

УДК 519.854.2, 519.856.2

## СОРТИРОВКА РАБОТ ПО НАДЕЖНОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ОДНОПРОЦЕССОРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ

С. И. Гладышев, Е. Г. Мусатова

В работе рассматривается стохастическая задача составления расписания для одной машины с ограничениями предшествования, где продолжительность выполнения работ подвержена независимым случайным колебаниям из-за непредвиденных событий. Рассматриваются только симметричные относительно математического ожидания вероятностные распределения. Процесс планирования включает два этапа: сначала создается начальное расписание без временных лагов с фиксированными продолжительностями работ, равными их математическим ожиданиям; затем в случае невыполнимости начального расписания применяется сдвиг работ вправо. Стабильность расписания оценивается с помощью среднего ожидаемого отклонения времени старта работ в результирующем расписании от изначально запланированного времени старта работ. Целью является минимизация этого показателя. В статье вводится понятие надежности работы. Работа определяется как более надежная по сравнению с другой, если положительное отклонение от математического ожидания продолжительности другой работы стохастически доминирует над положительным отклонением этой работы. Мы предлагаем теоретическое обоснование того, почему эвристика, выполняющая сначала более надежные работы, приводит к эффективным решениям задачи планирования, и подтверждаем этот вывод вычислительными экспериментами на различных распределениях вероятностей. Результаты демонстрируют высокую эффективность эвристик, основанных на этом правиле, для повышения стабильности расписания.

Ключевые слова: теория расписаний, стохастическое планирование, однопроцессорная задача, стабильность.

**S. I. Gladyshev, E. G. Musatova. Heuristic “Safe Jobs First” for stochastic single machine scheduling problem.**

This study explores a stochastic single-machine scheduling problem with precedence constraints, where job durations are subject to randomness due to unforeseen events. Initially, each job's duration is assumed to equal its expected value, and we consider only symmetric probability distributions about this expectation. The scheduling process consists of two main steps: first, generating an initial schedule without time lags, and second, applying a right-shift control policy to manage disruptions. Stability is measured as the mean expected deviation in job start times, and the objective is to minimize this measure. A job is considered safer than another if the positive deviation in the duration of the other job stochastically dominates that of the safer job. We provide a theoretical rationale for why the “safe jobs first” heuristic leads to effective scheduling solutions and support this insight with computational experiments across various probability distributions. The results demonstrate the strong performance of heuristics based on this rule in improving schedule stability.

Keywords: scheduling theory, stochastic scheduling, single machine problem, stability.

MSC: 90B36

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-3-fon-04

### Введение

Рассматривается стохастическая задача составления расписания на одной машине (*stochastic single-machine scheduling problem*, или stochastic SMSP) с ограничениями предшествования. Детерминированная версия задачи включает в себя множество  $J$ , состоящее из  $n$  работ, которые необходимо выполнить на одной машине. Каждая работа  $j$ , где  $j \in \{1, \dots, n\}$ , имеет фиксированную продолжительность  $p_j$ . На машине может выполняться только одна работа одновременно, прерывание работ запрещено. Ограничения отношения предшествования запрещают выполнение работы  $j$  до завершения выполнения предшествующей работы  $i$ , где  $i \prec j$ . Составление расписания заключается в выборе стартов работ так, чтобы не нарушались никакие ограничения. Минимизация суммарного опоздания и минимизация времени завершения

работ, возможно, является наиболее популярной целевой функцией [1] в задачах такого рода. Однако на реальном производстве трудно предсказать точное значение продолжительности каждой работы из-за возможных задержек или непредвиденных ситуаций. Поэтому более реалистично рассматривать продолжительности  $p_j$  работ  $j \in \{1, \dots, n\}$  как независимые случайные величины  $P_j$ . Будем предполагать, что математическое ожидание  $E(P_j)$  заранее известно для каждой работы. Более того, мы будем рассматривать только вероятностные распределения, симметричные относительно их математических ожиданий, как обобщение нормального распределения. Более формально, если  $f_{P_j}(x)$  является функцией плотности вероятности случайной величины  $P_j$ , предполагается выполнение следующего равенства:

$$f_{P_j}(E(P_j) - x) = f_{P_j}(E(P_j) + x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

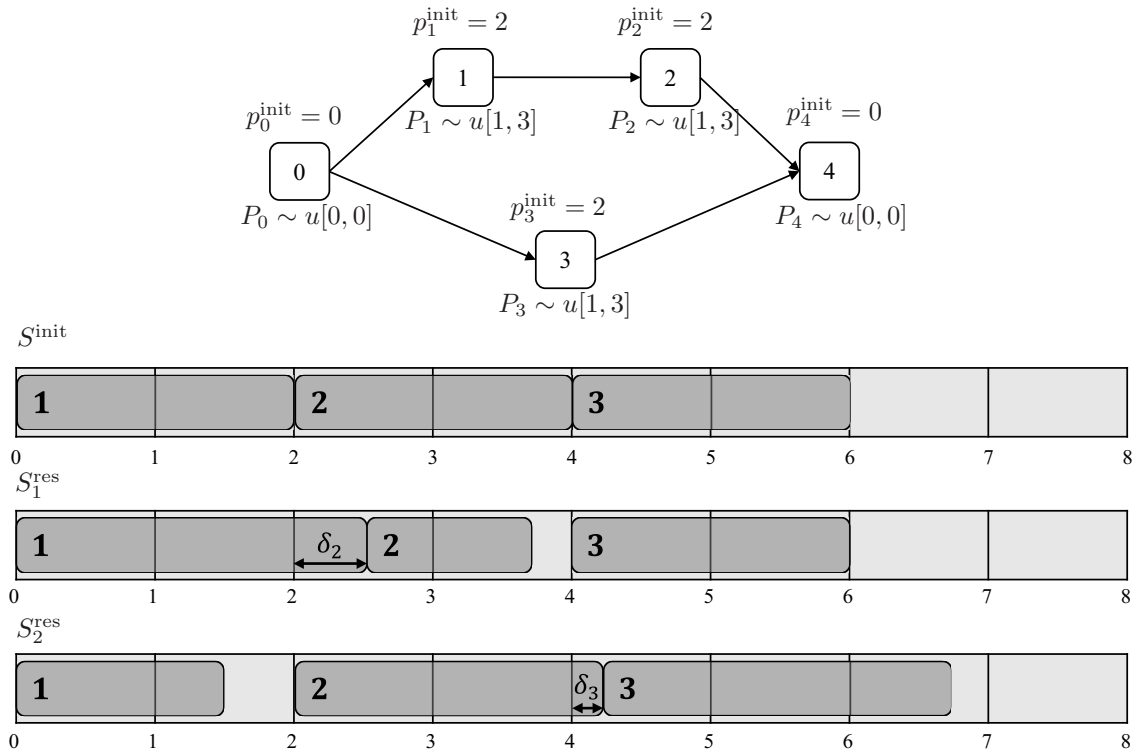
При проактивном подходе составления расписания сначала создается начальное расписание  $S^{\text{init}}$ . Затем, если оно становится невыполнимым из-за задержек, используется алгоритм корректировки. Мы применяем алгоритм сдвига вправо (*Right-Shift*) [2], который выполняет работы в изначально запланированном порядке в изначально запланированное время, если это возможно, и в первое доступное время — в противном случае. Этот алгоритм особенно эффективен, когда затратно менять изначально запланированную последовательность выполнения работ, а также нельзя начать выполнение работы раньше изначально запланированного. Такое ограничение может быть связано с тем, что сроки доставки материалов планируются на основе начального расписания и не поддаются корректировке в процессе выполнения проекта. Пусть  $s_j^{\text{init}}$  и  $s_j^{\text{res}}$  — время старта работы  $j$  в начальном  $S^{\text{init}}$  и результирующем  $S^{\text{res}}$  (после сдвига вправо) расписаниях соответственно. По определению сдвига вправо  $s_j^{\text{res}}$  не может быть меньше  $s_j^{\text{init}}$ . Если  $s_j^{\text{res}} > s_j^{\text{init}}$ , то материалы будут ожидать начала выполнения работы  $j$  в течение  $\delta_j = s_j^{\text{res}} - s_j^{\text{init}}$  времени.

Задача состоит в нахождении начального расписания, которое минимизирует среднее ожидаемое время простоя материалов, при условии, что начальное расписание составлено без простоя машины и продолжительности работ равны их математическим ожиданиям. Более формально, мы минимизируем  $Q = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E(\delta_j)$ . Стоит подчеркнуть, что данная целевая функция фундаментально отличается от стандартных функций, таких как *tardiness*, *earliness* и *lateness*. В нашей целевой функции мы рассматриваем отклонение от значений, которые предусмотрены начальным расписанием, а не определены заранее. Далее приведен небольшой пример для демонстрации введенных понятий.

**Пример.** Рассмотрим следующую задачу планирования с тремя работами  $\{1, 2, 3\}$ , которые должны быть выполнены на одной машине. Работа 2 не может начаться до завершения работы 1. Для моделирования проблемы введем две дополнительные фиктивные работы 0 и 4, где работа 0 предшествует работам 1 и 3, и работа 4 следует после работ 2 и 3, как изображено на рис. 1 графа отношений предшествования. Дополнительные работы имеют нулевую продолжительность с вероятностью 1. Продолжительности работ 1, 2 и 3 распределены равномерно на отрезке  $[1, 3]$ . Начальная продолжительность каждой работы равна ее математическому ожиданию, т. е. дополнительные работы имеют нулевую начальную продолжительность, а остальные работы — начальную продолжительность 2.

Предположим, начальное расписание (см. рис. 1) предусматривает выполнение работ в последовательности 1, 2, 3. Сначала рассмотрим случай, в котором результирующие продолжительности работ 1, 2 и 3 равны 2.5, 1.2 и 2 соответственно. Применяя сдвиг вправо, получаем результирующее расписание  $S_1^{\text{res}}$  (см. рис. 1). Поскольку работа 1 завершается в момент 2.5, работа 2 не может начаться в изначально запланированное время и сдвигается вправо до момента 2.5 ( $s_1^{\text{res}} = 0$ ,  $s_2^{\text{res}} = 2.5$ ,  $s_3^{\text{res}} = 4$ ). Время простоя материалов для работ 1 и 3 равно 0, в то время как для работы 2 оно составляет 0.5 ( $\delta_2 = s_2^{\text{res}} - s_2^{\text{init}} = 3 - 2.5 = 0.5$ ).

Теперь рассмотрим случай, в котором результирующие продолжительности работ 1, 2 и 3 равны 1.5, 2.2 и 2.5 соответственно. Применяя сдвиг вправо, начальное расписание необходимо



**Рис. 1.** Пример задачи с тремя работами. Сверху изображен граф отношений предшествования. Начальное значение и вероятностное распределение продолжительности соответствующей работы отмечено сверху и снизу соответствующей вершины. Ниже изображен пример начального расписания  $S^{init}$  и два возможных результирующих расписания  $S_1^{res}$  и  $S_2^{res}$ .

скорректировать, как изображено внизу рис. 1. Даже если возможно начать работу 2 раньше изначально запланированного времени, сдвиг вправо не двигает работу влево по времени. Это приводит к сдвигу работы 3 вправо на  $\delta_3 = s_3^{res} - s_3^{init} = 4.2 - 4 = 0.2$ .

Далее в разд. 1 приводится обзор литературы. В подразд. 2.1 мы находим оптимальное расписание для случая с тремя работами и предлагаем эвристику для случая с большим числом работ в подразд. 2.2. Наконец, в разд. 3 и 4 приведены результаты вычислительных экспериментов и выводы об эффективности предлагаемого подхода соответственно.

## 1. История вопроса

Составление расписания на производстве — это важная область исследования операций [3; 4]. Автоматизация принятия решений является одной из главных составляющих Индустрии 4.0 [5; 6]. SMSP, несмотря на простоту постановки и всестороннюю изученность, по-прежнему имеет важное значение для Индустрии 4.0 [7].

Существует большое количество вариаций задач составления расписания, и для удобства была предложена 3-позиционная классификация [8], где первое поле описывает машины, на которых будут запускаться работы, второе содержит информацию о работах и их характеристики, а третье — критерий оптимальности расписания. В последние десятилетия было получено множество результатов о вычислительной сложности различных вариаций проблемы SMSP. Ду и Леунг доказали [9], что  $1||\sum T_j$  (SMSP с целевой функцией суммарного запаздывания, или *total tardiness*) является NP-трудной задачей. Однако SMSP с ограничениями предшествования и максимальным временным смещением в качестве целевой функции  $1|prec|L_{max}$  может быть решена за полиномиальное время [10]. Лоулер установил [11], что SMSP с отношениями предшествования и взвешенной суммой времени завершения работ в качестве целевой функции  $1|prec|\sum w_j C_j$  в общем случае является NP-трудной в сильном смысле задачей. Чекури и

др. предложили [12] комбинаторный 2-аппроксимационный алгоритм для этой проблемы. Мур доказал [13], что SMSP с целевой функцией, равной числу опоздавших работ,  $1 || \sum (1 - U_j)$  принадлежит классу полиномиальных задач. Более подробный обзор известных результатов для детерминированной однопроцессорной задачи составления расписания можно найти в книге Брукера [14].

Несмотря на многочисленные исследования детерминированной версии задачи, остается зазор между теорией и практикой, под влиянием которого набирает популярность стохастическая версия задачи. На сегодняшний день существует два основных подхода к преодолению неопределенностей: проактивное и реактивное планирование [1]. При реактивном планировании авторы предлагают алгоритмы и схемы реагирования на задержки и сбои, а при проактивном подходе исследователи стараются учитывать возможные нарушения в работе, составляя начальное расписание. *Робастность* расписания определяется нечувствительностью его производительности (значения целевой функции) к сбоям. С другой стороны, *стабильность* расписания определяется нечувствительностью к сбоям самого расписания, а не его производительности [1]. В этой статье мы фокусируемся на проактивном подходе, создавая стабильное начальное расписание.

Существует два основных типа стохастической SMSP: оффлайн [15–17] и онлайн [18; 19]. Большинство работ исследуют задачи с неопределенными продолжительностями работ [16; 17]. Однако также возникают задачи с неопределенными сроками выполнения работ и временем настройки машины [15]. Метриками стабильности могут служить суммарное отклонение завершения работ от заданного срока выполнения (*earliness, tardiness*) [17], максимальное опоздание и максимальное отклонение времени завершения работы [20] или суммарное отклонение от сроков выполнения [16]. Неопределенные продолжительности работ могут быть смоделированы из нормального [17] и экспоненциального [16] распределения — или симметричного вокруг математического ожидания трапециевидного распределения [21]. Мы изучаем оффлайн версию проблемы с неопределенными продолжительностями работ, распределенными симметрично вокруг математического ожидания. В качестве метрики стабильности мы рассматриваем среднее ожидаемое отклонение времени стартов работ от их первоначально запланированных значений.

Гутьяр и др. предложили [22] правило планирования “сначала надежные работы” (safe jobs first) для стохастической однопроцессорной задачи с целевой функцией суммарного опоздания. Правило задает порядок выполнения работ, начиная с тех, у которых более сконцентрированное распределение продолжительности выполнения. Авторы называют работу  $A$  надежнее работы  $B$ , если кривая Лоренца распределения продолжительности работы  $A$  выше кривой Лоренца распределения продолжительности работы  $B$ . В нашей статье мы называем работу  $A$  надежнее работы  $B$ , если  $\Pr[\max\{0; P_A - E(P_A)\} \leq z] \geq \Pr[\max\{0; P_B - E(P_B)\} \leq z] \quad \forall z \in \mathbb{R}$ , где  $P_A$  и  $P_B$  — продолжительности работ  $A$  и  $B$  соответственно. Также Гутьяр и его коллеги не использовали алгоритм сдвига вправо, в результирующем расписании задания всегда выполнялись без перерывов в работе машины.

## 2. Эвристика “сортировка работ по надежности”

### 2.1. Оптимальная последовательность для трех работ

Предположим, что необходимо составить расписание для трех работ на одной машине без ограничений предшествования. В начальном расписании все работы выполняются без простоев. Пусть работы выполняются в порядке  $j_1, j_2, j_3$ . Начальное время старта  $s_{j_1}^{\text{init}}$  работы  $j_1$  равняется 0,  $s_{j_k}^{\text{init}}$  работы  $j_k$  для  $k = 2, 3$  —  $\sum_{l=1}^{k-1} E(P_{j_l})$ . Результирующая продолжительность работы  $j_k$  может быть разбита на ожидаемое значение и отклонение:  $P_{j_k} = E(P_{j_k}) + \hat{P}_{j_k}$ , где  $\hat{P}_{j_k}$  есть случайная величина с нулевым средним.

Легко видеть, что ожидаемое отклонение времени старта работы  $j_2$  равняется  $E(\max\{0; \hat{P}_1\})$ . Мы взяли только положительную составляющую  $\hat{P}_1$ , так как стратегия сдвига вправо не позволяет начинать работы раньше запланированного. Ожидаемое отклонение времени старта работы  $j_3$  равняется

$$E(\max\{0; \max\{0; \hat{P}_1\} + \hat{P}_2\}).$$

В лемме 1 мы доказываем, что после перестановки работ  $j_1$  и  $j_2$  местами ожидаемое отклонение времени старта работы (ООВСП)  $j_3$  не изменится. В леммах 2 и 3 мы находим, как изменится ООВСП последней работы в последовательности при перестановке работ  $j_2$  и  $j_3$ , а в теореме 1 определяем оптимальную последовательность для трех работ.

**Лемма 1.** Пусть  $A$  и  $B$  — вещественные случайные величины с непрерывной функцией распределения вероятности и нулевыми средними ( $E(A) = 0$  и  $E(B) = 0$ ). Предположим, что функции плотности вероятности  $f_A$  и  $f_B$  величин  $A$  и  $B$  соответственно симметричны относительно нуля, т. е.

$$f_A(-x) = f_A(x), \quad f_B(-x) = f_B(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Тогда выполняется следующее равенство:

$$E(\max\{0; \max\{0; A\} + B\}) = E(\max\{0; \max\{0; B\} + A\}). \quad (2.1)$$

**Доказательство.** Сначала вычислим левую часть равенства (2.1):

$$\begin{aligned} E(\max\{0; \max\{0; A\} + B\}) &= \mathbf{P}(A \leq 0)E(\max\{0; B\}) + \int_0^{\infty} dx \int_{-x}^{\infty} (x+y)f_A(x)f_B(y)dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} yf_B(y)dy + \int_0^{\infty} dx \int_{-x}^{\infty} (x+y)f_A(x)f_B(y)dy. \end{aligned}$$

Для удобства обозначим  $\int_0^{\infty} xf_A(x)dx$  как  $E_A$  и  $\int_0^{\infty} yf_B(y)dy$  как  $E_B$ . Тогда перепишем:

$$\frac{1}{2}E_B + \int_0^{\infty} xf_A(x)dx \int_{-x}^{\infty} f_B(y)dy + \int_0^{\infty} dx \int_{-x}^{\infty} yf_A(x)f_B(y)dy.$$

Используя равенство  $\int_{-x}^{\infty} f_B(y)dy = \int_{-x}^0 f_B(y)dy + \int_0^{\infty} f_B(y)dy = \int_{-x}^0 f_B(y)dy + \frac{1}{2}$ , имеем

$$\frac{1}{2}E_B + \frac{1}{2}E_A + \int_0^{\infty} dx \int_{-x}^0 xf_A(x)f_B(y)dy + \int_0^{\infty} dx \int_{-x}^{\infty} yf_A(x)f_B(y)dy.$$

Ввиду симметричности распределения получаем

$$\frac{1}{2}E_B + \frac{1}{2}E_A + \int_0^{\infty} dx \int_0^x xf_A(x)f_B(y)dy + \int_0^{\infty} dx \int_x^{\infty} yf_A(x)f_B(y)dy.$$

Поменяем порядок интегрирования в третьем слагаемом:

$$\frac{1}{2}E_B + \frac{1}{2}E_A + \int_0^{\infty} dy \int_y^{\infty} xf_A(x)f_B(y)dx + \int_0^{\infty} dx \int_x^{\infty} yf_A(x)f_B(y)dy.$$

Так как третье слагаемое — это число, мы можем поменять названия переменных, значение числа от этого не поменяется:

$$\frac{1}{2}E_B + \frac{1}{2}E_A + \int_0^{\infty} dx \int_x^{\infty} y f_A(y) f_B(x) dy + \int_0^{\infty} dx \int_x^{\infty} y f_A(x) f_B(y) dy. \quad (2.2)$$

Если мы осуществим те же шаги с правой частью равенства (2.1), то получим формулу (2.2) с поменявшимися свои места  $A$  и  $B$ :

$$\frac{1}{2}E_A + \frac{1}{2}E_B + \int_0^{\infty} dx \int_x^{\infty} y f_B(y) f_A(x) dy + \int_0^{\infty} dx \int_x^{\infty} y f_B(x) f_A(y) dy. \quad (2.3)$$

Легко видеть, что выражение (2.2) равняется выражению (2.3).

**Лемма 2.** Пусть  $A$  и  $B$  — случайные величины из леммы 1. Пусть  $\max\{0; B\}$  стохастически доминирует  $\max\{0; A\}$ , т. е. для каждого  $z \in \mathbb{R}$  справедливо соотношение

$$\Pr[\max\{0; A\} \leq z] \geq \Pr[\max\{0; B\} \leq z]. \quad (2.4)$$

Тогда для всех  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  верно следующее соотношение:

$$E(\max\{x; A\}) \leq E(\max\{x; B\}). \quad (2.5)$$

Если выполняется равенство в формуле (2.4) для всех  $z \in \mathbb{R}$ , то выполняется равенство в (2.5).

**Доказательство.** Убедимся, что  $\max\{x; B\}$  стохастически доминирует  $\max\{x; A\}$  для всех  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , т. е. выполняется соотношение

$$\Pr[\max\{x; A\} \leq z] \geq \Pr[\max\{x; B\} \leq z] \quad \forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad z \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Когда  $z \leq x$ , неравенство (2.6) тривиально. Когда  $z > x$ , это неравенство совпадает с неравенством из условия леммы.

Известно, что если случайная величина  $X$  стохастически доминирует другую случайную величину  $Y$ , т. е. для всех  $z \in \mathbb{R}$ ,  $\Pr[X > z] \geq \Pr[Y > z]$ , то  $E[X] \geq E[Y]$  (см., например, предложение С.7 в [23]). Используя этот факт, завершим доказательство.

**Лемма 3.** Пусть  $A$  и  $B$  — случайные величины из леммы 1. Пусть  $C$  — положительная вещественная случайная величина с непрерывной функцией распределения вероятности. Предположим,  $\max\{0; B\}$  стохастически доминирует  $\max\{0; A\}$ , т. е. для всех  $z \in \mathbb{R}$  справедливо соотношение

$$\Pr[\max\{0; A\} \leq z] \geq \Pr[\max\{0; B\} \leq z]. \quad (2.7)$$

Тогда верно следующее соотношение:

$$E(\max\{0; C + A\}) \leq E(\max\{0; C + B\}). \quad (2.8)$$

Если выполняется равенство в формуле (2.7) для всех  $z \in \mathbb{R}$ , то выполняется равенство в (2.8).

**Доказательство.** Вычислим левую часть неравенства (2.8), принимая в расчет, что  $C$  всегда положительна:

$$E(\max\{0; C + A\}) = \int_0^{\infty} dx \int_{-x}^{\infty} (x + y) f_C(x) f_A(y) dy = \int_0^{\infty} f_C(x) dx \left( \int_{-x}^{\infty} x f_A(y) dy + \int_{-x}^{\infty} y f_A(y) dy \right).$$

Используя равенства

$$\int_{-x}^{\infty} f_A(y)dy = \int_{-x}^0 f_A(y)dy + \int_0^{\infty} f_A(y)dy = \int_{-x}^0 f_A(y)dy + \frac{1}{2}$$

и  $\int_{-x}^0 f_A(y)dy = \int_0^x f_A(y)dy$  (из-за симметрии  $f_A$ ), перепишем следующим образом:

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} x f_C(x)dx + \int_0^{\infty} f_C(x)dx \left( \int_0^x x f_A(y)dy + \int_x^{\infty} y f_A(y)dy \right).$$

Значение в скобках равно  $E(\max\{x, A\})$ , т. е. имеем

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} x f_C(x)dx + \int_0^{\infty} E(\max\{x, A\}) f_C(x)dx.$$

Аналогично правая часть неравенства (2.8) равна  $\frac{1}{2} \int_0^{\infty} x f_C(x)dx + \int_0^{\infty} E(\max\{x, B\}) f_C(x)dx$ . Из леммы 2 мы получаем  $E(\max\{x, A\}) \leq E(\max\{x, B\}) \quad \forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Таким образом, выполняется следующее неравенство:

$$\int_0^{\infty} E(\max\{x, A\}) f_C(x)dx \leq \int_0^{\infty} E(\max\{x, B\}) f_C(x)dx. \quad (2.9)$$

Точно также из леммы 2 в случае равенства в выражении (2.7) для всех  $z \in \mathbb{R}$  справедливо равенство  $E(\max\{x, A\}) = E(\max\{x, B\}) \quad \forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , а следовательно, и равенство в (2.9), что и требовалось доказать.

**О п р е д е л е н и е 1.** Пусть имеется две работы  $j_a$  и  $j_b$  со случайными продолжительностями  $P_a$  и  $P_b$  соответственно. Предположим, что плотности вероятностей  $P_a$  и  $P_b$  симметричны относительно их математических ожиданий.

Назовем работу  $j_a$  надежнее работы  $j_b$ , если положительное отклонение  $P_b$  от математического ожидания стохастически доминирует положительное отклонение  $P_a$ , т. е. верно следующее неравенство:

$$\Pr[\max\{0; P_a - E(P_a)\} \leq z] \geq \Pr[\max\{0; P_b - E(P_b)\} \leq z] \quad \forall z \in \mathbb{R}. \quad (2.10)$$

Если выполняется равенство для всех  $z \in \mathbb{R}$ , то  $j_a$  и  $j_b$  одинаково надежны.

**Теорема 1.** Предположим, три работы  $j_1, j_2, j_3$  без ограничений предшествования и со случайными продолжительностями  $P_1, P_2$  и  $P_3$  соответственно должны быть выполнены на одной машине. Пусть вероятностное распределение продолжительности каждой работы  $P_i$  симметрично относительно математического ожидания  $E(P_i)$ . Начальное расписание предполагает, что начальные продолжительности каждой работы равны математическому ожиданию и работы выполняются без простоев. В случае сбоев используется алгоритм сдвига вправо.

Если любые две работы сравнимы в терминах определения 1, то начальное расписание оптимально, т. е. минимизирует среднее ожидаемое отклонение времени стартов работ, тогда и только тогда, когда работы выполняются в порядке невозрастания надежности.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Предположим, работы в начальном расписании выполняются в порядке  $j_1, j_2, j_3$ . Для удобства обозначим  $E(\max\{0; P_j - E(P_i)\})$  как  $E_i$  для всех  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Ожидаемое отклонение времени старта работ  $j_1, j_2$  и  $j_3$  равняется 0,  $E_1$  и  $E(\max\{0; \max\{0; P_1\} + P_2\})$  соответственно.

Возможны две операции:

- поменять первую и вторую работы в начальном расписании местами;
- поменять вторую и третью работы в начальном расписании местами.

Рассмотрим первую операцию. Предположим,  $j_2$  надежнее работы  $j_1$  (см. определение 1), тогда  $E_2 < E_1$  по лемме 2, где  $x$  равно 0. Если мы изменим начальное расписание, поменяв местами эти две работы, ожидаемое отклонение времени старта работы (ООВСП) третьей работы  $j_3$  не изменится (см. лемму 1), ООВСП работы  $j_2$  будет 0, и ООВСП работы  $j_1$  станет  $E_2$ . Таким образом, суммарное ООВСП уменьшится после перестановки.

Вернемся к начальной последовательности  $j_1, j_2, j_3$  и теперь предположим, что  $j_3$  надежнее, чем  $j_2$ ; тогда  $E(\max\{0; \max\{0; P_1\} + P_3\}) \leq E(\max\{0; \max\{0; P_1\} + P_2\})$  по лемме 3. Если мы изменим начальное расписание, поменяв эти работы местами, ООВСП работы  $j_1$  не изменится, ООВСП работы  $j_3$  окажется равным  $E_1$  и ООВСП работы  $j_2$  станет равным  $E(\max\{0; \max\{0; P_1\} + P_3\})$ . Следовательно, суммарное ООВСП уменьшится с перестановкой этих работ.

В обеих операциях, если работы имеют одинаковую надежность по леммам 2, 1 и 3 соответственно, от перестановки работ местами суммарное ООВСП не изменится. Используя эти две операции, мы можем отсортировать последовательность в порядке невозрастания надежности, уменьшая суммарное, а значит, и среднее ООВСП после каждой операции.

**З а м е ч а н и е 1.** Предположения, использующиеся в теореме 1, часто встречаются на практике. Например, они выполняются для равномерных распределений и ограниченных на отрезке нормальных распределений. Более формально, предположим, что работы  $j_1$  и  $j_2$  имеют случайные продолжительности  $P_1$  и  $P_2$ , взятые из равномерных распределений  $\mathcal{U}[a_1, b_1]$  и  $\mathcal{U}[a_2, b_2]$  или ограниченных на отрезке нормальных распределений  $\min\{\mu_1 + k; \max\{\mu_1 - k; \mathcal{N}(\mu_1, d_1)\}\}$  и  $\min\{\mu_2 + k; \max\{\mu_2 - k; \mathcal{N}(\mu_2, d_2)\}\}$  соответственно. В обоих случаях работа  $j_1$  будет надежнее работы  $j_2$  тогда и только тогда, когда ее продолжительность имеет меньшую дисперсию, т. е.  $b_1 - a_1 < b_2 - a_2$  — для равномерных распределений и  $d_1 < d_2$  — для ограниченных нормальных распределений.

## 2.2. Эвристика для $n > 3$ работ

Результат теоремы 1 пока не удается обобщить на случай с произвольным числом работ. Рассмотрим небольшой пример, чтобы подчеркнуть проблему. Пусть имеются четыре работы  $j_1, j_2, j_3, j_4$ . Предположим, продолжительность  $P_i$  работы  $j_i$  взята из равномерного распределения  $\mathcal{U}[5 - i, 5 + i]$  для всех  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Равномерные распределения симметричны относительно их математических ожиданий, и работа  $j_1$  надежнее  $j_2$ . Однако можно проверить, что ожидаемое отклонение времени старта работы  $j_4$  равняется  $147/128$  при выполнении работ в последовательности  $j_2, j_1, j_3, j_4$ , что меньше ожидаемого отклонения времени старта работы  $j_4$  ( $1333/1152$ ) при выполнении работ в последовательности  $j_1, j_2, j_3, j_4$ . Таким образом, идея доказательства теоремы 1, что после перестановки соседних работ местами ожидаемое отклонение времени старта меняется только для второй работы в этой паре, больше не выполняется. Однако среднее ожидаемое отклонение для всех работ в этом примере уменьшится на  $427/2304$ . Таким образом, наша гипотеза, что теорема 1 выполняется для случая с большим числом работ, все еще может быть верна.

Несмотря на это, мы покажем с помощью вычислительных экспериментов, что замена двух соседних работ, если вторая из них более надежна, постоянно уменьшает среднее ожидаемое отклонение времени старта. В наших экспериментах продолжительность взята из равномерно и симметрично ограниченного нормального распределений. В следующем разделе распределения описаны более подробно и объясняется, почему они подходят под условия теоремы 1.

В дополнение мы запрограммировали эвристику *Жадное планирование с учетом надежности* (см. алгоритм 1) для решения исходной задачи с ограничениями предшествования.

**Algorithm 1** Жадное планирование с учетом надежности

---

```

sch ← [] ▷ Промежуточное расписание. Изначально пустое
for  $j \in \{1, \dots, n\}$  do
  for  $pos \in \{0, \dots, len(sch)\}$  do
    if Работа  $j$  может быть выполнена на позиции  $pos$  в промежуточном расписании  $sch$  then
      Вычисляем число инверсий (количество менее надежных работ в  $sch$  левее  $pos$ 
      плюс число более надежных работ правее  $pos$ ).
      end if
    end for
    Добавляем работу  $j$  в  $sch$  на возможную позицию с наименьшим числом инверсий.
  end for

```

---

Алгоритм составляет расписание, поочередно добавляя работы на выбранные позиции. Позиция каждой следующей работы выбирается так, чтобы не было нарушений отношений предшествования с уже запланированными работами и было минимальное число инверсий (число менее надежных работ левее выбранной позиции в промежуточном расписании плюс число более надежных работ правее выбранной позиции). Если в реализации использовать множества предшественников на основе хеш-таблицы для определения наличия ограничения предшествования за  $O(1)$  в среднем, то вычислительную сложность всего алгоритма можно оценить как  $O(n^2)$ , где  $n$  — число работ. Во втором цикле (см. строки 3–4) мы проверяем, является ли работа на позиции  $pos$  предшественником работы  $j$ , если да, то сразу переходим к следующей итерации цикла. Если работа  $j$  является предшественником работы на позиции  $pos$ , то выходим из цикла.

Мы сравнили данную эвристику со стандартным подходом программирования в ограничениях (constraint programming, CP) для стохастических задач (см. алгоритм 2).

Алгоритм 2 был получен адаптацией примера “*Stochastic job-shop*” из справочника решателя [24]. В этой модели вначале мы должны задать число рассматриваемых сценариев (см. строку 2). Продолжительность работы  $j$  в сценарии  $s$  равняется  $p_j^s$ . Интервальная переменная  $x_j^s$  (см. строку 6) задает работу  $j$  в сценарии  $s$  с продолжительностью  $p_j^s$ . Первый сценарий бу-

**Algorithm 2** Стохастическая модель программирования в ограничениях

---

```

1: // Параметры:
2:  $N \leftarrow ScenariosNum$  ▷ Задать число сценариев
3:  $P \leftarrow [[p_j^s \mid j = 1 \dots n] \mid s = 1 \dots N]$  ▷ Продолжительности работ для всех сценариев
4:
5: // Переменные:
6:  $x_j^s \leftarrow intervalVar(size = p_j^s) \quad \forall s = 1 \dots N; j = 1 \dots n$  ▷ Работы
7:  $seq^s \leftarrow sequenceVar([x_j^s \mid j = 1 \dots n]) \quad \forall s = 1 \dots N$  ▷ Последовательность выполнения
8:
9: // Ограничения:
10:  $endBeforeStart(x_j^s, x_i^s) \quad \forall s = 1 \dots N; (i, j) \in E(G)$  ▷ Ограничения предшествования
11:  $noOverlap([x_j^s \mid j = 1 \dots n]) \quad \forall s = 1 \dots N$  ▷ Работы не пересекаются
12:  $sameSequence(seq^1, seq^s) \quad \forall s = 2 \dots N$  ▷ Одинаковая последовательность
13:  $startBeforeStart(x_j^1, x_j^s) \quad \forall s = 2 \dots N; j = 1 \dots n$  ▷ Сдвиг вправо
14:
15: // Целевая функция
16: minimize  $\frac{1}{Nn} \sum_{s=2}^N \sum_{j=1}^n (startOf(x_j^s) - startOf(x_j^1))$ 

```

---

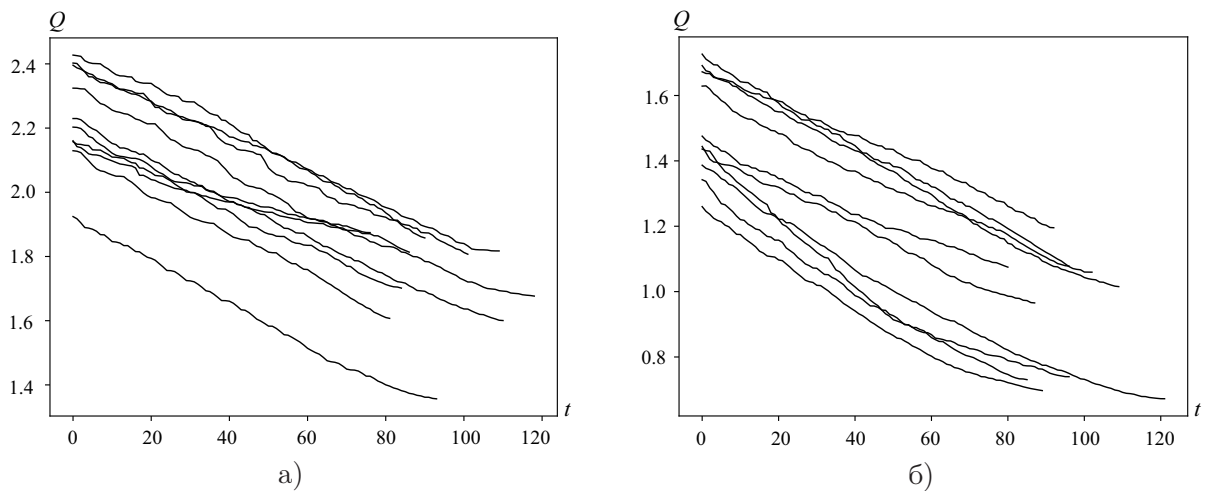
дет называться начальным, и  $p_j^1$  равняется начальной продолжительности работы для всех  $j$ . Мы задаем элемент  $P_{s,j}$  матрицы  $P$  значением  $p_j^s$  (см. строку 3), а также вводим переменную последовательности  $seq^s$ , которая задает последовательность выполнения работ на машине в сценарии  $s$  (см. строку 7). Для каждого сценария повторяем ограничения предшествования и не пересечения (см. строки 10, 11). Затем мы добавляем ограничение совпадения последовательностей выполнения работ в каждом сценарии (см. строку 12). Так как мы используем алгоритм сдвига вправо, который запрещает начинать выполнение работы раньше изначально запланированного, мы добавляем ограничение “*Start Before Start*” (см. строку 13). Целевая функция минимизирует аппроксимацию среднего ожидаемого отклонения времени стартов работ (см. строки 16).

### 3. Вычислительные эксперименты

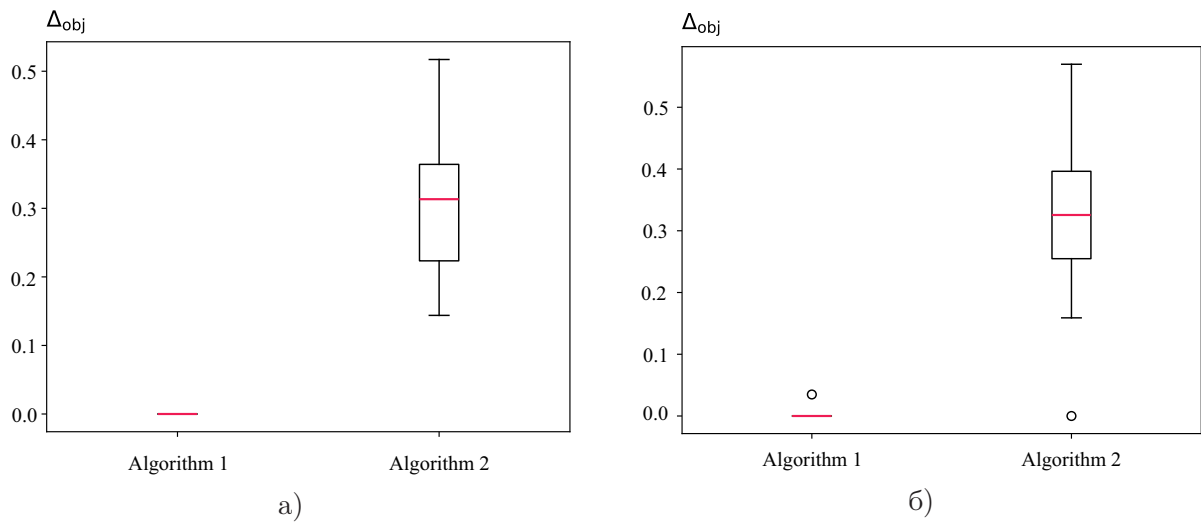
В экспериментах были рассмотрены два варианта задачи: в первом варианте продолжительности работ были взяты из равномерных распределений, во втором — из нормальных. Более формально, прежде всего мы выбрали начальную продолжительность  $p_i$  для каждой работы  $j_i$  из равномерного распределения  $\mathcal{U}[5, 10]$ . После этого был сгенерирован параметр  $d_i$  из  $\mathcal{U}[0, 1.5]$ . Далее для первого варианта задачи мы генерировали результирующие продолжительности работ  $p_i^{\text{res}}$  из  $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}(p_i, d_i) = \mathcal{U}[p_i - \sqrt{6d_i}, p_i + \sqrt{6d_i}]$  и из  $\mathcal{D}_{\mathcal{N}}(p_i, d_i) = \max\{p_i - 4; \min\{p_i + 4; \mathcal{N}(p_i, d_i)\}\}$  — для второго варианта задачи. Мы ограничили нормальные распределения на отрезке, чтобы не возникали отрицательные продолжительности работ. Все рассматриваемые вероятностные распределения симметричны относительно их математических ожиданий. При этом работы с продолжительностями, взятыми из распределения  $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}(p_i, d_i)$ , надежнее чем работы с продолжительностями из распределения  $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}(p_j, d_j)$  тогда и только тогда, когда  $d_i < d_j$  для обоих  $\mathcal{X} = \mathcal{U}, \mathcal{N}$  (см. замечание в подразд. 2.1).

В первом эксперименте для каждого варианта задачи было сгенерировано 10 случайных примеров, состоящих из 20 работ в каждом. Затем для каждого примера мы выбрали случайную начальную последовательность выполнения работ на машине. После этого, используя сортировку пузырьком, мы сортировали работы в порядке неувеличения надежности. В процессе сортировки мы измеряли целевую функцию (среднее ожидаемое отклонение времени стартов работ) после каждой перестановки соседних работ с помощью метода Монте-Карло. На рис. 2 изображена динамика изменения целевой функции в зависимости от числа сделанных перестановок. Монотонное убывание целевой функции демонстрирует эффективность предложенной эвристики “сортировка работ по надежности”.

На втором этапе было сгенерировано 30 задач с 52 работами в каждой (включая дополнительные две работы с нулевой продолжительностью в начале и конце проекта). Аналогично предыдущему эксперименту мы рассматривали два варианта задачи: с равномерно и нормально распределенными продолжительностями. Графы отношений предшествования были случайно сгенерированы с использованием алгоритма PROGEN [25] для каждой задачи. Стохастическая модель программирования в ограничениях (алгоритм 2) была реализована на языке решателя CP Optimizer [24]. Мы взяли параметр  $N = 60$  (число сценариев), эксперименты проводились на персональном ноутбуке с процессором AMD Ryzen 7 5800H, графическим чипом Radeon Graphics (3.20 GHz) и 16GB оперативной памяти. Был установлен 15-минутный лимит по времени для каждого запуска. Каждый вариант каждой задачи был решен алгоритмами 1 и 2. Среднее ожидаемое отклонение времени стартов работ было вычислено методом Монте-Карло. Для каждой задачи мы определили лучшее из двух значений целевой функции, полученных алгоритмами, и изобраили разницу значений с наилучшим на диаграмме размаха (см. рис. 3). На этих графиках можно видеть, что предлагаемая эвристика (алгоритм 1) превосходит стандартный подход (алгоритм 2) для обоих вариантов задачи, хотя и требует меньше времени для решения.



**Рис. 2.** Динамика изменения целевой функции  $Q = 1/n \sum_{j=1}^n E(\delta_j)$  в зависимости от числа перестановок  $t$  при сортировке работ пузырьком в порядке неувеличения их надежности. а) Результаты для 10 задач с равномерно распределенными продолжительностями. б) Результат для 10 задач с нормально распределенными продолжительностями.



**Рис. 3.** Сравнение эвристики (алгоритм 1) со стандартным подходом (алгоритм 2) на 30 задачах с 52 работами в каждой. Диаграмма размаха демонстрирует разницу между полученным значением целевой функции и лучшим значением из двух для каждой решенной задачи ( $\Delta_{obj}$ ) для задач с равномерно распределенными (а) и нормально распределенными (б) продолжительностями работ.

#### 4. Заключение

В статье рассмотрена стохастическая задача составления расписания работ на одной машине (SSMSP) с неопределенными продолжительностями работ и исправляющим алгоритмом сдвига вправо. Определена оптимальная последовательность выполнения трех работ с точки зрения минимизации среднего ожидаемого отклонения времени стартов работ от начальных значений. Пока не удалось обобщить результат на случай с большим числом работ, однако вычислительные эксперименты показали, что, сортируя работы в порядке невозрастания надежности, мы значительно улучшаем стабильность расписания. Данная стратегия была использована в эвристике для SSMPS с ограничениями предшествования, и вычислительные эксперименты показали, что предлагаемый подход дает лучшие результаты, чем существующий подход программирования в ограничениях.

Дальнейшие исследования будут посвящены получению теоретических результатов отно-

сительно вычислительной сложности задачи с произвольным числом работ. Также предполагается использование полученных результатов для разработки эффективного алгоритма составления расписания на нескольких параллельных машинах с ограничениями предшествования и с неопределенными продолжительностями работ.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Sabuncuoglu I., Goren S.** Hedging production schedules against uncertainty in manufacturing environment with a review of robustness and stability research // *Int. J. Comput. Integr. Manuf.* 2009. Vol. 22, no. 2. P. 138–157. <https://doi.org/10.1080/09511920802209033>
2. **Jorge L.V., Wu D.S., Storer R.H.** Robustness measures and robust scheduling for job shops // *IIE transactions.* 1994. Vol. 26, no. 5. P. 32–43. <https://doi.org/10.1080/07408179408966626>
3. **Khakifirooz M. et al.** Scheduling in Industrial environment toward future: insights from Jean-Marie Proth // *Int. J. Prod. Res.* 2024. Vol. 62, no. 1-2. P. 291–317. <https://doi.org/10.1080/00207543.2023.2245919>
4. **Lee M. et al.** A critical review of planning and scheduling in steel-making and continuous casting in the steel industry // *J. Operat. Res. Soc.* 2024. Vol. 75, no. 8. P. 1421–1455. <https://doi.org/10.1080/01605682.2023.2265416>
5. **Ghobakhloo M.** Industry 4.0, digitization, and opportunities for sustainability // *J. Cleaner Prod.* 2020. Vol. 252. Art. no. 119869. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2019.119869>
6. **Lasi H. et al.** Industry 4.0 // *Bus. Inf. Syst. Eng.* 2014. Vol. 6. P. 239–242. <https://doi.org/10.1007/s12599-014-0334-4>
7. **Martinelli R., Mariano F.C.M.Q., Martins C.B.** Single machine scheduling in make to order environments: A systematic review // *Comp. Ind. Eng.* 2022. Vol. 169. Art. no. 108190. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2022.108190>
8. **Lawler E.L. et al.** Sequencing and scheduling: Algorithms and complexity // *Handbooks in operations research and management science.* 1993. Vol. 4. P. 445–522. [https://doi.org/10.1016/S0927-0507\(05\)80189-6](https://doi.org/10.1016/S0927-0507(05)80189-6)
9. **Du J., Leung J.Y.T.** Minimizing total tardiness on one machine is NP-hard // *Math. Operat. Res.* 1990. Vol. 15, no. 3. P. 483–495. <https://doi.org/10.1287/moor.15.3.483>
10. **Lawler E.L.** Optimal sequencing of a single machine subject to precedence constraints // *Manag. Sci.* 1973. Vol. 19, no. 5. P. 544–546. <https://doi.org/10.1287/mnsc.19.5.544>
11. **Lawler E.L.** Sequencing jobs to minimize total weighted completion time subject to precedence constraints // *Ann. Discr. Math.* 1978. Vol. 2. P. 75–90. [https://doi.org/10.1016/S0167-5060\(08\)70323-6](https://doi.org/10.1016/S0167-5060(08)70323-6)
12. **Chekuri C., Motwani R.** Precedence constrained scheduling to minimize sum of weighted completion times on a single machine // *Discr. Appl. Math.* 1999. Vol. 98, no. 1-2. P. 29–38. [https://doi.org/10.1016/S0166-218X\(98\)00143-7](https://doi.org/10.1016/S0166-218X(98)00143-7)
13. **Moore J.M.** An  $n$  job, one machine sequencing algorithm for minimizing the number of late jobs // *Manag. Sci.* 1968. Vol. 15, no. 1. P. 102–109. <https://doi.org/10.1287/mnsc.15.1.102>
14. **Brucker P.** Classification of scheduling problems // *Scheduling Algorithms.* Berlin; Heidelberg: Springer, 2007. P. 1–10. [https://doi.org/10.1007/978-3-540-69516-5\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-540-69516-5_1)
15. **Ertem M., Ozcelik F., Saraç T.** Single machine scheduling problem with stochastic sequence-dependent setup times // *Inter. J. Prod. Res.* 2019. Vol. 57, no. 10. P. 3273–3289. <https://doi.org/10.1080/00207543.2019.1581383>
16. **Jia C.** Stochastic single machine scheduling with an exponentially distributed due date // *Operat. Res. Letters.* 2001. Vol. 28, no. 5. P. 199–203. [https://doi.org/10.1016/S0167-6377\(01\)00065-7](https://doi.org/10.1016/S0167-6377(01)00065-7)
17. **Soroush H.M., Fredendall L.D.** The stochastic single machine scheduling problem with earliness and tardiness costs // *Inter. J. Prod. Res.* 1994. Vol. 77, no. 2. P. 287–302. [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(94\)90373-5](https://doi.org/10.1016/0377-2217(94)90373-5)
18. **Al-Turki U., Andijani A., Arifulsalam S.** A new dispatching rule for the stochastic single-machine scheduling problem // *Simulation.* 2004. Vol. 80, no. 3. P. 165–170. <https://doi.org/10.1177/0037549704045047>
19. **Ronconi D.P., Powell W.B.** Minimizing total tardiness in a stochastic single machine scheduling problem using approximate dynamic programming // *J. Sched.* 2010. Vol. 13, no. 6. P. 597–607. <https://doi.org/10.1007/s10951-009-0160-6>

20. **Mehta S.V.** Predictable scheduling of a single machine subject to breakdowns // *Inter. J. Comp. Integr., Manufact.* 1999. Vol. 12, no. 1. P. 15–38. <https://doi.org/10.1080/095119299130443>
21. **Lu C.C., Lin S.W., Ying K.C.** Robust scheduling on a single machine to minimize total flow time // *Comput. Operat. Res.* 2012. Vol. 39, no. 7. P. 1682–1691. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2011.10.003>
22. **Gutjahr W.J., Hellmayr A., Pflug G.C.** Optimal stochastic single-machine-tardiness scheduling by stochastic branch-and-bound // *Eur. J. Operat. Res.* 1999. Vol. 117, no. 2. P. 396–413. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(98\)00279-3](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(98)00279-3)
23. **Motwani R., Raghavan P.** Randomized algorithms // *Acm Sigact News.* 1995. Vol. 26, no. 3, P. 48–50. ISBN: 0-521-47465-5.
24. CPOptimizer: IBM ILOG CP Optimizer User's Manual. IBM [e-resource]. 2022. <https://www.ibm.com/docs/ru/icos/22.1.1?topic=optimizer-cp-users-manual>
25. **Kolisch R., Sprecher A., Drexel A.** Characterization and generation of a general class of resource-constrained project scheduling problems // *Management science.* 1995. Vol. 41, no. 10. P. 1693–1703. <https://doi.org/10.1287/mnsc.41.10.1693>

Поступила 12.05.2025

После доработки 5.06.2025

Принята к публикации 9.06.2025

Опубликована онлайн 19.06.2025

Гладышев Сергей Игоревич

аспирант

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

г. Москва

e-mail: gladyshev.si@phystech.edu

Мусатова Елена Геннадьевна

канд. физ.-мат. наук

старший науч. сотрудник

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН

г. Москва

e-mail: nekolyap@mail.ru

## REFERENCES

1. Sabuncuoglu I., Goren S. Hedging production schedules against uncertainty in manufacturing environment with a review of robustness and stability research. *Inter. J. Comp. Int. Manuf.*, 2009, vol. 22, no. 2, pp. 138–157. <https://doi.org/10.1080/09511920802209033>
2. Leon V.J., Wu D.S., Storer R.H. Robustness measures and robust scheduling for job shops. *IIE transact.*, 1994, vol. 26, no. 5, pp. 32–43. <https://doi.org/10.1080/07408179408966626>
3. Khakifirooz M., Fathi M., Dolgui A., Pardalos P.M. Scheduling in industrial environment toward future: insights from Jean-Marie Proth. *Inter. J. Prod. Res.*, 2024, vol. 62, no. 1–2, pp. 291–317. <https://doi.org/10.1080/00207543.2023.2245919>
4. Lee M., Moon K., Lee K., Hong J., Pinedo M. A critical review of planning and scheduling in steel-making and continuous casting in the steel industry. *J. Operat. Res. Soc.*, 2024, vol. 75, no. 8, pp. 1421–1455. <https://doi.org/10.1080/01605682.2023.2265416>
5. Ghobakhloo M. Industry 4.0, digitization, and opportunities for sustainability. *J. Cleaner Prod.*, 2020, vol. 252, art. no. 119869. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2019.119869>
6. Lasi H., Fettke P., Kemper H.-G., Feld T., Hoffmann M. Industry 4.0. *Bus. Inf. Syst. Eng.*, 2014, vol. 6, pp. 239–242. <https://doi.org/10.1007/s12599-014-0334-4>
7. Martinelli R., Mariano F.C.M.Q., Martins C.B. Single machine scheduling in make to order environments: a systematic review. *Comp. Ind. Eng.*, 2022, vol. 169, art. no. 108190. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2022.108190>

8. Lawler E.L., Lenstra J.K., Kan A.H.G.R, Shmoys D.B. Sequencing and scheduling: algorithms and complexity. In book: *Handbooks in operations research and management science*, 1993, vol. 4, pp. 445–522. [https://doi.org/10.1016/S0927-0507\(05\)80189-6](https://doi.org/10.1016/S0927-0507(05)80189-6)
9. Du J., Leung J.Y.T. Minimizing total tardiness on one machine is *NP*-hard. *Math. Operat. Res.*, 1990, vol. 15, no. 3, pp. 483–495. <https://doi.org/10.1287/moor.15.3.483>
10. Lawler E.L. Optimal sequencing of a single machine subject to precedence constraints. *Manag. Sci.*, 1973, vol. 19, no. 5, pp. 544–546. <https://doi.org/10.1287/mnsc.19.5.544>
11. Lawler E.L. Sequencing jobs to minimize total weighted completion time subject to precedence constraints. *Ann. Discr. Math.*, 1978, vol. 2, pp. 75–90. [https://doi.org/10.1016/S0167-5060\(08\)70323-6](https://doi.org/10.1016/S0167-5060(08)70323-6)
12. Chekuri C., Motwani R. Precedence constrained scheduling to minimize sum of weighted completion times on a single machine. *Discr. Appl. Math.*, 1999, vol. 98, no. 1–2, pp. 29–38. [https://doi.org/10.1016/S0166-218X\(98\)00143-7](https://doi.org/10.1016/S0166-218X(98)00143-7)
13. Moore J.M. An *n* job, one machine sequencing algorithm for minimizing the number of late jobs. *Manag. Sci.*, 1968, vol. 15, no. 1, pp. 102–109. <https://doi.org/10.1287/mnsc.15.1.102>
14. Brucker P. Classification of scheduling problems. In book: *Scheduling algorithms*, Berlin, Heidelberg, Springer, 2007, p. 1–10. [https://doi.org/10.1007/978-3-540-69516-5\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-540-69516-5_1)
15. Ertem M., Ozcelik F., Saraç T. Single machine scheduling problem with stochastic sequence-dependent setup times. *Inter. J. Prod. Res.*, 2019, vol. 57, no. 10, pp. 3273–3289. <https://doi.org/10.1080/00207543.2019.1581383>
16. Jia C. Stochastic single machine scheduling with an exponentially distributed due date. *Operat. Res. Letters*, 2001, vol. 28, no. 5, pp. 199–203. [https://doi.org/10.1016/S0167-6377\(01\)00065-7](https://doi.org/10.1016/S0167-6377(01)00065-7)
17. Soroush H.M., Fredendall L.D. The stochastic single machine scheduling problem with earliness and tardiness costs. *Eur. J. Operat. Res.*, 1994, vol. 77, no. 2, pp. 287–302. [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(94\)90373-5](https://doi.org/10.1016/0377-2217(94)90373-5)
18. Al-Turki U., Andijani A., Arifulsalam S. A new dispatching rule for the stochastic single-machine scheduling problem. *Simulation*, 2004, vol. 80, no. 3, pp. 165–170. <https://doi.org/10.1177/0037549704045047>
19. Ronconi D.P., Powell W.B. Minimizing total tardiness in a stochastic single machine scheduling problem using approximate dynamic programming. *J. Sched.*, 2010, vol. 13, no. 6, pp. 597–607. <https://doi.org/10.1007/s10951-009-0160-6>
20. Mehta S.V. Predictable scheduling of a single machine subject to breakdowns. *Inter. J. Comp. Integr., Manufact.*, 1999, vol. 12, no. 1, pp. 15–38. <https://doi.org/10.1080/095119299130443>
21. Lu C.-C., Lin S.-W., Ying K.-C. Robust scheduling on a single machine to minimize total flow time. *Comput. Operat. Res.*, 2012, vol. 39, no. 7, pp. 1682–1691. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2011.10.003>
22. Gutjahr W.J., Hellmayr A., Pflug G.C. Optimal stochastic single-machine-tardiness scheduling by stochastic branch-and-bound. *Eur. J. Operat. Res.*, 1999, vol. 117, no. 2, pp. 396–413. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(98\)00279-3](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(98)00279-3)
23. Motwani R., Raghavan P. Randomized algorithms. *ACM SIGACT News*, 1995, vol. 26, no. 3, pp. 48–50. <https://doi.org/10.1145/211542.606546>
24. CPOptimizer: IBM ILOG CP Optimizer User’s Manual. IBM [e-resource]. 2022. <https://www.ibm.com/docs/ru/icos/22.1.1?topic=optimizer-cp-users-manual>
25. Kolisch R., Sprecher A., Drexel A. Characterization and generation of a general class of resource-constrained project scheduling problems. *Manag. Sci.*, 1995, vol. 41, no. 10, pp. 1693–1703. <https://doi.org/10.1287/mnsc.41.10.1693>

Received May 12, 2025

Revised June 5, 2025

Accepted June 9, 2025

Published online June 19, 2025

*Sergei Igorevich Gladyshev*, doctoral student, Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, 141701 Russia, e-mail: gladyshev.si@phystech.edu.

*Elena Gennadievna Musatova*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, 117997 Russia, e-mail: nekolyap@mail.ru.

Cite this article as: S. I. Gladyshev, E. G. Musatova. Heuristic “Safe Jobs First” for stochastic single machine scheduling problem. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 3, pp. 91–104.