

УДК 517.518+517.983

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА В РАВНОМЕРНОЙ НОРМЕ НА ОСИ НА КЛАССЕ ФУНКЦИЙ С СУММИРУЕМЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ФУРЬЕ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ¹

В. В. Арестов

Дано решение задачи Стечкина о наилучшем приближении в равномерной норме на числовой оси операторов дифференцирования дробного (а точнее, вещественного) порядка k линейными ограниченными операторами из пространства L^2 в пространство C на классе функций \mathcal{Q}^n , преобразование Фурье дробной производной порядка n , $0 \leq k < n$, которых суммируемо. Приведено соответствующее точное неравенство Колмогорова. Получено решение задачи об оптимальном восстановлении оператора дифференцирования дробного порядка k на функциях класса \mathcal{Q}^n , заданных с известной погрешностью в пространстве L^2 .

Ключевые слова: оператор дробного дифференцирования, задача Стечкина, неравенство Колмогорова, оптимальное дифференцирование.

V. V. Arestov. Best approximation of a fractional-order differentiation operator in the uniform norm on the axis on the class of functions with integrable Fourier transform of the highest derivative.

A solution is given to Stechkin's problem on the best approximation in the uniform norm on the real axis of differentiation operators of fractional (more precisely, real) order k by bounded linear operators from the space L^2 to the space C on the class of functions \mathcal{Q}^n whose Fourier transform of the n th-order fractional derivative, $0 \leq k < n$, is integrable. The corresponding exact Kolmogorov inequality is given. A solution is obtained to the problem of optimal recovery of the differentiation operator of fractional order k on functions of the class \mathcal{Q}^n defined with a known error in the space L^2 .

Keywords: fractional-order differentiation operator, Stechkin's problem, Kolmogorov inequality, optimal differentiation.

MSC: 47B38, 54C35, 47A58, 26D10

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-3-fon-01

1. Введение

1.1. Обозначения и предварительные сведения

В данной статье исследуется вариант задачи Стечкина о наилучшем приближении оператора дифференцирования линейными ограниченными операторами на классе гладких функций. Задача приближения линейного неограниченного оператора линейными ограниченными операторами на классе элементов возникла в исследованиях С. Б. Стечкина [1]. В настоящее время существует большое число результатов о приближении оператора дифференцирования порядка k на классе n раз ($0 \leq k < n$) дифференцируемых функций в пространствах Лебега на оси и полуоси. Такие задачи изучали С. Б. Стечкин, Л. В. Тайков, Ю. Н. Субботин, В. Н. Габушин, В. И. Бердышев; В. М. Тихомиров, А. П. Буслаев, Г. Г. Магарил-Ильяев, В. Ф. Бабенко, Ю. В. Бабенко, О. В. Коваленко, Н. В. Парфинович, В. В. Арестов, Р. Р. Акопян, В. Г. Тимофеев, М. А. Филатова, Е. Е. Бердышева и многие другие (см., в частности, работы [2–7], монографию [8] и библиографию в них). С. Б. Стечкин заметил, что задача приближения оператора дифференцирования в пространствах Лебега на оси и полуоси

¹Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 25-21-00118, <https://rscf.ru/project/25-21-00118/>.

связана с задачей о точных неравенствах Колмогорова между нормами промежуточных производных функций. Такие неравенства изучали Г. Харди, Дж. Литтлвуд, Е. Ландау, Ж. Адамар, В. Szőkefalvi-Nagy, А. Н. Колмогоров, С. Б. Стечкин, I. J. Schoenberg, А. Cavaretta, Л. В. Тайков, В. Н. Габушин, В. И. Бердышев, Н. П. Кушцов, В. М. Тихомиров, А. П. Буслаев, Г. Г. Магарил-Ильяев, В. Ф. Бабенко, А. А. Лигун, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов и др. (см. [2; 3; 5; 8; 9] и библиографию в них). Связь этих двух задач оказалась результативным методом исследования обеих; данный метод будет применен и в настоящей работе. Результаты, полученные при решении двух задач, находят применение в исследовании задачи оптимального восстановления операторов дифференцирования на функциях, заданных с ошибкой (численном дифференцировании приближенно заданных функций); указанной задаче в настоящее время посвящены обширные исследования, см. [3; 10–12] и библиографию в них. Вариант задачи восстановления будет обсуждаться ниже в данной работе.

В статье используются стандартные обозначения пространств комплекснозначных функций на числовой оси: $L^\gamma = L^\gamma(-\infty, \infty)$ для вещественного γ , $1 \leq \gamma < \infty$, есть пространство Лебега измеримых функций f , у которых γ -степень модуля $|f|^\gamma$ суммируема на оси. Пространство L^γ наделено нормой

$$\|f\|_\gamma = \|f\|_{L^\gamma} = \left(\int |f(t)|^\gamma dt \right)^{1/\gamma}$$

(здесь и ниже в интегралах по оси множество интегрирования не указано); $L^\infty = L^\infty(-\infty, \infty)$ — пространство измеримых, существенно ограниченных функций на оси, наделенное нормой $\|f\|_\infty = \|f\|_{L^\infty} = \text{ess sup}\{|f(t)| : t \in (-\infty, \infty)\}$; $C = C(-\infty, \infty)$ — пространство непрерывных, ограниченных функций на оси, наделенное равномерной нормой $\|f\|_C = \sup\{|f(t)| : t \in (-\infty, \infty)\}$; $C_0 = C_0(-\infty, \infty)$ — подпространство пространства C функций, имеющих нулевой предел на $\pm\infty$.

Перечисленные функциональные пространства и их нормы инвариантны относительно группы сдвигов $\{\tau_h, h \in \mathbb{R}\}$, определенных формулой $(\tau_h f)(t) = f(t - h)$, $t \in \mathbb{R}$. Наряду с $\{\tau_h, h \in \mathbb{R}\}$ определим родственное семейство операторов $\{\sigma_h, h \in \mathbb{R}\}$, заданных формулой $(\sigma_h f)(t) = f(h - t)$, $t \in \mathbb{R}$. Операторы этих двух семейств связаны следующим образом: $\sigma_h = \tau_h \sigma_0$, где σ_0 — оператор изменения знака аргумента функции: $(\sigma_0 f)(t) = f(-t)$, $t \in \mathbb{R}$.

В дальнейшем для пары функций f, g с суммируемым произведением fg , в частности для пары функций $f \in L^\gamma, g \in L^{\gamma'}$, $1 \leq \gamma \leq \infty, 1/\gamma + 1/\gamma' = 1$, будет использоваться обозначение

$$\langle f, g \rangle = \int f(t)g(t) dt.$$

Пусть далее \mathcal{S} — пространство быстро убывающих, бесконечно дифференцируемых функций на оси со стандартной топологией, а \mathcal{S}' — соответствующее двойственное пространство обобщенных функций (см., например, [13; 14]). Значение функционала $\theta \in \mathcal{S}'$ на функции $\phi \in \mathcal{S}$ будем обозначать как $\langle \theta, \phi \rangle$. Пространство \mathcal{S}' содержит множество $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbb{R})$ функций f , измеримых, локально суммируемых на \mathbb{R} и удовлетворяющих условию $\int (1 + |t|)^d |f(t)| dt < \infty$ с некоторым показателем $d = d(f) \in \mathbb{R}$; функции $f \in \mathcal{L}$ называют медленно растущими (классическими) функциями. Функции $f \in \mathcal{L}$ сопоставляется функционал $f \in \mathcal{S}'$ по формуле

$$\langle f, \phi \rangle = \int f(t)\phi(t) dt, \quad \phi \in \mathcal{S}.$$

Сверткой $\theta * \phi$ элемента $\theta \in \mathcal{S}'$ и функции $\phi \in \mathcal{S}$ называют функцию $y(\eta) = \langle \theta, \sigma_\eta \phi \rangle$. Если $\theta \in \mathcal{L}$ — классическая функция, то

$$(\theta * \phi)(\eta) = \int \theta(t)\phi(\eta - t) dt. \quad (1.1)$$

Прямое и обратное преобразования Фурье функций определены соответственно формулами

$$\widehat{f}(t) = \int e^{-2\pi t\eta} f(\eta) d\eta, \quad \check{g}(t) = \int e^{2\pi t\eta} g(\eta) d\eta = \widehat{g}(-t). \quad (1.2)$$

В этих формулах интегралы в классическом смысле существуют лишь для суммируемых функций f, g . Оператор (преобразования) Фурье, определенный первой формулой (1.2), является естественным и особенно полезным в пространстве L^2 (его определение и свойства можно найти, к примеру, в [13, гл. 1, разд. 1 и разд. 2]). В пространстве L^2 для преобразования Фурье выполняется равенство Парсеваля

$$\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2, \quad f \in L^2. \quad (1.3)$$

Для удобства дальнейших ссылок отметим еще равенство

$$\langle f, \widehat{g} \rangle = \langle \widehat{f}, g \rangle, \quad f, g \in L^2, \quad (1.4)$$

по сути, эквивалентное равенству Парсеваля (1.3).

Преобразование Фурье (обобщенной функции) функционала $\theta \in \mathcal{S}'$ есть функционал $\widehat{\theta} \in \mathcal{S}'$, действующий по формуле

$$\langle \widehat{\theta}, \phi \rangle = \langle \theta, \widehat{\phi} \rangle, \quad \phi \in \mathcal{S}, \quad (1.5)$$

(ср. с (1.4)). Пусть, в частности, $g \in L(-\infty, \infty)$ и (в классическом смысле) $f = \widehat{g}$; в этом случае $f \in C_0$. Построение функции g по функции f , т.е. обращение преобразования Фурье $g = \check{f}$ в данной ситуации строится с помощью методов суммирования (см., к примеру, в [13, гл. 1, разд. 1]). Однако можно использовать подход (1.5) теории обобщенных функций. В самом деле, согласно (1.5) имеем $\langle \check{f}, \phi \rangle = \langle f, \check{\phi} \rangle = \langle \widehat{g}, \check{\phi} \rangle$. Применив вновь (1.5), находим $\langle \widehat{g}, \check{\phi} \rangle = \langle g, \widehat{\check{\phi}} \rangle = \langle g, \phi \rangle$. В результате получаем $\langle \check{f}, \phi \rangle = \langle g, \phi \rangle$, $\phi \in \mathcal{S}$, так что $\check{f} = g$.

1.2. Постановка задач и формулировка результатов

При вещественном положительном n обозначим через \mathcal{W}^n пространство функций $f \in L^2$, производная $D^n f$ вещественного (иногда говорят дробного) порядка n которых принадлежит пространству C_0 : $D^n f \in C_0$ и, более того, преобразование Фурье этой производной суммируемо: $\widehat{D^n f} \in L$. Для того чтобы строго описать пространство \mathcal{W}^n , дадим некоторые определения.

В комплексной плоскости $\mathbb{C}(\theta_0) = \mathbb{C} \setminus \ell(\theta_0)$ с разрезом вдоль луча

$$\ell(\theta_0) = \{re^{i\theta_0} : 0 \leq r < \infty\}, \quad -\pi < \theta_0 < -\pi/2,$$

определим для вещественного $\rho > 0$ функцию

$$z^\rho = \exp(\rho \ln_0 z) = |z|^\rho \exp(i\rho \arg z), \quad z \in \mathbb{C}(\theta_0), \quad \theta_0 < \arg z < \theta_0 + 2\pi,$$

где \ln_0 есть однозначная аналитическая ветвь логарифма $\ln_0 z = \ln|z| + i \arg z$, $z \in \mathbb{C}(\theta_0)$, $\theta_0 < \arg z < \theta_0 + 2\pi$; в области $\mathbb{C}(\theta_0)$ функция z^ρ аналитическая. Легко проверить следующие два свойства функции z^ρ :

- (1) $z^\rho \rightarrow 0$ при $z \rightarrow 0$, $z \in \mathbb{C}(\theta_0)$; в связи с этим будем считать, что $0^\rho = 0$;
- (2) для $\rho_1, \rho_2 > 0$ имеет место равенство

$$z^{\rho_1} z^{\rho_2} = z^{\rho_1 + \rho_2}, \quad z \in \mathbb{C}(\theta_0). \quad (1.6)$$

Для вещественного (необязательно целого) $n > 0$ определим производную $D^n \phi$ порядка n основных функций $\phi \in \mathcal{S}$ формулой

$$D^n \phi(t) = \int (-2\pi\eta i)^n e^{2\pi t\eta} \widehat{\phi}(\eta) d\eta, \quad \phi \in \mathcal{S}. \quad (1.7)$$

Функция $D^n \phi$ бесконечно дифференцируема, ограничена и принадлежит пространству L^2 на оси, а значит, и всем L^p , $2 \leq p \leq \infty$, однако, вообще говоря, она может не принадлежать пространству \mathcal{L} . Если для пары функций $f \in L^p$, $1 \leq p \leq 2$, и $g \in \mathcal{L}$ выполняется свойство

$$\langle g, \phi \rangle = \langle f, D^n \phi \rangle, \quad \phi \in \mathcal{L}, \quad (1.8)$$

то будем считать функцию g производной (дробного или вещественного) порядка n функции f и применять для нее обозначение $g = D^n f$. Если для функции f найдется функция $g \in \mathcal{L}$ со свойством (1.8), то будем говорить, что у функции f существует производная порядка n ; соотношением (1.8) производная $D^n f$ по функции f определена однозначно (если, конечно, она существует). При $n = 0$ стандартно считаем $D^0 f = f$. Для натурального n свойство (1.8) пары функций $f, g \in \mathcal{L}$ влечет, что $g = (-1)^n f^{(n)}$; здесь $f^{(n)}$ есть классическая производная порядка n функции f , а точнее, функция f на оси $n - 1$ раз непрерывно дифференцируема, ее производная $f^{(n-1)}$ порядка $n - 1$ локально абсолютно непрерывна и ее производная (т.е. производная $f^{(n)}$ порядка n функции f) почти всюду на оси равна функции $(-1)^n g$. Если же функция g непрерывная, то функция f является n раз непрерывно дифференцируемой (см., например, разд. 5 гл. 1 в [14]).

Обозначим через $W_{2,\infty}^n$, $n \geq 0$, пространство функций $f \in L^2$, у которых производная $D^n f$ порядка n существует и является существенно ограниченной функцией: $D^n f \in L^\infty$.

При вещественном $n \geq 0$ обозначим через \mathcal{W}^n пространство функций $f \in W_{2,\infty}^n$, преобразование Фурье $\widehat{D^n f}$ производной $D^n f$ порядка n которых суммируемо: $\widehat{D^n f} \in L$. Здесь преобразование Фурье $y_n = \widehat{D^n f}$ функции $D^n f \in L^\infty$ понимается в пространстве \mathcal{S}' и определяется соотношением (1.5):

$$\langle y_n, \phi \rangle = \langle D^n f, \widehat{\phi} \rangle, \quad \phi \in \mathcal{S}.$$

В этой ситуации $D^n f$ есть классическое обратное преобразование Фурье функции y_n : $D^n f = \widetilde{y}_n$, $y_n \in L$; это, в частности, влечет, что $D^n f \in C_0$. Итак, можно сказать, что пространство \mathcal{W}^n образовано функциями $f \in L^2$, производная $D^n f$ порядка n которых есть функция пространства C_0 и, более того, является (классическим обратным) преобразованием Фурье суммируемой функции.

Ниже, в подразд. 2.1, будут приведены некоторые свойства пространства \mathcal{W}^n , в частности будет доказано, что при любых $0 \leq k < n$ имеет место вложение $\mathcal{W}^n \subset \mathcal{W}^k$. Последний факт позволяет рассматривать модуль непрерывности

$$\omega(\delta) = \sup\{\|D^k f\|_C : f \in \mathcal{Q}^n, \|f\|_{L^2} \leq \delta\}, \quad \delta \geq 0, \quad (1.9)$$

оператора дифференцирования D^k порядка k , $0 \leq k < n$, в равномерной норме на оси на классе

$$\mathcal{Q}^n = \{f \in \mathcal{W}^n : \|\widehat{D^n f}\|_1 \leq 1\}.$$

Для модуля непрерывности (1.9) имеет место формула

$$\omega(\delta) = \omega(1)\delta^\alpha, \quad \alpha = \frac{n-k}{n+1/2}, \quad \delta > 0; \quad (1.10)$$

эта формула будет доказана в лемме 2.

Формула (1.10) влечет, что для функций пространства \mathcal{W}^n справедливо неравенство колмогоровского типа

$$\|D^k f\|_C \leq K \|f\|_2^\alpha \|\widehat{D^n f}\|_1^\beta, \quad f \in \mathcal{W}^n, \quad (1.11)$$

$$\alpha = \frac{2(n-k)}{2n+1}, \quad \beta = 1 - \alpha = \frac{2k+1}{2n+1}, \quad (1.12)$$

с наилучшей (наименьшей возможной) константой $K = \omega(1)$.

Обозначим через $\mathfrak{B}(L^2, C)$ множество всех линейных ограниченных операторов из L^2 в C и через $\mathfrak{B}(N; L^2, C)$, $N > 0$, — множество операторов $T \in \mathfrak{B}(L^2, C)$ с нормой $\|T\|_{L^2 \rightarrow C} \leq N$. Для оператора $T \in \mathfrak{B}(L^2, C)$ величина

$$U(T) = \sup\{\|D^k f - Tf\|_{C(\mathbb{R})} : f \in \mathcal{Q}^n\}$$

есть уклонение в пространстве C оператора T от оператора дифференцирования D^k на классе \mathcal{Q}^n . Тогда при $N > 0$ величина

$$E(N) = E(N; n, k) = \inf\{U(T) : T \in \mathfrak{B}(N; L^2, C)\} \quad (1.13)$$

есть наилучшее приближение (в пространстве C) оператора дифференцирования D^k на классе \mathcal{Q}^n множеством (линейных ограниченных операторов $\mathfrak{B}(N; L^2, C)$). Задача состоит в исследовании величины (1.13) и экстремального оператора, на котором в (1.13) достигается нижняя грань; это конкретный вариант задачи Стечкина о приближении неограниченного линейного оператора линейными ограниченными [1].

Основными в данной работе являются следующие два утверждения. В их формулировке используется функция

$$\theta_h(t) = (2\pi t i)^k \max\{0, (1 - (2\pi h)^{n-k} |t|^{n-k})\}, \quad t \in (-\infty, \infty), \quad (1.14)$$

зависящая от параметра $h > 0$. Заготовим на будущее оператор типа свертки (1.1), ядро которого есть преобразование Фурье $\widehat{\theta}_h$ функции θ_h :

$$(T_h f)(x) = (f \star \widehat{\theta}_h)(x) = \int f(x+t) \widehat{\theta}_h(t) dt, \quad f \in L^2. \quad (1.15)$$

Теорема 1. Для задачи (1.13) при $0 \leq k < n$ и

$$N = N(h) = \left(\frac{2}{\pi h^{2k+1}}\right)^{1/2} \frac{(n-k)}{\{(2k+1)(2n+1)(n+k+1)\}^{1/2}}, \quad h > 0, \quad (1.16)$$

справедливы следующие утверждения:

(1) имеет место равенство

$$E(N(h)) = h^{n-k}; \quad (1.17)$$

(2) оператор свертки T_h , определенный формулой (1.15), является экстремальным в задаче (1.13).

Теорема 2. На множестве \mathcal{W}^n выполняется неравенство (1.11). В этом неравенстве наилучшая константа $K = K(n, k)$ имеет значение

$$K = \left(\frac{1}{2\pi(n+k+1)}\right)^{(n-k)/(2n+1)} \left(\frac{2n+1}{2k+1}\right)^{(n+k+1)/(2n+1)}, \quad (1.18)$$

и функция $f_h = \widehat{\theta}_h$, $h > 0$, определенная с помощью функции (1.14), является экстремальной.

Эти две теоремы будут доказаны ниже в подразд. 3.1 одновременно.

Результаты теорем 1 и 2 позволяют получить решение задачи об оптимальном восстановлении оператора D^k дифференцирования дробного порядка k на функциях класса \mathcal{Q}^n при $0 \leq k < n$, заданных с известной погрешностью в пространстве L^2 .

Опишем задачу точно. Пусть \mathcal{O} — множество всех однозначных отображений пространства L^2 в пространство C ; отображения этого множества будем называть здесь методами восстановления. Для метода $T \in \mathcal{O}$ величина

$$u(\delta, T) = \sup_{f \in \mathcal{Q}^n} \sup_{\|\varphi - f\|_{L^2} \leq \delta, \varphi \in L^2} \|D^k f - T\varphi\|_C \quad (1.19)$$

есть погрешность восстановления оператора D^k на функциях класса \mathcal{Q}^n , заданных с известной погрешностью δ в пространстве L^2 . Тогда величина

$$\nu(\delta) = \inf\{u(\delta, T): T \in \mathcal{O}\} \quad (1.20)$$

— наименьшая (оптимальная) погрешность восстановления, а метод T^* , на котором в (1.20) достигается нижняя грань, называют оптимальным методом восстановления.

Задачи восстановления неограниченных операторов на элементах класса (класса корректности), известных с погрешностью, возникают и изучаются в теории некорректных задач, теории приближения и других разделах математики и ее приложениях (см., в частности, [3; 11; 12] и библиографию в них). Обширные исследования посвящены задаче оптимального восстановления операторов дифференцирования на функциях, заданных с ошибкой (численному дифференцированию приближенно заданных функций), к которой относится и задача (1.20) (см. [3; 10–12] и библиографию в них).

Как частный случай более общих результатов известно (см., к примеру, [3; 10]), что величина (1.20), модуль непрерывности (1.9) и значение (1.13) задачи Стечкина связаны неравенствами

$$\omega(\delta) \leq \nu(\delta) \leq \ell(\delta), \quad \ell(\delta) = \inf\{E(N) + N\delta: N > 0\}. \quad (1.21)$$

В следующем утверждении содержится уточнение этого результата.

Теорема 3. *При любых $0 \leq k < n$ и $\delta > 0$ справедливы следующие два утверждения.*

(1) *Оба неравенства (1.21) обращаются в равенство, в частности*

$$\nu(\delta) = K\delta^\alpha, \quad \alpha = \frac{2(n-k)}{2n+1};$$

константа K определена формулой (1.18).

(2) *Оператор свертки T_{h^*} , определенный формулой (1.15), при*

$$h^* = \delta^{2/(2n+1)} \left(\frac{2k+1}{2\pi(2n+1)(n+k+1)} \right)^{1/(2n+1)}$$

является оптимальным методом восстановления в задаче (1.20).

Согласно теореме 3 в задаче (1.20) линейный метод T_{h^*} оказался оптимальным. Известно (см., к примеру, [10]), что в задаче (1.20) существует и нелинейный метод.

Доказательство теоремы 3 будет приведено в подразд. 3.2.

2. Вспомогательные утверждения

2.1. Пространство \mathcal{W}^n

В следующем утверждении обсуждаются свойства функций пространства \mathcal{W}^n . Это утверждение является аналогом леммы 2 из [7].

Лемма 1. *При любом вещественном $n \geq 0$ пространство \mathcal{W}^n состоит из функций $f \in L^2$, обладающих свойством*

$$y_n(\eta) = (2\pi\eta i)^n \widehat{f}(\eta) \in L(-\infty, \infty); \quad (2.1)$$

при этом

$$D^n f(t) = \widetilde{y}_n(t) = \int e^{2\pi t \eta i} (2\pi\eta i)^n \widehat{f}(\eta) d\eta. \quad (2.2)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f \in \mathcal{W}^n$; это означает, что $f \in L^2$, производная $D^n f$ существует и $y_n = \widehat{D^n f} \in L$. Предстоит доказать, что для функции y_n справедливо представление (2.1), а следовательно и соотношение (2.2).

Согласно определению (1.8)

$$\langle D^n f, \phi \rangle = \langle f, D^n \phi \rangle, \quad \phi \in \mathcal{S}. \quad (2.3)$$

Функция $f \in L^2$ восстанавливается по ее преобразованию Фурье формулой обратного преобразования: $f = \check{v}$, $v = \hat{f}$. Подставив это представление и равенство $D^n f = \check{y}_n$ в (2.3), получаем

$$\langle \check{y}_n, \phi \rangle = \langle \check{v}, D^n \phi \rangle, \quad \phi \in \mathcal{S}. \quad (2.4)$$

Для пары функций $u, v \in L^2$ выполняется равенство $\langle \check{u}, v \rangle = \langle u, \check{v} \rangle$, эквивалентное равенству Парсеваля (1.3) и равенству (1.4). Применяя это равенство в левой и правой частях (2.4), приходим к соотношению

$$\langle y_n, \check{\phi} \rangle = \langle \hat{f}, \widehat{D^n \phi} \rangle, \quad \phi \in \mathcal{S}. \quad (2.5)$$

Для $\phi \in \mathcal{S}$ положим $\psi = \check{\phi}$; это отображение есть биекция пространства \mathcal{S} на себя. Имеем $\phi = \hat{\psi}$. Выразим теперь $\widehat{D^n \phi}$ через ψ . Формула (1.7) влечет, что $\widehat{D^n \phi}(\eta) = (-2\pi\eta i)^n \hat{\phi}(\eta)$, $\eta \in \mathbb{R}$; равенство здесь понимается в пространстве L^2 . Отсюда

$$\widehat{D^n \phi}(\eta) = \widehat{D^n \phi}(-\eta) = (2\pi\eta i)^n \hat{\phi}(-\eta) = (2\pi\eta i)^n \check{\phi}(\eta) = (2\pi\eta i)^n \psi(\eta), \quad \eta \in \mathbb{R},$$

и окончательно имеем

$$\widehat{D^n \phi}(\eta) = (2\pi\eta i)^n \psi(\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Подставив теперь представление ϕ через ψ в (2.5), получаем равенство

$$\int y_n(\eta) \psi(\eta) d\eta = \int \hat{f}(\eta) (2\pi\eta i)^n \psi(\eta) d\eta$$

или

$$\int \left(y_n(\eta) - (2\pi\eta i)^n \hat{f}(\eta) \right) \psi(\eta) d\eta = 0, \quad \psi \in \mathcal{S}.$$

Последнее соотношение влечет, что

$$y_n(\eta) - (2\pi\eta i)^n \hat{f}(\eta) = 0, \quad \text{п. в. на оси.}$$

Необходимость свойства (2.1) доказана.

Достаточность. Предположим, что $f \in L^2$ и для функции f выполняется свойство (2.1). Убедимся, что тогда производная $D^n f$ существует и, более того, $D^n f = \check{y}_n$, а значит $f \in \mathcal{W}^n$. В предположении (2.1), применяя, в частности, свойство (2.6) для $\phi \in \mathcal{S}$, находим

$$\langle \check{y}_n, \phi \rangle = \langle y_n, \check{\phi} \rangle = \int (2\pi\eta i)^n \hat{f}(\eta) \check{\phi}(\eta) d\eta = \langle \hat{f}, \widehat{D^n \phi} \rangle = \langle f, D^n \phi \rangle.$$

Итак, имеет место соотношение $\langle \check{y}_n, \phi \rangle = \langle f, D^n \phi \rangle$, $\phi \in \mathcal{S}$. Согласно определению (1.8) последнее соотношение означает, что $D^n f$ существует и, более того, $D^n f = \check{y}_n$. Таким образом, $f \in \mathcal{W}^n$.

Лемма 1 полностью доказана.

Следствие 1. При $0 \leq k < n$ имеет место вложение $\mathcal{W}^n \subset \mathcal{W}^k$ и для производной $D^k f$ порядка k , $0 \leq k \leq n$, функции $f \in \mathcal{W}^n$ справедлива формула

$$D^k f(t) = \check{y}_k(t) = \int e^{2\pi t \eta i} (2\pi\eta i)^k \hat{f}(\eta) d\eta, \quad (2.7)$$

в которой функция $y_k(\eta) = (2\pi\eta i)^k \hat{f}(\eta)$, $\eta \in \mathbb{R}$, суммируема. Как следствие, функция $f \in \mathcal{W}^n$ и любая ее производная $D^k f$, $0 \leq k < n$, принадлежат пространству C_0 .

Формуле (2.7) можно дать такое толкование: при $0 \leq k \leq n$ для преобразования Фурье (понимаемого в смысле теории обобщенных функций) $\widehat{D^k f}$ производной $D^k f$ функции $f \in \mathcal{W}^n$ имеет место формула

$$\widehat{D^k f}(\eta) = (2\pi\eta i)^k \widehat{f}(\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

Доказательство следствия. Неравенство

$$|(2\pi\eta i)^k \widehat{f}(\eta)| \leq (1 + |(2\pi\eta i)^n|) |\widehat{f}(\eta)|, \quad \eta \in \mathbb{R},$$

свойство (2.1) и свойство $f \in L^2$ влекут, что функция $y_k(\eta) = (2\pi\eta i)^k \widehat{f}(\eta)$ суммируема на оси. Отсюда в силу леммы 1 вытекает, что $f \in \mathcal{W}^k$. Так что для $f \in \mathcal{W}^n$ формула (2.7) выполняется уже при любом k , $0 \leq k \leq n$. Интеграл в правой части формулы (2.7) является непрерывной функцией, а точнее, принадлежит пространству C_0 . Следствие 1 обосновано. \square

Следствие 1 влечет

Следствие 2. Для неотрицательного целого n пространство \mathcal{W}^n состоит из функций $f \in L^2$, непрерывно дифференцируемых (в классическом смысле) n раз на оси, все их производные $f^{(k)}$, $0 \leq k \leq n$, принадлежат пространству C_0 и, более того, являются преобразованиями Фурье суммируемых функций.

2.2. Однородность модуля непрерывности

Формула (1.10) для модуля непрерывности (1.9) доказывается стандартным образом (см. [1] и, к примеру, [3]). Однако в связи с тем что в данной работе рассматриваются не классические, а дробные производные, ее обоснование имеет некоторые особенности, поэтому здесь будет приведено доказательство формулы (1.10).

Определим более общую в сравнении с модулем непрерывности (1.9) функцию двух переменных $\delta, M > 0$:

$$\begin{aligned} \omega(\delta, M) &= \sup\{\|D^k f\|_C : f \in \mathcal{W}(\delta, M)\}, \\ \mathcal{W}(\delta, M) &= \{f \in \mathcal{W}^n, \|f\|_{L^2} \leq \delta, \|\widehat{D^n f}\|_L \leq M\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Получаем $\omega(\delta) = \omega(\delta, 1)$.

Лемма 2. При любых $\delta > 0$, $M > 0$ имеет место формула

$$\omega(\delta, M) = \omega(1) \delta^\alpha M^\beta, \quad (2.10)$$

в которой

$$\alpha = \frac{2(n-k)}{2n+1}, \quad \beta = 1 - \alpha = \frac{2k+1}{2n+1}.$$

В частности,

$$\omega(\delta) = \delta^\alpha \omega(1). \quad (2.11)$$

Из теоремы 1 следует, что модуль непрерывности (1.9) конечен при любом $\delta > 0$. На данном этапе мы этим фактом пользоваться не будем. Впрочем, утверждение леммы 2 влечет, в частности, что если модуль непрерывности конечен при каком-либо $\delta > 0$, то он будет конечен и при любом $\delta > 0$.

Доказательство леммы 2. При $h > 0$ определим оператор растяжения аргумента функции $\lambda[h]$ формулой $(\lambda[h]f)(t) = f(ht)$, $t \in (-\infty, \infty)$. Убедимся, что если $f \in \mathcal{W}^n$, то $\lambda[h]f \in \mathcal{W}^n$ и имеет место вполне ожидаемое равенство

$$D^n(\lambda[h]f) = h^n \lambda[h](D^n f). \quad (2.12)$$

Для функции $\phi \in \mathcal{S}$ определим функцию $\psi = \lambda[1/h]\phi$; эта функция также принадлежит $\phi \in \mathcal{S}$. Согласно первой формуле (1.2) имеем

$$\widehat{\psi}(t) = \int e^{-2\pi t\eta} \psi(\eta) d\eta = \int e^{-2\pi t\eta} \phi(\eta/h) d\eta = h \int e^{-2\pi th\eta} \phi(\eta) d\eta = h\widehat{\phi}(th)$$

и, окончательно,

$$\widehat{\psi} = h(\lambda[h]\widehat{\phi}). \quad (2.13)$$

Теперь, исходя из определения (1.7) и применив формулу (2.13), находим

$$\begin{aligned} D^n \psi(t) &= \int (-2\pi\eta i)^n e^{2\pi t\eta} \widehat{\psi}(\eta) d\eta = \int (-2\pi\eta i)^n e^{2\pi t\eta} h\widehat{\phi}(\eta h) d\eta \\ &= h^{-n} D^n \phi(t/h) = h^{-n} \lambda[1/h](D^n \phi)(t); \end{aligned}$$

таким образом,

$$D^n \psi = h^{-n} \lambda[1/h](D^n \phi). \quad (2.14)$$

Пусть $f \in \mathcal{W}^n$ и $F = D^n f$. В соответствии с определением (1.8) выполняется равенство $\langle F, \psi \rangle = \langle f, D^n \psi \rangle$. Подставив сюда соотношения (2.13) и (2.14), получим $\langle F, \lambda[1/h]\phi \rangle = \langle f, h^{-n} \lambda[1/h]D^n \phi \rangle$, или, в явном виде,

$$\int F(t)\phi(t/h) dt = h^{-n} \int f(t) (D^n \phi)(t/h) dt.$$

Сделав здесь замену переменного, приходим к равенству

$$h^n \int F(th)\phi(t) dt = \int f(th) (D^n \phi)(t) dt.$$

Это равенство можно записать как

$$h^n \langle \lambda[h]F, \phi \rangle = \langle \lambda[h]f, (D^n \phi)(t) \rangle, \quad \phi \in \mathcal{S}.$$

Согласно определению (1.7) последнее соотношение означает, что при любом $h > 0$ функция $\lambda[h]f$ имеет производную $D^n(\lambda[h]f)$ порядка n и, более того, справедлива формула

$$D^n(\lambda[h]f) = h^n \lambda[h](D^n f),$$

а это и есть формула (2.12).

Предположение $f \in \mathcal{W}^n$ содержит, в частности, такое свойство, что $D^n f = \widetilde{y}_n$, где $y_n = \widehat{D^n f} \in L$. С учетом второго соотношения (1.2) это означает, что

$$D^n f(t) = \widetilde{y}_n(t) = \int e^{2\pi t\eta} y_n(\eta) d\eta.$$

Следовательно,

$$(\lambda[h](D^n f))(t) = (D^n f)(th) = \int e^{2\pi th\eta} y_n(\eta) d\eta = h^{-1} \int e^{2\pi t\eta} y_n(\eta/h) d\eta.$$

Таким образом, имеем $(\lambda[h](D^n f)) = h^{-1} \widehat{\lambda[1/h]y_n}$. Отсюда и из (2.12) вытекает, что

$$D^n(\widehat{\lambda[h]f}) = h^{n-1} \lambda[1/h] \widehat{D^n f}.$$

Это равенство, в частности, влечет, что

$$\| D^n(\widehat{\lambda[h]f}) \|_1 = h^{n-1} \int |\widehat{D^n f}(t/h)| dt = h^n \int |\widehat{D^n f}(t)| dt = h^n \| \widehat{D^n f} \|_1$$

или

$$\|D^n(\widehat{\lambda[h]f})\|_1 = h^n \|\widehat{D^n f}\|_1. \quad (2.15)$$

Очевидно, оператор $\lambda[h]$, $h > 0$, есть биекция \mathcal{W}^n на себя и, как нетрудно проверить, наряду с (2.15) выполняются соотношения

$$\|\lambda[h]f\|_2 = h^{-1/2}\|f\|_2, \quad \|D^k(\lambda[h]f)\|_C = h^k \|D^k f\|_C. \quad (2.16)$$

Для двух положительных параметров c, h определим в \mathcal{W}^n оператор $\Lambda = \Lambda[c, h]$ формулой

$$F(t) = (\Lambda[c, h]f)(t) = cf(ht), \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Это вновь есть биекция \mathcal{W}^n на себя и, как следствие (2.16), справедливы равенства

$$\|\Lambda f\|_2 = ch^{-1/2}\|f\|_2, \quad \|D^k(\Lambda f)\|_C = ch^k \|D^k f\|_C, \quad \|\widehat{D^n(\Lambda f)}\|_1 = ch^n \|\widehat{D^n f}\|_1. \quad (2.17)$$

При $\delta, M > 0$ выберем параметры c, h так, чтобы оператор $\Lambda = \Lambda[c, h]$ отображал множество $\mathcal{W}(1, 1)$ на множество $\mathcal{W}(\delta, M)$. В силу (2.17) это будет возможно в том случае, если

$$ch^{-1/2} = \delta, \quad ch^n = M.$$

Отсюда находим

$$h = M^{2/(2n+1)}\delta^{-2/(2n+1)}, \quad c = M^{1/(2n+1)}\delta^{2n/(2n+1)}, \quad ch^k = M^{(2k+1)/(2n+1)}\delta^{2(n-k)/(2n+1)}.$$

Теперь для величины (2.9) имеем

$$\begin{aligned} \omega(\delta, M) &= \sup\{\|D^k F\|_C : F \in \mathcal{W}(\delta, M)\} \sup\{\|D^k(\Lambda f)\|_C : f \in \mathcal{W}(1, 1)\} \\ &= ch^k \sup\{\|D^k f\|_C : f \in \mathcal{W}(1, 1)\} = M^{(2k+1)/(2n+1)}\delta^{2(n-k)/(2n+1)}\omega(1, 1). \end{aligned}$$

Формулы (2.10) и (2.11) обоснованы.

Доказательство леммы 2 завершено.

2.3. Два вспомогательных утверждения к теореме 1

Лемма 3. Если для функции $\theta \in L^2$ выполняется условие

$$\zeta(\eta) = \frac{(2\pi\eta i)^k - \theta(\eta)}{(2\pi\eta i)^n} \in L^\infty(-\infty, \infty),$$

то имеет место представление

$$D^k f(0) - \langle \widehat{\theta}, f \rangle = \langle \zeta, \widehat{D^n f} \rangle, \quad f \in \mathcal{W}^n. \quad (2.18)$$

Доказательство. Для функции $f \in \mathcal{W}^n$ при $0 \leq k < n$, используя формулы (2.7), (1.4) и (2.8), находим

$$D^k f(0) - \langle \widehat{\theta}, f \rangle = D^k f(0) - \langle \theta, \widehat{f} \rangle = \int \left((2\pi\eta i)^k - \theta(\eta) \right) \widehat{f}(\eta) d\eta = \int \zeta(\eta) (2\pi\eta i)^n \widehat{f}(\eta) d\eta.$$

Применив теперь соотношение (2.2), имеем

$$D^k f(0) - \langle \widehat{\theta}, f \rangle = \int \zeta(\eta) \widehat{D^n f}(\eta) d\eta.$$

Представление (2.18) получено.

Лемма 3 доказана.

При $h > 0$ с помощью функции θ_h (см. (1.14)) определим на вещественной оси функцию

$$\zeta_h(\eta) = \frac{(2\pi\eta i)^k - \theta_h(\eta)}{(2\pi\eta i)^n}. \quad (2.19)$$

Лемма 4. При $0 \leq k < n$ и $h > 0$ функции θ_h и ζ_h имеют следующие значения норм:

$$\|\widehat{\theta}_h\|_2 = \|\theta_h\|_2 = \left(\frac{2}{\pi h^{2k+1}} \right)^{1/2} \frac{(n-k)}{((2k+1)(2n+1)(n+k+1))^{1/2}}, \quad (2.20)$$

$$\|\zeta_h\|_\infty = |\zeta_h(\eta)| = h^{n-k}, \quad |\eta| \leq \frac{1}{2\pi h}. \quad (2.21)$$

Доказательство. Обсудим более подробно вид функций (1.14) и (2.19). Имеем

$$\theta_h(\eta) = \begin{cases} (2\pi\eta i)^k - (2\pi\eta i)^k (2\pi h)^{n-k} |\eta|^{n-k}, & |\eta| \leq \frac{1}{2\pi h}, \\ 0, & |\eta| \geq \frac{1}{2\pi h}. \end{cases}$$

Отсюда, используя свойство (1.6), находим, что если $|\eta| \leq 1/2\pi h$, то

$$\zeta_h(\eta) = \frac{(2\pi\eta i)^k - \theta_h(\eta)}{(2\pi\eta i)^n} = \frac{(2\pi h)^{n-k} |\eta|^{n-k} (2\pi\eta i)^k}{(2\pi\eta i)^n} = \frac{(2\pi h)^{n-k} |\eta|^{n-k}}{(2\pi\eta i)^{n-k}} = \frac{h^{n-k}}{i^{n-k}}, \quad (2.22)$$

а если $|\eta| \geq 1/2\pi h$, то

$$\zeta_h(\eta) = \frac{(2\pi\eta i)^k}{(2\pi\eta i)^n} = \frac{1}{(2\pi\eta i)^{n-k}}, \quad |\eta| \geq \frac{1}{2\pi h}. \quad (2.23)$$

Соотношения (2.22) и (2.23) влекут (2.21).

Вычислим теперь норму $\|\theta_h\|_2$. Получим

$$\begin{aligned} \|\theta_h\|_2^2 &= 2 \int_0^{1/2\pi h} \left| (2\pi\eta i)^k - (2\pi\eta i)^k (2\pi h)^{n-k} \right|^2 d\eta = 2h^{-2k} \int_0^{1/2\pi h} |(2\pi\eta h)^{2k} |1 - (2\pi\eta h)^{n-k}|^2 d\eta \\ &= [2\pi\eta h = t] = \frac{1}{\pi h^{2k+1}} \int_0^1 t^{2k} (1 - t^{n-k})^2 dt = \frac{2(n-k)^2}{\pi h^{2k+1} (2k+1)(2n+1)(n+k+1)}. \end{aligned}$$

Соотношение (2.20) также доказано.

Обоснование всех утверждений леммы 4 завершено.

2.4. Вспомогательное утверждение к теореме 2

Заготовим на будущее некоторые свойства функции

$$f_h = \overline{\widehat{\theta}_h}, \quad h > 0. \quad (2.24)$$

Лемма 5. При $0 \leq k < n$ и $h > 0$ функция f_h принадлежит пространству \mathcal{W}^n и для нее справедливы соотношения

$$\|f_h\|_2 = \left(\frac{2}{\pi h^{2k+1}} \right)^{1/2} \frac{n-k}{\{(2k+1)(2n+1)(n+k+1)\}^{1/2}}, \quad (2.25)$$

$$D^k f_h(0) = \frac{1}{\pi h^{(2k+1)}} \frac{n-k}{(2k+1)(n+k+1)}, \quad (2.26)$$

$$\| \widehat{D^n f_h} \|_1 = \frac{1}{\pi h^{n+k+1}} \frac{n-k}{(n+k+1)(2n+1)}. \quad (2.27)$$

Доказательство. Определение (2.24) функции f_h и утверждение (2.20) влекут, что $f_h \in L^2$ и справедливо равенство (2.25).

Формулу (2.24) можно переписать в виде $f_h = \widetilde{\overline{\theta_h}}$. Отсюда следует, что

$$\widehat{f}_h = \overline{\theta_h}.$$

Эта функция непрерывная на оси и имеет компактный носитель; как следствие, для функции f_h выполняется свойство (2.1). Согласно лемме 1 функция f_h принадлежит пространству \mathcal{W}^n . Применив (2.1), имеем

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{D^n f_h} \right\|_1 &= \int_{-1/(2\pi h)}^{1/(2\pi h)} |(2\pi\eta i)^n \overline{\theta_h}(\eta)| d\eta = 2 \int_0^{1/(2\pi h)} (2\pi\eta)^{n+k} \left(1 - (2\pi h)^{n-k} \eta^{n-k}\right) d\eta \\ &= \frac{2}{2\pi h^{n+k+1}} \int_0^{1/(2\pi h)} (2\pi\eta h)^{n+k} \left(1 - (2\pi h)^{n-k} \eta^{n-k}\right) d(2\pi h\eta). \end{aligned}$$

Сделав замену переменной интегрирования по формуле $u = 2\pi h\eta$, получаем

$$\left\| \widehat{D^n f_h} \right\|_1 = \frac{1}{\pi h^{n+k+1}} \int_0^1 u^{n+k} (1 - u^{n-k}) du = \frac{1}{\pi h^{n+k+1}} \frac{n-k}{(n+k+1)(2n+1)}.$$

Формула (2.27) также проверена.

Далее, воспользовавшись формулой (2.7), находим

$$D^k f_h(0) = \int (2\pi\eta i)^k \widehat{f}_h(\eta) d\eta = \int (2\pi\eta i)^k \overline{\theta_h}(\eta) d\eta = 2 \int_0^{1/(2\pi h)} (2\pi\eta)^{2k} \left(1 - (2\pi h)^{n-k} \eta^{n-k}\right) d\eta.$$

Сделав вновь в интеграле замену переменной $u = 2\pi h\eta$, получаем

$$D^k f_h(0) = \frac{1}{\pi h^{2k+1}} \int_0^1 u^{2k} (1 - u^{n-k}) du = \frac{1}{\pi h^{2k+1}} \frac{n-k}{(2k+1)(n+k+1)}.$$

Равенство (2.26) проверено.

Лемма 5 полностью доказана.

3. Доказательство теорем

3.1. Доказательство теорем 1 и 2

Проведем доказательство теорем 1 и 2 одновременно в несколько шагов по известной для данной тематики схеме, восходящей к С. Б. Стечкину [1].

1. Дадим вначале оценку сверху значения задачи Стечкина (1.13). Для этого в качестве аппроксимирующего оператора возьмем оператор свертки T_h , $h > 0$, определенный формулой (1.15). Начнем с нормы этого оператора; имеем $\|T_h\|_{L^2 \rightarrow C} = \|\widehat{\theta_h}\|_2 = \|\theta_h\|_2$, последнее равенство выполняется в силу равенства Парсеваля (1.3). Величина $\|\theta_h\|_2 = \|\theta_h\|_2$ была вычислена в (2.20). Именно эта величина обозначена в (1.16) через $N(h)$. Итак, $\|T_h\|_{L^2 \rightarrow C} = N(h)$.

Оценим сверху уклонение

$$U(T_h) = \sup \{ \|D^k f - T_h f\|_C : f \in \mathcal{W}^n, \|\widehat{D^n f}\|_1 \leq 1 \}. \quad (3.1)$$

Согласно лемме 3 имеет место представление

$$D^k f(0) - \langle \widehat{\theta}_h, f \rangle = \langle \zeta_h, \widehat{D^n f} \rangle, \quad f \in \mathcal{W}^n, \quad (3.2)$$

функция ζ_h этого представления определена в (2.19). Пусть $f \in \mathcal{W}^n$. Для $x \in (-\infty, \infty)$ определим функцию $f[x]$ равенством $f[x](\eta) = f(x + \eta)$, $\eta \in (-\infty, \infty)$. Имеем $f[x] \in \mathcal{W}^n$, при этом $\widehat{D^n f[x]}(t) = e^{2\pi i x t} \widehat{D^n f}(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, а потому $\|\widehat{D^n f[x]}\|_1 = \|\widehat{D^n f}\|_1$. Подставив функцию $f[x]$ в (3.2), получаем представление

$$D^k f(x) - (T_h f)(x) = \langle \zeta_h, \widehat{D^n f[x]} \rangle, \quad f \in \mathcal{W}^n.$$

Это равенство влечет для величины уклонения (3.1) оценку сверху $U(T_h) \leq \|\zeta_h\|_\infty$. Определения (1.13) и формула (2.21) дают неравенства

$$E(N(h)) \leq U(T_h) \leq h^{n-k}. \quad (3.3)$$

Отсюда, в частности, следует, что величина (1.13) конечна при любом $N > 0$.

2. Значение $E(N)$ задачи (1.13) приближения оператора дифференцирования и модуль непрерывности оператора дифференцирования (1.9) связаны неравенством

$$E(N) \geq \sup\{\omega(\delta) - N\delta : \delta > 0\}. \quad (3.4)$$

Неравенство (3.4) есть конкретный вариант более общего утверждения С. Б. Стечкина, содержащегося в [1, разд. 2], тем не менее мы это неравенство сейчас докажем, следуя разд. 2 из [1]. Имеем

$$\begin{aligned} E(N) &= \inf_{\|T\|_{L^2 \rightarrow C} \leq N} \sup_{f \in \mathcal{Q}^n} \|D^k f - Tf\|_C \geq \inf_{\|T\|_{L^2 \rightarrow C} \leq N} \sup_{f \in \mathcal{Q}^n} (\|D^k f\|_C - \|Tf\|_C) \\ &\geq \sup_{f \in \mathcal{Q}^n} (\|D^k f\|_C - N\|f\|_2) = \sup_{\delta > 0} \sup_{\{f \in \mathcal{Q}^n, \|f\|_2 \leq \delta\}} (\|D^k f\|_C - N\|f\|_2) \\ &\geq \sup_{\delta > 0} \sup_{\{f \in \mathcal{Q}^n, \|f\|_2 \leq \delta\}} (\|D^k f\|_C - N\delta) = \sup_{\delta > 0} (\omega(\delta) - N\delta). \end{aligned}$$

В результате получено неравенство (3.4). Это неравенство, в частности, влечет, что $\omega(\delta) < \infty$, $\delta \geq 0$.

Подставив в (3.4) выражение (1.10) для $\omega(\delta)$ и осуществив элементарные преобразования, получаем, что значение задачи Стечкина (1.13) и наилучшая константа K в (1.11) связаны неравенством

$$E(N) \geq \beta \alpha^{\alpha/\beta} K^{1/\beta} N^{-\alpha/\beta}. \quad (3.5)$$

3. Получим теперь для константы K в неравенстве (1.11) оценку снизу. Для этого воспользуемся функцией $f_h \in \mathcal{W}^n$, определенной формулой (2.24) и рассмотренной в лемме 5. Подставив функцию f_h в неравенство (1.11), имеем

$$K \geq \frac{\|D^k f_h\|_C}{\|f_h\|_2^\alpha \|\widehat{D^n f_h}\|_1^\beta} \geq \underline{K} = \frac{|D^k f_h(0)|}{\|f_h\|_2^\alpha \|\widehat{D^n f_h}\|_1^\beta}, \quad \alpha = \frac{2(n-k)}{2n+1}, \quad \beta = 1 - \alpha = \frac{2k+1}{2n+1}. \quad (3.6)$$

Применив формулы (2.25)–(2.27) и осуществив элементарные преобразования, находим

$$\underline{K} = \left(\frac{1}{2\pi(n+k+1)} \right)^{(n-k)/(2n+1)} \left(\frac{2n+1}{2k+1} \right)^{(n+k+1)/(2n+1)}. \quad (3.7)$$

4. Неравенства (3.5) и (3.6) дают для величины (1.13) при $N = N(h)$ (см. (1.16)) оценку снизу

$$E(N(h)) \geq \beta \alpha^{\alpha/\beta} K^{1/\beta} (N(h))^{-\alpha/\beta} \geq \underline{E}(h), \quad \underline{E}(h) = \beta \alpha^{\alpha/\beta} (\underline{K})^{1/\beta} (N(h))^{-\alpha/\beta}.$$

Подставив в выражение для $\underline{E}(h)$ значения (1.12) показателей α, β , выражение (3.7) для величины \underline{K} , значение (1.16) величины $N(h)$ и осуществив элементарные преобразования, выводим оценку

$$E(N(h)) \geq \underline{E}(h) = h^{n-k}.$$

5. Из последнего неравенства и неравенства (3.3) получаем равенства

$$E(N(h)) = U(T_h) = h^{n-k}.$$

Формула (1.17) и экстремальность оператора T_h в задаче (1.13) обоснованы.

Теорема 1 доказана полностью.

6. Неравенство (3.5) можно переписать в виде

$$K \leq \alpha^{-\alpha} \beta^{-\beta} (E(N))^\beta N^\alpha.$$

Подставив сюда значение (1.16) величины $N = N(h)$ и значение (1.17) величины $E(N(h))$, получаем для константы K оценку сверху

$$K \leq \bar{K} = \left(\frac{1}{2\pi(n+k+1)} \right)^{(n-k)/(2n+1)} \left(\frac{2n+1}{2k+1} \right)^{(n+k+1)/(2n+1)}.$$

Сопоставив эту оценку с неравенствами (3.6) и формулой (3.7) для константы \underline{K} , получаем равенства

$$K = \left(\frac{1}{2\pi(n+k+1)} \right)^{(n-k)/(2n+1)} \left(\frac{2n+1}{2k+1} \right)^{(n+k+1)/(2n+1)} = \frac{\|D^k f_h\|_C}{\|f_h\|_2^\alpha \|\widehat{D^n f_h}\|_1^\beta}.$$

В этом соотношении содержатся и формула (1.18), и свойство экстремальности функции f_h в неравенстве (1.11).

Теорема 2 также доказана.

3.2. Доказательство теоремы 3

Обратимся к неравенствам (1.21). Воспользовавшись результатом теоремы 2, вычислим величину

$$\ell(\delta) = \inf\{E(N) + N\delta : N > 0\}.$$

При фиксированном $\delta > 0$, подставив в выражение $E(N) + N\delta$ значения (1.16) и (1.17), получаем функцию переменного $h > 0$

$$F(h) = E(N(h)) + \delta N(h) = h^{n-k} + A\delta h^{-(k+1/2)},$$

где

$$A = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{(n-k)}{((2k+1)(2n+1)(n+k+1))^{1/2}}.$$

Имеем $\ell(\delta) = \inf\{F(h) : h > 0\}$. Дифференцируя функцию $F(h)$, находим

$$F'(h) = h^{-k-3/2} \left((n-k) h^{n+1/2} - (k+1/2) A\delta \right). \quad (3.8)$$

Нулем производной является точка

$$h^* = \left(\frac{(k+1/2) A\delta}{n-k} \right)^{1/(n+1/2)} = \delta^{2/(2n+1)} \left(\frac{2k+1}{2\pi(2n+1)(n+k+1)} \right)^{1/(2n+1)}.$$

Анализируя знак производной (3.8), делаем вывод, что h^* есть точка (абсолютного) минимума функции F на полуоси $h \in (0, \infty)$. Произведя элементарные вычисления, получаем

$$F(h^*) = (h^*)^{n-k} + A\delta(h^*)^{-(k+1/2)} = \delta^{(n-k)/(n+1/2)} K;$$

здесь K — наилучшая константа в неравенстве (1.11), определенная формулой (1.18) в формулировке теоремы 2. Итак, $\ell(\delta) = K\delta^\alpha$.

Согласно (1.10) подобная формула имеет место и для модуля непрерывности: $\omega(\delta) = K\delta^\alpha$. Таким образом, в (1.21) оба неравенства являются равенствами; отсюда в частности, следует, что $\nu(\delta) = K\delta^\alpha$.

В теореме 3 осталось обосновать экстремальность метода T_{h^*} . Исходя из определения (1.20), имеем

$$K\delta^\alpha = \nu(\delta) \leq u(\delta, T_{h^*}). \quad (3.9)$$

Далее, согласно (1.19)

$$u(\delta, T_{h^*}) = \sup_{f \in \mathcal{Q}^n} \sup_{\|\varphi - f\|_{L^2} \leq \delta} \|D^k f - T_{h^*} \varphi\|_C.$$

Записав $D^k f - T_{h^*} \varphi = (D^k f - T_{h^*} f) + T_{h^*} (f - \varphi)$, находим

$$\|D^k f - T_{h^*} \varphi\| \leq \|(D^k f - T_{h^*} f)\| + \|T_{h^*} (f - \varphi)\| \leq U(T_{h^*}) + \|T_{h^*}\| \delta.$$

Следовательно,

$$u(\delta, T_{h^*}) \leq U(T_{h^*}) + \|T_{h^*}\| \delta = E(N(h^*)) + N(h^*) \delta = \ell(\delta) = K\delta^\alpha. \quad (3.10)$$

Первая величина в (3.9) и последняя величина в (3.10) совпадают. Отсюда вытекает, что $\nu(\delta) = u(\delta, T_{h^*}) = K\delta^\alpha$. Но это и означает, что T_{h^*} — оптимальный метод в задаче восстановления (1.20).

Теорема 3 доказана полностью.

Заключение

В заключение отметим, что к тематике данной статьи близка еще одна тройка экстремальных задач.

Начнем с варианта неравенства Колмогорова. Согласно результату В. Н. Габушина [15] при целых $0 \leq k < n$ на $W_{2,\infty}^n$ справедливо неравенство

$$\|f^{(k)}\|_C \leq G \|f\|_{L^2}^\alpha \|f^{(n)}\|_{L^\infty}^\beta, \quad f \in W_{2,\infty}^n, \quad (3.11)$$

$$\alpha = \frac{2(n-k)}{2n+1}, \quad \beta = 1 - \alpha = \frac{2k+1}{2n+1},$$

с конечной константой $G = G(n, k)$. Точное значение константы G в (3.11) известно лишь при $n = 1, k = 0$ [16] и при $n = 2$ для $k = 1$ и $k = 0$ [17].

Неравенство (3.11) можно изучать для произвольных вещественных $0 \leq k < n$. Имеет место вложение $\mathcal{W}^n \subset W_{2,\infty}^n$ и для $f \in \mathcal{W}^n$ выполняется неравенство $\|D^n f\|_{C_0} \leq \|\widehat{D^n f}\|_L$. Поэтому константы в (3.11) и (1.11) связаны неравенством $K \leq G$.

Неравенство (3.11) для произвольных вещественных $0 \leq k < n$ не изучалось. В связи с неравенством (3.11), конечно, возникают также аналоги задач (1.13) и (1.20).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Стечкин С.Б.** Наилучшее приближение линейных операторов // *Мат. заметки*. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 137–148.
2. **Арестов В.В., Габушин В.Н.** Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // *Изв. вузов. Математика*. 1995. № 11. С. 42–68.
3. **Арестов В.В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // *Успехи мат. наук*. 1996. Т. 51, № 6(312). С. 89–124. <https://doi.org/10.4213/rm1019>
4. **Arestov V.V., Filatova M.A.** Best approximation of the differentiation operator in the space L_2 on the semiaxis // *J. Approx. Theory*. 2014. Vol. 187. P. 65–81. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2014.08.001>
5. **Арестов В.В., Акопян Р.Р.** Задача Стечкина о наилучшем приближении неограниченного оператора ограниченными и родственные ей задачи // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*. 2020. Т. 26, № 4. С. 7–31. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-4-7-31>
6. **Vabenko V., Kovalenko O., Parfinovych N.** On approximation of hypersingular integral operators by bounded ones // *J. Math. Anal. Appl.* 2022. Vol. 513. P. 1–21. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2022.126215>
7. **Arestov V.V.** Approximation of differentiation operators by bounded linear operators in Lebesgue spaces on the axis and related problems in the spaces of (p, q) -multipliers and their predual spaces // *Ural Math. J.* 2023. Vol. 9, no. 2. P. 4–27. <https://doi.org/10.15826/umj.2023.2.001>
8. **Бабенко В.Ф., Корнейчук Н.П., Кофанов В.А., Пичугов С.А.** Неравенства для производных и их приложения. Киев: Наук. думка, 2003. 591 с.
9. **Тихомиров В.М., Магарил-Ильяев Г.Г.** Неравенства для производных // *Избранные тр. Математика и механика А. Н. Колмогорова*. М.: Наука, 1985. С. 387–390.
10. **Арестов В.В.** О равномерной регуляризации задачи вычисления значений оператора // *Мат. заметки*. 1977. Т. 22, № 2. С. 231–244.
11. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
12. **Осипенко К.Ю.** Введение в теорию оптимального восстановления: учебное пособие для вузов. СПб.: Лань, 2022. 388 с.
13. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 333 с.
14. **Шилов Г.Е.** Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука, 1965. 328 с.
15. **Габушин В.Н.** Неравенства для норм функции и ее производных в метриках L_p // *Мат. заметки*. 1967. Т. 1, № 3. С. 291–298.
16. **Szökefalvi-Nagy V.** Über Integralungleichungen zwischen einer Funktion und ihrer ableitung // *Acta Sci. Math.* 1941. Vol. 10. P. 64–74.
17. **Габушин В.Н.** Точные константы в неравенствах между нормами производных функции // *Мат. заметки*. 1968. Т. 4, № 2. С. 221–232.

Поступила 13.03.2025

После доработки 3.04.2025

Принята к публикации 7.04.2025

Опубликована онлайн 30.05.2025

Арестов Виталий Владимирович
 д-р физ.-мат. наук, профессор
 Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
 Уральский федеральный университет
 г. Екатеринбург
 e-mail: vitalii.arestov@urfu.ru

REFERENCES

1. Stechkin S.B. Best approximation of linear operators. *Math. Notes*, 1967, vol. 1, no. 2, pp. 91–99. <https://doi.org/10.1007/BF01268056>

2. Arestov V.V., Gabushin V.N. Best approximation of unbounded operators by bounded operators. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1995, vol. 39, no. 11, pp. 38–63.
3. Arestov V.V. Approximation of unbounded operators by bounded operators and related extremal problems. *Russian Math. Surv.*, 1996, vol. 51, no. 6, pp. 1093–1126. <https://doi.org/10.1070/RM1996v051n06ABEH003001>
4. Arestov V.V., Filatova M.A. Best approximation of the differentiation operator in the space L_2 on the semiaxis. *J. Approx. Theory*, 2014, vol. 187, pp. 65–81. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2014.08.001>
5. Arestov V.V., Akopyan R.R. Stechkin's problem on the best approximation of an unbounded operator by bounded ones and related problems. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 4, pp. 7–31 (in Russian). <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-4-7-31>
6. Babenko V., Kovalenko O., Parfinovych N. On approximation of hypersingular integral operators by bounded ones. *J. Math. Anal. Appl.*, 2022, vol. 513, no. 2, art. no. 126215. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2022.126215>
7. Arestov V.V. Approximation of differentiation operators by bounded linear operators in Lebesgue spaces on the axis and related problems in the spaces of (p, q) -multipliers and their predual spaces. *Ural Math. J.*, 2023, vol. 9, no. 2, pp. 4–27. <https://doi.org/10.15826/umj.2023.2.001>
8. Babenko V.F., Korneichuk N.P., Kofanov V.A., Pichugov S.A. *Neravenstva dlya proizvodnykh i ikh prilozheniya* [Inequalities for derivatives and their applications]. Kiev, Naukova Dumka, 2003, 591 p.
9. Tikhomirov V.M., Magaril-II'yaev G.G. *Neravenstva dlya proizvodnykh* [Inequalities for derivatives]. In: *Izbrannye Trudy. Matematika i Mekhanika* [Selected Works. Mathematics and Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1985, pp. 387–390.
10. Arestov V.V. Uniform regularization of the problem of calculating the values of an operator. *Math. Notes*, 1977, vol. 22, no. 2, pp. 618–626. <https://doi.org/10.1007/BF01780971>
11. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Theory of linear ill-posed problems and its applications*. In: *Inverse and ill-posed problems series*, vol. 36. Utrecht etc., VSP, 2002, 281 p. <https://doi.org/10.1515/9783110944822>. Original Russian text published in Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya*, Moscow, Nauka Publ., 1978, 206 p.
12. Osipenko K.Yu. *Vvedeniye v teoriyu optimal'nogo vosstanovleniya* [Introduction to the theory of optimal recovery]. St. Petersburg, Lan', 2022, 388 p. ISBN: 978-5-507-44358-1.
13. Stein E.M., Weiss G. *Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces*. Princeton, Princeton Univ. Press, 1971, 312 p. ISBN: 9780691080789. Translated to Russian under the title *Vvedenie v garmonicheskii analiz na evklidovykh prostranstvakh*, Moscow, Mir Publ., 1974, 333 p.
14. Shilov G.E. *Matematicheskii analiz. Vtoroi spetsial'nyi kurs* [Mathematical analysis. The second special course]. Moscow, Nauka Publ., 1965, 328 p.
15. Gabushin V.N. Inequalities for the norms of a function and its derivatives in metric L_p . *Math. Notes*, 1967, vol. 1, no. 3, pp. 194–198. <https://doi.org/10.1007/BF01098882>
16. Szókefalvi-Nagy B. Über integralungleichungen zwischen einer funktion und ihrer ableitung. *Acta Sci. Math.*, 1941, vol. 10, pp. 64–74.
17. Gabushin V.N. Exact constants in inequalities between norms of derivatives of functions. *Math. Notes*, 1968, vol. 4, no. 2, pp. 624–630. <https://doi.org/10.1007/BF01094963>

Received March 13, 2025

Revised April 3, 2025

Accepted April 7, 2025

Published online May 30, 2025

Funding Agency: This work was supported by Russian Science Foundation, project 25-21-00118, <https://rscf.ru/project/25-21-00118/>.

Vitalii Vladimirovich Arestov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: vitalii.arestov@urfu.ru.

Cite this article as: V. V. Arestov. Best approximation of a fractional-order differentiation operator in the uniform norm on the axis on the class of functions with integrable Fourier transform of the highest derivative. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 3, pp. 47–63.