

УДК 519.853.6, 517.958

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ БЫСТРЕЙШИХ МАРШРУТОВ БЕЗ СТОЛКНОВЕНИЙ В СРЕДЕ С ДИНАМИЧЕСКИМИ ПРЕПЯТСТВИЯМИ¹

А. Л. Казаков, А. А. Лемперт, Т. В. Чан

В статье рассматривается задача построения оптимальных по времени маршрутов для одного или нескольких подвижных объектов в динамической среде с препятствиями. Предлагается подход, основанный на оптико-геометрической аналогии и принципах Ферма и Гюйгенса, который сводит задачу к решению уравнения эйконала. Разработана серия алгоритмов (включая модификации метода “быстрого марша”), позволяющих строить траектории без столкновений и перепланировать их при изменении обстановки. Эффективность предложенных методов подтверждена вычислительными экспериментами, и показано их превосходство по длине маршрута и времени расчета в сравнении с существующими подходами, такими как CFM, PRIMAL и DHC.

Ключевые слова: задача маршрутизации, динамическая среда, оптико-геометрический подход, уравнение эйконала, алгоритм быстрого марша.

A. L. Kazakov, A. A. Lempert, T. V. Tran. On constructing the fastest collision-free routes in dynamic environments with moving obstacles.

The article addresses the problem of constructing time-optimal routes for one or several moving objects in a dynamic environment with obstacles. We propose an approach based on the optical-geometrical analogy and the principles of Fermat and Huygens, which reduces the problem to solving the eikonal equation. A series of algorithms (including modifications of the fast marching method) is developed. They allow one to construct collision-free trajectories and correct them when the situation changes. The effectiveness of the proposed methods is confirmed by computational experiments, demonstrating their superiority in route length and computation time compared to existing approaches such as CFM, PRIMAL, and DHC.

Keywords: routing problem, dynamic environment, optical-geometric approach, eikonal equation, fast marching method.

MSC: 05B40, 52C17, 35A18

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-4-115-131

Введение

В современных условиях глобализации и роста электронной коммерции скорость доставки стала одним из ключевых факторов конкурентоспособности логистических компаний. Потребители, особенно в B2C-сегменте (Business-to-Consumer), ожидают максимально быстрого получения заказов, что заставляет перевозчиков искать способы сокращения сроков без существенного роста затрат. В этой связи задача поиска оптимального маршрута играет ключевую роль, особенно в ситуациях, когда затраты на перевозку сопоставимы со стоимостью груза, а задержки недопустимы (см. [1; 2]).

Задачи маршрутизации принято разделять на два фундаментальных класса: задачи маршрутизации на графах и бесконечномерные задачи маршрутизации. К первому классу принадлежат задача коммивояжера, ее различные варианты и обобщения [3–5]. Ко второму классу относятся задачи проектирования воздушных, морских и некоторых наземных маршрутов, где множество допустимых траекторий образует бесконечномерное пространство (см. [6–8]). Известно, что задачи обоих классов являются NP-трудными.

¹Исследование А. А. Лемперт выполнено за счет гранта Российского научного фонда, проект № 24-21-00264, <https://rscf.ru/project/24-21-00264/>.

В классических постановках ключевыми параметрами обычно выступают расстояние между пунктами и характеристики транспортного средства (вместимость, скорость, расход топлива). При этом внешняя среда считается статической, а ее влияние — неизменным. Для решения таких задач широко применяются методы теории графов, среди которых наиболее известны алгоритмы Дейкстры [9], Флойда — Уоршелла [10], A^* [11] и D^* [12]. Эти методы эффективны в условиях статичности, поскольку требуют полной априорной информации о среде.

В реальности часто возникают ситуации, когда изменения окружающей среды оказывают значительное влияние на движение транспорта. Так, в исследованиях [6; 13] описаны методы планирования траекторий движения роботов с предотвращением столкновений, учитывающие геометрические, физические и временные ограничения. Кроме того, необходимо учитывать появление подвижных препятствий или изменение их формы [7; 14]. В подобных случаях применяются эвристические стратегии поиска, например, динамическая версия алгоритма A^* , которая за счет специального выбора эвристической функции позволяет учитывать ряд дополнительных ограничений. Еще одним подходом являются алгоритмы быстрого случайного дерева (RRT и RT-RRT [8]), позволяющие эффективно планировать путь в изменяющихся условиях за счет использования диаграмм переменных соединений на основе случайно выбранных точек.

В работах [15; 16] представлены алгоритмы определения траекторий движения без столкновений наземного робота и беспилотного летательного аппарата в среде со статическими и динамическими препятствиями, которые движутся с известной скоростью и направлением. В статье [17] предложен двухуровневый подход к маршрутизации группы подводных роботов, где траектория каждого робота корректируется с учетом движения остальных, а в работе [18] представлен метод построения безопасных траекторий для автономного плавания. Развитие морских автономных надводных судов (MASS) также требует разработки новых алгоритмов навигации [19], среди которых выделяется алгоритм динамического предотвращения столкновений (DAA*) [20], демонстрирующий высокую эффективность в сложных сценариях.

В некоторых случаях движущиеся объекты должны обеспечивать достижение цели при наличии ограничений и взаимодействии с другими подвижными объектами. В исследованиях [21–23] развивается теория сближения стационарных и нелинейных управляемых систем, а также дифференциальных игр с фиксированным моментом окончания. В них предлагаются минимаксные и u -устойчивые решения, обеспечивающие достижение цели и предотвращение конфликтов в многообъектных средах. В статье [24] задача планирования траектории движения с ограничением на ее длину и при наличии статических препятствий формализована как задача оптимального управления и решена непрямыми методами оптимизации, опирающимися на принцип максимума Понтрягина.

Современные исследования также затрагивают сценарии, где изменения среды происходят настолько быстро, что требуется перепланирование в режиме реального времени. Например, в [25] операции перепланирования должны выполняться за 200 мс для имитации человеческой реакции. Таким образом, задачи построения маршрутов в статических и динамических средах сохраняют свою актуальность.

В данной работе рассматривается задача построения быстрее маршрутов в среде, свойства которой непрерывно изменяются в пространстве и кусочно непрерывно во времени. Основной целью является нахождение маршрута с минимальным временем перемещения между двумя точками при обходе барьеров и уклонении от движущихся препятствий. При этом рассматривается как единичный объект, так и сценарии с несколькими объектами, для каждого из которых требуется построить индивидуальный маршрут без столкновений и с учетом динамики среды. В основе предлагаемых алгоритмов лежит оптико-геометрический подход, основанный на аналогии между распространением света в неоднородной среде и минимизацией интегрального функционала [26; 27]. Разработанные методы расширяют класс задач, рассмотренных в работе [28], на случай нескольких взаимодействующих объектов.

1. Постановка задачи

Пусть заданы ограниченная область $X \subset \mathbb{R}^2$ и функция $0 \leq f(t, x, y) \leq \beta$, непрерывная по x, y и кусочно непрерывная по t , которая задает мгновенную скорость движения в каждой точке $(x, y) \in X$ в момент времени t . Если $f(t, x, y) = 0$, то точка (x, y) считается непроходимой (барьером) в момент времени t . Множество барьеров обозначим $H(t) = \{(x, y) : f(t, x, y) = 0\}$.

Пусть также имеется множество из n подвижных объектов $\Theta = \{O_1, O_2, \dots, O_n\}$, каждый из которых должен переместиться из начальной точки S_i в целевую точку F_i , где $S_i, F_i \in X \setminus H(t), i = \overline{1, n}, t > 0$. Позицию объекта O_i в момент времени t обозначим $P_i(t)$.

Требуется решить следующую задачу быстрогодействия. Для каждого объекта O_i найти маршрут $P_i(t) \in X$ такой, что $p_i(0) = S_i, p_i(T_i) = F_i$ для некоторого $T_i > 0$ при условии отсутствия столкновений между объектами и барьерами с учетом безопасной дистанции Δ :

$$\sum_{i=1}^n T_i \rightarrow \min, \quad (1.1)$$

$$\|P_i(t), P_j(t)\| \geq \Delta \quad \forall i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j, \quad t \in [0, \max_{k=\overline{1, n}} T_k], \quad (1.2)$$

$$\|P_i(t), \partial H(t)\| \geq \Delta \quad \forall i = \overline{1, n}, \quad t \in [0, T_i], \quad (1.3)$$

где $\|\cdot\|$ — евклидово расстояние, $\partial H(t)$ — граница множества $H(t)$.

2. О методе решения задач

Задачу минимизации времени перемещения в динамической среде будем решать с помощью оптико-геометрической аналогии, в которой траектория объекта отождествляется с лучом света в неоднородной среде. Данный подход опирается на вариационные и волновые принципы оптики: обобщенный принцип Ферма, определяющий траекторию как путь с минимальным временем движения, и принцип Гюйгенса-Френеля, описывающий построение волнового фронта как огибающей вторичных волн [29].

Пусть для начала имеется один движущийся объект со стартовой точкой $S(0) = (x_0, y_0)$ и целевой точкой $F(T^*) = (x_T, y_T)$. Тогда задачу (1.1)–(1.3) можно рассматривать как задачу о распространении фронта возмущения из точки $S(0)$, а ее решение — как нахождение поля времен прихода фронта $T(t, x, y)$ во все точки области X . Данное поле получается из решения уравнения типа эйконала, время T^* находится одновременно с построением поля, а оптимальная траектория определяется градиентом этого поля. Поскольку свойства среды изменяются кусочно непрерывно во времени, рассмотрим двумерное нестационарное уравнение типа эйконала

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{f^2(t, x, y)}, \quad (2.4)$$

где t — время, x, y — пространственные переменные, $(x, y) \in X \setminus H(t)$, $T(t, x, y)$ — искомая функция.

Отметим, что точные решения и, соответственно, формы лучей и фронтов известны только для отдельных классов функции f [30], в общем случае решение строится численно.

Если в среде одновременно движется несколько объектов $\Theta = \{O_1, O_2, \dots, O_n\}$, динамику каждого из них будем моделировать отдельно. При этом мгновенная скорость объекта O_i определяется функцией $f_i(t, x, y)$, которая зависит от “фоновой” скорости среды $f(t, x, y)$ и положений других объектов $P_j(t)$:

$$f_i(t, x, y) = \begin{cases} f(t, x, y), & \|(x, y), P_j(t)\| > \Delta \quad \forall i \neq j, \\ 0, & \|(x, y), P_j(t)\| \leq \Delta \quad \forall i \neq j. \end{cases} \quad (2.5)$$

Таким образом, зона радиусом Δ вокруг каждого движущегося объекта считается для других объектов полностью непроходимой. Множество барьеров для каждого объекта обозначим как $H_i(t) = \{(x, y) : f_i(t, x, y) = 0\}$.

Для этого процесс решения выполняется итерационно: на первом шаге для всех объектов вычисляются поля $T_i(t, x, y)$ в предположении отсутствия взаимодействия, находятся траектории $P_i^*(t)$ с минимальным временем прохождения. Затем вычисляются функции $f_i(t, x, y)$ с учетом траекторий остальных объектов и безопасных зон. После этого производятся повторное решение уравнений эйконала для каждого объекта на множестве $X \setminus H_i(t)$ и исправления траекторий, позволяющие избежать столкновений.

3. Вычислительные алгоритмы

Опишем базовый алгоритм численного решения уравнения (2.4). Он относится к семейству алгоритмов типа “Быстрого марша” (ФММ).

Алгоритм 1: Распространение световой волны.

Шаг 0 (инициализация): Вводятся шаг по времени Δt и равномерная пространственная сетка $X_h \subset X$ с шагом h . Для каждого узла $p(x_p, y_p) \in X_h$ устанавливается время прихода волны $T_p = +\infty$, а предшествующий узел $S_p = \emptyset$. Для начальной точки $A(x_a, y_a)$ полагается $T_A = 0$. Счетчик временных итераций $N = 0$. Создается приоритетная очередь Q , $Q = \{A\}$.

Шаг 1: Если $Q \neq \emptyset$, для первого элемента $q \in Q$ определяется множество M , включающее $(2k+1)^2 - 1, k \geq 1$, точек, соседних по сетке с точкой q :

$$M = \{m(x_q + \delta_x, y_q + \delta_y) : \delta_x = ih, \delta_y = jh, i, j = -k, \dots, k\}.$$

Шаг 2: Для допустимой точки $m \in M \setminus H(t_0 + N\Delta t)$ вычисляется время прихода световой волны из точки q в m : $T'_m = T_q + t_{qm}$, где

$$t_{qm} = 2 \frac{\sqrt{(x_q - x_m)^2 + (y_q - y_m)^2}}{f(t_0 + N\Delta t, x_q, y_q) + f(t_0 + N\Delta t, x_m, y_m)}.$$

Шаг 3: Если найденное значение $T'_m \leq t_0 + (N+1)\Delta t$ и $T'_m < T_m$, то $T_m = T'_m, S_m = q$ и $Q = Q \cup \{m\}$.

Шаг 4: Точка q исключается из очереди $Q = Q \setminus \{q\}$. Если $Q = \emptyset$, переходим к шагу 5, иначе — к шагу 1.

Шаги 2–4 выполняются независимо для всех $m \in M$.

Шаг 5: Формируется множество $U = \{p \in X_h : t_0 + N\Delta t < T_p \leq t_0 + (N+1)\Delta t\}$. Если $U = \emptyset$, то алгоритм завершается, иначе $N = N + 1, Q = U$ и переход к шагу 1.

По завершении алгоритма для каждого узла сетки $p \in X_h$ известны время прихода волны T_p из стартовой точки A и узел-предшественник S_p , который определяет источник вторичной волны и позволяет восстановить оптимальную траекторию.

Алгоритм 2: Построение маршрута (ОГМ).

Алгоритм позволяет найти быстрейший маршрут из точки A в точку B , $A, B \in X \setminus H(t)$, и определить, какая его часть будет пройдена за заданный интервал времени Δt .

Шаг 0 (инициализация): Пусть $L(A, B)$ — список точек маршрута из A в B . Полагается $L(A, B) = B$.

Шаг 1: Из точки A выполняется распространение световой волны по алгоритму 1.

Шаг 2: Если $T_B = +\infty$, алгоритм завершается: маршрут не существует.

Шаг 3: Для последней точки p в списке $L(A, B)$ определяется ее предшественник S_p , который добавляется в конец списка: $L(A, B) = L(A, B) \cup \{S_p\}$.

Шаг 4: Если $S_p = A$, переход к шагу 5. В противном случае переход к шагу 3.

Шаг 5: Элементы списка $L(A, B)$ упорядочиваются в обратном порядке так, чтобы начальной точкой стала A , а конечной — B .

Шаг 6: В маршруте $L(A, B)$ находится точка $p^* \in L(A, B)$, у которой время T_{p^*} удовлетворяет условию $T_{p^*} = \max\{T_p : p \in L(A, B), T_p \leq t_0 + \Delta t\}$.

Эта точка является наиболее удаленной точкой на маршруте, которую объект может достичь за время Δt .

Шаг 7: Найти подсписок $L(A, p^*) \subseteq L(A, B)$, содержащий точки от A до p^* .

Алгоритм возвращает список точек $L(A, p^*)$, представляющий собой маршрут движения объекта из начальной точки A в точку p , достижимую за время Δt . Если $p^* = A$, то объект не может сдвинуться с начальной точки за отведенное время, а если $p^* = B$, то объект успевает достичь конечной точки.

В случае системы из множества движущихся объектов Θ требуется обеспечить не только обход статических препятствий $H(t)$, но и предотвращение взаимных столкновений между объектами. Алгоритм строит маршруты для заданного набора объектов Θ , расширяя логику алгоритма 2. Основная идея заключается в итеративном планировании траектории для каждого объекта на последовательных временных интервалах длиной Δt , где все другие объекты рассматриваются как динамические препятствия. Кроме этого, вводится прогнозирование траекторий на некоторый интервал времени, что позволяет объектам заранее избегать потенциальных конфликтов.

Алгоритм 3: Координация маршрутов для нескольких объектов (ОГМН).

Шаг 0 (инициализация): Задаются начальное время $t_0 = 0$ и шаг по времени Δt . Множества U — объекты, продолжающие движение, и V — объекты, завершившие движение, инициализируются как $U = \Theta$, $V = \emptyset$. Для каждого объекта O_i задается его стартовая $P_i(0) = S_i$ и целевая F_i позиции, а маршрут $L_i = \emptyset$. Задается параметр прогноза N_f , определяющий глубину прогнозирования по времени.

Шаг 1 (локальное планирование для каждого объекта): Для каждого объекта $O_i \in U$:

1.1. Формируется множество динамических препятствий, включающее статические барьеры и текущие позиции всех других объектов: $H_i(t_0) = H(t_0) \cup \{P_j(t_0) : j \neq i\}$.

1.2. Применяется алгоритм 2 с параметрами $A = P_i(t_0)$, $B = F_i$, t_0 , Δt для нахождения достижимой точки p_i и соответствующего участка маршрута $L(P_i(t_0), p_i)$.

1.3. Текущая позиция обновляется: $P_i(t_0 + \Delta t) = p_i$. Участок маршрута добавляется в общий список: $L_i = L_i \cup L(P_i(t_0), p_i)$.

Шаг 2 (прогнозирование траекторий): Если $N_f > 0$, для каждого объекта $O_i \in U$:

2.1. Применяется алгоритм 2 с параметрами $A = P_i(t_0)$, $B = F_i$, t_0 , $\Delta t = N_f \Delta t$ для нахождения прогнозируемой точки q_i и участка маршрута $L(P_i(t_0), q_i)$ за время $N_f \Delta t$.

2.2. Для остальных объектов O_j ($j \neq i$) прогнозируемый участок маршрута O_i добавляется в их множества динамических препятствий: $H_j(t_0) = H_j(t_0) \cup L(P_i(t_0), q_i)$.

Шаг 3 (обновление множеств объектов): Для каждого объекта $O_i \in U$: если $p_i = F_i$, то $V = V \cup \{O_i\}$.

Шаг 4 (переход к следующей итерации): Если $U = \emptyset$, алгоритм завершается. Иначе: $t_0 = t_0 + \Delta t$, $U = U \setminus V$, переход к шагу 1.

Для каждого объекта $O_i \in \Theta$ либо построен полный маршрут L_i от S_i до F_i , согласованный с маршрутами других объектов, либо показано, что задача не имеет решения.

Предположим, что скорость движения объекта много больше, чем скорости движения препятствий. Данное предположение позволяет пренебречь изменением функции f за промежуток Δt при $\Delta t \rightarrow 0$. Покажем, что решение, найденное алгоритмом 2, сходится к быстрой траектории объекта.

Теорема 1. Пусть существует путь из A в B , обходящий препятствия $H(t)$. Тогда при $h \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$ алгоритм 2 сходится к оптимальной траектории, минимизирующей время движения.

Доказательство проведем в несколько этапов.

1. *Аппроксимация.* Рассмотрим дискретную схему распространения волнового фронта. Время прихода в точку m вычисляется как

$$T_m = \min_{q \in \mathcal{N}(m)} \left\{ T_q + \frac{2\|m - q\|}{f(t_q, q) + f(t_m, m)} \right\}, \quad (3.6)$$

где $\mathcal{N}(m)$ — окрестность точки m .

Эта схема аппроксимирует уравнение эйконала (2.4). При этом нетрудно показать, что локальная ошибка аппроксимации имеет порядок $O(h^2 + \Delta t)$.

2. *Монотонность.* Пусть $T^{(n)}$ — приближение на n -м шаге. Тогда

$$T_m^{(n+1)} = \min \left\{ T_m^{(n)}, \min_{q \in \mathcal{N}(m)} \left\{ T_q^{(n)} + \frac{2\|m - q\|}{f(t_q, q) + f(t_m, m)} \right\} \right\}.$$

Таким образом, $T^{(n+1)} \leq T^{(n)}$, что гарантирует монотонное невозрастание значений.

3. *Сходимость к вязкостному решению.* Пусть T — вязкостное решение уравнения эйконала, а T_h — решение дискретной схемы (3.6). Тогда $\lim_{h \rightarrow 0} \|T_h - T\|_{L^\infty(X)} = 0$. Определим верхний и нижний пределы:

$$\overline{T}(\mathbf{x}) = \limsup_{h \rightarrow 0, \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x}} T_h(\mathbf{z}), \quad \underline{T}(\mathbf{x}) = \liminf_{h \rightarrow 0, \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x}} T_h(\mathbf{z}).$$

Покажем, что \overline{T} — вязкостное подрешение. Пусть ϕ — тест-функция, и $\overline{T} - \phi$ имеет локальный максимум в \mathbf{x}_0 . Нужно показать, что

$$\|\nabla \phi(\mathbf{x}_0)\| \leq \frac{1}{f(\mathbf{x}_0)}.$$

По определению \overline{T} существуют последовательности $h_n \rightarrow 0$, $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$ такие, что

$$T_{h_n}(\mathbf{x}_n) \rightarrow \overline{T}(\mathbf{x}_0), \quad T_{h_n}(\mathbf{x}_n) - \phi(\mathbf{x}_n) \geq T_{h_n}(\mathbf{z}) - \phi(\mathbf{z}) - \epsilon_n. \quad (3.7)$$

Рассмотрим $\mathbf{z} = \mathbf{x}_n + h_n v$ — точку, удаленную от \mathbf{x}_n на расстояние h_n в направлении v . Из дискретной схемы для T_{h_n} имеем для любого v

$$T_{h_n}(\mathbf{x}_n) \leq T_{h_n}(\mathbf{x}_n + h_n v) + \frac{h_n}{f(\mathbf{x}_n)} + O(h_n). \quad (3.8)$$

Подставим $\mathbf{z} = \mathbf{x}_n + h_n v$ в неравенство (3.7), получим

$$T_{h_n}(\mathbf{x}_n) \geq T_{h_n}(\mathbf{x}_n + h_n v) - [\phi(\mathbf{x}_n + h_n v) - \phi(\mathbf{x}_n)] - \epsilon_n.$$

Вместе с (3.8) получаем

$$\phi(\mathbf{x}_n + h_n v) - \phi(\mathbf{x}_n) \geq -\frac{h_n}{f(\mathbf{x}_n)} - O(h_n) - \epsilon_n.$$

Поскольку данное неравенство выполняется для всех v , оно выполняется и для наименьшего значения левой части $\min_{|v|=1} (\phi(\mathbf{x}_n + h_n v) - \phi(\mathbf{x}_n)) \geq -\frac{h_n}{f(\mathbf{x}_n)} - O(h_n) - \epsilon_n$, откуда получаем

$$\phi(\mathbf{x}_n) \leq \min_{|v|=1} \left(\phi(\mathbf{x}_n + h_n v) + \frac{h_n}{f(\mathbf{x}_n)} \right) + \epsilon_n + O(h_n). \quad (3.9)$$

Переходя к пределу при $h_n \rightarrow 0$, $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$, $\epsilon_n \rightarrow 0$, получаем требуемое неравенство.

Аналогично доказывается, что \underline{T} — вязкостное надрешение.

Рассмотрим начальную точку A , где $T = 0$. Поскольку численная схема (3.6) аппроксимирует правильные начальные условия, имеем $\overline{T}(A) \leq 0 \leq \underline{T}(A)$, откуда по теореме сравнения получаем, что $\overline{T}(\mathbf{x}) \leq \underline{T}(\mathbf{x})$. С другой стороны, по построению $\underline{T}(\mathbf{x}) \leq \overline{T}(\mathbf{x})$. Таким образом, $\overline{T} = \underline{T} = T$, откуда следует равномерная сходимость T_h к T .

4. *Корректность восстановления траектории.*

Траектория восстанавливается по правилу

$$x_{k+1} = \arg \min_{x \in \mathcal{N}(x_k)} \left\{ T(x) + \frac{\|x - x_k\|}{f(t_k, x_k)} \right\}.$$

Это градиентный спуск по полю $T(x)$. Поскольку $T(x)$ удовлетворяет уравнению эйконала, восстановленная траектория является характеристикой этого уравнения.

Пусть $\gamma^*(t)$ — истинная оптимальная траектория, $\gamma_h(t)$ — траектория, полученная алгоритмом. Тогда $|T(\gamma^*(t)) - T(\gamma_h(t))| \leq C(h + \Delta t)$, где константа C зависит от констант Липшица функции f и геометрии области.

Таким образом, при $h \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$ получаем сходимость к оптимальной траектории.

4. Вычислительный эксперимент

Все алгоритмы реализованы на языке программирования C# в пакете Visual Studio 2022, вычисления производились на персональном компьютере с конфигурацией Intel (R) Core(TM) i5-3337U (частота 1.8 GHz, 4CPUs, 6 GB RAM) и операционной системой Windows 10.

Пример 1. Рассматривается задача движения объекта в среде с точечными барьерами, которые имеют определенную зону влияния. Множество барьеров включает три элемента: $H = \{h_1(0.4; 0.55); h_2(0.7; 0.75); h_3(1.5; 0.4)\}$, а радиус зоны влияния $r_0 = 0.5$. Функция f не зависит от времени и задается следующим образом:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \min_{h \in H} \|(x, y) - h\| = 0, \\ 1 + r_0 - \min_{h \in H} \|(x, y) - h\|, & 0 < \min_{h \in H} \|(x, y) - h\| \leq r_0, \\ 1, & \min_{h \in H} \|(x, y) - h\| > r_0. \end{cases}$$

Можно видеть, что, чем ближе объект находится к препятствию, тем медленнее он движется.

Требуется найти маршрут из точки $S_1(0.25; 0.3)$ в точку $F_1(1.75; 0.8)$.

Начальная и конечная точки расположены в зонах влияния барьеров. Следовательно, для построения оптимального по времени маршрута от S_1 до F_1 необходимо найти траекторию, обеспечивающую баланс между кратчайшим расстоянием и минимальным влиянием барьеров.

Для решения задачи применяется алгоритм 2 (ОГМ). В результате построена траектория из S_1 в F_1 длиной 1.61, содержащая 23 точки (отмечены квадратами на рис. 1):

$$(0.25; 0.3); (0.56; 0.3); (0.62; 0.32); (0.68; 0.34); (0.74; 0.36); (0.8; 0.38); (0.84; 0.4); (0.88; 0.42); (0.92; 0.44); (0.96; 0.46); (1.02; 0.5); (1.08; 0.54); (1.1; 0.56); (1.16; 0.6); (1.22; 0.64); (1.26; 0.66); (1.3; 0.68); (1.34; 0.7); (1.38; 0.72); (1.44; 0.74); (1.5; 0.76); (1.56; 0.78); (1.75; 0.8).$$

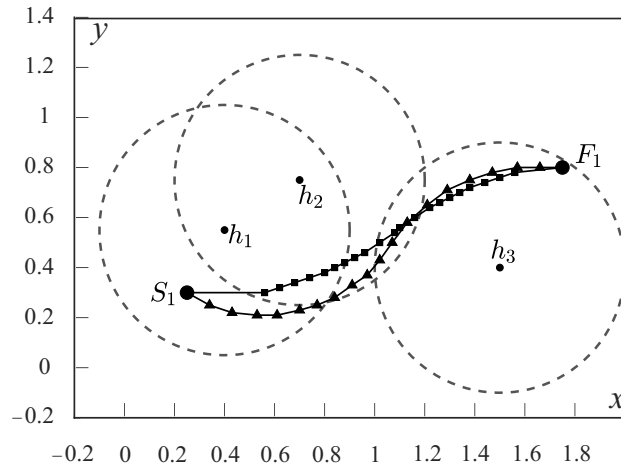


Рис. 1. Маршрут объекта, полученный методами ОГМ (квадраты) и CFM (треугольники).

Т а б л и ц а 1

Сравнение результатов в примере 1

Метод	Длина маршрута	Время расчета
Метод ОГМ	1.61	3.23 с
Метод CFM	1.72	42.53 с

Для сравнения использован метод CFM из [31] со следующими параметрами: количество узлов на маршруте — 20; область влияния сил отталкивания — 0.5; шаг по времени — 0.01; скалярный параметр отталкивания — 0.1139 скалярный параметр динамики — 0.0454. Длина полученного маршрута составила 1.72. Из табл. 1 можно видеть, что время работы для метода ОГМ в 13.2 раза меньше, чем для метода CFM, при этом найден более короткий маршрут.

Пример 2. Рассматривается задача о поиске маршрута движения объекта из точки $S_1(0; 0)$ в $F_1(100; 100)$ в однородной среде с подвижными барьерами.

Функция $f(t, x, y)$ задается формулой

$$f(t, x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in H(t), \\ 1, & (x, y) \notin H(t). \end{cases}$$

Имеются 4 подвижных барьера $H_i(t)$, $i = \overline{1, 4}$, каждый из которых представляет собой квадрат со стороной 10. Барьеры движутся поступательно таким образом, что их центры перемещаются прямолинейно из начальных положений Z_i , $i = \overline{1, 4}$, в точку $U(50; 50)$, где $Z_1(15; 15)$, $Z_2(85; 15)$, $Z_3(85; 85)$, $Z_4(15; 85)$. Тогда множество барьеров в момент времени $t \leq 50$

можно записать как $H(t) = \bigcup_{i=1}^4 H_i(t)$, где

$$\begin{aligned} H_1(t) &= \left\{ (x, y) : |x - (0.5\sqrt{2}t + 15)| \leq 10, |y - (0.5\sqrt{2}t + 15)| \leq 10 \right\}, \\ H_2(t) &= \left\{ (x, y) : |x - (-0.5\sqrt{2}t + 85)| \leq 10, |y - (0.5\sqrt{2}t + 15)| \leq 10 \right\}, \\ H_3(t) &= \left\{ (x, y) : |x - (-0.5\sqrt{2}t + 85)| \leq 10, |y - (-0.5\sqrt{2}t + 85)| \leq 10 \right\}, \\ H_4(t) &= \left\{ (x, y) : |x - (0.5\sqrt{2}t + 15)| \leq 10, |y - (-0.5\sqrt{2}t + 85)| \leq 10 \right\}. \end{aligned}$$

Для поиска маршрута применяется алгоритм 2 (ОГМ). Очевидно, что при отсутствии барьеров оптимальной траекторией будет отрезок S_1F_1 .

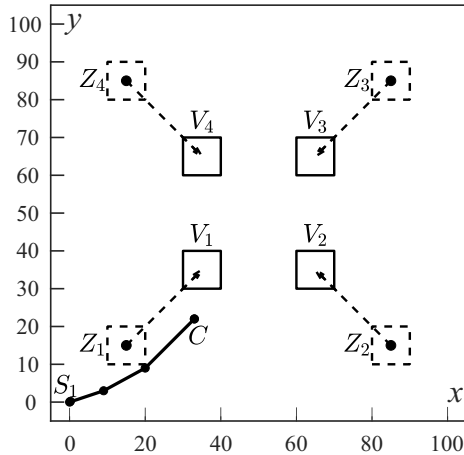


Рис. 2. Маршрут движения объекта на интервале времени 0-20 (секунд).

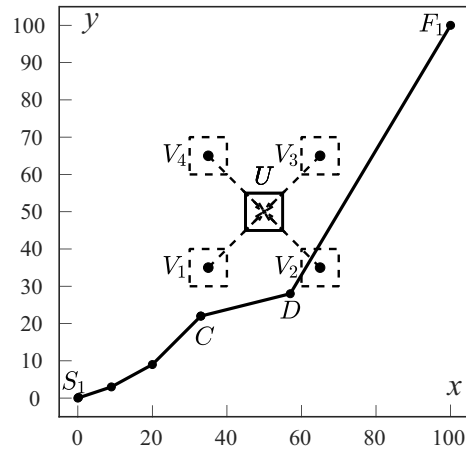


Рис. 3. Маршрут движения объекта на интервале времени 20-40 (секунд).

На промежутке времени $[0, 40]$ барьеры движутся следующим образом: центр барьера H_1 перемещается в точку $V_1(35; 35)$, H_2 — в $V_2(65; 35)$, H_3 — в $V_3(65; 65)$, H_4 — в $V_4(35; 65)$. Объект отклоняется от прямолинейной траектории и движется в точку $C(33; 22)$, чтобы избежать столкновения с барьером H_1 (рис. 2).

На следующем промежутке времени $[40, 65]$ барьеры H_i , $i = \overline{1, 4}$, продолжают движение к точке U . При прямолинейном движении объекта в точку F_1 происходит столкновение с барьером H_2 , поэтому траектория корректируется и объект приходит в точку $D(57; 28)$, избегая препятствий.

На промежутке времени $[65, 149]$ барьеры остаются в точке U и не влияют на движение объекта, поэтому он движется прямолинейно из точки D в точку F_1 . Время достижения цели $t^* = 149$ (рис. 3).

Пример 3. Рассматривается задача о поиске маршрутов движения без столкновений для трех объектов: O_1 перемещается из точки $S_1(0; 0)$ в $F_1(100; 100)$, O_2 из $S_2(99; 1)$ в $F_2(0; 100)$, а O_3 из $S_3(1; 99)$ в $F_3(100; 0)$. Среда является статической, барьеров нет, объекты стартуют одновременно.

Задача решается алгоритмом 3 (ОГМН) с параметрами $t_0 = 0$, $\Delta t = 5$ и $N_f = 0$ (без прогноза).

На промежутке времени $[0, 70]$ секунд нет никаких барьеров или столкновений, поэтому

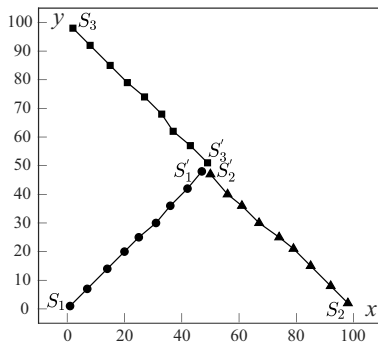


Рис. 4. Маршруты объектов при $t \in [0, 70]$ секунд.

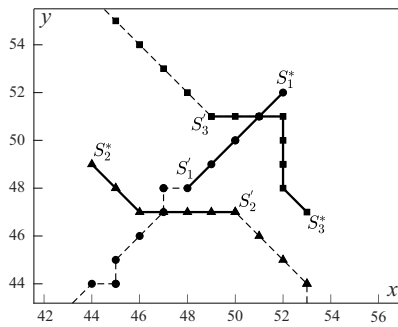


Рис. 5. Маршруты объектов при $t \in [70, 85]$ секунд.

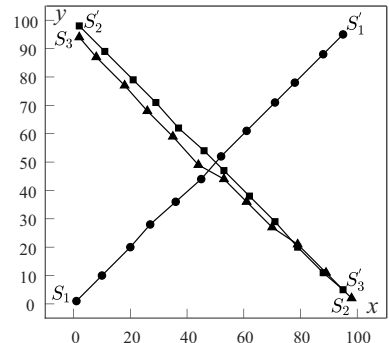


Рис. 6. Итоговые маршруты объектов.

Примечание — На рис. 4-6 для траекторий используются следующие маркеры: O_1 — круги, O_2 — квадраты, O_3 — треугольники.

объекты движутся прямолинейно и приходят в точки $S'_1(48; 48)$, $S'_2(50; 47)$ и $S'_3(49; 51)$ соответственно (рис. 4). Продолжение движения приводит к столкновению.

На рис. 5 можно видеть, что перед O_1 барьеры отсутствуют, поэтому объект продолжает прямолинейное движение к точке $S_1^*(57; 57)$. Его траектория между S'_1 до точки S_1^* рассматривается как динамический барьер для O_2 и O_3 . Согласно результатам работы алгоритма оба объекта выбирают движение влево и достигают точек $S_2^*(44; 49)$ и $S_3^*(53; 47)$ соответственно. После этого все объекты следуют прямолинейно к своим конечным точкам (рис. 6).

Пример 4. Рассматривается задача поиска маршрутов движения 8 объектов в статической среде без барьеров. Объекты O_i начинают движение одновременно из точек S_i в F_i согласно табл. 2.

Т а б л и ц а 2

Начальные и целевые точки объектов

O_1	$S_1(0; 30)$	$F_1(30; 0)$	O_5	$S_5(40; 50)$	$F_5(45; 0)$
O_2	$S_2(50; 0)$	$F_2(0; 50)$	O_6	$S_6(50; 31)$	$F_6(0; 31)$
O_3	$S_3(20; 0)$	$F_3(50; 30)$	O_7	$S_7(18; 0)$	$F_7(1; 50)$
O_4	$S_4(20; 50)$	$F_4(40; 0)$	O_8	$S_8(5; 50)$	$F_8(15; 0)$

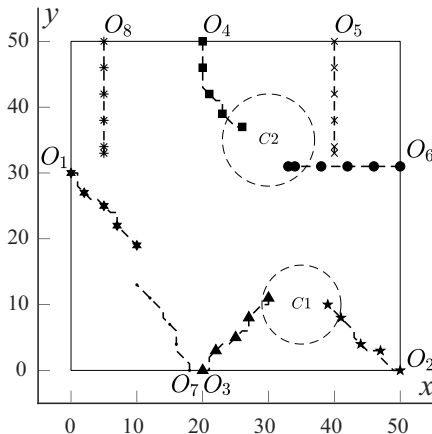
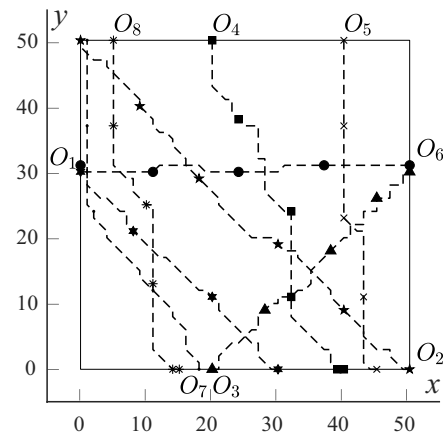
Для решения задачи применяется алгоритм 3 (ОГМН) с параметрами $\Delta t = 2$ (секунд) и горизонтом прогнозирования $N_f = 2$. Отметим, что каждый объект рассматривает другие объекты как динамические барьеры.

На рис. 7 показаны траектории объектов для $t \in [0, 18]$ секунд. При $t = 17$ объекты достигают следующих позиций:

$$\begin{aligned} O_1 &- (10; 19), O_2 - (39; 10), O_3 (30; 11), O_4 - (26; 37), \\ O_5 &- (40; 33), O_6 - (33; 31), O_7 - (10; 13), O_8 - (5; 33). \end{aligned}$$

При продолжении движения по прямолинейным траекториям возникают две потенциальные зоны столкновений (рис. 9): зона C_1 — столкновение между O_2 и O_3 в позиции (34; 14) и зона C_2 — столкновение между O_4 и O_6 в позиции (26; 31).

На рис. 8 показаны траектории объектов для $t \in [18, 30]$ секунд. Можно видеть, что объект O_3 сместился вправо для избежания столкновения с O_2 в зоне C_1 , а объект O_6 сместился влево для избежания столкновения с O_4 в зоне C_2 . Таким образом, при горизонте прогнозирования $2\Delta t$ объекты успешно избегают столкновений. На рис. 10 показаны итоговые маршруты движения всех объектов без столкновений.

Рис. 7. Маршруты для $t = [0, 18]$ секунд.Рис. 8. Маршруты для $t = [18, 30]$ секунд.

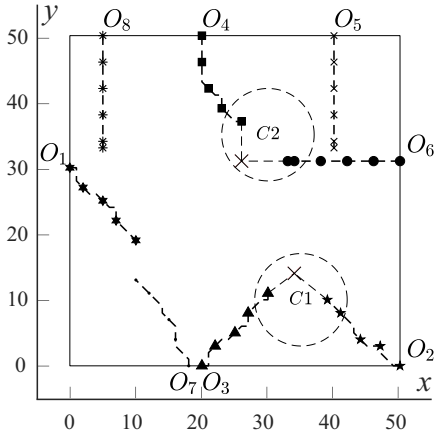


Рис. 9. Столкновение между объектами без прогноза в областях C_1, C_2 .

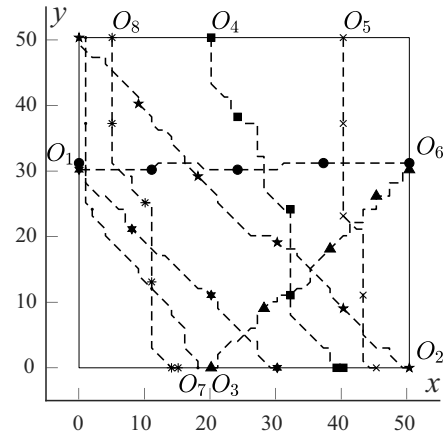


Рис. 10. Итоговые маршруты объектов.

Примечание — На рис. 7–10 для траекторий используются следующие маркеры: O_1 — шестиугольная звезда, O_2 — звезда, O_3 — треугольник, O_4 — квадрат, O_5 — крест, O_6 — круг, O_7 — пунктирная линия, O_8 — снежинка.

Т а б л и ц а 3

Сравнение длины маршрутов

	Метод ОГМН		Метод PRIMAL
	8 направлений	4 направления	
O_1	46.52	60	62
O_2	76.56	100	106
O_3	51.79	60	60
O_4	61.21	70	70
O_5	53.24	59	55
O_6	51.65	54	52
O_7	57.04	69	114
O_8	55.89	70	60
Сумма	453.9	542	579

В табл. 3 представлены длина маршрута и время прохождения для каждого объекта. Для сравнения использован метод PRIMAL [32]. В данном методе объекты могут двигаться только в четырех направлениях. Для объективного сравнения ОГМ также был протестирован в режиме в четырех направлений. Из табл. 3 видно, что суммарная длина маршрута для метода ОГМН существенно меньше. Найденные маршруты показаны на рис. 11, 12.

Пример 5. Выполним сравнительный анализ работы методов ОГМН, PRIMAL и DHS (Distributed, Heuristic and Communication) (см. [32; 33]) по следующим показателям: коэффициент успешности и среднее время достижения цели.

Коэффициент успешности — это отношение количества объектов, достигших конечной точки, к общему количеству объектов.

Среднее время достижения — это среднее время, затраченное объектом на достижение конечной точки. Данный параметр рассчитывается как среднее время прохождения всех успешно завершивших маршрут объектов.

Рассмотрим две двумерные среды размером 40×40 и 80×80 . Плотность барьеров составляет 30%, а их расположение генерируется случайным образом. Количество движущихся

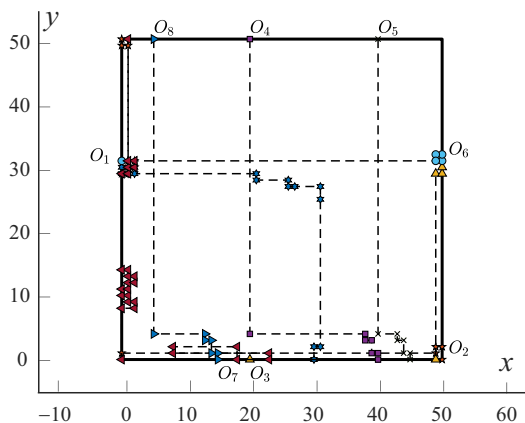


Рис. 11. Маршруты объектов, полученные методом PRIMAL.

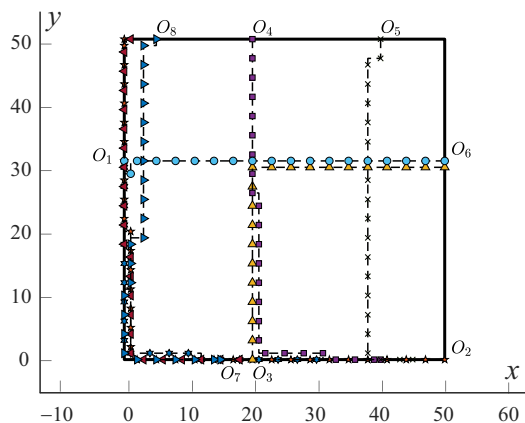


Рис. 12. Маршруты объектов, полученные методом распространения световой волны (4 направления).

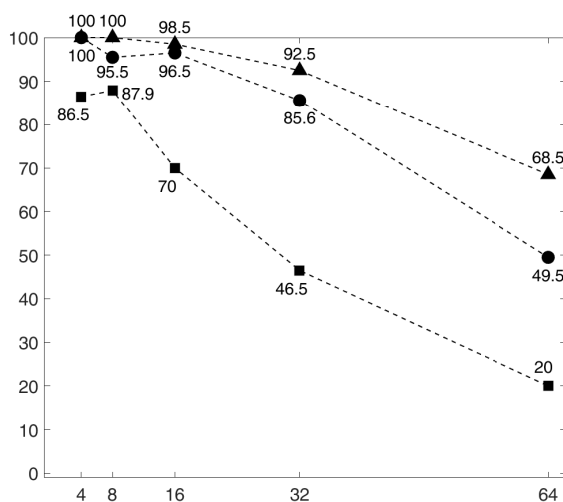
Т а б л и ц а 4

Среднее время достижения целевой точки

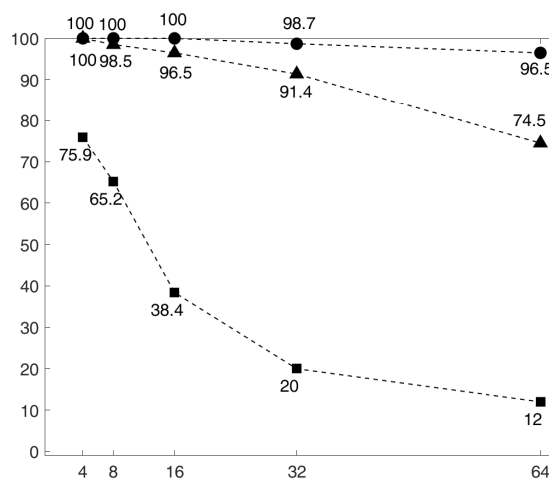
Количество	Среда 40 × 40			Среда 80 × 80		
	ОГМН	ДНС	PRIMAL	ОГМН	ДНС	PRIMAL
4	43.41	52.33	79.08	73.72	96.72	134.86
8	44.51	63.90	76.53	74.52	109.24	153.20
16	49.70	79.63	107.14	76.53	122.54	180.74
32	52.44	100.10	155.21	82.33	138.32	250.07
64	55.39	147.26	170.48	93.91	163.50	321.63

объектов: 4, 8, 16, 32 и 64, их стартовые и целевые точки также генерируются случайным образом.

Результаты расчетов представлены в табл. 4 и на рис. 12. Из рис. 13 видно, что с увели-



Среда 40 × 40



Среда 80 × 80

Рис. 13. Коэффициент успешности в методах ОГМН (треугольник), ДНС (круг) и PRIMAL (квадрат).

чением размера среды увеличивается вероятность успеха достижения целевой точки у всех методов. Кроме того, метод ОГМН показывает большую вероятность достижения конечной точки, чем методы PRIMAL и DHC. Для 64 объектов в среде 40×40 эффективность метода ОГМН составила 65.2%, в то время методов PRIMAL и DHC — 20% и 49%, соответственно. В среде 80×80 метод ОГМН показал почти максимальную эффективность 96.5%, а методы PRIMAL и DHC показали лишь 12% и 74.5%. Кроме того, в работе [33] отмечается, что в некоторых случаях при большом количестве объектов (32 или 64) и среде небольшого размера метод DHC может не найти решение, даже если оно существует.

Из табл. 4 можно видеть, что в методе ОГМН среднее время достижения меньше, чем в методе PRIMAL, на 50% и методе DHC — на 25%. Таким образом, метод ОГМН существенно превзошел PRIMAL и DHC по всем параметрам.

Заключение

Поводя итог выполненных исследований, отметим, что в статье рассмотрена задача нахождения быстрых маршрутов в динамической среде с подвижными препятствиями, для решения которой предложен новый подход, основанный на численном решении уравнения эйконала и модифицированном методе быстрого марша. Разработаны три базовых алгоритма, для одного из которых (ОГМ) доказана сходимости к вязкостному решению.

Выполнены расчеты, которые показали, что разработанные алгоритмы позволяют не только находить траектории, минимизирующие время движения для одиночных объектов, но и успешно координировать перемещения нескольких объектов, предотвращая взаимные столкновения за счет итеративного перепланирования и прогнозирования. Результаты расчетов демонстрируют преимущество предложенного подхода по сравнению с такими известными методами, как CFM, PRIMAL и DHC, по ключевым показателям: длине построенных маршрутов, времени расчета и вероятности успешного достижения цели. В частности, удалось значительно уменьшить суммарное время движения объектов с одновременным повышением надежности в сложных сценариях с большим количеством объектов и препятствий.

Дальнейшие исследования, на наш взгляд, следует направить на адаптацию полученных результатов для трехмерной постановки, что актуально для задач воздушной и подводной навигации. Кроме того, представляет интерес учет ограничений на угол поворота объекта, наличия у него массы и/или возможности изменения скорости движения. Наконец, в отдаленной перспективе можно будет в рамках предложенного подхода рассмотреть не только динамику, но и кинематику движения объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Teotia V.S.** Impact of delivery speed on customer satisfaction in online shopping: a focus on quick commerce // *Inter. J. Sci. Res. Engin. Manag. (IJSREM)*. 2025. Vol. 9, no. 5. P. 1–9. <https://doi.org/10.55041/IJSREM49149>
2. **Demir E., Syntetos A., Van Woensel T.** Last mile logistics: Research trends and needs // *IMA J. Manag. Math.* 2022. Vol. 33, no. 4. P. 549–561. <https://doi.org/10.1093/imaman/dpac006>
3. **Gutin G., Punnen A.P.** The traveling salesman problem and its variations. Ser. Combinatorial Optimization (COOP). Vol. 12. NY: Springer, 2007. 830 p. <https://doi.org/10.1007/b101971>
4. **Гимади Э.Х., Хачай М.Ю.** Экстремальные задачи на множествах перестановок. Екатеринбург: Изд-во УМЦ УПИ, 2016. 220 с.
5. **Beresneva E., Avdoshin S.** Analysis of mathematical formulations of capacitated vehicle routing problem and methods for their solution // *Proc. Inst. System Programm. RAS*. 2018. Vol. 30, no. 3. P. 233–250. [https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2018-30\(3\)-17](https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2018-30(3)-17)
6. **Youakim D., Ridao P.** Motion planning survey for autonomous mobile manipulators underwater manipulator case study // *Robot. Auton. Syst.* 2018. Vol. 107. P. 20–44. <https://doi.org/10.1016/j.robot.2018.05.006>

7. **Shin Y. W., Abebe M., Noh Y., Lee S., Lee I., Kim D., Bae J., Kim K.C.** Near-optimal weather routing by using improved A* algorithm // *Appl. Sci.* 2020. Vol. 10, no. 17. Art. no. 6010. <https://doi.org/10.3390/app10176010>
8. **Naderi K., Rajamaki J., Hamalainen P.** RT-RRT*: a real-time path planning algorithm based on RRT* // *Proc. of the 8th ACM SIGGRAPH Conf. Motion in Games (MIG'15)*. 2015. P. 113–118. <https://doi.org/10.1145/2822013.2822036>
9. **Dijkstra E.W.** A note on two problems in connexion with graphs // *Numer. Math.* 1959. Vol. 1, no. 1. P. 269–271. <https://doi.org/10.1007/BF01386390>
10. **Floyd R.W.** Algorithm 97: Shortest path // *Commun. ACM.* 1962. Vol. 5, no. 6. P. 345.
11. **Matthews J.** Basic A* pathfinding made simple // *AI Game Programming Wisdom*. Boston: Charles River Media, 2002. P. 105–113.
12. **Stentz A.** Optimal and efficient path planning for partially-known environments // *Proc. 1994 IEEE Inter. Conf. Robotics and Automation*. San Diego, 1994. P. 3310–3317. <https://doi.org/10.1109/ROBOT.1994.351061>
13. **Injarapu V. A. S. H. H., Gawre S.K.** A survey of autonomous mobile robot path planning approaches // *Proc. Inter. Conf. Recent innovations in signal processing and embedded systems (RISE 2017)*. Bhopal, 2017. P. 624–628. <https://doi.org/10.1109/RISE.2017.8378228>
14. **Pennino S., Gaglione S., Innac A., Piscopo V., Scamardella A.** Development of a new ship adaptive weather routing model based on seakeeping analysis and optimization // *J. Mar. Sci. Eng.* 2020. Vol. 8, no. 4. P. 270. <https://doi.org/10.3390/jmse8040270>
15. **Vemula A., Muelling K., Oh J.** Path planning in dynamic environments with adaptive dimensionality // *Proc. Ninth Internat. Symp. on Combinatorial Search (SoCS 2016)*. 2016. Vol. 9, no. 1. P. 107–116. <https://doi.org/10.1609/socs.v7i1.18386>
16. **Сарапулов А. В.** Методы решения задачи построения траектории для беспилотного летательного аппарата в динамической среде // *Ракетно-космическая техника*. 2017. Т. 1, №2. С. 92–99.
17. **Ulyanov S., Bychkov I., Maksimkin N.** Event-based path-planning and path-following in unknown environments for underactuated autonomous underwater vehicles // *Appl. Sci.* 2020. Vol. 10, no. 21. Art. no. 7894. <https://doi.org/10.3390/app10217894>
18. **Zheng H., Xu W., Ma D., Qu F.** Dynamic rolling horizon scheduling of waterborne AGVs for inter terminal transportation: Mathematical modeling and heuristic solution // *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*. 2022. Vol. 23, no. 4. P. 3853–3865. <https://doi.org/10.1109/TITS.2021.3102998>
19. **Liu C., Chu X., Wu W., Li S., He Z., Zheng M.** Human-machine cooperation research for navigation of maritime autonomous surface ships: A review and consideration // *Ocean Engineering*. 2022. Vol. 246. Art. no. 110555. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.110555>
20. **He Z., Liu C., Chu X., Negenborn R. R., Wu Q.** Dynamic anti-collision A-star algorithm for multi-ship encounter situations // *Appl. Ocean Res.* 2022. Vol. 118. Art. no. 102995. <https://doi.org/10.1016/j.apor.2021.102995>
21. **Ушаков В.Н., Лавров Н.Г., Ушаков А.В.** Конструирование решений в задаче о сближении стационарной управляемой системы // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*. 2014. Т. 20, № 4. С. 277–286.
22. **Ушаков В.Н., Ершов А.А., Матвийчук А.Р., Ушаков А.В.** Некоторые задачи сближения нелинейных управляемых систем в фиксированный момент времени // *Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. гос. ун-та*. 2023. Т. 62. С. 125–155. <https://doi.org/10.35634/2226-3594-2023-62-09>
23. **Ушаков В.Н., Ершов А.А.** К конструированию решений игровой задачи с фиксированным моментом окончания // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*. 2024. Т. 3. С. 255–273. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2024-30-3-255-273>
24. **Самохина М. А., Галяев А. А.** Построение карты локально оптимальных путей управляемого подвижного объекта в конфликтной среде при переходе из точки в точку // *Проблемы управления*. 2024. Т. 1. С. 90–102. <https://doi.org/10.25728/pu.2024.1.8>
25. **Kunz T., Hutchinson S.** Real-time path planning for a robot arm in changing environments // *Proc. IEEE/RSJ Inter. Conf. Intelligent Robots and Systems (IROS'10)*. Taipei, 2010. P. 5906–5911. <https://doi.org/10.1109/IROS.2010.5653275>
26. **Казаков А.Л., Лемперт А.А.** Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике // *Автоматика и телемеханика*. 2011. № 7. С. 50–57.

27. Бухаров Д.С., Казаков А.Л. Программная система “ВИГОЛТ” для решения задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике // Вычисл. методы и программирование. 2012. Т. 13, №3. С. 65–74.
28. Казаков А.Л., Лемперт А.А. О построении маршрутов в динамической среде с использованием решений уравнения эйконала // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. гос. ун-та. 2021. Т. 82, №6. С. 3–13. <https://doi.org/10.35634/2226-3594-2021-58-04>
29. Фейнман Р. П., Лейтон Р. Б., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Излучение. Волны. Кванты. М.: Эдиториал УРСС, 2004. Т. 3. 240 с.
30. Боровских А. В. Двумерное уравнение эйконала // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, №. 5. С. 993–1018.
31. Nuptych M., Rock S. Real-time path planning in dynamic environments for unmanned aerial vehicles using the curve-shortening flow method // Inter. J. Adv. Robotic Syst. 2021. Vol. 18, no. 6. P. 1–15. <https://doi.org/10.1177/1729881420968687>
32. Sartoretti G., Kerr J., Shi Y., Wagner G., Kumar T. K.S., Koenig S., Choset H. PRIMAL: Pathfinding via Reinforcement and Imitation Multi-Agent Learning // IEEE Robotics and Autom. Letters. 2018. Vol. 3, no. 4. P. 2378–2385. <https://doi.org/10.1109/LRA.2018.2859630>
33. Ma Z., Luo Y., Ma H. Distributed heuristic multi-agent path finding with communication // Proc. 2021 IEEE Inter. Conf. Robotics and Automation (ICRA). Xi’an, 2021. P. 8699–8705. <https://doi.org/10.1109/ICRA48506.2021.9560748>

Поступила 15.10.2025

После доработки 21.10.2025

Принята к публикации 27.10.2025

Казаков Александр Леонидович
д-р физ.-мат. наук, главный науч. сотрудник
Институт динамики систем и теории управления
имени В. М. Матросова СО РАН
г. Иркутск
e-mail: kazakov@icc.ru

Лемперт Анна Ананьевна
канд. физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт динамики систем и теории управления
имени В. М. Матросова СО РАН
г. Иркутск
e-mail: lempert@icc.ru

Чан Туан Вьет
аспирант
Иркутский национальный исследовательский технический университет
г. Иркутск
e-mail: ttviet@ictu.edu.vn

REFERENCES

1. Teotia V.S. Impact of delivery speed on customer satisfaction in online shopping: a focus on quick commerce. *Inter. J. Sci. Res. Engin. Manag. (IJSREM)*, 2025, vol. 9, no. 5, pp. 1–9. <https://doi.org/10.55041/IJSREM49149>
2. Demir E., Syntetos A., Van Woensel T. Last mile logistics: research trends and needs. *IMA J. Manag. Math.*, 2022, vol. 33, no. 4, pp. 549–561. <https://doi.org/10.1093/imaman/dpac006>
3. Gutin G., Punnen A.P. *The traveling salesman problem and its variations*. Ser. Combinatorial Optimization (COOP). Vol. 12. NY, Springer, 2007, 830 p. <https://doi.org/10.1007/b101971>
4. Gimadi E.Kh., Khachai M.Yu. *Ekstremal’nyye zadachi na mnozhestvakh perestanovok* [Extremal problems on permutation sets]. Yekaterinburg, Izd-vo UMTS UPI, 2016, 220 p. ISBN: 978-8-8295-0497-7.
5. Beresneva E., Avdoshin S. Analysis of mathematical formulations of capacitated vehicle routing problem and methods for their solution. *Proc. Inst. System Programm. RAS*, 2018, vol. 30, no. 3, pp. 233–250. [https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2018-30\(3\)-17](https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2018-30(3)-17)

6. Youakim D., Ridao P. Motion planning survey for autonomous mobile manipulators underwater manipulator case study. *Robot. Auton. Syst.*, 2018, vol. 107, pp. 20–44.
<https://doi.org/10.1016/j.robot.2018.05.006>
7. Shin Y.W., Abebe M., Noh Y., Lee S., Lee I., Kim D., Bae J., Kim K.C. Near-optimal weather routing by using improved A* algorithm. *Appl. Sci.*, 2020, vol. 10, no. 17, art. no. 6010.
<https://doi.org/10.3390/app10176010>
8. Naderi K., Rajamaki J., Hamalainen P. RT-RRT*: a real-time path planning algorithm based on RRT*. In: *Proc. of the 8th ACM SIGGRAPH Conf. Motion in Games (MIG'15)*, 2015, pp. 113–118.
<https://doi.org/10.1145/2822013.2822036>
9. Dijkstra E.W. A note on two problems in connexion with graphs. *Numer. Math.*, 1959, vol. 1, no. 1, pp. 269–271. <https://doi.org/10.1007/BF01386390>
10. Floyd R.W. Algorithm 97: shortest path. *Commun. ACM*, 1962, vol. 5, no. 6, p. 345.
<https://doi.org/10.1145/367766.368168>
11. Matthews J. Basic A* pathfinding made simple. In: Rabin S. (ed.) *AI game programming wisdom*. Boston, Charles River Media, 2002, pp. 105–113.
12. Stentz A. Optimal and efficient path planning for partially-known environments. In: *Proc. 1994 IEEE Inter. Conf. Robotics and Automation*, San Diego, CA, USA, 1994, pp. 3310–3317.
<https://doi.org/10.1109/ROBOT.1994.351061>
13. Injarapu V.A.S.H.H., Gawre S.K. A survey of autonomous mobile robot path planning approaches. In: *Proc. Inter. Conf. Recent innovations in signal processing and embedded systems (RISE 2017)*, Bhopal, India, 2017, pp. 624–628. <https://doi.org/10.1109/RISE.2017.8378228>
14. Pennino S., Gaglione S., Innac A., Piscopo V., Scamardella A. Development of a new ship adaptive weather routing model based on seakeeping analysis and optimization. *J. Mar. Sci. Eng.*, 2020, vol. 8, no. 4, pp. 270. <https://doi.org/10.3390/jmse8040270>
15. Vemula A., Muelling K., Oh J. Path planning in dynamic environments with adaptive dimensionality. In: *Proc. Ninth Internat. Symp. on Combinatorial Search (SoCS'16)*, NY, 2016, vol. 9, no. 1, pp. 107–116.
<https://doi.org/10.1609/socs.v7i1.18386>
16. Sarapulov A.V. Methods for solving the problem of constructing a trajectory for an unmanned aerial vehicle in a dynamic environment. *Raketno-kosmicheskaya Tekhnika*, 2017, vol. 1, no. 2. pp. 92–99 (in Russian).
17. Ulyanov S., Bychkov I., Maksimkin N. Event-based path-planning and path-following in unknown environments for underactuated autonomous underwater vehicles. *Appl. Sci.*, 2020, vol. 10, no. 21, art. no. 7894. <https://doi.org/10.3390/app10217894>
18. Zheng H., Xu W., Ma D., Qu F. Dynamic rolling horizon scheduling of waterborne AGVs for inter terminal transportation: mathematical modeling and heuristic solution. In: *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*. 2022, vol. 23, no. 4, pp. 3853–3865.
<https://doi.org/10.1109/TITS.2021.3102998>
19. Liu C., Chu X., Wu W., Li S., He Z., Zheng M. Human–machine cooperation research for navigation of maritime autonomous surface ships: A review and consideration. *Ocean Eng.*, 2022, vol. 246, art. no. 110555. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.110555>
20. He Z., Liu C., Chu X., Negenborn R.R., Wu Q. Dynamic anti-collision A-star algorithm for multi-ship encounter situations. *Appl. Ocean Res.*, 2022, vol. 118, art. no. 102995.
<https://doi.org/10.1016/j.apor.2021.102995>
21. Ushakov V.N., Lavrov N.G., Ushakov A.V. Construction of solutions in an approach problem of a stationary control system. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2014, vol. 20, no. 4, pp. 277–286 (in Russian).
22. Ushakov V.N., Ershov A.A., Matviychuk A.R., Ushakov A.V. Some problems of target approach for nonlinear control system at a fixed time moment. *Izv. Inst. Mat. i Inf. Udm. Gos. Univ.*, 2023, vol. 62, pp. 125–155 (in Russian). <https://doi.org/10.35634/2226-3594-2023-62-09>
23. Ushakov V.N., Ershov A.A. On the construction of solutions to a game problem with a fixed end time. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 3, pp. 255–273 (in Russian).
<https://doi.org/10.21538/0134-4889-2024-30-3-255-273>
24. Samokhina M.A., Galyaev A.A. Constructing a map of locally optimal paths for a controlled moving object in a threat environment. *Contr. Sci.*, 2014, no. 1, pp. 75–85. <https://doi.org/10.25728/cs.2024.1.8>
25. Kunz T., Hutchinson S. Real-time path planning for a robot arm in changing environments. In: *Proc. IEEE/RSJ Inter. Conf. Intelligent Robots and Systems (IROS'10)*, Taipei, Taiwan, 2010, pp. 5906–5911.
<https://doi.org/10.1109/IROS.2010.5653275>

26. Kazakov A.L., Lempert A.A. An approach to optimization in transport logistics. *Autom. Remote Control*, 2011, vol. 72, no. 7, pp. 1398–1404. <https://doi.org/10.1134/S0005117911070071>
27. Bukharov D.S., Kazakov A.L. “VIGOLT” system for solving transport logistics optimization problems. *Vych. Met. Prog.*, 2012, vol. 13, no. 3, pp. 65–74 (in Russian).
28. Kazakov A.L., Lempert A.A. On the route construction in changing environments using solutions of the eikonal equation. *Izv. Inst. Mat. i Inf. Udm. Gos. Univ.*, 2021, vol. 58, pp. 59–72. <https://doi.org/10.35634/2226-3594-2021-58-04>
29. Feynman R.P., Leighton R.B., Sands M. *Feynman lectures on physics*. Vol. 3. Addison Wesley, 1971, 379 p. ISBN-10: 0201021188. Translated to Russian under the title *Feinmanovskie lektsii po fizike. Tom 3. Izluchenie. Volny. Kvanty*, Moscow, Editorial URSS, 2004, 240 p.
30. Borovskikh A.V. The two-dimensional eikonal equation. *Sib. Math. J.*, 2006, vol. 47, no. 5, pp. 813–834. <https://doi.org/10.1007/s11202-006-0091-9>
31. Huptych M., Röck S. Real-time path planning in dynamic environments for unmanned aerial vehicles using the curve-shortening flow method. *Inter. J. Adv. Robotic Syst.*, 2021, vol. 18, no. 6, pp. 1–16. <https://doi.org/10.1177/1729881420968687>
32. Sartoretti G., Kerr J., Shi Y., Wagner G., Kumar T.K.S., Koenig S., Choset H. PRIMAL: pathfinding via reinforcement and imitation multi-agent learning. In: *IEEE Robotics and Autom. Letters*, 2019, vol. 4, no. 3, pp. 2378–2385. <https://doi.org/10.1109/LRA.2019.2903261>
33. Ma Z., Luo Y., Ma H. Distributed heuristic multi-agent path finding with communication. In: *Proc. 2021 IEEE Inter. Conf. Robotics and Automation (ICRA)*, Xi'an, China, 2021, pp. 8699–8705. <https://doi.org/10.1109/ICRA48506.2021.9560748>

Received October 15, 2025

Revised October 21, 2025

Accepted October 27, 2025

Funding Agency: A.A. Lempert’s research is supported by the Russian Science Foundation, project no. 24-21-00264, <https://rscf.ru/project/24-21-00264>.

Aleksandr Leonidovich Kazakov, Dr. Phys.-Math. Sci., Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 664033 Russia, e-mail: kazakov@icc.ru.

Anna Ananievna Lempert, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 664033 Russia, e-mail: lempert@icc.ru.

Tuan Viet Tran, Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, 664074 Russia, e-mail: ttviet@ictu.edu.vn.

Cite this article as: A. L. Kazakov, A. A. Lempert, T. V. Tran. On constructing the fastest collision-free routes in dynamic environments with moving obstacles. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 4, pp. 115–131.