

УДК 517.925.51, 531.36

## ОЦЕНКИ НЕОГРАНИЧЕННЫХ СЕПАРАТРИС ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ БЕСТОКОВОЙ МОДЕЛИ СИНХРОННОГО ЭЛЕКТРОМОТОРА<sup>1</sup>

Б. И. Коносеви́ч, Ю. Б. Коносеви́ч

Рассматривается упрощенная модель синхронного электродвигателя, которая описывается не содержащим электрических токов дифференциальным уравнением второго порядка, нелинейным относительно угловой неизвестной и линейным относительно ее производной по времени. Это уравнение играет роль эталонного в разработанном Г. А. Леоновым методе нелокального сведения, который дает условия, когда глобальная устойчивость многомерной автономной фазовой системы дифференциальных уравнений с одной угловой неизвестной следует из глобальной устойчивости одного такого уравнения. При этом используется то обстоятельство, что в случае глобальной устойчивости такого уравнения к каждой его седловой точке в ее четвертом квадранте примыкает сепаратриса, уходящая на минус бесконечность, когда угловая переменная стремится к плюс бесконечности. В настоящей работе для таких неограниченных сепаратрис найдены области их монотонности и немонотонности и получены двусторонние нелинейные и линейные аналитические оценки.

Ключевые слова: модель синхронного электродвигателя, неограниченная сепаратриса, критическое значение, глобальная устойчивость, метод нелокального сведения.

**B. I. Konosevich, Yu. B. Konosevich. Estimates of the unbounded separatrices of the differential equation of the current-free model of a synchronous motor.**

We consider a simplified model of a synchronous electric motor described by a second-order differential equation which is nonlinear with respect to the angular unknown, is linear with respect to its time derivative, and does not include electric currents. This equation plays the role of etalon equation in Leonov's nonlocal reduction method which gives conditions where the global stability of such an equation implies the global stability of a multidimensional phase ODE system. It is exploiting in the reduction method that in the case of global stability of this equation, there exists an unbounded separatrix of each saddle point in its fourth quadrant. In the present work, regions of monotonicity and non-monotonicity are found for these unbounded separatrices and two-sided linear and nonlinear estimates are obtained for them.

Keywords: model of a synchronous motor, unbounded separatrix, critical value, global stability, nonlocal reduction method.

MSC: 34A45, 70K99

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-4-188-202

### Введение

В теориях электрических машин и фазовой синхронизации систему обыкновенных дифференциальных уравнений называют *фазовой*, если при записи в нормальном виде ее правая часть периодична по некоторым компонентам фазового вектора (по угловым переменным) [1, с. 270]. Если фазовая система имеет стационарное решение, то она имеет счетный набор стационарных решений, которые получаются из исходного сдвигами на периоды по угловым переменным. отождествив значения угловых переменных, которые отличаются на целое число периодов, получаем систему с цилиндрическим фазовым пространством [2; 3].

Фазовая система обыкновенных дифференциальных уравнений называется *системой градиентного типа*, если любое решение этой системы при  $t \rightarrow +\infty$  стремится к одному из ее

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках реализации программы регионального Азово-Черноморского математического центра по соглашению № 075-02-2025-1620.

стационарных решений. Фазовая система обыкновенных дифференциальных уравнений называется *глобально устойчивой*, если она является системой градиентного типа и имеет в цилиндрическом фазовом пространстве одно локально асимптотически устойчивое стационарное решение, а остальные ее стационарные решения неустойчивы по Ляпунову (см. [3, с. 67]).

К числу фазовых систем относятся системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающие различные модели синхронного электромотора. При этом модель электромотора определяется его конструкцией, степенью детализации происходящих в нем процессов и тем, какую структуру зависимости от фазовых переменных имеет момент нагрузки на электромотор [4]. В статье [5] представлена *многотоковая модель* синхронного электромотора в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений, удобной для теоретического анализа.

*Бестоковая модель* синхронного электромотора записывается в виде одного дифференциального уравнения второго порядка, которое описывает вращение ротора электромотора под действием трех моментов: 1) момента взаимодействия магнитного поля ротора и равномерно вращающегося магнитного поля статора, который является синусоидальной функцией угла рассогласования этих полей; 2) нелинейного диссипативного момента; 3) дополнительного постоянного вращающегося момента. Такая модель синхронного электромотора нашла применение в теории гироскопа в кардановом подвесе (см. [6]).

В том случае, когда диссипативный момент предполагается линейной функцией угловой скорости вращения ротора относительно статора, *бестоковая модель* синхронного электромотора переходит в его *упрощенную бестоковую модель*. Дифференциальное уравнение второго порядка, которое описывает эту модель, играет особую роль в разработанном Г. А. Леоновым методе нелокального сведения [1; 7], который дает условия, когда из глобальной устойчивости одного такого уравнения следует глобальная устойчивость многомерной фазовой системы. Пример использования уравнения упрощенной бестоковой модели в рамках метода сведения приведен в работе [8]. В ней для представленной в [5] многотоковой модели синхронного электромотора получено легко проверяемое достаточное условие глобальной устойчивости.

Подробный анализ дифференциального уравнения *упрощенной бестоковой модели* синхронного электромотора провел Ф. Трикоми [9], пользуясь методами качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Полученные им результаты изложены в [3; 10], обобщения этих результатов приведены в [2].

При записи в безразмерном виде дифференциальное уравнение упрощенной бестоковой модели синхронного электромотора содержит только два параметра, что позволяет изучать общие свойства его решений при помощи численного моделирования. Результаты такого компьютерного анализа представлены в [11; 12]. Во-первых, в [11] получен график зависимости полученного Ф. Трикоми критического значения коэффициента линейного диссипативного момента от главного стационарного значения угловой переменной. Во-вторых, в [11; 12] с учетом вида приведенного графика предложены простые аппроксимации этой зависимости в виде линейной, параболической и синусоидальной функций и вычислены максимумы модулей абсолютных и относительных погрешностей таких аппроксимаций. Наконец, в [11] с помощью численного интегрирования для уравнения бестоковой модели синхронного электромотора построены его фазовые портреты, на которых видны детали поведения фазовых траекторий, не отраженные на известных фазовых портретах, полученных методами качественной теории дифференциальных уравнений. В частности, на известных фазовых портретах не отражено немонотонное поведение неограниченных сепаратрис седловых точек в конечной окрестности этих точек. Кроме того, численный анализ показал, что асимптотическое поведение неограниченных сепаратрис при бесконечном возрастании модуля угловой переменной отличается от поведения таких сепаратрис на фазовых портретах, полученных теоретическим путем.

В данной работе для этих неограниченных сепаратрис указаны области их монотонности, а также получены нелинейные и линейные оценки сверху и снизу (мажоранты) на бесконечном вправо промежутке изменения угловой переменной. Такие оценки необходимы для распространения метода сведения на более широкий класс фазовых систем.

## 1. Упрощенная бестоковая модель синхронного электромотора

В данной работе рассматривается *упрощенная бестоковая модель* синхронного электромотора с одной угловой переменной, соответствующая случаю синусоидального вращающего момента, линейного диссипативного момента и постоянного момента нагрузки. После введения безразмерных постоянных параметров  $a, c > 0$  и перехода к безразмерной независимой переменной  $\tau$  эта модель описывается дифференциальным уравнением [1; 3]

$$\gamma'' = -a\gamma' - \sin \gamma - c, \quad (1.1)$$

где  $\gamma$  — угол рассогласования магнитного поля ротора и равномерно вращающегося магнитного поля статора, штрих означает дифференцирование по  $\tau$ . Его фазовые траектории определяются уравнением

$$\frac{d\gamma'}{d\gamma} = -a - \frac{\sin \gamma + c}{\gamma'}. \quad (1.2)$$

Рабочий режим равномерного вращения ротора синхронного электромотора с угловой скоростью  $\omega > 0$  вращения магнитного поля в статоре соответствует стационарному решению уравнения (1.1), в котором  $\gamma' = 0$ , а постоянное значение угла  $\gamma$  определяется уравнением  $\sin \gamma + c = 0$ . При  $c > 1$  стационарные решения не существуют. Отбрасывая особый случай, когда  $c = 1$ , будем предполагать, что  $c \in (0, 1)$ . Тогда уравнение (1.1) имеет два счетных семейства стационарных решений при значениях  $d_s, e_s$  угла  $\gamma$ , которые определены формулами

$$d_s = \gamma^{(0)} + 2\pi s, \quad e_s = \gamma^{(1)} + 2\pi s, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ \gamma^{(0)} = -\arcsin c \in (-\pi/2, 0), \quad \gamma^{(1)} = -\pi - \gamma^{(0)} \in (-\pi, -\pi/2).$$

Локальный анализ по линейному приближению показывает, что решениям первого семейства соответствуют асимптотически устойчивые стационарные точки уравнения (1.1) — устойчивый фокус или устойчивый узел, а решениям второго семейства соответствуют неустойчивые седловые стационарные точки.

Для фазовой кривой  $\gamma' = \gamma'(\gamma)$ , содержащей седловую точку, соответствующая этой точке особенность типа 0/0 в правой части уравнения фазовых траекторий (1.2) является устранимой.

При глобальном анализе уравнения вида (1.1) Ф. Трикоми установил, что критическое значение коэффициента диссипации  $a$  в этом уравнении является непрерывной монотонно возрастающей функцией  $a_{\text{cr}}(c)$  параметра  $c \in (0, 1)$  и уравнение (1.1) имеет качественно различные фазовые портреты в следующих случаях:

$$\text{А) } a > a_{\text{cr}}(c), \quad \text{В) } a = a_{\text{cr}}(c) \quad \text{и} \quad \text{С) } a < a_{\text{cr}}(c).$$

Эти фазовые портреты представлены в [3, рис. 5–7] для уравнения  $\theta'' = -a\theta' - \sin \theta + c$ , которое получается из уравнения (1.1) при переходе к переменной  $\theta = -\gamma$ . В [2, гл. I, рис. 20, 22, 23] приведены аналогичные фазовые портреты, полученные на основе анализа уравнения несколько более общего вида  $\theta'' = -\theta' - f(\theta)$ , в котором непрерывная  $2\pi$ -периодическая функция  $f(\theta)$ , как и функция  $\sin \theta - c$  при  $c \in (0, 1)$ , имеет два нуля на периоде.

Из этих фазовых портретов следует, что уравнение (1.1) глобально устойчиво в случае А), и оно не является глобально устойчивым в случаях В) и С).

На рис. 1а изображен известный фазовый портрет уравнения (1.1) в случае А)  $a > a_{\text{cr}}(c)$  его глобальной устойчивости, построенный методами качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Он получен из приведенных в [3, рис. 5] и в [2, гл. I, рис. 20] фазовых портретов путем перехода от фазовых переменных  $\theta, \theta'$  к фазовым переменным  $\gamma = -\theta, \gamma' = -\theta'$ .

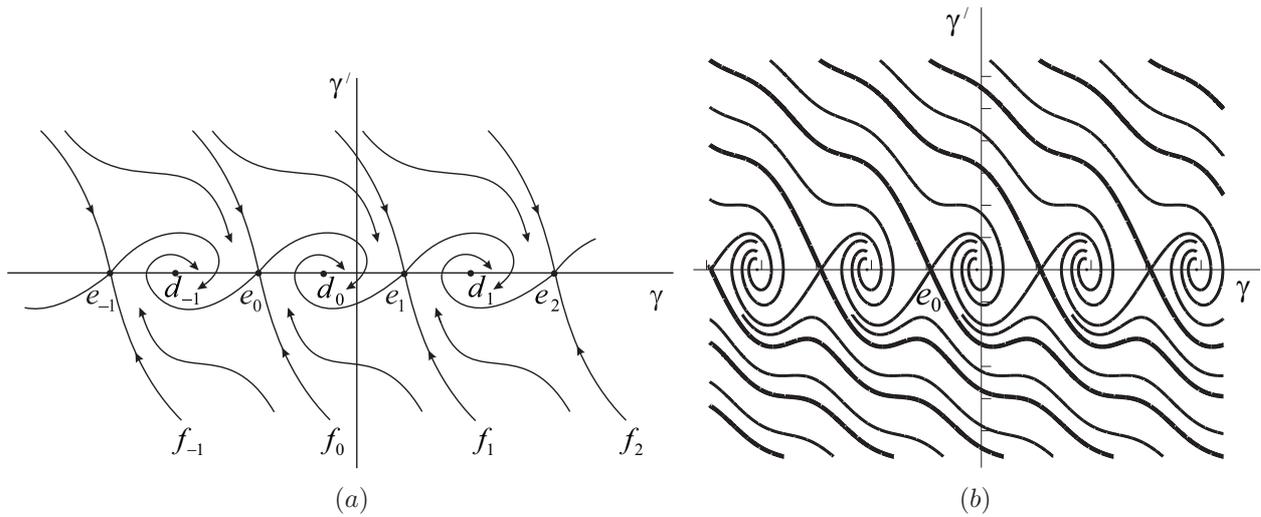


Рис. 1. Фазовый портрет уравнения (1.1) в случае его глобальной устойчивости: приводимый в литературе (a), полученный численными методами (b).

На рис. 1b изображен фазовый портрет рассматриваемого дифференциального уравнения (1.1), полученный для случая А)  $a > a_{cr}(c)$  численными методами [11]. В расчете использовалась предложенная в [11] синусоидальная аппроксимация  $a_{crS}(c)$  критических значений ( $S$ -аппроксимация). При этом для параметров  $a, c$  рассматривались следующие числовые значения:  $c = 0.25, a = 1.8 \cdot a_{crS}, a_{crS} = 0.198258$ . Утолщенными линиями на рис. 1b показаны сепаратрисы неустойчивых седловых точек  $(e_s, 0)$  ( $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) уравнения (1.1), являющиеся границами областей притяжения асимптотически устойчивых стационарных точек  $(d_s, 0)$ .

Рисунки 1a и 1b отражают тот установленный Ф. Трикоми факт, что в случае А)  $a > a_{cr}(c)$  через каждую седловую точку  $(\gamma, \gamma') = (e_s, 0)$  ( $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) рассматриваемого дифференциального уравнения проходит неограниченная по  $\gamma'$  при  $\gamma \rightarrow \pm\infty$  фазовая кривая  $\gamma' = f_s(\gamma)$ , которая состоит из этой седловой точки и двух сепаратрис, примыкающих к ней во втором и четвертом квадрантах и уходящих на плюс или минус бесконечность при стремлении угловой переменной к минус или плюс бесконечности. Вдоль этих неограниченных сепаратрис решения рассматриваемого дифференциального уравнения стремятся к седловым точкам при  $t \rightarrow +\infty$ . Такие сепаратрисы в случае А)  $a > a_{cr}(c)$  глобальной устойчивости данного уравнения делят всю его фазовую плоскость на области притяжения асимптотически устойчивых стационарных точек. В случаях В)  $a = a_{cr}(c)$  и С)  $a < a_{cr}(c)$  неограниченными по  $\gamma, \gamma'$  являются только сепаратрисы, примыкающие к седловым точкам во втором квадранте. Таким образом, существование сепаратрис, которые примыкают к седловым точкам справа в четвертом квадранте и уходят на  $-\infty$  при  $\gamma \rightarrow +\infty$ , является отличительным свойством сепаратрис в случае А) глобальной устойчивости уравнения (1.1). Это свойство играет ключевую роль в доказательстве центральной теоремы метода сведения Г. А. Леонова (в [1] это теорема 4.4.1).

На рис. 1b, построенном при помощи численного интегрирования видны детали поведения неограниченных по  $\gamma'$  фазовых кривых  $\gamma' = f_s(\gamma)$  ( $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) уравнения (1.1) в случае А) его глобальной устойчивости, которые не отражены на рис. 1a, представленном в [2; 3]. Во-первых, функции  $\gamma' = f_s(\gamma)$  изображены на рис. 1a как строго монотонные при  $\gamma \in (-\infty, +\infty)$ , тогда как на рис. 1b они не являются монотонными в конечной окрестности седловых точек. Во-вторых, от фазового портрета, приведенного на рис. 1a, создается впечатление, что кривые  $\gamma' = f_s(\gamma)$  при  $\gamma \rightarrow \pm\infty$  неограниченно приближаются к параллельным прямым с отрицательным угловым коэффициентом. Рисунок 1b указывает на то, что функции  $\gamma' = f_s(\gamma)$  не имеют асимптот.

Свойства неограниченных при  $\gamma \rightarrow \pm\infty$  фазовых кривых  $\gamma' = f_s(\gamma)$  ( $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) уравнения (1.1) в случае А) его глобальной устойчивости, отмеченные на рис. 1b, изучены

ниже аналитически. В разд. 2 указаны области монотонности и немонотонности этих кривых, а в разд. 3–5 для их правых ветвей получены нелинейные и линейные оценки снизу и сверху при  $\gamma \rightarrow +\infty$ .

## 2. Свойства монотонности неограниченных фазовых кривых $\gamma' = f_s(\gamma)$

При анализе свойств монотонности фазовых кривых  $\gamma' = f_s(\gamma)$  ( $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) воспользуемся понятием *линии монотонности* [2, с. 47]. Для уравнения фазовых траекторий (1.2) она определена формулой

$$\gamma' = -\frac{\sin \gamma + c}{a}. \quad (2.1)$$

В рассматриваемом случае, когда  $c \in (0, 1)$ , линия монотонности лежит в горизонтальной полосе, ограниченной снизу и сверху прямыми  $\gamma' = -h_1$  и  $\gamma' = h_2$ , где

$$h_1 = \frac{1+c}{a} > 0, \quad h_2 = \frac{1-c}{a} > 0. \quad (2.2)$$

Вследствие  $2\pi$ -периодичности правой части уравнения (1.1) при любом  $\gamma \in (-\infty, +\infty)$  имеем  $f_s(\gamma) = f_0(\gamma - 2\pi s)$  ( $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), и поэтому достаточно изучить свойства монотонности для одной фазовой кривой  $\gamma' = f_0(\gamma)$ . Для нее справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть в случае А)  $a > a_{\text{cr}}(c)$  глобальной устойчивости уравнения (1.1) значения  $\gamma_* < e_0$  и  $\gamma^* > e_0$  определены как абсциссы точек пересечения неограниченной по  $\gamma, \gamma'$  при  $\gamma \rightarrow \mp\infty$  фазовой кривой  $\gamma' = f_0(\gamma)$  с горизонтальными прямыми  $\gamma' = h_2$  и  $\gamma' = -h_1$ , где значения  $h_1, h_2 > 0$  определены в (2.2). Тогда

1) все существующие точки локальных минимумов и максимумов кривой  $\gamma' = f_0(\gamma)$  соответствуют значениям  $\gamma$  из промежутка  $[\gamma_*, \gamma^*]$ , то есть они лежат в горизонтальной полосе между прямыми  $\gamma' = -h_1 < 0$  и  $\gamma' = h_2 > 0$ ;

2) вне этой полосы, то есть при  $\gamma < \gamma_*$  и  $\gamma > \gamma^*$ , функция  $\gamma' = f_0(\gamma)$  является строго монотонно убывающей.

**Доказательство.** Согласно уравнению (1.2) необходимое условие  $df_0(\gamma)/d\gamma = 0$  экстремума функции  $\gamma' = f_0(\gamma)$  выполнено только в точках линии монотонности (2.1). Поэтому все существующие точки локальных минимумов и максимумов этой функции расположены в полосе между прямыми  $\gamma' = -h_1$  и  $\gamma' = h_2$ , в которой заключена линия монотонности. Отсюда следует, что в том случае, когда рассматриваемая кривая  $\gamma' = f_0(\gamma)$  имеет точки пересечения с линией монотонности, график функции  $\gamma' = f_0(\gamma)$  в полосе между прямыми  $\gamma' = -h_1$  и  $\gamma' = h_2$  состоит из участков монотонного убывания и монотонного возрастания этой функции, расположенных между точками ее минимума и максимума.

Покажем теперь, что функция  $\gamma' = f_0(\gamma)$  является строго монотонно убывающей вне полосы между горизонтальными прямыми  $\gamma' = -h_1$  и  $\gamma' = h_2$ , т. е. при  $\gamma \geq \gamma^*$  и  $\gamma \leq \gamma_*$ , где  $\gamma^* > e_0$  и  $\gamma_* < e_0$  — значения  $\gamma$ , соответствующие точкам пересечения кривой  $\gamma' = f_0(\gamma)$  с прямыми  $\gamma' = -h_1$  и  $\gamma' = h_2$ . Запишем уравнение фазовых кривых (1.2) в виде

$$\frac{d\gamma'}{d\gamma} = -\frac{1}{\gamma'}(a\gamma' + \sin \gamma + c). \quad (2.3)$$

Прямая  $\gamma' = -h_1$  лежит ниже линии монотонности, и поэтому выражение в скобках в (2.3) отрицательно в области под этой прямой. В этой области имеем  $\gamma' < 0$ , и тогда из формулы (2.3) следует, что здесь выполнено неравенство  $d\gamma'/d\gamma < 0$ . В области над прямой  $\gamma' = h_2$  имеем  $\gamma' > 0$ , а выражение в скобках в (2.3) также положительно. Поэтому, согласно (2.3), неравенство  $d\gamma'/d\gamma < 0$  выполнено и в этой области. Отсюда следует второе утверждение теоремы 1.  $\square$

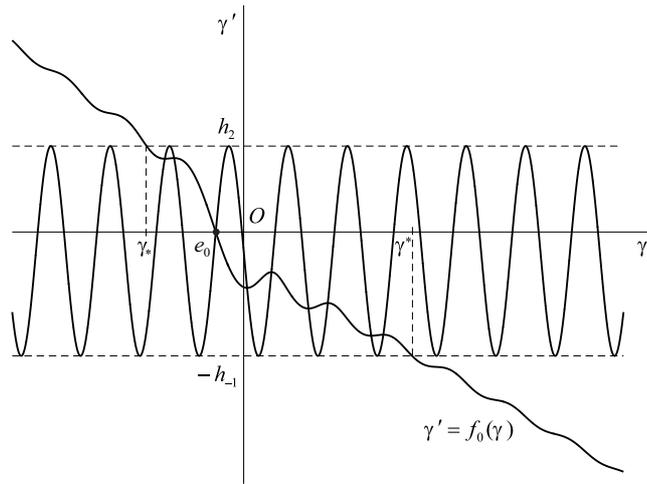


Рис. 2. Фазовая кривая  $\gamma' = f_0(\gamma)$  уравнения (1.1) и линия монотонности (случай А)  $a > a_{cr}(c)$ .

Эту теорему иллюстрирует рис. 2. На нем изображены линия монотонности и график функции  $\gamma' = f_0(\gamma)$ , построенные при  $c = 0.181$ ,  $a = 1.68 \cdot a_{crS}$ ,  $a_{crS} = 0.14285$  с использованием пакета MATLAB. При таких значениях параметров на правой ветви кривой  $\gamma' = f_0(\gamma)$  имеются три точки минимума и три точки максимума, а на левой ее ветви — одна точка минимума и одна точка максимума.

### 3. Дифференциальные уравнения для мажорант правой ветви фазовой кривой $\gamma' = f_0(\gamma)$ в случае А

Функции

$$g = g_1(\gamma), \quad g = g_2(\gamma), \quad (3.1)$$

предлагаемые в качестве нижней и верхней мажорант неограниченной при  $\gamma \rightarrow +\infty$  правой ветви фазовой кривой  $\gamma' = f_0(\gamma)$ , определим как решения дифференциальных уравнений

$$\frac{dg}{d\gamma} = -\frac{ag - (1 - c)}{g}, \quad \frac{dg}{d\gamma} = -\frac{ag + (1 + c)}{g}, \quad (3.2)$$

заданные на полуоси  $[\gamma^0, +\infty)$  стартовой точкой

$$S^0 = (\gamma^0, g^0), \quad g^0 = f_0(\gamma^0), \quad (3.3)$$

лежащей на этой кривой. Значение  $\gamma^0 > e_0$  будет уточнено далее.

Уравнения (3.2) получаются из уравнения фазовых траекторий (1.2) при замене в нем функции  $\sin \gamma$  ее минимальным и максимальным значениями  $-1$  и  $+1$ . При этом для переменной  $\gamma'$  в уравнениях (3.2) принято обозначение  $g$ , которое более удобно для использования с верхними индексами. Значения

$$g_1^* = \frac{1 - c}{a}, \quad g_2^* = -\frac{1 + c}{a} \quad (3.4)$$

являются стационарными для уравнений (3.2). Они совпадают с верхней и нижней границами  $\gamma' = h_2$  и  $\gamma' = -h_1$  полосы немонотонности функции  $\gamma' = f_0(\gamma)$ , определенными в (2.2).

В общем случае при выполнении условий теоремы о существовании обратной функции производная функции  $y = f(x)$  и обратной к ней функции  $x = \varphi(y)$  при соответствующих значениях аргументов связаны соотношением  $d\varphi(y)/dy = 1/[df(x)/dx]$  [13, с. 196].

Следовательно, если на некоторых промежутках изменения переменной  $g$  существуют непрерывно дифференцируемые однозначные функции  $\gamma = \gamma_1(g)$ ,  $\gamma = \gamma_2(g)$ , обратные по отношению

к решениям (3.1) уравнений (3.2) при начальной точке  $(\gamma^0, g^0)$ , то они являются решениями дифференциальных уравнений

$$\frac{d\gamma}{dg} = -\frac{g}{ag - (1 - c)}, \quad \frac{d\gamma}{dg} = -\frac{g}{ag + (1 + c)} \quad (3.5)$$

при начальной точке  $(g^0, \gamma^0)$ . Чтобы получить эти решения в явном виде, запишем уравнения (3.5) следующим образом:

$$\frac{d\gamma}{dg} = -\frac{1}{a} - \frac{1 - c}{a} \frac{1}{ag - (1 - c)}, \quad \frac{d\gamma}{dg} = -\frac{1}{a} + \frac{1 + c}{a} \frac{1}{ag + (1 + c)}. \quad (3.6)$$

Решение  $\gamma = \gamma_1(g)$  первого уравнения (3.6) при начальном условии  $\gamma_1(g^0) = \gamma^0$  выражается формулой

$$\gamma_1(g) = \gamma^0 - \frac{1}{a}(g - g^0) - \frac{1 - c}{a} \int_{g^0}^g \frac{d\sigma}{a\sigma - (1 - c)}.$$

Из нее следует, что это решение представляется в виде

$$\gamma_1(g) = \gamma^0 + \Gamma_1(g) - \Gamma_1(g^0), \quad (3.7)$$

где функция

$$\Gamma_1(g) = -\frac{1}{a}g - \frac{1 - c}{a^2} \ln \frac{|ag - (1 - c)|}{1 - c} \quad (3.8)$$

определяет решение  $\gamma = \Gamma_1(g)$  первого уравнения (3.6) при начальном условии  $\Gamma_1(0) = 0$ .

Решение  $\gamma = \gamma_2(g)$  второго уравнения (3.6) при начальном условии  $\gamma_2(g^0) = \gamma^0$  выражается формулой

$$\gamma_2(g) = \gamma^0 - \frac{1}{a}(g - g^0) + \frac{1 + c}{a} \int_{g^0}^g \frac{d\sigma}{a\sigma + (1 + c)}.$$

Из нее следует, что решение представляется в виде

$$\gamma_2(g) = \gamma^0 + \Gamma_2(g) - \Gamma_2(g^0), \quad (3.9)$$

где функция

$$\Gamma_2(g) = -\frac{1}{a}g + \frac{1 + c}{a^2} \ln \frac{|ag + (1 + c)|}{1 + c} \quad (3.10)$$

определяет решение  $\gamma = \Gamma_2(g)$  второго уравнения (3.6) при начальном условии  $\Gamma_2(0) = 0$ .

#### 4. Свойства решений $g = G_1(\gamma)$ , $g = G_2(\gamma)$ дифференциальных уравнений для предварительных мажорант кривой $\gamma' = f_0(\gamma)$ при нулевой начальной точке и обратных к ним функций $\gamma = \Gamma_1(g)$ и $\gamma = \Gamma_2(g)$

Рассмотрим решение  $\gamma = \Gamma_1(g)$  первого уравнения (3.6) при нулевом начальном условии  $\Gamma_1(0) = 0$ . Оно определено на промежутке  $(-\infty, +\infty)$  формулой (3.8). Производная функции  $\gamma = \Gamma_1(g)$  определена правой частью первого из уравнений (3.5). Отсюда следует, что эта производная, будучи отрицательной внутри промежутка  $(-\infty, 0]$ , возрастает на нем от предельного значения  $-1/a$  до 0, и при этом функция  $\gamma = \Gamma_1(g)$  монотонно убывает от  $+\infty$  до 0. При  $g = 0$  эта производная обращается в 0 вместе с самой функцией  $\gamma = \Gamma_1(g)$ . Внутри промежутка  $[0, g_1^*)$  производная функции  $\gamma = \Gamma_1(g)$ , будучи положительной, возрастает от 0 до  $+\infty$  вместе с самой этой функцией. Наконец, на промежутке  $(g_1^*, +\infty)$  рассматриваемая производная,

Т а б л и ц а 1

**Свойства функций  $\gamma = \Gamma_{1A}, \Gamma_{1B}, \Gamma_{1C}(g)$  и  $g = G_{1A}, G_{1B}, G_{1C}(\gamma)$**

Функция	Область определения	Область значений	Монотонность	Выпуклость
$\gamma = \Gamma_{1A}(g)$	$(-\infty, 0]$	$(+\infty, 0]$	убывающая	вниз
$g = G_{1A}(\gamma)$	$(+\infty, 0]$	$(-\infty, 0]$	убывающая	вниз
$\gamma = \Gamma_{1B}(g)$	$[0, g_1^*)$	$[0, +\infty)$	возрастающая	вниз
$g = G_{1B}(\gamma)$	$[0, +\infty)$	$[0, g_1^*)$	убывающая	вверх
$\gamma = \Gamma_{1C}(g)$	$(g_1^*, +\infty)$	$(+\infty, -\infty]$	убывающая	вниз
$g = G_{1C}(\gamma)$	$(+\infty, -\infty)$	$(g_1^*, +\infty)$	убывающая	вниз

будучи отрицательной, возрастает от  $-\infty$  до предельного значения  $-1/a$ , а функция  $\gamma = \Gamma_1(g)$  при этом монотонно убывает от  $+\infty$  до  $-\infty$ .

Таким образом, функция  $\gamma = \Gamma_1(g)$  является объединением трех однозначных, непрерывных, строго монотонных функций  $\gamma = \Gamma_{1A}, \Gamma_{1B}, \Gamma_{1C}(g)$ , представляющих функцию  $\gamma = \Gamma_1(g)$  на трех промежутках  $(-\infty, 0], [0, g_1^*), (g_1^*, +\infty)$ . На соответствующих промежутках производные этих трех функций возрастают, и поэтому из теоремы 1, приведенной в [13, с. 299], следует, что все три функции  $\gamma = \Gamma_{1A}, \Gamma_{1B}, \Gamma_{1C}(g)$  являются выпуклыми вниз.

Установленные свойства этих функций отражены в строках 1, 3 и 5 табл. 1. Они позволяют построить на рис. 3а их графики (утолщенные линии).

Так как функции  $\gamma = \Gamma_{1A}, \Gamma_{1B}, \Gamma_{1C}(g)$  строго монотонны, на соответствующих промежутках однозначно определены обратные к ним функции  $g = G_{1A}, G_{1B}, G_{1C}(\gamma)$ , являющиеся решениями первого дифференциального уравнения (3.2). Из установленных свойств функций  $\gamma = \Gamma_{1A}, \Gamma_{1B}, \Gamma_{1C}(g)$  следуют свойства обратных к ним функций  $g = G_{1A}, G_{1B}, G_{1C}(\gamma)$ . Они отражены в строках 2, 4 и 6 табл. 1.

При этом для определения направлений выпуклости функций  $g = G_{1A}, G_{1B}, G_{1C}(\gamma)$  достаточно воспользоваться указанными в [13, с. 297] правилами, которые могут быть сформулированы следующим образом. Для убывающих выпуклых вниз или вверх функций обратные к ним функции также являются убывающими и выпуклыми вниз или вверх. Для возрастающей выпуклой вниз функции обратная к ней функция является возрастающей и выпуклой вверх. Согласно этим правилам в последнем столбце табл. 1 функции  $G_{1A}, G_{1C}(\gamma)$  отмечены как выпуклые вниз, а функция  $G_{1B}(\gamma)$  отмечена как выпуклая вверх.

Итак, решение  $g = G_1(\gamma)$  первого уравнения (3.2) при нулевом начальном условии  $G_1(0) = 0$

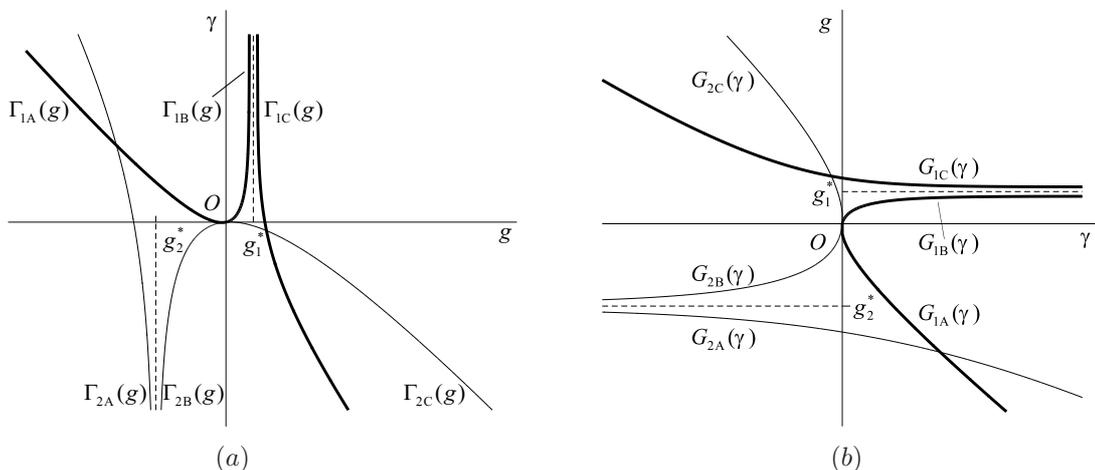


Рис. 3. Графики функций, обратных к предварительным (при нулевом начальном условии) мажорантам правой ветви фазовой кривой  $\gamma' = f_0(\gamma)$  (а), и графики самих предварительных мажорант (б).

Т а б л и ц а 2

Свойства функций  $\gamma = \Gamma_{2A}, \Gamma_{2B}, \Gamma_{2C}(g)$  и  $g = G_{2A}, G_{2B}, G_{2C}(\gamma)$ 

Функция	Область определения	Область значений	Монотонность	Выпуклость
$\gamma = \Gamma_{2A}(g)$	$(-\infty, g_2^*)$	$(-\infty, +\infty)$	убывающая	верх
$g = G_{2A}(\gamma)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, g_2^*)$	убывающая	вверх
$\gamma = \Gamma_{2B}(g)$	$(g_2^*, 0]$	$(-\infty, 0]$	возрастающая	вверх
$g = G_{2B}(\gamma)$	$(-\infty, 0]$	$(g_2^*, 0]$	возрастающая	вниз
$\gamma = \Gamma_{2C}(g)$	$[0, +\infty)$	$[0, -\infty)$	убывающая	вверх
$g = G_{2C}(\gamma)$	$(-\infty, 0]$	$[0, +\infty)$	убывающая	вверх

является многозначной функцией, которая представляется в виде объединения трех однозначных монотонных функций  $g = G_{1A}, G_{1B}, G_{1C}(\gamma)$ . Графики этих функций показаны на рис. 3b утолщенными линиями. Они получаются из графиков соответствующих функций  $\gamma = \Gamma_{1A}, \Gamma_{1B}, \Gamma_{1C}(g)$ , показанных утолщенными линиями на рис. 3a, путем отражения относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Рассмотрим теперь решение  $\gamma = \Gamma_2(g)$  второго уравнения (3.6) при нулевом начальном условии  $\Gamma_2(0) = 0$ . Оно определено на промежутке  $(-\infty, +\infty)$  формулой (3.10). Производная функции  $\gamma = \Gamma_2(g)$  определена правой частью второго из уравнений (3.5).

Воспользовавшись этими определениями, устанавливаем, что функция  $\gamma = \Gamma_2(g)$  представляется в виде объединения трех строго монотонных функций  $\gamma = \Gamma_{2A}, \Gamma_{2B}, \Gamma_{2C}(g)$ , определенных на промежутках  $(-\infty, g_2^*), (g_2^*, 0], [0, +\infty)$ . Свойства этих функций отражены в строках 1, 3, 5 табл. 2, а соответствующие их графики показаны на рис. 3a тонкими линиями. Для монотонных функций  $\gamma = \Gamma_{2A}, \Gamma_{2B}, \Gamma_{2C}(g)$  существуют обратные к ним монотонные функции  $g = G_{2A}, G_{2B}, G_{2C}(\gamma)$ , определенные на промежутках  $(-\infty, +\infty), (-\infty, 0], (-\infty, 0]$ . Их свойства отражены в строках 2, 4, 6 табл. 2.

Итак, решение  $g = G_2(\gamma)$  второго уравнения (3.2) для мажорант при нулевом начальном условии  $G_2(0) = 0$  является многозначной функцией, которая представляется в виде объединения трех монотонных однозначных функций  $g = G_{2A}, G_{2B}, G_{2C}(\gamma)$ . Графики этих функций показаны на рис. 3b тонкими линиями.

## 5. Определения функций, предлагаемых в качестве нижней и верхней мажорант правой ветви фазовой кривой $\gamma' = f_0(\gamma)$ .

### Теоремы о мажорантах

Функции  $\gamma = \gamma_1, \gamma_2(g)$  — решения уравнений (3.5) при заданном начальном условии  $\gamma_1(g^0) = \gamma_2(g^0) = \gamma^0$  — представлены формулами (3.7), (3.9). Геометрически эти формулы означают, что графики функций  $\gamma = \gamma_1, \gamma_2(g)$  на плоскости  $(g, \gamma)$  получаются из показанных на рис. 3a графиков функций  $\gamma = \Gamma_1, \Gamma_2(g)$  вертикальными сдвигами, в результате которых точка  $(g^0, \gamma^0)$  оказывается на одной из сдвинутых частей графиков функций  $\gamma = \Gamma_{1A}, \Gamma_{1B}, \Gamma_{1C}(g)$  и на одной из сдвинутых частей графиков функций  $\gamma = \Gamma_{2A}, \Gamma_{2B}, \Gamma_{2C}(g)$ . Отсюда следует, что графики обратных к  $\gamma = \gamma_1, \gamma_2(g)$  мажорирующих функций  $g = g_1, g_2(\gamma)$  на плоскости  $(\gamma, g)$  получаются из показанных на рис. 3b графиков функций  $g = G_1, G_2(\gamma)$  горизонтальными сдвигами, в результате которых выбранная стартовая точка (3.3) оказывается на одной из сдвинутых частей графиков функций  $g = G_{1A}, G_{1B}, G_{1C}(\gamma)$  и на одной из сдвинутых частей графиков функций  $g = G_{2A}, G_{2B}, G_{2C}(\gamma)$ .

Но для мажорирования правой ветви графика функции  $\gamma' = f_0(\gamma)$ , лежащей в нижней полуплоскости  $\gamma' < 0$  и уходящей на  $-\infty$  при  $\gamma \rightarrow +\infty$ , из этих шести функций могут использоваться только две функции:  $g = G_{1A}(\gamma)$  и  $g = G_{2A}(\gamma)$ , графики которых также имеют в нижней полуплоскости части, уходящие на  $-\infty$  при  $\gamma \rightarrow +\infty$ . Однако график функции

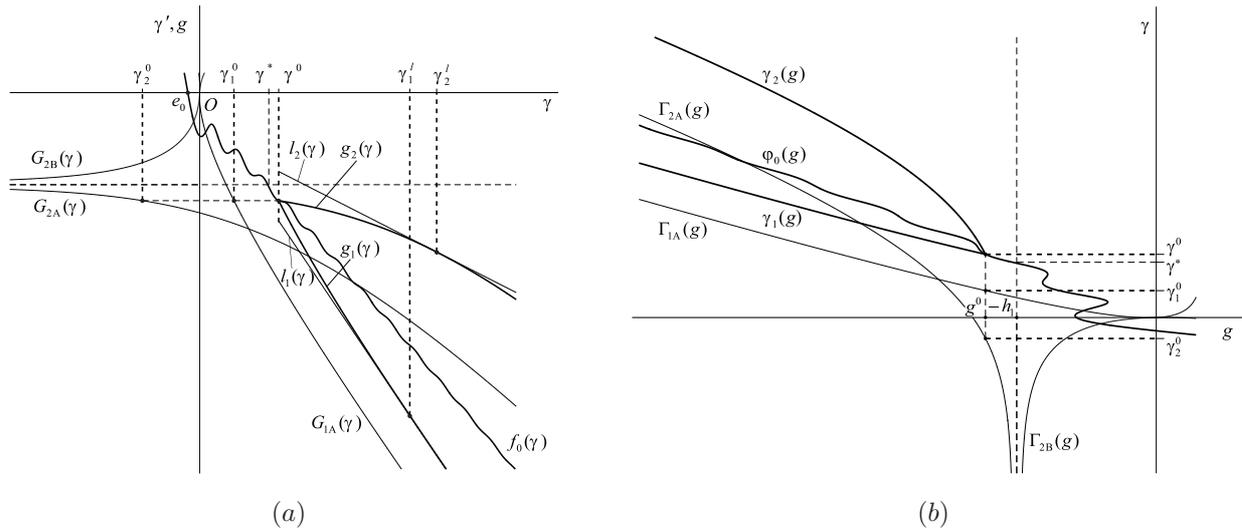


Рис. 4. Определения мажорант кривой  $\gamma' = f_0(\gamma)$  (a), определения обратных мажорант (b).

$g = G_{2A}(\gamma)$  целиком лежит ниже горизонтальной прямой  $g = g_2^*$ , где значение  $g_2^*$  определено в (3.4), и поэтому он может использоваться только для мажорирования той неограниченной справа части кривой  $\gamma' = f_0(\gamma)$ , которая также лежит ниже этой прямой.

Согласно теореме 1 эта часть кривой  $\gamma' = f_0(\gamma)$  соответствует значениям  $\gamma > \gamma^*$ , где  $\gamma^*$  — абсцисса точки пересечения этой кривой с нижней границей  $\gamma' = -h_1 = g_2^*$  полосы немонотонности (рис. 2). Следовательно, абсцисса  $\gamma^0$  стартовой точки  $(\gamma^0, g^0)$ ,  $g^0 = f_0(\gamma^0)$ , должна удовлетворять условию  $\gamma^0 > \gamma^*$ . Таким образом, получаем однопараметрический класс мажорирующих функций  $g = g_1, g_2(\gamma)$  с параметром  $\gamma^0 > \gamma^*$ .

Эти определения мажорирующих функций  $g = g_1, g_2(\gamma)$  при заданной стартовой точке  $(\gamma^0, g^0)$ , соответствующей выбранному значению  $\gamma^0 > \gamma^*$ , иллюстрирует рис. 4a. Данной стартовой точке на кривых  $g = G_{1A}(\gamma)$  и  $g = G_{2A}(\gamma)$  соответствуют *предстартовые точки* с абсциссами  $\gamma_1^0, \gamma_2^0$ , которые являются точками пересечения горизонтальной прямой  $g = g^0$  с этими кривыми. Стартовая и предстартовые точки соединены на рис. 4a штриховой линией. Части графиков функций  $g = G_{1A}(\gamma), g = G_{2A}(\gamma)$ , лежащие справа от престартовых точек, сдвигаются по горизонтали так, чтобы сдвинутые предстартовые точки совпали со стартовой точкой. В результате этого получают показанные на рис. 4a графики функций  $g = g_1, g_2(\gamma)$ , предполагаемых мажорирующими.

Следующая теорема показывает, что функции  $g = g_1, g_2(\gamma)$ , определенные таким способом, действительно являются нижней и верхней мажорантами функции  $\gamma' = f_0(\gamma)$  при  $\gamma \geq \gamma^0$ , и эти функции не имеют наклонных асимптот при  $\gamma \rightarrow \infty$ .

**Теорема 2.** Пусть

- 1) значение  $\gamma^* > e_0$  определено как абсцисса точки пересечения графика решения  $\gamma' = f_0(\gamma)$  уравнения фазовых траекторий (1.2), проходящего через его седловую точку  $(0, e_0)$ , с нижней границей  $\gamma' = -h_1$  полосы немонотонности этой кривой;
- 2) функции  $\gamma' = g_1, g_2(\gamma)$  определены на полуоси  $\gamma \geq \gamma^0$  ( $\gamma^0 > \gamma^*$ ) как решения дифференциальных уравнений (3.2) при начальных условиях  $g_1, g_2(\gamma^0) = g^0$  ( $g^0 = f_0(\gamma^0)$ ).

Тогда

- а) для решения  $\gamma' = f_0(\gamma)$  уравнения фазовых траекторий (1.2) справедлива двусторонняя оценка

$$g_1(\gamma) \leq f_0(\gamma) \leq g_2(\gamma), \quad \gamma \geq \gamma^0; \tag{5.1}$$

- б) кривые  $\gamma' = g_1, g_2(\gamma)$  не имеют наклонных асимптот при  $\gamma \rightarrow \infty$ .

Доказательство состоит из четырех шагов, занумерованных цифрами от 1 до 4. В шагах 1–3 доказано утверждение а), а в шаге 3 — утверждение б).

1. *Переход к обратным функциям.* В доказательстве утверждения а) теоремы 2 вместо двустороннего неравенства (5.1) для функций  $g = g_1, g_2, f_0(\gamma)$  будем рассматривать двустороннее неравенство

$$\gamma_1(g) \leq \varphi_0(g) \leq \gamma_2(g), \quad g \leq g^0, \quad (5.2)$$

для обратных им функций  $\gamma = \gamma_1, \gamma_2, \varphi_0(g)$ . Покажем, что требуемое неравенство (5.1) следует из неравенства (5.2).

Неравенство (5.2) для функций  $\gamma = \gamma_1, \gamma_2, \varphi_0(g)$  означает, что при каждом заданном значении  $g^* \leq g^0$  соответствующие точки  $(g^*, \gamma_1^*)$  и  $(g^*, \gamma_2^*)$  графиков функций  $\gamma = \gamma_1, \gamma_2(g)$  расположены на плоскости  $(g, \gamma)$  на вертикали  $g = g^*$  ниже и выше соответствующей точки  $(g^*, \gamma_0^*)$  кривой  $\gamma = \varphi_0(g)$ . Для обратных к ним функций  $g = g_1, g_2, f_0(\gamma)$  это означает, что на плоскости  $(\gamma, g)$  точки  $(\gamma_1^*, g^*)$  и  $(\gamma_2^*, g^*)$  лежат на горизонтальной прямой  $g = g^*$  слева и справа от точки, соответствующей точке  $(\gamma_0^*, g^*)$  кривой  $g = f_0(\gamma)$ .

Так как функция  $g = g_1(\gamma)$  является монотонно убывающей, то при возрастании  $\gamma$  от  $\gamma_1^*$  до  $\gamma_0^*$  она убывает от значения  $g^*$  до значения  $g_1(\gamma_0^*)$ , которое меньше значения  $g^* = f_0(\gamma_0^*)$  функции  $g = f_0(\gamma)$  при  $\gamma = \gamma_0^*$ . Таким образом, выполнено левое неравенство (5.1).

Поскольку функция  $g = g_2(\gamma)$  также является монотонно убывающей, то при убывании  $\gamma$  от  $\gamma_2^*$  до  $\gamma_0^*$  она возрастает от значения  $g^*$  до значения  $g_2(\gamma_0^*)$ , которое больше значения  $g^* = f_0(\gamma_0^*)$  функции  $g = f_0(\gamma)$  при  $\gamma = \gamma_0^*$ . Таким образом, выполнено правое неравенство (5.1).

Итак, оценка (5.1) следует из оценки (5.2). Поэтому для доказательства теоремы 2 достаточно установить двустороннюю оценку (5.2) для нижней и верхней обратных мажорант.

2. *Оценка для нижней обратной мажоранты.* Согласно определению, данному в разд. 3, функция  $\gamma = \gamma_1(g)$  является решением первого уравнения (3.5) при начальной точке  $(g^0, \gamma^0)$ . Представим это уравнение в виде первого уравнения (3.6).

Функция  $\gamma = \varphi_0(g)$ , обратная к решению  $g = f_0(\gamma)$  уравнения (1.2), является решением уравнения

$$\frac{d\gamma}{dg} = -\frac{g}{ag + \sin \gamma + c}$$

при той же начальной точке. Выделяя в его правой части член  $-1/a$ , запишем это уравнение в виде

$$\frac{d\gamma}{dg} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a} \frac{\sin \gamma + c}{ag + \sin \gamma + c}.$$

Следовательно, функции  $\gamma = \gamma_1, \varphi_0(g)$  удовлетворяют при  $g \leq g^0$  интегральным уравнениям

$$\gamma_1(g) = \gamma^0 - \frac{1}{a} \int_{g_0}^g \left[ 1 + \frac{1-c}{a\sigma - (1-c)} \right] d\sigma, \quad \varphi_0(g) = \gamma^0 - \frac{1}{a} \int_{g_0}^g \left[ 1 - \frac{\sin \varphi_0(\sigma) + c}{a\sigma + \sin \varphi_0(\sigma) + c} \right] d\sigma. \quad (5.3)$$

Тогда для разности этих функций получаем выражение

$$\varphi_0(g) - \gamma_1(g) = \frac{1}{a} \int_{g_0}^g \left[ \frac{1-c}{a\sigma - (1-c)} + \frac{\sin \varphi_0(\sigma) + c}{a\sigma + \sin \varphi_0(\sigma) + c} \right] d\sigma. \quad (5.4)$$

Здесь для переменной интегрирования  $\sigma$  рассматриваются значения  $\sigma \leq g^0 < -h_1 < 0$ , где определенное в (2.2) значение  $-h_1 = -(1+c)/a < 0$  соответствует нижней границе полосы немонотонности. Поэтому точки  $(\gamma, g) = (\varphi_0(g), g)$  лежат на рис. 2 ниже самой линии монотонности (2.1), т. е.  $ag + \sin \gamma + c < 0$ . Таким образом, для переменной  $\sigma$ , заменяющей под знаком интеграла переменную  $g$ , выполнены неравенства

$$\sigma < -\frac{1+c}{a}, \quad a\sigma + \sin \varphi_0(\sigma) + c < 0. \quad (5.5)$$

Последнее из них означает, что знаменатель второй дроби в (5.4) отрицателен. При рассматриваемых здесь значениях  $\sigma < 0$  отрицателен и знаменатель  $a\sigma - (1 - c)$  первой дроби, поскольку  $1 - c > 0$ . Поэтому, обозначая через

$$Z_1(\sigma) = [a\sigma - (1 - c)] [a\sigma + \sin \varphi_0(\sigma) + c]$$

общий знаменатель двух дробей в (5.4), имеем  $Z_1(\sigma) > 0$ .

Приводя дроби под знаком интеграла в (5.4) к общему знаменателю, получаем

$$\varphi_0(g) - \gamma_1(g) = \frac{1}{a} \int_{g_0}^g \frac{1}{Z_1(\sigma)} a\sigma (\sin \varphi_0(\sigma) + 1) d\sigma.$$

Здесь  $\sigma < 0$ ,  $Z_1(\sigma) > 0$ ,  $\sin \varphi_0(\sigma) + 1 \geq 0$ , и поэтому подынтегральная функция неположительна. Но верхний предел интегрирования  $g$  не превосходит нижнего предела  $g^0$ . Поэтому  $\varphi_0(g) - \gamma_1(g) \geq 0$ . Таким образом, доказано левое неравенство в (5.2), из которого, как уже установлено, следует левое неравенство (5.1) в утверждении а) теоремы 2.

3. *Оценка для верхней обратной мажоранты.* Согласно определению, данному в разд. 3, функция  $\gamma = \gamma_2(g)$  является решением второго уравнения (3.5) при начальной точке  $(g^0, \gamma^0)$ . Представим его в виде второго уравнения (3.6). Тогда функция  $\gamma = \gamma_2(g)$ , определенная при  $g \leq g^0$ , удовлетворяет интегральному уравнению

$$\gamma_2(g) = \gamma^0 + \frac{1}{a} \int_{g_0}^g \left[ -1 + \frac{1+c}{a\sigma + (1+c)} \right] d\sigma.$$

Функция  $\gamma = \varphi_0(g)$ , обратная к решению  $g = f_0(\gamma)$  уравнения (1.2), удовлетворяет второму интегральному уравнению (5.3).

Тогда для разности функций  $\gamma = \gamma_2(g)$  и  $\gamma = \varphi_0(g)$  получаем формулу

$$\gamma_2(g) - \varphi_0(g) = \frac{1}{a} \int_{g_0}^g \left[ \frac{1+c}{a\sigma + (1+c)} - \frac{\sin \varphi_0(\sigma) + c}{a\sigma + \sin \varphi_0(\sigma) + c} \right] d\sigma. \quad (5.6)$$

Из (5.5) следует, что знаменатели обеих дробей в этой формуле отрицательны при  $\sigma \in [g^0, g]$ ,  $g \leq g^0$ . Поэтому, обозначая через

$$Z_2(\sigma) = [a\sigma + (1+c)] [a\sigma + \sin \varphi_0(\sigma) + c]$$

общий знаменатель этих дробей, имеем  $Z_2(\sigma) > 0$ .

После приведения дробей под знаком интеграла в формуле (5.6) к общему знаменателю получаем

$$\gamma_2(g) - \varphi_0(g) = \frac{1}{a} \int_{g_0}^g \frac{1}{Z_2(\sigma)} a\sigma (1 - \sin \varphi_0(\sigma)) d\sigma.$$

Поскольку  $\sigma < 0$ ,  $Z_2(\sigma) > 0$ ,  $1 - \sin \varphi_0(\sigma) \geq 0$ , подынтегральная функция здесь неположительна. Но верхний предел интегрирования  $g$  не превосходит нижнего предела  $g^0$ . Поэтому получаем  $\gamma_2(g) - \varphi_0(g) \geq 0$ . Таким образом, доказано правое неравенство в (5.2), из которого следует правое неравенство (5.1) в утверждении а) теоремы 2.

4. *Доказательство отсутствия асимптот у кривых  $g = g_1, g_2(\gamma)$ .* Докажем отсутствие асимптоты у кривой  $g = g_1(\gamma)$  (см. рис. 4а). Допустим, что эта кривая имеет наклонную асимптоту при  $\gamma \rightarrow +\infty$ . Тогда кривая, определенная обратной функцией  $\gamma = \gamma_1(g)$  и показанная на рис. 4б, имеет наклонную асимптоту при  $g \rightarrow -\infty$ . Но эта кривая получается

вертикальным сдвигом кривой  $\gamma = \Gamma_{1A}(g)$ , и поэтому она также имеет при  $g \rightarrow -\infty$  наклонную асимптоту  $\gamma = A_1g + B_1$ . Это означает, что выполнено предельное соотношение  $\lim_{g \rightarrow -\infty} (\Gamma_{1A}(g) - A_1g - B_1)$ , из которого следуют два соотношения, которые являются необходимыми и достаточными условиями существования такой асимптоты [13, с. 310–311]:

$$\lim_{g \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma_{1A}(g)}{g} = A_1, \quad \lim_{g \rightarrow +\infty} (\Gamma_{1A}(g) - A_1g) = B_1.$$

С учетом того, что функция  $\gamma = \Gamma_{1A}(g)$  определена при  $g \in (-\infty, 0]$  формулой (3.8), эти соотношения записываются в виде равенств

$$\lim_{g \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{a} - \frac{1-c}{a^2g} \ln |ag/(1-c) - 1| \right] = A_1,$$

$$\lim_{g \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{a}g - \frac{1-c}{a^2} \ln |ag/(1-c) - 1| - A_1g \right] = B_1.$$

Первое из них дает  $A_1 = -1/a$ , и тогда второе приводится к равенству

$$\lim_{g \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1-c}{a^2} \ln |ag/(1-c) - 1| \right] = B_1,$$

которое является невыполнимым, так как предел в его левой части равен  $+\infty$ .

Таким образом, доказано отсутствие асимптоты у функции  $g = g_1(\gamma)$ .

Отсутствие асимптоты у функции  $g = g_2(\gamma)$  доказывается тем же способом с учетом того, что используемая в доказательстве функция  $\gamma = \Gamma_{2A}(g)$  определена при  $g \in (-\infty, g_2^*]$  формулой (3.10).  $\square$

Установленные свойства нелинейных мажорант  $g = g_1, g_2(\gamma)$  функции  $\gamma' = f_0(\gamma)$  при  $\gamma \geq \gamma^0$  позволяют получить для нее нижнюю и верхнюю линейные мажоранты.

### Теорема 3. Пусть

1) на графиках нижней и верхней нелинейных мажорант  $g = g_1, g_2(\gamma)$ ,  $\gamma \geq \gamma^0$ , фазовой кривой  $\gamma' = f_0(\gamma)$  выбраны точки  $(\gamma_1^+, g_1(\gamma_1^+))$  и  $(\gamma_2^+, g_2(\gamma_2^+))$ , удовлетворяющие условиям  $\gamma_1^+, \gamma_2^+ \geq \gamma^0$ ;

2) функции  $g = l_1, l_2(\gamma)$  определяют касательные к графикам мажорант  $g = g_1, g_2(\gamma)$  в этих точках:

$$l_1(\gamma) = a_1(\gamma_1^+)(\gamma - \gamma_1^+) + g_1(\gamma_1^+), \quad a_1(\gamma_1^+) = \frac{dg_1(\gamma_1^+)}{d\gamma} < 0;$$

$$l_2(\gamma) = a_2(\gamma_2^+)(\gamma - \gamma_2^+) + g_2(\gamma_2^+), \quad a_2(\gamma_2^+) = \frac{dg_2(\gamma_2^+)}{d\gamma} < 0.$$

Тогда для решения  $\gamma' = f_0(\gamma)$  уравнения фазовых траекторий (1.2) справедлива двусторонняя линейная оценка

$$l_1(\gamma) \leq f_0(\gamma) \leq l_2(\gamma), \quad \gamma \geq \gamma^0. \quad (5.7)$$

**Доказательство.** Из свойств выпуклости функций  $g = G_1, G_2(\gamma)$ , отраженных в табл. 1, 2, следует, что нижняя и верхняя нелинейные мажоранты  $g = g_1, g_2(\gamma)$ , получаемые из них горизонтальными сдвигами графиков, являются, соответственно, выпуклыми вниз и вверх. Но тогда из известной теоремы [3, с. 300–301] следует, что график нижней нелинейной мажоранты  $g = g_1(\gamma)$  лежит выше касательной к ней в любой точке, а график верхней нелинейной мажоранты  $g = g_2(\gamma)$  лежит ниже касательной к ней в любой точке. С учетом установленной в теореме 2 двусторонней нелинейной оценки (5.1) получаем отсюда двустороннюю линейную оценку (5.7).  $\square$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.
2. Барбашин Е.А., Табуева В.А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969. 300 с.
3. Леонов Г. А. Фазовая синхронизация. Теория и приложения // Автоматика и телемеханика. 2006. № 10. С. 47–85.
4. Копылов И. П. Математическое моделирование электрических машин: 3-е изд. М.: Высшая школа, 2001. 607 с.
5. Леонов Г.А., Зарецкий А.М. Глобальная устойчивость и колебания динамических систем, описывающих синхронные электрические машины // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. 2012. Вып. 4. С. 18–27.
6. Коносевиц Б.И., Коносевиц Ю.Б. Об устойчивости стационарных движений гироскопа в кардановом подвесе, снабженного электродвигателем // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2013. № 3. С. 57–73.
7. Леонов Г. А. Второй метод Ляпунова в теории фазовой синхронизации // Прикл. математика и механика. 1976. Т. 40, № 2. С. 238–244.
8. Коносевиц Б.И., Коносевиц Ю.Б. Достаточное условие глобальной устойчивости модели синхронного электромотора при нелинейном моменте нагрузки // Вестн. СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63), № 1. С. 74–85.
9. Tricomi F. Integrazione di unequazione differenziale presentasi in electrotechnica. *Annali della Roma Scuola Normale Superiore de Pisa*. 1933. Vol. 2, no. 2. P. 1–20.
10. Андронов А.Ф., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.
11. Коносевиц Б.И., Коносевиц Ю.Б. Компьютерный анализ дифференциального уравнения модели синхронного электромотора, не содержащей электрических токов // Вестн. СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68), № 3. С. 499–515. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.305>
12. Коносевиц Б.И., Коносевиц Ю.Б. Пять способов аппроксимации критических значений коэффициента демпфирования в бестоковой модели синхронного электромотора // Вестн. СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2025. Т. 12 (70), № 2. С. 377–392. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2025.213>
13. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. Изд. 6. М.: Наука, 1966. 608 с.

Поступила 14.10.2025

После доработки 28.10.2025

Принята к публикации 3.11.2025

Коносевиц Борис Иванович

д-р физ.-мат. наук,

ФГБНУ “Институт прикладной математики и механики”

г. Донецк

e-mail: ipmm\_mtt@mail.ru

Коносевиц Юлия Борисовна

канд. физ.-мат. наук

ФГБНУ “Институт прикладной математики и механики”

г. Донецк

e-mail: konos.donetsk@yandex.ru

## REFERENCES

1. Gelig A.Kh., Leonov G.A., Yakubovich V.A. *Ustoychivost' nelineynyh sistem s needinstvennym sostoyaniem ravnovesiya* [Stability of nonlinear systems with a nonunique equilibrium state]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 400 p.
2. Barbashin E.A., Tabueva V.A. *Dynamicheskie systemy s tsilindricheskim fazovym prostranstvom* [Dynamical systems with the cylindrical phase space]. Moscow, Nauka Publ., 1969, 300 p.

3. Leonov G.A. Phase synchronization: Theory and applications. *Autom. Remote Control*, 2006, vol. 67, no. 10, pp. 1573–1609. <https://doi.org/10.1134/S0005117906100031>
4. Kopylov I.P. *Matematicheskoe modelirovanie elektricheskikh mashin: Uchebnik dlya vuzov* [Mathematical modelling of electrical machines. Textbook for high school]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 2001, 327 p. ISBN: 5-06-003861-0.
5. Leonov G.A., Zaretskiy A.M. Global stability and oscillations of dynamical systems describing synchronous electrical machines. *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.*, 2012, vol. 45, no. 4, pp. 157–163. <https://doi.org/10.3103/S1063454112040048>
6. Konosevich B.I., Konosevich Yu.B. Stability of stationary motions of a gimbal gyro with an electric motor. *Mech. Solids*, 2013, vol. 48, no. 3, pp. 285–297. <https://doi.org/10.3103/S0025654413030059>
7. Leonov G.A. Lyapunov’s second method in the theory of phase synchronization. *Appl. Math. Mech.*, 1976, vol. 40, no. 2, pp. 238–244 (in Russian).
8. Konosevich, B.I., Konosevich, Y.B. Sufficient global stability condition for a model of the synchronous electric motor under nonlinear load moment. *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.*, 2018, vol. 51, pp. 57–65. <https://doi.org/10.3103/S1063454118010053>
9. Tricomi F. Integrazione di unequazione differenziale presentasi in electrotechnica. *Annali della Roma Scuola Normale Superiore de Pisa*, 1933, vol. 2, no. 2, pp. 1–20.
10. Andronov A.A., Vitt A.A., Khaikin S.E. *Teoriya kolebaniy* [Vibration theory]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 568 p.
11. Konosevich B.I., Konosevich Yu.B. Computer analysis of a model of a synchronous no-current electric motor. *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.*, 2023, vol. 56, no. 3, pp. 349–360. <https://doi.org/10.1134/S1063454123030056>
12. Konosevich B.I., Konosevich Yu.B. Five means of approximation of critical values of the damping coefficient in the no-current model of a synchronous electric motor. *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.*, 2025, vol. 58, no. 2, pp. 277–288. <https://doi.org/10.1134/S106345412570027X>
13. Fihtengolts G.M. *Kurs differentsial’nogo i integral’nogo ischisleniya* [Course of differential and integral calculus]. Vol. 1. Moscow, Nauka Publ., 1966, 608 p.

Received October 14, 2025

Revised October 28, 2025

Accepted November 3, 2025

**Funding Agency:** The work was carried out within the framework of the development program of the regional Azov-Black Sea Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Grant Agreement no. 075-02-2025-1620).

*Boris Ivanovich Konosevich*, Dr. Phys.-Math. Sci., Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk, 283048 Russia, e-mail: ipmm\_mtt@mail.ru.

*Yuliya Borisovna Konosevich*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk, 283048 Russia, e-mail: konos.donetsk@yandex.ru.

Cite this article as: B. I. Konosevich, Yu. B. Konosevich. Estimates of the unbounded separatrices of the differential equation of the current-free model of a synchronous motor. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 4, pp. 188–202.