ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 31 № 4 2025

УДК 517.9

АССИМИЛЯЦИЯ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ГРАНИЧНЫХ ДАННЫХ ПРИ ВОССТАНОВЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ МОДЕЛЕЙ

А. И. Короткий

Рассмотрена экстремальная (вариационная) задача на минимум некоторого функционала невязки. Экстремальная задача является вариационной формулировкой обратной задачи о нахождении коэффициента температуропроводности в модели стационарной диффузии-адвекции-реакции. Исходной информацией для решения обратной задачи являются результаты измерения следа нормальной производной от решения соответствующей краевой задачи для этой модели на границе функционирования модели. Функционал невязки представляет собой разность между нормальными производными моделируемого и наблюдаемого состояниями модели в метрике отрицательного пространства Соболева на границе области функционирования модели. Предварительно доказывается некоторое утверждение о существовании и единственности следа нормальной производной от решения в отрицательном пространстве Соболева дробного порядка на границе, позволяющее корректно поставить обратную задачу и ее вариационную формулировку. Исследуются различные аспекты экстремальной задачи. Показано, что множество точек минимума в вариационной задаче может оказаться пустым. Приведены также некоторые условия разрешимости вариационной задачи, когда множество точек минимума непусто. Указаны некоторые необходимые условия единственности минимизирующего элемента. Сформулированы понятия слабой и сильной корректности экстремальной задачи. Сильная корректность влечет слабую, указаны некоторые условия сильной корректности. Приведены примеры задач, в которых отсутствуют и сильная, и слабая корректности задачи; имеет место слабая, но не сильная корректность. Сформулированы необходимые условия минимума функционала невязки в специальной задаче.

Ключевые слова: уравнение диффузии-адвекции-реакции, коэффициент температуропроводности, обратная задача, функционал невязки, экстремальная задача, вариационный метод, точка минимума.

A. I. Korotkii. Assimilation of irregular boundary data in recovering model coefficients.

An extremal (variational) problem for minimizing a certain residual functional is considered. The extremal problem is a variational formulation of the inverse problem of finding the thermal diffusivity in a steady-state diffusion-advection-reaction model. The initial information for solving the inverse problem is the results of measuring the trace of the normal derivative of the solution to the corresponding boundary value problem for this model at the model's operating boundary. The residual functional is the difference between the normal derivatives of the simulated and observed states of the model in the metric of negative Sobolev space at the boundary of the model's operating domain. A preliminary assertion is proved regarding the existence and uniqueness of the trace of the normal derivative of the solution in fractional-order negative Sobolev space at the boundary, allowing for a correct formulation of the inverse problem and its variational formulation. Various aspects of the extremal problem are investigated. It is shown that the set of minimum points in the variational problem may be empty. Some conditions for the solvability of a variational problem are also presented when the set of minimum points is nonempty. Some necessary conditions for the uniqueness of a minimizing element are indicated. The concepts of weak and strong well-posedness of an extremal problem are formulated. Strong well-posedness implies weak well-posedness, and some conditions for strong well-posedness are indicated. Examples of problems in which both strong and weak well-posedness of the problem are absent are given; weak but not strong well-posedness exists. Necessary conditions for the minimum of the residual functional in a special problem are formulated.

Keywords: diffusion–advection–reaction equation, thermal diffusivity coefficient, inverse problem, residual functional, extremal problem, variational method, minimum point.

MSC: 35Q30, 76D05, 76T10, 76T15

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-4-214-229

Введение

Исследуется обратная задача для стационарной модели диффузии-адвекции-реакции [1;2], состоящая в восстановлении (нахождении) коэффициента температуропроводности модели по результатам наблюдения за следом нормальной производной на границе области функционирования модели. Изучаемая обратная задача сводится к экстремальной (вариационной) задаче на минимум подходящего функционала невязки [3–8]. Особенность задачи состоит в том, что след нормальной производной от состояния модели не является, вообще говоря, регулярной функцией (принадлежащей какому-либо классу Лебега), а является некоторой нерегулярной функцией (функционалом, принадлежащим некоторому пространству Соболева с отрицательным показателем). В статье изучаются некоторые аспекты теории, связанные с рассматриваемыми обратной и экстремальной задачами. Построен пример отсутствия точек минимума в экстремальной задаче (точная нижняя грань не достигается). Приведены некоторые условия разрешимости вариационной задачи, при которых множество точек минимума непусто (или состоит из одного элемента). Сформулированы понятия слабой и сильной корректности экстремальной задачи. Отмечено, что сильная корректность задачи всегда влечет слабую корректность. Указаны некоторые условия сильной корректности экстремальной задачи. Приведены примеры задач, которые являются слабо корректными, но не являются сильно корректными; или в которых отсутствуют и сильная, и слабая корректности. Сформулировано необходимое условие минимума функционала невязки при некоторых дополнительных условиях на модель и функционал невязки. В статье продолжаются исследования [9; 10].

1. Постановка задачи

Рассмотрим содержательную сторону задачи. В некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m = 2, 3$, заполненной неоднородной теплопроводной несжимаемой вязкой жидкостью, рассматривается стационарное распределение температуры. Математическая модель стационарного распределения температуры в области Ω представляет собой краевую задачу для уравнения диффузии-адвекции-реакции [1; 2; 7; 8; 11]

$$\operatorname{div}(\eta\,\nabla T) - (\boldsymbol{u}, \nabla T) - q\,T = f, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega; \quad T = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma = \partial\,\Omega; \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ — точка пространства $\mathbb{R}^m$; $\boldsymbol{u} = (u_1(\boldsymbol{x}), \ldots, u_m(\boldsymbol{x}))$ — вектор скорости движения среды в точках $\boldsymbol{x}$ области Ω; $T = T(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \Omega$ — температура среды в Ω; $\eta = \eta(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \Omega$ — коэффициент температуропроводности в Ω; $q = q(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \Omega$ — коэффициент поглощения в Ω; $f = f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \Omega$ — интенсивность образования или стока тепла в Ω; $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$.

Задача состоит в том, чтобы по некоторым измерениям (наблюдениям) за производной по нормали (нормальной проиводной) $\partial\,T/\partial\,\boldsymbol{n}$ на границе Γ области Ω определить априори неизвестный коэффициент температуропроводности η в области Ω. Эту задачу будем называть *обратной задачей*. Задачу, состоящую в нахождении распределения температуры T в области Ω в результате решения краевой задачи (1.1) при известных и заданных параметрах модели, будем называть *прямой задачей*.

Уточним постановки прямой и обратной задач. Будем считать, что Ω является ограниченной строго липшицевой областью в $\mathbb{R}^m$ класса $C^{1,1}$ или класса C^2 [11, с. 30; 12, с. 31, 32; 8, с. 28; 13, с. 5; 14, с. 66, 67]. Далее будем использовать следующие пространства Лебега: $L_p(\Omega)$, $p \geqslant 1$; $L_p(\Gamma)$, $p \geqslant 1$; пространства Соболева $W_p^l(\Omega)$, $p \geqslant 1$, $l \geqslant 1$; $W_p^s(\Gamma)$, $p \geqslant 1$, $-\infty < s < +\infty$; векторные аналоги этих пространств $\mathbf{L}_p(\Omega)$, $\mathbf{L}_p(\Gamma)$, $\mathbf{W}_p^l(\Omega)$, $\mathbf{W}_p^s(\Gamma)$ [7; 8; 11–16]. Гильбертовы пространства Соболева при $p = 2$ будем обозначать соответственно символами $H^l(\Omega)$, $H^s(\Gamma)$, $\mathbf{H}^l(\Omega)$, $\mathbf{H}^s(\Gamma)$. Все рассматриваемые в работе числовые величины и пространства считаются вещественными, измеримость и интегрируемость понимаются по Лебегу, определения используемых пространств имеются в [7; 8; 11–16].

Будут использовать также гильбертовы пространства [11, с. 41, 112; 12, с. 467]

$$H_0^1(\Omega) = \bigl\{v \in H^1(\Omega) \colon v = 0 \text{ на } \Gamma\bigr\}, \quad \mathbf{H}(\Omega) = \bigl\{\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \colon \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 \text{ в } \Omega\bigr\}.$$

Пусть для определенности

$$\eta \in \Lambda, \quad \boldsymbol{u} \in \mathbf{H}(\Omega), \quad q \in Q, \quad f \in L_2(\Omega);$$

$$\Lambda = \{\eta \in L_\infty(\Omega)\colon \mu_1 \leqslant \eta(\boldsymbol{x}) \leqslant \mu_2,\ \boldsymbol{x} \in \Omega\}, \quad 0 < \mu_1 = \text{const} \leqslant \mu_2 = \text{const} < \infty;$$

$$Q = \{q \in L_\infty(\Omega)\colon 0 \leqslant q(\boldsymbol{x}) \leqslant \mu_3,\ \boldsymbol{x} \in \Omega\}, \quad \mu_3 = \text{const} \geqslant 0.$$

При указанных условиях на параметры краевой задачи (1.1) она имеет единственное обобщенное решение из пространства $H_0^1(\Omega)$ [7; 8; 10–13; 15; 16]. Однако, вообще говоря, это обобщенное решение не принадлежит пространству $H^2(\Omega)$ и не имеет регулярного следа нормальной производной $\partial T/\partial \boldsymbol{n}$ на границе Γ ($\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней по отношению к области Ω нормали в точках границы Γ), но оно имеет след из пространства функционалов $H^{-1/2}(\Gamma) = H^{1/2}(\Gamma)^*$ (см. теорему 2.1). Поскольку далее будет важна зависимость решения прямой задачи от параметра $\eta \in \Lambda$, это решение будем обозначать символом $T = T[\eta]$.

Решение обратной задачи можно свести к решению вариационной задачи

$$J(\eta) \to \min\colon \eta \in \Lambda, \quad J(\eta) = \Big\| \frac{\partial T[\eta]}{\partial \boldsymbol{n}} - \frac{\partial T_*}{\partial \boldsymbol{n}} \Big\|^2_{H^{-1}(\Gamma)}, \tag{1.2}$$

где T_* — заданная функция, характеризующая результаты реального наблюдения за температурным полем модели на границе Γ области Ω.

Обозначим

$$J_* = \inf\{J(\eta)\colon \eta \in \Lambda\}, \quad \Lambda^* = \{\eta \in \Lambda\colon J(\eta) = J_*\}.$$

Всякий коэффициент $\eta \in \Lambda$, удовлетворяющий условию $J(\eta) = J_*$, можно считать решением обратной задачи.

2. Вспомогательные понятия и утверждения

Напомним некоторые необходимые для дальнейшего понятия и утверждения.

Известно (см. [8, с. 29, 30, 320, 321; 13, с. 38; 14, с. 114, 215, 217]), что для каждой функции $v \in H^1(\Omega)$ существует единственный след $v|_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma) \subset L_2(\Gamma)$, причем оператор следа

$$\gamma\colon H^1(\Omega) \ni v \longrightarrow \gamma v = v|_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma)$$

линеен непрерывен и сюръективен, в частности, существует константа $C_1 > 0$ такая, что

$$\|\gamma v\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant C_1 \|v\|_{H^1(\Omega)} \ \ \forall\, v \in H^1(\Omega).$$

Оператор следа γ имеет линейный непрерывный правый обратный оператор продолжения (восполнения) γ^{-1}:

$$\gamma^{-1} \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma); H^1(\Omega)), \quad \gamma \circ \gamma^{-1}\varphi = \varphi \ \ \forall\, \varphi \in H^{1/2}(\Gamma).$$

Здесь $H^{1/2}(\Gamma) = \big\{\gamma v\colon v \in H^1(\Omega)\big\}$ — гильбертово пространство [8, с. 29, 320] с нормой

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = \inf\big\{\|v\|_{H^1(\Omega)}\colon v \in H^1(\Omega),\ \gamma v = \varphi\big\};$$

вложение $H^{1/2}(\Gamma) \subset L_2(\Gamma)$ непрерывно плотно и компактно.

Аналогичные утверждения о следах и операторах взятия следа $\gamma : H^s(\Omega) \to H^{s-0.5}(\Gamma)$ справедливы в пространствах $H^s(\Omega)$, $1 \leqslant s \leqslant 2$.

Известно (см. [8, с. 30, 31, 48, 50, 51, 321; 13, с. 37, 38; 14, с. 216, 217], что для каждой функции $w \in H^2(\Omega)$ существует единственный след производной по нормали $\gamma_1 w = \partial w/\partial \boldsymbol{n}|_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma)$, причем оператор следа нормальной производной

$$\gamma_1\colon H^2(\Omega) \ni w \longrightarrow \gamma_1 w \in H^{1/2}(\Gamma)$$

линеен непрерывен и сюръективен, в частности, существует константа $C_2 > 0$ такая, что

$$\|\gamma_1 w\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant C_2 \|w\|_{H^2(\Omega)} \quad \forall\, w \in H^2(\Omega).$$

Для областей того же класса оператор

$$\sigma : H^2(\Omega) \ni w \longrightarrow \sigma\, w = (\gamma\, w,\ \gamma_1\, w) \in H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$$

линеен непрерывен сюръективен и имеет правый обратный оператор продолжения (восполнения) σ^{-1}:

$$\sigma^{-1} \in \mathcal{L}(H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma); H^2(\Omega)),$$
$$\sigma \circ \sigma_r^{-1}(\varphi,\ \psi) = (\varphi, \psi) \quad \forall\, (\varphi,\ \psi) \in H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma).$$

Известно (см. [8, с. 30, 50, 51, 321; 13, с. 37, 38, 54, 61, 62; 14, с. 216, 217]), что для каждой функции $w \in H^1(\triangle;\Omega)$ существует единственный след нормальной производной $\gamma_1\, w \in H^{-1/2}(\Gamma) = H^{1/2}(\Gamma)^*$, где

$$H^1(\triangle;\Omega) = \big\{ w \in H^1(\Omega)\colon\ \triangle\, w \in L_2(\Omega) \big\}$$

есть гильбертово пространство с нормой $\|w\|^2_{H^1(\triangle;\,\Omega)} = \|w\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\triangle\, w\|^2_{L_2(\Omega)}$; $H^{-1/2}(\Gamma)$ — гильбертово пространство с нормой

$$\|w\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \sup\, \big\{ \langle w,\ v\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)}\colon v \in H^{1/2}(\Gamma),\ \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant 1 \big\};$$

причем оператор взятия нормального следа

$$\gamma_1\colon H^1(\triangle;\Omega) \ni w \longrightarrow \gamma_1 w \in H^{-1/2}(\Gamma)$$

линеен и непрерывен, в частности, существует константа $C_3 > 0$ такая, что

$$\|\gamma_1\, w\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leqslant C_3 \|w\|_{H^1(\triangle;\,\Omega)} \quad \forall\, w \in H^1(\triangle;\Omega);$$

вложения $L_2(\Gamma) \subset H^{-1/2}(\Gamma)$ и $H^{-1/2}(\Gamma) \subset H^{-1}(\Gamma)$ непрерывны плотны и компактны; $\langle\,\cdot,\,\cdot\,\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)}$ — отношение двойственности на $H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$ (значение линейного непрерывного функционала $w \in H^{-1/2}(\Gamma)$ на элементе $v \in H^{1/2}(\Gamma)$).

Для любых двух элементов $w \in H^1(\triangle;\Omega)$ и $v \in H^1(\Omega)$ справедлива первая формула Грина (см. [8, с. 42, 46, 50, 51, 52, 324, 336; 13, с. 59, 61, 62; 17, с. 188])

$$\langle \gamma_1\, w,\ \gamma\, v\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)} = \langle \triangle w,\ v\rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \nabla w, \nabla v\rangle_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}.$$

Известно [8, прил. 3, с. 324–336; 12, гл. 1, § 2; гл. 3, §§ 4–9], что оператор Лапласа $\triangle \in \mathcal{L}(H^2(\Omega); L_2(\Omega))$ допускает расширение до оператора $\widetilde{\triangle} \in \mathcal{L}(H^1(\Omega); H^1(\Omega)^*)$. В качестве оператора $\widetilde{\triangle}$ можно принять оператор S^{-1}, обратный к оператору $S\colon H^1(\Omega)^* \ni f \to u = u(f) \in H^1(\Omega)$ обобщенного решения из пространства $H^1(\Omega)$ краевой задачи

$$\triangle\, u = f \ \text{ в }\ \Omega, \quad u + \partial\, u/\partial\, \boldsymbol{n} = 0 \ \text{ на }\ \Gamma.$$

Из результатов [8, прил. 3, с. 324–336] следует, что оператор решения $S \in \mathcal{L}(H^1(\Omega)^*; H^1(\Omega))$ и осуществляет линейный изоморфизм между пространствами $H^1(\Omega)^*$ и $H^1(\Omega)$. Поэтому $S^{-1} \in \mathcal{L}(H^1(\Omega); H^1(\Omega)^*)$, в частности, $\|\widetilde{\triangle}\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega);H^1(\Omega)^*)} = \|S^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega);H^1(\Omega)^*)} \leqslant C_4$, $C_4 = \text{const} \geqslant 0$.

Отметим еще [8, с. 50, 51, 327, 328], что $H^2(\Omega) \subset H^1(\triangle;\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset H^{1/2}(\Omega) \subset H^0(\Omega) \subset H^{-1/2}(\Omega) \subset H^1(\Omega)^* \subset H^{-1}(\Omega)$; $H^1_0(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset H^0(\Omega) = L_2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) = H^1_0(\Omega)^*$; $H^{3/2}(\Gamma) \subset H^{1/2}(\Gamma) \subset H^0(\Gamma) = L_2(\Gamma) \subset H^{-1/2}(\Gamma) \subset H^{-1}(\Gamma)$.

Для дальнейшего необходимо следующее обобщение утверждения о следе нормальной производной и расширение первой формулы Грина. Формулы Грина играют чрезвычайно важную роль в математической физике, механике сплошных сред, теории потенциалов, теории поля и многих других областях науки. Они лежат в основе исследования многих краевых задач математической физики, спектральных задач. Постановки и решение современных задач математической физики приводят к необходимости расширения формул Грина, к их обобщению для применения в более общих или абстрактных ситуациях. Некоторые постановки обратных задач и задач управления для моделей механики сплошных сред приводят к необходимости обобщения (расширения) теорем о следах. В частности, к настоящему времени возникла необходимость в распространении известного результата о существовании следа нормальной производной $\partial u/\partial \boldsymbol{n} \in H^{-1/2}(\Gamma)$ для функций $u \in H^1(\triangle;\Omega)$ (см. [17, с. 188; 8, с. 50, 51]) на все функции из пространства Соболева $H^1(\Omega)$ и в соответствующем обобщении первой формулы Грина. Ниже в теореме 2.1 доказан некоторый расширенный вариант первой формулы Грина для функций из $H^1(\Omega)$ и доказано, что любая функция из $T \in H^1(\Omega)$ имеет единственный след нормальной производной $\partial T/\partial \boldsymbol{n}$ из пространства $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Теорема 2.1. *Для каждой функции $T \in H^1(\Omega)$ существует единственный след нормальной производной $\gamma_1 T \in H^{-1/2}(\Gamma)$, причем оператор нормального следа $\gamma_1\colon H^1(\Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ линеен непрерывен и для следа справедлив аналог первой формулы Грина*

$$\langle \gamma_1 T,\, \gamma v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)} = \langle \widetilde{\triangle} T,\, v \rangle_{H^1(\Omega)^*\times H^1(\Omega)} + \langle \nabla T, \nabla v \rangle_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} \quad \forall\, v \in H^1(\Omega). \qquad (2.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем произвольный элемент $T \in H^1(\Omega)$ и произвольную последовательность $\{T_s\} \subset H^2(\Omega)$ такие, что

$$T_s \to T \quad \text{в} \quad H^1(\Omega) \quad \text{при} \quad s \to \infty.$$

Поскольку $H^2(\Omega) \subset H^1(\triangle;\Omega)$, при каждом $s \in \mathbb{N}$ справедливо включение $\gamma_1 T_s \in H^{1/2}(\Gamma) \subset H^{-1/2}(\Gamma)$ и верна первая формула Грина

$$\langle \gamma_1 T_s,\, \gamma v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)} = \langle \triangle T_s,\, v \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \nabla T_s, \nabla v \rangle_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} \quad \forall\, v \in H^1(\Omega).$$

Скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ допускает единственное расширение, которое можно отождествить с отношением двойственности на $H^1(\Omega)^* \times H^1(\Omega)$ (см. теорему 1.9 из [8, с. 311] или теорему 1.5 из [17, с. 62] при $H = L_2(\Omega)$ и $U = H^1(\Omega)$), поэтому

$$\langle \triangle T_s,\, v \rangle_{L_2(\Omega)} = \langle \widetilde{\triangle} T_s,\, v \rangle_{L_2(\Omega)} = \langle \widetilde{\triangle} T_s,\, v \rangle_{H^1(\Omega)^*\times H^1(\Omega)},$$

где $\widetilde{\triangle} \in \mathcal{L}(H^1(\Omega); H^1(\Omega)^*)$ — расширение оператора Лапласа $\triangle \in \mathcal{L}(H^2(\Omega); L_2(\Omega))$.

Перепишем формулу Грина в ином виде ($\forall\, v \in H^1(\Omega)$):

$$\langle \gamma_1 T_s,\, \gamma v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)} = \langle \widetilde{\triangle} T_s,\, v \rangle_{H^1(\Omega)^*\times H^1(\Omega)} + \langle \nabla T_s, \nabla v \rangle_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)},$$

или в виде: ($\forall\, w \in H^{1/2}(\Gamma)$)

$$\langle \gamma_1 T_s,\, w \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)} = \langle \widetilde{\triangle} T_s,\, \gamma^{-1} w \rangle_{H^1(\Omega)^*\times H^1(\Omega)} + \langle \nabla T_s, \nabla (\gamma^{-1} w) \rangle_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}.$$

Справедливы цепочки следующих неравенств:

$$|\langle \triangle T_s,\, v \rangle_{L_2(\Omega)}| = |\langle \widetilde{\triangle} T_s,\, v \rangle_{H^1(\Omega)^*\times H^1(\Omega)}| \leqslant \|\widetilde{\triangle} T_s\|_{H^1(\Omega)^*} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\leqslant \big[\|\widetilde{\triangle}\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega);H^1(\Omega)^*)} \|T_s\|_{H^1(\Omega)}\big] \|v\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \big[C_4 \|T_s\|_{H^1(\Omega)}\big] \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

$$|\langle \nabla T_s, \nabla v \rangle_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}| \leqslant \|\nabla T_s\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} \; \|\nabla v\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} \leqslant \big[\|T_s\|_{H^1(\Omega)}\big] \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

из которых следует, что для любого $s \in \mathbb{N}$ функционал $g_s(v) = \langle \triangle T_s,\, v \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \nabla T_s, \nabla v \rangle_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}$, $v \in H^1(\Omega)$, линеен и непрерывен на $H^1(\Omega)$, поскольку $|\, g_s(v) \,| \leqslant \big[(\,1 + C_4\,)\, \|\, T_s \,\|_{H^1(\Omega)}\big]\, \|\, v \,\|_{H^1(\Omega)}$.

Таким образом,

$$g_s \in H^1(\Omega)^* \quad \forall\, s \in \mathbb{N}, \tag{2.2}$$

$$\|\, g_s \,\|_{H^1(\Omega)^*} \leqslant (\,1 + C_4\,)\, \|\, T_s \,\|_{H^1(\Omega)} \leqslant (\,1 + C_4\,) \sup_{s \in \mathbb{N}} \|\, T_s \,\|_{H^1(\Omega)} \leqslant (\,1 + C_4\,)\, C_5 \leqslant C_6 < \infty; \tag{2.3}$$

здесь C_5, C_6 и ниже C_7, C_8, C_9 — неотрицательные константы.

Аналогично находим

$$|\, l_s(w) \,| = |\, g_s(\,\gamma^{-1} w\,) \,| \leqslant C_6\, \|\, \gamma^{-1} w \,\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_6\, \|\, \gamma^{-1} \,\|_{\mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma); H^1(\Omega))}\, \|\, w \,\|_{H^{1/2}(\Gamma)},$$

$$l_s = g_s \circ \gamma^{-1} \in H^{-1/2}(\Gamma) \quad \forall\, s \in \mathbb{N}, \tag{2.4}$$

$$\|\, l_s \,\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leqslant C_6\, \|\, \gamma^{-1} \,\|_{\mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma); H^1(\Omega))} \leqslant C_6\, C_7 \leqslant C_8 < \infty. \tag{2.5}$$

При фиксированных $v \in H^1(\Omega)$ и $w \in H^{1/2}(\Gamma)$ перейдем в правой части первой формулы Грина к пределу при $s \to \infty$. Учитывая, что $\widetilde{\triangle} T_s \to \widetilde{\triangle} T$ в $H^1(\Omega)^*$, $\nabla T_s \to \nabla T$ в $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$, в пределе получим

$$g_s(v) \to g(v) = \langle \widetilde{\triangle} T,\, v \rangle_{H^1(\Omega)^* \times H^1(\Omega)} + \langle \nabla T, \nabla v \rangle_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}, \tag{2.6}$$

$$l_s(w) \to l(w) = \langle \widetilde{\triangle} T,\, \gamma^{-1} w \rangle_{H^1(\Omega)^* \times H^1(\Omega)} + \langle \nabla T, \nabla \gamma^{-1} w \rangle_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}. \tag{2.7}$$

Из (2.6), (2.7) по аналогии с (2.2)–(2.5) выводим

$$g \in H^1(\Omega)^*, \quad \|\, g \,\|_{H^1(\Omega)^*} \leqslant C_6; \qquad l \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad \|\, l \,\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leqslant C_8.$$

Поскольку левая часть формулы Грина равна ее правой части

$$\langle\, \gamma_1\, T_s,\, w \,\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)} = l_s(w) \quad \forall\, w \in H^{1/2}(\Gamma), \ \forall\, s \in \mathbb{N},$$

и предел левой части будет равен пределу правой части при $s \to \infty$:

$$\gamma_1\, T_s \to l \ \text{ слабо в } H^{-1/2}(\Gamma).$$

Слабый предел $l \in H^{-1/2}(\Gamma)$ не зависит от выбора последовательности $\{T_s\} \subset H^2(\Omega)$, а зависит только от предельного элемента $T \in H^1(\Omega)$ и определяется этим элементом однозначно. Значит, по определению можно положить $\gamma_1\, T = l$, причем для таким образом определенного следа нормальной производной справедлив аналог первой формулы Грина:

$$\langle\, \gamma_1\, T,\, \gamma\, v \,\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)} = \langle \widetilde{\triangle} T,\, v \rangle_{H^1(\Omega)^* \times H^1(\Omega)} + \langle \nabla T, \nabla v \rangle_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} \quad \forall\, v \in H^1(\Omega).$$

Ясно, что оператор следа нормальной производной $\gamma_1 \colon H^1(\Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ линеен:

$$\gamma_1\,(\,\alpha\, T_1 + \beta\, T_2\,) = \alpha\, \gamma_1\,(\,T_1\,) + \beta\, \gamma_1\,(\,T_2\,) \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall\, T_1, T_2 \in H^1(\Omega).$$

Оценим норму этого оператора:

$$\begin{aligned}
\|\, \gamma_1\, T \,\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} &= \|\, l \,\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \sup\{|\, l(w) \,| \colon w \in H^{1/2}(\Gamma), \ \|\, w \,\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant 1\} \\
&\leqslant \sup\{|\, \langle \widetilde{\triangle} T,\, \gamma^{-1}\, w \rangle_{H^1(\Omega)^* \times H^1(\Omega)} \,| \colon w \in H^{1/2}(\Gamma), \ \|\, w \,\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant 1\} \\
&\quad + \sup\{|\, \langle \nabla T, \nabla(\gamma^{-1}\, w) \rangle_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} \,| \colon w \in H^{1/2}(\Gamma), \ \|\, w \,\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant 1\} \\
&\leqslant \sup\{\|\, \widetilde{\triangle} T \,\|_{H^1(\Omega)^*}\, \|\, \gamma^{-1}\, w \,\|_{H^1(\Omega)} \colon w \in H^{1/2}(\Gamma), \ \|\, w \,\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant 1\} \\
&\quad + \sup\{\|\, T \,\|_{H^1(\Omega)}\, \|\, \gamma^{-1}\, w \,\|_{H^1(\Omega)} \colon w \in H^{1/2}(\Gamma), \ \|\, w \,\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant 1\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{gathered}
\leqslant \| \widetilde{\triangle} T \|_{H^1(\Omega)^*} \| \gamma^{-1} \|_{\mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma);\, H^1(\Omega))} + \| T \|_{H^1(\Omega)} \| \gamma^{-1} \|_{\mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma);\, H^1(\Omega))} \\
\leqslant (\, 1 + \| \widetilde{\triangle} \|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega);\, H^1(\Omega)^*)} \,) \| \gamma^{-1} \|_{\mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma);\, H^1(\Omega))} \| T \|_{H^1(\Omega)} \\
\leqslant (\, 1 + C_4 \,) C_7 \| T \|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_9 \| T \|_{H^1(\Omega)} \quad \Longrightarrow \\
\gamma_1 \in \mathcal{L}(\, H^1(\Omega); H^{-1/2}(\Gamma) \,), \quad \| \gamma_1 \|_{\mathcal{L}(\, H^1(\Omega); H^{-1/2}(\Gamma) \,)} \leqslant C_9.
\end{gathered}
$$

Отсюда на самом деле следует, что

$$
\gamma_1 T_s \to \gamma_1 T \ \text{ сильно в } \ H^{-1/2}(\Gamma) \ \text{ при } s \to \infty.
$$

Теорема доказана.

Заметим, что оператор γ_1 не является инъективным, поскольку два различных элемента, отличающихся на константу, имеют одинаковые образы.

Теорема 2.2. *Если последовательность $\{T_s\}$ сильно (слабо) в $H^1(\Omega)$ сходится к элементу $T \in H^1(\Omega)$, то $\gamma_1 T_s \to \gamma_1 T$ сильно (слабо) в $H^{-1/2}(\Gamma)$ при $s \to \infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение о сильной сходимости фактически доказано в теореме 2.1 и непосредственно следует из непрерывности оператора $\gamma_1 \in \mathcal{L}(\, H^1(\Omega); H^{-1/2}(\Gamma) \,)$. Утверждение о слабой сходимости следует из слабой непрерывности оператора γ_1, которая является следствием непрерывности оператора γ_1 [18, с. 177; 8, с. 308].

Теорема доказана.

Из слабой в $H^1(\Omega)$ сходимости $T_s \to T$, вообще говоря, не следует, что $\gamma_1 T_s \to \gamma_1 T$ сильно в $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Теорема 2.3. *Если последовательность $\{\eta_s\} \subset \Lambda$ сильно в $L_2(\Omega)$ сходится к некоторому элементу $\eta \in \Lambda$, то $T\,[\,\eta_s\,] \to T\,[\,\eta\,]$ сильно в $H^1(\Omega)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем произвольные последовательность $\{\eta_s\} \subset \Lambda$ и элемент $\eta \in \Lambda$ такие, что $\eta_s \to \eta$ сильно в $L_2(\Omega)$. При любом $s \in \mathbb{N}$ запишем интегральное тождество, определяющее обобщенное решение $T\,[\,\eta_s\,] = T_s \in H_0^1(\Omega)$ краевой задачи (1.1)

$$
\int\limits_{\Omega} \eta_s(\, \nabla T_s,\, \nabla z \,)\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\Omega} T_s\, (\, \boldsymbol{u},\, \nabla z \,)\, d\boldsymbol{x} - \int\limits_{\Omega} q\, T_s\, z\, d\boldsymbol{x} - \int\limits_{\Omega} f\, z\, d\boldsymbol{x} \quad \forall\ z \in H_0^1(\Omega). \tag{2.8}
$$

Положив в этом тождестве $z = T_s$, получим равенство

$$
\int\limits_{\Omega} \eta_s(\, \nabla T_s,\, \nabla T_s \,)\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Omega} q\, T_s^2\, d\boldsymbol{x} = -\int\limits_{\Omega} f\, T_s\, d\boldsymbol{x},
$$

из которого выводится неравенство

$$
\| T_s \|^2_{H_0^1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} (\, \nabla T_s,\, \nabla T_s \,)\, d\boldsymbol{x} \leqslant \Big(\frac{C_\Omega}{\mu_1} \Big)^2 \| f \|^2_{L_2(\Omega)},
$$

где C_Ω — константа из неравенства Фридрихса — Пуанкаре [8, с. 27, 326; 11, с. 22].

Таким образом, последовательность $\{T_s\}$ ограничена в гильбертовом пространстве $H_0^1(\Omega)$, следовательно, из нее можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность. Пусть $\{T_{s_k}\}$ — произвольная слабо сходящаяся в $H_0^1(\Omega)$ подпоследовательность последовательности $\{T_s\}$ и $T \in H_0^1(\Omega)$ есть ее слабый предел.

Проверим, что $T = T\,[\,\eta\,]$. Чтобы избежать громоздких обозначений, не нарушая общности рассуждений, можем считать, что сама последовательность $\{T_s\}$ слабо в $H_0^1(\Omega)$ сходится к элементу T. При фиксированном $z \in H_0^1(\Omega)$ перейдем в тождестве (2.8) к пределу при $s \to \infty$.

В левой части этого тождества $\nabla T_s \to \nabla T$ слабо в $\mathbf{L}_2(\Omega)$. Учитывая, что из сходящейся в $L_2(\Omega)$ последовательности $\{\eta_s\}$ можно выделять сходящиеся почти всюду подпоследовательности, методом от обратного можно показать, что $\eta_s \nabla z \to \eta \nabla z$ сильно в $\mathbf{L}_2(\Omega)$. Значит,

$$\int\limits_{\Omega} \eta_s\,(\nabla T_s,\, \nabla z)\, d\boldsymbol{x} \to \int\limits_{\Omega} \eta\,(\nabla T,\, \nabla z)\, d\boldsymbol{x}, \quad s \to \infty.$$

Рассмотрим выражение в правой части тождества (2.8). Из теорем вложения имеем: при $m = 3$ пространство $H^1(\Omega)$ непрерывно вкладывается в $L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant 6$, компактно вкладывается в $L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < 6$, $(\boldsymbol{u},\, \nabla z) \in L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant 3/2$; при $m = 2$ пространство $H^1(\Omega)$ непрерывно и компактно вкладывается в $L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, $(\boldsymbol{u},\, \nabla z) \in L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < 2$ [7, прил. 1, с. 236, 237; 8, с. 32, 33; 12, гл. 2, § 2; 14, гл. 5, 6]. Поэтому

$$\int\limits_{\Omega} T_s\,(\boldsymbol{u},\, \nabla z)\, d\boldsymbol{x} \to \int\limits_{\Omega} T\,(\boldsymbol{u},\, \nabla z)\, d\boldsymbol{x}, \quad \int\limits_{\Omega} q\, T_s\, z\, d\boldsymbol{x} \to \int\limits_{\Omega} q\, T\, z\, d\boldsymbol{x}, \quad s \to \infty.$$

В итоге после перехода в (2.8) к пределу при $s \to \infty$, получим

$$\int\limits_{\Omega} \eta\,(\nabla T,\, \nabla z)\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\Omega} T\,(\boldsymbol{u},\, \nabla z)\, d\boldsymbol{x} - \int\limits_{\Omega} q\, T\, z\, d\boldsymbol{x} - \int\limits_{\Omega} f\, z\, d\boldsymbol{x} \quad \forall\, z \in H_0^1(\Omega).$$

Итак, установлено, что $T = T\,[\,\eta\,]$. Кроме того, в силу единственности предела, которая вытекает из единственности решения краевой задачи (1.1), заключаем, что сама исходная последовательность $\{T_s\}$ слабо в $H_0^1(\Omega)$ сходится к решению $T\,[\,\eta\,]$.

Покажем теперь, что $T_s \to T$ сильно в $H_0^1(\Omega)$. Из интегрального тождества (2.8), записанного для решения T_s, вычтем аналогичное интегральное тождество, записанное для решения T. В результате получим равенство

$$\int\limits_{\Omega} (\,\eta_s\, \nabla T_s - \eta\, \nabla T,\, \nabla\,(\,T_s - T\,)\,)\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Omega} q\,(\,T_s - T\,)^2\, d\boldsymbol{x} = 0.$$

Перепишем это равенство в виде

$$\int\limits_{\Omega} \eta_s\,(\,\nabla\,(\,T_s - T\,),\, \nabla\,(\,T_s - T\,)\,)\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Omega} q\,(\,T_s - T\,)^2\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\Omega} (\,\eta - \eta_s\,)\,(\,\nabla T,\, \nabla\,(\,T_s - T\,)\,)\, d\boldsymbol{x}.$$

Из этого равенства следует неравенство

$$\mu_1\, \|\, T_s - T\,\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leqslant \int\limits_{\Omega} (\,\eta - \eta_s\,)\,(\,\nabla T,\, \nabla\,(\,T_s - T\,)\,)\, d\boldsymbol{x}.$$

Правая часть в этом неравенстве стремится к нулю, поэтому $T\,[\,\eta_s\,] \to T\,[\,\eta\,]$ в $H_0^1(\Omega)$. Теорема доказана.

Если последовательность $\{\eta_s\} \subset \Lambda$ слабо в $L_2(\Omega)$ сходится к некоторому элементу $\eta \in \Lambda$, то возможны случаи, когда $T\,[\,\eta_s\,] \to T\,[\,\eta_0\,]$ слабо в $H_0^1(\Omega)$, но $\Lambda \ni \eta_0 \neq \eta$ (см. ниже пример 3.1).

3. О разрешимости экстремальной задачи

Вариационная задача (1.2) не всегда имеет решение. Возможны случаи, когда $\Lambda^* = \varnothing$.

Пример 3.1. Пусть $m = 2$; $\Omega = (-2, 2) \times (-2, 2)$; $\boldsymbol{u} = 0$; $q = 0$; $\mu_1 = 1 - \sqrt{2}/2$; $\mu_2 = 1 + \sqrt{2}/2$; $T_* = 0$, если $r \geqslant 1$; $T_* = (r^2 - 1)^2$, если $r < 1$; $f = 2^{-1}\, \partial^2 T_*/\partial x_1^2 + \partial^2 T_*/\partial x_2^2$; $r = \|\, \boldsymbol{x}\,\|$.

Покажем сначала, что $J_* = 0$. Рассмотрим последовательность $\{\eta_s\} \subset \Lambda$ кусочно-постоянных функций: $\eta_s = \eta_s(x_1) = \mu_2$, если $-2 + (4i/s) < x_1 \leqslant -2 + 2(2i+1)/s$; $\eta_s = \eta_s(x_1) = \mu_1$, если $-2 + 2(2i+1)/s < x_1 \leqslant -2 + 4(i+1)/s$, $i = 0, \ldots, s-1$. Можно показать, что $\eta_s \to 1$ слабо в $L_2(-2,2)$, $\eta_s^{-1} \to 2$ слабо в $L_2(-2,2)$, $T[\eta_s] \to T_0$ слабо в $H_0^1(\Omega)$, где T_0 — обобщенное решение из пространства $H_0^1(\Omega)$ краевой задачи

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} = f, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega; \quad T = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma. \tag{3.1}$$

В силу единственности решения краевой задачи (3.1) имеем $T_0 = T_*$. Отсюда следует, что $J_* = 0$. Действительно, поскольку $T[\eta_s] \to T_*$ слабо в $H_0^1(\Omega)$, то по теореме 2.2 $\gamma_1 T[\eta_s] \to \gamma_1 T_*$ слабо в $H_0^{-1/2}(\Gamma)$ и в силу компактности вложения $H^{-1/2}(\Gamma) \subset H^{-1}(\Gamma) = H^1(\Gamma)^*$ имеем $\gamma_1 T[\eta_s] \to \gamma_1 T_*$ сильно в $H^{-1}(\Gamma)$. Поэтому

$$0 \leqslant J_* \leqslant \lim_{s\to\infty} J(\eta_s) = \lim_{s\to\infty} \|\, \gamma_1 T\,[\,k_s\,] - \gamma_1 T_* \,\|^2_{H^{-1}(\Gamma)} = 0 \quad \Longrightarrow \quad J_* = 0.$$

Покажем теперь, что $\Lambda^* = \varnothing$. Предположим, что существует $\eta \in \Lambda$, при котором $J(\eta) = 0$, или, другими словами, $T[\eta] = T_*$. Таким образом, T_* является обобщенным решением краевых задач (1.1) и (3.1). Записав соответствующие интегральные тождества, определяющие обобщенные решения в первом и втором случаях, и вычитая одно тождество из другого, получим

$$\int\limits_{\Omega} (\,\eta - 1\,)\,(\,\nabla T_*,\, \nabla \varphi\,)\, d\boldsymbol{x} = -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \frac{\partial T_*}{\partial x_1}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\, d\boldsymbol{x} \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.2}$$

Преобразуем тождество (3.2). Учитывая равенство $T_* = 0$ при $r \geqslant 1$, от интегрирования по Ω перейдем к интегрированию по кругу (шару) $B \subset \mathbb{R}^2$ единичного радиуса с центром в нуле (начале координат). Затем воспользуемся равенством $T_* = (r^2-1)^2$ при $r < 1$. В результате получим тождество

$$\int\limits_{B} (\,\eta - 1\,)\,(\,r^2 - 1\,)\left[\,x_1\,\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,x_1} + x_2\,\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,x_2}\,\right] d\boldsymbol{x} = -\frac{1}{2}\int\limits_{B} (\,r^2-1\,)\,x_1\,\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,x_1}\, d\boldsymbol{x} \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Однако на самом деле это равенство выполняется не при всех $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Положим $\varphi = \varphi(\boldsymbol{x}) = (\,x_1^2 - x_2^2\,)/r^2$ (значения функции φ вне шара B не играют роли, поэтому формально можно считать, что функция φ гладко продолжена вне шара B вплоть до границы Γ с соблюдением условия $\gamma\,\varphi = 0$, так что $\varphi \in H_0^1(\Omega)$), тогда

$$0 = 2\int\limits_{B} (\,1 - r^2\,)\,\frac{x_1^2\,x_2^2}{r^4}\, d\boldsymbol{x} > 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что $\Lambda^* = \varnothing$.

Сформулируем утверждение о разрешимости экстремальной задачи.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$J(\eta) \to \min : \eta \in V, \quad J_V = \inf\,\{J(\eta)\colon \eta \in V\}, \tag{3.3}$$

где V — компактное в $L_2(\Omega)$ подмножество множества Λ.

Теорема 3.1. *Множество $V_* = \{\eta \in V\colon J(\eta) = J_V\}$ непусто и компактно в $L_2(\Omega)$, любая минимизирующая функционал J на множестве V последовательность сходится в $L_2(\Omega)$ ко множеству V_*.*

Доказательство теоремы опирается на теорему Вейерштрасса о минимизации непрерывного функционала на компактном множестве [19, с. 502; 20, с. 95, 97; 18, с. 462].

4. О единственности решения экстремальной задачи

Решение задачи (1.2) может оказаться неединственным. Действительно, пусть $f = 0$. Тогда для любого $\eta \in \Lambda$ имеем $T[\eta] = 0$ и, следовательно, $\Lambda^* = \Lambda$.

Приведем некоторые необходимые условия единственности решения задачи (1.2).

Теорема 4.1. *Если из равенства $J(\eta^{(1)}) = 0 = J(\eta^{(2)})$ следует равенство $T[\eta^{(1)}] = T_* = T[\eta^{(2)}]$, то любые две точки минимума экстремальной задачи (1.2) совпадают почти всюду на множестве $\Omega^* = \{\boldsymbol{x} \in \Omega \colon \nabla T_*(\boldsymbol{x}) \neq 0\}$. Если $J_* = 0$, $\eta^{(1)} \in \Lambda^*$, $\eta^{(2)} \in \Lambda^*$, $\eta^{(1)} = \eta^{(1)}(x_1)$, $\eta^{(2)} = \eta^{(2)}(x_1)$, $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2)$, то $\eta^{(1)}(x_1) = \eta^{(2)}(x_1)$ для почти всех $x_1 \in S$, где*

$$S = \left\{ x_1 \in (0, l_1) \colon \int\limits_0^{l_2} \nabla T_*(x_1, x_2)\, d\, x_2 \neq 0 \right\}.$$

Доказательство. Допустим, что задача (1.2) при $J_* = 0$ имеет две точки минимума $\eta^{(1)}$ и $\eta^{(2)}$. Тогда из равенств $J(\eta^{(1)}) = 0 = J(\eta^{(2)})$ следует, что $T\,[\,\eta^{(1)}\,] = T_* = T\,[\,\eta^{(2)}\,]$. Запишем интегральные равенства, определяющие обобщенные решения $T\,[\,\eta^{(1)}\,]$ и $T\,[\,\eta^{(2)}\,]$, а затем вычтем одно из другого. В результате получим

$$\int\limits_{\Omega} \left(\, \eta^{(1)} - \eta^{(2)} \,\right)\, (\,\nabla\, T_*,\, \nabla g\,)\, d\,\boldsymbol{x} = 0 \quad \forall\, g \in H_0^1(\Omega) \quad \Longrightarrow \tag{4.1}$$

$$\left(\, \eta^{(1)}(\boldsymbol{x}) - \eta^{(2)}(\boldsymbol{x}) \,\right) \nabla\, T_*(\boldsymbol{x}) = 0 \text{ п. в. } \boldsymbol{x} \in \Omega \quad \Longrightarrow \quad \eta^{(1)}(\boldsymbol{x}) = \eta^{(2)}(\boldsymbol{x}) \text{ п. в. } \boldsymbol{x} \in \Omega^*.$$

Пусть теперь $J_* = 0$, $\eta^{(1)} \in \Lambda^*$, $\eta^{(2)} \in \Lambda^*$, $\eta^{(1)} = \eta^{(1)}(x_1)$, $\eta^{(2)} = \eta^{(2)}(x_1)$, $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2)$. Рассуждая, как в предыдущем случае, получаем тождество (4.1), из которого следует

$$\left(\, \eta^{(1)}(x_1) - \eta^{(2)}(x_1) \,\right) \nabla\, T_*(x_1, x_2) = 0 \text{ п. в. } \boldsymbol{x} \in \Omega \quad \Longrightarrow \quad \eta^{(1)}(x_1) = \eta^{(2)}(x_1) \text{ п. в. } x_1 \in S.$$

Теорема доказана.

5. О корректности экстремальной задачи

Экстремальную задачу (1.2) назовем сильно (слабо) корректной, если $\Lambda^* \neq \varnothing$ и любая минимизирующая последовательность сильно (слабо) в $L_2(\Omega)$ сходится ко множеству Λ^* [3; 19]. В примере 3.1 показано, что задача (1.2) может быть некорректной ни в сильном, ни в слабом смыслах, поскольку в условиях задачи возможны случаи $\Lambda^* = \varnothing$. Ясно, что из сильной корректности следует слабая корректность. Обратное, вообще говоря, неверно. Действительно, рассмотрим следующий пример.

Пример 5.1. Пусть $m = 2$; $\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi)$; $\boldsymbol{u} = 0$; $q = 0$; $\mu_1 = \sqrt{2} - 1$; $\mu_2 = \sqrt{2} + 1$; $f = f^* \sin{(x_2)}$, $f^* = -\sqrt{2}$; $T_* = T[\,\eta^*\,]$, $\eta^* = \sqrt{2}$; $\Lambda = \{\eta \in L_\infty(0, \pi) \colon \mu_1 \leqslant \eta(x_1) \leqslant \mu_2,\ x_1 \in (0, \pi)\}$.

Решение краевой задачи (1.1) можно представить в виде

$$T = Z(x_1)\, \sin{(x_2)},$$

где функция $Z = Z(x_1)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению и краевым условиям

$$(\eta\, Z'\,)' - \eta\, Z = f^*, \quad 0 < x_1 < \pi, \quad Z(0) = 0 = Z(\pi). \tag{5.1}$$

Для каждого $\eta \in \Lambda$ задача (5.1) имеет единственное обобщенное решение $Z = Z[\,\eta\,]$ из пространства $H_0^1(0, \pi)$. Рассмотрим последовательность кусочно-постоянных функций $\{\eta_s\}$:

$$\eta_s(x_1) = \mu_2, \text{ если } \ \pi\,(2i/2s) < x_1 \leqslant \pi\,(2i+1)/2s,$$

$$\eta_s(x_1) = \mu_1, \text{ если } \pi\,(2i+1)/2s < x_1 \leqslant \pi\, 2\,(i+1)/2s, \quad i = 0, \dots, s-1.$$

Можно проверить, что при $s \to \infty$

$$\eta_s \to \sqrt{2} \text{ слабо в } L_2(0,\pi), \quad \eta_s^{-1} \to \sqrt{2} \text{ слабо в } L_2(0,\pi), \quad Z[\eta_s] \to Z_0 \text{ слабо в } H_0^1(0,\pi),$$

где Z_0 — обобщенное решение из пространства $H_0^1(0,\pi)$ задачи

$$(\sqrt{2}\, Z')' - \sqrt{2}\, Z = f^*, \quad 0 < x_1 < \pi, \quad Z(0) = 0 = Z(\pi);$$

$$Z_0 = 1 + Y_1 \exp(x_1) + Y_2 \exp(-x_1), \; Y_1 = \frac{\exp(-\pi) - 1}{\exp(\pi) - \exp(-\pi)}, \; Y_2 = \frac{1 - \exp(\pi)}{\exp(\pi) - \exp(-\pi)}.$$

Отсюда следует, что $Z_0 = Z[\,\eta^*\,]$, где $\eta^* = \sqrt{2} \in \Lambda$, $T_* = T[\,\eta^*\,] = Z_0(x_1)\,\sin(x_2)$,

$$T[\,\eta_s\,] \to T_* = T[\,\eta^*\,] \quad \text{слабо в } H_0^1(\Omega) \implies \gamma_1\, T[\,\eta_s\,] \to \gamma_1\, T_* \quad \text{слабо в } H^{-1/2}(\Gamma).$$

Из компактности вложения $H^{-1/2}(\Gamma) \subset H^{-1}(\Gamma)$ следует, что $\gamma_1 T[\,\eta_s\,] \to \gamma_1 T_*$ сильно в $H^{-1}(\Gamma)$.

Это означает, что $J(\eta_s) \to J(\eta^*) = 0$, $J_* = 0$, $\eta^* \in \Lambda^* \neq \varnothing$, $\eta_s \to \Lambda^*$ слабо в $L_2(\Omega)$.

Опираясь на теорему 4.1, заключаем, что множество Λ^* состоит из одного элемента η^*.

Заметим еще, что минимизирующая последовательность $\{\eta_s\}$ не сходится сильно в $L_2(0,\pi)$ к элементу $\eta^* \in \Lambda^*$, поскольку $\|\,\eta_s - \eta^*\,\|_{L_2(0,\pi)} = \sqrt{\pi} \nrightarrow 0$. Это означает, что рассматриваемая экстремальная задача не может быть сильно корректной в $L_2(0,\pi)$.

В примере осталось проверить, что любая минимизирующая последовательность в вариационной задаче сходится слабо в $L_2(0,\pi)$ к элементу η^*. Для этого достаточно показать, что любая слабо сходящаяся подпоследовательность минимизирующей последовательности сходится слабо в $L_2(0,\pi)$ к этому элементу η^*. Рассмотрим произвольную минимизирующую последовательность $\{\eta_n\} \subset \Lambda$. Учитывая слабую компактность множества Λ в $L_2(0,\pi)$, из последовательности $\{\eta_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\eta_{n_p}\} \subseteq \{\eta_n\}$, которая при $p \to \infty$ сходится слабо в $L_2(0,\pi)$ к некоторому элементу $\eta_0 \in \Lambda$. Не нарушая общности рассуждений и переходя при необходимости к подпоследовательности, можем считать, что сама последовательность $\{\eta_n\}$ слабо в $L_2(0,\pi)$ сходится к элементу η_0.

Из ограниченности последовательности решений $Z[\eta_n]$ задачи (5.1) в гильбертовом пространстве $H_0^1(0,\pi)$ следует, что из нее можно выделить подпоследовательность, которая слабо в $H_0^1(0,\pi)$ будет сходиться к некоторому элементу $Z^* \in H_0^1(0,\pi)$. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что сама последовательность сходится к этому элементу. Из компактности вложения $H_0^1(0,\pi) \subset L_2(0,\pi)$ имеем: $Z[\eta_n] \to Z^*$ сильно в $L_2(0,\pi)$. В силу единственности предела $Z^* = Z_0 = Z[\,\eta^*\,]$ как элементы пространств $L_2(0,\pi)$ и $H_0^1(0,\pi)$. Поскольку последовательность $\{\eta_n^{-1}\}$ ограничена $\sqrt{2}-1 \leqslant \eta_n^{-1}(x_1) \leqslant \sqrt{2}+1$, $x_1 \in (0,\pi)$, не нарушая общности рассуждений и переходя, если потребуется, к подпоследовательности, можем считать, что $\eta_n^{-1} \to \eta_+^{-1}$ слабо в $L_2(0,\pi)$. Тогда слабый в $H_0^1(0,\pi)$ предел Z^* последовательности $\{Z[\eta_n]\}$ является обобщенным решением задачи

$$(\,\eta_+\, Z')' - \eta_0\, Z = f^*, \quad 0 < x_1 < \pi, \quad Z(0) = 0 = Z(\pi). \tag{5.2}$$

Вычтем из (5.2) равенство (5.1), умножим получившееся равенство на пробную функцию $Y \in H_0^1(0,\pi)$ и проинтегрируем по $(0,\pi)$, в результате получим

$$\int\limits_0^\pi \big[\,\big(\,\eta_+ - \eta^*\big)\, Z_0'\, Y' + \big(\,\eta_0 - \eta^*\big)\, Z_0\, Y\,\big]\, d\,x_1 = 0 \quad \forall\, Y \in H_0^1(0,\pi).$$

Выбирая соответствующим образом функцию Y, получим, что почти всюду на $(0,\pi)$

$$\eta_+ = \eta^* = \eta_0.$$

Таким образом, любая слабо сходящаяся подпоследовательность минимизирующей последовательности сходится слабо в $L_2(0,\pi)$ к элементу η^*. Отсюда следует, что любая минимизирующая последовательность в вариационной задаче (1.2) сходится слабо в $L_2(0,\pi)$ к элементу η^*. Задача (1.2) является слабо корректной, но не сильно корректной. Что и требовалось показать.

Теорема 5.1. *Экстремальная задача* (3.3) *сильно корректна в* $L_2(\Omega)$.

Доказательство. Сильная корректность задачи (3.3) следует из теоремы 3.1, компактности множества V в $L_2(\Omega)$ и непрерывности функционала J на V в $L_2(\Omega)$.

Теорема доказана.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$J(\eta) \to \min\colon \eta \in W, \quad J_W = \inf\{J(\eta)\colon \eta \in W\}, \quad W = \{\eta \in \Lambda\colon Var[\eta] \leqslant C\}, \tag{5.3}$$

где $Var[\eta]$ — полная вариация функции η на $[a,b]$ (см. [20, гл. 6, § 2]), $\Omega = (a,b)\times(c,d)$, $C = \text{const} \geqslant 0$.

Теорема 5.2. *Множество* $W^* = \{\eta \in W\colon J(\eta) = J_W\}$ *непусто и компактно в* $L_p[a,b]$, $1 < p < +\infty$. *Экстремальная задача* (5.3) *сильно корректна в* $L_p[a,b]$, $1 < p < +\infty$.

Доказательство. Теорема доказывается аналогично доказательствам теорем 3.1 и 5.1. Нужно только учесть компактность множества W в $L_p[a,b]$ при $1 < p < +\infty$ [20, гл. 6, § 6, п. 5; 19, гл. 9, § 3, с. 634], непрерывность функционала J на W в $L_p[a,b]$, $1 < p < +\infty$, и обобщенную теорему Вейерштрасса [19, с. 502; 20, с. 95, 97; 18, с. 462].

Теорема доказана.

6. Необходимое условие минимума

Пусть в этом разделе $\Lambda = \{\eta \in C^1(\overline{\Omega})\colon \mu_1 \leqslant \eta(\boldsymbol{x}) \leqslant \mu_2,\ \boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}\}$. Тогда для любого $\eta \in \Lambda$ имеем $T[\eta] \in H^2(\Omega)$, $\gamma_1 T[\eta] \in H^{1/2}(\Gamma) \subset L_2(\Gamma)$ (см. [8; 12; 13; 15; 16]).

Выведем необходимое условие минимума для функционала

$$J(\eta) = \|\, \gamma_1 T[\eta] - \gamma_1 T_* \|^2_{L_2(\Gamma)}, \quad \eta \in \Lambda.$$

Найдем производную Фреше функционала Лагранжа с множителем $Z = Z(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \Omega$,

$$L(\eta) = J(\eta) + G(\eta), \quad G(\eta) = \int\limits_{\Omega} \big(\operatorname{div}(\eta \nabla T[\eta]) - (\boldsymbol{u}, \nabla T[\eta]) - q\,T[\eta] - f\,\big)\, Z\, d\boldsymbol{x}.$$

Найдем приращение функционала Лагранжа при каком-либо допустимом приращении аргумента. Выделим в этом приращении дифференциал и производную Фреше. Дадим приращение $\delta\eta$ аргументу в точке $\eta \in \Lambda$. При этом считаем, что это приращение достаточно мало $\|\,\delta\eta\,\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leqslant \varepsilon$ и при любом таком приращении функционал невязки J определен в точке $\eta + \delta\eta$. Соответствующее приращение решения краевой задачи (1.1) обозначим символом $y = T[\eta + \delta\eta] - T[\eta]$.

Функция y удовлетворяет краевой задаче

$$\operatorname{div}(\eta \nabla y) + \operatorname{div}(\delta\eta \nabla y) + \operatorname{div}(\delta\eta \nabla T[\eta]) - (\boldsymbol{u}, \nabla y) - q\,y = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega; \quad y = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma.$$

Найдем приращение функционала Лагранжа

$$J(\eta + \delta\eta) - J(\eta) = 2\,\langle\, \gamma_1 y,\, \gamma_1 T[\eta] - \gamma_1 T_* \rangle_{L_2(\Gamma)} + \langle\, \gamma_1 y,\, \gamma_1 y\,\rangle_{L_2(\Gamma)};$$

$$G(\eta+\delta\eta)-G(\eta)=\int\limits_{\Omega}\Big(\mathrm{div}\,(\eta\,\nabla Z)\,y+\mathrm{div}\,(\delta\,\eta\,\nabla T[\,\eta\,])\,Z+(\boldsymbol{u},\nabla Z)\,y-q\,Z\,y\Big)\,d\,\boldsymbol{x}$$

$$+\int\limits_{\Omega}y\,Z\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\,d\,\boldsymbol{x}+\int\limits_{\Omega}\mathrm{div}\,(\delta\,\eta\,\nabla y)\,Z\,d\,\boldsymbol{x}+\int\limits_{\Gamma}\Big(\eta\,(\nabla y,\,\boldsymbol{n}\,)\,Z-\eta\,(\nabla Z,\boldsymbol{n})\,y-Z\,(\,\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{n}\,)\,y\Big)\,d\,\Gamma.$$

Учитывая граничное условие $y=0$ на Γ, условие $\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}=0$ в Ω, малость величин $\|\,\mathrm{div}\,(\,\delta\,\eta\nabla y\,)\,\|_{L_2(\Omega)}=o(\,\|\,\delta\,\eta\,\|_{C^1(\overline{\Omega})})$ и $\|\,\eta\,\gamma_1\,y\,\|^2_{L_2(\Gamma)}=o(\,\|\,\delta\,\eta\,\|_{C^1(\overline{\Omega})})$, приращение функционала Лагранжа можно записать в виде

$$L(\eta+\delta\,\eta)-L(\eta)=\int\limits_{\Omega}\Big(\mathrm{div}\,(\,\eta\,\nabla Z\,)\,y+\mathrm{div}\,(\delta\,\eta\,\nabla T[\,\eta\,])\,Z+(\boldsymbol{u},\nabla Z)\,y-q\,Z\,y\Big)\,d\,\boldsymbol{x}$$

$$+\int\limits_{\Gamma}\eta\,(\nabla\,y,\boldsymbol{n})\,Z\,d\,\Gamma+2\Big\langle\,\gamma_1\,y,\,\gamma_1\,T[\eta]-\gamma_1\,T_*\Big\rangle_{L_2(\Gamma)}+o(\,\|\,\delta\eta\,\|_{C^1(\overline{\Omega})}).$$

Пусть функция Z удовлетворяет краевой задаче (назовем ее сопряженной задачей)

$$\mathrm{div}\,(\,\eta\nabla Z\,)+(\boldsymbol{u},\nabla Z)-q\,Z=0,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega;\qquad \eta\,Z=-2\,\big(\,\gamma_1\,T[\,\eta\,]-\gamma_1\,T_*\,\big),\quad \boldsymbol{x}\in\Gamma$$

(сопряженная задача имеет единственное обобщенное решение $Z=Z[\,\eta\,]\in H^1(\Omega)$).

Учитывая сопряженную задачу, находим приращение функционала Лагранжа

$$L\,(\,\eta+\delta\,\eta\,)-L\,(\,\eta\,)=\int\limits_{\Omega}\mathrm{div}\,(\,\delta\,\eta\,\nabla T[\,\eta\,]\,)\,Z[\,\eta\,]\,d\,\boldsymbol{x}+o(\,\|\,\delta\,\eta\,\|_{C^1(\overline{\Omega})}).$$

Отсюда следует, что функционалы Лагранжа G и невязки J дифференциаруемы по Фреше в точке $\eta\in\Lambda$ и их производные имеют вид

$$L'[\,\eta\,]\,(\,\delta\eta\,)=J'[\,\eta\,]\,(\,\delta\eta\,)=\int\limits_{\Omega}\mathrm{div}\,\big(\,\delta\eta\,\nabla T[\,\eta\,]\,\big)\,Z[\,\eta\,]\,d\,\boldsymbol{x}.$$

Сформулируем необходимое условие минимума функционала J на множестве Λ.

Теорема 6.1. *Пусть $\eta^*\in\Lambda^*$, тогда*

$$J\,'[\,\eta^*\,]\,(\,\eta^*-\eta\,)=\int\limits_{\Omega}\mathrm{div}\,\big((\,\eta^*-\eta\,)\,\nabla T[\,\eta^*\,]\,\big)\,Z[\,\eta^*\,]\,d\,\boldsymbol{x}\geqslant 0\quad\forall\,\eta\in\Lambda.$$

Необходимое условие минимума можно записать также в виде интегрального принципа максимума

$$J\,'[\,\eta^*\,]\,(\,\eta^*\,)=\max\,\{J\,'[\,\eta^*\,]\,(\,\eta\,):\,\eta\in\Lambda\},$$

$$\int\limits_{\Omega}\mathrm{div}\,\big(\,\eta^*\,\nabla T[\,\eta^*\,]\,\big)\,Z[\,\eta^*\,]\,d\,\boldsymbol{x}=\max\,\Big\{\int\limits_{\Omega}\mathrm{div}\,\big(\,\eta\,\nabla T[\,\eta^*\,]\,\big)\,Z[\,\eta^*\,]\,d\,\boldsymbol{x}:\,\eta\in\Lambda\Big\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы аналогично доказательству теоремы 3 из [19, с. 524].

Заключение

В статье изучались свойства экстремальной задачи, представляющей собой вариационную формулировку обратной коэффициентной задачи для стационарной модели диффузии-адвекции-реакции. Основное внимание уделялось задаче восстановления (нахождения) старшего коэффициента (коэффициента температуропроводности) в принятой модели. Исходной информацией для решения обратной задачи являлся результат измерения потока тепла на границе области функционирования модели. Однако этот поток доставляет нерегулярные данные для решения задачи, в этом особенность задачи. Доказанная теорема о следах нормальной производной позволила уточнить исходную обратную задачу и провести ее соответствующее исследование. Показано, что экстремальная задача на минимум может не иметь решения (множество точек минимума может оказаться пустым). Приведены некоторые условия разрешимости вариационной задачи (множество точек минимума непусто). Указаны некоторые необходимые условия единственности решения вариационной задачи, а также некоторые условия единственности решения вариационной задачи (точка минимума — одна). Исследованы свойства сильной и слабой корректности экстремальной задачи. Приведены необходимые условия минимума в вариационной задаче при гладких исходных данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
2. **Chandrasekhar S.** Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press, 1961. 652 p. https://doi.org/10.1017/S0022112062210592
3. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
4. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и их приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
5. **Кабанихин С.И.** Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. 457 с.
6. **Самарский А.А., Вабищевич П.Н.** Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: УРСС, 2004. 480 с.
7. **Алексеев Г.В.** Задачи управления для стационарных моделей тепломассопереноса и магнитной гидродинамики. М.: Наука, 2007. 292 с.
8. **Алексеев Г.В., Терешко Д.А.** Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2008. 365 с.
9. **Короткий А.И., Цепелев И.А., Исмаил-Заде А.Т.** Ассимиляция данных о свободной поверхности потока жидкости для нахождения ее вязкости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28, № 2. С. 143–157. https://10.21538/0134-4889-2022-28-2-143-157
10. **Короткий А.И., Цепелев И.А.** Ассимиляция граничных данных для восстановления коэффициента поглощения в модели стационарной реакции-конвекции-диффузии // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 29, № 2. С. 87–103. https://10.21538/0134-4889-2023-29-2-87-103
11. **Ладыженская О.А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: ФМ, 1961. 203 с.
12. **Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
13. **Grisvard P.** Elliptic problems in nonsmooth domains. Boston, London, Melbourn: Pitman Advanced Publishing Program, 1985. 410 p.
14. **Adams R.A.** Sobolev spaces. NY: Acad. Press, 1975. 268 p.
15. **Михайлов В.П.** Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 392 с.
16. **Михлин С.Г.** Линейные уравнения в частными производными. М.: Высшая школа, 1977. 432 с.
17. **Обэн Ж.-П.** Приближенное решение эллиптических краевых задач. М.: Мир, 1977. 384 с.
18. **Треногин В.А.** Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2002. 448 с.
19. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
20. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.

Поступила 10.10.2025
После доработки 23.10.2025
Принята к публикации 27.10.2025

Короткий Александр Илларионович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: korotkii@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Fluid mechanics.* Vol. 6. Oxford, Pergamon Press, 1987, 539 p. ISBN-10: 0080339336. Original Russian text published in Landau L. D., Lifshits E. M. *Teoreticheskaya fizika. Tom 6: Gidrodinamika*, Moscow, Nauka Publ., 1986, 736 p.
2. Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability.* Oxford, Clarendon Press, 1961, 652 p. https://doi.org/10.1017/S0022112062210592
3. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Methods for solutions of ill-posed problems.* Transl. from the 2nd Russian ed., New York, Wiley, 1977, 258 p. ISBN: 0470991240 . Original Russian text published in Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach*, Moscow, Nauka Publ., 1979, 285 p.
4. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Theory of linear ill-posed problems and its applications.* In: *Inverse and ill-posed problems series.* Vol. 36. Utrecht etc., VSP, 2002, 281 p. https://doi.org/10.1515/9783110944822. Original Russian text published in Ivanov V. K., Vasin V. V., Tanana V. P. *Teoriya lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya*, Moscow, Nauka Publ., 1978, 206 p.
5. Kabanikhin S.I. *Inverse and ill-posed problems*, Berlin, Boston, De Gruyter, 2011, 475 p. https://doi.org/10.1515/9783110224016. Original Russian text published in Kabanikhin S. I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi*, Novosibirsk, Sib. Nauch. Izd. Publ., 2009, 458 p. ISBN: 5-98365-003-3 .
6. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. *Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics.* Berlin, Walter de Gruyter, 2007, 438 p. https://doi.org/10.1515/9783110205794. Original Russian text published in Samarskii A. A., Vabishchevich P. N. *Chislennye metody resheniya obratnykh zadach matematicheskoi fiziki*, Moscow, Editorial URSS Publ., 2004, 478 p. ISBN: 5-354-00156-0 .
7. Alekseev G.V. *Zadachi upravleniya dlya statsionarnykh modeley teplomassoperenosa i magnitnoy gidrodinamiki* [Control problems for stationary models of heat and mass transfer and magnetohydrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 2007, 292 p.
8. Alekseev G.V., Tereshko D.A. *Analiz i optimizatsiya v gidrodinamike vyazkoi zhidkosti* [Analysis and optimization in viscous fluid dynamics]. Vladivostok, Dal'nauka Publ., 2008, 365 p. ISBN: 5804410458 .
9. Korotkii A.I., Tsepelev I.A., Ismail-Zadeh A.T. Assimilating data on the free surface of a fluid flow to constrain its viscosity. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2022, vol. 319, suppl. 1, pp. S162–S174. https://doi.org/10.1134/S0081543822060141
10. Korotkii A.I., Tsepelev I.A. On the correctness of one extreme problem, related to inverse coefficient problems. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 170–179. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2024-30-4-170-179
11. Ladyzhenskaya O.A. *The mathematical theory of viscous incompressible flow.* NY, Gordon and Breach, 1987, 224 p. ISBN: 0677207603 . Original Russian text published in Ladyzhenskaya O. A. *Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoi neszhimaemoi zhidkosti*, Moscow, Fizmatlit Publ., 1961, 203 p.
12. Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N. *Linear and quasilinear elliptic equations.* Ne, London, Academic Press, 1968, 495 p.
13. Grisvard P. *Elliptic problems in nonsmooth domains.* Boston, London, Melbourn, Pitman Adv. Publ. Program, 1985, 410 p.
14. Adams R.A. *Sobolev spaces.* New York, Academic Press, 1975, 268 p.
15. Mikhailov V.P. *Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Partial differential equations]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 392 p.
16. Mikhlin S.G. *Lineinye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Linear partial differential equations]. Moscow, Vysshaya Shkola, 1977, 431 p.

17. Aubin J.P. *Approximation of elliptic boundary-value problems*. New York, London, Sydney, Toronto: Wiley-Interscience, 1972, 360 p. ISBN: 0471036501 . Translated to Russian under the title *Priblizhennoye resheniye ellipticheskikh krayevykh zadach*, Moscow, Mir Publ., 1977, 384 p.
18. Trenogin V.A. *Funktsional'nyy analiz* [Funktsional analysis]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2002, 488 p. ISBN: 5-9221-0272-9 .
19. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moscow, Faktorial Press, 2002, 824 p. ISBN: 5-88688-056-9 .
20. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of function theory and functional analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1972, 496 p.

Received October 10, 2025
Revised October 23, 2025
Accepted October 27, 2025

Alexander Illarionovich Korotkii, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: korotkii@imm.uran.ru .

Cite this article as: A. I. Korotkii. Assimilation of irregular boundary data in recovering model coefficients. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 4, pp. 214–229.