ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 31 № 3 2025

УДК 517.5

МЕТОД С. Б. СТЕЧКИНА И В. Т. ГАВРИЛЮК И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Т. Ю. Семенова

В 1978 г. С. Б. Стечкин и В. Т. Гаврилюк в работе о скорости сходимости ряда Фурье непрерывной функции нашли специальный метод оценки нормы уклонения функции от частичной суммы ее ряда Фурье, использующий интегральные свойства ядер Дирихле. Цель данной статьи — напомнить основную идею этой замечательной работы и показать, как при помощи модификации примененного в ней метода совсем недавно были получены результаты для функций ограниченной вариации, ограниченной p-вариации, дана оценка скорости сходимости в принципе локализации Римана для непрерывных функций и решены другие задачи.

Ключевые слова: ряд Фурье, скорость сходимости, модуль непрерывности, функции ограниченной вариации, принцип локализации Римана.

T. Yu. Semenova. Method of S. B. Stechkin and V. T. Gavrilyuk and its application.

In 1978, S.B. Stechkin and V.T. Gavrilyuk, in their work on the rate of convergence of the Fourier series of a continuous function, found a special method for estimating the norm of deviation of a function from the partial sum of its Fourier series, using the integral properties of Dirichlet kernels. The purpose of this article is to recall the main idea of this remarkable work and to show how, using a modification of the method used in it, results were recently obtained for functions of bounded variation, bounded p-variation, an estimate of the rate of convergence in the Riemann localization principle for continuous functions was given, and other problems were solved.

Keywords: Fourier series, rate of convergence, modulus of continuity, functions of bounded variation, Riemann localization principle.

MSC: 42A10, 42A63

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-3-233-249

1. Введение

Пусть $C_{2\pi}$ — пространство непрерывных на $\mathbb{R}$ действительнозначных 2π-периодических функций с нормой

$$\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \max_{-\pi\le x\le\pi} |f(x)|.$$

Модулем непрерывности функции $f \in C_{2\pi}$ называется величина $\omega(f, h) = \max\big\{| f(x+t) - f(x)|,\ x\in\mathbb{R},\ |\,t\,| \le h\big\},\ 0 \le h \le \pi$. Частичные суммы ряда Фурье функции f

$$S_n(f) = S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big),$$

где $a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt$, $b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt$ — коэффициенты Фурье.

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = \frac{\sin((n+0.5)t)}{2\sin(t/2)}$$

— ядра Дирихле, $L_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|dt$ — константы Лебега.

Целым рядом авторов [1–5] были получены оценки вида

$$\|f - S_n(f)\| \le K_n\,\omega(f, \gamma_n) \quad \forall f \in C_{2\pi}, \tag{1.1}$$

где $\{\gamma_n\}$ — некоторая последовательность аргументов модуля непрерывности функции f, постоянная $K_n = K_n(\gamma_n)$. С. Б. Стечкин [6] отметил более общую задачу — исследование характеристики

$$K_n^*(\gamma) = \sup_{\substack{f \in C_{2\pi},\\ f \neq \text{const}}} \frac{\|f - S_n(f)\|}{\omega(f,\,\gamma)}$$

для всех значений $\gamma > 0$. Так как $K_n^*(\gamma) \ge (L_n + 1)/2$ для любого $\gamma > 0$ (см. [6; 7]), можно ввести величину

$$\gamma_n^* = \inf\Big\{\gamma > 0,\ K_n^*(\gamma) = \frac{L_n + 1}{2}\Big\}$$

— оптимальное значение аргумента модуля непрерывности в неравенстве (1.1) с наилучшей константой $K_n = (L_n + 1)/2$.

В работе [8] (краткое сообщение см. в [9]) С. Б. Стечкин и В. Т. Гаврилюк доказали следующие теоремы.

Теорема 1 [8, теорема 1]. *Для любой $f \in C_{2\pi}$, $f \neq \text{const}$,*

$$\|f - S_n(f)\| < \frac{L_n + 1}{2}\,\omega\Big(f,\ \frac{2\pi}{3(n + 0.5)}\Big), \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{1.2}$$

Теорема 2 [8, теорема 2]. *Справедливы оценки*

$$\frac{2\pi}{3(n + 0.5)} - \frac{\pi^2}{4(n + 0.5)^3} \le \gamma_n^* \le \frac{2\pi}{3(n + 0.5)}, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{1.3}$$

Отметим, что суммы Фурье $S_n(f)$ содержатся в широком семействе линейных методов приближения, задаваемых операторами

$$U_n(f;\,\Lambda) = U_n(f,\,x;\,\Lambda) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)}\,\big(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\big).$$

Здесь $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$ — треугольная матрица чисел, $0 \le k \le n,\ n = 0,\,1,\,\ldots,\ \lambda_0^{(n)} = 1$,

$$Y_n(t;\,\Lambda) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)}\cos(kt)$$

— ядро метода U_n. При $\lambda_k^{(n)} = 1$ имеем приближение суммами Фурье, при $\lambda_k^{(n)} = 1 - k/(n+1)$ — суммами Фейера [10, гл. 1, § 47], при $\lambda_k^{(n)} = \big(k\pi/(2n)\big)\operatorname{ctg}\big(k\pi/(2n)\big)$ — суммами Фавара [11], при $\lambda_k^{(n)} = \cos\big(k\pi/(2n)\big)$ — суммами Рогозинского [12]. Результаты, аналогичные неравенству (1.2), получены в [6] для сумм Фавара, в [3] — для сумм Рогозинского.

2. Метод С. Б. Стечкина и В. Т. Гаврилюк

Сначала рассмотрим следующую задачу. Пусть функция $g(t)$ непрерывна на $[a,\,b]$, функция $\psi(t) \in L[a,\,b]$, $\psi(t) \ge 0$ на $[a,\,c]$, $\psi(t) \le 0$ на $[c,\,b]$, $\int_a^b \psi(t)dt = 0$. Обозначим

$$J = \int_a^c \psi(t)dt = -\int_c^b \psi(t)dt = \frac{1}{2}\int_a^b |\psi(t)|dt.$$

Необходимо оценить интеграл

$$\int_a^b g(t)\psi(t)dt \tag{2.1}$$

через модуль непрерывности функции g. Стандартный подход заключается в применении теоремы о среднем на каждом из отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$:

$$\int_a^b g(t)\psi(t)dt = g(\xi_1)\int_a^c \psi(t)dt + g(\xi_2)\int_c^b \psi(t)dt = \big(g(\xi_1) - g(\xi_2)\big)J, \tag{2.2}$$

$\xi_1 \in [a, c]$, $\xi_2 \in [c, b]$. И тогда из (2.2) вытекает неравенство

$$\left|\int_a^b g(t)\psi(t)dt\right| \le \omega(g, b-a)J.$$

Следующее простое рассуждение демонстрирует, что этот результат можно улучшить. А именно, каждый из отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ разобьем точками a' и b' соответственно на две такие части, что

$$\int_a^{a'} \psi(t)dt = \int_{a'}^c \psi(t)dt = \frac{1}{2}J, \quad \int_c^{b'} \psi(t)dt = \int_{b'}^b \psi(t)dt = -\frac{1}{2}J.$$

Теперь применим теорему о среднем:

$$\int_a^b g(t)\psi(t)dt = g(\tau_1)\int_a^{a'} \psi(t)dt + g(\tau_2)\int_{a'}^c \psi(t)dt + g(\tau_3)\int_c^{b'} \psi(t)dt + g(\tau_4)\int_{b'}^b \psi(t)dt$$

$$= \big(g(\tau_1) - g(\tau_3)\big)\frac{1}{2}J + \big(g(\tau_2) - g(\tau_4)\big)\frac{1}{2}J.$$

Здесь $\tau_1 \in [a, a']$, $\tau_2 \in [a', c]$, $\tau_3 \in [c, b']$, $\tau_4 \in [b', b]$. Тогда

$$\left|\int_a^b g(t)\psi(t)dt\right| \le \omega\big(g, \max\{b'-a, b-a'\}\big)J;$$

переходим от оценки интеграла (2.1) через $\omega(g, b-a)$ к оценке с использованием модуля непрерывности с меньшим значением аргумента, т. е. величины $\omega\big(g, \max\{b'-a, b-a'\}\big)$. Возникает вопрос: как улучшится результат, если мы разобьем каждый из отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ на k частей, чтобы интеграл на каждом из подотрезков равнялся $\pm J/k$? Решение задачи об оценке интеграла (2.1) дано в [8]. А именно, пусть $C(\gamma)$ — класс непрерывных функций, определенных на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяющих условию $\omega(f, \gamma) \le 1$.

Лемма 1 [8, лемма 1]. *Пусть $a < c < b$, $\psi \in L[a, b]$, $\psi(t) \ge 0$ на $[a, c]$, $\psi(t) \le 0$ на $[c, b]$, $\Psi(x) = \int_a^x \psi(t)dt$, $\Psi(b) = 0$,*

$$M(\psi, \gamma) = \sup_{f \in C(\gamma)} \left|\int_a^b f(t)\psi(t)dt\right|.$$

Тогда для любого γ, $(b-a)/2 \le \gamma \le b-a$, справедливо равенство

$$M(\psi, \gamma) = \max(\Psi(c), \eta(\gamma)),$$

где

$$\eta(\gamma) = \max_{a \le t \le b-\gamma} (\Psi(t) + \Psi(t+\gamma)).$$

Отметим, что лемма 1 близка по смыслу к лемме Н. П. Корнейчука и С. Б. Стечкина [13, лемма 5.1], которая дает возможность находить величины вида

$$\sup_{f\in H_\omega}\left|\int\limits_a^b f(t)\psi(t)dt\right|.$$

Здесь H_ω — класс непрерывных на $[a,\,b]$ функций и таких, что для любых $x', x'' \in [a,\,b]$

$$|f(x')-f(x'')| \le \omega(|x'-x''|),$$

$\omega(t)$ — заданный модуль непрерывности (определенная при $t \ge 0$ непрерывная, неубывающая и полуаддитивная функция, $\omega(0)=0$). К лемме Корнейчука — Стечкина сводится решение задач Колмогорова — Никольского об оценке величин $\|f-U_n(f;\,\Lambda)\|$ на классах, определяемых модулями непрерывности.

Однако применение и леммы 1, и леммы Корнейчука — Стечкина весьма нетривиально: для их эффективного использования требуется информация о наличии нулей и их специальном расположении у первообразных ядер $Y_n(t;\,\Lambda)$. В случае оценки $\|f-S_n(f)\|$ необходимо рассматривать ядра Дирихле и исследовать их интегральные свойства.

Везде далее будем обозначать $\gamma_n = \dfrac{2\pi}{3(n+0.5)}$. Рассмотрим

$$\Phi_n(x) = \int\limits_x^\pi D_n(t)dt.$$

Функция $\Phi_n(x)$ [3; 4; 8] на интервале $(0,\,\pi)$ имеет n простых нулей $0 < x_1^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} < \pi$, для которых выполнены неравенства

$$\frac{\pi(k-0.5)}{n+0.5} < x_k^{(n)} < \frac{\pi(k-1/3)}{n+0.5}, \quad k=1,\,\ldots,\,n.$$

Обозначим $x_{n+1}^{(n)}=\pi$, $I_{k,n}=[x_k^{(n)},\,x_{k+1}^{(n)}]$, $k=1,\ldots,n$. Несложно проверить, что $x_1^{(n)}<\gamma_n$, а также верны отношения

$$\int\limits_0^{x_1^{(n)}} D_n(t)dt = \int\limits_0^\pi D_n(t)dt = \frac{\pi}{2}, \tag{2.3}$$

$$\int\limits_{x_k^{(n)}}^{\frac{\pi k}{n+0.5}} |D_n(t)|dt = \int\limits_{\frac{\pi k}{n+0.5}}^{x_{k+1}^{(n)}} |D_n(t)|dt = \frac{1}{2}\int\limits_{I_{k,n}} |D_n(t)|dt. \tag{2.4}$$

Используя специфику ядер Дирихле и лемму 1, С. Б. Стечкин и В. Т. Гаврилюк получили следующее утверждение.

Лемма 2 [8, лемма 5].

$$\sup_{f\in C(\gamma_n)}\left|\int\limits_{I_{k,n}} f(t)D_n(t)dt\right| = \frac{1}{2}\int\limits_{I_{k,n}}|D_n(t)|dt, \quad k=1,\ldots,n, \quad n=1,2,\ldots.$$

Схематично изложим дальнейшие рассуждения работы [8]. Используем интегральное представление частичной суммы ряда Фурье [10, гл. I, § 31, формула (31.5)]:

$$S_n(f,x_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)D_n(t)dt. \tag{2.5}$$

Для оценки разницы между значением функции и частичной суммой ее ряда Фурье без ограничения общности можно считать, что $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$, и оценивать значение выражения $|S_n(f, x_0) - f(x_0)| = |S_n(f, 0)|$. В этом случае

$$|S_n(f,0)| = \frac{1}{\pi}\Big|\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t)dt\Big| = \frac{2}{\pi}\Big|\int\limits_{0}^{\pi} \widetilde{f}(t)D_n(t)dt\Big|,$$

где $\widetilde{f}(t) = \big(f(t) + f(-t)\big)/2$. Отметим, что $\omega(\widetilde{f}, h) \le \omega(f, h)$. Разобьем отрезок интегрирования нулями функции $\Phi_n(x)$:

$$|S_n(f,0)| \le \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{x_1^{(n)}} |\widetilde{f}(t)|D_n(t)dt + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\Big|\int\limits_{I_{k,n}} \widetilde{f}(t)\,D_n(t)dt\Big|. \tag{2.6}$$

Теперь при помощи леммы 2 и равенства (2.3) имеем

$$|S_n(f,0)| < \frac{2}{\pi}\,\omega\big(\widetilde{f}, x_1^{(n)}\big)\int\limits_{0}^{x_1^{(n)}} D_n(t)dt + \frac{1}{\pi}\,\omega(\widetilde{f}, \gamma_n)\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{I_{k,n}} |D_n(t)|dt$$

$$\le \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{x_1^{(n)}} D_n(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{I_{k,n}} |D_n(t)|dt\right)\omega\big(f, \gamma_n\big) = \frac{L_n + 1}{2}\,\omega\big(f, \gamma_n\big),$$

и утверждение теоремы 1 доказано.

Заметим, что данный способ оценки применим для вышеупомянутых линейных методов приближения $U_n(f;\,\Lambda)$ с правильными ядрами. Согласно [11] ядро $Y_n(t;\,\Lambda)$ называется правильным, если оно последовательно меняет знак в точках $t_k \in (0,\,\pi)$, $k = 1, \ldots, s$, а функция $\int_x^{\pi} Y_n(t;\,\Lambda)dt$ на каждом промежутке $(t_{k-1},\, t_k)$ $(t_0 = 0)$ в некоторой точке x_k имеет единственный простой нуль. Примерами правильных ядер, помимо ядер Дирихле, являются ядра Фавара и ядра Рогозинского.

3. Точное значение аргумента модуля непрерывности

Согласно результату теоремы 2 для оптимального значения аргумента модуля непрерывности γ_n^* выполнено двойное неравенство (1.3). При небольших значениях n имеем

$$0.665181\ldots \le \gamma_1^* \le 1.396263\ldots,$$
$$0.679844\ldots \le \gamma_2^* \le 0.837758\ldots,$$
$$0.540849\ldots \le \gamma_3^* \le 0.598398\ldots.$$

Для улучшения оценки приближения функции частичной суммой ее ряда Фурье при конкретном n есть смысл найти точное значение γ_n^* и заменить им аргумент модуля непрерывности в неравенстве (1.2). Это и было реализовано на основе леммы 1 — в теореме 1, а также следствиях 1, 2 работы [14], которые ниже представим в виде алгоритма вычисления величин γ_n^* и приведем итоги численных расчетов при $n = 1, 2, 3$.

Алгоритм вычисления γ_n^*.

Шаг 1. Для каждого из отрезков $I_{k,n}$ находим значение $\gamma_{k,n}$ такое, что для любого $\gamma \in \big[\gamma_{k,n},\, x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}\big]$ и для любой $f \in C_{2\pi}$ выполнено неравенство

$$\Big|\int\limits_{I_{k,n}} f(t)D_n(t)dt\Big| \le \frac{1}{2}\int\limits_{I_{k,n}} |D_n(t)|dt\cdot\omega(f,\,\gamma), \tag{3.1}$$

а для $\gamma \in (0, \gamma_{k,n})$ неравенство (3.1) уже теряет силу. Значение $\gamma = \gamma_{k,n}$ существует и удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \Phi_n(t) + \Phi_n(t+\gamma) = \Phi_n\Big(\dfrac{\pi k}{n+0.5}\Big), \\ D_n(t) + D_n(t+\gamma) = 0, \\ t \in \Big[x_k^{(n)}, \dfrac{\pi k}{n+0.5}\Big), \quad \gamma \in \big(0, x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}\big], \end{cases}$$

(см. [14, следствие 1]).

Шаг 2. Определяем $\gamma_n^* = \max\{x_1^{(n)}, \gamma_{k,n}, k = 1, \dots, n\}$ (см. [14, теорема 1]).

Значения γ_n^* при $n = 1, 2, 3$. Используя алгоритм, можно получить следующие результаты.

1) γ_1^* есть решение системы

$$\begin{cases} t + \dfrac{\gamma}{2} + \sin t + \sin(t+\gamma) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{5\pi}{6}, \\ 1 + \cos t + \cos(t+\gamma) = 0, \end{cases}$$

$$\gamma_1^* = 1.310179\dots, \quad \frac{5\pi}{12} < \gamma_1^* < \frac{3\pi}{7}.$$

2) γ_2^* есть решение системы

$$\begin{cases} t + \dfrac{\gamma}{2} + \sin t + \sin(t+\gamma) + \dfrac{1}{2}\sin(2t) + \dfrac{1}{2}\sin(2t+2\gamma) = \sin\dfrac{4\pi}{5} + \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{8\pi}{5} + \dfrac{9\pi}{10}, \\ 1 + \cos t + \cos(t+\gamma) + \cos(2t) + \cos(2t+2\gamma) = 0, \end{cases}$$

$$\gamma_2^* = 0.8164\dots, \quad \frac{\pi}{4} < \gamma_2^* < \frac{5\pi}{19}.$$

3) γ_3^* есть решение системы

$$\begin{cases} t + \dfrac{\gamma}{2} + \sin t + \sin(t+\gamma) + \dfrac{1}{2}\sin(2t) + \dfrac{1}{2}\sin(2t+2\gamma) + \dfrac{1}{3}\sin(3t) + \dfrac{1}{3}\sin(3t+3\gamma) \\ \qquad = \sin\dfrac{6\pi}{7} + \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{12\pi}{7} + \dfrac{1}{3}\sin\dfrac{18\pi}{7} + \dfrac{13\pi}{14}, \\ 1 + \cos t + \cos(t+\gamma) + \cos(2t) + \cos(2t+2\gamma) + \cos(3t) + \cos(3t+3\gamma) = 0, \end{cases}$$

$$\gamma_3^* = 0.5903\dots, \quad \frac{3\pi}{16} < \gamma_3^* < \frac{7\pi}{37}.$$

Оценка уклонения функции от n-й частичной суммы ее ряда Фурье через модуль непрерывности, взятый с аргументом, меньшим γ_n^*. Продемонстрируем еще одну возможность применения леммы 1. Посмотрим, насколько увеличится постоянная $(L_n + 1)/2$ в оценке (1.2), если в аргументе модуля непрерывности взять значения $5\pi/12$, $\pi/4$, $3\pi/16$ для случаев $n = 1, 2, 3$ соответственно.

Согласно теореме 1

$$\|f - S_1(f)\| < \frac{L_1+1}{2}\,\omega\big(f, \gamma_1^*\big), \quad \text{где} \quad \frac{L_1+1}{2} = 1.21799\dots,$$

$$\|f - S_2(f)\| < \frac{L_2+1}{2}\,\omega\big(f, \gamma_2^*\big), \quad \text{где} \quad \frac{L_2+1}{2} = 1.32109\dots,$$

$$\|f - S_3(f)\| < \frac{L_3+1}{2}\,\omega\big(f, \gamma_3^*\big), \quad \text{где} \quad \frac{L_3+1}{2} = 1.38916\dots.$$

В теореме 2 работы [14], применяя лемму 1 и делая численные расчеты, мы показали, что для любой функции $f \in C_{2\pi}$ верны неравенства

$$\|f - S_1(f)\| \le 1.219\, \omega\bigl(f,\, 5\pi/12\bigr),$$
$$\|f - S_2(f)\| \le 1.339\, \omega\bigl(f,\, \pi/4\bigr),$$
$$\|f - S_3(f)\| \le 1.3896\, \omega\bigl(f,\, 3\pi/16\bigr).$$

4. Асимптотика величин K_n^* в оценке для уклонения непрерывных периодических функций от их сумм Фурье через модуль непрерывности

Известно, что для констант Лебега выполнено соотношение $L_n \sim \dfrac{4}{\pi^2} \ln n,\ n \to +\infty$ (см. [10, гл. I, § 35, формула (35.15)]), а также двойное неравенство

$$\frac{4}{\pi^2} \ln(n + 0.5) + 1.27 < L_n < \frac{4}{\pi^2} \ln(n + 0.5) + 1.272, \quad n = 1,\, 2,\, \ldots,$$

следующее из результатов работы [15]. Таким образом, для любого $\gamma \ge \dfrac{2\pi}{3(n+0.5)}$ верна асимптотика

$$K_n^*(\gamma) = \frac{L_n + 1}{2} \sim \frac{2}{\pi^2} \ln(n + 0.5), \quad n \to +\infty. \tag{4.1}$$

И тогда возникает вопрос: насколько увеличится постоянная K_n по сравнению с наилучшей $\dfrac{L_n+1}{2}$ в оценке (1.2), если в аргументе модуля непрерывности взять меньшее, чем $\dfrac{2\pi}{3(n+0.5)}$, значение?

В нашей работе [16] рассматривается значение аргумента модуля непрерывности из промежутка

$$\Bigl[\frac{\pi}{2(n+0.5)},\, \frac{2\pi}{3(n+0.5)}\Bigr).$$

Взяв за основу схему доказательства теоремы 1 работы С. Б. Стечкина и В. Т. Гаврилюк и сделав достаточно сложные оценки для интегралов

$$\int\limits_{I_{k,n}} |D_n(t)|dt, \qquad \Bigl|\int\limits_{I_{k,n}} f(t) D_n(t) dt\Bigr|,$$

получаем (см. [16, теорема 1]), что для любой функции $f \in C_{2\pi}$, для любого натурального n и для любого значения $\tau \in [\pi/2,\, 2\pi/3)$ выполняется неравенство

$$\|f - S_n(f)\| < K_n\, \omega\Bigl(f,\, \frac{\tau}{n + 0.5}\Bigr),$$

где

$$K_n = \frac{4\cos(\tau/2)}{\pi^2} \ln(n + 0.5) + 1.36.$$

Там же (см. [16, теорема 2]) мы приводим пример функции $f = f_{n,\tau} \in C_{2\pi}$, для которой $f(0) = 0,\ \omega\bigl(f,\, \tau/(n+0.5)\bigr) = 1$, при этом

$$|S_n(f,\, 0)| > \frac{4\cos(\tau/2)}{\pi^2} \ln(n + 0.5) + 1.06.$$

Таким образом, для любого $\tau \in [\pi/2,\, 2\pi/3)$

$$K_n^*\Bigl(\frac{\tau}{n + 0.5}\Bigr) \sim \frac{4\cos(\tau/2)}{\pi^2} \ln(n + 0.5), \quad n \to +\infty. \tag{4.2}$$

Отметим, что асимптотика (4.2) при $\tau = 2\pi/3$ соответствует (4.1). Также подчеркнем, что оценки для величины K_n^* найдены нами довольно точно — разница между оценкой сверху и оценкой снизу не превосходит 0.3.

5. Модификация метода С. Б. Стечкина и В. Т. Гаврилюк для функций ограниченной вариации

В 1881 г. К. Жордан [17] доказал равномерную сходимость на $\mathbb{R}$ ряда Фурье произвольной непрерывной функции ограниченной вариации. Что касается скорости сходимости, то для функций $f \in C_{2\pi}, \mathrm{V}(f) = \mathrm{Var}(f, [0, 2\pi]) < +\infty$, $f \neq \mathrm{const}$, имелась порядковая оценка С. Б. Стечкина (см. [18], а также обзор [19])

$$\|f - S_n(f)\| = O\Big(\omega\Big(f, \frac{\pi}{n}\Big) \ln\Big(\frac{V(f)}{\omega(f, \pi/n)}\Big)\Big), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Покажем, как можно изменить схему доказательства теоремы 1, чтобы получить оценку $\|f - S_n(f)\|$ для непрерывной функции ограниченной вариации.

Сначала введем величину

$$L_n(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^y |D_n(t)| dt.$$

В лемме 2 работы [20] А. Ю. Попов и автор установили, что при всех натуральных $m \in [2, n+1]$ выполняется неравенство

$$L_n(x_m^{(n)}) < \frac{4}{\pi^2} \ln(m - 0.5) + 1.28. \tag{5.1}$$

Согласно [20, лемма 2] и нашему уточнению в [21, лемма 3] верна оценка

$$\int_{I_{k,n}} |D_n(t)| dt < \frac{1}{k + 5/12}. \tag{5.2}$$

Теперь поступим следующим образом. Вместо (2.6) напишем

$$|S_n(f, 0)| \le \frac{2}{\pi} \int_0^{x_1^{(n)}} |\widetilde{f}(t)| D_n(t) dt + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{m-1} \Big| \int_{I_{k,n}} \widetilde{f}(t)\, D_n(t) dt \Big| + \frac{2}{\pi} \sum_{k=m}^{n} \Big| \int_{I_{k,n}} \widetilde{f}(t)\, D_n(t) dt \Big|, \tag{5.3}$$

где m — некоторое натуральное число, $2 \le m \le n+1$ (если $m = n+1$, считаем $\sum_{k=m}^{n} = 0$). Сумма двух первых слагаемых выражения (5.3) оценивается сверху величиной

$$\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{x_1^{(n)}} D_n(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{m-1} \int_{I_{k,n}} |D_n(t)| dt\Big) \omega(f, \gamma_n) = \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} L_n(x_m^{(n)})\Big) \omega(f, \gamma_n). \tag{5.4}$$

Для оценки третьего слагаемого (5.3) разобьем отрезки $I_{k,n}$ точками $\pi k/(n + 0.5)$ на две части, на каждой из которых функция $D_n(t)$ не меняет знак, и применим теорему о среднем:

$$\Big| \int_{I_{k,n}} \widetilde{f}(t) D_n(t) dt \Big| = \Big| \int_{x_k^{(n)}}^{\frac{\pi k}{n+0.5}} \widetilde{f}(t) D_n(t) dt + \int_{\frac{\pi k}{n+0.5}}^{x_{k+1}^{(n)}} \widetilde{f}(t) D_n(t) dt \Big|$$

$$= \Big| \widetilde{f}(t_k^*) \int_{x_k^{(n)}}^{\frac{\pi k}{n+0.5}} D_n(t) dt + \widetilde{f}(t_k^{**}) \int_{\frac{\pi k}{n+0.5}}^{x_{k+1}^{(n)}} D_n(t) dt \Big|.$$

Здесь $t_k^* \in [x_k^{(n)},\, \pi k/(n+0.5)]$, $t_k^{**} \in [\pi k/(n+0.5),\, x_{k+1}^{(n)}]$. Поскольку два последних интеграла от $D_n(t)$ равны по модулю, но имеют разные знаки (равенство (2.4)), то с использованием (5.2) получаем неравенство

$$\Big|\int\limits_{I_{k,n}} \widetilde{f}(t)D_n(t)dt\Big| \le \frac{1}{2}\big|\widetilde{f}(t_k^*) - \widetilde{f}(t_k^{**})\big| \int\limits_{I_{k,n}} |D_n(t)|dt \le \big|\widetilde{f}(t_k^*) - \widetilde{f}(t_k^{**})\big|\frac{1}{2(k+5/12)}.$$

В итоге выводим следующую оценку третьего слагаемого выражения (5.3):

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi}\sum_{k=m}^{n}\Big|\int\limits_{I_{k,n}} \widetilde{f}(t)D_n(t)dt\Big| &\le \frac{1}{\pi}\sum_{k=m}^{n}\big|\widetilde{f}(t_k^*) - \widetilde{f}(t_k^{**})\big|\frac{1}{k+5/12}\\ \le \frac{\mathrm{Var}(\widetilde{f},\,[x_m^{(n)},\pi])}{\pi(m+5/12)} &= \frac{\mathrm{Var}(\widetilde{f},\,[x_m^{(n)},2\pi - x_m^{(n)}])}{2\pi(m+5/12)} \le \frac{\mathrm{V}(f)}{2\pi(m+5/12)}.\end{aligned} \tag{5.5}$$

Учитывая (5.1), (5.4) и (5.5), заключаем, что

$$\begin{aligned}|S_n(f,0)| &\le \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}L_n(x_m^{(n)})\Big)\omega(f,\gamma_n) + \frac{\mathrm{V}(f)}{2\pi(m+5/12)}\\ &< \omega(f,\gamma_n)\bigg(\frac{2}{\pi^2}\Big(\ln(m-0.5) + \frac{\pi\mathrm{V}(f)}{4(m+5/12)\,\omega(f,\gamma_n)}\Big) + 1.14\bigg).\end{aligned} \tag{5.6}$$

Подберем оптимальное натуральное m, чтобы минимизировать выражение в правой части оценки (5.6).

Так как $\mathrm{V}(f) \ge 2\omega(f,\gamma_n)$, то величина $A = \dfrac{\pi\mathrm{V}(f)}{4\omega(f,\gamma_n)} \ge \dfrac{\pi}{2}$. Теперь, если $A < n$, то положив $m = [A]+1 \in [2,n]$, имеем, что $\ln(m-0.5) + \dfrac{A}{m+5/12} < \ln A + 1$. И тогда

$$\|f - S_n(f)\| < \omega(f,\gamma_n)\bigg(\frac{2}{\pi^2}\ln\Big(\frac{\mathrm{V}(f)}{\omega(f,\gamma_n)}\Big) + 1.3\bigg) \tag{5.7}$$

для любой $f \in C_{2\pi}$, $f \ne \mathrm{const}$, $\mathrm{V}(f) < +\infty$, для любого $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. Постоянная $2\pi^{-2}$ в главном члене оценки (5.7) является неулучшаемой, а постоянная 1.3 во втором члене не допускает уменьшения более чем на 0.52. Этот результат был доказан А. Ю. Поповым и автором в [20] (теорема 1 и теорема 2) только с чуть менее точными границами для постоянной во втором члене.

Если же $A \ge n$, то в качестве оптимального m нужно взять $m = n+1$ и использовать для оценки остака ряда Фурье неравенство (1.2).

Теперь перейдем к функциям ограниченной p-вариации, $p > 1$. Напомним, что p-вариацией определенной на $[a,\,b]$ действительнозначной функции f называется величина

$$\mathrm{V}_p(f,\,[a,\,b]) = \sup_T\Big(\sum_{i=1}^{m}|f(x_i) - f(x_{i-1})|^p\Big)^{1/p},$$

где точная верхняя грань берется по всем разбиениям $T = \{a = x_0 < \ldots < x_m = b\}$ отрезка $[a,\,b]$ (см. [22; 23]). 2π-периодическая функция f называется функцией ограниченной p-вариации, если конечна величина $\mathrm{V}_p(f) = \sup\limits_{a\in\mathbb{R}}\mathrm{V}_p(f,\,[a,\,a+2\pi])$.

Рассуждения при выводе оценки $\|f - S_n(f)\|$ для функции ограниченной p-вариации будут отличаться, начиная с соотношения (5.5). Сумма

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=m}^{n}\Big|\widetilde{f}(t_k^*) - \widetilde{f}(t_k^{**})\Big|\frac{1}{k+5/12}$$

оценивается сверху при помощи неравенства Гельдера через значение вариации $\mathrm{V}_p(f)$ и сумму $\Big(\sum\limits_{k=m}^{\infty}(k+5/12)^{-q}\Big)^{1/q}$, $1/p+1/q=1$, а потом подбирается оптимальное значение m. В итоге для любой $f\in C_{2\pi}$, $f\neq\mathrm{const}$, $\mathrm{V}_p(f)<+\infty$, для любого $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, приходим к следующему результату (см. [24, теорема 1]):

$$\|f-S_n(f)\|\leq\omega(f,\gamma_n)\Big[\frac{2p}{\pi^2}\ln\Big(\frac{\mathrm{V}_p(f)}{\omega(f,\gamma_n)}\Big)+C(p)\Big], \tag{5.8}$$

где

$$C(p)=\frac{2p}{\pi^2}\Big(\frac{4}{3}\Big)^{1/p}+\frac{2p}{\pi^2}\ln\frac{\pi}{2}+1.14+\frac{2}{\pi^2}\ln\frac{3}{8p}.$$

Отметим, что множитель $2\pi^{-2}p$ в главном члене (5.8) уменьшить нельзя [24, теорема 2]. Оценки, близкие к (5.7) и (5.8), но менее точные, можно получить как следствия из результатов В. В. Жука [25], К. И. Осколкова [26], А. А. Пекарского [27], О. В. Бесова [28].

6. Приложение метода в оценке скорости сходимости в принципе локализации Римана

Одним из известных свойств тригонометрического ряда Фурье является принцип локализации Римана, утверждающий, что сходимость ряда Фурье функции f в точке x_0 зависит лишь от свойств функции в некоторой окрестности этой точки. Математически данный принцип выражается следующим образом. Если наряду с частичной суммой (2.5) ряда Фурье функции f в точке x_0 рассмотреть величину

$$S_n(f,x_0,\delta)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}f(x_0+t)D_n(t)dt,\quad \delta\in(0,\pi),$$

учитывающую поведение функции только на интервале $(x_0-\delta,x_0+\delta)$, то разность

$$R_n(f,x_0,\delta)=S_n(f,x_0)-S_n(f,x_0,\delta)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{2\pi-\delta}f(x_0+t)D_n(t)dt$$

будет стремиться к нулю при $n\to\infty$. Оценке скорости стремления к нулю аналога величины $R_n(f,x_0,\delta)$ посвящены работы Э. Хилле, Г. Клейна [29] и С. А. Теляковского [30], где для произвольной 2π-периодической функции $f\in L[-\pi,\pi]$, для любого $\delta\in(0,\pi)$ доказано неравенство

$$\Big|S_n(f,x_0)-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}f(x_0+t)\frac{\sin(nt)}{t}dt\Big|\leq\frac{K}{\delta}\left(\omega\Big(f,\,\frac{1}{n}\Big)_L+\frac{|a_0(f)|}{n}\right).$$

Здесь

$$\omega\big(f,\,h\big)_L=\sup_{|t|\leq h}\int\limits_{0}^{2\pi}|f(x+t)-f(x)|dx$$

— интегральный модуль непрерывности, $a_0(f)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$, K — некоторая абсолютная постоянная.

Если рассматривать класс непрерывных функций, то есть смысл оценивать $R_n(f, x_0, \delta)$ через модуль непрерывности (вместо интегрального модуля непрерывности) и через значение $f(x_0)$ (вместо $a_0(f)$). Действительно, пусть $\varphi(t) = \big(f(x_0+t) + f(x_0-t)\big)/2 - f(x_0)$. Тогда

$$|R_n(f, x_0, \delta)| \le \frac{2}{\pi}\Big|\int\limits_{\delta}^{\pi} \varphi(t) D_n(t)dt\Big| + \frac{2|f(x_0)|}{\pi}\Big|\int\limits_{\delta}^{\pi} D_n(t)dt\Big|.$$

Пусть натуральное m таково, что $\delta \in [x_m^{(n)}, x_{m+1}^{(n)})$. Имеем

$$|R_n(f, x_0, \delta)| \le \frac{2}{\pi}\Big|\int\limits_{\delta}^{x_{m+1}^{(n)}} \varphi(t) D_n(t)dt\Big| + \frac{2}{\pi}\sum_{k=m+1}^{n}\Big|\int\limits_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}} \varphi(t) D_n(t)dt\Big| + \frac{2|f(x_0)|}{\pi}\Big|\int\limits_{\delta}^{x_{m+1}^{(n)}} D_n(t)dt\Big|.$$

Второе слагаемое (сумму) оцениваем, как и ранее, при помощи леммы 2 С. Б. Стечкина и В. Т. Гаврилюк, оценка же первого и третьего слагаемых требует дополнительных рассуждений и более глубокого исследования свойств ядер Дирихле. Так, в [21, следствие 1] нами получено неравенство

$$|R_n(f,\, x_0, \delta)| \le \omega(f, \gamma_n)\Big(\frac{2}{\pi^2}\ln\frac{1}{\delta} + 1\Big) + \frac{|f(x_0)|}{(n+0.5)\delta}, \tag{6.1}$$

верное для любой $f \in C_{2\pi}$, для любых $\delta \in (0,\, \pi)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ и натурального $n \ge \max\Big\{3,\, \dfrac{2\pi}{3\delta} - 0.5\Big\}$. В частности, если $f(x) = 0$ при $x \in [x_0 - \delta,\, x_0 + \delta]$, $\delta \in (0,\, \pi)$, то при тех же ограничениях на δ и n выполняется соотношение

$$|S_n(f,\, x_0) - f(x_0)| \le \omega(f, \gamma_n)\Big(\frac{2}{\pi^2}\ln\frac{1}{\delta} + 1\Big)$$

и мы получаем оценку скорости сходимости ряда Фурье функции f в точке x_0 к значению функции в этой точке.

Постоянная $2\pi^{-2}$ в (6.1) является точной, так же как и постоянная 1 перед слагаемым $\dfrac{|f(x_0)|}{(n+0.5)\delta}$ (см. [21, теорема 3 и замечание 1]).

Рассмотрев величину $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\delta_2}^{\delta_1} f(x_0+t) D_n(t)dt$, учитывающую поведение функции на несимметричном относительно точки x_0 интервале $(x_0 - \delta_2,\, x_0 + \delta_1)$, и оценив разность

$$R_n(f, x_0, \delta_1, \delta_2) = S_n(f, x_0) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta_2}^{\delta_1} f(x_0+t) D_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta_1}^{2\pi-\delta_2} f(x_0+t) D_n(t)dt,$$

аналогичным образом мы показали справедливость неравенства

$$|R_n(f,\, x_0, \delta_2, \delta_2)| \le \omega(f, \gamma_n)\Big(\frac{1}{\pi^2}\ln\frac{1}{\delta_1\delta_2} + 1\Big) + \frac{|f(x_0)|}{2(n+0.5)}\Big(\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2}\Big)$$

для любой $f \in C_{2\pi}$, для любых $\delta_1, \delta_2 \in (0,\, \pi)$ и натурального $n \ge \max\Big\{3,\, \dfrac{2\pi}{3\min\{\delta_1,\, \delta_2\}} - 0.5\Big\}$ (см. [21, теорема 1]), и, как следствие, справедливость оценки

$$|S_n(f,\, x_0) - f(x_0)| \le \omega(f, \gamma_n)\Big(\frac{1}{\pi^2}\ln\frac{1}{\delta_1\delta_2} + 1\Big)$$

скорости сходимости ряда Фурье функции f в точке x_0 к значению функции в этой точке, если $f(x) = 0$ при $x \in [x_0 - \delta_2,\, x_0 + \delta_1]$.

7. Оценка остатка преобразованного ряда Фурье

Распространенным способом решения уравнений математической физики является метод разделения переменных, когда по коэффициентам Фурье граничной функции или функции, задающей начальные условия, можно получить решение исходного уравнения в виде тригонометрического ряда. Поставим следующий вопрос. Пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big),$$

$f(x)$ — непрерывная 2π-периодическая функция, и нам известна некоторая информация о ее модуле непрерывности. Зададим последовательность $\mu = \{\mu_n\}$ и рассмотрим преобразование ряда Фурье функции f:

$$F(x,\mu) = \frac{a_0\,\mu_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big)\mu_n \tag{7.1}$$

(в предположении, что ряд (7.1) сходится). Что можно сказать про скорость стремления к нулю остатка ряда (7.1)? В частности, если рассматривать случай $\mu_n = r^n$, $r \in (0,\,1)$, то мы получим задачу оценки приближения частичной суммой ряда (7.1) решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге, если $\mu_n = \exp(-n^2 t)$ (или аналогичные варианты), то имеем задачу оценки приближения решения уравнения теплопроводности.

Обозначим

$$r_n(f) = f - S_n(f), \quad r_n(F) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big)\mu_k.$$

Пусть $\omega(f,h) \le \omega(h)$, где $\omega(h)$ — модуль непрерывности. Согласно теореме 1

$$\|r_n(f)\| < \frac{L_n+1}{2}\,\omega\left(\gamma_n\right), \quad \gamma_n = \frac{2\pi}{3(n+0.5)}.$$

Следующая теорема дает оценку приближения F частичной суммой ряда (7.1).

Теорема 3. *Если μ_k — монотонно убывающая последовательность, для которой выполнено условие $\mu_k = O(1/\ln k)$, $k \ge 2$, и функция $(\ln(1/h)+6.34)\,\omega(h)$ не убывает на промежутке $(0, h_0]$, то*

$$\|r_n(F)\| \le \mu_{n+1}(L_n+1)\,\omega\left(\gamma_n\right)$$

при $n \ge 2\pi/(3h_0) - 0.5$.

Доказательство. К частичной сумме ряда

$$r_n(F) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big)\mu_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \big(r_{k-1}(f) - r_k(f)\big)\mu_k$$

применим преобразование Абеля:

$$\sum_{k=n+1}^{N} \big(r_{k-1}(f) - r_k(f)\big)\mu_k = -r_N(f)\,\mu_N + r_n(f)\,\mu_{n+1} - \sum_{k=n+1}^{N-1} r_k(f)\,(\mu_k - \mu_{k+1}). \tag{7.2}$$

Поскольку $r_N(f) = o(\ln N)$ при $N \to \infty$, $\mu_N = O(1/\ln N)$, в равенстве (7.2) можно сделать предельный переход. Получим

$$r_n(F) = r_n(f)\mu_{n+1} - \sum_{k=n+1}^{\infty} r_k(f)\,(\mu_k - \mu_{k+1}),$$

и тогда $\|r_n(F)\| \le \|r_n(f)\|\,\mu_{n+1} + \sup\limits_{k\ge n+1}\|r_k(f)\|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(\mu_k-\mu_{k+1}) \le 2\sup\limits_{k\ge n}\|r_k(f)\|\,\mu_{n+1}$.

Для констант Лебега выполнено следующее соотношение [15, теорема 3]:

$$L_k = \frac{4}{\pi^2}\ln(k+0.5) + C + v_k, \tag{7.3}$$

где

$$C = \frac{4}{\pi^2}\Big(3\ln 2 + \gamma + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\ln k}{k^2-1/4}\Big),$$

γ — постоянная Эйлера, а v_k — монотонно убывающая и стремящаяся к нулю при $k\to\infty$ последовательность. Используя равенство (7.3), имеем

$$(L_k+1)\,\omega\left(\gamma_k\right) = \Big(\frac{4}{\pi^2}\ln(k+0.5) + C + 1\Big)\omega\left(\gamma_k\right) + v_k\,\omega\left(\gamma_k\right)$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\Big(\ln\frac{1}{\gamma_k} + \ln\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi^2(C+1)}{4}\Big)\omega\left(\gamma_k\right) + v_k\,\omega\left(\gamma_k\right),$$

Так как $\ln(2\pi/3) + \pi^2(C+1)/4 = 6.34113\ldots$, функция $(\ln(1/h)+6.34)\,\omega(h)$ не убывает на промежутке $(0,h_0]$ по условию теоремы, v_k монотонно убывающая, то последовательность $(L_k+1)\,\omega\left(\gamma_k\right)$ не возрастает при $k\ge 2\pi/(3h_0)-0.5$. Значит, при $n\ge 2\pi/(3h_0)-0.5$ выполнено неравенство

$$\sup_{k\ge n}\|r_k(f)\| \le \frac{L_n+1}{2}\,\omega\left(\gamma_n\right)$$

и мы получаем $\|r_n(F)\| \le \mu_{n+1}(L_n+1)\,\omega\left(\gamma_n\right)$.

Следствие 1. *Если последовательность μ_k монотонно убывает, $\mu_k = O(1/\ln k)$, $k\ge 2$, и для непрерывной 2π-периодической функции f выполнено условие*

$$\omega(f,h) \le A\,h^{\alpha},$$

$A>0$, $\alpha\in(0,1]$, *то при $n\ge 0.0037\exp(\alpha^{-1})-0.5$ верно неравенство*

$$\|r_n(F)\| \le A\,\mu_{n+1}(L_n+1)\,\gamma_n^{\alpha}. \tag{7.4}$$

В частности, при $\alpha\in[1/6,1]$ соотношение (7.4) справедливо для любого натурального значения n.

Отметим, что согласно результату А. А. Конюшкова [31, теорема 2], если μ_n выпуклая и стремящаяся к нулю последовательность, $\omega(f,h)=O(h^{\alpha})$, $\alpha\in(0,1)$, то тогда $\omega(F,h)=o(h^{\alpha})$ при $h\to 0+$ и вместе с теоремой 1 это дает равенство $\|r_n(F)\| = o(\gamma_n^{\alpha})\,(L_n+1)$, $n\to\infty$, которое согласуется с (7.4), но его практическое применение, в отличие от (7.4), затруднено.

8. Приближение периодических функций многих переменных

В работе В. Т. Гаврилюк [32] доказан аналог теоремы 1 для непрерывных периодических функций многих переменных.

Обозначим через $C_{(d)}$ пространство непрерывных 2π-периодических (по каждой переменной) функций $f(x)$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_d)$ с нормой $\|f\| = \max\limits_{x}|f(x)|$, а через

$$\omega(f,\,h) = \omega(f,\,h_1,\ldots,h_d), \quad 0\le h_i\le\pi, \quad i=1,\ldots,d,$$

— модуль непрерывности функции $f\in C_{(d)}$.

$$\omega(f,\,h) = \max\{|\,f(x_1+t_1,\ldots,x_d+t_d) - f(x_1,\ldots,x_d)|, \quad x\in\mathbb{R}^d, \quad |t_i\,|\le h_i,\, i=1,\ldots,d\}.$$

Пусть

$$S_n(f) = S_{n_1,\ldots,n_d}(f, x_1, \ldots, x_d) = \frac{1}{\pi^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} f(t)\Big(\prod_{i=1}^{d} D_{n_i}(t_i - x_i)\Big)dt$$

— прямоугольные суммы Фурье порядка $n = (n_1, \ldots, n_d)$, $n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, d$.

Теорема 4 [32]. *Для любой* $f \in C_{(d)}$, $f \neq \mathrm{const}$,

$$\|f - S_n(f)\| < \frac{1}{2}\Big(\prod_{i=1}^{d} L_{n_i} + 1\Big)\, \omega(f, \gamma_n), \quad n = (n_1, \ldots n_d),$$

$$\gamma_n = (\gamma_{n_1}, \ldots, \gamma_{n_d}), \quad \gamma_{n_i} = \frac{2\pi}{3(n_i + 0.5)}, \quad i = 1, \ldots, d.$$

Доказательство этой теоремы основывается на леммах 1–3 работы [8] и аналоге леммы 1 для многомерного случая.

В этой статье мы вспомнили только одну из большого множества работ Сергея Борисовича Стечкина. Его идеи и методы до сих пор остаются актуальными и продолжают свое развитие.

Автор выражает глубокую благодарность А. Ю. Попову за совместную работу [20], а также за поддержку и ценные советы при написании статей [14; 16; 21] и [24].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Lebesgue H.** Sur la représentation trigonometrique approchée des fonction satisfaisant á une condition de Lipschitz // Bull. Soc. Math. France. 1910. Vol. 38. P. 184–210. https://doi.org/10.24033/bsmf.859
2. **Киш О.** Оценка отклонения частных сумм ряда Фурье // Acta Math. Academ. Sci. Hungar. 1971. Vol. 22, no. 1-2. P. 173–176. https://doi.org/10.1007/BF01896005
3. **Гаврилюк В.Т.** Приближение непрерывных периодических функций полиномами Рогозинского и суммами Фурье // Вопросы теории приближения функций и ее приложений /ed. В.К. Дзядык. Киев, 1976. С. 46–59.
4. **Гаврилюк В.Т.** Приближение непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномам // Теория приближения функций: сб. ст. / eds. С. Б. Стечкин, С. А. Теляковский. Москва, 1977. С. 101–103.
5. **Miloradović S.** Aproksimacije funckcija Fourier-ovim sumama i gorns granica Fourierovih koeficijenta. Beograd: Magistarski rad, 1977. 51 p.
6. **Стечкин С.Б.** О приближении непрерывных периодических функций суммами Фавара // Тр. МИАН СССР. 1971. Т. 109. С. 26–34.
7. **Даугавет И.К.** Об одном свойстве вполне непрерывных операторов в пространстве C // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18, № 5. С. 157–158.
8. **Гаврилюк В.Т., Стечкин С.Б.** Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 172. С. 107–127.
9. **Гаврилюк В.Т., Стечкин С.Б.** Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье // Докл. АН СССР. 1978. Т. 241, № 3. С. 525–527.
10. **Бари Н.К.** Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. 936 с.
11. **Faward J.** Sur les meilleurs procédés d’approximation de certaines classes de fonctions par des polynomes trigonométriques // Bull. Sci. Math. 1937. Vol. 61, no. 2. P. 209-224; 243-256.
12. **Rogosinski W.** Über die Abschnitte trigonometrischer Reihen // Math. Ann. 1926. Vol. 95. P. 110–134. https://doi.org/10.1007/BF01206600
13. **Корнейчук Н.П.** Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1971. Т. 35, № 1. С. 93–124.
14. **Семенова Т.Ю.** Алгоритм поиска точного значения аргумента модуля непрерывности в оценке скорости сходимости ряда Фурье непрерывной периодической функции // Вестн. Москов. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2024. № 4. С. 13–20. https://doi.org/10.55959/MSU0579-9368-1-65-4-2

15. **Shakirov I.A.** About the optimal replacement of the Lebesque constant Fourier operator by a logarithmic function // Lobachevskii J. Math. 2018. Vol. 39, no. 6. P. 841–846. https://doi.org/10.1134/S1995080218060185
16. **Semenova T.Yu.** Estimation of the approximation of continuous periodic functions by Fourier sums // Russian J. Math. Phys. 2023. Vol. 30, no. 4. P. 691–700. https://doi.org/10.1134/S1061920823040179
17. **Jordan C.** Sur la série de Fourier // C. R. Acad. Sci. 1881. Vol. 92, no. 5. P. 228–230.
18. **Стечкин С.Б.** О приближении непрерывных функций суммами Фурье // Успехи. мат. наук. 1952. Т. 7, № 4. С. 139–141.
19. **Теляковский С.А.** О работах С.Б. Стечкина по приближению периодических функций полиномами // Фундамент. и прикл. математика, 1997. Т. 3, № 4. С. 1059–1068.
20. **Попов А.Ю., Семенова Т.Ю.** Уточнение оценки скорости равномерной сходимости ряда Фурье непрерывной периодической функции ограниченной вариации // Мат. заметки. 2023. Т. 113, № 4. С. 544–559. https://doi.org/10.4213/mzm13743
21. **Семенова Т.Ю.** Оценка скорости сходимости в принципе локализации Римана для тригонометрических рядов Фурье непрерывных функций // Мат. заметки. 2024. Т. 116, № 2. С. 290–305. https://doi.org/10.4213/mzm14188
22. **Wiener N.** The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients // J. Math. Phys. 1924. Vol. 3, no. 2. P. 72–94. https://doi.org/10.1002/sapm19243272
23. **Волосивец С.С.** Приближение функций ограниченной p-вариации. Саратов: Изд-во СГУ, 2021. 120 с. ISBN-online: 978-5-292-04736-0. ISBN-print: 978-5-292-04735-3. `https://books.sgu.ru/monographs/978-5-292-04736-0`
24. **Семенова Т.Ю.** Оценка скорости равномерной сходимости ряда Фурье непрерывной периодической функции ограниченной p-вариации // Мат. заметки. 2024. Т. 115, № 2. С. 286–297. https://doi.org/10.4213/mzm13976
25. **Жук В.В.** Аппроксимация периодических функций. Ленинград: Изд-во Ленинградского гос. ун-та, 1982. 367 р
26. **Осколков К.И.** Обобщенная вариация, индикатриса Банаха и равномерная сходимость рядов Фурье // Мат. заметки, 1972. Т. 12, № 3. С. 313–324.
27. **Пекарский А.А.** Замечания к одной работе К.И. Осколкова // Вестн. БГУ им. Ленина. Сер. 1. 1978. №3. С. 62–64.
28. **Бесов О.В.** Оценка приближения периодических функций суммами Фурье // Мат. заметки. 2006. Т. 79, № 5. С. 784–787. https://doi.org/10.4213/mzm2751
29. **Hille E., Klein G.** Riemann's localization theorem for Fourier series // Duke Math. J. 1954. Vol. 21, no. 4. P. 587–591. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-54-02159-6
30. **Теляковский С.А.** Принцип локализации, оценка скорости сходимости // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 25. С. 178–181.
31. **Конюшков А.А.** О классах Липшица // Изв. АН СССР. Серия математическая, 1957. Т. 21, № 3. С. 423–448.
32. **Гаврилюк В.Т.** О приближении непрерывных периодических функций многих переменных суммами Фурье // Докл. АН УССР. 1981. А, № 2. С. 8-11.

Поступила 1.05.2025
После доработки 10.07.2025
Принята к публикации 14.07.2025

Семенова Татьяна Юрьевна
канд. физ.-мат. наук
доцент
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова;
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
г. Москва
e-mail: station@list.ru

REFERENCES

1. Lebesgue H. Sur la représentation trigonometrique approchée des fonction satisfaisant á une condition de Lipschitz. *Bull. Soc. Math. France*, 1910, vol. 38, pp. 184–210. https://doi.org/10.24033/bsmf.859

2. Kish O. Estimation of the deviation of partial sums of a Fourier series. *Acta Math. Academ. Sci. Hungar.*, 1971, vol. 22, no. 1-2, pp. 173–176 (in Russian). https://doi.org/10.1007/BF01896005
3. Gavrilyuk V.T. Approximation of continuous periodic functions by Rogozinsky polynomials and Fourier sums. In book: V. K. Dzyadyk (eds.) *Voprosy teorii priblizheniya funktsiy i yeye prilozheniy* [Problems of the theory of approximation of functions and its applications]. Kyiv, Inst. Mat. AN USSR, 1976, pp. 46–59.
4. Gavrilyuk V.T. Approximation of continuous periodic functions by trigonometric polynomials. In: S. B. Stechkin, S. A. Telyakovsky (eds.) *Teoriya priblizheniya funktsiy* [Theory of approximation of functions]. *Proc. Inter. Conf. "Theory of approximation of functions"*. Kaluga, Russia, 1975; Moscow, 1977, pp. 101–103.
5. Miloradović S. Aproksimacije funckcija Fourier-ovim sumama i gorns granica Fourierovih koeficijenta. Beograd, Magistarski rad, 1977, 51 p.
6. Stechkin S.B. The approximation of continuous periodic functions by Favard sums. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1971, vol. 109, pp. 28–38.
7. Daugavet I.K. A property of completely continuous operators in the space C. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1963, vol. 18, no. 5, pp. 157–158 (in Russian).
8. Gavrilyuk V.T., Stechkin S.B. Approximation of continuous periodic functions by Fourier sums. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1987, vol. 172, pp. 119–142.
9. Gavriljuk V.T., Stechkin S.B. Approximation of continuous periodic functions by Fourier series. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1978, vol. 241, no. 3, pp. 525–527 (in Russian).
10. Bari N.K. *A treatise on trigonometric series*. New York, Pergamon Press, 1964, pp. 1061. ISBN: 9780080100029. Original Russian text published in Bari N. K. *Trigonometricheskie ryady*, Moscow, Fizmatlit, 1961, 936 p.
11. Faward J. Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes de fonctions par des polynomes trigonométriques. *Bull. Sci. Math.*, 1937, vol. 61, no. 2, pp. 209–224, 243–256.
12. Rogosinski W. Über die Abschnitte trigonometrischer Reihen. *Math. Ann.*, 1926, vol. 95, pp. 110–134. https://doi.org/10.1007/BF01206600
13. Korneichuk N.P. Extreme values of functionals and best approximation on classes of periodic functions. *Math. USSR-Izv.*, 1971, vol. 5, iss. 1, pp. 97–129. https://doi.org/10.1070/IM1971v005n01ABEH001015
14. Semenova T.Yu. An algorithm for finding the exact value of the argument for the modulus of continuity in estimate of approximation of a continuous periodic function by a partial sum of its Fourier series. *Moscow Univ. Math. Bull.*, 2024, vol. 79, iss. 4, pp. 159–168. https://doi.org/10.3103/S0027132224700219
15. Shakirov I.A. About the optimal replacement of the Lebesque constant Fourier operator by a logarithmic function. *Lobachevskii J. Math.*, 2018, vol. 39, no. 6, pp. 841–846. https://doi.org/10.1134/S1995080218060185
16. Semenova T.Yu. Estimation of the approximation of continuous periodic functions by Fourier sums. *Russ. J. Math. Phys.*, 2023, vol. 30, no. 4, pp. 691–700. https://doi.org/10.1134/S1061920823040179
17. Jordan C. Sur la série de Fourier. *Comp. Rend. Acad. Sci.*, 1881, vol. 92, no. 5, pp. 228–230.
18. Stechkin S.B. On the approximation of continuous functions by Fourier sums. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1952, vol. 7, iss. 4, pp. 139–141 (in Russian).
19. Telyakovskii S.A. On the work of S. B. Stechkin on the approximation of periodic functions by polynomials. *Fundam. Prikl. Mat.*, 1997, vol. 3, no. 4, pp. 1059–1068 (in Russian).
20. Popov A.Yu., Semenova T.Yu. Refinement of the estimate for the rate of uniform convergence of the Fourier series of a continuous periodic function of bounded variation. *Math. Notes*, 2023, vol. 113, iss. 4, pp. 525–537. https://doi.org/10.1134/S0001434623030240
21. Semenova T.Yu. Estimate of the convergence rate in the Riemann localization principle for trigonometric Fourier series of continuous functions. *Math. Notes*, 2024, vol. 116, iss. 2, pp. 328—341. https://doi.org/10.1134/S0001434624070265
22. Wiener N. The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients. *J. Math. Phys.*, 1924, vol. 3, no. 2, pp. 72–94. https://doi.org/10.1002/sapm19243272
23. Volosivets S.S. *Priblizheniye funktsiy ogranichennoy p-variatsii* [Approximation of functions of bounded p-variation]. Saratov, Iz-vo Saratovskogo Univ., 2021, 120 p. ISBN-online: 978-5-292-04736-0. ISBN-print: 978-5-292-04735-3. `https://books.sgu.ru/monographs/978-5-292-04736-0`
24. Semenova T.Yu. Estimate for the rate of uniform convergence of the Fourier series of a continuous periodic function of bounded p-variation. *Math. Notes*, 2024, vol. 115, no. 2, p. 258–268. https://doi.org/10.1134/S0001434624010243

25. Zhuk V.V. *Approksimatsiya periodicheskikh funktsiy* [Approximation of periodic functions]. Leningrad, Leningr. Univ. Publ., 1982, 367 p.
26. Oskolkov K.I. Generalized variation, the banach indicatrix, and the uniform convergence of Fourier series. *Math. Notes*, 1972, vol. 12, no. 3, pp. 619–625. https://doi.org/10.1007/BF01093998
27. Pekarskii A.A. Notes on one work by K. I. Oskolkov. *Vestnik BGU im. Lenina*, ser. 1, 1978, no. 3, pp. 62–64 (in Russian).
28. Besov O.V. Estimate of the approximation of periodic functions by Fourier series. *Math. Notes*, 2006, vol. 79, no. 5, pp. 726–728. https://doi.org/10.1007/s11006-006-0083-x
29. Hille E., Klein G. Riemann's localization theorem for Fourier series. *Duke Math. J.*, 1954, vol. 21, no. 4, pp. 587–591. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-54-02159-6
30. Teliakovskii S.A. Riemann's localization theorem. An estimate for the rate of convergence. *J. Math. Sci.*, 2008, vol. 155, no. 1, p. 183–187. https://doi.org/10.1007/s10958-008-9215-z
31. Konyushkov A.A. On Lipschitz classes. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 1957, vol. 21, no. 3, pp. 423–448 (in Russian).
32. Gavrilyuk V.T. On the approximation of continuous periodic functions of several variables by Fourier sums. *Doklady AN USSR*, 1981, A, no. 2, pp. 8–11.

Received May 1, 2025
Revised July 10, 2025
Accepted July 14, 2025

Tatiana Yur'evna Semenova, Cand.Sci. (Phys.-Math.), Moscow State University; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, 119991 Russia, e-mail: station@list.ru .

Cite this article as: T. Yu. Semenova. Method of S. B. Stechkin and V. T. Gavrilyuk and its application. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 3, pp. 233–249 .