

УДК 517.51

ОБ ОЦЕНКАХ n -ЧЛЕННЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА¹

Г. АКИШЕВ

В статье рассматриваются пространство Лоренца $L_{q,\tau}(\mathbb{T}^m)$ периодических функций m переменных и класс $W_{q,\tau}^{a,b(\cdot),\overline{\tau}}$ для $1 < q, \tau < \infty$, $a > 0$, $b(t)$ — слабоколеблющаяся функция на $[1, \infty)$. $W_{q,\tau}^{a,b(\cdot),\overline{\tau}}$ — класс из всех функций $f \in L_{q,\tau}(\mathbb{T}^m)$, для которых $S_n^{(\overline{\tau})}(f, \overline{x})$ — частичная сумма по ступенчатому гиперболическому кресту ряда Фурье — по норме $L_{q,\tau}(\mathbb{T}^m)$ сходится со скоростью $2^{-na}b(2^n)$ при $n \rightarrow \infty$. Основным результатом является точный порядок наилучших n -членных тригонометрических приближений функций из класса $W_{q,\tau_1}^{a,b(\cdot),\overline{\tau}}$ по норме пространства $L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ в случае $1 < q < p \leq 2$ при некоторых соотношениях между параметрами a , τ_1 , τ_2 . Результат доказан конструктивным методом.

Ключевые слова: пространство Лоренца, тригонометрическая система, наилучшее n -членное приближение, конструктивный метод.

G. Akishev. On estimates of n -term approximations of functions in Lorentz space.

The article considers the Lorentz space $L_{q,\tau}(\mathbb{T}^m)$ of periodic functions of m variables and the class $W_{q,\tau}^{a,b(\cdot),\overline{\tau}}$ for $1 < q, \tau < \infty$, $a > 0$, $b(t)$ is a slowly varying function on $[1, \infty)$. $W_{q,\tau}^{a,b(\cdot),\overline{\tau}}$ the class of all functions $f \in L_{q,\tau}(\mathbb{T}^m)$ for which $S_n^{(\overline{\tau})}(f, \overline{x})$ the partial sum over the step hyperbolic cross of the Fourier series in the norm of $L_{q,\tau}(\mathbb{T}^m)$ converges at rate $2^{-na}b(2^n)$ as $n \rightarrow \infty$. The main result is the exact order of the best n -term trigonometric approximations of functions from the class $W_{q,\tau_1}^{a,b(\cdot),\overline{\tau}}$ in the norm of the space $L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ in the case $1 < q < p \leq 2$, for some relations between the parameters a , τ_1 , τ_2 . The result is proved by a constructive method.

Keywords: Lorentz space, trigonometric system, best n -term approximation, constructive method.

MSC: 42A10, 41A46

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-4-10-25

Введение

Пусть \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R} — множества натуральных, целых, вещественных чисел соответственно и $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; \mathbb{R}^m — m -мерное евклидово пространство точек $\overline{x} = (x_1, \dots, x_m)$ с вещественными координатами; $\mathbb{T}^m = [0, 2\pi)^m$ и $\mathbb{I}^m = [0, 1)^m$ — m -мерный куб.

Через $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ обозначается пространство Лоренца всех вещественнозначных измеримых по Лебегу функций f , которые имеют 2π -период по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|_{p,\tau} = \left[\frac{\tau}{p} \int_0^1 (f^*(t))^\tau t^{\frac{\tau}{p}-1} dt \right]^{1/\tau}, \quad 1 < p < \infty, \quad 1 \leq \tau < \infty,$$

конечна, где $f^*(t)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\overline{x})|$, $\overline{x} \in \mathbb{I}^m$ (см. [1, гл. 5, разд. 3, с. 213–216]).

В случае $\tau = p$ пространство Лоренца $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ совпадает с пространством Лебега $L_p(\mathbb{T}^m)$ с нормой (см. например [2, гл. 1, разд.1, п.1.1, с. 11])

$$\|f\|_p = \left[\int_{\mathbb{T}^m} |f(\overline{x})|^p d\overline{x} \right]^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

¹Работа финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP19677486).

Введем следующие обозначения: $\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle$ — скалярное произведение элементов $\bar{y}, \bar{x} \in \mathbb{R}^m$ и $a_{\bar{n}}(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ по системе $\{e^{i\langle \bar{n}, \bar{x} \rangle}\}_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^m}$,

$$\delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) = \sum_{\bar{n} \in \rho(\bar{s})} a_{\bar{n}}(f) e^{i\langle \bar{n}, \bar{x} \rangle},$$

где

$$\rho(\bar{s}) = \{\bar{k} = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m : [2^{s_j-1}] \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, \dots, m\},$$

$[a]$ — целая часть числа a , $\bar{s} = (s_1, \dots, s_m)$, $s_j = 0, 1, 2, \dots$.

Для данного вектора $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$, где $r_j > 0$ для $j = 1, \dots, m$, положим $\bar{\gamma} = \bar{r}/r_1$ и

$$Q_n^{(\bar{\gamma})} = \bigcup_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < n} \rho(\bar{s}),$$

$$S_n^{(\bar{\gamma})}(f, \bar{x}) = \sum_{\bar{k} \in Q_n^{(\bar{\gamma})}} a_{\bar{k}}(f) e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle}$$

— частичная сумма по ступенчатому гиперболическому кресту ряда Фурье функции f (см. [3, гл. 8, разд. 8.1]).

Наилучшим M -членным тригонометрическим приближением функции $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, $M \in \mathbb{N}$ называется величина (общее определение дано в [3, гл. 8, разд. 8.1])

$$e_M(f)_{p,\tau} = \inf_{\bar{k}^{(j)}, b_j} \left\| f - \sum_{j=1}^M b_j e^{i\langle \bar{k}^{(j)}, \bar{x} \rangle} \right\|_{p,\tau},$$

где $\bar{k}^{(j)} \in \mathbb{Z}^m$ и b_j — действительные или комплексные числа. Если $F \subset L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ — некоторый функциональный класс, то положим $e_M(F)_{p,\tau} = \sup_{f \in F} e_M(f)_{p,\tau}$. В случае $\tau = p$ вместо $e_M(F)_{p,\tau}$ будем писать $e_M(F)_p$.

Наилучшее M -членное приближение функции $f \in L_2[0, 1]$ полиномами по ортонормированной системе впервые определил С. Б. Стечкин [4]; он установил критерий абсолютной сходимости ряда Фурье по этой системе. Нетривиальные оценки наилучшего M -членного тригонометрического приближения 2π -периодического продолжения функции $|x|$, $x \in [-\pi, \pi]$, первым получил Р. С. Исмагилов [5]. В настоящее время хорошо известны точные по порядку оценки наилучшего M -членного приближения функций классов Соболева, Никольского — Бесова, Лизоркина — Трибеля в пространстве Лебега; более подробная библиография приведена в обзорных статьях [6; 7] и в монографиях [3; 8]. Одним из способов оценки сверху M -членного приближения функций по тригонометрической системе является конструктивный метод, предложенный В. Н. Темляковым [9; 10] на основе жадного алгоритма. Этот метод также применен Д. Б. Базархановым и В. Н. Темляковым [11] в оценках мультилинейного приближения дифференцируемых функций и в других задачах [12; 13]. В оценках сверху наилучших M -членных приближений классов дифференцируемых функций важное значение имеют результаты В. Н. Темлякова [14; 15] по инкрементальному жадному алгоритму с расписанием. Эти результаты применялись Д. Б. Базархановым [16], и мы тоже будем пользоваться ими.

Для конструктивного метода оценки M -членных приближений функций классов Соболева, Никольского — Бесова в пространстве $L_q(\mathbb{T}^m)$ В. Н. Темляковым [14; 15] введен класс $W_q^{a,b,\bar{\gamma}}$.

В статье мы рассмотрим обобщение этого класса в пространстве Лоренца.

О п р е д е л е н и е 1 (см., например [17, гл. 5, разд. 2, с. 299]). Положительная функция $v(t)$ называется слабо колеблющейся на $[1, +\infty)$, если для любого $\varepsilon > 0$ функция $t^\varepsilon v(t)$ возрастает на $[1, \infty)$ и функция $t^{-\varepsilon} v(t)$ убывает на $[1, \infty)$. Множество таких функций обозначается через $SV[1, \infty)$.

Для функции $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ положим

$$f_{l,\bar{r}}(\bar{x}) = \sum_{l \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l+1} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}), \quad l \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\|f_{l,\bar{\gamma}}\|_A = \sum_{l \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l+1} \sum_{\bar{n} \in \rho(\bar{s})} |a_{\bar{n}}(f)|,$$

где $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, $\gamma_1 = \dots = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \leq \dots \leq \gamma_m$, $\gamma_j = r_j/r_1$, $r_j > 0$, $j = 1, \dots, m$.

Для заданной функции $b \in SV[1, \infty)$ и числа $a > 0$ определим класс

$$W_{q,\tau}^{a,b(\cdot),\bar{\gamma}} = \{f \in L_1(\mathbb{T}^m) : \|f_{l,\bar{\gamma}}\|_{q,\tau} \leq 2^{-la} b(2^l), l \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Введем обозначение: $\|f\|_{W_{q,\tau}^{a,b(\cdot),\bar{\gamma}}} = \sup_{l \in \mathbb{Z}_+} \|f_{l,\bar{\gamma}}\|_{q,\tau} 2^{la} b^{-1}(2^l)$, $1 < q, \tau < \infty$. В случае $b(t) = (1 + \log_2 t)^{(\nu-1)b}$, $b \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{N}$ и $\tau = q$ класс $W_{q,\tau}^{a,b(\cdot),\bar{\gamma}}$ определен В. Н. Темляковым [14; 15]; здесь вместо $W_{q,q}^{a,b(\cdot),\bar{\gamma}}$ будем писать $W_q^{a,b,\bar{\gamma}}$.

В случае $\tau = q$ точные по порядку оценки наилучших n -членных тригонометрических приближений функций из класса $W_q^{a,b,\bar{\gamma}}$ в пространстве $L_p(\mathbb{T}^m)$ при $1 < q \leq p < \infty$ установил В. Н. Темляков [14; 15]. В частности, он доказал

Теорема А (см. [15, теорема 3.2]). Пусть $1 < q \leq 2 < p < \infty$ и $\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)p' < a < \frac{1}{q}$, $p' = \frac{p}{p-1}$. Тогда

$$e_n(W_q^{a,b,\bar{\gamma}})_p \asymp n^{-\frac{p}{2}(a + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})} (\log_2 n)^{(\nu-1)(b+a(p-1) - (\frac{1}{q} - \frac{1}{p})p)}.$$

Здесь и в дальнейшем запись $A_n \asymp B_n$ означает, что существуют положительные числа C_1, C_2 , не зависящие от $n \in \mathbb{N}$, и такие, что $C_1 A_n \leq B_n \leq C_2 A_n$ для $n \in \mathbb{N}$. Для краткости записи в случае выполнения неравенств $B(y) \geq C_1 A(y)$ или $B(y) \leq C_2 A(y)$ часто будем писать $B(y) \gg A(y)$ или $B(y) \ll A(y)$ соответственно.

В [15] теорема доказана конструктивным методом и при $\frac{1}{q} - \frac{1}{p} < a < \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)p'$, $1 < q \leq 2 < p < \infty$, поставлена задача о нахождении конструктивного метода оценки $e_n(W_q^{a,b,\bar{\gamma}})_p$. Эта задача решена в [18].

В данной статье мы докажем обобщение теоремы 1.3 из [15] на класс $W_{q,\tau_1}^{a,b(\cdot),\bar{\gamma}}$ в пространстве $L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ в случае $a > \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, $1 < q < p \leq 2$ и $1 < \tau_1 < \tau_2 \leq 2$.

Статья состоит из введения, двух разделов и заключения. В первом разделе даны вспомогательные утверждения, которые используются для доказательства основных результатов статьи. Основные результаты статьи сформулированы и доказаны во втором разделе. В заключении представлено сравнение полученных результатов с ранее известными утверждениями.

1. Вспомогательные утверждения

Теорема 1. Пусть $1 < q < p < \infty$ и $1 < \tau_1 < \tau_2 \leq 2$. Тогда для функции $f \in L_{q,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ справедливо неравенство

$$\|f\|_{p,\tau_2} \ll \left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{l(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})\tau_2} \left\| \sum_{l \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l+1} \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_{q,\tau_1}^{\tau_2} \right)^{1/\tau_2}.$$

Доказательство. Для функции $f \in L_{q,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ согласно [19, теорема 1.2] выполняется неравенство

$$\|f\|_{p,\tau_2} \ll \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau_2}^{\tau_2} \right)^{1/\tau_2} = C \left(\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l+1} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau_2}^{\tau_2} \right)^{1/\tau_2}. \quad (1.1)$$

Так как $1 < \tau_1 < \tau_2 \leq 2$ и $\frac{1}{q} - \frac{1}{p} > 0$, учитывая, что $\gamma_j \geq 1$ для $j = 1, \dots, m$ и пользуясь [19, теорема 3.2], получим

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{l \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l+1} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p, \tau_2}^{\tau_2} \right)^{1/\tau_2} \leq \left(\sum_{l \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l+1} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p, \tau_2}^{\tau_1} \right)^{1/\tau_1} \\ & \leq 2^{(l+1)(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \left(\sum_{l \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l+1} \prod_{j=1}^m 2^{s_j(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})\tau_1} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p, \tau_2}^{\tau_1} \right)^{1/\tau_1} \ll 2^{(l+1)(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \left\| \sum_{l \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l+1} \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_{q, \tau_1}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Теперь из неравенств (1.1) и (1.2) следует утверждение теоремы. \square

З а м е ч а н и е 1. В случае $\tau_1 = q$ и $\tau_2 = p$ теорема 1 доказана В. Н. Темляковым [20].

Следствие 1. Пусть функция $b \in SV[1, \infty)$, $1 < q < p < \infty$ и $1 < \tau_1 < \tau_2 \leq 2$, число $a > \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. Тогда $W_{q, \tau_1}^{a, b(\cdot), \bar{\gamma}} \subset L_{p, \tau_2}(\mathbb{T}^m)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для функции $f \in W_{q, \tau_1}^{a, b(\cdot), \bar{\gamma}}$ согласно теореме 1 имеем

$$\|f\|_{p, \tau_2} \ll \left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l(a + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})\tau_2} b^{\tau_2}(2^l) \right)^{1/\tau_2}. \quad (1.3)$$

Так как $b \in SV[1, \infty)$ и $a > \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, ряд в правой части неравенства (1.3) сходится. Следовательно, $W_{q, \tau_1}^{a, b(\cdot), \bar{\gamma}} \subset L_{p, \tau_2}(\mathbb{T}^m)$. \square

2. Основные результаты

О п р е д е л е н и е 2 (см., например, [21]). Через $SVL[1, \infty)$ обозначим множество всех положительных функций $v(t)$ на $[1, \infty)$, для которых функция $(\log 2t)^{-\varepsilon} v(t)$ убывает и функция $(\log 2t)^{\varepsilon} v(t)$ возрастает на $[1, \infty)$ для любого числа $\varepsilon > 0$ или $v(t) = (1 + \log_2 t)^b$, $b \in \mathbb{R}$, $t \in [1, \infty)$.

Теорема 2. Пусть функция $b \in SVL[1, \infty)$, $1 < q < p < 2$ и $r_1 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \dots r_m$.

1. Если $\frac{1}{q} - \frac{1}{p} < a < \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}$ и $1 < \tau_1 < \tau_2 \leq 2$, то

$$e_n(W_{q, \tau_1}^{a, b(\cdot), \bar{\gamma}})_{p, \tau_2} \asymp n^{-(a + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})} b(n).$$

2. Если $a > \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}$ и $1 < \tau_1 < \tau_2 \leq 2$, то

$$e_n(W_{q, \tau_1}^{a, b(\cdot), \bar{\gamma}})_{p, \tau_2} \asymp n^{-(a + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})} (\log_2 n)^{(\nu-1)(a + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1})} b(n).$$

3. Если $a = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}$ и $1 < \tau_1 < \tau_2 \leq 2$, то

$$e_n(W_{q, \tau_1}^{a, b(\cdot), \bar{\gamma}})_{p, \tau_2} \asymp n^{-(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2})} (\log_2 \log_2 n)^{\frac{1}{\tau_2}} b(n),$$

в случае $b(t) = (1 + \log_2 t)^\alpha$ предполагается, что $1 + \alpha\tau_2 > 0$.

Доказательство. Для $n \in \mathbb{N}$ выберем натуральное число μ такое, что $n \asymp 2^\mu \mu^{\nu-1}$ (см. [20]). Так как $a > \frac{1}{q} - \frac{1}{p} > 0$, согласно следствию 1 справедливо $W_{q,\tau_1}^{a,b(\cdot),\bar{\gamma}} \subset L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$. Пусть $\frac{1}{q} - \frac{1}{p} < a < \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}$. Для заданного μ рассмотрим

$$S_\mu^{(\bar{\gamma})}(f, \bar{x}) = \sum_{\bar{k} \in Q_\mu^{(\bar{\gamma})}} a_{\bar{k}}(f) e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle}.$$

Выберем натуральное число N такое, что $2^N \asymp 2^\mu \mu^{\nu-1}$. Для натурального числа $l \in (\mu, N]$ в приближающий полином функции $f \in W_{q,\tau_1}^{a,b(\cdot),\bar{\gamma}}$ включим m_l блоков $\delta_{\bar{s}}(f, \bar{x})$, $l \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l+1$ с наибольшим $\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau_2}$. Множество таких индексов \bar{s} обозначим через G_l . Тогда по [19, теорема 3.2] имеем

$$\left(\sum_{l \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l+1} \prod_{j=1}^m 2^{s_j \tau_1 (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau_2}^{\tau_1} \right)^{1/\tau_1} \ll \|f\|_{q,\tau_1} \ll 2^{-la} b(2^l). \quad (2.1)$$

Так как $1 = \gamma_1 = \dots = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \leq \dots \gamma_m$ и $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < 0$,

$$\prod_{j=1}^m 2^{s_j \tau_1 (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \geq 2^{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle (\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) \tau_1} \geq 2^{(l+1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) \tau_1}$$

для \bar{s} : $l \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l+1$. Поэтому из неравенства (2.1) получим

$$\begin{aligned} & 2^{(l+1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \left(\sum_{l \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l+1} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau_2}^{\tau_1} \right)^{1/\tau_1} \\ & \ll \left(\sum_{l \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l+1} \prod_{j=1}^m 2^{s_j \tau_1 (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau_2}^{\tau_1} \right)^{1/\tau_1} \ll 2^{-la} b(2^l). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left(\sum_{l \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l+1} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau_2}^{\tau_1} \right)^{1/\tau_1} \ll 2^{-l(a + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})} b(2^l). \quad (2.2)$$

Введем обозначение: $\sigma_l = \{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m : l \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l+1\}$ и $|\sigma_l|$ — количество элементов множества σ_l . Пусть a_j — невозрастающая перестановка чисел $\{\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau_2}\}_{\bar{s} \in \sigma_l}$. Тогда

$$\left(\sum_{l \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l+1} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau_2}^{\tau_1} \right)^{1/\tau_1} = \left(\sum_{j=1}^{|\sigma_l|} a_j^{\tau_1} \right)^{1/\tau_1}.$$

По определению множества G_l количество элементов множества $\sigma_l \setminus G_l$ равно $|\sigma_l| - m_l$. Поэтому

$$\left(\sum_{\substack{l \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l+1, \\ \bar{s} \notin G_l}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau_2}^{\tau_1} \right)^{1/\tau_1} = \left(\sum_{j=m_l+1}^{|\sigma_l|} a_j^{\tau_1} \right)^{1/\tau_1}.$$

Поскольку $\tau_1 \leq \tau_2$, применяя [15, лемма 2.1] и учитывая это равенство, получим

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{\substack{l \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l+1, \\ \bar{s} \notin G_l}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau_2}^{\tau_2} \right)^{1/\tau_2} = \left(\sum_{j=m_l+1}^{|\sigma_l|} a_j^{\tau_2} \right)^{1/\tau_2} \\ & \leq m_l^{-\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)} \left(\sum_{j=1}^{|\sigma_l|} a_j^{\tau_1} \right)^{1/\tau_1} = m_l^{-\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)} \left(\sum_{l \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l+1} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau_2}^{\tau_1} \right)^{1/\tau_1}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из неравенств (2.2) и (2.3) вытекает

$$\left(\sum_{\substack{l \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l+1, \\ \bar{s} \notin G_l}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p, \tau_2}^{\tau_2} \right)^{1/\tau_2} \ll m_l^{-\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)} 2^{-l\left(a + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} b(2^l). \quad (2.4)$$

Если же $1 < \tau_2 \leq 2$ и $1 < p < \infty$, то по [19, теорема 1.2] справедливо неравенство

$$\left\| \sum_{\substack{l \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l+1, \\ \bar{s} \notin G_l}} \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_{p, \tau_2} \ll \left(\sum_{\substack{l \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l+1, \\ \bar{s} \notin G_l}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p, \tau_2}^{\tau_2} \right)^{1/\tau_2}. \quad (2.5)$$

Теперь из неравенств (2.4) и (2.5) следует, что

$$\left\| \sum_{\substack{l \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l+1, \\ \bar{s} \notin G_l}} \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_{p, \tau_2} \ll m_l^{-\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)} 2^{-l\left(a + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} b(2^l). \quad (2.6)$$

Введем обозначение

$$F_l(\bar{x}) = \sum_{\substack{l \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l+1, \\ \bar{s} \notin G_l}} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}).$$

Пусть κ — положительное число такое, что $a + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)\kappa < \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}$. Положим $m_l = [2^{(N-l)\kappa}]$, где $[y]$ — целая часть числа y . Тогда по свойству нормы и в силу неравенства (2.6) будем иметь

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{\mu < l \leq N} F_l \right\|_{p, \tau_2} \leq \sum_{\mu < l \leq N} \|F_l\|_{p, \tau_2} \\ & \leq 2^{-N\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)\kappa} \sum_{\mu < l \leq N} 2^{-l\left(a + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)\kappa\right)} b(2^l) \ll 2^{-N\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)\kappa} 2^{-N\left(a + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)\kappa\right)} b(2^N). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left\| \sum_{\mu < l \leq N} F_l \right\|_{p, \tau_2} \ll 2^{-N\left(a + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} b(2^N) \quad (2.7)$$

в случае $\frac{1}{q} - \frac{1}{p} < a < \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}$, $1 < \tau_1 < \tau_2 \leq 2$, $1 < q < p < 2$.

Рассмотрим полином

$$A_n(f, \bar{x}) = S_{\mu}^{(\bar{\gamma})}(f, \bar{x}) + \sum_{\mu < l \leq N} \sum_{\substack{l \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l+1, \\ \bar{s} \in G_l}} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}).$$

Этот полином имеет не более n элементов:

$$n \leq |Q_{\mu}| + \sum_{\mu < l \leq N} 2^l m_l \leq C 2^N.$$

Теперь, пользуясь теоремой 1, определением класса $W_{q, \tau_1}^{a, b(\cdot), \bar{\gamma}}$ и учитывая, что функция $b \in SVL[1, \infty)$, $a > \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, имеем

$$\left\| \sum_{l > N} f_l \right\|_{p, \tau_2} \ll \left(\sum_{l > N} 2^{l\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\tau_2} \|f_l\|_{q, \tau_1}^{\tau_2} \right)^{1/\tau_2} \ll \left(\sum_{l > N} 2^{-l\left(a + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\tau_2} b^{\tau_2}(2^l) \right)^{1/\tau_2} \ll 2^{-N\left(a + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} b(2^N). \quad (2.8)$$

По свойству нормы и в силу неравенств (2.7) и (2.8) получим

$$\begin{aligned} \|f - A_n(f)\|_{p, \tau_2} &\leq \left\| \sum_{\mu < l \leq N} F_l \right\|_{p, \tau_2} + \left\| \sum_{l > N} f_l \right\|_{p, \tau_2} \ll 2^{-N(a + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})} b(2^N) \\ &\ll n^{-(a + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})} b(n) \end{aligned}$$

в случае $\frac{1}{q} - \frac{1}{p} < a < \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}$, $1 < \tau_1 < \tau_2 \leq 2$, $1 < q < p < 2$.

Следовательно,

$$e_n(W_{q, \tau_1}^{a, b, \bar{r}})_{p, \tau_2} \ll n^{-(a + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})} b(n)$$

при $\frac{1}{q} - \frac{1}{p} < a < \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}$, $1 < \tau_1 < \tau_2 \leq 2$, $1 < q < p < 2$.

Оценка сверху в первом утверждении доказана.

Рассмотрим $a > \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}$. В этом случае положим $m_l = 2^{N-l}$. Тогда, учитывая, что $2^N \asymp 2^\mu \mu^{\nu-1}$, из формулы (2.6) получим

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{\mu < l \leq N} F_l \right\|_{p, \tau_2} &\ll \sum_{\mu < l \leq N} \|F_l\|_{p, \tau_2} \\ &\ll \sum_{\mu < l \leq N} m_l^{-(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2})} 2^{-l(a + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})} b(2^l) \ll 2^{-N(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2})} \sum_{\mu < l \leq N} 2^{-l(a + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1})} b(2^l) \\ &\ll 2^{-N(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2})} 2^{-\mu(a + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1})} \mu^{(\nu-1)b} \leq C 2^{-N(a + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})} N^{(\nu-1)(a + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1})} b(2^N) \\ &\asymp n^{-(a + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} n)^{a + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}} b(n). \end{aligned}$$

Таким образом, если $a > \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}$, то

$$\left\| \sum_{\mu < l \leq N} F_l \right\|_{p, \tau_2} \ll n^{-(a + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} n)^{a + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}} b(n) \quad (2.9)$$

при $1 < q < p < 2$, $1 < \tau_1 < \tau_2 \leq 2$.

Поскольку $a > \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}$, из оценки (2.8) выводим, что

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{l > N} f_l \right\|_{p, \tau_2} &\ll 2^{-N(a + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})} N^{(\nu-1)(a + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1})} b(2^N) \\ &\ll n^{-(a + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} n)^{a + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}} b(n). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Теперь из неравенств (2.9) и (2.10) имеем

$$\|f - A_n(f)\|_{p, \tau_2} \leq \left\| \sum_{\mu < l \leq N} F_l \right\|_{p, \tau_2} + \left\| \sum_{l > N} f_l \right\|_{p, \tau_2} \ll n^{-(a + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} n)^{a + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}} b(n)$$

в случае $a > \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}$, $1 < q < p < 2$, $1 < \tau_1 < \tau_2 \leq 2$. Следовательно,

$$e_n(W_{q, \tau_1}^{a, b, \bar{r}})_{p, \tau_2} \ll n^{-(a + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} n)^{a + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}} b(n)$$

если $a > \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}$, $1 < q < p < 2$, $1 < \tau_1 < \tau_2 \leq 2$.

Пусть $a = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}$ и $1 < \tau_1 < \tau_2 < \infty$. Выберем натуральное число N такое, что $2^N \asymp 2^\mu \mu^{\nu-1}$. Тогда $N - \mu \asymp \log \mu$. Для натурального числа $l \in (\mu, N]$ положим $m_l = 2^{N-l}$. Соответственно получаем

$$n \leq |Q_\mu| + \sum_{\mu < l \leq N} 2^l m_l \leq C 2^N (N - \mu).$$

При $a = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}$ из оценки (2.8) вытекает

$$\left\| \sum_{l > N} f_l \right\|_{p, \tau_2} \leq \sum_{l > N} \|f_l\|_{p, \tau_2} \ll 2^{-N(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2})} b(2^N), \quad (2.11)$$

а из неравенства (2.6) —

$$\|F_l\|_{p, \tau_2} \ll (m_l + 1)^{-\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)} b(2^l) 2^{-l\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)}.$$

Следовательно, согласно [21, теорема 1.2] и определению числа N

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{\mu < l \leq N} F_l \right\|_{p, \tau_2} \ll \left(\sum_{\mu < l \leq N} \|F_l\|_{p, \tau_2}^{\tau_2} \right)^{1/\tau_2} \\ & \ll \left(\sum_{\mu < l \leq N} (m_l + 1)^{-\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)\tau_2} 2^{-l\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)\tau_2} b^{\tau_2}(2^l) \right)^{1/\tau_2} = C 2^{-N\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)} \left(\sum_{\mu < l \leq N} b^{\tau_2}(2^l) \right)^{1/\tau_2} \end{aligned} \quad (2.12)$$

в случае $a = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}$. Оценим сумму

$$\sum_{\mu < l \leq N} b^{\tau_2}(2^l)$$

для функции $b \in SVL[1, \infty)$. Так как $b \in SVL[1, \infty)$, функция $b(t)(\log(2t))^\varepsilon$ возрастает на $[1, \infty)$. Поэтому

$$\sum_{\mu < l \leq N} b^{\tau_2}(2^l) \ll (b(2^N)(\log 2^{N+1}))^{\varepsilon\tau_2} \sum_{\mu < l \leq N} (l+1)^{-\varepsilon\tau_2}. \quad (2.13)$$

Далее, выбирая $\varepsilon > 1/\tau_2$, получим

$$\sum_{\mu < l \leq N} (l+1)^{-\varepsilon\tau_2} \ll \int_{\mu+1}^{N+1} t^{-\varepsilon\tau_2} dt \frac{1}{1 - \varepsilon\tau_2} ((N+1)^{1-\varepsilon\tau_2} - (\mu+1)^{1-\varepsilon\tau_2}). \quad (2.14)$$

Теперь из (2.13) и (2.14) выводим

$$\sum_{\mu < l \leq N} b^{\tau_2}(2^l) \ll (b(2^N)(N+1)^\varepsilon)^{\tau_2} ((N+1)^{1-\varepsilon\tau_2} - (\mu+1)^{1-\varepsilon\tau_2}) \ll b^{\tau_2}(2^N)(N - \mu), \quad (2.15)$$

если $b(t)(\log(2t))^\varepsilon$ возрастает на $[1, \infty)$.

Пусть $b(t) = (1 + \log_2 t)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $t \in [1, \infty)$. Тогда

$$\sum_{\mu < l \leq N} b^{\tau_2}(2^l) = \sum_{\mu < l \leq N} (l+1)^{\alpha\tau_2} \ll (N+1)^{\alpha\tau_2} (N - \mu) \quad (2.16)$$

для $\alpha\tau_2 > 0$. Если $-1 < \alpha\tau_2 < 0$, то

$$\sum_{\mu < l \leq N} b^{\tau_2}(2^l) = \sum_{\mu < l \leq N} (l+1)^{\alpha\tau_2} \ll \frac{1}{1+\alpha\tau_2} \mu^{\alpha\tau_2} (N-\mu). \quad (2.17)$$

Теперь из неравенств (2.12), (2.15)–(2.17) имеем

$$\left\| \sum_{\mu < l \leq N} F_l \right\|_{p, \tau_2} \ll 2^{-N(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2})} b(2^N) (N-\mu)^{1/\tau_2}, \quad (2.18)$$

если $b(t)(\log(2t))^\varepsilon$ возрастает на $[1, \infty)$ при $\varepsilon > 0$ или $b(t) = (1 + \log_2 t)^\alpha$, $\alpha\tau_2 + 1 > 0$. Учитывая, что $N - \mu \asymp \log \mu$, из неравенств (2.11) и (2.18) получим

$$\begin{aligned} \|f - A_n(f)\|_{p, \tau_2} &\leq \left\| \sum_{\mu < l \leq N} F_l \right\|_{p, \tau_2} + \left\| \sum_{l > N} f_l \right\|_{p, \tau_2} \\ &\ll 2^{-N(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2})} b(2^N) (N-\mu)^{1/\tau_2} \ll n^{-(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2})} b(n) (\log \log n)^{1/\tau_2} \end{aligned}$$

для любой функции $f \in W_{q, \tau_1}^{a, b(\cdot), \bar{\gamma}}$ в случае $a = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}$, $1 < \tau_1 < \tau_2 \leq 2$, если $b(t)(\log(2t))^\varepsilon$ возрастает на $[1, \infty)$ при $\varepsilon > 0$ или $b(t) = (1 + \log_2 t)^\alpha$, $\alpha\tau_2 + 1 > 0$. Следовательно,

$$e_n(W_{q, \tau_1}^{a, b(\cdot), \bar{\gamma}})_{p, \tau_2} \ll n^{-(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2})} b(n) (\log \log n)^{1/\tau_2}$$

в случае $a = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}$, $1 < \tau_1 < \tau_2 \leq 2$, если $b(t)(\log(2t))^\varepsilon$ возрастает на $[1, \infty)$ при $\varepsilon > 0$ или $b(t) = (1 + \log_2 t)^\alpha$, $\alpha\tau_2 + 1 > 0$. Этим оценки сверху доказаны.

Оценка снизу в случае $a > \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}$, $1 < q < p \leq 2$. Пусть M — достаточно большое натуральное число. По числу M найдем $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$ и количество точек в множестве $F_n^{\bar{\gamma}} = \bigcup_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle = n} \rho(\bar{s})$ было бы больше чем $4M$ т. е. $|F_n^{\bar{\gamma}}| > 4M$. Это всегда можно сделать, так как $|F_n^{\bar{\gamma}}| \asymp 2^n n^{\nu-1}$ (см. например [20, гл. 4, разд. 2.2]). Рассмотрим функцию

$$f_0(\bar{x}) = 2^{-n(a+1-\frac{1}{q})} b(2^n) n^{-\frac{\nu-1}{\tau_1}} \sum_{\bar{k} \in F_n^{\bar{\gamma}}} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle}.$$

Для функции f_0 имеем

$$\|f_{l, \bar{\gamma}}\|_{q, \tau_1} = 2^{-n(a+1-\frac{1}{q})} b(2^n) n^{-\frac{\nu-1}{\tau_1}} \left\| \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle = l} \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle} \right\|_{q, \tau_1}$$

для $l = 1, \dots, n$ и $\|f_{l, \bar{\gamma}}\|_{q, \tau_1} = 0$ при $l > n$. Далее в силу оценки нормы ядра Дирихле по ступенчатому гиперболическому кресту [19, следствие 3.1] отсюда получаем

$$\|f_{l, \bar{\gamma}}\|_{q, \tau_1} \leq C 2^{-n(a+1-\frac{1}{q})} b(2^n) n^{-\frac{\nu-1}{\tau_1}} 2^{l(1-\frac{1}{q})} l^{\frac{\nu-1}{\tau_1}} \leq C_0 2^{-la} b(2^l), \quad l = 1, \dots, n.$$

Следовательно, функция $F_0 = C_0^{-1} f_0 \in W_{q, \tau_1}^{a, b(\cdot), \bar{\gamma}}$.

Оценим $e_M(F_0)_{p, \tau_2}$. Пусть Ω_M обозначает некоторое множество из M целочисленных векторов $\bar{k}^j = (k_1^{(j)}, \dots, k_m^{(j)})$, $j = 1, \dots, M$. Рассмотрим множество $\Omega_M \cap \rho(\bar{s})$, $\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle = n$. Тогда множество P векторов \bar{s} таких, что $\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle = n$ и

$$|\Omega \cap \rho(\bar{s})| < \frac{|\rho(\bar{s})|}{2}, \quad (2.19)$$

будет содержать, по крайней мере, половину всех \bar{s} таких, что $\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle = n$ (см. [20, с. 95]), и следовательно (см. [20, с. 95]),

$$|P| \asymp n^{\nu-1}. \quad (2.20)$$

Пусть $T(\bar{x})$ — произвольный полином с номерами гармоник из Ω_M . Тогда учитывая (2.19), по [19, теорема 3.2] имеем

$$\begin{aligned} \|F_0 - T\|_{p, \tau_2} &\geq C \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \prod_{j=1}^m 2^{s_j(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})\tau_2} \|\delta_{\bar{s}}(F_0 - T)\|_2^{\tau_2} \right)^{1/\tau_2} \\ &\gg \left(\sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle = n} \prod_{j=1}^m 2^{s_j(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})\tau_2} \|\delta_{\bar{s}}(F_0 - T)\|_2^{\tau_2} \right)^{1/\tau_2} \\ &\gg \left(\sum_{\bar{s} \in P} \prod_{j=1}^m 2^{s_j(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})\tau_2} \|\delta_{\bar{s}}(F_0 - T)\|_2^{\tau_2} \right)^{1/\tau_2} \\ &= C 2^{-n(a+1-\frac{1}{q})} b(2^n) n^{-\frac{\nu-1}{\tau_1}} \left(\sum_{\bar{s} \in P} \prod_{j=1}^m 2^{s_j(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})\tau_2} \prod_{j=1}^m 2^{s_j \frac{\tau_2}{2}} \right)^{1/\tau_2}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Применяя неравенство Гельдера при $\frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_2'} = 1$ и [20, лемма В], получим

$$\begin{aligned} |P| &= \sum_{\bar{s} \in P} 1 \leq \left(\sum_{\bar{s} \in P} \prod_{j=1}^m 2^{s_j(1-\frac{1}{p})\tau_2} \right)^{1/\tau_2} \left(\sum_{\bar{s} \in P} \prod_{j=1}^m 2^{-s_j(1-\frac{1}{p})\tau_2'} \right)^{1/\tau_2'} \\ &\leq \left(\sum_{\bar{s} \in P} \prod_{j=1}^m 2^{s_j(1-\frac{1}{p})\tau_2} \right)^{1/\tau_2} \left(\sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \geq n} \prod_{j=1}^m 2^{-s_j(1-\frac{1}{p})\tau_2'} \right)^{1/\tau_2'} \ll 2^{-n(1-\frac{1}{p})} n^{\frac{\nu-1}{\tau_2}} \left(\sum_{\bar{s} \in P} \prod_{j=1}^m 2^{s_j(1-\frac{1}{p})\tau_2} \right)^{1/\tau_2}. \end{aligned}$$

В силу соотношения (2.20) отсюда следует, что

$$\left(\sum_{\bar{s} \in P} \prod_{j=1}^m 2^{s_j(1-\frac{1}{p})\tau_2} \right)^{1/\tau_2} \gg 2^{n(1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{\nu-1}{\tau_2}} |P| \gg 2^{n(1-\frac{1}{p})} n^{\frac{\nu-1}{\tau_2}}.$$

Поэтому из неравенства (2.21) выводим

$$\|F_0 - T\|_{p, \tau_2} \geq 2^{-n(a+1-\frac{1}{q})} b(2^n) n^{-\frac{\nu-1}{\tau_1}} 2^{n(1-\frac{1}{p})} n^{\frac{\nu-1}{\tau_2}} = C 2^{-n(a+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} b(2^n) n^{(\nu-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1})}$$

в случае $a > \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}$, $1 < q < p \leq 2$, $1 < \tau_1, \tau_2 < \infty$. Следовательно, учитывая, что $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$ и $b \in SVL[1, \infty)$, будем иметь

$$\begin{aligned} e_n(W_{q, \tau_1}^{a, b(\cdot), \bar{\gamma}})_{p, \tau_2} &\geq \|F_0 - T\|_{p, \tau_2} \geq C 2^{-n(a+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} b(2^n) n^{(\nu-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1})} \\ &\asymp M^{-(a+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (\log M)^{(\nu-1)(a+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} b(M) (\log M)^{(\nu-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1})} \end{aligned}$$

при $a > \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}$, $1 < q < p \leq 2$, $1 < \tau_1, \tau_2 < \infty$.

Оценка снизу в случае $a = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}$. Пусть натуральное число N — такое, что $2^N \asymp 2^n n^{\nu-1}$. Тогда $N - n \asymp \log n$. Как и в статье [15], для натурального числа $l \in (n, N]$ выберем произвольное множество B_l таких \bar{s} , что $\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle = l$ и количество элементов $|B_l| := m_l := 2^{N-l}$. Рассмотрим функцию f такую, что $f_l(\bar{x}) = 0$ для $l \notin (n, N]$ и

$$f_l(\bar{x}) = 2^{-l(a+1-\frac{1}{q})} b(2^l) m_l^{-\frac{1}{\tau_1}} \sum_{\bar{s} \in B_l} \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle}.$$

В случае $b(t) = t^{(\nu-1)b}$, $b \in \mathbb{R}$, эта функция определена в [15] и наши рассуждения будут аналогичны. Тогда по [19, теорема 1.2] имеем

$$\|f_l\|_{q,\tau_1} \leq C \left(\sum_{\bar{s} \in B_l} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{q,\tau_1}^{\tau_1} \right)^{1/\tau_1}$$

при $1 < q \leq 2$, $1 < \tau_1 \leq 2$. Отсюда согласно оценке нормы ядра Дирихле по прямоугольникам (см. [19]) получим

$$\begin{aligned} \|f_l\|_{q,\tau_1} &\ll 2^{-l(a+1-\frac{1}{q})} b(2^l) m_l^{-1/\tau_1} \left(\sum_{\bar{s} \in B_l} \left\| \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle} \right\|_{q,\tau_1}^{\tau_1} \right)^{1/\tau_1} \\ &\ll 2^{-l(a+1-\frac{1}{q})} b(2^l) m_l^{-1/\tau_1} \left(\sum_{\bar{s} \in B_l} \prod_{j=1}^m 2^{s_j(1-\frac{1}{q})\tau_1} \right)^{1/\tau_1} \\ &\ll 2^{-l(a+1-\frac{1}{q})} b(2^l) 2^{l(1-1/q)} m_l^{-1/\tau_1} |B_l|^{1/\tau_1} = C_1 2^{-la} b(2^l). \end{aligned}$$

Следовательно, функция $F_1 = C_1^{-1} f \in W_{q,\tau_1}^{a,b(\cdot),\bar{\nu}}$ в случае $a = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}$ и $1 < q \leq 2$, $1 < \tau_1 \leq 2$. Докажем оценку снизу величины $e_n(F_1)_{p,\tau_2}$ с $M < \frac{2^N(N-n)}{8}$. Пусть $K_M = \{\bar{k}^{(j)}\}_{j=1}^M$. Как и в [15], обозначим

$$L := \left\{ l \in (n, N] : |K_M \cap \left(\bigcup_{\bar{s} \in B_l} \rho(\bar{s}) \right)| \leq \frac{2^N}{4} \right\}.$$

Тогда $(N-n-|L|)\frac{2^N}{4} \leq M \leq \frac{2^N(N-n)}{8}$, который влечет $|L| \geq \frac{N-n}{2}$, где $|L|$ — количество элементов множества L . Выберем $l \in L$. Примем

$$K_M^l := K_M \cap \left(\bigcup_{\bar{s} \in B_l} \rho(\bar{s}) \right) \quad \text{и} \quad B_l' := \left\{ \bar{s} \in B_l : |K_M^l \cap \rho(\bar{s})| \leq \frac{|\rho(\bar{s})|}{2} \right\}.$$

Нетрудно доказать, что $|B_l'| \geq \frac{|B_l|}{2}$. Пусть g — любой полином вида $g(\bar{x}) = \sum_{\bar{k} \in K_M} c_{\bar{k}} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle}$. Тогда по [19, теорема 3.2] и с учетом того, что $b \in SVL[1, \infty)$, имеем

$$\begin{aligned} \|F_1 - g\|_{p,\tau_2} &\geq C \left(\sum_{n < l \leq N} \sum_{\bar{s} \in B_l} \prod_{j=1}^m 2^{s_j(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})\tau_2} \|\delta_{\bar{s}}(F_1 - g)\|_2^{\tau_2} \right)^{1/\tau_2} \\ &\geq C \left(\sum_{l \in L} \sum_{\bar{s} \in B_l'} 2^{l(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})\tau_2} \|\delta_{\bar{s}}(F_0 - T)\|_2^{\tau_2} \right)^{1/\tau_2} \\ &\geq C \left(\sum_{l \in L} (2^{-l(a+1-\frac{1}{q})} b(2^l) m_l^{-1/\tau_1})^{\tau_2} \sum_{\bar{s} \in B_l'} 2^{l(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})\tau_2} 2^{l\frac{\tau_2}{2}} \right)^{1/\tau_2} \tag{2.22} \\ &= C \left(\sum_{l \in L} (2^{-l(a+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} b(2^l) m_l^{-1/\tau_1})^{\tau_2} |B_l'| \right)^{1/\tau_2} \geq C \left(\sum_{l \in L} (2^{-l(a+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} b(2^l) m_l^{-1/\tau_1})^{\tau_2} |B_l| \right)^{1/\tau_2} \\ &= C \left(\sum_{l \in L} (2^{-l(a+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} b(2^l) m_l^{-1/\tau_1})^{\tau_2} m_l \right)^{1/\tau_2} = C \left(\sum_{l \in L} (2^{-l(a+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} b(2^l))^{\tau_2} (2^{N-l})^{1-\frac{\tau_2}{\tau_1}} \right)^{1/\tau_2} \\ &= C 2^{N(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1})} \left(\sum_{l \in L} b^{\tau_2}(2^l) \right)^{1/\tau_2} \geq C 2^{N(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1})} b(2^n) |L|^{1/\tau_2}. \end{aligned}$$

Так как $N - n \asymp \log n$, $N \asymp n + \log n \leq Cn$. Поэтому из формулы (2.22) получим

$$\|F_1 - g\|_{p, \tau_2} \geq C2^{-N(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2})} b(2^N) |L|^{1/\tau_2} \geq C2^{-N(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2})} b(2^N) (N - n)^{1/\tau_2}.$$

Следовательно, учитывая, что $2^N \asymp 2^n n^{\nu-1}$ и $M < 2^N (N - n) 8^{-1}$ будем иметь $e_n(W_{q, \tau_1}^{a, b(\cdot), \bar{\tau}})_{p, \tau_2} \gg M^{-(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2})} b(M) (\log \log M)^{1/\tau_2}$ при $a = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}$.

Оценка снизу в случае $\frac{1}{q} - \frac{1}{p} < a < \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}$, $1 < q < p \leq 2$, $1 < \tau_1 < \tau_2 \leq 2$.

Пусть дано натуральное число M . Выберем $\bar{s}^0 = (s_1^0, \dots, s_m^0) \in \mathbb{Z}_+^m$ такой, что $2M \leq |\rho(\bar{s}^0)| \leq CM$, где число $C > 2$. Рассмотрим функцию

$$f_2(\bar{x}) = \prod_{j=1}^m 2^{-s_j^0(a+1-\frac{1}{q})} b\left(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j^0}\right) \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s}^0)} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle}.$$

Нетрудно убедиться, что $f_2 \in W_{q, \tau_1}^{a, b(\cdot), \bar{\tau}}$. Пусть Ω_M — множество m -мерных векторов $\{\bar{k}^{(j)}\}_{j=1}^M$ с целочисленными координатами и $T(\bar{x})$ означает произвольный тригонометрический полином с номерами гармоник из Ω_M . Отметим, что $|\rho(\bar{s}^0) \cap \Omega_M| \leq |\rho(\bar{s}^0)|/2$. Далее, учитывая это неравенство и $b \in SVL[1, \infty)$, по [19, теорема 3.2] при $\lambda = \theta = 2$ будем иметь

$$\begin{aligned} \|f_2 - T\|_{p, \tau_2} &\gg \prod_{j=1}^m 2^{s_j^0(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})} \|\delta_{\bar{s}}(f_2 - T)\|_2 = C \prod_{j=1}^m 2^{s_j^0(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})} \prod_{j=1}^m 2^{-s_j^0(a+1-\frac{1}{q})} b\left(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j^0}\right) \\ &\times (|\rho(\bar{s}^0)| - M)^{\frac{1}{2}} \gg \prod_{j=1}^m 2^{-s_j^0(a+\frac{1}{2}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} b\left(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j^0}\right) \left(\frac{|\rho(\bar{s}^0)|}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= C \prod_{j=1}^m 2^{-s_j^0(a+\frac{1}{2}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} b\left(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j^0}\right) \left(\prod_{j=1}^m 2^{s_j^0}\right)^{1/2} \gg M^{-(a+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} b(M). \end{aligned}$$

Значит, $e_n(W_{q, \tau_1}^{a, b(\cdot), \bar{\tau}})_{p, \tau_2} \gg M^{-(a+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} b(M)$ в случае $\frac{1}{q} - \frac{1}{p} < a < \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}$. \square

Следующие два утверждения (теорема 3 и лемма 1) нам потребуются для доказательства теоремы 4.

Теорема 3. Пусть $1 < p \leq 2$, $1 < \tau < \infty$. Тогда для полинома

$$T_{Q_n^{(\bar{\tau})}}(\bar{x}) = \sum_{\bar{k} \in Q_n^{(\bar{\tau})}} c_{\bar{k}}(f) e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle}$$

выполняются следующие неравенства:

$$\|T_{Q_n^{(\bar{\tau})}}\|_A \ll 2^{\frac{n}{p}} n^{(\nu-1)(1-\frac{1}{\tau})} \|T_{Q_n^{(\bar{\tau})}}\|_{p, \tau}, \quad 1 < p < 2, \quad 1 < \tau < \infty;$$

$$\|T_{Q_n^{(\bar{\tau})}}\|_A \ll 2^{\frac{n}{2}} n^{(\nu-1)(1-\frac{1}{\tau})+\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau}} \|T_{Q_n^{(\bar{\tau})}}\|_{2, \tau}, \quad 2 \leq \tau < \infty.$$

Доказательство этой теоремы проводится аналогично [20, теорема 2.2] с применением теорем 3.1 и 1.3 из [19] для первого и второго утверждений соответственно. \square

Лемма 1. Пусть $2 \leq p < \infty$, $1 < \tau < \infty$ и функция $b \in SVL[1, \infty)$. Тогда существует M -членный тригонометрический полином $G_M(f, \bar{x})$, построенный конструктивным методом на основе жадного алгоритма, для которого при $f \in W_A^{a, b(\cdot), \bar{\tau}}$ справедлива оценка

$$\|f - G_M(f)\|_{p, \tau} \ll M^{-(a+\frac{1}{2})} (\log M)^{(\nu-1)a} b(M).$$

Доказательство этой леммы в основных моментах повторяет доказательство утверждения [14, лемма 6.1]. Поэтому приведем краткую схему доказательства. Пусть $f \in W_A^{a,b(\cdot),\bar{\tau}}$. Для натурального числа M существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$. Выберем число $p_0 \in (p, \infty)$. Тогда по свойству пространства Лоренца $L_{p_0}(\mathbb{T}^m) \subset L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ и $\|f\|_{p,\tau} \leq C\|f\|_{p_0}$, для функции $f \in L_{p_0}(\mathbb{T}^m)$, $1 < \tau < \infty$ (см. [22, гл. 3, разд. 3.4.1, с. 92]). По лемме 6.1 из [14] для функции $f_{l,\bar{\tau}} \in L_{p_0}(\mathbb{T}^m)$ существует m_l -членный полином $G_{m_l}(f_{l,\bar{\tau}}, \bar{x})$ такой, что

$$\|f_{l,\bar{\tau}} - G_{m_l}(f_{l,\bar{\tau}})\|_{p_0} \leq C m_l^{-1/2} 2^{-la} b(2^l).$$

Поскольку $f_{l,\bar{\tau}} \in L_{p_0}(\mathbb{T}^m) \subset L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, из предыдущего неравенства следует, что

$$\|f_{l,\bar{\tau}} - G_{m_l}(f_{l,\bar{\tau}})\|_{p,\tau} \ll \|f_{l,\bar{\tau}} - G_{m_l}(f_{l,\bar{\tau}})\|_{p_0} \ll m_l^{-1/2} 2^{-la} b(2^l). \quad (2.23)$$

Выберем число $\mu \in (0, a)$ и положим $m_l = [2^{n-\mu(l-n)} l^{\nu-1}]$, $l = n, n+1, \dots$. Как и в [14], рассмотрим приближающий полином

$$G_M(f, \bar{x}) = \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \leq n} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) + \sum_{l \geq n} G_{m_l}(f_{l,\bar{\tau}}, \bar{x}).$$

Теперь по свойству нормы и в силу неравенства (2.23) учитывая, что $b \in SVL[1, \infty)$, получим

$$\begin{aligned} \|f - G_M(f)\|_{p,\tau} &\leq \sum_{l=n}^{\infty} \|f_{l,\bar{\tau}} - G_{m_l}(f_{l,\bar{\tau}})\|_{p,\tau} \ll \sum_{l=n}^{\infty} m_l^{-1/2} 2^{-la} b(2^l) \\ &\ll 2^{-n(a+\frac{1}{2})} n^{-\frac{\nu-1}{2}} b(2^n) \ll M^{-(a+\frac{1}{2})} (\log M)^{(\nu-1)a} b(M). \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 4. Пусть $0 < r_1 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_m$, $1 < q \leq 2 < p < \infty$, $1 < \tau_1 < \tau_2 < \infty$ и функция $b \in SVL[1, \infty)$. Если $1 < q < 2$ и $a > \frac{1}{q}$, то

$$e_M(W_{q,\tau_1}^{a,b(\cdot),\bar{\tau}})_{p,\tau_2} \asymp M^{-(a+\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} (\log_2 M)^{(\nu-1)(a-\frac{1}{q}+\frac{1}{\tau_1})} b(M).$$

Если $q = 2$ и $a > \frac{1}{2}$, то

$$e_M(W_{2,\tau_1}^{a,b(\cdot),\bar{\tau}})_{p,\tau_2} \ll M^{-a} (\log_2 M)^{(\nu-1)(a-\frac{1}{2}+\frac{1}{\tau_1})+\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_1}} b(M).$$

Доказательство этой теоремы проводится аналогично [14, теорема 1.5] на основе леммы 1. Пусть $f \in W_{q,\tau_1}^{a,b(\cdot),\bar{\tau}}$, $1 < q < 2$. Тогда по теореме 3 и определению класса $W_{q,\tau_1}^{a,b(\cdot),\bar{\tau}}$ будем иметь

$$\|f_{l,\bar{\tau}}\|_A \ll 2^{\frac{l}{q}} l^{\frac{\nu-1}{\tau_1}} \|f_{l,\bar{\tau}}\|_{q,\tau_1} \leq C 2^{-l(a-\frac{1}{q})} l^{\frac{\nu-1}{\tau_1}} b(2^l), \quad 1 < q < 2, \quad 1 < \tau_1 < \infty.$$

Поэтому по лемме 1 с заменой a на $a - 1/q > 0$ получим

$$e_M(f)_{p,\tau_2} \leq C M^{-(a+\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} (\log_2^{\nu-1} M)^{a-\frac{1}{q}+\frac{1}{\tau_1}} b(M)$$

для функции $f \in W_{q,\tau_1}^{a,b(\cdot),\bar{\tau}}$, $1 < q < 2 < p < \infty$, $1 < \tau_1, \tau_2 < \infty$. Следовательно,

$$e_M(W_{q,\tau_1}^{a,b(\cdot),\bar{\tau}})_{p,\tau_2} \leq C M^{-(a+\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} (\log_2 M)^{(\nu-1)(a-\frac{1}{q}+\frac{1}{\tau_1})} b(M)$$

при $1 < q < 2 < p < \infty$ и $a > \frac{1}{q}$, $1 < \tau_1, \tau_2 < \infty$.

Если $q = 2 < p < \infty$, то пользуясь вторым неравенством в теореме 3 и леммой 1 получим

$$e_M(f)_{p,\tau_2} \ll M^{-a} (\log_2 M)^{(\nu-1)(a-\frac{1}{2}+\frac{1}{\tau_1})+\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_1}} b(M)$$

для функции $f \in W_{2,\tau_1}^{a,b(\cdot),\bar{\tau}}$ при $2 < p < \infty$, $2 \leq \tau_1 < \infty$, $1 < \tau_2 < \infty$.

Поскольку $\|f\|_2 \ll \|f\|_{p,\tau_2}$ для $2 < p < \infty$, $1 < \tau_2 < \infty$ (см. [22, гл. 3, подразд. 3.4.1, с. 92]), достаточно оценить снизу $e_n(W_{q,\tau_1}^{a,b(\cdot),\bar{\tau}})_2$. Для этого рассматривается функция

$$f_0(\bar{x}) = C_0 2^{-n(a+1-\frac{1}{q})} n^{-\frac{\nu-1}{\tau_1}} b(2^n) \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \leq n} \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle},$$

принадлежащая классу $W_{q,\tau_1}^{a,b(\cdot),\bar{\tau}}$ для некоторого числа $C_0 > 0$, не зависящего от n . \square

З а м е ч а н и е 2. В случае $b(t) = (1 + \log t)^{(\nu-1)b}$, $b \in \mathbb{R}$, $t \in [1, \infty)$ и $\tau_1 = q$, $\tau_2 = p$ лемма 1 и теорема 3 ранее доказаны В. Н. Темляковым соответственно в [14, лемма 6.1] и [15, теорема 1.3].

Заключение

В случае $b(t) = (1 + \log t)^{(\nu-1)b}$, $b \in \mathbb{R}$, $t \in [1, \infty)$, и $\tau_1 = q$, $\tau_2 = p$ теорема 2 ранее доказана В. Н. Темляковым [15, теорема 1.3] и для $\tau_1 \neq q$, $\tau_2 \neq p$ она анонсирована в [23].

Отметим, что если $f \in W_{q,\tau}^{a,b(\cdot),\bar{\tau}}$, то учитывая, что $b \in SVL[1, \infty)$, $a > 0$ по свойству нормы, получим

$$\|f - S_n^{(\bar{\tau})}(f)\|_{q,\tau} \ll \sum_{l=n}^{\infty} \|f_{l,\bar{\tau}}\|_{q,\tau} \ll \sum_{l=n}^{\infty} 2^{-la} b(2^l) \ll 2^{-na} b(2^n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Обратно, если $\|f - S_n^{(\bar{\tau})}(f)\|_{q,\tau} \ll 2^{-na} b(2^n)$, $n \in \mathbb{N}$, то

$$\|f_{n,\bar{\tau}}\|_{q,\tau} \ll \|f - S_n^{(\bar{\tau})}(f)\|_{q,\tau} + \|f - S_{n+1}^{(\bar{\tau})}(f)\|_{q,\tau} \ll 2^{-na} b(2^n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда класс $W_{q,\tau}^{a,b(\cdot),\bar{\tau}}$ совпадает с классом

$$\mathcal{S}_{q,\tau}^{a,b(\cdot),\bar{\tau}} = \{f \in L_{q,\tau}(\mathbb{T}^m) : 2^{na} b^{-1}(2^n) \|f - S_n^{(\bar{\tau})}(f)\|_{q,\tau} \leq 1, n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Поэтому из теоремы 2 следует точный порядок величины $e_n(\mathcal{S}_{q,\tau}^{a,b(\cdot),\bar{\tau}})_{p,\tau_2}$.

Благодарности. Автор благодарен рецензенту за содержательные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 333 с.
2. **Никольский С.М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977. 456 с.
3. **Temlyakov V.** Multivariate approximation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2018. 551 p. <https://doi.org/10.1017/9781108689687>
4. **Стечкин С.Б.** Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. 1955. Т. 102, № 1. С. 37–40.
5. **Исмагилов Р.С.** Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Усп. мат. наук. 1974. Т. 29, № 3. С. 161–178.
6. **DeVore R. A.** Nonlinear approximation // Acta Numerica. 1998. Vol. 7. P. 51–150. <https://doi.org/10.1017/s096249290002816>
7. **Dinh Dũng, Temlyakov V.N., Ullrich T.** Hyperbolic cross approximation. Advanced courses in mathematics. Cham: Birkhäuser, 2018. 222 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-92240-9>

8. **Temlyakov V.N.** Greedy approximation. Cambridge: Cambridge Univer. Press, 2011. 434 p.
9. **Temlyakov V.N.** Greedy algorithm and m -term trigonometric approximation // *Constr. Approx.* 1998. Vol. 14. P. 569–587. <https://doi.org/10.1007/s003659900090>
10. **Temlyakov V.N.** Greedy algorithms in Banach spaces // *Adv. Comp. Math.* 2001. vol. 14, no. 3. P. 277–292. <https://doi.org/10.1023/A:1016657209416>
11. **Bazarkhanov D.B., Temlyakov V.N.** Nonlinear tensor product approximation of functions // *J. Complexity.* 2015. Vol. 31, no. 6. P. 867–884. <https://doi.org/10.1016/j.jco.2015.06.005>
12. **Solodov A.P., Temlyakov V.N.** Sampling recovery on function classes with a structural condition. 2024. 25 p. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2404.07210>
13. **Garrigós G.** The $WCGA$ in $L_p(\log L)^\alpha$ spaces // *Constructive Approximation* 2025. Vol. 61. P. 115–147. <https://doi.org/10.1007/s00365-023-09664-y>
14. **Темляков В.Н.** Конструктивные разреженные тригонометрические приближения и другие задачи для функций смешанной гладкости // *Мат. сб.* 2015. Т. 206, №11. С. 131–160.
15. **Temlyakov V.N.** Constructive sparse trigonometric approximation for functions with small mixed smoothness // *Constr. Approx.* 2017. Vol. 45, no. 3. P. 467–495.
16. **Базарханов Д.Б.** Нелинейные тригонометрические приближения классов функций многих переменных // *Тр. МИАН.* 2016. Т. 293. С. 8–42. <https://doi.org/10.1134/S0371968516020023>
17. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды. Т.1. М.: Мир, 1965. 615 с.
18. **Akishev G.** Estimates of M -term approximations of functions of several variables in the Lorentz space by a constructive methods // *Eurasian Math. J.* 2024. Vol. 15, no. 2. P. 8–32. <https://doi.org/10.32523/2077-9879-2024-15-2-08-32>
19. **Акишев Г.** Оценки наилучших приближений функций класса Никольского — Бесова в пространстве Лоренца тригонометрическими полиномами // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2020. Т. 26, №2. С. 5–27. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-2-5-27>
20. **Темляков В.Н.** Приближение функций с ограниченной смешанной производной // *Тр. МИАН СССР.* 1986. Т. 178. С. 1–112.
21. **Симонов Б.В.** О вложении классов Никольского в пространства Лоренца // *Сиб. мат. журн.* 2010. Т. 51, № 4. С. 911–919.
22. **Edmunds D. E., Evans W.D.** Hardy operators, function spaces and embedding. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2004. 333 p.
23. **Акишев Г.** О наилучших n -членных приближениях функций в пространстве Лоренца // *Международ. Воронеж. зим. мат. шк. “Современные методы теории функций и смежные проблемы“* : тез. докл. 2021. С. 29–31.

Поступила 30.04.2025

После доработки 9.09.2025

Принята к публикации 21.09.2025

Акишев Габдолла

д-р физ.-мат. наук, профессор

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Казахстанский филиал, г. Астана;

Институт математики и математического моделирования г. Алматы

e-mail: akishev_g@mail.ru

REFERENCES

1. Stein E.M., Weiss G. *Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces*, Princeton, Princeton Univ. Press, 1971, 312 p. ISBN: 9780691080789. Translated to Russian under the title *Vvedenie v garmonicheskii analiz na evklidovykh prostranstvakh*, Moscow, Mir Publ., 1974, 333 p.
2. Nikol'skii S.M. *Approximation of functions of several variables and embedding theorems*, NY, Springer, 1975, 420 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-65711-5>. Original Russian text published in Nikol'skii S. M., *Priblizhenie funktsii mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya*, Moscow, Nauka Publ., 1969, 480 p.
3. Temlyakov V. *Multivariate approximation*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2018, 551 p. <https://doi.org/10.1017/9781108689687>

4. Stechkin S.B. On the absolute convergence of orthogonal series. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1955, vol. 102, no. 2, pp. 37–40 (in Russian).
5. Ismagilov R.S. Widths of sets in linear normed spaces and the approximation of functions by trigonometric polynomials. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1974, vol. 29, no. 3, pp. 161–178.
6. DeVore R.A. Nonlinear approximation. *Acta Numerica*, 1998, vol. 7, pp. 51–150.
<https://doi.org/10.1017/s0962492900002816>
7. Dinh Dũng, Temlyakov V.N., Ullrich T. *Hyperbolic cross approximation. Advanced courses in mathematics*. Cham, Birkhäuser, 2018, 222 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-92240-9>
8. Temlyakov V.N. *Greedy approximation*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2011, 434 p.
9. Temlyakov V.N. Greedy algorithm and m -term trigonometric approximation. *Constr. Approx.*, 1998, vol. 14, pp. 569–587. <https://doi.org/10.1007/s003659900090>
10. Temlyakov V.N. Greedy algorithms in Banach spaces. *Adv. Comp. Math.*, 2001, vol. 14, no. 3, pp. 277–292. <https://doi.org/10.1023/A:1016657209416>
11. Bazarkhanov D.B., Temlyakov V.N. Nonlinear tensor product approximation of functions. *J. Complexity*, 2015, vol. 31, no. 6, pp. 867–884. <https://doi.org/10.1016/j.jco.2015.06.005>
12. Temlyakov V.N. *Sampling recovery on function classes with a structural condition*. 2024, 25 p. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2404.07210>
13. Garrigós G. The WCGA in $L_p(\log L)^\alpha$ spaces. *Constr. Approx.*, 2025, vol. 61, pp. 115–147. <https://doi.org/10.1007/s00365-023-09664-y>
14. Temlyakov V.N. Constructive sparse trigonometric approximation and other problems for functions with mixed smoothness. *Sb. Math.*, 2015, vol. 206, no. 11, pp. 1628–1656. <https://doi.org/10.1070/SM2015v206n11ABEH004507>
15. Temlyakov V.N. Constructive sparse trigonometric approximation for functions with small mixed smoothness. *Constr. Approx.*, 2017, vol. 45, no. 3, pp. 467–495. <https://doi.org/10.1007/s00365-016-9345-3>
16. Bazarkhanov D.B. Nonlinear trigonometric approximation of multivariate function classes, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 293, pp. 2–36. <https://doi.org/10.1134/S0081543816040027>
17. Zygmund A. *Trigonometric series*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1959, vol. I, 404 p. Translated to Russian under the title *Trigonometricheskie ryady*, Moscow, Mir Publ., 1965, vol. I, 615 p.
18. Akishev G. Estimates of M -term approximations of functions of several variables in the Lorentz space by a constructive methods. *Eurasian Math. J.*, 2024, vol. 15, no. 2, pp. 8–32. <https://doi.org/10.32523/2077-9879-2024-15-2-08-32>
19. Akishev G. Estimation of the best approximations of the functions Nikol'skii — Besov class in the space of Lorentz by trigonometric polynomials. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 5–27. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-2-5-27>
20. Temlyakov V.N. Approximation of functions with bounded mixed derivative. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1989, vol. 178, pp. 1–121.
21. Simonov B.V. Embedding Nikol'skii classes into Lorentz spaces. *Sib. Math. J.*, 2010, vol. 51, no. 4, pp. 728–744. <https://doi.org/10.1007/s11202-010-0074-8>
22. Edmunds D. E., Evans W. D. *Hardy operators, function spaces and embedding*. Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, 2004, 333 p.
23. Akishev G. On the best n -term approximations of functions in Lorentz space. In: *Proc. Inter. Voronezh Winter Mathematical School "Modern methods of function theory and related problems"*, Voronezh, 2021, pp. 29–31 (in Russian).

Received April 30, 2025

Revised September 9, 2025

Accepted September 21, 2025

Funding Agency: The work was carried out with the financial support of the Committee of Science of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (grant no. AP19677486).

Gabdolla Akishev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow University, Kazakhstan Branch, Astana, 100001 Kazakhstan; Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, 050010 Kazakhstan, e-mail: akishev_g@mail.ru.

Cite this article as: G. Akishev. On estimates of n -term approximations of functions in Lorentz space. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 4, pp. 10–25.