ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 31 № 3 2025

УДК 517.982.256

# ПРОЕКЦИОННО ЗАМКНУТЫЕ МНОЖЕСТВА И ПРОСТРАНСТВА ЕФИМОВА — СТЕЧКИНА[1]

**А. Р. Алимов, И. Г. Царьков**

В работе рассматриваются задачи о существовании, единственности и устойчивости наилучшего приближения, а также связанные с ними задачи о солнечности для не обязательно замкнутых множеств (в частности, рассматриваемые множества могут не быть множествами существования). Вводятся определения проекционной границы и проекционно замкнутого множества. Показывается, что если $X$ — симметризуемое несимметричное пространство Ефимова — Стечкина, то множество точек аппроксимативной компактности непустого проекционно замкнутого множества $M \subset X$ имеет вторую категорию в метрической внешности $\operatorname{out}(M)$ множества $M$. Исследуются соотношения между классами связности множеств в несимметричных пространствах Ефимова — Стечкина. Показано, что если $X$ — симметризуемое пространство Ефимова — Стечкина и $M \subset X$ проекционно замкнуто и $\ell_0 P_0$-связно, то $M$ $\ell_0 \mathring{B}$-связно. Исследуется задача о солнечности множеств единственности. В частности, на случай множеств единственности обобщается известная теорема, восходящая к В. И. Бердышеву и В. Л. Кли о солнечности ограниченно компактных чебышёвских множеств. Также получены результаты о солнечности ограниченно предкомпактных проекционно замкнутых множеств единственности. Установлены результаты о сохранении солнечности и других аппроксимативных свойств множеств при переходе к замкнутым окрестностям $M + B(x, r)$ множеств. Отдельно рассмотрен случай чебышёвских солнц, в котором получена характеризационная теорема.

Ключевые слова: проекционная граница, проекционно замкнутое множество, связность, наилучшее приближение, солнце, чебышёвское солнце, пространство Ефимова — Стечкина, метрическая внешность множества, аппроксимативная компактность, аппроксимативной предкомпактность

**A. R. Alimov, I. G. Tsar'kov. Projection closed sets and Efimov–Stechkin spaces.**

The paper is concerned with problems of existence, uniqueness, and stability of best approximants and related problems of solarity for not necessarily closed sets (in particular, such sets are not necessarily proximinal). We give definitions of the projection boundary and of a projection closed set. We show that if $X$ is a symmetrizable asymmetric Efimov–Stechkin space, then the set of points of approximative compactness of any nonempty projection closed set $M \subset X$ is of second category in the metric exterior $\operatorname{out}(M)$ of the set $M$. We also study relations between classes of sets in asymmetric Efimov–Stechkin spaces. We show that if $X$ is a symmetrizable Efimov–Stechkin space, $M \subset X$ is projection closed, and $\ell_0 P_0$-connected, then $M$ is $\ell_0 \mathring{B}$-connected. Solarity problem for sets of uniqueness is studied. In particular, the well-known theorem dating back to V. I. Berdyshev and V. L. Klee on solarity of boundedly compact Chebyshev sets is extended to the case of sets of uniqueness. Results on solarity of boundedly precompact projection closed sets of uniqueness are obtained. We also obtain results on preservation of solarity and other approximative properties of sets when changing to closed neighborhoods $M + B(x, r)$ of sets. Special attention is given to the case of Chebyshev suns, for which a characterization theorem is obtained.

Keywords: projection boundary, projection closed set, connected set, best approximation, sun, Chebyshev sun, Efimov–Stechkin space, metrical exterior of a set, approximative compactness, approximative precompactness.

**MSC:** 41A65

**DOI**: 10.21538/0134-4889-2025-31-3-20-35

## 1. Введение

Хорошо известно, что многие классические агрегаты наилучшего приближения (экспоненциальные суммы, обобщенные дробно-рациональные функции, сплайны степени $m$ дефекта $k$

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации научного проекта по соглашению № 075-15-2025-013.

с $n$ нефиксированными узлами, произведения $\{vw \mid v \in V,\ w \in W\}$) в общем случае не являются замкнутыми множествами (см., например, [1, гл. VI] и [2, § 11.4, § 7.12]). Это приводит к задаче рассмотрения аппроксимативно-геометрических свойств множеств, не обязательно замкнутых. Соответственно в работе рассматриваются задачи о существовании, единственности и устойчивости наилучшего приближения, а также связанные с ними задачи о солнечности для множеств, не обязательно являющихся множествами существования (т. е. для не обязательно замкнутых множеств). Данные задачи составляют часть современной геометрической теории приближений, в которой ряд ярких фундаментальных результатов были получены Н. В. Ефимовым и С. Б. Стечкиным в цикле работ [3–6], относящихся к исследованию выпуклости чебышёвских множеств.

Настоящая статья организована следующим образом. Основные определения даны в разд. 2. В частности, здесь вводятся важные определения проекционной границы и проекционно замкнутого множества. Приводятся некоторые результаты о таких множествах и классические примеры (незамкнутых) проекционно замкнутых множеств из теории приближений функций. Также в этом разделе вводятся классы связности множеств, которые используются в дальнейшем. В разд. 3 изучаются плотностные свойства точек аппроксимативной компактности. В теореме 3.1 показано, что если $X$ — симметризуемое несимметричное пространство Ефимова — Стечкина, то множество точек аппроксимативной компактности непустого проекционно замкнутого множества $M \subset X$ имеет вторую категорию в метрической внешности $\operatorname{out}(M) := \{x \in X \mid \rho(x, M) > 0\}$ (т. е. на множестве всех точек, находящихся на положительном расстоянии от $M$) множества $M$. В разд. 4 исследуются соотношения между классами связности множеств в несимметричных пространствах Ефимова — Стечкина. В частности, в теореме 4.1 доказано, что если $X$ — симметризуемое пространство Ефимова — Стечкина и $M \subset X$ проекционно замкнуто и $\ell_0 P_0$-связно, то $M$ $\ell_0\mathring{B}$-связно. Этот результат восходит и обобщает классические результаты С. В. Конягина и И. Г. Царькова о связности чебышёвских множеств и множеств единственности в пространствах Ефимова — Стечкина. Солнечность множеств единственности рассматрена в разд. 5; в нем также представлен ряд результатов о сохранении солнечности и других аппроксимативных свойств множеств при переходе к замкнутым окрестностям $M + B(x, r)$ множеств. Отдельно рассмотрен случай чебышёвских солнц, в котором получена характеризационная теорема (теорема 5.7). Результаты такого рода также восходят к хорошо известным результатам Н. В. Ефимова и С. Б. Стечкина [3] об аппроксимативных свойствах $b$-расширений множеств.

## 2. Основные определения

Ниже $X = (X, \|\cdot|)$ — симметризуемое несимметрично нормированное пространство с (несимметричной) нормой $\|\cdot|$ (по поводу определений и свойств таких пространств см., например, [7–10]),

$\mathring{B}(x, r) = \{y \in X \mid \|y - x| < r\}$ — открытый шар с центром $x$ и радиусом $r$,

$B(x, r) = \{y \in X \mid \|y - x| \leqslant r\}$ — замкнутый шар,

$S(x, r) = \{y \in X \mid \|y - x| = r\}$ — сфера.

В частном случае мы полагаем $B := B(0, 1)$ — единичный шар, $\mathring{B} := \mathring{B}(0, 1)$ — открытый единичный шар, $S = S(0, 1)$ — единичная сфера.

Для $\varnothing \neq M \subset X$ *функция расстояния* от точки $x \in X$ до множества $M \subset X$ определяется формулой $\rho(x, M) := \inf_{y \in M} \|y - x|$. Множество *ближайших точек* для точки $x \in X$ из множества $M$ определяется следующим образом:

$$P_M x := \bigl\{y \in M \mid \rho(x, M) = \|y - x|\bigr\}.$$

О п р е д е л е н и е 2.1. *Метрической внешностью* $\operatorname{out}(M)$ множества $M$ называется множество всех точек, находящихся на положительном расстоянии от $M$, т. е.

$$\operatorname{out}(M) := \{x \in X \mid \rho(x, M) > 0\}.$$

Отметим, что

$$\operatorname{out}(M)=\operatorname{out}(\overline{M})=X\setminus\overline{M}$$

(здесь и ниже $\overline{M}$ — замыкание множества $M$).

Определение 2.2. *Проекционной границей* $\operatorname{pb} M$ множества $M$ в несимметрично нормированном пространстве $(X,\|\cdot|)$ назовем множество

$$\operatorname{pb}(M):=\{y\in\overline{M}\mid y\in P_{\overline{M}}x \ \text{ для некоторой точки } \ x\in\operatorname{out}(M)\}.$$

Граничная точка $y$ множества $\overline{M}$ называется *неприкасаемой* точкой множества $M$, если не существует невырожденного шара, опирающегося на множество $\overline{M}$ в точке $y$, иными словами, если не существует точки $x\neq y$ такой, что $y\in P_{\overline{M}}x$. В противном случае граничная точка называется *прикасаемой*. Множество всех прикасаемых точек множества составляют его проекционную границу. Также отметим, что

$$\text{множество неприкасаемых точек множества } M \text{ равно } \operatorname{bd}\overline{M}\setminus\operatorname{pb}M.$$

Определение 2.3. Множество $M\neq\varnothing$ *проекционно замкнуто* (обозначение: $M\in\operatorname{PrC}(X)$), если оно содержит свою проекционной границу.

Несложно проверить следующий факт.

**Предложение 2.1.** *Если $M$ проекционно замкнуто и $M\subset N\subset\overline{M}$, то $N$ также проекционно замкнуто.*

Замечание 2.1. В пространствах Ефимова — Стечкина (определение таких пространств напоминается ниже в разд. 3) для любого непустого замкнутого множества множество точек аппроксимативной компактности есть множество второй категории (см. (3.1) ниже). Отсюда следует, что в таком пространстве проекционная граница любого непустого замкнутого множества (не совпадающего со всем пространством) плотна в границе множества. Также понятно, что если точки существования заданного множества плотны в пространстве, то проекционная граница такого множества плотна в его границе. В [11] построен пример рефлексивного пространства без свойства Кадеца — Кли (такое пространство не является пространством Ефимова — Стечкина), в котором для любого замкнутого множества множество его прикасаемых точек плотно в границе, т. е. $\operatorname{bd}M=\overline{\operatorname{pb}M}$.

**Пример 2.1.** Пусть $\mathscr{R}_{n,m}$, $m\geqslant 1$, — множество классических рациональных функций в $L^p[a,b]$, $1\leqslant p<\infty$ (см. [2, гл. 11]). Множество

$$M:=\mathscr{R}_{n,m}\setminus\mathscr{R}_{n-1,m-1}$$

дает классический пример проекционно замкнутого, но не замкнутого множества (в этом случае $M$ является солнцем относительно $\operatorname{out}(M)$) (см. определение 5.1 ниже). Это свойство вытекает из одного хорошо известного результата Й. Блаттера (см., например, [2, § 11.3]), который установил, что для рациональной $L^p$-аппроксимации для элемента наилучшего приближения степень числителя и знаменателя всегда максимальна, т. е.

> если $u^*$ — ближайший элемент наилучшего $L^p$-приближения из $\mathscr{R}_{n,m}$, $1<p<\infty$, для $f\notin\mathscr{R}_{n,m}$, $n\geqslant 1$, то $u^*\notin\mathscr{R}_{n-1,m-1}$.

Отметим, что согласно Ч. Данхему это свойство невырожденности наилучшей дроби уже не имеет места в $L^1$ (см., например, [2, § 11.3]). В пространстве $C[a,b]$, как следует из теоремы о чебышёвском альтернансе для равномерной рациональной аппроксимации, любой элемент из $\mathscr{R}_{n,m}$ является прикасаемой точкой множества.

Отметим также, что в $C[a,b]$ непустое множество $M\subset\mathscr{R}_{n,m}$ проекционно замкнуто, если и только если оно замкнуто.

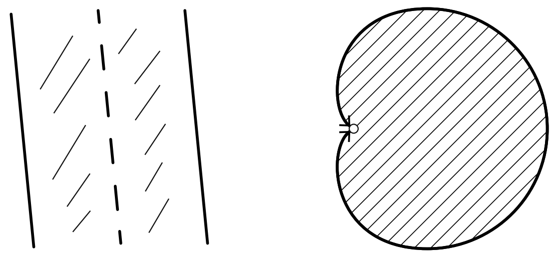

Рис. 1. Примеры множеств, для которых проекционная граница не совпадает с границей.

Множество $\Pi = \{x \in \ell^2 \mid |x^{(n)}| \leqslant 1/2^{n-1}\}$ (гильбертов кирпич) также дает пример выпуклого компакта, для которого проекционная граница не совпадает с границей множества. Другие примеры множеств, для которых проекционная граница не совпадает с границей, показаны на рис. 1.

З а м е ч а н и е 2.2. Отметим следующие легко проверяемые свойства.

1) Замкнутое множество проекционно замкнуто.

2) В пространстве Ефимова — Стечкина, если $M \subset X$ проекционно замкнуто, $\overline{\mathrm{pb}(M)} = \mathrm{bd}\, M$.

3) Если $M \neq X$ — множество существования (или, более общо, если множество точек существования множества $M$ всюду плотно в $X$), то $\overline{\mathrm{pb}(M)} = \mathrm{bd}\, M$.

4) Если пространство содержит замкнутое непустое антипроксиминальное множество $M$ (в частности, такое множество есть в любом нерефлексивном пространстве), то $\mathrm{pb}\, M = \varnothing$ (и, конечно, множество $\mathrm{pb}\, M$ не всюду плотно в границе множества $M$).

5) Множество всех неприкасаемых точек подмножества $M$ конечномерного (несимметричного) пространства является $G_\delta$-подмножеством границы множества $M$.

6) Если $M \subsetneq X$ — замкнутое подмножество конечномерного (несимметричного) пространства, то его проекционная граница — $F_\sigma$-плотное подмножество границы множества $M$.

7) В конечномерном (несимметричном) пространстве проекционная граница выпуклого множества совпадает с границей множества.

8) Для того чтобы проекционная граница любого выпуклого тела совпадала с границей этого тела, необходимо и достаточно, чтобы пространство было рефлексивным.

Нам понадобится “минимальная длина” отрезка $[x, y] \subset X$:

$$\ell(x, y) := \min\{\|x - y|, \|y - x|\} \tag{2.1}$$

(в симметричном случае $\ell(x, y) = \|x - y\|$). Функционал (2.1) изучался в работах [7; 8; 12].

Для непустых множеств $U, V \subset X$ определим величину

$$\ell(U, V) := \inf_{u \in U,\, v \in V} \ell(u, v).$$

О п р е д е л е н и е 2.4. Определим следующие классы связности. Множество $M$:

– $P_0$-*связно*, если для любой точки $x$ множество $P_M x$ ее ближайших точек из $M$ связно;

– $\mathring{B}$-*связно*, если его пересечение с любым открытым шаром $\mathring{B}(x, r)$ связно;

– $\ell_0$-*связно*, если $M$ нельзя представить в виде дизъюнктного объединения $M = M_1 \sqcup M_2$ непустых множеств, таких что $\ell(M_1, M_2) > 0$;

– $\ell_0\mathring{B}$-*связно*, если его пересечение с произвольным шаром $\mathring{B}(x, R)$ $\ell_0$-*связно*;

– $\ell_0 P_0$-*связно*, если для любой точки $x$ множество $P_M x$ $\ell_0$-связно.

Отметим, что $(P_0) \subset (\ell_0 P_0)$, где $(P_0)$ — класс $P_0$-связных множеств, $(\ell_0 P_0)$ — класс $\ell_0 P_0$-связных множеств.

## 3. Плотностные свойства точек аппроксимативной компактности

О п р е д е л е н и е 3.1. Несимметричное симметризуемое пространство, в котором всякое полупространство $\{x \in X \mid x^*(x) \geqslant c\}$, где $x^* \in X^*$, $c \in \mathbb{R}$, аппроксимативно компактно, называется *несимметричным пространством Ефимова — Стечкина*.

В нормированном случае термин "пространство Ефимова — Стечкина" введен И. Зингером (см. [13]) в 1964 г. Хорошо известно, что класс пространств Ефимова — Стечкина совпадает с классом рефлексивных пространств Кадеца — Кли. По поводу дальнейших деталей см. [14; 15; 2, гл. 9].

В симметризуемом случае определение несимметричного пространства Ефимова — Стечкина эквивалентно следующему: пространство рефлексивно и в нем каждая гиперплоскость $\{x \in X \mid x^*(x) = c\}$, где $x^* \in X^*$, аппроксимативно компактна.

О п р е д е л е н и е 3.2. Точка $x \in X$ называется точкой (*правой*) *аппроксимативной компактности* для $M \subset X$, если из условий $(y_n) \subset M$, $\|y_n - x\,| \to \rho(x, M)$ следует, что найдется подпоследовательность $(y_{n_k})$, (лево-) сходящаяся к некоторой точке $\widehat{y} \in X$, т. е. $\|y_{n_k} - \widehat{y}\,| \to 0$. Обозначение: $x \in \mathrm{AC}(M)$. Множество $M$ *аппроксимативно компактно относительно множества* $E$, если $E \subset \mathrm{AC}(M)$. Если $E = X$, то множество $M$ *аппроксимативно компактно*.

З а м е ч а н и е 3.1. В случае, если $X$ симметризуемо, $M \subset X$ проекционно замкнуто и $x \in \mathrm{out}(M)$; в определении 3.2 точка $\widehat{y}$ на самом деле лежит в $M$.

В нормированном случае понятие аппроксимативно компактного множества было введено Н. В. Ефимовым и С. Б. Стечкиным [6].

Напомним, что множеством *первой категории называется* объединение счетного числа нигде не плотных множеств. Класс подмножеств первой категории в пространстве $X$ будем обозначать через $\mathrm{I}(X)$, а класс дополнений к множествам первой категории в $X$ — через $\mathrm{II}(X)$. Для случая нормированных пространств хорошо известно (см., например, [16, § 4]), что

в пространстве Ефимова — Стечкина (и, в частности, в полном равномерно выпуклом пространстве) класс точек аппроксимативной компактности замкнутого множества имеет вторую категорию. (3.1)

Результаты такого рода, составляющие важное направление геометрической теории, восходят к работе С. Б. Стечкина [17], в которой впервые были изучены плотностные и категорные свойства точек единственности, существования и аппроксимативной компактности.

В нормированном случае С. В. Конягин [18; 19] установил следующий результат: для того чтобы в банаховом пространстве $X$ для любого непустого замкнутого множества $M$ множество $\mathrm{AC}(M)$ было плотным в $X$ (множеством II категории в $X$), необходимо и достаточно, чтобы $X$ было пространством Ефимова — Стечкина. Результат Конягина переносится на (симметризуемый) несимметричный случай следующим образом (см. [14]).

**Теорема 3.A.** *Пусть $X$ — симметризуемое несимметрично нормированное пространство. Тогда для любого замкнутого непустого множества $M \subset X$ множество $\mathrm{AC}(M)$ является множеством $\mathrm{II}$ категории в $X$, если и только если $X$ — пространство Ефимова — Стечкина.*

В следующей теореме мы рассматриваем случай не обязательно замкнутых множеств.

**Теорема 3.1.** *Пусть $X$ — симметризуемое несимметричное пространство Ефимова– Стечкина. Тогда*

$$\mathrm{AC}(M) \in \mathrm{II}(\mathrm{out}(M))$$

*для любого непустого проекционно замкнутого множества $M \subset X$.*

Доказательство. По теореме 3.A $\mathrm{AC}(\overline{M}) \in \mathrm{II}(X)$, откуда $\mathrm{AC}(\overline{M}) \in \mathrm{II}(\mathrm{out}\, M)$. Нужно проверить, что

$$\mathrm{AC}(\overline{M}) \cap \mathrm{out}\, M = \mathrm{AC}(M) \cap \mathrm{out}\, M. \tag{3.2}$$

Действительно, пусть $x \in \mathrm{AC}(\overline{M}) \cap \mathrm{out}\, M$ и $(y_n)$ — минимизирующая последовательность из $M \subset \overline{M}$ для $x$. Тогда $\|y_n - x\,| \to \rho(x, M) = \rho(x, \overline{M}) > 0$. Поэтому $(y_n)$ — минимизирующая последовательность из $\overline{M}$ для $x$, так что $(y_n)$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $y \in \overline{M}$. По определению $y \in \mathrm{pb}(M) \subset M$. Значит, $x \in \mathrm{AC}(M)$. □

**Предложение 3.1.** *Пусть $X$ — конечномерное пространство, $M \subset X$ и $\mathrm{out}(M) \neq \varnothing$. Тогда*:

1) *множество всех неприкасаемых точек множества $M$ является $G_\delta$-подмножеством границы множества $M$*;

2) *проекционная граница $\mathrm{pb}\, M$ множества $M$ — $F_\sigma$-плотное подмножество границы множества $M$.*

Доказательство. 1) Пусть $x$ — неприкасаемая точка множества $M$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда найдется окрестность $\mathscr{O}^n(x)$ точки $x$ относительно границы $\mathrm{bd}\, M$ такая, что не существует точки $y$, $\rho(y, M) \geqslant 1/n$, $\|y - x\,| \leqslant 1 + 1/n$, такой, что $P_{\overline{M}}y \cap \mathscr{O}^n(x) \neq \varnothing$. Действительно, рассуждая от противного, если бы для любого $k$ такая точка $y_k$ нашлась, т. е. $P_{\overline{M}}y_k \cap \mathscr{O}^n(x) \neq \varnothing$, то в силу ограниченности этой последовательности существовал бы ее частичный предел $y_0$, для которого $x \in P_{\overline{M}}x_0$ и $\rho(y_0, M) \geqslant 1/n$; это противоречит тому, что $x$ — неприкасаемая точка множества $M$. Пусть $G_n$ — относительно открытое (в $\mathrm{bd}\, M$) множество, состоящее из объединения таких окрестностей $\mathscr{O}^n(x)$ по всем неприкасаемым точкам $x$ множества $M$, $n \in \mathbb{N}$. Положим $G := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$. Поскольку для любого $n$ имеем $P_{\overline{M}}z \cap G_n = \varnothing$ для любой точки $z$, $\rho(z, M) \geqslant 1/n$, то для любой точки $g \in G$ нет точек $u$ из $\mathrm{out}(M)$, для которых $g \in P_{\overline{M}}u$.

2) Из п. 1) следует, что $\mathrm{pb}\, M$ имеет тип $F_\sigma$. Пусть $y \in \mathrm{bd}\, M$ и $\mathscr{O}$ — $\delta/2$-окрестность точки $y$, где $\delta > 0$ произвольно. Пусть $w \in \mathscr{O} \cap \mathrm{out}(M)$ и $v \in P_{\overline{M}}w$. Тогда $\|w - v\| \leqslant \delta$ и, очевидно, $v$ — прикасаемая точка. □

Доказанное выше предложение 3.1 связано с задачей С. Б. Стечкина о “дороге, по которой всюду трясет” [17, с. 11]. Именно, пусть $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; в качестве множества $M$ рассмотрим график этой функции. Известно [20], что если функция $\varphi$ имеет локально ограниченную вторую производную, то любая точка графика (множества $M$) является прикасаемой. Если же вторая производная не ограничена ни сверху, ни снизу на всюду плотном подмножестве $\mathbb{R}$, то множество неприкасаемых точек всюду плотно в этом графике, откуда по предложению 3.1 является множеством второй категории.

## 4. О соотношениях между классами связности множеств в несимметричных пространствах Ефимова — Стечкина

Известно [21, теорема 1], что в симметризуемом несимметричном пространстве Ефимова — Стечкина замкнутое $P_0$-связное множество $\mathring{B}$-связно. Для нормированных пространств Ефимова — Стечкина этот результат получен ранее И. Г. Царьковым [15]. В следующей теореме данный результат распространяется на случай не обязательно замкнутых множеств.

**Теорема 4.1.** *Пусть $X$ — несимметричное симметризуемое пространство Ефимова — Стечкина и $M \subset X$ проекционно замкнуто и $\ell_0 P_0$-связно. Тогда $M$ $\ell_0\mathring{B}$-связно.*

Доказательство. Нам потребуется ряд вспомогательных результатов (4.1)–(4.7). Для $\delta > 0$ обозначим

$$P_M^\delta x := \bigl\{y \in M \mid \|y - x\,| \leqslant \rho(x, M) + \delta\bigr\}.$$

Несложно проверяется, что если $X$ — полное (симметризуемое) несимметричное пространство, $M$ проекционно замкнуто в $X$ и $x \in \mathrm{AC}(M)$, то для любого $\delta > 0$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\rho(y, P_M x) < \varepsilon \quad \text{для любого} \quad y \in P_M^\delta x. \tag{4.1}$$

Действительно, рассуждая от противного, предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ найдется точка $x_n \in P_M^{1/n} x$ такая, что $\rho(x_n, P_M x) > \varepsilon_0$. Поскольку $x \in \mathrm{AC}(M)$ и пространство $X$ симметризуемо, то последовательность $(x_n)$ имеет предельную точку $x_0 \in M$. Но тогда $x_0 \in P_M x$ и $\rho(x_0, P_M x) \geqslant \varepsilon_0$, что невозможно.

Для $\varnothing \neq A \subset X$ через $\gamma(A)$ обозначим точную верхнюю грань чисел $\varepsilon \geqslant 0$, для которых для любой конечной системы точек $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ можно указать точку $y \in A$ такую, что $\|y - x_j\,| \geqslant \varepsilon$ при всех $j = 1, \dots, n$. Далее, следуя [19], убедимся, что если $X$ — полное симметризуемое несимметричное пространство, $M \in \mathrm{PrC}(X)$ и $x \in X$, то

$$\text{условие } x \in \mathrm{AC}(M) \text{ влечет, что } \lim_{\delta \to 0+} \gamma(P_M^\delta x) = 0. \tag{4.2}$$

Действительно, пусть при некотором $\varepsilon > 0$ выполнено $\gamma(P_M^\delta x) \geqslant \varepsilon$ при всех $\delta > 0$. Рассмотрим $y_1 \in P_M^1 x$. Поскольку $\gamma(P_M^{1/2} x) \geqslant \varepsilon$, то найдется точка $y_2 \in P_M^{1/2} x$ такая, что $\|y_2 - y_1\,| \geqslant \varepsilon/2$. Далее рассуждая подобным образом, выберем точку $y_3 \in P_M^{1/3} x$ такую, что $\|y_3 - y_2\,| \geqslant \varepsilon/2$ и $\|y_3 - y_1\,| \geqslant \varepsilon/2$. Продолжая это построение до бесконечности, получим последовательность $(y_m) \subset M$ такую, что $\|y_m - x\,| \to \rho(x, M)$, но при этом $(y_m)$ не содержит сходящейся подпоследовательности. Это завершает доказательство утверждения (4.2).

Теперь докажем, что если $X$ — полное несимметричное (симметризуемое) пространство, $M \in \mathrm{PrC}(X)$ и $x \in X$, $r > 0$, $\max\{\rho(x, A_0), \rho(x, B_0)\} < r$ и $M \cap B(x, r) = A_0 \sqcup B_0$, где $\ell(A_0, B_0) \geqslant \Delta > 0$. Положим $A_1 := \overline{A}_0$, $B_1 := \overline{B}_0$, тогда $\max\{\rho(x, A_1), \rho(x, B_1)\} < r$, $\ell(A_1, B_1) \geqslant \Delta > 0$ и найдутся $x_1 \in X$ и $r_1 > 0$ такие, что

$$B(x_1, r_1) \subset B(x, r) \quad \text{и} \quad \rho(x_1, M) = \rho(x_1, A_1) = \rho(x_1, B_1) < r_1. \tag{4.3}$$

Докажем (4.3). Для определенности будем считать, что $\rho(x, A_1) < \rho(x, B_1)$ (в случае равенства утверждение очевидно). Выберем точку $y \in B_1$ так, чтобы $\rho(x, A_1) < \|y - x\,| < r$. Тогда функция $\varphi(\,\cdot\,) := \rho(\,\cdot\,, A_1) - \rho(\,\cdot\,, B_1)$ принимает в точках $x$ и $y$ значения разных знаков. Поскольку по условию пространство $X$ симметризуемо, то функция $\varphi(\,\cdot\,)$ непрерывна и, следовательно, найдется точка $x_1 \in [x, y]$ такая, что $\rho(x_1, A_1) = \rho(x_1, B_1) =: r_0$. Поскольку $\|x_1 - x\,| = \|y - x\,| - \|y - x_1\,| < r - r_0$, то при $r_1 := r - \|x_1 - x\,| > r_0$ имеем $B(x_1, r_1) \subset B(x, r_1 + \|x - x_1\,|) = B(x, r)$, что завершает доказательство утверждения (4.3).

Далее, пусть $X$ — симметризуемое несимметричное пространство Ефимова — Стечкина, $M \in \mathrm{PrC}(X)$ и $x \in X$, $r > 0$ и пусть $M \cap B(x, r) = A_1 \sqcup B_1$, где $\ell(A_1, B_1) \geqslant \Delta > 0$ и $0 < \Delta \leqslant d := \rho(x, A_1) = \rho(x, B_1) < r$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся $x_0 \in X$ и $r_0 > 0$ такие, что

$$\begin{gathered} B(x_0, r_0) \subset \mathring{B}(x, r), \quad \rho(x_0, A_1) = \rho(x_0, B_1) < r_0 \text{ и множество} \\ A_1 \cap B(x_0, r_0) \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть относительно нормы } \|\cdot\|_{\mathrm{sym}}. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Докажем (4.4). Пусть точка $z \in B_1$ такова, что $\|z - x\,| < d + (r - d)/10$. Для $\delta := \min\{(r - d)/10, (1/3)\rho(x, A_1)\}$ в силу непрерывности функции $\rho(\,\cdot\,, A_1) - \rho(\,\cdot\,, B_1)$ найдется точка $z_1 \in (x, z) \cap \mathrm{out}(M)$ такая, что $\rho(z_1, B_1) = \rho(z_1, A_1) - 2\delta$. Ввиду (3.2) имеем $\mathrm{AC}(\overline{N}) \cap \mathrm{out}\, N = \mathrm{AC}(N) \cap \mathrm{out}\, N$ для любого $\varnothing \neq N \subset X$ и по теореме 3.1 найдется точка $z_2 \in \mathrm{AC}(A_1) \cap \mathrm{out}(M)$, $\|z_2 - z_1\|_{\mathrm{sym}} \leqslant \delta$. Покажем, что

$$B(z_2, \rho(z_2, A_1) + \delta) \subset \mathring{B}(x, r). \tag{4.5}$$

Имеем

$$\rho(z_2, A_1) + \delta \leqslant \rho(z_1, A_1) + 2\delta = \rho(z_1, B_1) + 4\delta \leqslant \|z - z_1| + 4\delta$$
$$= \|z - x| - \|z_1 - x| + 4\delta \leqslant \|z - x| - \|z_2 - x| + 5\delta \leqslant d + \frac{r-d}{10} - \|z_2 - x| + 5\frac{r-d}{10}$$
$$= \frac{1}{10}(6r + 4d) - \|z_2 - x| < r - \|z_2 - x|,$$

что ввиду хорошо известной эквивалентности

$$B(u, \alpha) \subset B(u', \alpha') \iff \|u - u'| \leqslant \alpha' - \alpha \tag{4.6}$$

влечет (4.5).

Далее, $z_2 \in \mathrm{AC}(A_1) \cap \mathrm{out}(M)$, поэтому с учетом (4.2) при некотором $\alpha_1 = \alpha_1(\varepsilon)$, $\rho(z_2, A_1) < \alpha_1 < \rho(z_2, A_1) + \delta$, множество $B(z_2, \alpha_1) \cap A_1$ имеет конечную $\varepsilon$-сеть. Возьмем $z_3 \in \mathring{B}(z_2, \alpha_1) \cap A_1$. В силу непрерывности функции $\rho(\,\cdot\,, B_1) - \rho(\,\cdot\,, A_1)$ и поскольку

$$\rho(z_2, B_1) - \rho(z_2, A_1) \leqslant (\rho(z_1, B_1) + \delta) - (\rho(z_1, A_1) - \delta) = 0,$$
$$\rho(z_3, B_1) - \rho(z_3, A_1) = \rho(z_3, B_1) > 0,$$

найдется точка $x_0 \in [z_2, z_3] \cap \mathrm{out}(M)$ такая, что $\rho(x_0, A_1) = \rho(x_0, B_1)$. Обозначив $r_0 := \alpha_1 - \|x_0 - z_2|$ (эта величина положительна согласно $\rho(z_2, A_1) < \alpha_1$ и $x_0 \in [z_2, z_3]$), получаем

$$B(x_0, r_0) \subset B(z_2, \alpha_1) \subset B(z_2, \rho(z_2, A_1) + \delta) \subset \mathring{B}(x, r).$$

Тогда множество $B(x_0, r_0) \cap A_1 \subset B(z_2, \alpha_1) \cap A_1$ имеет конечную $\varepsilon$-сеть и

$$\rho(x_0, A_1) = \rho(x_0, B_1) \leqslant \|z_3 - x_0| = \|z_3 - z_2| - \|x_0 - z_2| < \alpha_1 - \|x_0 - z_2| = r_0,$$

что доказывает утверждение (4.4).

Теперь убедимся, что элемент с нужными в (4.3) свойствами можно найти во множестве $\mathrm{AC}(M) \cap \mathrm{out}(M)$. А именно, пусть $X$ — несимметричное пространство Ефимова — Стечкина и $M \in \mathrm{PrC}(X)$ и $x \in \mathrm{out}(M)$, $r > 0$, таковы, что $B(x, r) \cap M = A_0 \sqcup B_0$, $\ell(A_0, B_0) \geqslant \Delta > 0$, и $0 < \Delta < r$, $\rho(x, A_0) < r$, $\rho(x, B_0) < r$. Тогда найдутся $x_0 \in X$ и $r_0 > 0$ такие, что

$$\begin{gathered} x_0 \in \mathrm{AC}(M) \cap \mathrm{out}(M), \quad B(x_0, r_0) \subset B(x, r), \\ \rho(x_0, A_0) = \rho(x_0, B_0) = \rho(x_0, M) \geqslant \frac{\Delta}{2} > 0. \end{gathered} \tag{4.7}$$

Докажем (4.7). По (4.3) найдутся $x_1 \in X$, $r_1 > 0$ такие, что

$$B(x_1, r_1) \subset B(x, r) \quad \text{и} \quad \rho(x_1, M) = \rho(x_1, A_0) = \rho(x_1, B_0).$$

Определим $A_1 = \overline{B(x_1, r_1) \cap A_0}$, $B_1 = \overline{B(x_1, r_1) \cap B_0}$ и проведем индукционное построение по $i$. Пусть найдутся $x_i \in X$ и $r_i > 0$ такие, что $B(x_i, r_i) \cap \overline{M} = A_i \sqcup B_i$, где $\rho(x_i, A_i) = \rho(x_i, B_i) < r_i$.

Согласно (4.4) мы можем найти $x_{i+1} \in X$ и $r_{i+1} > 0$ такие, что

$$B(x_{i+1}, r_{i+1}) \subset \mathring{B}(x_i, r_i), \quad \rho(x_{i+1}, A_i) = \rho(x_{i+1}, B_i) < r_{i+1} \tag{4.8}$$

и множество $B_{i+1} := B(x_{i+1}, r_{i+1}) \cap A_i$ имеет конечную $r/(i+1)$-сеть. Определим $A_{i+1} = B(x_{i+1}, r_{i+1}) \cap B_i$. В итоге мы получаем систему вложенных шаров $B(x_i, r_i)$. При $m > n$

$$\|x_m - x_n| \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \|x_{k+1} - x_k| \overset{(4.6),(4.8)}{\leqslant} \sum_{k=n}^{m-1} (r_{k+1} - r_k) = r_m - r_n,$$

поэтому $(x_i)$ — последовательность Коши (относительно несимметричной нормы $\|\cdot|$), которая, поскольку $X$ полно, сходится к некоторой точке $x_0 \in X$, а последовательность $(r_i)$ $(r_i \geqslant r_{i+1} \geqslant 0)$ — к некоторому числу $r_0 > 0$ ($r_0 \neq 0$, так как $A_0 \cap B_0 = \varnothing$). Несложно видеть, что

$$B(x_0, r_0) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathring{B}(x_i, r_i). \tag{4.9}$$

Каждая из последовательностей $(A_{2k})_{k=1}^{\infty}$, $(A_{2k-1})_{k=1}^{\infty}$ состоит из вложенных замкнутых множеств и для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество $A_{n+1}$ обладает конечной $r/n$-сетью, отсюда каждое из множеств $\widetilde{A} := \cap_k A_{2k-1}$, $\widetilde{B} := \cap_k A_{2k}$ непусто и компактно. В силу (4.9) $\widetilde{A} = B(x_0, r_0) \cap A_0$, $\widetilde{B} = B(x_0, r_0) \cap B_0$. Из непрерывности функции $\rho(\,\cdot\,, A_0) - \rho(\,\cdot\,, B_0)$ имеем

$$\rho(x_0, \widetilde{A}) = \rho(x_0, A_0) = \rho(x_0, \widetilde{B}) = \rho(x_0, B_0) = \rho(x_0, M).$$

По построению

$$B(x_0, r_0) \subset B(x_i, r_i),$$
$$\gamma(B(x_i, r_i) \cap M) \leqslant \max\{\gamma(A_i), \gamma(B_i)\} \leqslant \max\{r/(i-1), r/i\} \leqslant r/(i-1)$$

при $i \in \mathbb{N}$, $i \geqslant 2$. Поэтому $\lim_{\delta \to 0+} \gamma(P_M^{\delta} x_0) = 0$. Окончательно $x_0 \cap \operatorname{out}(M) \in \mathrm{AC}(M)$ по (4.2).

Теперь докажем теорему 4.1. Рассуждая от противного, предположим, что найдутся $x \in X$, $r > 0$ и $M \in (\ell_0 P_0) \cap \mathrm{PrC}(X)$ такие, что $B(x, r) \cap M = A_0 \sqcup B_0$, где $A_0, B_0 \in \mathrm{PrC}(X)$, $\rho(x, A_0) < r$, $\rho(x, B_0) < r$, $\max\{\rho(x, A_0), \rho(x, B_0)\} < r$ и $M \cap B(x, r) = A_0 \sqcup B_0$, где $\ell(A_0, B_0) \geqslant \Delta > 0$. Положим $A_1 := \overline{A_0}$, $B_1 := \overline{B_0}$. В силу (4.7) найдется точка $x_0 \in \mathrm{AC}(M)$ такая, что $\rho(x_0, A_1) = \rho(x_0, B_1) = \rho(x_0, M)$ и $B(x_0, \rho(x_0, M)) \subset B(x, r)$. Отсюда $x_0 \in \mathrm{AC}(A_1) \cap \mathrm{AC}(B_1)$. Как следствие, $P_M x_0 \cap A_1 \neq \varnothing$, $P_M x_0 \cap B_1 \neq \varnothing$ и, значит, множество $P_M x_0 = P_{\overline{M}} x_0$ несвязно, что противоречит тому, что множество $M$ $\ell_0 P_0$-связно. Таким образом, $M$ $\ell_0 \mathring{B}$-связно. $\square$

Хорошо известно, что замкнутое множество единственности в пространстве Ефимова—Стечкина $\mathring{B}$-связно (см. [15, § 3]). Также отметим, что в симметризуемом несимметричном пространстве Ефимова—Стечкина замкнутое множество единственности $\mathring{B}$-линейно связно (см. [21, следствие 3]).

В следующем результате эти утверждения распространяются на случай не обязательно замкнутых множеств.

**Следствие 4.1.** *Проекционно замкнутое множество единственности в несимметричном симметризуемом пространстве Ефимова — Стечкина $\ell_0 \mathring{B}$-связно.*

## 5. Солнечность множеств единственности. Аппроксимативные свойства замкнутых окрестностей множеств

В этом разделе $X$ — линейное нормированное пространство.

Классическое понятие “солнце” было введено Н. В. Ефимовым и С. Б. Стечкиным в [3].

Определение 5.1. Пусть $\varnothing \neq M \subset X$. Точка $x \notin M$ называется *точкой солнечности*, если существует точка $y \in P_M x$ (называемая *точкой светимости*) такая, что $y \in P_M((1-\lambda)y + \lambda x)$ для всех $\lambda \geqslant 0$ (это геометрически означает, что из точки $y$ исходит (солнечный) луч, проходящий через $x$, для каждой точки которого $y$ является ближайшей из $M$). Если все точки из $K \subset X \setminus M$ являются точками солнечности для $M$, то множество $M$ называют *солнцем относительно множества* $K$. В случае, когда $K = X \setminus M$, говорят, что $M$ — *солнце* (в классическом понимании). Если $K = \operatorname{out}(M)$, то мы говорим, что $M$ — *солнце.* Множество $M$ есть чебышёвское множество относительно $K$, если $P_M x$ одноточечно для любой точки $x \in K$; если $K = X$, то говорят, что $M$ — *чебышёвское множество. Чебышёвским солнцем* называется чебышёвское множество, являющееся солнцем.

Первоначальное определение солнца было дано Ефимовым и Стечкиным для чебышёвских множеств. Такие множества $M$ были автоматически замкнутыми и для них $\mathrm{out}(M) = X \setminus M$. В этом случае солнечные лучи определялись через точки $\mathrm{out}(M)$. Наше определение солнца относительно метрической внешности $\mathrm{out}(\,\cdot\,)$ множества есть фактически возвращение к истокам понятия солнечности.

З а м е ч а н и е 5.1. Данное выше определение (в отличие от классического понимания солнца) не предполагает, что $M$ — множество существования (или, что эквивалентно, замкнуто).

**Теорема 5.1.** *Пусть $M$ — выпуклое проекционно замкнутое множество. Тогда его проекционная граница состоит из точек светимости.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, пусть $y \in \mathrm{pb}(M)$. По определению найдется точка $x \in \mathrm{out}(M)$ такая, что $y \in P_{\overline{M}}x$. Пусть $r := \rho(x, M) > 0$. Тогда $\mathring{B}(x, r) \cap M$. По теореме отделимости найдется гиперплоскость, разделяющая этот шар и множество $M$, а, следовательно, разделяющая открытый опорный конус $\mathring{K}(y, x) = \bigcup_{\sigma>0} \mathring{B}\big(-\sigma y + (\sigma + 1)x, (\sigma + 1)\|x - y\|\big)$ и множество $M$ (см. [2, § 5.2]). Поэтому $y$ — точка светимости (из $\overline{M}$ и, следовательно, из $M$) для $x$. $\square$

О п р е д е л е н и е 5.2. Множество $M$ называется *множеством единственности*, если любая точка $x$ имеет не более одной ближайшей в этом множестве.

Как обычно, множество называется *ограниченно предкомпактным*, если его пересечение с любым замкнутым шаром предкомпактно.

**Теорема 5.2.** *Пусть $M$ — ограниченно предкомпактное проекционно замкнутое множество единственности. Тогда*:

1) *$M$ — чебышёвское солнце* (*относительно* $\mathrm{out}(M)$);
2) *$\overline{M}$ — $B$-связное чебышёвское солнце* (*в классическом понимании*).

**Следствие 5.1.** *Пусть $X$ — конечномерное пространство, $M$ — проекционно замкнутое множество единственности. Тогда*

$$\mathrm{pb}\, M = \mathrm{bd}\, \overline{M},$$

*т. е. проекционная граница множества $M$ совпадает с границей его замыкания $\overline{M}$.*

В связи со следствием 5.1 отметим, что гильбертов кирпич $\Pi$ в бесконечномерном пространстве $\ell^2$ (такое множество, конечно, является проекционно замкнутым множеством единственности) дает пример выпуклого компакта, для которого проекционная граница не совпадает с границей множества (ср. с теоремой 5.1) — точка 0 не является точкой светимости для множества $\Pi$. Также отметим (см., например, [16, предложение 4.1]), что в конечномерном пространстве любая граничная точка солнца (в классическом понимании) является точкой светимости (и, значит, прикасаемой точкой множества).

**Следствие 5.2.** *Пусть $M$ — ограниченно предкомпактное проекционно замкнутое множество единственности в гладком пространстве $X$. Тогда*:

1) $\overline{\mathrm{pb}\, M} = \mathrm{bd}\, \overline{M}$;
2) *$\overline{M}$ выпукло*;
3) *если $X$ бесконечномерно, то $\overline{\mathrm{pb}\, M} = \mathrm{bd}\, \overline{M} (= \overline{M})$ выпукло.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 5.2. В основе доказательства лежит переработанная классическая идея В. И. Бердышева и В. Кли с использованием теоремы о неподвижной точке (см. [22; 23]). Напомним, что классическая теорема Шаудера утверждает, что в линейном нормированном пространстве непрерывное отображение выпуклого множества в предкомпактное подмножество (относительно этого множества) имеет неподвижную точку.

Пусть $M$ — ограниченно предкомпактное проекционно замкнутое множество единственности, $x \in \operatorname{out} M$. Без ограничения общности считаем $x = 0$, $\rho(x, M) = 1$. Положим для краткости $M' := B(0,2) \cap M$, $B' := B(0,2)$. Несложно проверить, что $P(B) \subset B(0,2) \cap M$, а так как $M$ ограниченно предкомпактно, то множество $M'$ непусто и компактно.

Если $P_M x \neq \varnothing$, то, поскольку $M$ — множество единственности, $P_M x$ состоит из одной точки; обозначим ее через $y$. Пусть $P_M x = \varnothing$. Так как $M'$ компактно и $P_{\overline{M}} x \subset M'$, то $P_{\overline{M}} x$ непусто. По условию $M$ проекционно замкнуто, поэтому $P_{\overline{M}} x \subset M$, откуда $\varnothing \neq P_{\overline{M}} x = P_M x = \varnothing$; противоречие. Таким образом, $P_M x = \{y\}$ (т. е. $M$ — чебышёвское множество относительно $\operatorname{out}(M)$).

Через $\ell$ обозначим луч, выходящий из $y \in P_M x$ и проходящий через $x$. Положим $0 < r < \|x - y\|$ и определим отображение $g : B(x,r) \to B(x,r)$ следующим образом:

$$g(z) = g_r(z) := x + \frac{r}{\|x - P_M z\|}(x - P_M z) \quad \text{при } z \in B(x,r) \subset \operatorname{out}(M) \tag{5.1}$$

(точка $g(z)$ лежит на пересечении окружности $S(x,r)$ с лучом, исходящим из точки $x$ в направлении от точки $P_M z$ в точку $x$). Так как $P_M(B(x,r)) \subset M'$, а множество $M'$ предкомпактно, то $P_M$ отображает шар $B(x,r)$ в свою предкомпактную часть. Отображение $g$ непрерывно, поскольку метрическая проекция $P_M$ на $M$ (напомним, что $M$ — чебышёвское множество относительно $\operatorname{out}(M)$) непрерывна (этот факт проверяется стандартно). По теореме Шаудера о неподвижной точке найдется точка $z_0 \in B$ такая, что $g(z_0) = z_0$. Из определения $g$ вытекает, что $x$ лежит на отрезке, соединяющем точку $z_0$ и ее ближайшую точку $P_M z_0$. Так как $M$ — чебышёвское множество на $\operatorname{out}(M)$, то точка $P_M z_0$ является ближайшей точкой для любой точки из отрезка $[z_0, P_M z_0]$. Но $x \in [z_0, P_M z_0]$, а ее ближайшая точка — $y = P_M x$. Таким образом, $P_M z_0 = y$. Применяя предыдущие рассуждения (проведенные нами выше для точки $x$) к точке $z_0$, мы можем дальше сдвинуться по лучу $\ell$. В итоге мы покажем, что для любой точки $w \in \ell$ точка $y$ — единственная ближайшая точка из $M$. Это доказывает утверждение 1).

Обратимся к утверждению 2). Заметим, что по доказанному выше множество $P_M x = P_{\overline{M}} x$ одноточечно для любого $x \in \operatorname{out}(M)$. Поскольку, очевидно, $\operatorname{out}(M) = \operatorname{out}(\overline{M})$, то $\overline{M}$ — ограниченно компактное чебышёвское солнце. Теперь осталось воспользоваться хорошо известным результатом В. А. Кощеева (см. [24, предложение 12; 25]), согласно которому ограниченно компактное строгое солнце (в нашем случае — множество $\overline{M}$) $B$-связно. Это завершает доказательство теоремы 5.2. □

Хорошо известно, что в линейном нормированном пространстве $P$-ацикличное ограниченно компактное множество является солнцем (Л. П. Власов [26]). (По поводу определения ацикличного множества см., например, [2, § 10.4.2] или [16, § 6].) Множество назовем $P_0$-*ацикличным*, если для любого $x \in \operatorname{out}(M)$ множество $P_M x$ ациклично. Доказательство следующего результата проходит по схеме из [2, теорема 10.13].

**Теорема 5.3.** *Пусть $M$ — ограниченно предкомпактное проекционно замкнутое $P_0$-ацикличное множество. Тогда $M$ является солнцем (относительно множества $\operatorname{out}(M)$).*

Определение 5.3. Пусть $E \subset X$. Мы говорим, что $M$ — *множество существования относительно множества* $E$, если $P_M x \neq \varnothing$ для любого $x \in E$.

Положим $\operatorname{out}_\delta(M) := \{x \in X \mid \rho(x, M) \geqslant \delta\}$, $\operatorname{out}^\circ_\delta(M)$ — внутренность множества $\operatorname{out}_\delta(M)$. Следующие две теоремы и следствия 5.3 и 5.4 восходят к хорошо известным результатам Н. В. Ефимова и С. Б. Стечкина [3] об аппроксимативных свойствах $b$-расширений множеств (см. также [2, § 10.2; 27] и [10]).

**Теорема 5.4.** *Пусть $M \subset X$, $\delta > 0$, $\operatorname{out}_\delta(M) \neq \varnothing$, $x \in X$. Тогда следующие условия равносильны*:

1) *$M$ — множество существования относительно множества* $\operatorname{out}_\delta(M)$;

2) *множество $M_r := M + B(x,r)$ — множество существования (и, значит, замкнуто) для всех $r \geqslant \delta$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности мы можем считать, что $x = 0$.

Импликация 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $y \notin M_r := M + B(0,r)$ ($y \in \operatorname{out}_\delta(M)$) и пусть $v \in P_M y \neq \varnothing$ — произвольная ближайшая точка из $M$ для $y$. Пусть $z$ — точка на отрезке $[y,v]$, находящаяся на расстоянии $r$ от $v$. Тогда $z \in M_r$. Если $z \notin P_{M_r} y$, то $\|y - z\| > \rho(y, M_r)$. Но тогда $B(v,r) \cap B(y, \rho(y,M) - r) = \varnothing$, поскольку

$$\rho(y, M_r) = \rho(y, M) - r. \tag{5.2}$$

Поэтому $z \in P_{M_r} y$, т.е. $M_r$ — множество существования.

2) $\Rightarrow$ 1). По условию $\overline{M}_r = M_r$ для всех $r \geqslant \delta$. Для любой точки $y \in \operatorname{out}_\delta M$ найдется $r_0 \geqslant \delta$ такое, что $y \in \operatorname{bd} M_{r_0} \subset M_{r_0}$ ($\operatorname{bd} N$ — граница множества $N$). Тогда $\rho(y, M) = r_0$ и $y \in B(z, r_0)$, где $z$ — некоторая точка из $M$. Поэтому $z \in P_M y$. $\square$

Утверждение ниже доказывается аналогично.

**Теорема 5.5.** *Пусть $M \subset X$, $\delta > 0$, $\operatorname{out}^\circ_\delta(M) \neq \varnothing$, $x \in X$. Тогда следующие условия равносильны:*

1) *$M$ — множество существования относительно множества $\operatorname{out}^\circ_\delta(M)$;*

2) *множество $M_r := M + B(x,r)$ — множество существования (и значит, замкнуто) для всех $r > \delta$.*

Из теоремы 5.4 вытекает

**Следствие 5.3.** *Пусть $M \subset X$, $\operatorname{out}(M) \neq \varnothing$, $x \in X$. Тогда следующие условия равносильны:*

1) *$M$ — множество существования относительно $\operatorname{out}(M)$;*

2) *множество $M_r := M + B(x,r)$ замкнуто для любого $r > 0$;*

3) *$\overline{M}$ — множество существования;*

4) *$M_r := M + B(x,r)$ — множество существования для любого $r > 0$;*

5) *проекционная граница множества $M_r := M + B(x,r)$ совпадает с границей множества $M_r$ для любого $r > 0$.*

О п р е д е л е н и е 5.4. Множество $M$ назовем *аппроксимативно предкомпактным*, если для любого $x \in X$ из любой минимизирующей последовательности из $M$ для $x$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность (к точке из $X$).

Если множество $M$ аппроксимативно предкомпактно, то $\overline{M}$ — аппроксимативно компактно (и, следовательно, является множеством существования), поэтому из следствия 5.3 получается следующий результат.

**Следствие 5.4.** *Если $M$ аппроксимативно предкомпактно (в частности, $M$ ограниченно предкомпактно) и проекционно замкнуто, то для любых $r > 0$ и $x \in X$ множество $M_r := M + B(x,r)$ является множеством существования.*

Линейное нормированное пространство $X$ лежит в классе[2] (CMLUR), если из условий $(x_n), (y_n) \subset S$ и $(x_n + y_n)/2$ сходится к некоторой точке из единичной сферы; отсюда следует, что $(x_n)$ содержит сходящуюся подпоследовательность (см. [10]). В [10, теорема 6.2] показано, в частности, что $X \in$ (CMLUR), если и только если для каждого аппроксимативно компактного множества $K$ множество $K + B(x,r)$ аппроксимативно компактно для любых (для некоторых) $x \in X$, $r > 0$.

**Следствие 5.5.** *Следующие условия эквивалентны:*

1) $X \in$ (CMLUR);

2) *для каждого аппроксимативно предкомпактного проекционно замкнутого множества $M$ множество $M + B(x,r)$ аппроксимативно компактно для любых (для некоторых) $x \in X$, $r > 0$.*

[2] CMLUR — сокращение от англ. “compactly midpoint locally uniformly rotund”.

Следующий результат расширяет теорему о строении множеств с внешним чебышёвским слоем в конечномерных пространствах (а значит, с солнечным слоем) из работы [28] на случай не обязательно конечномерных пространств и не обязательно замкнутых множеств. Также в теореме 5.6 обобщается один результат Н. В. Ефимова и С. Б. Стечкина [3] о $b$-расширениях множеств (и, в частности, солнц); см. также [2, § 10.2].

**Теорема 5.6.** *Пусть $\delta > 0$, $w \in X$.*

I. *Если $M$ — солнце относительно $\operatorname{out}^\circ_\delta(M)$, то для любого $r \geqslant \delta$ множество $M_r := M + B(w,r)$ — солнце (в классическом понимании).*

II. *Если при любом $r \geqslant \delta$ множество $M_r := M + B(w,r)$ — чебышёвское солнце (в классическом понимании), то $M$ — чебышёвское солнце относительно $\operatorname{out}^\circ_\delta(M)$.*

З а м е ч а н и е 5.2. В п. I теоремы 5.6 множество $M$ может быть несвязным даже на нормированной плоскости (например, $M$ — двоеточие на плоскости $\ell^\infty_2$).

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 5.6. Достаточно рассмотреть случай $w = 0$.

I. По теореме 5.4 множество $M_r$ является множеством существования. Пусть $x \notin M_r$. Тогда, конечно, $x \in \operatorname{out}^\circ_r(M)$. Пусть $y \in P_M x$ — точка светимости из $M$ для $x$ и пусть $y_r \in (y, x)$, $\|y - y_r\| = r$. Ясно, что $y_r \in M_r$. В силу (5.2) $y_r \in P_{M_r} x$. Окончательно, так как $y$ — точка светимости из $M$ для $x$, то $y_r$ — точка светимости из $M_r$ для $x$.

II. Пусть $M_r := M + B(0,r)$ — чебышёвское солнце (в классическом понимании) для любого $r \geqslant \delta$. Соответственно, пусть $x \in \operatorname{out}^\circ_\delta(M)$. По условию множество $P_{M_\delta} x$ одноточечно. Пусть $P_{M_\delta} x = \{x_0\}$, при этом $x_0 \in \operatorname{bd} M_\delta \subset M_\delta$, поскольку множество $M_\delta$ замкнуто. Отсюда следует, что $\rho(x_0, M) = \delta$. Тогда существует точка $y_0 \in M$ такая, что $x_0 \in S(y_0, \delta)$. Поэтому $y_0 \in P_M x_0$. Пусть $\ell$ — луч, выходящий из $x_0$ и проходящий через $x$, при этом $P_{M_\delta} z = \{y_0\}$ для любого $z \in \ell$. Луч $\ell$ является частью луча $\ell_{y_0 x_0}$, исходящего из $y_0$ и проходящего через $x_0$. Действительно, $y_0 \in P_M x$ ввиду (5.2) при $r = \delta$, и если бы $\ell_{y_0 x_0} \not\supset \ell$, то в силу строгой выпуклости $X$ мы бы имели

$$\delta + \rho(x, M_\delta) = \delta + \|x_0 - x\| = \|y_0 - x_0\| + \|x_0 - x\| > \|y_0 - x\| = \rho(x, M) = \delta + \rho(x, M_\delta);$$

противоречие. Таким образом $\ell_{y_0 x_0} \supset \ell$, поэтому ввиду строгой выпуклости $M$ — чебышёвское солнце относительно $\operatorname{out}^\circ_\delta(M)$. $\square$

Напомним, что если $M$ — множество существования, то множество $\{x \mid \rho(x, M) \leqslant r\}$, $r \geqslant 0$ ($r$-расширение множества $M$) совпадает с замкнутой окрестностью $M + B(0,r)$. Следующий результат получен Н. В. Ефимовым и С. Б. Стечкиным и независимо Л. П. Власовым (см., например, [29]): любое $r$-расширение ($r > 0$) всякого чебышёвского множества $M$ в линейном нормированном пространстве является чебышёвским, если и только если пространство строго выпукло. Отсюда и из теоремы 5.4 получаем

**Теорема 5.7.** *Пусть $\delta > 0$, $w \in X$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *$X$ строго выпукло;*

2) *$M \subset X$ — чебышёвское солнце относительно $\operatorname{out}^\circ_\delta(M)$ если и только если $M_r := M + B(w,r)$ — чебышёвское солнце (в классическом понимании) для любого $r \geqslant \delta$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно рассмотреть случай $w = 0$.

1) $\Rightarrow$ 2) По п. I теоремы 5.6, если $M$ — чебышёвское солнце относительно $\operatorname{out}^\circ_\delta(M)$, то $M_r$ — солнце, а в случае строго выпуклого пространства — чебышёвское солнце.

Для импликации 2) $\Rightarrow$ 1) достаточно рассмотреть в качестве множества $M$ одноточечное множество $\{0\}$. Тогда $M_r = B(0,r)$ — такое множество является солнцем, а чебышёвским — если и только если $X$ строго выпукло. $\square$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Braess D.** Nonlinear approximation theory. Springer Ser. Comput. Math., vol. 7. Berlin: Springer,1986. 290 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-61609-9
2. **Alimov A.R., Tsar'kov I.G.** Geometric approximation theory. Ser. Springer Monogr. Math. Springer: Cham, 2021. 508 p.
3. **Ефимов Н.В., Стечкин С.Б.** Некоторые свойства чебышёвских множеств// Докл. АН СССР. 1958. Т. 118, № 1. С. 17–19.
4. **Ефимов Н.В., Стечкин С.Б.** Чебышевские множества в банаховых пространствах // Докл. АН СССР. 1958. Т. 121, № 4. С. 582–585.
5. **Ефимов Н.В., Стечкин С.Б.** Опорные свойства множеств в банаховых пространствах и чебышевские множества // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 2. С. 254–257.
6. **Ефимов Н.В., Стечкин С.Б.** Аппроксимативная компактность и чебышёвские множества // Докл. АН СССР. 1961. Т. 140, № 3. С. 522–524.
7. **Alimov A.R., Tsar'kov I.G.** Connectedness and approximative properties of sets in asymmetric spaces // Filomat. 2024. Vol. 389, no. 9. P. 3243–3259. https://doi.org/10.2298/FIL2409243A
8. **García-Raffi L.M., Romaguera S., Sánchez Pérez E.A.** On Hausdorff asymmetric normed linear spaces // Houston J. Math. 2003. Vol. 2, no. 3. P. 717–728.
9. **Cobzaş S.** Compact bilinear operators on asymmetric normed spaces // Topology Appl. 2022. Vol 306. Art. no. 107922. 23 p. https://doi.org/10.1016/j.topol.2021.107922
10. **Алимов А.Р., Царьков И.Г.** Устойчивость аппроксимации в классических задачах геометрической теории приближений // Изв. РАН. Сер. математическая. 2025. https://doi.org/10.4213/im9660
11. **Borwein J.M., Fitzpatrick S.** Existence of nearest points in Banach spaces // Canad. J. Math. 1989. Vol. 41, no. 4. P. 702–720. https://doi.org/10.4153/CJM-1989-032-7
12. **Царьков И.Г.** Свойства дискретного не более чем счетного объединения множеств в несимметричных пространствах // Мат. сб. 2025. Т. 216, № 2. С. 128–144. https://doi.org/10.4213/sm10104
13. **Singer I.** Some remarks on approximative compactness // Rev. Roum. Math. Pures Appl. 1964. Vol. 9, no. 2. P. 167–177.
14. **Алимов А.Р., Царьков И.Г.** Аппроксимативно компактные множества в несимметрично нормированных пространствах Ефимова — Стечкина и выпуклость почти солнц // Мат. заметки. 2021. Т. 110, №. 6. С. 916–921. https://doi.org/10.4213/mzm13334
15. **Царьков И.Г.** О связности некоторых классов множеств в банаховых пространствах // Мат. заметки. 1986. Т. 40, № 2. С. 174–196.
16. **Алимов А.Р., Царьков И.Г.** Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // Успехи мат. наук. 2016. Т. 71, № 1. С. 3–84. https://doi.org/10.4213/rm9698
17. **Стечкин С.Б.** Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Rev. Roum. Math. Pures Appl. 1963. Vol. 8, no. 1. P. 5–18.
18. **Конягин С.В.** Об аппроксимативных свойствах замкнутых множеств в банаховых пространствах и характеризации сильно выпуклых пространств // Докл. АН СССР. 1980. Т. 251, № 2. С. 276–280.
19. **Конягин С.В.** Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах: дисс. … канд. физ.-мат. наук / М.: МГУ. 1982. 100 с.
20. **Karlov M.I.**, Approximative properties of compact $C^2$-manifolds in Hilbert space // East J. Appr. 1996. Vol. 2. P. 197–204.
21. **Алимов А.Р., Царьков И.Г.** $B$-полные множества и их аппроксимативные и структурные свойства // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, №. 3. С. 500–509. https://doi.org/10.33048/smzh.2022.63.302
22. **Бердышев В.И.** К вопросу о чебышёвских множествах // Докл. АН АзССР. 1966. Т. 22, № 9. С. 3–5.
23. **Klee V.L.** Convex bodies and periodic homeomorphism in Hilbert space // Trans. Amer. Math. Soc. 1953. Vol 4. P. 10–43.
24. **Кощеев В.А.** Связность и некоторые аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Мат. заметки. 1975. Т. 17, № 2. С. 193–204.
25. **Кощеев В.А.** Некоторые свойства $\delta$-проекции в линейных нормированных пространствах // Изв. вузов. Математика. 1976. No. 5. С. 36–42
26. **Власов Л.П.** Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Успехи мат. наук. 1973. Т. 28, № 6 (174). С. 3–66.
27. **Пятышев И.А.** Операции над аппроксимативно компактными множествами // Мат. заметки. 2007. Т. 82, № 5. С. 729–735.

28. **Алимов А.Р., Карлов М.И.** Множества с внешним чебышевским слоем // Мат. заметки. 2001. Т. 69, № 2. С. 303–307. https://doi.org/10.4213/mzm680
29. **Балаганский В.С.** Аппроксимативные свойства множеств в гильбертовом пространстве // Мат. заметки. 1982. Т. 31, № 5. С. 785–800.

Поступила 1.04.2025
После доработки 6.06.2025
Принята к публикации 9.06.2025

Алимов Алексей Ростиславович
д-р. физ.-мат. наук, ведущий научн. сотрудник
механико-математический факультет
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
г. Москва;
Санкт-Петербургский государственный университет
г. Санкт-Петербург
e-mail: alexey.alimov-msu@yandex.ru

Царьков Игорь Германович
д-р физ.-мат. наук, профессор
механико-математический факультет
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова;
Московский Центр фундаментальной и прикладной математики
г. Москва
e-mail: tsar@mech.math.msu.su

## REFERENCES

1. Braess D. *Nonlinear approximation theory.* Springer Ser. Comput. Math., vol. 7. Berlin, Heidelberg, Springer, 1986, 290 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-61609-9
2. Alimov A.R., Tsar'kov I.G. *Geometric approximation theory.* Springer Monogr. Math. Ser. Cham, Springer, 2021, 508 p. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90951-2
3. Efimov N.V., Stechkin S.B. Some properties of Chebyshev sets. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1958, vol. 118, no. 1, pp. 17–19 (in Russian).
4. Efimov N.V., Stechkin S.B. Chebyshev sets in Banach spaces. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1958, vol. 121, no. 4, pp. 582–585 (in Russian).
5. Efimov N.V., Stechkin S.B. Support properties of sets in Banach spaces and Chebyshev sets. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1959, vol. 127, no. 2, pp. 254–257 (in Russian).
6. Efimov N.V., Stechkin S.B. Approximate compactness and Chebyshev sets. *Soviet Math. Dokl.*, 1961, vol. 2, pp. 1226–1228 (in Russian).
7. Alimov A.R., Tsar'kov I.G. Connectedness and approximative properties of sets in asymmetric spaces. *Filomat*, 2024, vol. 38, no. 9, pp. 3243–3259. https://doi.org/10.2298/FIL2409243A
8. García-Raffi L.M., Romaguera S., Sánchez Pérez E.A. On Hausdorff asymmetric normed linear spaces. *Houston J. Math.*, 2003, vol. 2, no. 3, pp. 717–728.
9. Cobzaş S. Compact bilinear operators on asymmetric normed spaces. *Topology Appl.*, 2022, vol. 306, art. no. 107922, 23 p. https://doi.org/10.1016/j.topol.2021.107922
10. Alimov A.R., Tsar'kov I.G. Stability of best approximation in classical problems of geometric approximation theory. *Izv. RAN. Ser. Mat.*, 2025 (in Russian). https://doi.org/10.4213/im9660
11. Borwein J.M., Fitzpatrick S. Existence of nearest points in Banach spaces. *Canad. J. Math.*, 1989, vol. 41, no. 4, pp. 702–720. https://doi.org/10.4153/CJM-1989-032-7
12. Tsar'kov I.G. Properties of at most countable unions of pairwise disjoint sets in asymmetric spaces. *Sb. Math.*, 2025, vol. 216, no. 2, pp. 257–269. https://doi.org/10.4213/sm10104e
13. Singer I. Some remarks on approximative compactness. *Rev. Roum. Math. Pures Appl.*, 1964, vol. 9, no. 2, pp. 167–177.

14. Alimov A.R., Tsar'kov I.G. Approximatively compact sets in asymmetric Efimov — Stechkin spaces and convexity of almost suns. *Math. Notes*, 2021, vol. 110, no. 6, pp. 947–951. https://doi.org/10.1134/S0001434621110316
15. Tsar'kov I.G. Relations between certain classes of sets in Banach spaces. *Math. Notes*, 1986, vol. 40, no. 2, pp. 597–610. https://doi.org/10.1007/BF01159114
16. Alimov A.R., Tsar'kov I.G. Connectedness and solarity in problems of best and near-best approximation. *Russian Math. Surv.*, 2016, vol. 71, no. 1, pp. 1–77. https://doi.org/10.1070/RM9698
17. Stechkin S.B. Approximative properties of sets in normed linear spaces. *Rev. Math. Pures Appl.*, 1963, vol. 8, no. 1, pp. 5–18 (in Russian).
18. Konyagin S.V. On approximation properties of closed sets in Banach spaces and the characterization of strongly convex spaces. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1980, vol 251, no. 2, pp. 276–280 (in Russian).
19. Konyagin S.V. *Approximative properties of sets in normed linear spaces.* Dno. Cand. Phys.-Math. Sci., Moscow, MGU, 1982, 100 p. (in Russian).
20. Karlov M.I. Approximative properties of compact $C^2$-manifolds in Hilbert space. *East J. Approx.*, 1996, vol. 2, pp. 197–204.
21. Alimov A.R., Tsar'kov I.G. $\mathring{B}$-complete sets: approximative and structural properties. *Sib. Math. J.*, 2022, vol. 63, pp. 412–420. https://doi.org/10.1134/S0037446622030028
22. Berdyshev V.I. On Chebyshev sets. *Dokl. Akad. Nauk AzSSR*, 1966, vol. 22, no. 9, pp. 3–5 (in Russian).
23. Klee V.L. Convex bodies and periodic homeomorphism in Hilbert space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1953, vol. 4, pp. 10–43.
24. Koshcheev V.A. The connectivity and approximative properties of sets in linear normed spaces. *Math. Notes*, 1975, vol. 17, no. 2, pp. 114–119. https://doi.org/10.1007/BF01161866
25. Koshcheev V.A. Some properties of the $\delta$-projection in normed linear spaces. *Sov. Math.* (*Iz. VUZ*), 1976, vol. 20, no. 5, pp. 26–30.
26. Vlasov L.P. Approximative properties of sets in normed linear spaces. *Rus. Math. Surv.*, 1973, vol. 28, no. 6, pp. 1–66. https://doi.org/10.1070/RM1973v028n06ABEH001624
27. Pyatyshev I.A. Operations on approximatively compact sets. *Math. Notes*, 2007, vol. 82, no. 5, pp. 653–659. https://doi.org/10.1134/S0001434607110089
28. Alimov A.R., Karlov M.I. Sets with external Chebyshev layer. *Math. Notes*, 2001, vol. 69, no. 2, pp. 269–273. https://doi.org/10.1023/A:1002836705675
29. Balaganskii V.S. Approximative properties of sets in Hilbert space. *Math. Notes*, 1982, vol. 31, no. 5, pp. 397–404. https://doi.org/10.1007/BF01145720

Received April 1, 2025
Revised June 6, 2025
Accepted June 9, 2025

**Funding Agency**: The paper was published with the financial support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation as part of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under the agreement no. 075-15-2025-013.

*Alexey R. Alimov,* Dr. Phys.-Math. Sci., Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow, 119899 Russia; St. Petersburg State University, St. Petersburg, 199034 Russia, e-mail: alexey.alimov-msu@yandex.ru .

*Igor' G. Tsar'kov,* Prof., Dr. Phys.-Math. Sci., Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow, 119899 Russia; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, 119899 Russia, e-mail: tsar@mech.math.msu.su .

Cite this article as: A. R. Alimov, I. G. Tsar'kov. Projection closed sets and Efimov–Stechkin spaces. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 3, pp. 20–35.