ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 31 № 3 2025

УДК 517.518.153

# ОБ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ В ФОРМУЛЕ НЬЮТОНА — ЛЕЙБНИЦА

**Д. С. Теляковский**

Модуль непрерывности $\varphi(t)$ будем называть *нелипщицевым*, если $\varphi(t)/t \to +\infty$ при $t \to +0$. Не оговаривая этого каждый раз специально, будем считать, что каждый модуль непрерывности является нелипшицевым, сторого возрастающим и выпуклым вверх. Хаусдорфову $\varphi$-меру множества $e$ будем обозначать как $H_\varphi(e)$.

$1^\circ$. Для произвольного модуля непрерывности $\varphi(t)$ построено множество $C_\varphi$ канторовского типа, хаусдорфова $\varphi$-мера которого положительна и конечна. Показано, что построенная по $C_\varphi$ канторова лестница $C_\varphi(x)$ принадлежит классу Никольского — Гёльдера $H^\varphi$.

$2^\circ$. Доказано, что если модуль непрерывности функции $f(x)$ удовлетворяет неравенству $\omega_f(t) \leqslant L\varphi(t)$, функция $f(x)$ дифференцируема почти всюду на $[a;b] \setminus e$, где множество $e$ замкнуто, $H_\varphi(e) < +\infty$ и $f'(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то выполнена оценка

$$\left| \int\limits_a^b f'(x)\,dx - f(x)\,\Big|_a^b \right| \leqslant LH_\varphi(e).$$

Пример множества $C_\varphi$ и функции $C_\varphi(x)$ показывает, что эта оценка точна по порядку.

$3^\circ$. Пусть модули непрерывности $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ удовлетворяют оценке $\psi(t) = o\big(\varphi(t)\big)$ при $t \to +0$. Тогда, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и для каждой точки $\xi$ замкнутого множества $e \subset [a;b]$ при некотором $c_\xi > 0$ во всех точках $x$, достаточно близких к $\xi$, выполнено неравенство

$$|f(x) - f(\xi)| \geqslant c_\xi \varphi(|x-\xi|),$$

то $H_\psi(e) = 0$.

Ключевые слова: модуль непрерывности, класс Никольского — Гёльдера, канторово множество, канторова лестница, формула Ньютона — Лейбница, исключительное множество.

**D. S. Telyakovskii. On exceptional sets in the Newton–Leibniz formula.**

Modulus of continuity $\varphi(t)$ will be called *non-lipschitz*, if $\varphi(t)/t \to +\infty$ as $t \to +0$. Without mentioning it every time, it will be assumed that every modulus of continuity is non-lipschitz, strictly increasing, and concave up. Hausdorff $\varphi$-measure of set $e$ will be denoted as $H_\varphi(e)$.

$1^\circ$. For an arbitrary modulus of continuity $\varphi(t)$ we costruct set $C_\varphi$ of Cantor type, whose Hausdorff $\varphi$-measure is positive and finite. We will show that Cantor function $C_\varphi(x)$ constructed on set $C_\varphi$ belongs to Nikol'skii–Hölder class $H^\varphi$.

$2^\circ$. We prove that if modulus of continuity of function $f(x)$ satisfies the inequality $\omega_f(t) \leqslant L\varphi(t)$, function $f(x)$ is differentiable almost everywhere on $[a;b] \setminus e$, where set $e$ is closed, $H_\varphi(e) < +\infty$, plus, $f'(x)$ is integrable on $[a;b]$, then we have an estimate

$$\left| \int\limits_a^b f'(x)\,dx - f(x)\,\Big|_a^b \right| \leqslant LH_\varphi(e).$$

We provide an example of set $C_\varphi$ and function $C_\varphi(x)$ that illustrates that this estimate is exact.

$3^\circ$. Let $\varphi(t)$ and $\psi(t)$ be moduli of continuity that satisfy the estimate $\psi(t) = o\big(\varphi(t)\big)$ as $t \to +0$. If a function $f(x) \in C[a;b]$ and for each point $\xi$ of closed set $e \subset [a;b]$ for all points $x$, sufficiently close to $\xi$, there exists $c_\xi > 0$, so that the following inequality holds:

$$|f(x) - f(\xi)| \geqslant c_\xi \varphi(|x-\xi|),$$

then $H_\psi(e) = 0$.

Keywords: modulus of continuity, Nikol'skii–Hölder class, Cantor set, Cantor function, Newton–Leibniz formula, exceptional set.

**MSC:** 26A15, 25A16

**DOI**: 10.21538/0134-4889-2025-31-3-250-263

## 1. Введение. Определения и формулировки основных результатов

Пусть $\varphi(t)$, $t \in [0;1]$, — функция типа модуля непрерывности у которой $\varphi(t)/t \to +\infty$ при $t \to +0$. Такие модули непрерывности будем называть *нелипшицевыми*. Согласно лемме С. Б. Стечкина [1][1] функцию $\varphi(t)$ можно считать выпуклой вверх. Ясно, что в этом случае функция $\varphi(t)$ строго возрастает, по крайней мере вблизи точки $t = 0$. Далее будем считать (иногда не оговаривая этого специально), что каждый модуль непрерывности $\varphi(t)$ является нелипшицевым, выпуклым вверх, строго возрастающим на $[0;1]$ и $\varphi(1) = 1$. Модуль непрерывности функции $f$ будем, как обычно, обозначать через $\omega_f(t)$.

Для таких функций $\varphi(t)$ будем рассматривать (внешнюю) $\varphi$-меру Хаусдорфа. *Хаусдорфовой $\varphi$-мерой* множества $E$ называется величина

$$H_\varphi(E) := \sup_{\varepsilon>0} \inf \sum\nolimits_j \varphi(\operatorname{diam} G_j),$$

где каждое множество $G_j$ открыто, $\operatorname{diam} G_j < \varepsilon$ и $E \subset \bigcup G_j$. Ясно, что в тех же обозначениях $H_\varphi(E)$ можно определить и как $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \inf \sum\nolimits_j \varphi(\operatorname{diam} G_j)$.

Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $\xi$ и найдется такое число $c_\xi > 0$, что для всех точек $x$, достаточно близких к $\xi$, выполнено неравенство

$$\bigl|f(x) - f(\xi)\bigr| \leqslant c_\xi |x - \xi|,$$

то будем говорить, что функция $f(x)$ удовлетворяет *условию Липшица в точке* $\xi$.

*Классом Никольского — Гёльдера* $H^\varphi$ называется множество функций $f$, модуль непрерывности которых удовлетворяет оценке $\omega_f(t) = O(\varphi(t))$ при $t \to +0$, т. е. для некоторого положительного $C$ при достаточно малых $t$ выполнено неравенство $\omega_f(t) < C\varphi(t)$.

В настоящей работе получены следующие результаты.

1°. Для произвольного выпуклого вверх нелипшицева модуля непрерывности $\varphi(t)$ построено множество канторовского типа $C_\varphi \subset [0;1]$, хаусдорфова $\varphi$-мера которого положительна и конечна: $1/2 \leqslant H_\varphi(C_\varphi) \leqslant 1$. Показано, что модуль непрерывности соответствующей канторовой лестницы $C_\varphi(x)$ удовлетворяет оценке $\omega_{C_\varphi}(t) \leqslant 2\varphi(t)$ и, следовательно, $C_\varphi(x) \in H^\varphi$.

Отметим, что различные конструкции множеств канторовского типа приведены, например, в книге А. Н. Герега [2] (2017).

2°. Доказана следующая теорема об исключительных множествах в формуле Ньютона — Лейбница (см. разд. 3).

**Теорема 1.** *Пусть $\varphi(t)$ — нелипшицевый модуль непрерывности, множество $e \subset [a;b]$ замкнуто, его $\varphi$-мера $H_\varphi(e)$ конечна и множество $e_0 \subset [a;b]$ не более чем счетно. Если непрерывная на $[a;b]$ функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *в каждой точке $\xi \in [a;b] \setminus (e \cup e_0)$ функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица;*

2) *найдется такое число $L > 0$, что для каждых точек $\xi \in e$ и $x \in [a;b]$ выполнено неравенство*

$$\bigl|f(x) - f(\xi)\bigr| \leqslant L\varphi\bigl(|x - \xi|\bigr);$$

3) *производная $f'(x)$ суммируема*[2] *на $[a;b]$,*

[1] Лемма С. Б. Стечкина с согласия ее автора была впервые опубликована в работе А. В. Ефимова [1, лемма 4, с. 78, 1961].

[2] Существование производной $f'(x)$ почти всюду на $[a;b]$ a priori не предполагается, оно будет получено в процессе доказательства теоремы 1. В условии 3) подразумевается суммируемость $f'(x)$ по множеству точек, в которых функция $f(x)$ дифференцируема. Аналогично понимается условие суммируемости производной и в леммах 1 и 2.

*то в этом случае выполняется неравенство*

$$\left|\int_a^b f'(x)\,dx - f(x)\,\Big|_a^b\right| \leqslant LH_\varphi(e). \tag{1.1}$$

Непосредственно из теоремы 1 вытекает следующее достаточное условие восстановимости функции по ее производной.

**Следствие 1.** *Если в теореме 1 условие $H_\varphi(e) < +\infty$ заменить условием $H_\varphi(e) = 0$, то функция $f(x)$ является абсолютно непрерывной на отрезке $[a;b]$ и, значит, восстанавливается по своей производной*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt, \quad x \in [a;b].$$

Неравенство (1.1) является точным по порядку. Это видно из примера множества $C_\varphi$ и функции $C_\varphi(x)$, построенных в разд. 2:

$$\left|\int_0^1 C'_\varphi(x)\,dx - C_\varphi(x)\,\Big|_0^1\right| = 1 \geqslant H_\varphi(C_\varphi) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Доказательство теоремы 1 основано на тех идеях, используя которые Е. П. Долженко [3] (1963) дал достаточное условие аналитичности функций комплексного переменного из класса $H^\varphi$.

3°. В 1964 г. А. И. Рубинштейн [4, теорема 4.2] доказал, что если функция $f(x) \in H^\varphi[a;b]$, то множество точек $\xi \in [a;b]$, в которых

$$\underline{\lim}\,\frac{|f(x) - f(\xi)|}{\varphi(|x-\xi|)} > 0 \ \text{ при } x \to \xi,\ \ x \neq \xi, \tag{1.2}$$

имеет нулевую длину по Лебегу. Теорема 2 уточняет это утверждение.

**Теорема 2.** *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — выпуклые вверх нелипшицевы модули непрерывности и при $t \to +0$ выполнена оценка $\psi(t) = o\big(\varphi(t)\big)$. Если в каждой точке $x$ замкнутого множества $E \subset [a;b]$ выполнено неравенство*

$$\underline{\lim}_{\Delta x \to 0} \frac{\big|f(x+\Delta x) - f(x)\big|}{\varphi(|\Delta x|)} > 0,$$

*то $H_\psi(E) = 0$.*

## 2. Построение и свойства канторового множества $C_\varphi$ и соответствующей канторовой лестницы $C_\varphi(x)$

Пусть $\varphi(t)$, $t \in [0;1]$ — произвольный нелипшицевый модуль непрерывности.

**Шаг 1.** Построение канторова множества $C_\varphi$ и определение канторовой лестницы $C_\varphi(x)$.

Зададим последовательность $\{t_n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$, точек отрезка $[0;1]$, взяв в качестве $t_n$ значение, при котором $\varphi(t_n) = 2^{-n}$. Так как $\varphi(t)$ — выпуклый вверх нелипшицевый модуль непрерывности, то частное $\varphi(t)/t$ строго возрастает с убыванием $t$, поэтому значения $\varphi(t_n)/t_n$ строго возрастают и, значит, при каждом номере $n$ выполнено неравенство $2t_{n+1} < t_n$.

Определим предфракталы $C_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, которые в пересечении дадут канторово множество $C_\varphi$. Каждый предфрактал $C_n$ будет состоять из $2^n$ отрезков длины $t_n$. Там, где это не будет вызывать путаницы, отрезки предфрактала $C_n$, не различая их, будем обозначать через $\Delta_n$.

Положим $C_0 := [0; 1]$. Предфрактал $C_0$ состоит из $1 = 2^0$ отрезка длины $t_0 = 1$.

Далее положим $C_1 := [0; t_1] \cup [1 - t_1; 1]$. Предфрактал $C_1$ состоит из $2^1$ отрезков длины $t_1$.

Предположим, что предфрактал $C_n$, состоящий из $2^n$ отрезков длины $t_n$, уже построен. При переходе к предфракталу $C_{n+1}$ каждый отрезок $\Delta_{n,k} = [a_k; b_k]$, $k = 1, \dots, 2^n$, предфрактала $C_n$ заменим непересекающимися отрезками $[a_k; a_k + t_{n+1}]$ и $[b_k - t_{n+1}; b_k]$.

По построению при каждом номере $n$ сумма длин отрезков предфрактала $C_n$ определяется как $2^n t_n = \dfrac{t_n}{2^{-n}} = \dfrac{t_n}{\varphi(t_n)} \searrow 0$ при $n \to \infty$. Положим

$$C_\varphi := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$

По построению множество $C_\varphi$ является множеством канторовского типа. По канторовскому множеству $C_\varphi$ стандартным образом определим канторову лестницу $C_\varphi(x)$, $x \in [0; 1]$.

**Шаг 2.** Проверка конечности хаусдорфовой меры $H_\varphi(C_\varphi)$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, найдем какой-нибудь номер $n$, для которого $t_n < \varepsilon$, и рассмотрим покрытие множества $C_\varphi$ набором отрезков $\{\Delta_{n,k}\}$ предфрактала $C_n$. Это покрытие состоит из $2^n$ отрезков $\Delta_{n,k}$, длина каждого отрезка $\operatorname{diam} \Delta_{n,k} = t_n < \varepsilon$, и, поскольку $\varphi(t_n) = 2^{-n}$, то

$$\sum\nolimits_k \varphi(\operatorname{diam} \Delta_{n,k}) = 2^n \varphi(t_n) = 1. \tag{2.1}$$

При определении $\varphi$-меры Хаусдорфа множества $E$ рассматриваются покрытия $E$ открытыми множествами. Функция $\varphi(t)$ непрерывна и сумма (2.1) содержит конечное число слагаемых, поэтому можно заменить каждый отрезок $\Delta_{n,k}$ интервалом $G_k \supset \Delta_{n,k}$, $\operatorname{diam} G_k < \varepsilon$, так, что сумма (2.1) для набора интервалов $\{G_k\}$ будет сколь угодно мало превосходить 1. Отсюда следует, что $H_\varphi(C_\varphi) \leqslant 1$.

**Шаг 3.** Доказательство принадлежности канторовой лестницы $C_\varphi(x)$ классу Никольского — Гёльдера $H^\varphi[0; 1]$.

Это доказательство аналогично доказательству принадлежности канторовой лестницы, построенной по стандартному канторовому множеству, классу Липшица — Гёльдера с показателем $\log_3 2$ из работы Э. Хилле и Я.Д. Тамаркина [5] (1929).

Чтобы установить, что $C_\varphi(x) \in H^\varphi[0; 1]$, достаточно убедиться, что модуль непрерывности функции $C_\varphi(x)$ при каждом $t \in [0; t_1]$ удовлетворяет оценке

$$\omega_{C_\varphi}(t) \leqslant 2\varphi(t). \tag{2.2}$$

Для доказательства неравенства (2.2) проверим сначала, что если точки $x$ и $x + t_n$ при некотором номере $n$ лежат на отрезке $[0; 1]$, то

$$C_\varphi(x + t_n) - C_\varphi(x) \leqslant \varphi(t_n). \tag{2.3}$$

Это неравенство обращается в равенство, если точка $x$ является левым концом какого-либо отрезка $\Delta_{n,k}$ предфрактала $C_n$, поэтому усилить (2.3) невозможно.

Ясно, что если точки $x$ и $x + t_n$ лежат на $[0; 1]$, то при некотором $k$, $1 \leqslant k \leqslant 2^n - 1$ точка $x$ принадлежит отрезку $[a_k; a_{k+1}]$. При этом отрезок $[x; x + t_n]$ может пересекаться только с отрезками $\Delta_{n,k}$ и $\Delta_{n,k+1}$ предфрактала $C_n$ и с отрезком $[b_k; a_{k+1}]$, лежащим между $\Delta_{n,k}$ и $\Delta_{n,k+1}$. Рассмотрим все возможные случаи расположения отрезка $[x; x + t_n]$.

Если отрезок $[x; x + t_n]$ целиком лежит на отрезке $[b_k; a_{k+1}]$, который является одним из дополнительных промежутков предфрактала $C_n$, на которых функция $C_\varphi(x)$ постоянна, то приращение $C_\varphi(x)$ на $[x; x + t_n]$ равно нулю и неравенство (2.3) выполнено.

Предположим теперь, что отрезок $[x;x+t_n]$ перекрывается только с одним из отрезков $\Delta_{n,k}$ и $\Delta_{n,k+1}$. Поскольку возрастающая функция $C_\varphi(x)$ постоянна на дополнительных промежутках предфрактала $C_n$, в нашем случае это отрезок $[b_k;a_{k+1}]$, то приращение $C_\varphi(x+t_n)-C_\varphi(x)$ равно приращению $C_\varphi(x)$ на том отрезке предфрактала $C_n$, с которым пересекается отрезок $[x;x+t_n]$. Приращение $C_\varphi(x)$ на каждом отрезке предфрактала $C_n$ равно $\varphi(t_n)$, и поэтому неравенство (2.3) в этом случае выполнено.

Осталось рассмотреть случай, когда отрезок $[x;x+t_n]$ перекрывается и с отрезком $\Delta_{n,k}$, и с отрезком $\Delta_{n,k+1}$, что возможно, только если расстояние между отрезками $\Delta_{n,k}$ и $\Delta_{n,k+1}$ меньше $t_n$. Поскольку нестрого возрастающая функция $C_\varphi(x)$ постоянна на отрезке $[b_k;a_{k+1}]$, который в рассматриваемом случае лежит внутри отрезка $[x;x+t_n]$, то

$$\begin{aligned} C_\varphi(x+t_n)-C_\varphi(x)&=\bigl(C_\varphi(x+t_n)-C_\varphi(a_{k+1})\bigr)+\bigl(C_\varphi(a_{k+1})-C_\varphi(b_k)\bigr)\\ &+\bigl(C_\varphi(b_k)-C_\varphi(x)\bigr)=\bigl(C_\varphi(b_k)-C_\varphi(x)\bigr)+\bigl(C_\varphi(x+t_n)-C_\varphi(a_{k+1})\bigr). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Так как части графика функции $C_\varphi(x)$ над отрезками $\Delta_{n,k}$ предфрактала $C_n$ можно совместить параллельным переносом. При этом совмещаются концы кусков графика, лежащие над правыми (или левыми) концами соответствующих отрезков из $C_n$, то

$$C_\varphi(b_k)-C_\varphi(x)=C_\varphi(b_k+(b_{k+1}-b_k))-C_\varphi(x+(b_{k+1}-b_k))=C_\varphi(b_{k+1})-C_\varphi(x+(b_{k+1}-b_k)). \tag{2.5}$$

Заменяя в (2.4) приращение $C_\varphi(b_k)-C_\varphi(x)$ выражением из формулы (2.5), получаем

$$\begin{aligned} C_\varphi(x+t_n)-C_\varphi(x)&=\bigl(C_\varphi(b_{k+1})-C_\varphi(x+(b_{k+1}-b_k))\bigr)+\bigl(C_\varphi(x+t_n)-C_\varphi(a_{k+1})\bigr)\\ &=C_\varphi(b_{k+1})-\bigl(C_\varphi(x+(b_{k+1}-b_k))-\bigl(C_\varphi(x+t_n)\bigr)-C_\varphi(a_{k+1}). \end{aligned}$$

Отсюда, поскольку $x+(b_{k+1}-b_k)>x+t_n$ и функция $C_\varphi(x)$ возрастает, то

$$C_\varphi(x+t_n)-C_\varphi(x)\leqslant C_\varphi(b_{k+1})-C_\varphi(a_{k+1})=\varphi(t_n).$$

Неравенство (2.3) доказано.

Теперь проверим выполнение оценки (2.2).

Возьмем произвольную точку $x\in\bigl(0;1/2\bigr]$ и произвольное значение $t\in(0;t_1]$, при этом, в частности, $x+t\in[0;1]$. Найдем натуральное $n$, при котором $t\in(t_{n+1};t_n]$. Функция $C_\varphi(x)$ возрастает, поэтому, учитывая, что $\varphi(t)$ является функцией типа модуля непрерывности и неравенства (2.3), имеем, что

$$C_\varphi(x+t)-C_\varphi(x)\leqslant C_\varphi(x+t_n)-C_\varphi(x)\leqslant\varphi(t_n)=2\varphi(t_{n+1})<2\varphi(t).$$

Оценка (2.2) для модуля непрерывности $\omega_{C_\varphi}(t)$ доказана и, следовательно, $C_\varphi(x)\in H^\varphi[0;1]$.

**Шаг 4.** Доказательство положительности $\varphi$-меры Хаусдорфа множества $C_\varphi$.

Пользуясь неравенством (2.2) убедимся, что $H_\varphi(C_\varphi)\geqslant 1/2$. Для этого достаточно показать, что для произвольного покрытия множества $C_\varphi$ открытыми множествами $\{G_j\}$, $j\in\mathbb{N}$, выполнено

$$\sum\nolimits_j\varphi(\operatorname{diam}G_j)\geqslant\frac{1}{2}, \tag{2.6}$$

причем никакие ограничения на $\operatorname{diam}G_j$ не накладываются. Будем последовательно изменять покрытие $\{G_j\}$ так, чтобы после каждого изменения соответствующая сумма в левой части (2.6) не могла увеличиться, и докажем (2.6) для покрытия, полученного в конце преобразований.

Возьмем произвольное покрытие множества $C_\varphi$ открытыми множествами $\{G_j\}$, $j\in\mathbb{N}$.

(1) Каждое множество $G_j$ заменим минимальным интервалом, его содержащим, при этом $\operatorname{diam}G_j$ не изменится.

(2) Если в покрытии $\{G_j\}$ есть интервалы, которые не пересекаются с $C_\varphi$, исключим их из $\{G_j\}$. Так же будем делать на каждом дальнейшем шаге преобразования.

(3) Из покрытия $\{G_j\}$ выделим конечное подпокрытие множества $C_\varphi$.

(4) Каждый интервал $G_j$ заменим отрезком $I_j := \bigl[\inf(C_\varphi \cap G_j); \sup(C_\varphi \cap G_j)\bigr]$, $j = 1, \dots, m$. Это минимальный отрезок, который целиком содержит пересечение $C_\varphi \cap G_j$. Так как множество $C_\varphi$ совершенно, то пересечение $C_\varphi \cap G_j$ совершенно относительно $G_j$, поэтому отрезки $I_j$ не вырождаются. Если в системе $\{I_j\}$ есть отрезки, которые целиком покрываются другими отрезками системы, исключим их.

Полученное покрытие, после возможной перенумерации, будем обозначать как $\{I_k\}$, $k = 1, \dots, m$.

(5) Если отрезки $I_p$ и $I_q$ из покрытия $\{I_k\}$ перекрываются, то исключим их общую часть $I_p \cap I_q$ из любого из них, перенумеровывать отрезки системы $\{I_k\}$ при этом не будем.

После выполнения преобразований (1)–(5) будет получено покрытие множества $C_\varphi$ конечной системой неперекрывающихся отрезков $\{I_k\}$, $I_k = [c_k; d_k]$, $k = 1, \dots, m$, на дополнительных промежутках которой функция $C_\varphi(x)$ постоянна. При этом ясно, что при каждом из этих преобразований диаметры множеств системы могут только уменьшаться[3] и некоторые промежутки могут быть исключены. Значит, в результате выполнения преобразований (1)–(5) сумма, стоящая в левой части неравенства (2.6), не может увеличиться, т. е. выполнено неравенство

$$\sum\nolimits_j \varphi(\operatorname{diam} G_j) \geqslant \sum\nolimits_k \varphi(\operatorname{diam} I_k). \tag{2.7}$$

Будем считать, что отрезки $I_k$ занумерованы слева направо и поэтому, в частности, $c_1 = 0$ и $d_m = 1$.

Функция $C_\varphi(x)$ непрерывна и возрастает на отрезке $[0; 1]$, а на дополнительных промежутках системы $\{I_k\}$, т. е. на отрезках $[d_k; c_{k+1}]$, $k = 1, \dots, m-1$, она постоянна. Поэтому в силу соотношения (2.2) получаем

$$\begin{gathered}
1 = C_\varphi(1) - C_\varphi(0) = \bigl(C_\varphi(d_m) - C_\varphi(c_m)\bigr) + \bigl(C_\varphi(c_m) - C_\varphi(d_{m-1})\bigr) \\
+ \bigl(C_\varphi(d_{m-1}) - C_\varphi(c_{m-1})\bigr) + \dots + \bigl(C_\varphi(d_1) - C_\varphi(c_1)\bigr) = \sum\nolimits_k \bigl(C_\varphi(d_k) - C_\varphi(c_k)\bigr) \\
\leqslant \sum\nolimits_k \omega_{C_\varphi}(d_k - c_k) \leqslant \sum\nolimits_k 2\varphi(d_k - c_k) = 2\sum\nolimits_k \varphi(\operatorname{diam} I_k).
\end{gathered}$$

Значит,

$$\sum\nolimits_k \varphi(\operatorname{diam} I_k) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Таким образом, из неравенства (2.7) следует, что для произвольного покрытия множества $C_\varphi$ системой открытых множеств $\{G_j\}$ выполнено неравенство

$$\sum\nolimits_k \varphi(\operatorname{diam} G_j) \geqslant \frac{1}{2}$$

и, следовательно, $H_\varphi(C_\varphi) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

## 3. Доказательство теоремы 1

Будем говорить, что точка $\xi$ является *регулярной* точкой функции $f(x)$, если у $\xi$ найдется такая окрестность $U_\xi$, что $f(x)$ абсолютно непрерывна на каждом отрезке $\Delta \subset U_\xi$. Если в любой окрестности $U_\xi$ найдется промежуток $\Delta \subset U_\xi$, на котором $f(x)$ не абсолютно непрерывна,

[3] Поэтому $\max_k \operatorname{diam} I_k \leqslant \sup_j \operatorname{diam}_j G_j$.

то такую точку $\xi$ будем называть *особой* точкой функции $f(x)$. Множество всех особых точек будем называть *исключительным* (или *особым*) множеством функции $f(x)$ и обозначать через $P$.

Для доказательства теоремы 1 нам потребуются две леммы.

**Лемма 1.** *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и производная $f'(x)$ суммируема на $[a;b]$*[4]*. Тогда*

1) *если функция $f(x)$ регулярна в каждой точке отрезка $[c;d]\subset(a;b)$, то $f(x)$ абсолютно непрерывна на $[c;d]$;*

2) *если функция $f(x)$ абсолютно непрерывна на каждом отрезке $[c;d]\subset(a;b)$, то $f(x)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[a;b]$;*

3) *исключительное множество $P$ функции $f(x)$ не имеет изолированных точек.*

Доказательство. 1) Для каждой точки $\xi\in[c;d]$ найдем интервал $U(\xi,2r_\xi):=(\xi-2r_\xi;\xi+2r_\xi)\subset(a;b)$, для которого на любом отрезке $\Delta\subset U(\xi,2r_\xi)$ функция $f(x)$ абсолютно непрерывна. Выделим конечное подпокрытие отрезка $[c;d]$ интервалами $U_j:=U(\xi_j,r_{\xi_j})$, $j=1,\dots,n$. Получено покрытие отрезка $[c;d]$ конечной системой отрезков $\{\overline{U_j}\}$, на каждом из которых функция $f(x)$ абсолютно непрерывна. Разбиение отрезка $[c;d]$ множеством всех концов отрезков $\overline{U_j}$ дает разбиение $[c;d]$ на конечную систему неперекрывающихся отрезков, на каждом из которых функция $f(x)$ абсолютно непрерывна. Отсюда следует абсолютная непрерывность $f(x)$ на отрезке $[c;d]$.

2) Заметим сначала, что из условия 2) леммы следует, что функция $f(x)$ дифференцируема почти всюду на $[a;b]$. Возьмем произвольную точку $x\in(a;b)$. Согласно условию 2) леммы для каждой точки $c\in(a;x)$ функция $f(x)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[c;x]$. Поэтому для любой точки $x\in(a;b)$ и любой точки $c\in(a;x)$ выполнено

$$f(x)=f(c)+\int\limits_c^x f'(t)\,dt.$$

Так как интеграл $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,dt$ сходится и, значит, абсолютно непрерывен, а функция $f(x)$ непрерывна в точке $a$, то, переходя в этом равенстве к пределу при $c\searrow a$, получаем, что для произвольной точки $x\in[a;b)$ выполнено

$$f(x)=f(a)+\int\limits_a^x f'(t)\,dt.$$

В силу непрерывности функции $f(x)$ на $[a;b]$ и абсолютной непрерывности интеграла при переходе к пределу при $x\nearrow b$ получаем, что это равенство выполнено для каждого $x\in[a;b]$. Это означает абсолютную непрерывность $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

3) Для доказательства этого пункта достаточно убедиться, что если в некоторой окрестности $U_\xi$ точки $\xi$ функция $f(x)$ регулярна в каждой точке $U_\xi\setminus\xi$, то $f(x)$ регулярна и в точке $\xi$. Из п. 1) леммы следует, что $f(x)$ абсолютно непрерывна на каждом отрезке $\Delta\subset\bigl(U_\xi\setminus\xi\bigr)$. Далее, из п. 2) леммы следует, что $f(x)$ абсолютно непрерывна на замыкании каждой части, на которые точка $\xi$ делит интервал $U_\xi$, и, значит, $f(x)$ абсолютно непрерывна на отрезке $\overline{U_\xi}$. Регулярность функции $f(x)$ в точке $\xi$ проверена.

Лемма 1 доказана.

[4]В подстрочном примечании 2 к формулировке теоремы 1 уже отмечалось, что в леммах 1 и 2 суммируемость $f'(x)$ предполагается по множеству точек отрезка $[a;b]$, в которых функция $f(x)$ дифференцируема.

**Лемма 2.** *Пусть* $e_0$ *— не более чем счетное множество точек отрезка* $[a;b]$. *Пусть далее функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a;b]$, *удовлетворяет условию Липшица в каждой точке* $[a;b]\setminus e_0$ *и производная* $f'(x)$ *суммируема на* $[a;b]$. *Тогда* $f(x)$ *абсолютно непрерывна на* $[a;b]$ *и, значит, восстанавливается по своей производной*

$$f(x)=f(a)+\int\limits_a^x f'(t)\,dt,\quad x\in[a;b].$$

Доказательство. Согласно условиям 1) и 2) леммы 1 для доказательства леммы 2 достаточно убедиться, что функция $f(x)$ регулярна в каждой точке произвольного отрезка $[c;d]\subset(a;b)$.

Предположим, что лемма 2 не верна и исключительное множество $P$ точек отрезка $[c;d]$, т. е. множество точек, в любой окрестности которых функция $f(x)$ не всюду абсолютно непрерывна, не пусто. Замкнутость множества $P$ следует непосредственно из определения. Функция $f(x)$ непрерывна, поэтому по условию 3) леммы 1 замкнутое множество $P$ не содержит изолированных точек и, значит, является совершенным.

Будем считать, что во множестве $e_0$ нет точек, в которых функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица или у которых есть окрестность, где $f(x)$ абсолютно непрерывна. При этих условиях выполнено включение $e_0\subset P$, причем в каждой точке множества $P\setminus e_0$ функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица.

Ко множествам $P_n$, $n\in\mathbb{N}$, отнесем те точки $\xi\in P\setminus e_0$, для которых во всех точках $x$, $|x-\xi|<1/n$, выполнено неравенство $\bigl|f(x)-f(\xi)\bigr|\leqslant n|x-\xi|$; в силу непрерывности функции $f(x)$ множества $P_n$ замкнуты. Каждая точка исключительного множества $P$, в которой функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица, принадлежит всем множествам $P_n$ с достаточно большими номерами. Отсюда, если элементы не более чем счетного множества $e_0$ обозначить через $\xi_k$, то

$$P=\Bigl(\bigcup\nolimits_n P_n\Bigr)\cup e_0=\Bigl(\bigcup\nolimits_n P_n\Bigr)\cup\Bigl(\bigcup\nolimits_k \xi_k\Bigr). \tag{3.1}$$

Множество $P$ совершенно, поэтому оно имеет вторую категорию и по теореме Бэра (см., например, [6, с. 87]) у $P$ найдется порция $\Pi=P\cap(\alpha;\beta)$, на которой всюду плотно некоторое множество из представления (3.1) множества $P$. По лемме 1 в исключительном множестве $P$ нет изолированных точек и ввиду этого порция $\Pi$ не может быть одноточечной. Следовательно, на $\Pi$ всюду плотно некоторое множество $P_{n_0}$ и, так как множества $P_n$ замкнуты, то $\Pi=P_{n_0}\cap(\alpha;\beta)$. Можно считать, что точки $\alpha$ и $\beta$ принадлежат $P_{n_0}$; тогда $\Pi=P_{n_0}\cap[\alpha;\beta]$.

Проверим, что функция $f(x)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[\alpha;\beta]$.

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Множество $\Pi$ замкнуто, поэтому множество $[\alpha;\beta]\setminus\Pi$ состоит из непересекающихся интервалов. В каждой точке любого из этих интервалов функция $f(x)$ регулярна, в связи с чем согласно условию 2) леммы 1 функция $f(x)$ абсолютно непрерывна на замыкании каждого дополнительного интервала множества $\Pi$ и, значит, функция $f(x)$ дифференцируема почти всюду на $[\alpha;\beta]\setminus\Pi$. Множество $[\alpha;\beta]\setminus\Pi$ измеримо, поэтому по условию леммы интеграл $\displaystyle\int_{[\alpha;\beta]\setminus\Pi} f'(x)\,dx$ сходится. Следовательно, в силу абсолютной непрерывности интеграла найдется такое $\delta_\varepsilon>0$, что для произвольного множества $e\subset\bigl([\alpha;\beta]\setminus\Pi\bigr)$, $\operatorname{meas}_1 e<\delta_\varepsilon$, выполнено неравенство $\displaystyle\int_e f'(x)\,dx<\varepsilon/2$. Будем также считать, что $\delta_\varepsilon<\varepsilon/(2n_0)$ и $\delta_\varepsilon<1/(n_0)$.

Пусть $[c_j;d_j]\subset[\alpha;\beta]$, $j=1,\dots,m$, — неперекрывающиеся отрезки суммарной длины меньше $\delta_\varepsilon$. Занумеруем отрезки $[c_j;d_j]$ так, чтобы номера $j=1,\dots,k$ имели отрезки, которые не пересекаются со множеством $\Pi$, а номера $j=k+1,\dots,m$ включали отрезки, которые пересекаются с $\Pi$. Тогда при каждом $j=1,\dots,k$ функция $f(x)$ абсолютно непрерывна на $[c_j;d_j]$ и поэтому

$$\bigl|f(d_j)-f(c_j)\bigr| = \Biggl|\int\limits_{c_j}^{d_j} f'(x)\,dx\Biggr| \leqslant \int\limits_{c_j}^{d_j} |f'(x)|\,dx.$$

Следовательно, поскольку сумма длин всех отрезков $[c_j;d_j]$ меньше $\delta_\varepsilon$, то по определению величины $\delta_\varepsilon$ имеем

$$\sum_{j=1}^{k}\bigl|f(d_j)-f(c_j)\bigr| \leqslant \sum_{j=1}^{k}\int\limits_{c_j}^{d_j}|f'(x)|\,dx = \int\limits_{\bigcup_1^k [c_j;d_j]} |f'(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь оценим приращения функции $f(x)$ на отрезках $[c_j;d_j]$ при $j=k+1,\dots,m$. Длина каждого отрезка $[c_j;d_j]$ меньше $1/n$ и при $j=k+1,\dots,m$ на $[c_j;d_j]$ найдется точка $\xi_j$ порции $\Pi$ множества $P_{n_0}$. Поэтому по определению множеств $P_{n_0}$ выполнены соотношения

$$\bigl|f(d_j)-f(c_j)\bigr| \leqslant \bigl|f(d_j)-f(\xi_j)\bigr| + \bigl|f(\xi_j)-f(c_j)\bigr| \leqslant n_0|d_j-\xi_j| + n_0|\xi_j-c_j| = n_0|d_j-c_j|.$$

В силу чего

$$\sum_{j=k+1}^{m}\bigl|f(d_j)-f(c_j)\bigr| \leqslant \sum_{j=k+1}^{m} n_0|d_j-c_j| = n_0\sum_{j=k+1}^{m}\text{длина}\,[c_j;d_j] < n_0\frac{\varepsilon}{2n_0} = \frac{\varepsilon}{2},$$

и отсюда

$$\sum_{j=1}^{m}\bigl|f(d_j)-f(c_j)\bigr| = \sum_{j=1}^{k} + \sum_{j=k+1}^{m} < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{3.2}$$

Исходя из этого, для произвольного $\varepsilon>0$ установлено существование такого $\delta_\varepsilon>0$, что для произвольного набора неперекрывающихся отрезков $[c_j;d_j]\subset[\alpha;\beta]$, $j=1,\dots,m$, суммарной длины меньше $\delta_\varepsilon$ выполнено неравенство (3.2). Значит, функция $f(x)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[\alpha;\beta]$, а это невозможно, поскольку по предположению на интервале $(\alpha;\beta)$ есть точки исключительного множества $P$. Следовательно, предположение о том, что лемма не верна и исключительное множество $P$ не пусто, приводит к противоречию.

Лемма 2 доказана.

Завершим доказательство теоремы 1. Заметим сначала, что по лемме 2 на замыкании каждого дополнительного интервала замкнутого множества $e$ функция $f(x)$ абсолютно непрерывна и поэтому почти всюду дифференцируема. Так как $\varphi(t)$ — нелипшицевый модуль непрерывности и $H_\varphi(e)<+\infty$, то $\operatorname{meas}_1(e)=0$. Значит, функция $f(x)$ дифференцируема почти всюду на $[a;b]$.

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. По определению $\varphi$-меры Хаусдорфа множество $e$ можно покрыть открытыми множествами $G_j$, $\operatorname{diam} G_j<\varepsilon$, $j\in\mathbb{N}$, так, что

$$\sum_j \varphi(\operatorname{diam} G_j) < H_\varphi(e)+\varepsilon.$$

Выполним для покрытия $\{G_j\}$ преобразования, аналогичные преобразованиям, проведенным в разд. 2 при доказательстве положительности $\varphi$-меры Хаусдорфа множества $C_\varphi$ (пп. (1)–(5)). В результате будет получено покрытие множества $e$ конечной системой неперекрывающихся отрезков $I_k=[c_k;d_k]$, $\operatorname{diam} I_k<\varepsilon$, $k=1,\dots,m$ (см. подстрочное примечание 3), для которого

$$H_\varphi(e) \leqslant \sum_{k=1}^{m}\varphi(\operatorname{diam} I_k) \leqslant \sum_{j=1}\varphi(\operatorname{diam} G_j) < H_\varphi(e)+\varepsilon, \tag{3.3}$$

причем концы каждого из отрезков $I_k$ лежат на $e$ и некоторые $I_k$ могут вырождаться в точки. Будем считать, что отрезки $I_k$ занумерованы слева направо.

Так как $I_k$ не перекрываются, то выполнены неравенства

$$a \leqslant c_1 \leqslant d_1 \leqslant c_2 \leqslant d_2 \leqslant \cdots c_m \leqslant d_m \leqslant b.$$

Концы каждого отрезка $I_k$ принадлежат множеству $e$. Некоторые из промежутков $[d_k; c_{k+1}]$, $k = 1, \dots, m-1$, и $[a; c_1]$, $[d_m, b]$ могут вырождаться в точки. Если эти отрезки невырождены, то функция $f(x)$ на них абсолютно непрерывна. Формально и в случае вырождения этих отрезков функцию $f(x)$ можно считать на них абсолютно непрерывной.

Приращение функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ запишем в виде

$$\begin{gathered} f(b) - f(a) = \big(f(b) - f(d_m)\big) + \big(f(d_m) - f(c_m)\big) \\ + \big(f(c_m) - f(d_{m-1})\big) + \ldots + \big(f(c_1) - f(a)\big) \\ = \sum_{k=1}^{m}\big(f(d_k) - f(c_k)\big) + \Big[\big(f(b) - f(d_m)\big) + \sum_{k=1}^{m-1}\big(f(c_{k+1}) - f(d_k)\big) + \big(f(c_1) - f(a)\big)\Big] \\ = \sum\nolimits_{(1)} + \sum\nolimits_{(2)} . \end{gathered} \tag{3.4}$$

Сначала оценим сверху модуль суммы $\sum_{(1)}$. Так как концы отрезков $[c_k; d_k]$, $k = 1, \dots, m$, лежат на множестве $e$, то по условию 2) теоремы 1, в котором в качестве $\xi \in e$ взята точка $c_k$, а в качестве $x$ — точка $d_k$, и неравенства (3.3) получаем

$$\Big|\sum\nolimits_{(1)}\Big| \leqslant \sum_{k=1}^{m}\big|f(d_k) - f(c_k)\big| \leqslant L\sum_{k=1}^{m}\varphi(d_k - c_k) \leqslant L\big(H_\varphi(e) + \varepsilon\big). \tag{3.5}$$

Теперь рассмотрим сумму $\sum_{(2)}$. На каждом промежутке, приращение по которому входит в эту сумму, функция $f(x)$ абсолютно непрерывна. Поэтому

$$\sum\nolimits_{(2)} = \int_a^{c_1} f'(x)\,dx + \sum_{k=1}^{m-1}\int_{d_k}^{c_{k+1}} f'(x)\,dx + \int_{d_m}^{b} f'(x)\,dx = \int\limits_{[a;b]\setminus\bigcup_{k=1}^{m}[c_k;d_k]} f'(x)\,dx. \tag{3.6}$$

Так как отрезки $[c_k; d_k] = I_k$ не перекрываются, то для длины множества $\bigcup_{k=1}^{m}[c_k; d_k]$ имеем

$$\operatorname{meas}_1\Big(\bigcup\nolimits_{k=1}^{m}[c_k; d_k]\Big) = \sum_{k=1}^{m}(d_k - c_k) = \sum_{k=1}^{m}\frac{d_k - c_k}{\varphi(d_k - c_k)}\,\varphi(d_k - c_k). \tag{3.7}$$

Поскольку $\varphi(t)$ — нелипшицевый модуль непрерывности, то $\dfrac{t}{\varphi(t)} \searrow 0$ при $t \searrow 0$. Промежутки $I_k$, $k = 1, \dots, m$, были определены так, что длина каждого из них не превосходит $\varepsilon$. Значит, из соотношений (3.7) и (3.3) вытекает, что

$$\operatorname{meas}_1\Big(\bigcup\nolimits_{k=1}^{m}[c_k; d_k]\Big) \leqslant \frac{\varepsilon}{\varphi(\varepsilon)}\sum_{k=1}^{m}\varphi(d_k - c_k) \leqslant \frac{\varepsilon}{\varphi(\varepsilon)}\big(H_\varphi(e) + \varepsilon\big) \to 0 \ \text{ при } \varepsilon \to +0.$$

Следовательно, с учетом абсолютной непрерывности интеграла, отсюда и из выражения (3.6) получаем, что

$$\sum\nolimits_{(2)} \to \int_a^b f'(x)\,dx \ \text{ при } \varepsilon \to +0. \tag{3.8}$$

Из соотношений (3.4) и (3.5) следует, что

$$\Big|\sum\nolimits_{(2)} - f(x)\,\Big|_a^b\,\Big| = \Big|\sum\nolimits_{(1)}\Big| \leqslant L\big(H_\varphi(e)+\varepsilon\big).$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon\to+0$, в силу (3.8) имеем неравенство

$$\left|\int\limits_a^b f'(x)\,dx - f(x)\,\Big|_a^b\right| \leqslant LH_\varphi(e).$$

Таким образом, теорема 1 доказана.

## 4. Доказательство теоремы 2

Если множество $E$ таково, что для любой функции типа модуля непрерывности $\widetilde{\varphi}(t)$ выполнено $H_{\widetilde{\varphi}}(E)=0$ (так будет, например, если множество $E$ не более чем счетно), то утверждение теоремы выполнено.

Пусть для некоторого модуля непрерывности $\widetilde{\varphi}(t)$ выполнено $H_{\widetilde{\varphi}}(E)>0$. В этом случае множество $E$ несчетно и оно представляется в виде объединения $E=E_0\cup C$, где $E_0$ — совершенное множество точек конденсации $E$, а множество $C$ не более чем счетно и может быть пустым. При этом $H_\psi(E_0)=H_\psi(E)$, значит, не уменьшая общности, можно считать множество $E$ совершенным.

Предположим, что теорема 2 неверна и $H_\psi(E)>0$.

Для натуральных $n$ ко множеству $E_n$ отнесем те точки $x\in E$, для которых для любой точки $x'\in[a;b]$, $|x-x'|<1/n$, $x'\neq x$, выполнено неравенство

$$\frac{\big|f(x')-f(x)\big|}{\varphi(|x'-x|)} \geqslant \frac{1}{n}. \tag{4.1}$$

Покажем, что множества $E_n$ замкнуты. Пусть $x_0$ — предельная точка некоторого $E_n$. Чтобы доказать, что $x_0\in E_n$, проверим справедливость неравенства (4.1) для произвольной точки $x'\in[a;b]$, $|x'-x_0|<1/n$, $x'\neq x_0$. Возьмем сходящуюся к $x_0$ последовательность $\{x_k\}$ точек множества $E_n$. Имеем

$$\begin{aligned}\frac{\big|f(x')-f(x_0)\big|}{\varphi(|x'-x_0|)} &= \frac{\big|\big(f(x')-f(x_k)\big)+\big(f(x_k)-f(x_0)\big)\big|}{\varphi(|x'-x_0|)}\\ &\geqslant \frac{\big|f(x')-f(x_k)\big|}{\varphi(|x'-x_k|)}\,\frac{\varphi(|x'-x_k|)}{\varphi(|x'-x_0|)} - \frac{\big|f(x_k)-f(x_0)\big|}{\varphi(|x'-x_0|)}.\end{aligned} \tag{4.2}$$

Величина в начале соотношений (4.2) от $k$ не зависит. Рассмотрим выражение в конце (4.2). При всех достаточно больших номерах $k$ точка $x'$ лежит на расстоянии меньше $1/n$ от точек $x_k$ и, поскольку $x_k\in E_n$, то для таких точек $x_k$ и $x'$ выполнено неравенство (4.1). Так как функции $\varphi(t)$ и $f(x)$ непрерывны, то, переходя к пределу при $k\to\infty$ в конце цепочки соотношений (4.2), получаем, что для точек $x_0$ и $x'$ неравенство (4.1) выполняется. Значит, $x_0\in E_n$ и множество $E_n$ замкнуто.

По предположению $H_\psi(E)>0$. Поскольку $E=\bigcup_n E_n$, то найдется $n_0$, при котором $H_\psi(E_{n_0})>0$. Разобъем отрезок $[a;b]$ на отрезки равной длины, меньшей $1/n_0$. По крайней мере для одного из этих отрезков, пусть для отрезка $\Delta$, выполнено неравенство $H_\psi(E_{n_0}\cap\Delta)>0$.

Положим $\mathcal{E}:=E_{n_0}\cap\Delta$, $\mu:=H_\psi(\mathcal{E})$ и $M:=\max\limits_{[a;b]}|f(x)|$. По определению хаусдорфовой меры

$$H_\psi(\mathcal{E}) = \lim_{\delta\to+0}\ \inf_{\substack{\operatorname{diam} G_j<\delta\\ \mathcal{E}\subset\cup_j G_j}}\ \sum_j \psi(\operatorname{diam} G_j),\ \text{ где множества } G_j \text{ открыты.}$$

Найдем такое $\delta_\mu > 0$, что для каждого покрытия множества $\mathcal{E}$ открытыми множествами $G_j$, $\operatorname{diam} G_j < \delta_\mu$, будет выполнено $\sum_j \psi(\operatorname{diam} G_j) > \mu/2$. По условию теоремы при $t \to +0$ справедлива оценка $\psi(t) = o\bigl(\varphi(t)\bigr)$, можно поэтому считать, что для каждого $t \in (0; \delta_\mu)$ выполнено неравенство $\psi(t) < \dfrac{\mu}{5Mn_0}\varphi(t)$.

Пусть $\{G_j\}$ — некоторое покрытие множества $\mathcal{E}$ системой открытых множеств, у которых $\operatorname{diam} G_j < \delta_\mu$ для каждого $j$. По определению значения $\delta_\mu$ для этого покрытия $\sum_j \psi(\operatorname{diam} G_j) > \mu/2$. Аналогично тому, как это делалось при доказательстве положительности $H_\varphi(C_\varphi)$ в разд. 2 (пп. преобразований (1)–(5)) по покрытию множества $\mathcal{E}$ набором открытых множеств $\{G_j\}$, $j \in \mathbb{N}$, получим покрытие $\mathcal{E}$ конечным набором неперекрывающихся отрезков $\{I_k\}$, $k = 1, \ldots, m$, для которого при каждом $k$ длина $I_k$ меньше $\delta_\mu$ (см. подстрочное примечание 3) и $\sum_k \psi(\text{длина}\, I_k) \geqslant \mu/2$. При этом некоторые, но не все, отрезки $I_k$ могут вырождаться.

Отрезки $I_k$ покрытия обозначим через $[c_k; d_k]$. Согласно п. (4) шага (4) концы каждого отрезка $I_k = [c_k; d_k]$ принадлежат множеству $\mathcal{E}$. Функция $f(x)$ непрерывна, поэтому $f(I_k)$ является отрезком, который содержит отрезок $[f(c_k); f(d_k)]$[5]. Оценим длину отрезка $[f(c_k); f(d_k)]$. Поскольку выполнено включение $[c_k; d_k] \subset \Delta$, а длина $\Delta$ меньше $1/n_0$, то $|c_k - d_k| < 1/n_0$. Отсюда, ввиду того что точка $c_k \in \mathcal{E} \subset E_{n_0}$, из неравенства (4.1) получаем такую оценку снизу для длины отрезка $\bigl[f(c_k); f(d_k)\bigr]$:

$$\text{длина}\,\bigl[f(c_k); f(d_k)\bigr] = \bigl|f(c_k) - f(d_k)\bigr| \geqslant \frac{1}{n_0}\varphi(d_k - c_k). \tag{4.3}$$

Покажем, что отрезки $\bigl[f(c_k); f(d_k)\bigr]$ и $\bigl[f(c_j); f(d_j)\bigr]$ при $k \neq j$ не перекрываются, а пересекаются, только если пересекаются отрезки $[c_k; d_k]$ и $[c_j; d_j]$.

Если неперекрывающиеся отрезки $[c_k; d_k]$ и $[c_j; d_j]$ пересекаются, то их пересечение $[c_k; d_k] \cap [c_j; d_j]$ необходимо состоит из единственной общей граничной точки, например $d_j = c_k$. Если бы отрезки $\bigl[f(c_j); f(d_j)\bigr]$ и $\bigl[f(c_k); f(d_k)\bigr]$ с общей граничной точкой $f(d_j) = f(c_k)$ перекрывались, то либо точка $f(c_j)$ лежала бы на отрезке $\bigl[f(c_k); f(d_k)\bigr]$, либо точка $f(d_k)$ — на $\bigl[f(c_j); f(d_j)\bigr]$, предположим для определенности, что $f(c_j) \in \bigl[f(c_k); f(d_k)\bigr]$.

Если отрезки $[c_k; d_k]$ и $[c_j; d_j]$ не пересекаются, а отрезки $\bigl[f(c_j); f(d_j)\bigr]$ и $\bigl[f(c_k); f(d_k)\bigr]$ пересекаются, то по крайней мере один из них содержит конец (или оба конца) другого. Предположим для определенности, что и в этом случае $f(c_j) \in \bigl[f(c_k); f(d_k)\bigr]$.

Если $f(c_j) \in \bigl[f(c_k); f(d_k)\bigr]$, то на отрезке $[c_k; d_k]$ найдется точка $x'$, в которой $f(c_j) = f(x')$. Отрезки $I_j$ и $I_k$ лежат на промежутке $\Delta$ длины меньше $1/n_0$, и, значит, расстояние между точками $c_j$ и $x'$ меньше $1/n_0$. Поэтому для точек $c_j \in E_{n_0}$ и $x'$ выполнено неравенство

$$\bigl|f(x') - f(c_j)\bigr| \geqslant \frac{1}{n_0}\psi(|c_j - d_j|) > 0,$$

а это противоречит предположению, что $f(c_j) = f(x')$.

Остальные случаи расположения отрезков системы $\bigl\{[f(c_k); f(d_k)]\bigr\}$ рассматриваются аналогично.

Следовательно, существует покрытие множества $\mathcal{E}$ системой неперекрывающихся отрезков $\{I_k\} = \bigl\{[c_k; d_k]\bigr\}$, для которых отрезки из системы $\bigl\{[f(c_k); f(d_k)]\bigr\}$ также не перекрываются, причем $\max_k \operatorname{diam} I_k < \delta_\mu$.

Неперекрывающиеся отрезки из системы $\bigl\{[f(c_k); f(d_k)]\bigr\}$ лежат на отрезке $f(\Delta)$. Поэтому длина отрезка $f(\Delta)$ не может быть меньше суммы длин отрезков $\bigl\{[f(c_k); f(d_k)]\bigr\}$. Следовательно, в силу условия (4.3) и поскольку $\max_k \operatorname{diam} I_k < \delta_\mu$, а значение $\delta_\mu$ было выбрано так,

[5]Имеется в виду отрезок с концами в точках $f(c_k)$ и $f(d_k)$, выполнение неравенства $f(c_k) < f(d_k)$ не предполагается.

что $\sum \psi(\operatorname{diam} I_k) \geqslant \mu/2$ и при $t \in (0; \delta_\mu)$ выполняется неравенство $\dfrac{\varphi(t)}{\psi(t)} > \dfrac{5Mn_0}{\mu}$, получаем

$$\begin{aligned} \text{длина}\, f(\Delta) &\geqslant \sum\nolimits_k \text{длина}\left[f(c_k); f(d_k)\right] = \sum\nolimits_k \left|f(c_k) - f(d_k)\right| \\ &\geqslant \frac{1}{n_0}\sum\nolimits_k \varphi(d_k - c_k) = \frac{1}{n_0}\sum\nolimits_k \psi(d_k - c_k)\frac{\varphi(d_k - c_k)}{\psi(d_k - c_k)} \\ &> \frac{1}{n_0}\sum\nolimits_k \psi(\operatorname{diam} I_k)\frac{5Mn_0}{\mu} \geqslant \frac{5}{2}M. \end{aligned}$$

Но по определению $M = \max\limits_{[a;b]}|f(x)|$ и, значит, для каждого промежутка $\Delta \subset [a;b]$ длина его образа $f(\Delta)$ не превосходит $2M$.

Таким образом, предположение о том, что теорема не верна и поэтому $H_\psi(E) > 0$, приводит к противоречию и теорема 2 доказана.

## Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность профессору А.И. Прилепко и участникам семинара на механико-математическом факультете МГУ под руководством В.А. Садовничего и А.И. Прилепко за благожелательное внимание к этой работе и ценные рекомендации. Чрезвычайно полезным было объяснение постановки задачи об исключительных множествах с физической точки зрения, данное автору доцентом кафедры теоретической ядерной физики НИЯУ МИФИ С.В. Ивлиевым.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ефимов А.В.** Линейные методы приближения непрерывных периодических функций // Мат. сб. 1961. Т. 54, № 1. С. 51–90.
2. **Герега А.Н.** Конструктивные фракталы в теории множеств. Одесса: Изд-во “Освита Украины”, 2017. 83 с.
3. **Долженко Е.П.** О “стирании” особенностей аналитических функций // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18, № 4 (112). С. 135–142.
4. **Рубинштейн А.И.** Об $\omega$-лакунарных рядах и о функциях классов $H^\omega$ // Мат. сб. 1964. Т. 65, № 2. С. 239–271.
5. **Hille E., Tamarkin J.D.** Remarks on a known example of a monotone continuous function // Amer. Math. Monthly. 1929. Vol. 36, no. 5. P. 255–264. https://doi.org/10.1080/00029890.1929.11986950
6. **Сакс С.** Теория интеграла. М.: ИЛ, 1949. 496 с.

Поступила 7.04.2025
После доработки 4.07.2025
Принята к публикации 7.07.2025

Теляковский Дмитрий Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, доцент
Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ
г. Москва
ORCID: 0000-0003-1579-2154
e-mail: dtelyakov@mail.ru

## REFERENCES

1. Efimov A.V. Linear methods of approximating continuous periodic functions. *Mat. Sb. (Nov. Ser.)*, 1961, vol. 54(96), no. 1, pp. 51–90 (in Russian).
2. Gerega A.N. *Konstruktivnyye fraktaly v teorii mnozhestv* [Constructive fractals in set theory]. Odessa, Publ. “Osvita Ukrainy”, 2017, 83 p. ISBN: 978-617-7366-32-3 .

3. Dolzhenko E.P. The removability of singularities of analytic functions. *Uspehi Mat. Nauk*, 1963, vol. 18, no. 4(112), pp. 135–142 (in Russian).
4. Rubinstein A.I. On $\omega$-lacunary series and functions of the classes $H^{\omega}$. *Mat. Sb. (Nov. Ser.)*, 1964, vol. 65(107), no. 2, pp. 239–271 (in Russian).
5. Hille E., Tamarkin J.D. Remarks on a known example of a monotone continuous function. *Amer. Math. Monthly*, 1929, vol. 36, no. 5, pp. 255–264. https://doi.org/10.1080/00029890.1929.11986950
6. Saks S. *Theory of the integral*. New York, Hafner Publ. Comp., 1937, 367 p. Translated to Russian under the title *Teoriya integrala*, Moscow, Inostr. Liter. Publ., 1949, 496 p.



Received April 7, 2025
Revised July 4, 2025
Accepted July 7, 2025



*Dmitrii Sergeevich Telýakovskii,* Cand. Sci. (Phys.-Math.), Prof., National Research Nuclear University MEPhI, Moscow, 115409 Russia, ORCID 0000-0003-1579-2154,
e-mail: dtelyakov@mail.ru .



Cite this article as: D. S. Telýakovskii. On exceptional sets in the Newton–Leibniz formula. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 3, pp. 250–263 .