

УДК 515.16

**ВИХРЕВАЯ ГРУППА ДЛЯ УЗЛОВ И ЗАЦЕПЛЕНИЙ
В ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЕ¹****Ф. Г. Кораблёв**

Статья посвящена построению вихревой группы зацепления. Эта группа является корректно определенным инвариантом для ориентированных зацеплений в трехмерной сфере. Описывается, как каждой диаграмме зацепления на двумерной сфере сопоставляется группа, заданная своими образующими и соотношениями: в качестве образующих выступают как перекрестки диаграммы, так и еще два дополнительных формальных символа, а области, на которые диаграмма разбивает двумерную сферу, играют роль соотношений. Доказывается, что группы, сопоставленные различным диаграммам одного и того же зацепления, изоморфны. Редуцированная вихревая группа получается из вихревой группы тривиализацией двух конкретных образующих. Доказывается, что эта группа допускает сбалансированное копредставление. Конструкция редуцированной вихревой группы близка к одному из определений полинома Александера зацепления. Доказывается, что, порядок абелианизированной редуцированной вихревой группы совпадает с определителем зацепления.

Ключевые слова: зацепление, вихревая группа, определитель зацепления.

Ph. G. Korablev. Vortex group for knots and links in a 3-sphere.

The article is devoted to the construction of a vortex group. This group is a well defined invariant for oriented links in a 3-sphere. It is defined by using generators and relations. The generators are both the crossings of the diagram and two additional formal symbols, while the regions into which the diagram divides the 2-sphere play the role of the relations. It is proved that groups constructed for different diagrams of the same link are isomorphic. A reduced vortex group is obtained from a vortex group by trivialising two specific generators. It is proved that this group allows a balanced presentation. The construction of the reduced vortex group is close to one of the definitions of the Alexander polynomial for links. It is proved that the order of the abelianized reduced vortex group coincides with the determinant of the link.

Keywords: link, vortex group, link determinant.

MSC: 57M27, 57M25

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-4-203-213

1. Введение

Статья посвящена определению группового инварианта для ориентированных узлов и зацеплений в трехмерной сфере. Каждому такому зацеплению сопоставляется так называемая вихревая группа этого зацепления. Для каждой диаграммы зацепления вихревая группа определяется с помощью образующих и соотношений: в качестве образующих выступают как перекрестки диаграммы, так и еще два дополнительных формальных символа, а области, на которые диаграмма разбивает двумерную сферу, играют роль соотношений. Для различных диаграмм одного зацепления получающиеся копредставления задают изоморфные группы. Так называемая редуцированная вихревая группа получается из обычной вихревой группы тривиализацией двух образующих, отвечающих дополнительным формальным символам.

В общем случае использование вихревых групп для различения зацеплений может оказаться проблематичным, так как задача распознавания группы по ее копредставлению алгоритмически не разрешима. Однако из этих групп можно извлекать более простые инварианты зацеплений с помощью подходов, аналогичных используемых в [1; 2]. Помимо этого можно

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 25-21-20084, <https://rscf.ru/project/25-21-20084/>).

рассматривать гомоморфизмы из вихревых групп в другие группы, возникающие в теории узлов и кос, например, в группы G_n^k (см. [3; 4]).

В препринте [5] вихревая группа называется “электрической группой”. Такое название кажется чрезвычайно неудачным, так как апеллирует к неуместным ассоциациям и мотивировкам. В свою очередь название “вихревая группа” выглядит более адекватным, так как оно отражает принцип построения группы. С геометрической точки зрения конструкция использует циклические обходы областей диаграммы в одном и том же, заранее зафиксированном, направлении.

Структура работы такова. В разд. 2 дается определение вихревой группы и доказывается, что группы, построенные по двум диаграммам одного зацепления, изоморфны (теорема 1). В разд. 3 гомоморфизмы из вихревой группы в фиксированную конечную группу описываются в терминах правильных раскрасок диаграммы зацепления. Доказывается, что существует естественная биекция между множествами правильных раскрасок двух диаграмм, задающих одно зацепление (теорема 2). Аналогичный подход традиционно используется при определении инварианта числа правильных раскрасок элементами конечного квандла ([6; 7]). Значение этого инварианта совпадает с числом гомоморфизмов из фундаментального квандла зацепления в фиксированный конечный квандл. В разд. 4 доказываются некоторые свойства редуцированной вихревой группы. А именно, доказывается, что эта группа допускает сбалансированное копредставление, т. е. копредставление с одинаковым числом образующих и соотношений (теорема 3). Помимо этого устанавливается связь между абелианизированной редуцированной вихревой группой и определителем зацепления (теорема 4).

2. Вихревая группа

Пусть D — диаграмма на двумерной сфере S^2 ориентированного зацепления L . Зафиксируем какую-нибудь ориентацию двумерной сферы S^2 и всюду в дальнейшем будем использовать именно эту ориентацию.

Обозначим $C(D) = \{c_1, \dots, c_n\}$ — множество перекрестков диаграммы D и $A(D) = \{a_1, \dots, a_{n+2}\}$ — множество областей, на которые диаграмма D разбивает сферу S^2 . Зададим копредставление группы $\mathcal{V}(D)$ с использованием образующих и соотношений. Образующих будет ровно $n + 2$: две формальных образующих a и b , а также n образующих, находящихся в биективном соответствии с перекрестками диаграммы D .

Каждой области $a_i \in A(D)$ соответствует соотношение R_{a_i} копредставления группы $\mathcal{V}(D)$. Выписывается оно следующим образом. Выбираем любую начальную точку на границе области a_i и обходим ее в направлении зафиксированной ориентации двумерной сферы S^2 . Каждый перекресток $c_j \in C(D)$ при таком обходе соответствует слову w_{c_j} . Если перекресток c_j положительный и x_j — соответствующая ему образующая, то это слово определяется следующим образом: w_{c_j} — это либо $x_j ab$, либо $b^{-1} a^{-1} x_j^{-1}$, либо $a^{-1} x_j^{-1} a$, либо $b^{-1} x_j b$ в зависимости от того, к какому углу в окрестности перекрестка c_j примыкает область a_i (рис. 1 слева). Если перекресток c_j отрицательный, то слово w_{c_j} — это либо $x_j ab$, либо $b^{-1} a^{-1} x_j^{-1}$, либо $a^{-1} x_j a$, либо $b^{-1} x_j^{-1} b$ тоже в зависимости от того, к какому углу в окрестности перекрестка c_j при-



Рис. 1. Слова w_{c_j} в окрестности перекрестка c_j (положительного слева и отрицательного справа).

мыкает область a_i (рис. 1 справа). Окончательно соотношение R_{a_i} получается в результате последовательного произведения слов w_{c_j} в соответствии с направлением обхода области a_i .

Пример 1. Пусть D — минимальная диаграмма ориентированного узла “трилистник”. Для этой диаграммы $C(D) = \{c_1, c_2, c_3\}$ и $A(D) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ (рис. 2).

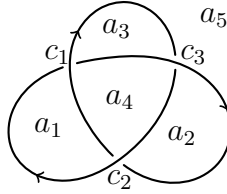


Рис. 2. Диаграмма узла “трилистник”.

Имеем по определению

$$\begin{aligned} R_{a_1} &= (x_1ab) \cdot (b^{-1}a^{-1}x_2^{-1}) = x_1x_2^{-1}, & R_{a_2} &= (x_2ab) \cdot (b^{-1}a^{-1}x_3^{-1}) = x_2x_3^{-1}, \\ R_{a_3} &= (x_3ab) \cdot (b^{-1}a^{-1}x_1^{-1}) = x_3x_1^{-1}, \\ R_{a_4} &= (b^{-1}x_1^{-1}b) \cdot (b^{-1}x_2^{-1}b) \cdot (b^{-1}x_3^{-1}b) = b^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1}b, \\ R_{a_5} &= (a^{-1}x_1a) \cdot (a^{-1}x_3a) \cdot (a^{-1}x_2a) = a^{-1}x_1x_3x_2a. \end{aligned}$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(D) &= \langle a, b, x_1, x_2, x_3 \mid x_1x_2^{-1}, x_2x_3^{-1}, x_3x_1^{-1}, b^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1}b, a^{-1}x_1x_3x_2a \rangle \\ &= \langle a, b, x \mid x^3 = 1 \rangle. \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть D_1, D_2 — две диаграммы ориентированного зацепления K на двумерной сфере S^2 . Тогда группы $\mathcal{V}(D_1)$ и $\mathcal{V}(D_2)$ изоморфны.

Доказательство. Хорошо известно, что любые две диаграммы одного и того же ориентированного зацепления могут быть преобразованы друг в друга с помощью конечной последовательности четырех движений Редемейстера, изображенных на рис. 3 (см. [8]). Поэтому теорему достаточно доказать для случая, когда диаграмма D_2 получается из диаграммы D_1 с помощью одного из этих движений.

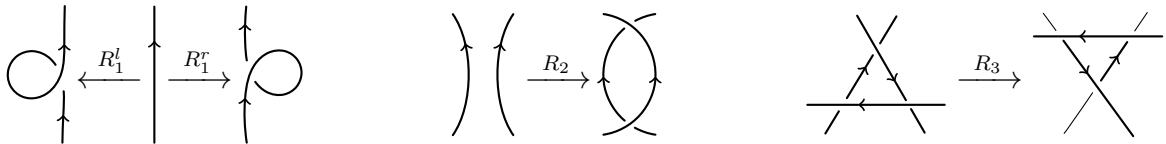


Рис. 3. Четыре ориентированных движения Редемейстера.

Движения R_1^r и R_1^l . Рассмотрим случай движения R_1^r . Обозначим через $a_1, a_2 \in A(D_1)$ левую и правую область диаграммы D_1 , участвующие в движении Редемейстера. Обозначим соответствующие им области диаграммы D_2 через $a'_1, a'_2 \in A(D_2)$. Пусть $\bar{a} \in A(D_2)$ — новая область, появляющаяся в результате движения (рис. 4).

Пусть $\mathcal{V}(D_1) = \langle \mathcal{G} \mid \mathcal{R} \rangle$, где \mathcal{G} — множество образующих, и \mathcal{R} — множество соотношений копредставления группы $\mathcal{V}(D_1)$. Обозначим через x новую образующую группы $\mathcal{V}(D_2)$, которая соответствует новому перекрестку диаграммы D_2 . Тогда $\mathcal{V}(D_2) = \langle \mathcal{G}, x \mid \mathcal{R}' \rangle$, где

$$\mathcal{R}' = (\mathcal{R} \setminus \{R_{a_1}, R_{a_2}\}) \cup \{R_{a'_1}, R_{a'_2}, R_{\bar{a}}\}.$$

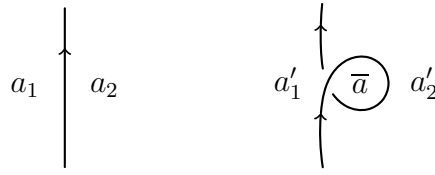


Рис. 4. Области до (слева) и после (справа) движения R_1^l .

Непосредственно находим, что $R_{a_1'} = R_{a_1} \cdot a^{-1}x^{-1}a$, $R_{a_2'} = R_{a_2} \cdot b^{-1}a^{-1}x^{-1} \cdot xab$, $R_{\bar{a}} = b^{-1}xb$.

Из соотношения $R_{\bar{a}}$ следует, что образующая x тривиальна, и поэтому ее можно исключить из копредставления группы $\mathcal{V}(D_2)$. В результате получаем, что группы $\mathcal{V}(D_1)$ и $\mathcal{V}(D_2)$ изоморфны.

Доказательство для случая движения R_1^l аналогично.

Движение R_2 . Обозначим через $a_1, a_2, a_3 \in A(D_1)$ области, расположенные слева, в центре и справа, на диаграмме D_1 , к которым применяется движение. Обозначим через $a_1', a_2', a_2'', a_3' \in A(D_2)$ соответствующие им области на диаграмме D_2 (рис. 5). Область a_2 разбивается на две области a_2', a_2'' , и появляется новая область $\bar{a} \in A(D_2)$.

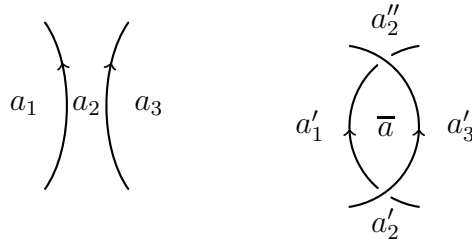


Рис. 5. Области до (слева) и после (справа) движения R_2 .

Пусть $\mathcal{V}(D_1) = \langle \mathcal{G} \mid \mathcal{R} \rangle$ и w_1, w_2 — два таких слова в алфавите \mathcal{G} , что $R_{a_2} = w_1 \cdot w_2$, причем слово w_1 соответствует нижней части области a_2 , а слово w_2 — верхней.

Обозначим через x, y две новых образующих группы $\mathcal{V}(D_2)$ (образующая x соответствует положительному перекрестку, а образующая y — отрицательному). Тогда

$$\mathcal{V}(D_2) = \langle \mathcal{G}, x, y \mid \mathcal{R}' \rangle, \quad \text{где } \mathcal{R}' = (\mathcal{R} \setminus \{R_{a_1}, R_{a_2}, R_{a_3}\}) \cup \{R_{a_1'}, R_{a_2'}, R_{a_2''}, R_{\bar{a}}\}.$$

Непосредственно находим, что

$$R_{a_1'} = R_{a_1} \cdot a^{-1}x^{-1}a \cdot a^{-1}ya, \quad R_{a_3'} = R_{a_3} \cdot b^{-1}y^{-1}b \cdot b^{-1}xb,$$

$$R_{\bar{a}} = b^{-1}a^{-1}x^{-1} \cdot yab, \quad R_{a_2'} = w_1 \cdot xab, \quad R_{a_2''} = w_2 \cdot b^{-1}a^{-1}y^{-1}.$$

Соотношение $R_{\bar{a}}$ позволяет исключить образующую y (и заменить всюду y на x). В результате соотношения $R_{a_1'}$ и $R_{a_3'}$ совпадут с соотношениями R_{a_1} и R_{a_3} соответственно. Далее, соотношение $R_{a_2''} = w_2 b^{-1}a^{-1}x^{-1}$ позволяет исключить образующую x . После этого соотношение $R_{a_2'}$ совпадет с соотношением R_{a_2} .

Движение R_3 . Обозначим через $c_1, c_2, c_3 \in C(D_1)$ перекрестки диаграммы D_1 , участвующие в движении, и через $c_1', c_2', c_3' \in C(D_2)$ соответствующие им перекрестки диаграммы D_2 . Аналогичным образом обозначим через $a_1, \dots, a_7 \in A(D_1)$ области диаграммы D_1 и $a_1', \dots, a_7' \in A(D_2)$ соответствующие им области диаграммы D_2 (рис. 6). Для определенности будем считать, что все области a_1, \dots, a_7 попарно различны и все области a_1', \dots, a_7' тоже попарно различны. Тогда

$$\mathcal{V}(D_1) = \langle \mathcal{G}, x_1, x_2, x_3 \mid \mathcal{R}, R_{a_1}, \dots, R_{a_7} \rangle, \quad \mathcal{V}(D_2) = \langle \mathcal{G}, y_1, y_2, y_3 \mid \mathcal{R}, R_{a_1'}, \dots, R_{a_7'} \rangle,$$

где образующие x_1, x_2, x_3 соответствуют перекресткам c_1, c_2, c_3 , а образующие y_1, y_2, y_3 соответствуют перекресткам c'_1, c'_2, c'_3 . Все остальные образующие (элементы множества \mathcal{G}) копредставлений групп $\mathcal{V}(D_1)$ и $\mathcal{V}(D_2)$ совпадают. Множество соотношений \mathcal{R} у них тоже одно и то же, так как составляющие его соотношения соответствуют областям диаграмм D_1 и D_2 , не участвующим в движении R_3 (рис. 6).

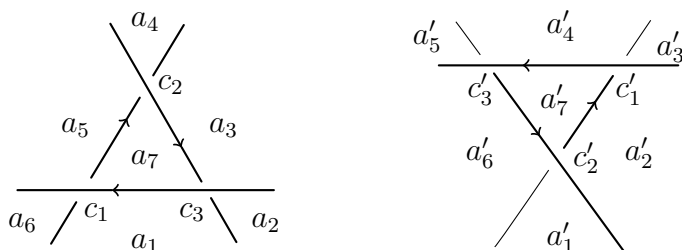


Рис. 6. Области и перекрестки до (слева) и после (справа) движения R_3 .

Непосредственно находим, что

$$\begin{aligned}
 R_{a_1} &= b^{-1}a^{-1}x_3^{-1} \cdot x_1ab \cdot w_1, & R_{a'_1} &= b^{-1}y_3b \cdot w_1, \\
 R_{a_2} &= a^{-1}x_3^{-1}a \cdot w_2, & R_{a'_2} &= y_1ab \cdot b^{-1}a^{-1}y_3^{-1} \cdot w_2, \\
 R_{a_3} &= b^{-1}a^{-1}x_2^{-1} \cdot x_3ab \cdot w_3, & R_{a'_3} &= b^{-1}y_1^{-1}b \cdot w_3, \\
 R_{a_4} &= a^{-1}x_2^{-1}a \cdot w_4, & R_{a'_4} &= y_2ab \cdot b^{-1}a^{-1}y_1^{-1} \cdot w_4, \\
 R_{a_5} &= b^{-1}a^{-1}x_1^{-1} \cdot x_2ab \cdot w_5, & R_{a'_5} &= b^{-1}y_2b \cdot w_5, \\
 R_{a_6} &= a^{-1}x_1a \cdot w_6, & R_{a'_6} &= y_3ab \cdot b^{-1}a^{-1}y_2^{-1} \cdot w_6, \\
 R_{a_7} &= b^{-1}x_1^{-1}b \cdot b^{-1}x_3b \cdot b^{-1}x_2b, & R_{a'_7} &= a^{-1}y_3^{-1}a \cdot a^{-1}y_1a \cdot a^{-1}y_2^{-1}a,
 \end{aligned}$$

где w_1, \dots, w_6 — фиксированные слова в алфавите \mathcal{G} .

Легко проверить, что копредставление группы $\mathcal{V}(D_2)$ получается из копредставления группы $\mathcal{V}(D_1)$ заменой $y_1 = a^{-1}x_3^{-1}x_2a$, $y_2 = a^{-1}x_1^{-1}x_2a$, $y_3 = a^{-1}x_3^{-1}x_1a$. Следовательно, эти группы изоморфны.

Случай, когда какие-то из областей a_1, \dots, a_6 совпадают, рассматривается аналогично. Изоморфизм между группами $\mathcal{V}(D_1)$ и $\mathcal{V}(D_2)$ задается той же самой заменой образующих.

Теорема доказана.

Для каждого ориентированного зацепления K определим группу $\mathcal{V}(K)$, совпадающую с группой $\mathcal{V}(D)$, где D — произвольная диаграмма зацепления K . Эта группа $\mathcal{V}(K)$ называется *вихревой группой* зацепления K .

3. Раскраски элементами групп

Вихревая группа является инвариантом ориентированных зацеплений. Значением этого инварианта для каждого зацепления является группа. Один из способов изучения свойств этих групп состоит в рассмотрении гомоморфизмов из вихревой группы в какую-нибудь фиксированную конечную группу.

Пусть K — ориентированное зацепление, и пусть G — конечная группа. Число гомоморфизмов из вихревой группы $\mathcal{V}(K)$ в группу G конечно. Это значение является числовым инвариантом зацепления K . Каждый гомоморфизм $\xi: \mathcal{V}(K) \rightarrow G$ может быть описан в терминах раскрасок диаграммы зацепления K элементами группы G .

Зафиксируем два элемента $\alpha, \beta \in G$. Пусть D — диаграмма зацепления K на двумерной сфере S^2 . Как и ранее, обозначим через $C(D) = \{c_1, \dots, c_n\}$ множество перекрестков диаграммы D и $A(D) = \{a_1, \dots, a_{n+2}\}$ — множество областей этой диаграммы. Пусть $\xi: C(D) \rightarrow G$

отображение, которое каждому перекрестку диаграммы D сопоставляет элемент группы G . Каждое такое отображение ξ будем называть *раскраской* диаграммы D .

Пусть $a_i \in A(D)$, $i \in \{1, \dots, n+2\}$ — область диаграммы D , и пусть p_i — точка на крае области a_i , не совпадающая ни с одним из перекрестков. Определим элемент $g_{a_i, p_i} \in G$ следующим образом. В самом начале $g_{a_i, p_i} = e$ — нейтральный элемент группы G . Обходим область a_i , начиная с точки p_i , в направлении ориентации двумерной сферы S^2 и последовательно домножаем элемент g_{a_i, p_i} на элементы группы G по следующему правилу. Если встречаем положительный перекресток c_j , $j \in \{1, \dots, n\}$, то умножаем g_{a_i, p_i} на один из элементов $\xi(c_j)\alpha\beta$, $\beta^{-1}\alpha^{-1}\xi(c_j)^{-1}$, $\alpha^{-1}\xi(c_j)^{-1}\alpha$ или $\beta^{-1}\xi(c_j)\beta$ в зависимости от того, какому из углов в окрестности перекрестка c_j соответствует область a_i (рис. 7 слева). Если перекресток c_j отрицательный, то умножаем g_{a_i, p_i} на один из элементов $\xi(c_j)\alpha\beta$, $\beta^{-1}\alpha^{-1}\xi(c_j)^{-1}$, $\alpha^{-1}\xi(c_j)\alpha$ или $\beta^{-1}\xi(c_j)^{-1}\beta$ (рис. 7 справа).

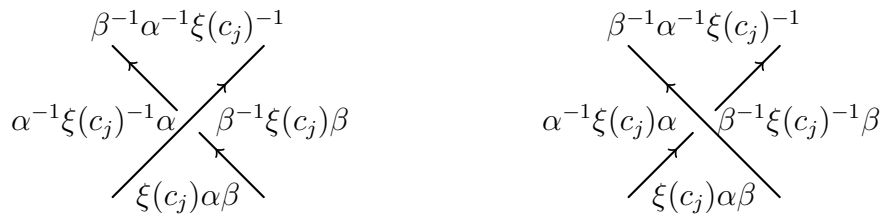


Рис. 7. Множители элемента g_{a_i, p_i} , соответствующие перекрестку c_j (положительному слева, отрицательному справа).

Будем говорить, что раскраска ξ является *правильной* (α, β) -раскраской, если для каждой области $a_i \in A(D)$: $g_{a_i, p_i} = e$. Ясно, что определение правильной (α, β) -раскраски не зависит от выбора начальных точек обхода p_i , $i \in \{1, \dots, n+2\}$. Обозначим через $Col_{\alpha, \beta}(D)$ множество всех правильных (α, β) -раскрасок диаграммы D .

З а м е ч а н и е 1. $|Hom(\mathcal{V}(D) \rightarrow G)| = \sum_{\alpha, \beta \in G} |Col_{\alpha, \beta}(D)|$.

Теорема 2. Пусть G — конечная группа, $\alpha, \beta \in G$, и пусть D_1, D_2 — две диаграммы ориентированного зацепления K . Тогда существует естественная биекция между множествами правильных (α, β) -раскрасок $Col_{\alpha, \beta}(D_1)$ и $Col_{\alpha, \beta}(D_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подход аналогичен тому, как доказывалась теорема 1. Надо доказать, что для каждой правильной (α, β) -раскраски $\xi \in Col_{\alpha, \beta}(D_1)$ диаграммы D_1 существует ровно одна правильная (α, β) -раскраска $\xi' \in Col_{\alpha, \beta}(D_2)$ диаграммы D_2 , где диаграмма D_2 получается из диаграммы D_1 с помощью одного из четырех движений Редемейстера R_1^l, R_1^r, R_2 или R_3 (рис. 3). Будем использовать те же самые обозначения, что и в доказательстве теоремы 1.

Движения R_1^l и R_1^r . Пусть $c \in C(D_2)$ — перекресток, который появляется в результате движения R_1^r . Если ξ' является правильной (α, β) -раскраской диаграммы D_2 , то $\beta^{-1} \cdot \xi'(c) \cdot \beta = e$. Следовательно, $\xi'(c) = e$. Такая раскраска ξ' является единственной, которая продолжается до раскраски ξ диаграммы D_1 .

Движение R_2 . Пусть $c_1, c_2 \in C(D_2)$ — два новых перекрестка диаграммы D_2 , которые появляются в результате движения (перекресток c_1 положительный, а c_2 — отрицательный). Тогда $\beta^{-1}\alpha^{-1}\xi'(c_1)^{-1} \cdot \xi'(c_2)\alpha\beta = e$. Следовательно, $\xi'(c_1) = \xi'(c_2)$. Получаем, что тогда $g_{a'_1, p'_1} = e$ и $g_{a'_2, p'_2} = e$, где p'_i — это начальная точка для обхода области a'_i , $i = 1, 2$.

Пусть p — начальная точка обхода области $a_2 \in A(D_1)$, расположенная вблизи левой дуги, участвующей в движении R_2 . Тогда $g_{a_2, p} = g_1 \cdot g_2 = e$, где элемент $g_1 \in G$ соответствует нижней части области a_2 , а $g_2 \in G$ — верхней части этой области. Тогда существует единственное такое

значение $\xi'(c_1) = \xi'(c_2)$, что $g_1 \cdot \xi'(c_1) \alpha \beta = e$ и $g_2 \cdot \beta^{-1} \alpha^{-1} \xi'(c_2)^{-1} = e$. Непосредственно находим, что $\xi'(c_1) = \xi'(c_2) = g_2 \beta^{-1} \alpha^{-1} = g_1^{-1} \beta^{-1} \alpha^{-1}$.

Движение R_3 . Пусть $\xi \in Col_{\alpha, \beta}(D_1)$ — правильная (α, β) -раскраска диаграммы D_1 . Пусть $\xi(c_i) = s_i, i = 1, 2, 3$. Рассмотрим раскраску ξ' диаграммы D_2 , совпадающую с раскраской ξ во всех перекрестках, кроме тех, которые участвуют в движении. Пусть $\xi'(c'_i) = t_i, i = 1, 2, 3$.

Используя вычисления, проделанные при доказательстве теоремы 1, находим, что существует единственный набор значений $t_1 = \alpha^{-1} s_3^{-1} s_2 \alpha, t_2 = \alpha^{-1} s_1^{-1} s_2 \alpha$ и $t_3 = \alpha^{-1} s_3^{-1} s_1 \alpha$, таких, что раскраска ξ' является правильной (α, β) -раскраской диаграммы D_2 .

Теорема доказана.

4. Редуцированная вихревая группа

Пусть K — ориентированное зацепление. Его *редуцированная вихревая группа* $\mathcal{V}_r(K)$ получается из вихревой группы $\mathcal{V}(K)$ тривиализацией образующих a и b .

Пример 2. Редуцированная вихревая группа для узла “трилистник” изоморфна циклической группе порядка 3.

Предложение 1. Пусть K — ориентированный узел, и пусть K' — тот же самый узел, но с противоположной ориентацией. Тогда группы $\mathcal{V}_r(K)$ и $\mathcal{V}_r(K')$ изоморфны.

Доказательство. Выберем диаграммы D и D' узлов K и K' отличающиеся только ориентациями. Пусть

$$\mathcal{V}_r(D) = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_k \rangle \text{ и } \mathcal{V}_r(D') = \langle \xi_1, \dots, \xi_n \mid \rho_1, \dots, \rho_k \rangle.$$

Изоморфизм между группами $\mathcal{V}_r(D)$ и $\mathcal{V}_r(D')$ задается отображением $x_i \mapsto \xi_i^{-1}$ (рис. 8).



Рис. 8. Изоморфизм между группами $\mathcal{V}_r(D)$ и $\mathcal{V}_r(D')$.

Предложение доказано.

Теорема 3. Для любого ориентированного зацепления K его редуцированная вихревая группа $\mathcal{V}_r(K)$ допускает копредставление, содержащее одинаковое число образующих и соотношений.

Доказательство. Пусть D — диаграмма зацепления K на двумерной сфере S^2 . Как и ранее, обозначим $C(D) = \{c_1, \dots, c_n\}$ — множество перекрестков диаграммы D и $A(D) = \{a_1, \dots, a_{n+2}\}$ — множество областей этой диаграммы. Пусть x_1, \dots, x_n — образующие группы $\mathcal{V}_r(D)$, соответствующие перекресткам c_1, \dots, c_n , и пусть $R_{a_1}, \dots, R_{a_{n+2}}$ — соотношения этой группы. Достаточно доказать, что два соотношения из этого семейства выводимы из остальных.

Рассмотрим множество $E = \{\circ, \bullet\}$, состоящее из двух цветов (белый и черный). Рассмотрим шахматную раскраску $\mathcal{H}: A(D) \rightarrow E$ диаграммы D , т.е. такое сопоставление областям этой диаграммы белого или черного цветов, чтобы каждая дуга диаграммы разделяла области разных цветов. Таких раскрасок всего две. Для определенности будем считать, что раскраска \mathcal{H} такова, что самая внешняя область диаграммы D является белой. Обозначим через $A_\bullet(D, \mathcal{H}) \subseteq A(D)$ множество областей диаграммы D , покрашенных в черный цвет.

Построим ориентированный граф $T_\bullet(D, \mathcal{H}) \subseteq S^2$ следующим образом. Каждая его вершина v находится в биективном соответствии с областью $a \in A_\bullet(D, \mathcal{H})$, и расположена внутри этой области. Ребра, соединяющие две вершины v_1 и v_2 , находятся в биективном соответствии с перекрестками, которые одновременно примыкают к обеим соответствующим этим вершинам областям $a_1, a_2 \in A_\bullet(D, \mathcal{H})$. Каждое ребро ориентировано вдоль направления верхней дуги диаграммы D в соответствующем этому ребру перекрестке (рис. 9).

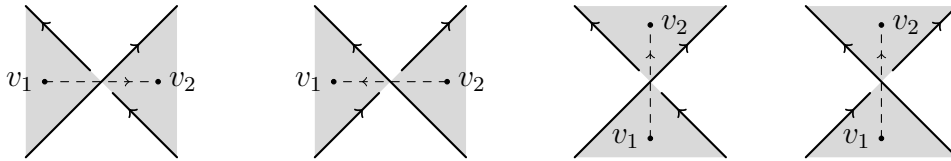


Рис. 9. Ориентации ребер графа $T_\bullet(D, \mathcal{H})$, соединяющих вершины v_1, v_2 .

Каждому ориентированному ребру e графа $T_\bullet(D, \mathcal{H})$ сопоставим образующую, соответствующую перекрестку диаграммы D . На рис. 10 изображен пример диаграммы узла “восьмерка” (слева) и графа $T_\bullet(D, \mathcal{H})$ (справа).

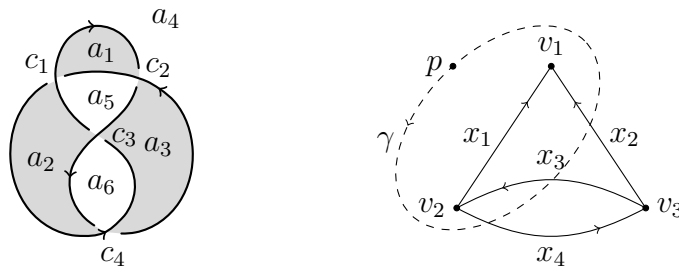


Рис. 10. Диаграмма узла “восьмерка” (слева) и граф $T_\bullet(D, \mathcal{H})$ (справа).

Пусть $\gamma \subseteq S^2$ — простая замкнутая ориентированная кривая на двумерной сфере S^2 . Зафиксируем начальную точку на этой кривой $p \in \gamma$. Слово $w_{\gamma,p}$ в алфавите x_1, \dots, x_n получается следующим образом. Обходим кривую γ вдоль ее ориентации начиная с начальной точки p . При пересечении с ребром графа $T_\bullet(D, \mathcal{H})$, которому сопоставлена образующая x , приписываем к слову справа символ x или x^{-1} в зависимости от того, пересекает ли кривая γ ребро справа налево (тогда используем символ x) или слева направо (тогда используем символ x^{-1}). Итоговое слово $w_{\gamma,p}$ получается в результате полного обхода кривой γ . На рис. 10 (справа) изображен пример кривой γ и начальной точки p . Соответствующее слово $w_{\gamma,p} = x_4 x_3^{-1} x_2^{-1}$.

Заметим, что если вершина v графа $T_\bullet(D, \mathcal{H})$ соответствует области $a \in A_\bullet(D, \mathcal{H})$ и γ_v — край окрестности вершины v , ориентированный против часовой стрелки, то при подходящем выборе начальной точки $p \in \gamma_v$: $w_{\gamma_v,p} = R_a$. Также заметим, что если e — ребро графа $T_\bullet(D, \mathcal{H})$, соединяющее вершины v_1, v_2 , и γ_e — край окрестности этого ребра e , то $w_{\gamma_e,p} = w_{\gamma_{v_1},p_1} \cdot w_{\gamma_{v_2},p_2}$ для подходящего выбора начальных точек $p \in \gamma_e$ и $p_i \in \gamma_{v_i}$, $i = 1, 2$. Следовательно, любое из соотношений R_a , где $a \in A_\bullet(D, \mathcal{H})$, выводимо из остальных, отвечающих областям из множества $A_\bullet(D, \mathcal{H}) \setminus \{a\}$.

Аналогичным образом можно рассмотреть граф $T_\circ(D, \mathcal{H})$, который отвечает белым областям диаграммы D . В результате получится, что одно из соотношений, отвечающее белой области диаграммы, выводимо из остальных соотношений, отвечающих белым областям.

Теорема доказана.

Пусть K — ориентированное зацепление, $\Delta_K(t)$ — его полином Александера. Тогда определителем (см. [9, гл. 8, § C]) зацепления K называется значение $\det K = |\Delta_K(-1)|$.

Один из способов вычисления определителя зацепления состоит в следующем. Как и раньше, обозначим D — диаграмму зацепления K , $C(D) = \{c_1, \dots, c_n\}$ — множество перекрестков этой диаграммы, $A(D) = \{a_1, \dots, a_{n+2}\}$ — множество ее областей. Построим матрицу $\mathcal{A}(D)$ размера $n \times (n + 2)$. Каждая i -я строка, $i = 1, \dots, n$, этой матрицы состоит из нулей, кроме четырех ее элементов: если перекресток c_i является положительным, то элементы, соответствующие областям, примыкающим справа к верхней дуге в окрестности перекрестка c_i , равны 1, а примыкающим слева равны -1 , а если перекресток c_i является отрицательным, то наоборот, элементы, соответствующие областям, примыкающим слева, равны 1, а справа равны -1 (рис. 11). Если одна и та же область примыкает к одному перекрестку с нескольких сторон, то соответствующий элемент строки матрицы является суммой значений. Далее вычеркиваем два любых столбца, соответствующих двум соседним областям диаграммы. Получим матрицу $\mathcal{A}'(D)$. Тогда $\det K = |\det \mathcal{A}'(D)|$.



Рис. 11. Элементы матрицы $\mathcal{A}(D)$ в окрестности положительного (слева) и отрицательного (справа) перекрестка.

Пусть K — ориентированное зацепление, и пусть $\mathcal{V}_r(K)$ — его редуцированная вихревая группа. Обозначим через $\mathcal{V}_r^a(K)$ результат абелианизации группы $\mathcal{V}_r(K)$, т. е.

$$\mathcal{V}_r^a(K) = \mathcal{V}_r(K) / [\mathcal{V}_r(K), \mathcal{V}_r(K)].$$

Теорема 4. $|\mathcal{V}_r^a(K)| = \det K$ для любого ориентированного зацепления K .

З а м е ч а н и е 2. Более аккуратно утверждение теоремы 4 формулируется так: $\det K = 0$ тогда и только тогда, когда группа $\mathcal{V}_r^a(K)$ бесконечна, и если $\det K \neq 0$, то порядок этой группы совпадает с величиной $\det K$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть D — диаграмма зацепления K на двумерной сфере S^2 , и пусть $\mathcal{V}_r^a(D) = \langle x_1, \dots, x_n \mid R_{a_1}, \dots, R_{a_{n+2}} \rangle$. Без ограничения общности можно считать, что последние два соотношения этого копредставления $R_{a_{n+1}}$ и $R_{a_{n+2}}$ соответствуют двум соседним областям диаграммы, и поэтому (как следует из доказательства теоремы 3) они выводимы из остальных.

Так как группа $\mathcal{V}_r^a(D)$ абелева, то каждое из соотношений R_{a_i} , $i = 1, \dots, n$, имеет вид $R_{a_i} = \alpha_1^i \cdot x_{j_1}^i + \dots + \alpha_k^i \cdot x_{j_k}^i$, где $\alpha_1^i, \dots, \alpha_k^i \in \mathbb{Z}$. Составим матрицу V размера $n \times n$. Ее строки соответствуют соотношениям, а столбцы — образующим. Каждая i -я строка матрицы состоит из нулей, а на местах, отвечающих образующим $x_{j_1}^i, \dots, x_{j_k}^i$, стоят элементы $\alpha_1^i, \dots, \alpha_k^i$ соответственно. Заметим, что $V^t = \mathcal{A}'(D)$, где V^t — результат транспонирования матрицы V . Следовательно, $\det V = \det \mathcal{A}'(D)$.

С помощью целочисленных преобразований строк и столбцов матрицы V она приводится к диагональной матрице V' . Пусть главная диагональ этой матрицы V' содержит элементы $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда $|\det \mathcal{A}'(D)| = d_1 \cdot \dots \cdot d_n$, и при этом группа $\mathcal{V}_r^a(D)$ изоморфна группе $\mathbb{Z}_{d_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{d_n}$ (в этой записи \mathbb{Z}_0 обозначает бесконечную циклическую группу, которую можно отождествить с \mathbb{Z}).

Ясно, что если хотя бы для одного $i \in \{1, \dots, n\}$: $d_i = 0$, то группа $\mathcal{V}_r^a(D)$ бесконечна. В этом случае $\det \mathcal{A}'(D) = 0$. Если же все $d_1, \dots, d_n \neq 0$, то $|\mathcal{V}_r^a(D)| = d_1 \cdot \dots \cdot d_n = |\det \mathcal{A}'(D)|$.

Теорема доказана.

Благодарности. Автор выражает благодарность Жун Ченгу (Zhiyun Cheng) за несколько полезных комментариев касательно свойств вихревой группы.

Заклучение

В качестве заключения перечислим несколько вопросов, которые могут служить направлением для дальнейшего изучения свойств вихревой группы.

Вопрос 1: сравнительная эффективность вихревой и редуцированной вихревой группы. Конструкция вихревой группы выглядит более общей по сравнению с конструкцией редуцированной вихревой группы, так как она содержит две дополнительных образующих. Вопрос состоит в том, является ли вихревая группа более информативной по сравнению с редуцированной вихревой группой? Другими словами, существуют ли два таких зацепления K_1 и K_2 , что $\mathcal{V}_r(K_1) = \mathcal{V}_r(K_2)$, но $\mathcal{V}(K_1) \neq \mathcal{V}(K_2)$?

Вопрос 2: выводимость вихревой группы из других инвариантов. Хорошо известно, что фундаментальный квандл узла является его полным инвариантом [6, теорема 8.3; 7], при этом узлы рассматриваются с точностью до гомеоморфизмов сферы, переводящих один узел в другой с сохранением ориентации меридианов их регулярных окрестностей. В принципе, любой другой инвариант выводится из фундаментального квандла. Вопрос состоит в том, чтобы описать взаимосвязь между вихревой группой узла и его фундаментальным квандлом (или гомоморфизмами из фундаментального квандла в другие конечные квандлы).

Вопрос 3: связь с другими инвариантами. Конструкция вихревой группы во многом следует схеме, использующейся для определения полинома Александра зацеплений [10]. Поэтому весьма естественно, что, как было доказано в теореме 4, порядок абелианизированной редуцированной вихревой группы совпадает с определителем зацепления. Естественным образом возникают вопросы, связанные с более полным описанием взаимосвязи вихревой группы с полиномом Александра, группой зацепления [11, гл. VI], обобщенной группой зацепления [12] и группами классических зацеплений, возникающих из представлений Вада [13; 14].

Вопрос 4: топологический смысл вихревой группы. Вихревая группа зацепления представляет собой комбинаторный инвариант. Конструкция этой группы основана на комбинаторных закономерностях диаграмм зацеплений, инвариантных относительно движений Редемейстера. Вопрос состоит в том, какие топологические свойства зацеплений выражает собой эта группа?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бардаков В.Г., Михальчишина Ю.А., Нецадим М.В. Группы виртуальных зацеплений // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 5. С. 989–1003. <https://doi.org/10.17377/smzh.2017.58.503>
2. Бардаков В.Г., Нецадим М.В. Группы узлов и нильпотентная аппроксимируемость // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 4. С. 43–51.
3. Manturov V.O., Nikonov I.M. On braids and groups G_n^k // J. Knot Theory and Its Ramific. 2015. Vol. 24, no. 13. <https://doi.org/doi.org/10.1142/S0218216515410096>
4. Manturov V.O., Fedoseev D.A., Kim S., Nikonov I.M. On groups G_n^k and Γ_n^k : A study of manifolds, dynamics, and invariants // Bulletin of Mathematical Sciences. 2021. Vol. 11, no. 02.
5. Korablev Ph.G. Electric group for knots and links. 2024. 15 p. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2408.04510>
6. Матвеев С.В. Дистрибутивные группоиды в теории узлов // Мат. сб. 1982. Т. 161, № 1. С. 78–88. <https://doi.org/10.1070/SM1984v047n01ABEH002630>
7. Joyce D. A classifying invariant of knots, the knot quandle // J. Pure Appl. Algebra. 1982. Vol. 23. P. 37–65. [https://doi.org/10.1016/0022-4049\(82\)90077-9](https://doi.org/10.1016/0022-4049(82)90077-9)
8. Polyak M. Minimal generating sets of Reidemeister moves // Quantum Topology. 2010. Vol. 1, no. 4. P. 399–411. <https://doi.org/10.4171/QT/10>
9. Rolfsen D. Knots and Links. AMS Chelsea Publishing, Providence, 2003.
10. Alexander J.W. Topological invariants of knots and links // Trans. Amer. Math. Soc. 1928. Vol. 30, no. 2. P. 275–306. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1928-1501429-1>
11. Кроуэлл Р., Фокс Р. Введение в теорию узлов. М.: Мир, 1967.
12. Lin X.S., Nelson S. On generalized knot groups // J. Knot Theory and Its Ramific. 2008. Vol. 17, no. 3. P. 263–272. <https://doi.org/10.1142/S0218216508006117>

13. Wada M. Group invariants of links // *Topology*. 1992. Vol. 31, no. 2. P. 399–406. [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(92\)90029-H](https://doi.org/10.1016/0040-9383(92)90029-H)
14. Михальчишина Ю.А. Обобщения представлений вады и группы виртуальных зацеплений // Сиб. мат. журн. 2017. Т 58, № 3. С. 641–659. <https://doi.org/10.17377/smzh.2017.58.313>

Поступила 5.06.2025

После доработки 2.08.2025

Принята к публикации 13.08.2025

Кораблёв Филипп Глебович

канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург;

доцент

Челябинский государственный университет, г. Челябинск

e-mail: korablev@csu.ru

REFERENCES

- Bardakov V.G., Mikhachishina Yu.A., Neshchadim M.V. Virtual link groups. *Siberian Math. J.*, 2017, vol. 58, no. 5, pp. 765–777. <https://doi.org/10.1134/S0037446617050032>
- Bardakov V.G., Neshchadim M.V. Knot groups and nilpotent approximability. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2017, vol. 23, no. 4, pp. 43–51. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-4-43-51>
- Manturov V.O., Nikonov I.M. On braids and groups G_n^k . *J. Knot Theory and Its Ramific.*, 2015, vol. 24, no. 13. <https://doi.org/10.1142/S0218216515410096>
- Manturov V.O., Fedoseev D.A., Kim S., Nikonov I.M. On groups G_n^k and Γ_n^k : A study of manifolds, dynamics, and invariants. *Bulletin Math. Sci.*, 2021, vol. 11, no. 02. <https://doi.org/10.1142/S1664360721500041>
- Korablev Ph.G. *Electric group for knots and links*. 2024, 15 p. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2408.04510>
- Matveev S.V. Distributive groupoids in knot theory. *Math. USSR-Sb.*, 1984, vol. 47, no. 1, pp. 73–83. <https://doi.org/10.1070/SM1984v047n01ABEH002630>
- Joyce D. A classifying invariant of knots, the knot quandle. *J. Pure Appl. Algebra*, 1982, vol. 23, pp. 37–65. [https://doi.org/10.1016/0022-4049\(82\)90077-9](https://doi.org/10.1016/0022-4049(82)90077-9)
- Polyak M. Minimal generating sets of Reidemeister moves. *Quant. Topol.*, 2010, vol. 1, no. 4, pp. 399–411. <https://doi.org/10.4171/QT/10>
- Rolfsen D. *Knots and links*. Providence, Amer. Math. Soc. Chelsea Publ., 2003, 439 p. <https://doi.org/10.1090/chel/346>
- Alexander J.W. Topological invariants of knots and links. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1928, vol. 30, no. 2, pp. 275–306. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1928-1501429-1>
- Crowell R.H., Fox R.H. *Introduction to knot theory*. NY, 1963, 182 p.
- Lin X.S., Nelson S. On generalized knot groups. *J. Knot Theory and Its Ramific.*, 2008, vol. 17, no. 3, pp. 263–272. <https://doi.org/10.1142/S0218216508006117>
- Wada M. Group invariants of links. *Topology*, 1992, vol. 31, no. 2, pp. 399–406. [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(92\)90029-H](https://doi.org/10.1016/0040-9383(92)90029-H)
- Mikhachishina Yu.A., Generalizations of the Wada representations and virtual link groups. *Sib. Math. J.*, 2017, vol. 58, no. 3, pp. 500–514. <https://doi.org/10.1134/S0037446617030132>

Received June 5, 2025; Revised August 2, 2025; Accepted August 13, 2025

Funding Agency: This work was supported by Russian Science Foundation, project № 25-21-20084, <https://rscf.ru/project/25-21-20084/>.

Philipp Glebovich Korablev, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: korablev@csu.ru.

Cite this article as: Ph. G. Korablev. Vortex group for knots and links in a 3-sphere. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 4, pp. 203–213.