$ выполняется альтернатива: либо $\alpha \in U_j^{(1)}(\overline{s})$, либо $\alpha \in U_j^{(2)}(\overline{s})$.

Теорема доказана.

В силу леммы 1 $(')$ — изоморфизм моноидов $I(G)$ и $I(G')$. Поскольку отображение ζ_e является ограничением отображения $(')$ на множестве $\mathrm{Aend}(G)$ и выполняется (4.2), ζ_e — биекция соответствующих множеств. Значит, равенство (4.5) позволяет вычислять биполярные типы всех антиэндоморфизмов n-группоида G' с помощью биполярных типов антиэндоморфизмов n-группоида G.

5. Вычисление биполярного типа антиэндоморфизма

Пусть $G = (G, f)$ — это n-группоид, где $n > 1$. Тогда для каждого $j \in J_n$ и $\overline{s} \in G^{n-1}$ введем обозначение
$$R(j, \overline{s}) := \{\overline{g} \in G^{n-1} \mid h_{[\overline{g}]}^{(n-j+1)} = h_{\overline{s}}^{(j)}\}.$$

Теорема 3. *Пусть $n > 1$ и G — это n-группоид. Тогда для любого индекса $j \in J_n$, всякого антиэндоморфизма $\phi \in \mathrm{Aend}(G)$ и любого кортежа $\overline{s} \in G^{n-1}$ выполняются эквиваленции*
$$\Upsilon_\phi^{(j)}(\overline{s}) = 1 \Leftrightarrow \phi(\overline{s}) \in R(j, \overline{s}), \quad \Upsilon_\phi^{(j)}(\overline{s}) = 2 \Leftrightarrow \phi(\overline{s}) \notin R(j, \overline{s}). \tag{5.1}$$

Доказательство. Пусть выполняется условие $\Upsilon_\phi^{(j)}(\overline{s}) = 1$. В этом случае множество $U_j^{(1)}(\overline{s})$ содержит антиэндоморфизм ϕ. Следовательно, выполняется равенство преобразований $h_{\overline{s}}^{(j)} = h_{\phi[\overline{s}]}^{(n-j+1)}$. Несложно убедиться, что $\alpha[\overline{m}] = [\alpha(\overline{m})]$ для любого $\overline{m} \in G^{n-1}$. Поэтому имеем соотношения
$$h_{\overline{s}}^{(j)} = h_{\phi[\overline{s}]}^{(n-j+1)} = h_{[\phi(\overline{s})]}^{(n-j+1)}, \tag{5.2}$$
которые показывают, что $\phi(\overline{s}) \in R(j, \overline{s})$.

Пусть $\phi(\overline{s}) \in R(j, \overline{s})$. Тогда выполняются соотношения (5.2). Поскольку ϕ — это антиэндоморфизм n-группоида G (по условию теоремы), множество $U_j^{(1)}(\overline{s})$ содержит антиэндоморфизм ϕ. Таким образом, мы показали истинность первой эквиваленции из (5.1).

Поскольку первая эквиваленция из (5.1) выполняется и верна следующая альтернатива:
$$\text{либо } \Upsilon_\phi^{(j)}(\overline{s}) = 1, \text{ либо } \Upsilon_\phi^{(j)}(\overline{s}) = 2,$$
выполняется и вторая эквиваленция из (5.1).

Теорема доказана.

Пусть $n > 1$. Будем говорить, что n-группоид G принадлежит классу $\mathcal{K}(n, j)$, если для любых $\overline{x}, \overline{y} \in G^{n-1}$ выполняется эквиваленция $h_{[\overline{x}]}^{(n-j+1)} = h_{\overline{y}}^{(j)} \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y}$. Пусть G — это обычный группоид (т. е. 2-группоид). В этом случае $G \in \mathcal{K}(2, 1)$ тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in G$ выполняется эквиваленция $l_x = r_y \Leftrightarrow x = y$, где l_x — это левый сдвиг элемента x и r_y — это правый сдвиг элемента y. В самом деле, при $n = 2$, $j = 1$ для любых $\overline{x}, \overline{y} \in G^1$ и $t \in G$ имеем равенства
$$[\overline{x}] = [(x)] = (x), \quad \overline{y} = (y),$$
$$h_{[\overline{x}]}^{(n-j+1)}(t) = h_{(x)}^{(2)}(t) = x * t = l_x(t), \quad h_{\overline{y}}^{(j)}(t) = h_{(y)}^{(1)}(t) = t * y = r_y(t). \tag{5.3}$$

Следствие 1. *Пусть $n > 1$, $j \in J_n$ и $G \in \mathcal{K}(n, j)$. Тогда для любого антиэндоморфизма $\phi \in \mathrm{Aend}(G)$ и любого кортежа $\overline{s} \in G^{n-1}$ выполняются эквиваленции*
$$\Upsilon_\phi^{(j)}(\overline{s}) = 1 \Leftrightarrow \phi(\overline{s}) = \overline{s}, \quad \Upsilon_\phi^{(j)}(\overline{s}) = 2 \Leftrightarrow \phi(\overline{s}) \neq \overline{s}. \tag{5.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $G \in \mathcal{K}(n, j)$, из определения множества $R(j, \overline{s})$ и класса $\mathcal{K}(n, j)$ следуют равенства множеств

$$R(j, \overline{s}) = \{\overline{g} \in G^{n-1} \mid h_{[\overline{g}]}^{(n-j+1)} = h_{\overline{s}}^{(j)}\} = \{\overline{g} \in G^{n-1} \mid \overline{g} = \overline{s}\} = \{\overline{s}\}. \quad (5.5)$$

Эквиваленции (5.4) выводятся из теоремы 3 и равенства множеств (5.5).

Следствие доказано.

Из этого утверждения и соотношений (5.3) легко выводится следствие, приведенное ниже.

Следствие 2. *Справедливы утверждения.*

1. *Пусть G — это группоид. Тогда для любого антиэндоморфизма $\phi \in \mathrm{Aend}(G)$ и любого элемента $s \in G$ выполняются эквиваленции*

$$\Upsilon_{\phi}^{(1)}(s) = 1 \Leftrightarrow \phi(s) \in \{g \in G \mid l_g = r_s\}, \quad \Upsilon_{\phi}^{(1)}(s) = 2 \Leftrightarrow \phi(s) \notin \{g \in G \mid l_g = r_s\}.$$

2. *Пусть G — это группоид из класса $\mathcal{K}(2, 1)$. Тогда для любого антиэндоморфизма ϕ из $\mathrm{Aend}(G)$ и любого элемента $s \in G$ выполняются эквиваленции*

$$\Upsilon_{\phi}^{(1)}(s) = 1 \Leftrightarrow \phi(s) = s, \quad \Upsilon_{\phi}^{(1)}(s) = 2 \Leftrightarrow \phi(s) \neq s.$$

Предложение 1. *Класс группоидов $\mathcal{K}(2, 1)$ состоит из коммутативных группоидов. Существуют коммутативные группоиды, которые не принадлежат классу $\mathcal{K}(2, 1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению 2-группоид G (т. е. обычный группоид G) входит в класс группоидов $\mathcal{K}(2, 1)$ тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in G$ выполняется эквиваленция

$$r_x = l_y \Leftrightarrow x = y. \quad (5.6)$$

Пусть $G = (G, *)$ — это группоид из $\mathcal{K}(2, 1)$. Предположим, что G — не коммутативный группоид. Тогда существуют $x_1, y_1 \in G$ такие, что $x_1 * y_1 \neq y_1 * x_1$, следовательно, выполняются соотношения

$$l_{x_1}(y_1) = x_1 * y_1 \neq y_1 * x_1 = r_{x_1}(y_1) \Rightarrow l_{x_1}(y_1) \neq r_{x_1}(y_1).$$

Неравенство $l_{x_1}(y_1) \neq r_{x_1}(y_1)$ противоречит эквиваленции (5.6). Поэтому G — это коммутативный группоид.

Приведем явный пример группоида, который является коммутативным, но не удовлетворяет эквиваленции (5.6). Для произвольного преобразования α множества $G := \{1, 2, 3\}$ будем использовать следующее стандартное обозначение: $\alpha = (\alpha(1), \alpha(2), \alpha(3))$. Операцию на множестве G определим системой левых сдвигов:

$$l_1 = (1, 1, 3), \quad l_2 = (1, 1, 3), \quad l_3 = (3, 3, 2) \Rightarrow r_1 = (1, 1, 3), \quad r_2 = (1, 1, 3), \quad r_3 = (3, 3, 2).$$

Несложно убедиться, что группоид G — это коммутативный группоид и G не удовлетворяет эквиваленции (5.6). Действительно, последнее вытекает из равенства $l_1 = r_2$.

Предложение доказано.

Если G — это коммутативный группоид, то каждый антиэндоморфизм этого группоида является эндоморфизмом этого группоида (верно и обратное; тривиально вытекает из определения антиэндоморфизма и эндоморфизма). Через Γ_{ϕ} будем обозначать биполярный тип эндоморфизма группоида.

Предложение 2. *Если $G \in \mathcal{K}(2, 1)$, то для любого антиэндоморфизма ϕ этого группоида и любого элемента $g \in G$ выполняется равенство $\Upsilon_{\phi}^{(1)}(g) = \Gamma_{\phi}(g)$, где Γ_{ϕ} — это биполярный тип эндоморфизма ϕ группоида G.*

Доказательство. Поскольку G — это коммутативный группоид, для любого его антиэндоморфизма ϕ можно рассматривать как биполярный тип антиэндоморфизма $(\Upsilon_{\phi}^{(1)})$, так и биполярный тип эндоморфизма (Γ_{ϕ}). По определению биполярного типа антиэндоморфизма относительно индекса j и определению биполярного типа эндоморфизма (см. работы [16; 22]) для любого $g \in G$ имеем следующие соотношения:

$$\Gamma_{\phi}(g) = 1 \Leftrightarrow \phi \in L^{(1)}(g), \quad \Gamma_{\phi}(g) = 2 \Leftrightarrow \phi \in L^{(2)}(g), \tag{5.7}$$

$$\Upsilon^{(1)}(g) = 1 \Leftrightarrow \phi \in U_1^{(1)}(g), \quad \Upsilon^{(1)}(g) = 2 \Leftrightarrow \phi \in U_1^{(2)}(g). \tag{5.8}$$

Поскольку $G \in \mathcal{K}(2,1)$, для G выполняется эквиваленция (5.6). Используя эту эквиваленцию и определение множеств $L^{(1)}(g)$ и $L^{(2)}(g)$ (см. работы [16] или [22]), получаем, что для любого $g \in G$ выполняются равенства множеств $L^{(1)}(g) = U_1^{(1)}(g)$, $L^{(2)}(g) = U_1^{(2)}(g)$. Эти равенства и эквиваленции (5.7) и (5.8) показывают, что отображения $\Upsilon_{\phi}^{(1)}$ и $\Gamma_{\phi}(g)$ совпадают поточечно.

Предложение доказано.

Доказанное предложение показывает, что второе утверждение следствия 2 является частным случаем теоремы 2.2 из работы [22]. Теорема 2.2 из [22] более общая. Действительно, в ней от группоида требуется, чтобы все левые сдвиги были попарно различны (это выполняется для всех группоидов из $\mathcal{K}(2,1)$), и не требуется коммутативность. В случае, если группоид не коммутативный, то антиэндоморфизмы не обязаны совпадать с эндоморфизмами.

6. Полугруды

Пусть $G = (G, f)$ — это 3-группоид. Если для любых $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in G$ выполняются соотношения

$$f(f(x_1, x_2, x_3), x_4, x_5) = f(x_1, f(x_2, x_3, x_4), x_5) = f(x_1, x_2, f(x_3, x_4, x_5)), \tag{6.1}$$

то такие 3-группоиды называются *полугрудами* (см. работу [23]), а операцию f называют *косоассоциативной*. Соотношение (6.1) является аналогом ассоциативности в 3-группоиде.

Пусть $G = (G, *)$ — это n-группоид, где $n > 1$. Множество всех антиэндоморфизмов n-группоида, в общем случае, не замкнуто относительно композиции преобразований, но произведение любых трех антиэндоморфизмов n-группоида снова будет антиэндоморфизмом этого n-группоида. Действительно, для любых элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$ и всяких антиэндоморфизмов $\alpha, \beta, \tau \in \mathrm{Aend}(G)$ выполняются равенства

$$(\alpha \cdot \beta \cdot \tau)\big(f(x_1, x_2 \ldots, x_n)\big) = (\alpha \cdot \beta)\big(f(\tau(x_n), \tau(x_{n-1}), \ldots, \tau(x_1))\big)$$

$$= \alpha\big(f\big(\beta(\tau(x_1)), \beta(\tau(x_2)), \ldots, \beta(\tau(x_n))\big)\big) = f\big(\alpha(\beta(\tau(x_n))), \alpha(\beta(\tau(x_{n-1}))), \ldots \alpha(\beta(\tau(x_1)))\big).$$

Таким образом, на множестве $\mathrm{Aend}(G)$ можно ввести тернарную алгебраическую операцию q, определенную тождеством $q(\alpha, \beta, \tau) = \alpha \cdot \beta \cdot \tau$, где $\alpha, \beta, \tau \in \mathrm{Aend}(G)$. Ассоциативность композиции преобразований приводит к тому, что для операции q будут выполняться соотношения (6.1).

Алгебраическую систему $\mathrm{Aend}(G) = (\mathrm{Aend}(G), q)$ будем называть *полугрудой всех антиэндоморфизмов* n-группоида G. *Подсистемой* в $\mathrm{Aend}(G)$ будем называть любое подмножество множества всех антиэндоморфизмов, замкнутое относительно операции q. Таким образом, H — подсистема в $\mathrm{Aend}(G)$ тогда и только тогда, когда для любых $\alpha, \beta, \tau \in H$ выполняется вхождение $q(\alpha, \beta, \tau) \in H$. Для каждой подсистемы полугруды $\mathrm{Aend}(G)$ будет выполняться условие (6.1). Поэтому подсистему полугруды всех антиэндоморфизмов будем называть *подполугрудой* в полугруде всех антиэндоморфизмов.

7. Полугруды антиэндоморфизмов смешанного типа

Пусть G — это n-группоид, где $n > 1$. Тогда для каждого $j \in J_n$ и $\overline{s} \in G^{n-1}$ определим следующие множества:

$$\overline{R}(j,\overline{s}) := G^{n-1} \setminus R(j,\overline{s}) = \{\overline{g} \in G^{n-1} \mid h_{[\overline{g}]}^{(n-j+1)} \neq h_{\overline{s}}^{(j)}\};$$

$$O(j,\overline{s}) := \begin{cases} \{\alpha \in I(G) \mid \alpha(R(j,\overline{s})) \subseteq R(j,\overline{s})\}, & \text{если } R(j,\overline{s}) \neq \varnothing, \\ \varnothing, & \text{если } R(j,\overline{s}) = \varnothing; \end{cases}$$

$$O'(j,\overline{s}) := \begin{cases} \{\alpha \in I(G) \mid \alpha(\overline{R}(j,\overline{s})) \subseteq \overline{R}(j,\overline{s})\}, & \text{если } \overline{R}(j,\overline{s}) \neq \varnothing, \\ \varnothing, & \text{если } \overline{R}(j,\overline{s}) = \varnothing. \end{cases}$$

В соответствии с договоренностями, введенными выше, для каждого $\alpha \in I(G)$ имеет место равенство $\alpha(R(j,\overline{s})) := \{\alpha(\overline{g}) \mid \overline{g} \in R(j,\overline{s})\}$. Аналогично определяется множество $\alpha(\overline{R}(j,\overline{s}))$. Для каждого смешанного биполярного типа $\gamma \in \mathrm{Bte}(n,G)$ введем множества

$$J_1(\gamma) := \{\overline{g} \in G^{n-1} \mid \gamma(\overline{s}) = 1\}, \quad J_2(\gamma) := \{\overline{g} \in G^{n-1} \mid \gamma(\overline{s}) = 2\}.$$

Для каждого индекса $j \in J_n$ и каждого смешанного биполярного типа $\gamma \in \mathrm{Bte}(n,G)$ в симметрической полугруппе $I(G)$ выделим множество преобразований

$$\mathrm{Mantiend}(j,\gamma,G) := V_1(j,\gamma,G) \cap V_2(j,\gamma,G),$$

где множества $V_1(j,\gamma,G)$ и $V_2(j,\gamma,G)$ вводятся равенствами

$$V_1(j,\gamma,G) := \Bigg(\bigcap_{\overline{s} \in J_1(\gamma)} (O(j,\overline{s}) \cap C(h_{\overline{s}}^{(j)}))\Bigg), \quad V_2(j,\gamma,G) := \Bigg(\bigcap_{\overline{s} \in J_2(\gamma)} (O'(j,\overline{s}) \cap U_j^{(2)}(\overline{s}))\Bigg).$$

Лемма 3. *Пусть $n > 1$, G — это n-группоид, $j \in J_n$ и $\gamma \in \mathrm{Bte}(n,G)$ — это смешанный биполярный тип. Если множество $\mathrm{Mantiend}(j,\gamma,G)$ непусто, то $V_1(j,\gamma,G)$ замкнуто относительно композиции трех преобразований.*

Доказательство. В силу определения множество преобразований $O(j,\overline{s})$ является полугруппой преобразований относительно композиции двух преобразований для любых $j \in J_n$ и $\overline{s} \in G^{n-1}$. Действительно, поскольку для всякого преобразования $\tau \in O(j,\overline{s})$ выполняется включение $\tau(R(j,\overline{s})) \subseteq R(j,\overline{s})$, для любых $\alpha,\beta \in O(j,\overline{s})$ справедливы соотношения

$$(\alpha \cdot \beta)(R(j,\overline{s})) = \alpha(\beta(R(j,\overline{s})) \subseteq \alpha(R(j,\overline{s})) \subseteq R(j,\overline{s}).$$

Поэтому множество $O(j,\overline{s})$ содержит преобразование $\alpha \cdot \beta$.

Хорошо известно, что централизатор любого преобразования — это полугруппа относительно композиции двух преобразований. Поэтому $C(h_{\overline{s}}^{(j)})$ — это полугруппа относительно композиции двух преобразований. Поскольку пересечение полугрупп снова является полугруппой, множество $V_1(j,\gamma,G)$ — полугруппа преобразований относительно композиции двух преобразований. Таким образом, множество $V_1(j,\gamma,G)$ замкнуто относительно композиции двух преобразований. Поэтому множество $V_1(j,\gamma,G)$ замкнуто и относительно композиции трех преобразований. Таким образом, если α,β,τ — это три произвольных преобразования из множества $\mathrm{Mantiend}(j,\gamma,G)$, то выполняется условие $\alpha \cdot \beta \cdot \tau \in V_1(j,\gamma,G)$.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $n > 1$, G — это n-группоид, $j \in J_n$ и $\gamma \in \mathrm{Bte}(n,G)$ — это смешанный биполярный тип. Если множество $\mathrm{Mantiend}(j,\gamma,G)$ непусто, то $V_2(j,\gamma,G)$ замкнуто относительно композиции трех преобразований.*

Доказательство. Множество $O'(j,\overline{s})$ является полугруппой относительно композиции двух преобразований. В самом деле, это доказывается аналогично случаю $O(j,\overline{s})$ из леммы 3. Следовательно, множество $O(j,\overline{s})$ замкнуто относительно композиции трех преобразований.

Пусть α,β,τ — это три произвольных преобразования из множества $V_2(j,\gamma,G)$. В силу определения множества $V_2(j,\gamma,G)$ получаем, что для любого $\overline{s}\in J_2(\gamma)$ множества $U_j^{(2)}(\overline{s})$ и $O'(j,\overline{s})$ содержат преобразования α,β,τ. Следовательно, для любого $\sigma\in\{\alpha,\beta,\tau\}$ и для любого кортежа $\overline{s}\in J_2(\gamma)$ выполняются условия

$$\sigma(\overline{R}(j,\overline{s}))\subseteq\overline{R}(j,\overline{s})),\quad h_{\overline{s}}^{(j)}\neq h_{\sigma[\overline{s}]}^{(n-j+1)},\quad \sigma\cdot h_{\overline{s}}^{(j)}=h_{\sigma[\overline{s}]}^{(n-j+1)}\cdot\sigma. \tag{7.1}$$

Поэтому выполняется условие

$$h_{\overline{s}}^{(j)}\neq h_{(\alpha\cdot\beta\cdot\tau)[\overline{s}]}^{(n-j+1)}=h_{[(\alpha\cdot\beta\cdot\tau)(\overline{s})]}^{(n-j+1)}. \tag{7.2}$$

Действительно, в силу второго условия из (7.1) имеем соотношения $h_{\overline{s}}^{(j)}\neq h_{\tau[\overline{s}]}^{(n-j+1)}=h_{[\tau(\overline{s})]}^{(n-j+1)}$, которые показывают, что множество $\overline{R}(j,\overline{s})$ содержит кортеж $\tau(\overline{s})$ (следует из определения множества $\overline{R}(j,\overline{s})$). Поэтому и в силу первого условия из (7.1) получаем, что кортежи $(\beta\cdot\tau)(\overline{s})$ и $(\alpha\cdot\beta\cdot\tau)(\overline{s})$ содержатся в множестве $\overline{R}(j,\overline{s})$. Мы показали справедливость условия (7.2).

Покажем, что выполняется равенство преобразований

$$(\alpha\cdot\beta\cdot\tau)\cdot h_{\overline{s}}^{(j)}=h_{(\alpha\cdot\beta\cdot\tau)[\overline{s}]}^{(n-j+1)}\cdot(\alpha\cdot\beta\cdot\tau). \tag{7.3}$$

В силу третьего условия из соотношений (7.1) и ассоциативности композиции преобразований справедливы следующие равенства:

$$(\alpha\cdot\beta\cdot\tau)\cdot h_{\overline{s}}^{(j)}=\alpha\cdot\big(\beta\cdot\big(\tau\cdot h_{\overline{s}}^{(n-j+1)}\big)\big)=\alpha\cdot\big(\beta\cdot\big(h_{\tau[\overline{s}]}^{(n-j+1)}\cdot\tau\big)\big)=\big[h_{\tau[\overline{s}]}^{(n-j+1)}=h_{[\tau(\overline{s})]}^{(n-j+1)}\big]$$
$$=\alpha\cdot\big(\big(h_{(\beta\cdot\tau)[\overline{s}]}^{(n-j+1)}\cdot\beta\big)\cdot\tau\big)=\big(\big(h_{(\alpha\cdot\beta\cdot\tau)[\overline{s}]}^{(n-j+1)}\cdot\alpha\big)\cdot\beta\big)\cdot\tau=h_{(\alpha\cdot\beta\cdot\tau)[\overline{s}]}^{(n-j+1)}\cdot(\alpha\cdot\beta\cdot\tau).$$

Мы показали справедливость равенства (7.3).

Поскольку соотношения (7.2) и (7.3) выполняются для любого $\overline{s}\in J_2(\gamma)$, для любого $\overline{s}\in J_2(\gamma)$ композиция $\alpha\cdot\beta\cdot\tau$ содержится в множестве $U_j^{(2)}(\overline{s})$; множество $U_j^{(2)}(\overline{s})$ в общем случае незамкнуто относительно композиции трех преобразований (в нашем случае мы существенно использовали вхождение $\alpha,\beta,\tau\in O(j,\overline{s})$). Поэтому и с учетом того, что множество $O(j,\overline{s})$ замкнуто относительно композиции трех преобразований, мы получаем, что множество $V_2(j,\gamma,G)$ замкнуто относительно композиции трех преобразований.

Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть $n>1$, G — это n-группоид, $j\in J_n$ и $\gamma\in\mathrm{Bte}(n,G)$ — это смешанный биполярный тип. Если множество* $\mathrm{Mantiend}(j,\gamma,G)$ *непусто, то оно является подполугрудой в полугруде* $\mathrm{Aend}(G)$. *Все антиэндоморфизмы из* $\mathrm{Mantiend}(j,\gamma,G)$ *имеют биполярный тип γ относительно индекса j.*

Доказательство. Пусть α,β,τ — это три произвольных преобразования из множества $\mathrm{Mantiend}(j,\gamma,G)$. В силу лемм 3 и 4 множества $V_1(j,\gamma,G)$ и $V_2(j,\gamma,G)$ замкнуты относительно композиции трех преобразований. В силу построения множества $\mathrm{Mantiend}(j,\gamma,G)$ преобразования α,β,τ содержатся в множествах $V_1(j,\gamma,G)$ и $V_2(j,\gamma,G)$. Поэтому множество $\mathrm{Mantiend}(j,\gamma,G)$ замкнуто относительно композиции трех преобразований.

Покажем, что множество $\mathrm{Mantiend}(j,\gamma,G)$ состоит из антиэндоморфизмов биполярного типа γ относительно индекса j. В силу определений множеств $O(j,\overline{s})$ и $O'(j,\overline{s})$ выполняются соотношения

$$V_1(j,\gamma,G)\subseteq\bigcap_{\overline{s}\in J_1(\gamma)}U_j^{(1)}(\overline{s}),\quad V_2(j,\gamma,G)\subseteq\bigcap_{\overline{s}\in J_2(\gamma)}U_j^{(2)}(\overline{s}).$$

Поэтому выполняются соотношения

$$\mathrm{Mantiend}(j,\gamma,G) = V_1(j,\gamma,G) \cap V_2(j,\gamma,G) \subseteq \left(\bigcap_{\overline{s}\in J_1(\gamma)} U_j^{(1)}(\overline{s})\right) \cap \left(\bigcap_{\overline{s}\in J_2(\gamma)} U_j^{(2)}(\overline{s})\right) = T_j(\gamma).$$

Таким образом, множество $\mathrm{Mantiend}(j,\gamma,G)$ является подмножеством базового множества антиэндоморфизмов $T_j(\gamma)$ биполярного типа γ в биполярной классификации с индексом j.

Теорема доказана.

В работе [17] строятся множества преобразований $U^{(1)}(s)$, $U^{(2)}(s)$, O_g, O'_g и вводится множество преобразований

$$\mathrm{Mantiend}(\gamma,G) := \left(\bigcap_{g\in J_1(\gamma)} (O_g \cap C(l_g))\right) \cap \left(\bigcap_{g\in J_2(\gamma)} (O'_g \cap U^{(2)}(s))\right).$$

По поводу этого множества высказывалась [17, гипотеза 1]: если множество $\mathrm{Mantiend}(\gamma,G)$ непусто, то оно состоит из антиэндоморфизмов биполярного типа γ и образует полугруду (относительно композиции трех преобразований).

Поскольку при $n=2$ и $j=2$ в любом n-группоиде выполняются равенства

$$U^{(1)}(s) = U_2^{(1)}(\overline{s}),\quad U^{(2)}(s) = U_2^{(2)}(\overline{s}),\quad O_s = O(2,\overline{s}),\quad O'_s = O'(2,\overline{s}),\quad h_{\overline{s}}^{(2)} = l_s\quad (\overline{s}=(s),\quad s\in G),$$

выполняется и равенство множеств $\mathrm{Mantiend}(\gamma,G) = \mathrm{Mantiend}(2,\gamma,G)$. Поэтому в силу теоремы 4 выполняется гипотеза 1 из [17].

В работе [17] для обычных группоидов строились монотипные полугруды антиэндоморфизмов первого и второго биполярного типа; см. теоремы 2 и 3 из [17]. Доказательство этих теорем должно без проблем переноситься на случай n-группоидов и биполярных классификаций с индексом j.

8. Открытые проблемы

Теорема 1 дает решение проблемы поэлементного описания полугруды всех антиэндоморфизмов произвольного n-группоида ($n>1$) с точностью до вычисления базовых множеств антиэндоморфизмов. Поэтому естественный интерес вызывает следующая открытая проблема.

Проблема 1. *Для произвольного n-группоида и произвольного индекса $j\in J_n$ привести поэлементное описание множеств $T_j(A), T_j(\Omega)$ и $T_j(\gamma)$, где γ — это произвольный смешанный биполярный тип.*

Теорема 3 дает некоторую информацию о том, как биполярный тип антиэндоморфизма n-группоида влияет на поведение антиэндоморфизма как преобразования носителя этого n-группоида. Исследование проблемы 1 должно дать более подробную информацию о поведение антиэндоморфизма некоторого биполярного типа.

Поскольку композиция трех антиэндоморфизмов $q(\phi_1,\phi_2,\phi_3)$ наделяет множество всех антиэндоморфизмов произвольного n-группоида структурой полугруды, интересна общая проблема, приведенная ниже.

Проблема 2. *Выяснить, для каких n-группоидов G существует индекс $j\in J_n$ и существует отображение $R:(\mathrm{Bte}(n,G))^3\to \mathrm{Bte}(n,G)$ такое, что для любых трех антиэндоморфизмов ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3 этого n-группоида выполняется равенство $\Upsilon^{(j)}_{q(\phi_1,\phi_2,\phi_3)} = R(\Upsilon^{(j)}_{\phi_1},\Upsilon^{(j)}_{\phi_2},\Upsilon^{(j)}_{\phi_3})$?*

Эта проблема направлена на изучение того, как можно вычислять биполярный тип композиции трех антиэндоморфизмов без вычисления композиции трех антиэндоморфизмов.

Интерес вызывает взаимосвязь базовых множеств антиэндоморфизмов с различными индексами.

Проблема 3. *Пусть G — это n-группоид. Выяснить, будет ли выполняться равенство множеств*

$$\{T_i(\omega) \mid \omega \in \mathrm{Bte}(n, G)\} = \{T_j(\omega) \mid \omega \in \mathrm{Bte}(n, G)\}$$

для любых $i, j \in J_n$?

Аналогичная проблема имеется для базовых множеств эндоморфизмов n-группоида. В самом деле, см. [21, гипотеза 2].

Заключение

Теоремы 1, 3 и следствия теоремы 3 могут быть полезны для исследования вопроса о поэлементном описании полугруды всех антиэндоморфизмов фиксированного n-группоида при $n > 1$ (т. е. описании антиэндоморфизмов как преобразований носителя n-группоида). Теоремы 2 и 4 могут применяться для исследования структурных свойств полугруды всех антиэндоморфизмов. Следствие 1 из теоремы 3 может иметь применение для исследования неподвижных точек преобразования $\Phi_\phi : G^{n-1} \to G^{n-1}$, когда ϕ — это антиэндоморфизм n-группоида G и преобразование Φ_ϕ — это покомпонентное действие антиэндоморфизма ϕ на кортежи из G^{n-1}.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Щучкин Н.А.** Гомоморфизмы из бесконечных полуциклических n-групп в полуабелеву n-группу // Чебышев. сб. 2021. Т. 22, № 1. С. 340–352
2. **Щучкин Н.А.** Эндоморфизмы полуциклических n-групп // Чебышев. сб. 2021. Т. 22, № 1. С. 353–369.
3. **Щучкин Н.А.** Конечно порожденные абелевы n-группы // Фундамент. и прикл. математика. 2023. Т. 24, № 4. С. 217–237.
4. **Гальмак А.М.** Степени элементов в l-арных группах специального вида. III // Проблемы физики, математики и техники. 2023. Т. 57, № 4. С. 60–63.
5. **Гальмак А.М.** Степени элементов в l-арных группах специального вида. II // Проблемы физики, математики и техники. 2023. Т. 56, № 3. С. 38–43.
6. **Давидов С.С.** О структуре медиальных делимых n-арных группоидов // Мат. заметки. 2018. Т. 104, № 1. С. 33–44. https://doi.org/10.4213/mzm11372
7. **Давидов С.С.** Свободные коммутативные медиальные n-арные группоиды // Дискрет. математика. 2015. Т. 27, № 1. С. 34–43. https://doi.org/10.4213/dm1313
8. **Давидов С.С.** О разрешимости эквациональной теории коммутативных медиальных n-арных группоидов // Дискрет. математика. 2013. Т. 25, № 1. С. 33–44. https://doi.org/10.4213/dm1225
9. **Черемушкин А.В.** Медиальные сильно зависимые n-арные операции // Дискрет. математика. 2020. Т. 32, № 2. С. 112–121. https://doi.org/10.4213/dm1610
10. **Решетников А.В.** О частичных n-арных группоидах, у которых каждое отношение эквивалентности является конгруэнцией // Чебышев. сб. 2016. Т. 17, № 1. С. 232–239.
11. **Решетников А.В.** О конгруэнциях частичных n-арных группоидов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 11, № 3. С. 46–51. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2011-11-3-2-46-51
12. **Щучкин Н.А.** Применение тернарных квазигрупп к преобразованию слов // Дискрет. математика. 2024. Т. 36, № 2. С. 132–143.
13. **Черемушкин А.В.** Теорема Поста для сильно зависимых n-арных полугрупп // Дискрет. математика. 2019. Т. 31, № 2. С. 152–157. https://doi.org/10.4213/dm1553
14. **Rattana A., Chinram R.** Applications of neutrosophic n-structures in n-ary groupoids // Eur. J. Pure Appl. Math. 2020. Т. 13, № 2. С. 200–215.
15. **Гальмак А.М.** О не n-полуабелевости полиадических группоидов специального вида // Проблемы физики, математики и техники. 2019. Т. 38, № 1. С. 31–39.
16. **Литаврин А.В.** О поэлементном описании моноида всех эндоморфизмов произвольного группоида и одной классификации эндоморфизмов группоида // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 29, № 1. С. 143–159. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2023-29-1-143-159

17. **Litavrin A.** On anti-endomorphisms of groupoids // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2023. Т. 44. P. 82–97. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.44.82
18. **Ayoubi M., Zeglami D.** D'Alembert's functional equations on monoids with an anti-endomorphism // Results Math. 2020. Vol. 75, art. no. 74. https://doi.org/10.1007/s00025-020-01199-z
19. **Ayoubi M., Zeglami D.** A variant of D'Alembert's functional equation on semigroups with an anti-endomorphism // Aequat. Math. 2022. Vol. 96, no. 74. P. 549–565. https://doi.org/10.1007/s00010-021-00836-4
20. **Ayoubi M., Zeglami D.** D'Alembert's μ-matrix functional equation on groups with an anti-endomorphism // Mediterr. J. Math. Vol. 2022. Vol. 19, art. no. 219. https://doi.org/10.1007/s00009-022-02129-9
21. **Литаврин А.В.** Интегральная классификация эндоморфизмов произвольной алгебры с конечноарными операциями // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2024. Т. 63, № 1. С. 58–76. https://doi.org/10.33048/alglog.2024.63.105
22. **Litavrin A.** On the bipolar classification of endomorphisms of a groupoid // Журн. Сиб. федерал. ун-та. Сер. Математика и физика. 2024. Т. 17, № 3. С. 378–387.
23. **Вагнер В.В.** Псевдополугруды и полугруппы с преобразованием // Извю вузов. Математика. 1973. Т. 131, № 4. С. 8–15.

Поступила 7.09.2025
После доработки 16.10.2025
Принята к публикации 20.10.2025

Литаврин Андрей Викторович
канд. физ.-мат. наук, доцент
доцент кафедры высшей математики № 2
Институт математики и фундаментальной информатики
Сибирский федеральный университет
г. Красноярск
e-mail: anm11@rambler.ru

REFERENCES

1. Shchuchkin N.A. Homomorphisms from infinite semilcyclic n-groups to a semiabelian n-group. *Cheb. Sb.*, 2021, vol. 22, no. 1, pp. 340–352 (in Russian). https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-1-340-352
2. Shchuchkin N.A. Endomorphisms of semicyclic n-groups. *Cheb. Sb.*, 2021, vol. 22, no. 1, pp. 353–369 (in Russian). https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-1-353-369
3. Shchuchkin N.A. Finitely generated Abelian n-ary groups. *J. Math. Sci.*, 2024, vol. 284, no. 4, pp. 557–572. https://doi.org/10.1007/s10958-024-07371-y
4. Gal'mak A.M. Powers in l-ary groups of special form. III. *Problemy Fiziki, Matematiki i Tekhniki*, 2023, vol. 57, no. 4, pp. 60–63 (in Russian).
5. Gal'mak A.M. Powers in l-ary groups of special form. II. *Problemy Fiziki, Matematiki i Tekhniki*, 2023, vol. 56, no. 3, pp. 38–43.
6. Davidov S.S. On the structure of medial divisible n-ary groupoids. *Math. Notes*, 2018, vol. 104, no. 1, pp. 29–38. https://doi.org/10.1134/S0001434618070040
7. Davidov S.S. Free commutative medial n-ary groupoids. *Discr. Math. Appl.*, 2015, vol. 25, no. 4, pp. 203–210. https://doi.org/10.1515/dma-2015-0020
8. Davidov S.S. On the solvability of the equational theory of commutative medial n-ary groupoids. *Discr. Math. Appl.*, 2013, vol. 23, no. 2, pp. 125–143. https://doi.org/10.1515/dma-2013-007
9. Cheremushkin A.V. Medial strongly dependent n-ary operations. *Discr. Math. Appl.*, 2021, vol. 31, no. 4, pp. 251–258. https://doi.org/10.1515/dma-2021-0022
10. Reshetnikov A.V. On partial n-ary groupoids whose equivalence relations are congruences. *Cheb. Sb.*, 2016, vol. 17, no. 1, pp. 232–239 (in Russian).
11. Reshetnikov A.V. On congruences of partial n-ary groupoids. *Izv. Saratovskogo Univ. Math. Mekh. Inf.*, 2011, vol. 11, no. 3, pp. 46–51 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2011-11-3-2-46-51
12. Shchuchkin N.A. Application of ternary quasigroups to string transformation. *Discr. Math.*, 2024, vol. 36, no. 2, pp. 132–143 (in Russian). https://doi.org/10.4213/dm1809

13. Cheremushkin A.V. Medial strongly dependent n-ary operations. *Discr. Math. Appl.*, 2021, vol. 31, no. 4, pp. 251–258. https://doi.org/10.1515/dma-2021-0022
14. Rattana A., Chinram R. Applications of neutrosophic $\mathcal{N}$-structures in n-ary groupoids. *Eur. J. Pure Appl. Math.*, 2020, vol. 13, no. 2, pp. 200–215. https://doi.org/10.29020/nybg.ejpam.v13i2.3634
15. Gal'mak A.M. On non-n-semiabelianism polyadic groupoids of special class. *Problemy Fiziki, Matematiki i Tekhniki*, 2019, vol. 38, no. 1, pp. 31–39 (in Russian).
16. Litavrin A.V. On an element-by-element description of the monoid of all endomorphisms of an arbitrary groupoid and one classification of endomorphisms of a groupoid. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2023, vol. 321, suppl. 1. pp. S170–S185. https://doi.org/10.1134/S008154382303015X
17. Litavrin A. On anti-endomorphisms of groupoids. *Izv. Irkutsk Gos. Univ. Ser. Mat.*, 2023, vol. 44, pp. 82–97 (in Russian). https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.44.82
18. Ayoubi M., Zeglami D. D'Alembert's functional equations on monoids with an anti-endomorphism. *Results Math.*, 2020, vol. 75, art. no. 74. https://doi.org/10.1007/s00025-020-01199-z
19. Ayoubi M., Zeglami D. A variant of D'Alembert's functional equation on semigroups with an anti-endomorphism. *Aequat. Math.*, 2022, vol. 96, no. 74, pp. 549–565. https://doi.org/10.1007/s00010-021-00836-4
20. Ayoubi M., Zeglami D. D'Alembert's μ-matrix functional equation on groups with an anti-endomorphism. *Mediterr. J. Math.*, 2022, vol. 19, art. no. 219. https://doi.org/10.1007/s00009-022-02129-9
21. Litavrin A.V. Integral classification of endomorphisms of an arbitrary algebra with finitary operations. *Algebra Logic*, 2024, vol. 63, no. 1, pp. 42–55. https://doi.org/10.1007/s10469-024-09769-8
22. Litavrin A.V. On the bipolar classification of endomorphisms of a groupoid. *J. Siberian Federal. Univ. Ser. Math. Phys.*, 2024, vol. 17, no. 3, pp. 378–387.
23. Vagner V.V. Pseudosemiheaps and semigroups with a transformation. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Ser. Mat.*, 1973, no. 4, pp. 8–15 (in Russian).

Received September 7, 2025
Revised October 16, 2025
Accepted October 20, 2025

Funding Agency: This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement no. 075-02-2025-1790).

Andrey Viktorovich Litavrin, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Institute of Mathematics and Fundamental Informatics of Sib. Federal. Univer., Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: anm11@rambler.ru .

Cite this article as: A. V. Litavrin. On anti-endomorphisms of n-groupoids. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 4, pp. 230–246.