

УДК 517.977, 514.177.2

## НАХОЖДЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ЧЕБЫШЁВСКОГО СЛОЯ ПЛОСКОГО МНОЖЕСТВА С ПОМОЩЬЮ КОНСТРУКЦИЙ ТЕОРИИ АЛЬФА-МНОЖЕСТВ И ОПОРНЫХ ШАРОВ ЕФИМОВА — СТЕЧКИНА<sup>1</sup>

А. А. Успенский, П. Д. Лебедев

Для класса замкнутых невыпуклых множеств двумерного евклидова пространства предложен подход к нахождению величины чебышёвского слоя, который базируется на двух известных понятиях, обобщающих определение выпуклого множества. Рассмотрено семейство плоских множеств с конечным числом псевдовершин. Для анализа выделены отличающиеся друг от друга порядком гладкости три совокупности псевдовершин. В рамках каждого из трех рассмотренных случаев (случай кусочно-гладкой границы множества, случай разрыва кривизны границы множества и классический случай, когда кривизна границы непрерывна) найдена формула предельного значения радиусов опорных по Ефимову — Стечкину шаров. Речь идет о шарах с центрами, которые лежат на ветви биссектрисы (на одномерном многообразии множества неединственности), отвечающей соответствующей псевдовершине. Полученные формулы позволяют аналитически вычислять величину чебышёвского слоя для невыпуклых множеств, в том числе для множеств с границей переменной гладкости. Приведен иллюстрирующий пример и его интерпретация с точки зрения теории оптимального управления.

Ключевые слова: альфа-множество, оболочка множества, метрическая проекция, мера невыпуклости, биссектриса множества, опорный шар, чебышёвский слой, управление.

**A. A. Uspenskii, P. D. Lebedev. Finding the value of the Chebyshev layer of a flat set using constructions of the theory of alpha sets and Efimov–Stechkin support balls.**

For a class of closed nonconvex sets in two-dimensional Euclidean space, an approach to finding the value of the Chebyshev layer is proposed. It is based on two well-known concepts that generalize the definition of a convex set. A family of planar sets with a finite number of pseudo-vertices is considered. Three sets of pseudo-vertices are selected for analysis. The sets differ from each other in the order of smoothness of the pseudo-vertices included in them. Within the framework of each of the three cases considered (the case of a piecewise smooth boundary of a set, the case of a discontinuity in the curvature of the boundary of a set, and the classical case when the curvature of the boundary is continuous), a formula for the limit value of the radii of the support balls (by Efimov and Stechkin) is found. We consider balls with centers lying on a branch of the bisector (on a one-dimensional manifold of the set of non-uniqueness) corresponding to the associated pseudo-vertex. The obtained formulas allow one to analytically calculate the value of the Chebyshev layer for nonconvex sets, including sets with a boundary of variable smoothness. An illustrative example and its interpretation from the point of view of optimal control theory are given.

Keywords: alpha set, set hull, metric projection, nonconvexity measure, set bisector, support ball, Chebyshev layer, control.

MSC: 52A10, 11H16, 41A50

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-3-264-280

### Введение

Развитие негладкого анализа пополняет аппарат аналитического описания невыпуклых множеств новыми результатами и позволяет специалистам активнее применять невыпуклые множества в приложениях. В ряде случаев такие множества могут рассматриваться в качестве обобщений хорошо изученных выпуклых множеств. В настоящей работе используются понятие  $\alpha$ -множества (альфа-множества [1]) и понятия  $r$ -выпуклого множества и его оболочки [2]. В случае альфа-множества  $\alpha$  — угловая величина, выраженная в радианах. В случае  $r$ -выпуклого множества  $r$  — радиус шара. Отметим, что систематически изложенные сведения и

<sup>1</sup>Исследование первого автора выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-11-00269, <https://rscf.ru/project/25-11-00269/>.

результаты, относящиеся к слабо выпуклым множествам по Виалю и по Ефимову — Стечкину, содержатся в [3].

Определение альфа-множества использует понятие метрической проекции, причем существенным элементом конструкции выступает биссектриса, собранная из точек неединственности метрической проекции на множество. Наличие точек неединственности метрической проекции на множество указывает на его принадлежность семейству нечебышёвских множеств [4]. Тем не менее здесь не исключена ситуация, когда множество имеет чебышёвский слой. Отметим, что свойства оператора метрической проекции исследованы, например, для сильно выпуклых множеств в [5], и показано, что они обладают чебышёвскими слоями, в которых оператор непрерывен. Доказано, что условие существования чебышёвского слоя величины  $r$  для локально компактного множества в гильбертовом пространстве эквивалентно слабой выпуклости этого множества по Виалю с константой  $r$  [3, теорема 1.7.4]. Оператор метрической проекции также используется при исследовании (например, [6]) классического решения уравнения эйконала, когда краевое множество является солнцем [7].

Методы теории альфа-множеств эффективны при построении негладких решений задач управления по быстродействию и задач геометрической оптики [8;9]. Они также применяются при исследовании свойств множеств достижимости нелинейных управляемых динамических систем (например, [10]).

В настоящей работе для плоских замкнутых невыпуклых множеств, границы которых могут иметь переменную гладкость, получены аналитические соотношения, позволяющие в ряде случаев находить точно величину чебышёвского слоя.

## 1. Основные определения, понятия и предварительные результаты

Приведем определения основных конструктивных элементов теории  $\alpha$ -множеств (подробнее в [1]).

Пусть  $M$  — замкнутое множество в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  и  $z \in \mathbb{R}^n \setminus M$ .

Полагаем:

$\Omega_M(z)$  — множество всех ближайших к  $z$  точек из  $M$  в евклидовой метрике;

$\text{co } \Omega_M(z)$  — выпуклая оболочка множества  $\Omega_M(z)$ ;

$\text{con}(\text{co } \Omega_M(z) - \{z\}) = \{h = \lambda(s - z) : \lambda \geq 0, s \in \text{co } \Omega_M(z)\}$  — конус в  $\mathbb{R}^n$ , натянутый на

$$\text{co } \Omega_M(z) - \{z\};$$

$H_M(z)$  — множество всевозможных пар  $(h_*, h^*)$  ненулевых векторов  $h_*, h^*$  из

$$\text{con}(\text{co } \Omega_M(z) - \{z\});$$

$(h_* \wedge h^*) = \arccos \frac{\langle h_*, h^* \rangle}{\|h_*\| \cdot \|h^*\|} \in [0, \pi]$  — угол между векторами  $h_*$  и  $h^*$ ;

$\langle h_*, h^* \rangle$  — скалярное произведение векторов  $h_*$  и  $h^*$  в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\|h_*\| = \langle h_*, h_* \rangle^{1/2}$ ,

$$(h_*, h^*) \in H_M(z^*);$$

$$\alpha(z) = \max_{(h_*, h^*) \in H_M(z)} (h_* \wedge h^*) \in [0, \pi].$$

**О п р е д е л е н и е 1.** Замкнутое множество  $M$  называется  $\alpha$ -множеством (альфа-множеством) в  $\mathbb{R}^n$ , если

$$\alpha = \sup_{z \in \mathbb{R}^n \setminus M} \alpha(z) \in [0, \pi].$$

При этом  $\alpha$  называется мерой невыпуклости множества  $M$ .

В дальнейшем сосредоточимся на плоском случае, когда  $M \subset \mathbb{R}^2$ . Предположим, что граница  $\Gamma = \partial M$  замкнутого множества  $M \subset \mathbb{R}^2$  задается непрерывным отображением  $\gamma: T \rightarrow \mathbb{R}^2$

числового отрезка  $T = [\check{t}, \hat{t}]$ ,  $-\infty < \check{t} < \hat{t} < +\infty$ ,  $\gamma(\check{t}) = \gamma(\hat{t})$ , или же числовой прямой  $T = \mathbb{R}$ , на плоскость, которое может иметь конечное число точек разрыва производных начальных порядков (до третьего порядка включительно) от координатных функций. Дифференциальные свойства кривой  $\Gamma$  существенным образом влияют на носитель  $\text{supp } \alpha = \{z \in \mathbb{R}^2 \setminus M : \alpha(z) \neq 0\}$  характеристической функции  $\alpha(\cdot)$ . Структура  $\text{supp } \alpha$  в общем случае сегментированная и представляет собой объединение нуль- и одномерных многообразий (см, например, [11]), что ведет к определенным трудностям при вычислении как меры невыпуклости множества  $M$ , так и величины его чебышёвского множества. Здесь  $\bar{A}$  — замыкание множества  $A$ .

Обозначим через  $\text{card}(A)$  мощность множества  $A$ . Следуя [25], введем множество  $Z(M) = \{z \in \mathbb{R}^2 : \text{card}(\Omega_M(z)) = 1\}$  и примем  $\rho(z, M) = \inf \{\|z - m\| : m \in M\}$ ,  $O_r(M) = \{z \in \mathbb{R}^2 : \rho(z, M) < r\}$ , где  $r > 0$ .

**О п р е д е л е н и е 2** [25]. Множество  $M \subset \mathbb{R}^2$  обладает чебышёвским слоем величины  $r > 0$ , если  $O_r(M) \subset Z(M)$ .

Для отыскания чебышёвского слоя требуется найти носитель функции  $\text{supp } \alpha$ . Его построение связано с исследованием особенностей решений уравнения, рассматриваемого на границе множества  $M$ :

$$Q(t_1, t_2) = 0. \quad (1.1)$$

Здесь  $Q = Q(t_1, t_2)$  — симметрическая функция двух переменных в плоскости параметров  $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ , ее конкретизация приведена ниже. Пусть выбраны  $t_0 \in T$ , параметры малости  $\delta_1 > 0$ ,  $\delta_2 > 0$ . Под решениями уравнения (1.1) понимаются локальные диффеоморфизмы [12, гл. 1], определенные с одной стороны от точки рассмотрения. Будем говорить, что локальный диффеоморфизм  $t_2 = t_2(t_1)$ , определенный уравнением (1.1), полунепрерывен слева в точке  $t_1 = t_0$  и отображает левую полуокрестность точки  $t_1 = t_0$  в ее правую полуокрестность, если выполняются условия

$$(A1) \quad t_2((t_0 - \delta_1, t_0)) = (t_0, t_0 + \delta_2), \quad \delta_1 > 0, \quad \delta_2 > 0,$$

$$(A2) \quad \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} t_2(t_1) = t_0.$$

Наряду с полунепрерывностью функции  $t_2 = t_2(t_1)$  условия (A1), (A2) выделяют неподвижные точки в пространстве параметров. Существование таких точек и их определяющих локальных диффеоморфизмов показано на примерах множеств с разным порядком гладкости их границ [13].

**О п р е д е л е н и е 3.** Псевдовершиной множества  $M$  называется точка

$$x^{(0)} = (\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)) \triangleq \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} (x_1^*, x_2^*),$$

где  $(x_1^*, x_2^*) = (x_1^*(t_1, t_2(t_1)), x_2^*(t_1, t_2(t_1)))$  — однопараметрическое подмножество решений

$$(x_1^*, x_2^*) = (x_1^*(t_1, t_2), x_2^*(t_1, t_2))$$

системы уравнений

$$\begin{cases} (x_1^* - \gamma_1(t_1))\gamma_2'(t_1) = (x_2^* - \gamma_2(t_1))\gamma_1'(t_1), \\ (x_1^* - \gamma_1(t_2))\gamma_2'(t_2) = (x_2^* - \gamma_2(t_2))\gamma_1'(t_2), \end{cases} \quad (1.2)$$

определяемое локальным диффеоморфизмом  $t_2 = t_2(t_1)$ , который задается уравнением

$$Q(t_1, t_2) \triangleq \rho^2(\gamma(t_1), (x_1^*, x_2^*)) - \rho^2(\gamma(t_2), (x_1^*, x_2^*)) = 0 \quad (1.3)$$

и удовлетворяет условиям (A1), (A2). Здесь,  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $y \in \mathbb{R}^2$ .

Уравнение (1.3) конкретизирует (1.1).

Определение псевдовершины допускает переформулировку в терминах обратного к  $t_2 = t_2(t_1)$  локального диффеоморфизма  $t_1 = t_1(t_2)$  (см. [9]). Поэтому будем называть  $t_2 = t_2(t_1)$  и  $t_1 = t_1(t_2)$  локальными диффеоморфизмами, порождающими псевдовершину  $x^{(0)} \in \Gamma$ .

В дальнейшем потребуются скалярные характеристики псевдовершины, геометрический смысл которых пояснен в [9].

**О п р е д е л е н и е 4.** Левая односторонняя производная

$$\lambda \triangleq t'_2(t_0 - 0) = \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{t_2(t_1) - t_0}{t_1 - t_0} \quad (1.4)$$

называется левым маркером псевдовершины  $x^{(0)} \in \Gamma$ ; здесь  $t_2 = t_2(t_1)$  — локальный диффеоморфизм, порождающий псевдовершину  $x^{(0)}$ .

**О п р е д е л е н и е 5.** Правая односторонняя производная

$$\mu \triangleq t'_1(t_0 + 0) = \lim_{t_2 \rightarrow t_0 + 0} \frac{t_1(t_2) - t_0}{t_2 - t_0} \quad (1.5)$$

называется правым маркером псевдовершины  $x^{(0)} \in \Gamma$ ; здесь  $t_1 = t_1(t_2)$  — локальный диффеоморфизм, порождающий псевдовершину  $x^{(0)}$ .

В силу симметрии значимой части уравнения (1.1), если локальный диффеоморфизм  $t_2 = t_2(t_1)$ ,  $t_1 \in (t_0 - \delta_1, t_0)$ ,  $\delta_1 > 0$ , является решением (1.1), то ему обратный локальный диффеоморфизм  $t_1 = t_1(t_2)$ ,  $t_2 \in (t_0, t_0 + \delta_2)$ ,  $\delta_2 > 0$ , также есть решение уравнения (1.1) (см. [14]). Условия полунепрерывности обеспечивают существование у их графиков общей предельной точки  $(t_1, t_2) = (t_0, t_0)$ . При этом односторонние маркеры взаимнообратны, когда хотя бы один из них отличен от нуля:

$$\mu = \lambda^{-1}. \quad (1.6)$$

Отметим, что в общем случае  $\lambda \leq 0$ , ибо  $t'_2(t_0 - 0) < 0$ ,  $t_1 \in (t_0 - \delta_1, t_0)$ ,  $\delta_1 > 0$ . Тогда в силу (1.6)  $\mu \leq 0$ . Здесь не исключен случай несобственного значения одного из маркеров, а именно, возможно существование пар односторонних маркеров вида  $(\lambda, \mu) = (0, -\infty)$  и  $(\lambda, \mu) = (-\infty, 0)$  (см. [15]).

**О п р е д е л е н и е 6** [8]. Биссектрисой замкнутого множества  $M \subset \mathbb{R}^2$  называется

$$L(M) = \{z \in \mathbb{R}^2: \text{card}(\Omega_M(z)) > 1\}.$$

Биссектриса — это своеобразный сепаратор, разделяющий дополнение рассматриваемого множества на подмножества, в каждом из которых евклидово расстояние до множества является дифференцируемой функцией (см. [16, § 8, гл. 2], где по факту биссектриса множества задействована, но при этом никак не называется). Введенное понятие в духе определения через наличие нескольких ближайших точек близко к понятиям, обобщающим понятие биссектрисы, из работ [17; 18]. При этом важным отличием определения 6 от конструкций из этих работ является нацеленность на сепарацию одного множества, в работах [17; 18] обобщения понятия биссектрисы используется применительно к двум или большему числу множеств. Биссектрису следует отнести к множествам симметрии, изучаемым, в частности, в теории особенностей гладких отображений [19, гл. 7]. В качестве другого представителя множеств симметрии, которое строится не вовне множества, а внутри него, можно указать так называемый “скелет” множества, используемый в задачах распознавания образов [20].

**О п р е д е л е н и е 7** [8]. Ветвью  $L(x^{(0)})$  биссектрисы  $L(M)$ , где  $x^{(0)}$  — псевдовершина  $M$ , называется множество точек  $z(t_1) = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} (x_1 - \gamma_1(t_1))\gamma'_1(t_1) + (x_2 - \gamma_2(t_1))\gamma'_2(t_1) = 0, \\ (x_1 - \gamma_1(t_2))\gamma'_1(t_2) + (x_2 - \gamma_2(t_2))\gamma'_2(t_2) = 0, \end{cases} \quad (1.7)$$

где  $t_2 = t_2(t_1)$  — локальный диффеоморфизм, порождающий псевдовершину  $x^{(0)}$ .

Система уравнений (1.7) является сопряженной к системе (1.2). Ее решения суть точки  $z \in \mathbb{R}^2 \setminus M$ , имеющие две различные ближайшие точки на  $M$ . В силу определения носителя характеристической функции  $L(x^{(0)}) \subset \text{supp } \alpha$ .

Подчеркнем, что биссектрису и ее ветви нужно рассматривать как важные конструктивные элементы при исследовании проблемы существования у множества чебышёвского слоя. Гладкость границы, даже минимальная (см. [8]), обеспечивает удаленность ее ветвей от множества на строго положительную величину, что свидетельствует о наличии у множества чебышёвского слоя. В свою очередь, наличие у невыпуклого множества чебышёвского слоя позволяет отнести его к грех-регулярным множествам [21] — классу замкнутых множеств, у которых метрическая проекция однозначна и непрерывна при подходящем расширении множества. Этот класс множеств имеет существенное значение, например, в вопросах существования решений эволюционных включений [22].

**О п р е д е л е н и е 8.** Конечный односторонний предел  $\bar{x} = \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} z(t_1)$  решений системы (1.7) называется крайней точкой биссектрисы. Если означенный предел равен бесконечности или не существует, то говорят, что псевдовершина  $x^{(0)} = \gamma(t_0)$  не порождает крайнюю точку биссектрисы.

Далее дополним конструкции теории альфа-множеств понятиями из работы [2], которая посвящена изучению свойств чебышёвских множеств.

**О п р е д е л е н и е 9.**  $r$ -оболочкой множества  $M \subset \mathbb{R}^n$  называется пересечение дополнений всех открытых шаров  $E_r(z) \triangleq \{z^* \in \mathbb{R}^n : \|z - z^*\| < r\}$ ,  $r > 0$ , не пересекающихся с  $M$ , и обозначается  $(M)_r$ . Множество  $M$  называется  $r$ -выпуклым, если  $M = (M)_r$ .

**О п р е д е л е н и е 10.** Замкнутый шар  $\bar{E}_r(z) \triangleq \{z^* \in \mathbb{R}^n : \|z - z^*\| \leq r\}$  называется опорным к множеству  $M \subset \mathbb{R}^n$  в точке  $z^{(0)} \in M$ , если внутри шара  $\bar{E}_r(z)$  нет точек  $M$  и  $z^{(0)}$  лежит на границе  $\bar{E}_r(z)$ .

Считаем, что в контексте ссылки на оригинальную работу [3] является оправданным с исторической и терминологической точек зрения использование терминов оболочка Ефимова — Стечкина и опорный шар Ефимова — Стечкина соответственно к  $r$ -оболочке множества и опорному шару.

## 2. Основной теоретический результат

Примем необходимые обозначения:  $\det(a, b) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$  — определитель второго порядка, построенный на векторах  $a = (a_1, a_2)$ ,  $b = (b_1, b_2)$ ,  $O_0(t_0, \delta) = (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \setminus \{t_0\}$  — выколота окружность точки  $t_0 \in T$  радиуса  $\delta > 0$ . Пусть  $K = \{1, 2, 3\}$ .

В качестве границ множеств рассмотрим кривые  $\Gamma$ , для которых выполняются следующие условия:

(Г1)  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  имеет непрерывную производную  $k$ -го порядка всюду на  $T \subseteq \mathbb{R}$ , кроме конечной совокупности  $T_k \subset T$  точек  $t_0 \in T_k$ , в которых односторонние производные  $k$ -го порядка (левая  $\gamma^{(k)}(t_0 - 0)$  и правая  $\gamma^{(k)}(t_0 + 0)$ ) не равны друг другу,  $\gamma^{(k)}(t_0 - 0) \neq \gamma^{(k)}(t_0 + 0)$ , здесь  $k \in K$ ;

(Г2)  $\gamma'(t) \neq 0$ ,  $t \in T \setminus T_1$ .

Совокупности кривых  $\Gamma$  без точек самопересечения с указанными дифференциальными свойствами (Г1), (Г2) обозначим  $\{\Gamma\}_T$ . Условие (Г1) фиксирует наличие точек с разрывами производных соответствующего порядка от координатных функций. Это особые точки, которые могут порождать непустые подмножества из  $\text{supp } \alpha$ . Условие (Г2) — это условие регулярности кривой в точках дифференцируемости.

Ранее доказана теорема о вычислении значений характеристической функции  $\alpha(\cdot)$  в точках биссектрисы множества.

**Теорема 1** [23, теорема 2.1]. Пусть  $L(x^{(0)})$  — ветвь биссектрисы множества  $M \subset \mathbb{R}^2$  с границей  $\Gamma = \partial M \in \{\Gamma\}_T$ , определяемой вектор-функцией  $\gamma = \gamma(t)$ , где  $x^{(0)} = \gamma(t_0)$  — псевдовёршина  $M$ , порожденная локальным диффеоморфизмом  $t_2 = t_2(t_1)$ ,  $t_1 \in (t_0 - \delta_1, t_0)$ ,  $\delta_1 > 0$ , и выполняется условие

$$\det(\gamma'(t), \gamma'(\tau)) \neq 0, \quad t \in O_0(t_0, \delta), \quad \tau \in O_0(t_0, \delta), \quad \delta > 0, \quad t \neq \tau.$$

Тогда для точек  $z(t_1) = (x_1, x_2) \in L(x^{(0)})$ ,  $t_1 \in (t_0 - \delta_1, t_0)$ ,  $\delta_1 > 0$ , имеет место формула вычисления угловой величины

$$\alpha(z(t_1)) = 2 \operatorname{arctg} \left| \frac{\det(\gamma'(t_2(t_1)), \gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1))}{\langle \gamma'(t_2(t_1)), \gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1) \rangle} \right|. \quad (2.1)$$

**Лемма 1.** В условиях теоремы 1 радиус  $r = r(z(t_1))$  опорного шара к  $M$  в точке  $z(t_1) = (x_1, x_2) \in L(x^{(0)})$  вычисляется по формуле

$$r(z(t_1)) = \|\gamma'(t_1)\| \left| \frac{\langle \gamma'(t_2(t_1)), \gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1) \rangle}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2(t_1)))} \right|. \quad (2.2)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Воспользуемся ранее полученными результатами. Имеет место равенство (формула (2.5) из [23])

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha(z(t_1))}{2} = \frac{\rho^2(x^*, \gamma(t_1))}{\rho^2(x, \gamma(t_1))}.$$

В знаменателе правой части стоит квадрат расстояния от точки  $z(t_1) = x \in L(x^{(0)})$  до точки  $\gamma(t_1)$  — одной из двух ее проекций на множество  $M$ . Здесь множество проекций  $\Omega_M(z(t_1)) = \{\gamma(t_1), \gamma(t_2(t_1))\}$ . Другими словами,  $\rho^2(x, \gamma(t_1))$  — квадрат радиуса опорного шара (по факту в силу размерности пространства — квадрат радиуса опорного круга)  $\bar{E}_r(z(t_1))$  к  $M$  в точке  $\gamma(t_1)$ . Таким образом, здесь  $r^2(z(t_1)) = \rho^2(x, \gamma(t_1))$ . Тогда

$$r^2(z(t_1)) = \frac{\rho^2(x^*, \gamma(t_1))}{\operatorname{tg}^2(\alpha(z(t_1)))/2}.$$

Подставим в это равенство на место числителя (формула (2.6) из [23])

$$\rho^2(x^*, \gamma(t_1)) = \det^{-2}(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2)) \|\gamma'(t_1)\|^2 \det^2(\gamma'(t_2), \gamma(t_2) - \gamma(t_1)),$$

а в знаменатель — выражение (2.2) и сократим на общие отличные от нуля множители:

$$\begin{aligned} r^2(z(t_1)) &= \frac{\|\gamma'(t_1)\|^2 \det^2(\gamma'(t_2(t_1)), \gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1)) \langle \gamma'(t_2(t_1)), \gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1) \rangle^2}{\det^2(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2(t_1))) \det^2(\gamma'(t_2(t_1)), \gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1))} \\ &= \frac{\|\gamma'(t_1)\|^2 \langle \gamma'(t_2(t_1)), \gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1) \rangle^2}{\det^2(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2(t_1)))}. \end{aligned}$$

После извлечения квадратного корня получим (2.2).

Лемма доказана.

Формула радиуса опорного шара играет ключевую роль в процедуре вычисления величины чебышёвского слоя множества. Для дальнейших выкладок требуется знать предельное значение радиуса опорного шара, когда центр шара стремится вдоль ветви биссектрисы к ее

крайней точке. Ниже показано, в каких случаях этот предел существует и конечен. Для случая гладкой границы в псевдовершине предел зависит от порядка гладкости и определяется либо кривизной

$$k(t_0) = \frac{\det(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0))}{\|\gamma'(t_0)\|^3},$$

либо одной из односторонних кривизн

$$k(t_0 - 0) = \frac{\det(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0 - 0))}{\|\gamma'(t_0)\|^3}, \quad k(t_0 + 0) = \frac{\det(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0 + 0))}{\|\gamma'(t_0)\|^3}.$$

В последних двух ситуациях существенную роль играют маркеры псевдовершины.

Примем обозначения для приращений, связывающих три точки  $t_0, t_1, t_2$ :  $\Delta_1 = t_0 - t_1 > 0$ ,  $\Delta_2 = t_2 - t_0 > 0$ ,  $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ . В случае, когда точки  $t_0, t_1, t_2$  связаны в силу диффеоморфизма  $t_2 = t_2(t_1)$ ,  $t_1 \in (t_0 - \delta_1, t_0)$ ,  $\delta_1 > 0$ , т.е.  $\Delta_1$  — приращение независимой переменной, а  $\Delta_2 = t_2(t_1) - t_0$  — приращение диффеоморфизма, то в силу определения 3 справедливы следующие равенства для левого маркера псевдовершины:

$$\lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = -\lambda, \quad \lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \frac{\Delta}{\Delta_1} = 1 - \lambda. \quad (2.3)$$

Аналогично для случая когда точки  $t_0, t_1, t_2$  связаны в силу диффеоморфизма  $t_1 = t_1(t_2)$ ,  $t_2 \in (t_0, t_0 + \delta)$ ,  $\delta_2 > 0$ , т.е.  $\Delta_2$  — приращение независимой переменной, а  $\Delta_1 = t_1(t_2) - t_0$  есть приращение диффеоморфизма, то ввиду определения 4 справедливы равенства для правого маркера псевдовершины

$$\lim_{\Delta_2 \downarrow 0} \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = -\mu, \quad \lim_{\Delta_2 \downarrow 0} \frac{\Delta}{\Delta_2} = 1 - \mu. \quad (2.4)$$

Основной результат настоящего исследования заключается в отыскании формул для предельного значения радиуса опорного шара. Это значение зависит от дифференциальных свойств границы множества в его псевдовершине.

**Теорема 2.** Пусть  $L(x^{(0)})$  — ветвь биссектрисы  $L$  множества  $M \subset \mathbb{R}^2$  с границей  $\Gamma = \partial M \in \{\Gamma\}_T$ , которая определяется вектор-функцией  $\gamma = \gamma(t)$ , где  $x^{(0)} = \gamma(t_0)$  — псевдовершина  $M$ , порожденная локальным диффеоморфизмом  $t_2 = t_2(t_1)$ ,  $t_1 \in (t_0 - \delta_1, t_0)$ ,  $\delta_1 > 0$ , и  $\Omega_M(z(t_1)) = \{\gamma(t_1), \gamma(t_2(t_1))\}$  — множество ближайших точек  $z(t_1) \in L(x^{(0)})$  на  $M$ . Пусть также выполняется условие

$$\det(\gamma'(t), \gamma'(\tau)) \neq 0, \quad t \in O_0(t_0, \delta), \quad \tau \in O_0(t_0, \delta), \quad \delta > 0, \quad t \neq \tau.$$

Тогда существует предел  $r_0 = \lim_{\Delta_1 \downarrow 0} r(z(t_0 - \Delta_1))$ , при этом

$$r_0 = 0, \quad \text{когда } t_0 \in T_1, \quad \gamma'(t_0 - 0) \neq 0, \quad \gamma'(t_0 + 0) \neq 0, \quad (2.5)$$

$$r_0 = \frac{1}{|k(t_0 - 0)|}, \quad \text{когда } t_0 \in T_2, \quad \lambda = 0, \quad k(t_0 - 0) \neq 0, \quad (2.6)$$

$$r_0 = \frac{1}{|k(t_0 + 0)|}, \quad \text{когда } t_0 \in T_2, \quad \lambda = -\infty, \quad k(t_0 + 0) \neq 0, \quad (2.7)$$

$$r_0 = \frac{1}{|k(t_0)|}, \quad \text{когда } t_0 \in T_3, \quad k(t_0) \neq 0. \quad (2.8)$$

**Доказательство.** Находясь в условиях теоремы 1, воспользуемся формулой радиуса опорного шара (2.2). Последовательно проанализируем три случая, которые разграничиваются дифференциальными свойствами кривой в псевдовершине.

**Случай 1.** Пусть  $t_0 \in T_1$ , т. е. псевдовёршина  $x^{(0)} = \gamma(t_0)$  является точкой излома границы множества. Здесь по условию (Г1)  $\gamma'(t_0 - 0) \neq \gamma'(t_0 + 0)$ , поэтому

$$\det(\gamma'(t_0 - 0), \gamma'(t_0 + 0)) \neq 0. \quad (2.9)$$

В силу непрерывности вектор-функции  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  и условия (A2)

$$\lim_{\Delta_1 \downarrow 0} (\gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1)) = \lim_{\Delta_1 \downarrow 0} (\gamma(t_2(t_0 - \Delta_1)) - \gamma(t_0 - \Delta_1)) = \gamma(t_0) - \gamma(t_0) = 0. \quad (2.10)$$

С учетом (2.9) и (2.10)

$$\begin{aligned} r_0 &= \lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \|\gamma'(t_0 - \Delta_1)\| \left| \frac{\langle \gamma'(t_2(t_0 - \Delta_1)), \gamma(t_2(t_0 - \Delta_1)) - \gamma(t_0 - \Delta_1) \rangle}{\det(\gamma'(t_0 - \Delta_1), \gamma'(t_2(t_0 - \Delta_1)))} \right| \\ &= \|\gamma'\| \frac{0}{\det(\gamma'(t_0 - 0), \gamma'(t_0 + 0))} = 0. \end{aligned}$$

Формула (2.5) обоснована.

**Случай 2.** Пусть  $t_0 \in T_2$ , т. е. граница множества один раз дифференцируема в псевдовёршине, при этом производная второго порядка в этой точке терпит разрыв.

Воспользуемся техникой струй (см. [24, гл. 3]), раскладывая компоненты правой части равенства (2.2) в точке  $t = t_0$ . Разложения осуществляются как в направлении от  $t = t_0$  до  $t = t_1$ , так и в направлении от  $t = t_0$  до  $t = t_2$ . Отметим, что здесь точки (узлы) связаны неравенством  $t_1 < t_0 < t_2$ . Разложения формируем сначала при произвольных допустимых приращениях  $\Delta_1 > 0$  и  $\Delta_2 > 0$ . Затем при предельном переходе полагаем их связанными в силу диффеоморфизма, т. е. считая  $\Delta_1 = t_0 - t_1$  независимым приращением в узле  $t_1 = t_0$ , полагаем, что  $\Delta_2 = t_2(t_1) - t_0$  — приращение функции  $t_2 = t_2(t_1)$  в этом узле. Указанная зависимость обеспечивает сходимость  $\Delta_2 \downarrow 0$ , когда  $\Delta_1 \downarrow 0$ .

Для вектор-функции  $\gamma(t)$  и ее производных, вычисленных в центральном узле  $t_0$ , для краткости будем опускать обозначение аргумента, при этом для односторонних производных уберем обозначения  $t_0 - 0$  и  $t_0 + 0$ , опустив соответствующий знак минус или плюс в нижний индекс:

$$\gamma' \triangleq \gamma'(t_0), \quad \gamma'' \triangleq \gamma''(t_0), \quad \gamma''_- \triangleq \gamma''(t_0 - 0), \quad \gamma''_+ \triangleq \gamma''(t_0 + 0).$$

Разложим разность вектор-функции в крайних узлах:

$$\begin{aligned} \gamma(t_2) - \gamma(t_1) &= (\gamma(t_2) - \gamma(t_0)) + (\gamma(t_0) - \gamma(t_1)) \\ &= \left( \gamma + \gamma' \Delta_2 + \frac{1}{2} \gamma''_+ \Delta_2^2 + o(\Delta_2^2) - \gamma \right) + \left( \gamma - \gamma + \gamma' \Delta_1 - \frac{1}{2} \gamma''_- \Delta_1^2 + o(\Delta_1^2) \right) \\ &= \gamma' \Delta_2 + \frac{1}{2} \gamma''_+ \Delta_2^2 + \gamma' \Delta_1 - \frac{1}{2} \gamma''_- \Delta_1^2 + o(\Delta_1^2) = \gamma' \Delta + \frac{1}{2} (\gamma''_+ \Delta_2^2 - \gamma''_- \Delta_1^2) + o(\Delta_{12}^2) \\ &= \Delta \left( \gamma' + \gamma''_+ \frac{\Delta_2^2}{2\Delta} - \gamma''_- \frac{\Delta_1^2}{2\Delta} + o(\Delta_{12}) \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь и ниже  $o(\delta)$  обозначает функцию, имеющую более высокий порядок малости относительно  $\delta > 0$ ,  $\Delta_{12} = \max\{\Delta_1, \Delta_2\}$ .

Разложим производные в крайних узлах:

$$\gamma'(t_1) = \gamma' - \Delta_1 \gamma''_- + o(\Delta_1), \quad \gamma'(t_2) = \gamma' + \Delta_2 \gamma''_+ + o(\Delta_2). \quad (2.12)$$

Для определителя справедливо представление:

$$\begin{aligned} \det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2)) &= \det(\gamma' - \Delta_1 \gamma''_- + o(\Delta_1), \gamma' + \Delta_2 \gamma''_+ + o(\Delta_2)) \\ &= \det(\gamma', \gamma' + \Delta_2 \gamma''_+ + o(\Delta_2)) + \det(-\Delta_1 \gamma''_- + o(\Delta_1), \gamma' + \Delta_2 \gamma''_+ + o(\Delta_2)) \\ &= \Delta_2 \det(\gamma', \gamma''_+) - \Delta_1 \det(\gamma''_-, \gamma') + o(\Delta_{12}) \\ &= \Delta_2 \det(\gamma', \gamma''_+) + \Delta_1 \det(\gamma', \gamma''_-) + o(\Delta_{12}). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Скалярное произведение примет вид

$$\begin{aligned} & \langle \gamma'(t_2), \gamma(t_2) - \gamma(t_1) \rangle \\ &= \Delta \left\langle \gamma' + \Delta_2 \gamma''_+ + o(\Delta_2), \gamma' + \frac{\Delta_2^2}{2\Delta} \gamma''_+ - \frac{\Delta_1^2}{2\Delta} \gamma''_- + o(\Delta_{12}) \right\rangle \\ &= \Delta \left( \|\gamma'\|^2 + \Delta_2 \langle \gamma''_+, \gamma' \rangle + \frac{\Delta_2^2}{2\Delta} \langle \gamma', \gamma''_+ \rangle - \frac{\Delta_1^2}{2\Delta} \langle \gamma', \gamma''_- \rangle + o(\Delta_{12}) \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Приняв во внимание (2.11)–(2.14), получим разложение дроби

$$\begin{aligned} & \frac{\langle \gamma'(t_2(t_1)), \gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1) \rangle}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2(t_1)))} \\ &= \frac{\Delta \left( \|\gamma'\|^2 + \Delta_2 \langle \gamma''_+, \gamma' \rangle + \frac{\Delta_2^2}{2\Delta} \langle \gamma', \gamma''_+ \rangle - \frac{\Delta_1^2}{2\Delta} \langle \gamma', \gamma''_- \rangle + o(\Delta_{12}) \right)}{\Delta_2 \det(\gamma', \gamma''_+) + \Delta_1 \det(\gamma', \gamma''_-) + o(\Delta_{12})}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Поделим числитель и знаменатель дроби (2.15) на  $\Delta_1$  и перейдем к пределу, используя формулы для маркеров (2.3):

$$\begin{aligned} r_0 &= \lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \|\gamma'(t_0 - \Delta_1)\| \left| \frac{\Delta \left( \|\gamma'\|^2 + \Delta_2 \langle \gamma''_+, \gamma' \rangle + \frac{\Delta_2^2}{2\Delta} \langle \gamma', \gamma''_+ \rangle - \frac{\Delta_1^2}{2\Delta} \langle \gamma', \gamma''_- \rangle + o(\Delta_{12}) \right)}{\Delta_2 \det(\gamma', \gamma''_+) + \Delta_1 \det(\gamma', \gamma''_-) + o(\Delta_{12})} \right| \\ &= \|\gamma'\| \left| \frac{(1 - \lambda) \|\gamma'\|^2}{-\lambda \det(\gamma', \gamma''_+) + \det(\gamma', \gamma''_-)} \right| = \frac{(1 - \lambda) \|\gamma'\|^3}{|-\lambda \det(\gamma', \gamma''_+) + \det(\gamma', \gamma''_-)|}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Подчеркнем, что особенность анализируемого случая 2 в том, что один из маркеров принимает несобственное значение, а второй равен нулю (см. [14]).

Предположим, что реализовался случай 2.1, когда левый маркер  $\lambda = 0$ , а правый маркер  $\mu = -\infty$ , при этом  $k_- \neq 0$ . Тогда из (2.16) после подстановки  $\lambda = 0$  следует, что

$$r_0 = \frac{\|\gamma'\|^3}{|\det(\gamma', \gamma''_-)|} = \frac{1}{|k(t_0 - 0)|}.$$

Формула (2.6) обоснована.

Далее предположим, что реализовался случай 2.2, когда левый маркер  $\lambda = -\infty$ , а правый маркер  $\mu = 0$ , при этом  $k_+ \neq 0$ . Преобразуем выражение (2.2), предел которого ищем, и воспользуемся формулами (2.4) для правого маркера:

$$\begin{aligned} r_0 &= \lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \|\gamma'(t_0 - \Delta_1)\| \left| \frac{\Delta \left( \|\gamma'\|^2 + \Delta_2 \langle \gamma''_+, \gamma' \rangle + \frac{\Delta_2^2}{2\Delta} \langle \gamma', \gamma''_+ \rangle - \frac{\Delta_1^2}{2\Delta} + \langle \gamma', \gamma''_- \rangle + o(\Delta_{12}) \right)}{\Delta_2 \det(\gamma', \gamma''_+) + \Delta_1 \det(\gamma', \gamma''_-) + o(\Delta_{12})} \right| \\ &= \|\gamma'\| \lim_{\Delta_2 \downarrow 0} \left| \frac{\frac{\Delta}{\Delta_2} \left( \|\gamma'\|^2 + \Delta_2 \langle \gamma''_+, \gamma' \rangle + \frac{\Delta_2^2}{2\Delta} \langle \gamma', \gamma''_+ \rangle - \frac{\Delta_1^2}{2\Delta} + \langle \gamma', \gamma''_- \rangle + o(\Delta_{12}) \right)}{\det(\gamma', \gamma''_+) + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \det(\gamma', \gamma''_-) + o(\Delta_{12})} \right| \\ &= \frac{(1 - \mu) \|\gamma'\|^3}{|\det(\gamma', \gamma''_+) - \mu \det(\gamma', \gamma''_-)|}. \end{aligned}$$

При выводе формулы использовалась непрерывность обратного диффеоморфизма  $t_1 = t_1(t_2)$ , вследствие чего  $\Delta_2 \downarrow 0$ , когда  $\Delta_1 \downarrow 0$ . Подставив  $\mu = 0$ , получим  $r_0 = \frac{\|\gamma'\|^3}{|\det(\gamma', \gamma''_+)|} = \frac{1}{|k(t_0 + 0)|}$ . Формула (2.7) обоснована. Вместе с тем случай 2 разобран полностью.

**Случай 3.** Пусть  $t_0 \in T_3$ , т.е. граница множества дважды дифференцируема в псевдовершине, при этом кривизна  $k(t_0) \neq 0$ . Воспользуемся разложением дроби (2.15), приняв во внимание, что в этой ситуации  $\gamma'' = \gamma''_- = \gamma''_+$ , и то, что  $\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta$  :

$$\begin{aligned} \frac{\langle \gamma'(t_2(t_1)), \gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1) \rangle}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2(t_1)))} &= \frac{\Delta \left( \|\gamma'\|^2 + \Delta_2 \langle \gamma'', \gamma' \rangle + \frac{\Delta_2^2 - \Delta_1^2}{2\Delta} \langle \gamma', \gamma'' \rangle + o(\Delta_{12}) \right)}{(\Delta_2 + \Delta_1) \det(\gamma', \gamma'') + o(\Delta_{12})} \\ &= \frac{\|\gamma'\|^2 + (1/2)(3\Delta_2 - \Delta_1) \langle \gamma', \gamma'' \rangle + o(\Delta_{12})}{\det(\gamma', \gamma'') + \varepsilon(\Delta_{12})}, \quad \varepsilon(\Delta_{12}) = \frac{o(\Delta_{12})}{\Delta} \rightarrow 0, \text{ когда } \Delta_1 \downarrow 0. \end{aligned}$$

Стало быть,

$$r_0 = \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \|\gamma'(t_0 - \Delta_1)\| \left| \frac{\|\gamma'\|^2 + (1/2)(3\Delta_2 - \Delta_1) \langle \gamma', \gamma'' \rangle + o(\Delta_{12})}{\det(\gamma', \gamma'') + \varepsilon(\Delta_{12})} \right| = \frac{\|\gamma'\|^3}{|\det(\gamma', \gamma'')|} = \frac{1}{|k|}.$$

Формула (2.8) обоснована.

Теорема доказана.

### 3. Чебышёвский слой и пример его вычисления

Заметим, что невыпуклое замкнутое множество  $M \subset \mathbb{R}^n$ , если использовать терминологию из работы [26], является множеством существования, но не является множеством единственности, поскольку существуют точки  $z \in \mathbb{R}^n \setminus M$  такие, что мощность  $\text{card}(\Omega_M(z)) > 1$ . Невыпуклое множество  $M \subset \mathbb{R}^n$  не является чебышёвским, т.е.  $L(M) \neq \emptyset$ .

Теорема 2 позволяет исследовать невыпуклые замкнутые множества  $M \subset \mathbb{R}^2$  на наличие чебышёвского слоя и в достаточно общем случае конечного числа псевдовершин находить его величину, в том числе находить величину максимального чебышёвского слоя.

С целью демонстрации эффективности разрабатываемых методов вычисления величины чебышёвского слоя невыпуклого множества далее рассмотрим подробнее относительно простой случай, когда невыпуклое замкнутое плоское множество имеет единственную псевдовершину с дефектом гладкости по производным второго порядка от координатных функций. Заметим, что в рамках развиваемых подходов возможно рассмотрение невыпуклых множеств с большим числом псевдовершин, однако это потребует более развернутого анализа, учитывающего дифференциальные особенности всех псевдовершин.

**Лемма 2.** Если в условиях теоремы 2 для случая псевдовершины  $x^{(0)} = \gamma(t_0)$  множества  $M \subset \mathbb{R}^2$ , когда  $t_0 \in T_2$ , существует крайняя точка  $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$  ветви биссектрисы  $L(x^{(0)})$ , то справедливо предельное равенство

$$\lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \alpha(z(t_0 - \Delta_1)) = \alpha(\bar{x}) = 0. \tag{3.1}$$

**Доказательство.** По условию крайняя точка ветви биссектрисы существует, это значит, что существует конечный предел

$$\lim_{\Delta_1 \downarrow 0} z(t_0 - \Delta_1) = \bar{x}. \tag{3.2}$$

Далее, находясь в условиях теоремы 1, воспользуемся формулой значений характеристической функции в точках  $t_1 = t_0 - \Delta_1$  ветви биссектрисы (2.1):

$$\alpha(z(t_0 - \Delta_1)) = 2 \arctg \left| \frac{\det(\gamma'(t_2(t_0 - \Delta_1)), \gamma(t_2(t_0 - \Delta_1)) - \gamma(t_0 - \Delta_1))}{\langle \gamma'(t_2(t_0 - \Delta_1)), \gamma(t_2(t_0 - \Delta_1)) - \gamma(t_0 - \Delta_1) \rangle} \right|. \tag{3.3}$$

Разложим дробь в (3.3), используя формулы (2.11), (2.12). Числитель

$$\begin{aligned} & \det(\gamma'(t_2(t_0 - \Delta_1)), \gamma(t_2(t_0 - \Delta_1)) - \gamma(t_0 - \Delta_1)) \\ &= \det\left(\gamma' + \Delta_2 \gamma''_+ + o(\Delta_2), \Delta\left(\gamma' + \gamma''_+ \frac{\Delta_2^2}{2\Delta} - \gamma''_- \frac{\Delta_1^2}{2\Delta} + o(\Delta_{12})\right)\right) \\ &= \Delta\left(\det(\gamma', \gamma') + \frac{\Delta_2^2}{2\Delta} \det(\gamma', \gamma''_+) - \frac{\Delta_1^2}{2\Delta} \det(\gamma', \gamma''_-) + \Delta_2 \det(\gamma''_+, \gamma') + o(\Delta_{12})\right) \\ &= \Delta\left(\left(\frac{\Delta_2^2}{2\Delta} - \Delta_2\right) \det(\gamma', \gamma''_+) - \frac{\Delta_1^2}{2\Delta} \det(\gamma', \gamma''_-) + o(\Delta_{12})\right). \end{aligned}$$

Разложение знаменателя известно (см (2.14)). Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{\det(\gamma'(t_2(t_0 - \Delta_1)), \gamma(t_2(t_0 - \Delta_1)) - \gamma(t_0 - \Delta_1))}{\langle \gamma'(t_2(t_0 - \Delta_1)), \gamma(t_2(t_0 - \Delta_1)) - \gamma(t_0 - \Delta_1) \rangle} \\ &= \frac{\Delta\left(\left(\frac{\Delta_2^2}{2\Delta} - \Delta_2\right) \det(\gamma', \gamma''_+) - \frac{\Delta_1^2}{2\Delta} \det(\gamma', \gamma''_-) + o(\Delta_{12})\right)}{\Delta\left(\|\gamma'\|^2 + \Delta_2 \langle \gamma''_+, \gamma' \rangle + \frac{\Delta_2^2}{2\Delta} \langle \gamma', \gamma''_+ \rangle - \frac{\Delta_1^2}{2\Delta} \langle \gamma', \gamma''_- \rangle + o(\Delta_{12})\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{\Delta_2^2}{2\Delta} - \Delta_2\right) \det(\gamma', \gamma''_+) - \frac{\Delta_1^2}{2\Delta} \det(\gamma', \gamma''_-) + o(\Delta_{12})}{\|\gamma'\|^2 + \Delta_2 \langle \gamma''_+, \gamma' \rangle + \frac{\Delta_2^2}{2\Delta} \langle \gamma', \gamma''_+ \rangle - \frac{\Delta_1^2}{2\Delta} \langle \gamma', \gamma''_- \rangle + o(\Delta_{12})}. \end{aligned}$$

Не трудно видеть, что при  $\Delta_1 \downarrow 0$  предел числителя равен нулю, а предел знаменателя —  $\|\gamma'\|^2 \neq 0$ . Стало быть,

$$\lim_{\Delta_1 \downarrow 0} 2 \operatorname{arctg} \left| \frac{\det(\gamma'(t_2(t_0 - \Delta_1)), \gamma(t_2(t_0 - \Delta_1)) - \gamma(t_0 - \Delta_1))}{\langle \gamma'(t_2(t_0 - \Delta_1)), \gamma(t_2(t_0 - \Delta_1)) - \gamma(t_0 - \Delta_1) \rangle} \right| = 2 \operatorname{arctg} 0 = 0. \quad (3.4)$$

Из (3.2) и (3.4) следует искомое равенство (3.1).

Лемма доказана.

**Пример 1.** Рассмотрим кривую  $\Gamma = \{(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$ , где

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} t - 0.5 \operatorname{th} t, & t \in (-\infty, 0], \\ 0.5 \sin t, & t \in (0, \pi/2], \\ 0.5, & t \in (\pi/2, +\infty), \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} \operatorname{ch} t + 0.5 \operatorname{sch} t - 1, & t \in (-\infty, 0], \\ 0.5 \cos t, & t \in (0, \pi/2], \\ \pi/4 - 0.5t, & t \in (\pi/2, +\infty). \end{cases} \quad (3.6)$$

Кривая  $\Gamma$  делит плоскость на две части. Примем в качестве искомого множества  $M$  ту часть, что лежит не выше и левее  $\Gamma$ . Множество  $M$  невыпуклое и имеет одну псевдовершину  $x^{(0)} = (\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)) = (0, 0.5)$ , когда  $t_0 = 0$ . Здесь  $\gamma'(t_0) = (0.5, 0)$ ,  $\gamma''(t_0 - 0) = (0, 1)$ ,  $\gamma''(t_0 + 0) = (0, -0.5)$ . Поскольку  $\gamma''(t_0 - 0) \neq \gamma''(t_0 + 0)$ , то  $t_0 \in T_2$ . Таким образом, в псевдовершине классическая кривизна не определена, существуют только односторонние не равные друг другу кривизны. Псевдовершине отвечает ветвь биссектрисы  $L(x^{(0)})$ , порождаемая найденным в аналитической форме локальным диффеоморфизмом

$$t_2(t_1) = -\operatorname{arctg} \frac{f(t_1)}{g(t_1)}, \quad (3.7)$$

где  $f(t_1) = 2t_1(\operatorname{ch} t_1 - 1) - t_1^2 \operatorname{sh} t_1 + \operatorname{sh} t_1(\operatorname{ch} t_1 - 1)^2$ ,  $g(t_1) = 2t_1 \operatorname{sh} t_1(\operatorname{ch} t_1 - 1) + t_1^2 - (\operatorname{ch} t_1 - 1)^2$ .

Ветвь биссектрисы задается в явном виде:

$$L(x^{(0)}) = \left\{ \left( \frac{f(t)}{2(\operatorname{ch} t - 1) - 2t \operatorname{sh} t}, \frac{g(t)}{2(\operatorname{ch} t - 1) - 2t \operatorname{sh} t} \right) : t \in (-\infty, 0) \right\}.$$

Найдем левый и правый маркеры (формулы (1.4) и (1.5)) псевдовершины. Для этого преобразуем производную диффеоморфизма (3.7):

$$t_2'(t_1) = -\frac{1}{1 + (f(t_1)/g(t_1))^2} \frac{f'(t_1)g(t_1) - f(t_1)g'(t_1)}{g^2(t_1)} = -\frac{f'(t_1)g(t_1) - f(t_1)g'(t_1)}{f(t_1)^2 + g(t_1)^2}; \quad (3.8)$$

здесь  $f'(t_1) = 2(\operatorname{ch} t_1 - 1) - t_1^2 \operatorname{ch} t_1 + \operatorname{ch} t_1(\operatorname{ch} t_1 - 1)^2 + 2\operatorname{sh}^2 t_1(\operatorname{ch} t_1 - 1)$ ,  $g'(t_1) = 2t_1 \operatorname{ch} t_1(\operatorname{ch} t_1 - 1) + 2t_1 \operatorname{sh}^2 t_1 + 2t_1$ .

Функции  $f(t_1)$  и  $g(t_1)$  можно представить в левой полуокрестности точки  $t_0 = 0$ , воспользовавшись формулами Тейлора для гиперболических функций:  $\operatorname{ch} t_1 = 1 + t_1^2/2 + o(t_1^3)$ ,  $\operatorname{sh} t_1 = t_1 + o(t_1^2)$ . Имеем

$$f(t_1) = 2t_1 \left( 1 + \frac{t_1^2}{2} - 1 + o(t_1^3) \right) - t_1^2 (t_1 + o(t_1^2)) + (t_1 + o(t_1^2)) \left( 1 + \frac{t_1^2}{2} - 1 + o(t_1^3) \right)^2 = o(t_1^3),$$

$$g(t_1) = 2t_1 (t_1 + o(t_1^2)) \left( 1 + \frac{t_1^2}{2} - 1 + o(t_1^3) \right) + t_1^2 - \left( 1 + \frac{t_1^2}{2} - 1 + o(t_1^3) \right)^2 = t_1^2 + o(t_1^2).$$

Также для их производных первого порядка можно записать  $f'(t_1) = o(t_1^2)$ ,  $g'(t_1) = 2t_1 + o(t_1)$ . Подставив эти разложения в (3.8), получим представление для производной локального диффеоморфизма:

$$t_2'(t_1) = -\frac{o(t_1^2)(t_1^2 + o(t_1^2)) - o(t_1^3)(2t_1 + o(t_1))}{(t_1^2 + o(t_1^2))^2 + (o(t_1^3))^2}.$$

Тогда значения маркеров

$$\lambda = \lim_{t_1 \rightarrow -0} t_2'(t_1) = \lim_{t_1 \rightarrow -0} \left[ -\frac{o(t_1^2)(t_1^2 + o(t_1^2)) - o(t_1^3)(2t_1 + o(t_1))}{(t_1^2 + o(t_1^2))^2 + (o(t_1^3))^2} \right] = \lim_{t_1 \rightarrow -0} \left[ -\frac{o(t_1^4)}{t_1^4 + o(t_1^4)} \right] = 0,$$

$$\mu = \lim_{t_1 \rightarrow -0} \frac{1}{t_2'(t_1)} = -\infty.$$

Производные первого и второго порядка сужения функции (3.5) на интервале  $(-\infty, 0)$  имеют вид

$$x'(t) = 1 - 0.5\operatorname{sch}^2 t, \quad x''(t) = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^3 t}.$$

Производные первого и второго порядка сужения функции (3.6) на том же интервале интервале запишем как

$$y'(t) = \operatorname{sh} t - \frac{\operatorname{sh} t}{2 \operatorname{ch}^2 t}, \quad y''(t) = \operatorname{ch} t - \frac{\operatorname{ch}^2 t - 2 \operatorname{sh}^2 t}{2 \operatorname{ch}^3 t}.$$

В силу теоремы 2 предельное значение радиуса опорного шара вычислим по формуле (2.6):

$$r_0 = \frac{1}{|k(t_0 - 0)|} = \left| \frac{y''(-0)x'(0) - y'(0)x''(-0)}{((x'(0))^2 + (y'(0))^2)^{3/2}} \right|^{-1} = \left| \frac{0.5 \cdot 0.5 - 0}{(0.5^2 + 0^2)^{3/2}} \right|^{-1} = 0.5.$$

В рассматриваемом примере биссектриса  $L(M)$  в силу единственности псевдовершины исчерпывается одним одномерным гладким многообразием, т.е. здесь  $L(M) = L(x^{(0)})$ . Всякий

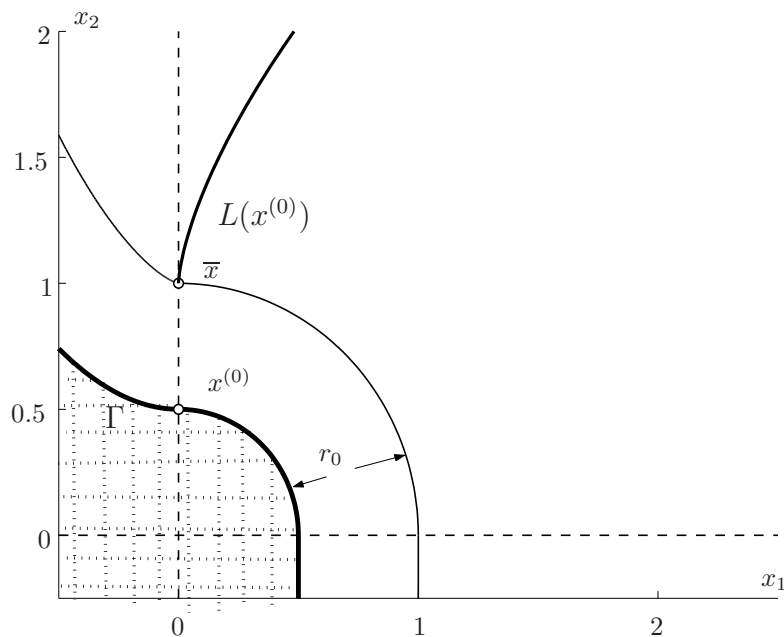


Рис. 1. Чебышёвский слой и биссектриса множества.

опорный шар  $\overline{E}_r(z)$  с центром  $z \in L(x^{(0)})$  касается множества  $M$  ровно в двух точках. Другими словами, центр любого из таких шаров имеет ровно две проекции на множество  $M$  (т. е. две ближайшие точки на этом множестве). Здесь  $Z(M) = \mathbb{R}^2 \setminus (M \cup L(x^{(0)}))$ . При этом предельное значение радиусов опорных шаров с центрами на  $L(x^{(0)})$  реализуется в крайней точке этой ветви. Крайняя точка  $\overline{x}$  ветви  $L(x^{(0)})$  принадлежит ее замыканию,  $\text{supp } \alpha = \overline{L}(x^{(0)})$ , причем  $\overline{x} \notin L(x^{(0)})$ . В силу теоремы 2, леммы 2 и определения характеристической функции угол, определяемый предельными положениями проекций, равен нулю, т. е. пределы обеих проекций совпали с псевдовершиной  $x^{(0)} = (0, 0.5)$  множества  $M$ . Другими словами, крайняя точка  $\overline{x}$  проецируется в эту псевдовершину, причем проекция здесь единственная. Стало быть, величина чебышёвского слоя реализуется на отрезке  $[\overline{x}, x^{(0)}]$ , длина которого равна  $r_0 = 0.5$ . При этом  $r_0 = 0.5$  составляет максимально возможное значение величины чебышёвского слоя, поскольку при  $r > r_0$  шар с центром в псевдовершине  $\overline{E}_r(x^{(0)})$  пересекается с  $L(x^{(0)})$  по непустому множеству, точки которого имеют две различные проекции на  $M$ . Таким образом,  $O_r(M)$  — чебышёвский слой при  $0 < r < r_0$  и множество  $\overline{O}_r(M) \setminus \partial M$  является чебышёвским слоем максимальной величины. Кроме того, величина  $r_0 = 0.5$  определяет верхнюю границу  $r$ -выпуклости множества  $M$ . Здесь  $M = (M)_r$ , когда  $0 < r \leq r_0$ .

На рис. 1 множество  $M$  помечено штриховкой, его граница кривая (3.5), (3.6) представлена жирной линией, множество  $L(x^{(0)})$  — средней линией и граница чебышёвского слоя радиуса  $r_0$  — тонкой линией.

Результаты развиваемой теории имеют непосредственное отношение к раскрытию особенностей для одного класса задач оптимального управления. Проиллюстрируем это в рамках рассматриваемого примера. Будем полагать  $M$  целевым множеством в плоской задаче управления по быстродействию для случая, когда динамика управляемой системы определяется кругом единичного радиуса с центром в начале координат. В этом случае представленная на рис. 1 биссектриса  $L(x^{(0)})$  — сингулярная (рассеивающая) кривая, из точек которой в направлении целевого множества сходят по две оптимальных траекторий. Если рассматривать начальную точку на кривой  $L(x^{(0)})$  и смещать ее в направлении крайней точки  $\overline{x}$ , то концы двух отвечающих  $\overline{x}$  оптимальных траекторий, “скользя” по границе  $M$ , сближаются с псевдовершиной  $x^{(0)}$ , причем сближение идет с разных сторон от этой точки. По достижении

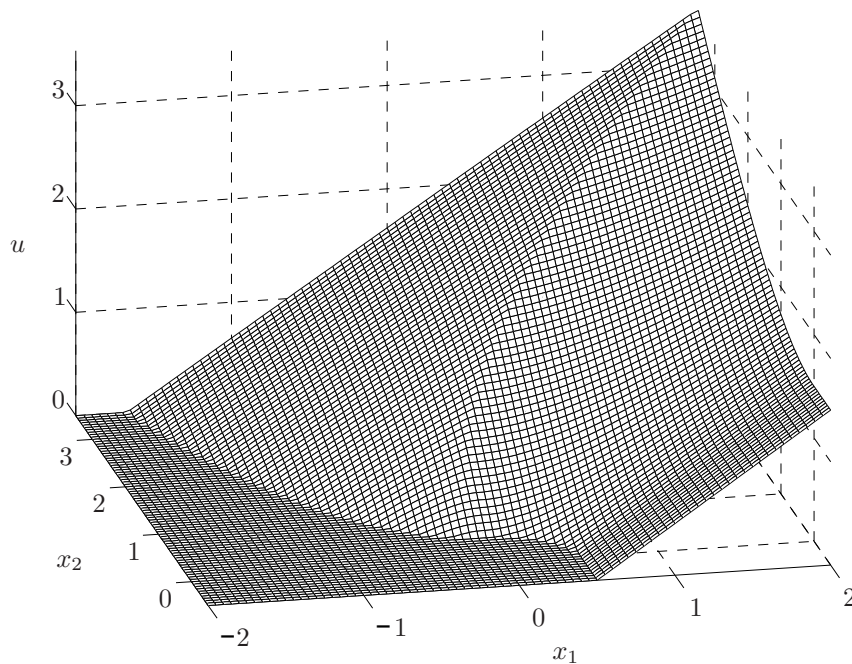


Рис. 2. График функции оптимального результата в примере 1.

начальной точкой своего предельного положения, а именно крайней точки  $\bar{x}$ , “восстанавливается” единственность оптимальных траекторий. Подробно поясняющий ситуацию рисунок приведен в работе [23]. Из  $\bar{x}$  сходит ровно одна оптимальная траектория, причем эта траектория совпадает с отрезком  $[\bar{x}, x^{(0)}]$ . В силу множественности оптимальных решений, стартующих с  $L(x^{(0)})$ , на этой кривой нарушается гладкость функции оптимального результата. При этом найденный чебышёвский слой величины  $r_0 = 0.5$  — это полоса, примыкающая к множеству  $M$ , в которой функция оптимального результата остается дифференцируемой. Визуальной иллюстрацией описанной ситуации является график функции оптимального результата, представленный на рис. 2.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ушаков В.Н., Успенский А.А. Альфа-множества в конечномерных евклидовых пространствах и их свойства // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26, № 1. С. 95–120. <https://doi.org/10.20537/vm160109>
2. Ефимов Н. В., Стечкин С.Б. Опорные свойства множеств в банаховых пространствах и чебышевские множества // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 2. С. 254–257.
3. Иванов Г.Е. Слабо выпуклые множества и функции: теория и приложения. М.: Физматлит, 2006. 352 с.
4. Власов Л.П. Чебышевские множества и некоторые их обобщения // Мат. заметки. 1968. Т. 3, № 1. С. 59–69. <https://doi.org/10.1007/BF01386963>
5. Балашов М.В. Условие Липшица метрической проекции в гильбертовом пространстве // Фундамент. и прикл. математика. 2018. Т. 22, № 1. С. 13–29. <https://doi.org/10.1007/s10958-020-05022-6>
6. Алимов А.Р., Царьков И.Г. Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // Успехи мат. наук. 2016. Т. 71, № 1. С. 3–84. <https://doi.org/10.1070/RM9698>
7. Ефимов Н.В., Стечкин С.Б. Некоторые свойства чебышевских множеств // Докл. АН СССР. 1958. Т. 118, № 1. С. 17–19.
8. Успенский А.А., Лебедев П.Д. Выявление сингулярности обобщенного решения задачи Дирихле для уравнений типа эйконала в условиях минимальной гладкости границы краевого множества // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика, механика, компьютерные науки. Ижевск, 2018. Т. 28, № 1. С. 59–73. <https://doi.org/10.20537/vm180106>

9. Лебедев П.Д., Успенский А.А. Численно-аналитическое построение обобщенного решения уравнения эйконала в плоском случае // *Мат. сб.* 2024. Т. 215, № 9. С. 99–124. <https://doi.org/10.4213/sm9500>
10. Ушаков В.Н., Ершов А.А., Матвийчук А.Р. Об оценке степени невыпуклости множеств достижимости управляемых систем // *Тр. МИАН.* 2021. Т. 315. С. 261–270. <https://doi.org/10.4213/tm4219>
11. Лебедев П.Д., Успенский А.А. Аналитическое и численное конструирование функции оптимального результата для одного класса задач быстрогодействия // *Прикл. математика и информатика: Тр. фак. ВМиК МГУ М.В. Ломоносова.* М.: МАКС Пресс, 2007. № 27. С. 65–79.
12. Брёкер Т., Ландер Л. Дифференцируемые ростки и катастрофы. М.: Мир, 1977. 208 с. <https://doi.org/CBO9781107325418>
13. Успенский А.А. Формулы исчисления негладких особенностей функции оптимального результата в задаче быстрогодействия // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2014. Т. 20, № 3. С. 276–290.
14. Успенский А.А., Лебедев П.Д. Условия трансверсальности ветвей решения нелинейного уравнения в задаче быстрогодействия с круговой индикатрисой // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2008. Т. 14, № 4. С. 82–100.
15. Успенский А.А., Лебедев П.Д. Построение сингулярных кривых для обобщенных решений уравнений типа эйконала в условиях разрыва кривизны границы краевого множества // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2016. Т. 22, № 1. С. 282–293. <https://doi.org/10.1134/S0081543817050212>
16. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.
17. Lee R. Nackman, Vijay Srinivasan. Bisectors of linearly separable sets // *Discret. Comput. Geom.* 1991. Vol. 6. P. 263–275. <https://doi.org/10.1007/BF02574688>
18. Imai K., Kawamura A., Matoušek J., Reem, D., Tokuyama T. Distance  $k$ -sectors exist // *Comput. Geometry.* 2010. Vol. 43 (9). P 713–720. <https://doi.org/10.1016/j.comgeo.2010.05.001>
19. Брус Дж., Джиблин П. Кривые и особенности. Геометрическое введение в теорию особенностей / пер. с англ. И. Г. Щербак под ред. В. И. Арнольда. М.: Мир, 1988. 262 с.
20. Местецкий Л.М. Непрерывная морфология бинарных изображений: фигуры, скелеты, циркуляры. М.: Физматлит, 2009. 288 с.
21. Florent Nacry, Mircea Sofonea. History-dependent operators and prox-regular sweeping processes // *Fixed Point Theory and Algorithms for Sciences and Engineering.* 2022. Vol. 1. Art. no. 5. <https://doi.org/10.1186/s13663-022-00715-w>
22. Толстоногов А.А. Существование и релаксация решений дифференциальных включений с максимально монотонными операторами и возмущениями // *Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления.* 2023. Т. 514, № 1. С. 65–68. <https://doi.org/10.1134/10.31857/S268695432360012X>
23. Успенский А.А., Лебедев П.Д. Альфа-множества и их оболочки: аналитические взаимосвязи в плоском случае // *Вестн. российских унив. Математика.* 2024. Т. 29, № 146. С. 204–217. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-204-217>
24. Арнольд В.И. Особенности каустик и волновых фронтов. М.: Фазис, 1996. 334 с.
25. Карлов М.И. Чебышевский слой многообразий в гильбертовом пространстве // *Тр. МИАН.* 1997. Т. 219. С. 235–248.
26. Власов Л.П. Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // *Успехи мат. наук.* 1973. Т. 28, №. 6. С. 3–66. <https://doi.org/10.1007/BF01386963>

Поступила 4.06.2025

После доработки 9.07.2025

Принята к публикации 14.07.2025

Успенский Александр Александрович

д-р физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник

зав. сектором

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: uspen@imm.uran.ru

Лебедев Павел Дмитриевич

канд. физ.-мат. наук

старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: pleb@yandex.ru

## REFERENCES

1. Ushakov V.N., Uspenskii A.A.  $\alpha$ -sets in finite dimensional Euclidean spaces and their properties. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2016, vol. 26, no. 1, pp. 95–120 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm160109>
2. Efimov N.V., Stechkin S.B. Support properties of sets in Banach spaces and Chebyshev sets. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1959, vol. 127, no. 2, pp. 254–257 (in Russian).
3. Ivanov G.E. *Slabo vypuklyye mnozhestva i funktsii: teoriya i prilozheniya* [Weakly convex sets and functions: theory and applications]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006, 352 p. ISBN: 978-5-9221-0738-9.
4. Vlasov L.P. Chebyshev sets and some generalizations of them. *Math. Notes*, 1968, vol. 3, no. 1, pp. 36–41. <https://doi.org/10.1007/BF01386963>
5. Balashov M.V. The Lipschitz property of the metric projection in the Hilbert space. *J. Math. Sci.*, 2020, vol. 250, no. 3, pp. 391–403. <https://doi.org/10.1007/s10958-020-05022-6>
6. Alimov A.R., Tsar'kov I.G. Connectedness and solarly in problems of best and near-best approximation. *Russian Math. Surv.*, 2016, vol. 71, no. 1, pp. 1–77. <https://doi.org/10.1070/RM9698>
7. Efimov N.V., Stechkin S.B. Some properties of Chebyshev sets. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1958, vol. 118, no. 1, pp. 17–19 (in Russian).
8. Uspenskii A.A., Lebedev P.D. Identification of the singularity of the generalized solution of the Dirichlet problem for an eikonal type equation under the conditions of minimal smoothness of a boundary set. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2018, vol. 28, no. 1, pp. 59–73 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm180106>
9. Uspenskii A.A., Lebedev P.D. Numerical-analytic construction of a generalized solution to the eikonal equation in the plane case. *Sb. Math.*, 2024, vol. 215, no. 9, pp. 1224–1248. <https://doi.org/10.4213/sm9500e>
10. Ushakov V.N., Ershov A.A., Matviychuk A.R. On estimating the degree of nonconvexity of reachable sets of control systems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2021, vol. 315, no. 1, pp. 247–256. <https://doi.org/10.1134/S0081543821050199>
11. Lebedev P.D., Uspenskii A.A. Analytical and numerical construction of the optimal outcome function for a class of time-optimal problems. *Comput. Math. Model.*, 2008, vol. 19, no. 4, pp. 375–386. <https://doi.org/10.1007/s10598-008-9007-9>
12. Bröcker Th., Lander L. *Differentiable germs and catastrophes*. Cambridge, New York, Cambridge Univ. Press, 1975, 179 p. <https://doi.org/10.1017/cbo9781107325418>. Translated to Russian under the title *Differentsiruyemyye rostki i katastrofy*, Moscow, Mir Publ., 1977, 208 p.
13. Uspenskii A.A. Calculation formulas for nonsmooth singularities of the optimal result function in a time-optimal problem. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2015, vol. 291, suppl. 1, pp. S239–S254. <https://doi.org/10.1134/S0081543815090163>
14. Lebedev P.D., Uspenskii A.A. Conditions of transversality of branches of solution to nonlinear equation in speed problem with a circular indicatrix. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2008, vol. 14, no. 4, pp. 82–99 (in Russian).
15. Lebedev P.D., Uspenskii A.A. The construction of singular curves for generalized solutions of eikonal-type equations with a curvature break in the boundary of the boundary set. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2017, vol. 297, suppl. 1, pp. S191–S202. <https://doi.org/10.1134/S0081543817050212>
16. Dem'yanov V.F., Vasil'ev L.V. *Nondifferentiable optimization*. NY, Springer, 1985, 452 p. Original Russian text was published in Dem'yanov V.F., Vasil'ev L.V. *Nedifferentsiruyemaya optimizatsiya*, Moscow, Nauka Publ., 1981, 384 p. ISBN: 978-0-387-90951-6.
17. Nackman L.R., Srinivasan V. Bisectors of linearly separable sets. *Discrete Comput. Geom.*, 1991, vol. 6, pp. 263–275. <https://doi.org/10.1007/BF02574688>
18. Imai K., Kawamura A., Matoušek J., Reem D., Tokuyama T. Distance  $k$ -sectors exist. *Comput. Geom.*, 2010, vol. 43, no. 9, pp. 713–720. <https://doi.org/10.1016/j.comgeo.2010.05.001>

19. Bruce J.W., Giblin P.J. *Curves and singularities. A geometrical introduction to singularity theory*. Cambridge, New York, Cambridge Univ. Press, 1984, 222 p. ISBN-10: 0521249457. Translated to Russian under the title *Krivyie i osobennosti. Geometricheskoye vvedeniye v teoriyu osobennostey*, Moscow, Mir Publ., 1988, 262 p. ISBN: 5-03-001194-3.
20. Mestetskii L.M. *Nepriyemnaya morfologiya binarnykh izobrazheniy: figury, skelety, tsirkulyary* [Continuous morphology of binary images: figures, skeletons, circulars]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 288 p. ISBN: 978-5-9221-1050-1.
21. Nacry F., Sofonea M. History-dependent operators and prox-regular sweeping processes. *Fixed Point Theory Algorithms Sci. Eng.* 2022, vol. 1, art. no. 5. <https://doi.org/10.1186/s13663-022-00715-w>
22. Tolstonogov A.A. Existence and relaxation of solutions for a differential inclusion with maximal monotone operators and perturbations. *Dokl. Math.*, 2023, vol. 108, no. 3, pp. 477–480. <https://doi.org/10.1134/S1064562423701399>
23. Lebedev P.D., Uspenskii A.A. Alpha sets and their hulls: analytical relationships in the plane case. *Vestnik Rossiyskikh Univ. Mat.*, 2024, vol. 29, no. 146, pp. 204–217 (in Russian). <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-204-217>
24. Arnold V.I. *Osobennosti kaustik i volnovykh frontov* [Singularities of caustics and wave fronts]. Moscow, Fazis Publ., 1996, 334 p. ISBN: 5-7036-0021-9.
25. Karlov M.I. Chebyshev layer of manifolds in a Hilbert space. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1997, vol. 219, pp. 231–244.
26. Vlasov L.P. Chebyshev sets and some generalizations of them. *Math. Notes* 1968, vol. 3, no. 1, pp. 36–41. <https://doi.org/10.1007/BF01386963>

Received June 4, 2025

Revised July 9, 2025

Accepted July 14, 2025

**Funding Agency:** The study of the first author was supported by the Russian Science Foundation (project no. 25-11-00269, <https://rscf.ru/project/25-11-00269/>).

*Aleksandr Aleksandrovich Uspenskii*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: uspen@imm.uran.ru.

*Pavel Dmitrievich Lebedev*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: pleb@yandex.ru.

Cite this article as: A. A. Uspenskii, P. D. Lebedev. Finding the value of the Chebyshev layer of a flat set using constructions of the theory of alpha sets and Efimov–Stechkin support balls. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 3, pp. 264–280.