ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 31 № 3 2025

УДК 515.122.55+515.122.4

О СВОЙСТВАХ ТИПА ПОЛНОТЫ ПРОСТРАНСТВ ПЕРВОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО КЛАССА ЛЕБЕГА ОТОБРАЖЕНИЙ

А. В. Осипов

В работе исследуются свойство Бэра и свойство Шоке для пространства $K_1(X,Y)$ — первого функционального класса Лебега отображений, где X — тихоновское пространство, а $Y \in \{\mathbb{R},[0,1],\{0,1\}\}$. Доказано, что пространство $B_1(X,[0,1])$ — $[0,1]$-значных отображений Бэра первого класса является пространством Шоке (бэровское) тогда и только тогда, когда пространство $K_1(X,\{0,1\})$ является пространством Шоке (бэровское). Полученные исследования позволяют достаточно просто решить вопрос В. Ткачука о совпадении свойств псевдокомпактности и псевдополноты в пространстве $C_p(X,[0,1])$.

Ключевые слова: свойство Бэра, пространство Шоке, бэровские функции, отображения функционального класса Лебега, функциональное пространство.

A. V. Osipov. On the properties of completeness type of spaces of first functional class Lebesgue mappings.

In this paper we study the Baire property and the Choquet property for the space $K_1(X,Y)$ — first functional class Lebesgue mappings, where X is a Tychonoff space and $Y \in \{\mathbb{R},[0,1],\{0,1\}\}$. It is proved that the space $B_1(X,[0,1])$ — $[0,1]$-valued Baire mappings of the first class is a Choquet (Baire) space if and only if the space $K_1(X,\{0,1\})$ is a Choquet (Baire) space. The obtained studies allow us to quite simply solve V. Tkachuk's question about the coincidence of pseudocompactness and pseudocompleteness of the space $C_p(X,[0,1])$.

Keywords: Baire property, Choquet space, Baire functions, Lebesgue functional class mappings, function space.

MSC: 54C35, 54E52; Secondary 54C30, 54H05

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-3-200-214

К 75-летнему юбилею профессора Сергея Порфирьевича Гулько

1. Введение

Одна из наиболее эффективно применяемых теорем топологии —это теорема Бэра о категории. С помощью теоремы Бэра о категории доказывается, например, что каждый n-мерный метризуемый компакт можно гомеоморфно вложить в $(2n+1)$-мерное евклидово пространство (теорема Нёбелинга — Понтрягина [1]), что существует непрерывная функция, определенная на отрезке, ни в одной точке не дифференцируемая, что даже таких непрерывных функций на отрезке в определенном смысле большинство и так далее [2]. Несомненно, принципы, связанные с полнотой пространств отображений, относятся к числу важнейших положений математики.

Напомним, что пространство — *первой категории* (или *первой категории Бэра*), если оно может быть представлено как счетное объединение нигде не плотных замкнутых множеств. Если пространство не относится к первой категории, то говорят, что оно *второй категории.*

Топологическое пространство X называют *бэровским* (или *имеет свойство Бэра*), если на X верна теорема Бэра о категории: *пересечение любой последовательности открытых всюду плотных подмножеств X всюду плотно в X.* Очевидно, что если X является бэровским, то X — второй категории. Обратная импликация, вообще говоря, неверна. Однако она верна для любого однородного топологического пространства X (см. [3, теорему 2.3]).

Вопрос характеризации свойства Бэра для некоторого функционального пространства может быть достаточно нетривиальным. Так, для пространства $C_p(X,\mathbb{R})$ — множества $C(X,\mathbb{R})$

всех непрерывных вещественнозначных функций, определенных на тихоновском пространстве X, которое наделено топологией поточечной сходимости, этот вопрос был долгое время открыт и позже полностью решен независимо Пыткеевым [4], Ткачуком [5] и ван Доу [6].

Теорема 1.1 (Пыткеев — Ткачук — ван Доу). *Пространство $C_p(X,\mathbb{R})$ — бэровское тогда и только тогда, когда каждая дизъюнкная последовательность непустых конечных подмножеств пространства X имеет сильно дискретную подпоследовательность.*

Естественное обобщение пространства $C_p(X,\mathbb{R})$ — это пространство $B_\alpha(X,\mathbb{R})$ всех бэровских функций класса α (где α — счетный ординал), определенных на тихоновском пространстве X, наделенном топологией p поточечной сходимости.

К числу интересных проблем для пространств бэровских функций относится проблема Банаха — Габрильяна в [7, Problem 1.1]): *Пусть α — счетный ординал. Охарактеризовать топологические пространства X и Y, для которых функциональное пространство $B_\alpha(X,Y)$ является бэровским.*

Заметим, что в работе [7, Corollary 4.2] было доказано, что $B_\alpha(X,\mathbb{R})$ — бэровское для любого пространства X и каждого счетного ординала $\alpha \geq 2$.

Таким образом, были получены характеризации свойства Бэра для пространства $C_p(X,\mathbb{R})$ и для $B_\alpha(X,\mathbb{R})$, где $\alpha > 1$. Вопрос для $\alpha = 1$ оказался достаточно сложным и только спустя некоторое время был полностью решен в [8, Theorem 3.7]. Таким образом, проблема Банаха — Габрильяна решена для всех вещественнозначных бэровских функций.

Для общего случая, т.е. когда рассматривается пространство $B_\alpha(X,Y)$ в плане всевозможных топологических пространств Y, некоторые свойства пространства $B_\alpha(X,Y)$ могут значительно отличаться от свойств $B_\alpha(X,\mathbb{R})$. Например, если X связно и $Y=\{0,1\}$, то пространство $B_\alpha(X,Y)$ достаточно тривиально (состоит всего из двух точек); если $Y=[0,1]$, то пространство $B_\alpha(X,Y)$ (в отличие от $B_\alpha(X,\mathbb{R})$) не является топологически однородным и так далее.

В этой работе мы исследуем свойства Бэра и Шоке для пространства $K_1(X,Y)$ — первого функционального класса Лебега отображений, где X — тихоновское пространство, а $Y \in \{\mathbb{R},[0,1],\{0,1\}\}$. Это достаточно естественно в свете проблемы Банаха — Габрильяна, так как $B_1(X,Y) \subseteq K_1(X,Y)$ для любого тихоновского пространства X и совершенно нормального пространства Y. В частности, $K_1(X,\mathbb{R}) = B_1(X,\mathbb{R})$, $K_1(X,[0,1]) = B_1(X,[0,1])$ для любого тихоновского пространства X и $B_1(X,\{0,1\}) = K_1(X,\{0,1\})$ для любого нульмерного пространства X.

2. Основные определения и обозначения

Напомним, что нуль-множеством называют подмножество A пространства X, если $A = f^{-1}(0)$ для некоторой $f \in C(X,\mathbb{R})$. Подмножество A пространства X называют функционально открытым (или ко-нуль) множеством, если $X \setminus A$ — нуль-множество. Подмножество B пространства X называют *Zer_σ-множеством*, если B представимо в виде счетного объединения нуль-множеств. Дополнение до Zer_σ-множества называют *Coz_δ-множеством*. Ясно, что любое Coz_δ-множество есть пересечение счетного числа функционально открытых множеств.

Для топологических пространств X и Y мы обозначаем через $C_p(X,Y)$ множество $C(X,Y)$ всех непрерывных функций из X в Y, наделенное топологией поточечной сходимости. Функцию $f\colon X \to Y$ из топологического пространства X в топологическое пространство Y называют *функцией Бэра 1-го класса* (или *функцией первого бэровского класса*), если f является поточечным пределом последовательности $\{f_n\colon n \in \mathbb{N}\} \subset C(X,Y)$. Пусть $B_1(X,Y)$ обозначает множество всех функций Бэра 1-го класса на топологическом пространстве X в топологическое пространство Y, наделенное топологией поточечной сходимости.

Для каждого счетного ординала α пусть $B_\alpha(X,Y)$ — множество всех функций $f\colon X \to Y$, которые являются поточечным пределом последовательности $\{f_n\colon n \in \mathbb{N}\} \subset C_p(X,Y) \cup$

$\bigcup\limits_{\beta<\alpha} B_\beta(X,Y)$. Для $\alpha=\omega_1$ пусть $B(X,Y)=B_{\omega_1}(X,Y)=\bigcup\limits_{\beta<\omega_1} B_\beta(X,Y)$ — пространство всех бэровских функций на топологическом пространстве X в топологическое пространство Y, наделенное топологией поточечной сходимости.

Через $B_1^{st}(X,Y)$ мы будем обозначать множество стабилизирующих бэровских отображений первого класса, т. е. $f\in B_1^{st}(X,Y)$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{f_n\colon n\in\mathbb{N}\}\subset C(X,Y)$ такая, что для каждого $x\in X$ существует $n'\in\mathbb{N}$, с учетом которого $f(x)=f_n(x)$ для всех $n>n'$.

Для топологических пространств X и Y мы обозначаем через $K_1(X,Y)$ множество всех функций из X в Y таких, что для любого функционально открытого множества $U\subseteq Y$ прообраз $f^{-1}(U)$ является Zer_σ-множеством пространства X. Функцию $f\in K_1(X,Y)$ называют функцией *первого функционального класса Лебега*. Заметим, что $B_1(X,Y)\subseteq K_1(X,Y)$ для произвольного X и совершенно нормального пространства Y.

Выполняется следующая характеристика: $f\in B_1(X,\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда для любого открытого множества $U\subseteq\mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}(U)$ является Zer_σ-множеством пространства X (см. [9, Exercise 3.A.1]). Таким образом, непосредственно получаем, что $B_1(X,\mathbb{R})=K_1(X,\mathbb{R})$.

Отметим, что для любых топологических пространств X и совершенно нормального пространства Y справедливо $C(X,Y)\subseteq B_1^{st}(X,Y)\subseteq B_1(X,Y)\subseteq K_1(X,Y)$.

Семейство $\{A_\alpha\colon \alpha\in\kappa\}$ подмножеств пространства X называют *точечно-конечным*, если для каждого $x\in X$ множество $\{\alpha\in\kappa\colon x\in A_\alpha\}$ конечно.

Семейство $\{A_\alpha\colon \alpha\in\kappa\}$ подмножеств пространства X называют *сильно точечно-конечным*, если для каждого $\alpha\in\kappa$ существует открытое множество U_α пространства X такое, что $A_\alpha\subset U_\alpha$ и семейство $\{U_\alpha\colon \alpha\in\kappa\}$ точечно-конечно.

Пространство X *обладает свойством* (κ), если каждая попарно дизъюнктная последовательнасть конечных подмножеств пространства X имеет сильно точечно-конечную подпоследовательность. Заметим, что свойство (κ) пространства характеризуется свойством пространства $C_p(X,\mathbb{R})$. А именно, X обладает свойством (κ) тогда и только тогда, когда $C_p(X,\mathbb{R})$ обладает свойством κ-Фреше-Урысона [10].

Множество $A\subseteq X$ называют *сильно Coz_δ-дизъюнктным* (*сильно G_δ-дизъюнктным*), если существует попарно дизъюнктный набор $\{F_a\colon F_a$ — Coz_δ-окрестность (G_δ-окрестность) точки a, $a\in A\}$ такой, что $\{F_a\colon a\in A\}$ является *полной Coz_δ-аддитивной системой* (*полной G_δ-аддитивной системой*), т. е. $\bigcup\limits_{b\in B} F_b\in Coz_\delta$ (G_δ) для каждого $B\subseteq A$.

Дизъюнктная последовательность $\{\Delta_n\colon n\in\mathbb{N}\}$ конечных множеств называется *сильно Coz_δ-дизъюнктной*, если множество $\bigcup\{\Delta_n\colon n\in\mathbb{N}\}$ сильно Coz_δ-дизъюнктное (см. [8, Definition 3.1]).

Дизъюнктная последовательность $\{\Delta_n\colon n\in\mathbb{N}\}$ конечных множеств называется *сильно G_δ-дизъюнктной*, если множество $\bigcup\{\Delta_n\colon n\in\mathbb{N}\}$ является сильно G_δ-дизъюнктным.

Семейство $\mathcal{G}$ подмножеств пространства X называется *дискретным*, если каждая точка пространства X имеет окрестность, которая пересекает лишь конечное число элементов из семейства $\mathcal{G}$, и $\mathcal{G}$ называется *сильно дискретным*, если для каждого $G\in\mathcal{G}$ существует открытое множесто $U_G\supseteq G$ такое, что $\{U_G\colon G\in\mathcal{G}\}$ — дискретное семейство.

Пространство X обладает Δ_1-*свойством* [11], если для любой дизъюнктной последовательности $\{A_n\colon n\in\mathbb{N}\}$ счетных подмножеств X существует точечно-конечное семейство $\{U_n\colon n\in\mathbb{N}\}$ открытых подмножеств X такое, что $A_n\subset U_n$ для каждого $n\in\mathbb{N}$. Пространства с Δ_1-свойством называют Δ_1-*пространствами*.

В этой работе мы рассматриваем пространства отображений, определенных на бесконечном *тихоновском* пространстве X. Это формальное ограничение (как для пространства непрерывных функций, так и для бэровских функций), поскольку для любого топологического пространства X мы можем применить функтор Тихонова (тихоновский функтор), получив тихоновское пространство X_τ с тем же запасом непрерывных и, следовательно, бэровских функций. Отметим, что, например, для множества борелевских функций это не так.

3. Основные результаты

3.1. Свойство Бэра для $B_1(X,\mathbb{R})$, $B_1^{st}(X,\mathbb{R})$ и $B_1^{st}(X,[0,1])$

В работе [8] была доказана

Теорема 3.1 [8, теорема 3.7]. *Для любого пространства X следующие условия эквивалентны.*

1. $B_1(X,\mathbb{R})$ *является бэровским.*
2. *Каждая дизъюнктная последовательность непустых конечных подмножеств пространства X имеет сильно Coz_δ-дизъюнктную подпоследовательность.*

Следующая теорема значительно расширяет этот результат и показывает, что бэровость пространств $B_1(X,\mathbb{R})$ и $B_1^{st}(X,\mathbb{R})$ может быть охарактеризована через более привычное понятие — через G_δ-множества пространства X.

Теорема 3.2. *Для любого пространства X, следующие условия эквивалентны.*

1. $B_1(X,\mathbb{R})$ *— бэровское пространство.*
2. $B_1^{st}(X,\mathbb{R})$ *— бэровское пространство.*
3. $B_1^{st}(X,[0,1])$ *— бэровское пространство.*
4. X *обладает свойством* (κ).
5. *Каждая дизъюнктная последовательность непустых конечных подмножеств пространства X имеет сильно G_δ-дизъюнктную подпоследовательность.*

Доказательство. (1) $\Leftrightarrow$ (2). Эквивалентность установлена в работе в [12, Theorem 1.4].

(2) $\Rightarrow$ (3). Так как пространство $B_1^{st}(X,\mathbb{R})$ гомеоморфно плотному подпространству $B_1^{st}(X,(0,1))$ пространства $B_1^{st}(X,[0,1])$, то получаем, что если пространство $B_1^{st}(X,\mathbb{R})$ бэровское, то и пространство $B_1^{st}(X,[0,1])$ является бэровским.

(3) $\Rightarrow$ (4). Пусть $\Delta = \{\Delta_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ — дизъюнктная последовательность конечных подмножеств $\Delta_n \subset X$. Пусть $\{(a_k,b_k)\colon k \in \mathbb{N}\}$ — дизъюнктная система интервалов такая, что $\dfrac{1}{k} \in (a_k,b_k)$, $a_k > 0$, $b_k < 1$ для каждого натурального $k > 1$.

Для каждого натурального $k > 1$ определим множество

$$D_k = \left\{f \in B_1^{st}(X,[0,1])\colon \text{ существует } \Delta_n \in \Delta \text{ такое, что } f(\Delta_n) \subset (a_k,b_k)\right\}.$$

Ясно, что D_k — открытое всюду плотное подмножество $B_1^{st}(X,[0,1])$ для каждого $k > 1$. Пусть $D_1 = B_1^{st}(X,[0,1])$. В силу бэровости пространства $B_1^{st}(X,[0,1])$ существует $h \in \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} D_k$. Тем самым существует подпоследовательность $\{\Delta_{n_k}\colon k \in \mathbb{N}\}$ последовательности Δ такая, что $h(\Delta_{n_k}) \subset (a_k,b_k)$ для каждого $k \in \mathbb{N}$. По теореме 3.2 из работы [13] существует система $\{F_i\colon i \in \mathbb{N}\}$ нуль-множеств пространства X такая, что $F_i \subset F_{i+1}$, $X = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} F_i$ и $h \restriction F_i$ непрерывна на F_i для каждого $i \in \mathbb{N}$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует F_{i_k} такое, что $\Delta_{n_k} \subseteq F_{i_k}$.

Рассмотрим семейство множеств $\{W_k\colon k \in \mathbb{N}\}$, где $W_k = (X \setminus F_{i_k}) \cup (h^{-1}((0,b_k)))$ для каждого $k \in \mathbb{N}$. Так как $h \restriction F_{i_k}$ непрерывна на F_{i_k} множество $h^{-1}((0,b_k)) \cap F_{i_k}$ — открытое подмножество в пространстве F_{i_k}. Тогда существует открытое множество U_k в пространстве X такое, что $U_k \cap F_{i_k} = h^{-1}((0,b_k)) \cap F_{i_k}$. Но тогда множество W_k можно представить как $W_k = (X \setminus F_{i_k}) \cup U_k$. Отсюда следует, что W_k — открытое множество в пространстве X и $\Delta_{n_k} \subset W_k$ для каждого $k \in \mathbb{N}$. Так как $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} (0,b_k) = \varnothing$ и $X = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} F_{i_k}$, получаем, что семейство $\{W_k\colon k \in \mathbb{N}\}$ точечно-конечно.

(4) $\Rightarrow$ (5). Пусть $\{F_i\colon i \in \mathbb{N}\}$ — дизъюнктная последовательность непустых подмножеств пространства X. Так как X обладает свойством (κ), последовательность $\{F_i\colon i \in \mathbb{N}\}$ имеет

сильно точечно-конечную подпоследовательность $\{F_{i_k}\colon k\in\mathbb{N}\}$, т. е. для каждого $k\in\mathbb{N}$ существует открытое множество U_k такое, что $F_{i_k}\subset U_k$ и семейство $\{U_k\colon k\in\mathbb{N}\}$ точечно-конечно.

Поскольку пространство X является тихоновским, для каждой пары $x,y\in\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}F_{i_k}$ $(x\neq y)$ существует непрерывная функция $f_{xy}\colon X\to[0,1]$ такая, что $f_{xy}(x)=0$ и $f_{xy}(y)=1$. Для каждого $k\in\mathbb{N}$ существует непрерывная функция $f_k\colon X\to[0,1]$ такая, что $f_k(F_{i_k})\subseteq\{0\}$ и $f_k(X\setminus U_k)\subseteq\{1\}$. Пусть $S=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}F_{i_k}$.

Для $k\in\mathbb{N}$ и $x\in F_{i_k}$ обозначим

$$S_x=\Big(\bigcap\{f_{yx}^{-1}(1)\colon y\in S\setminus\{x\}\}\Big)\cap\Big(\bigcap\{f_{xy}^{-1}(0)\colon y\in S\setminus\{x\}\}\Big)\cap f_k^{-1}(0)$$

и $A_k=\bigcup\{S_x\colon x\in F_{i_k}\}$.

Так как F_{i_k} конечно, то A_k — нуль-множество и $F_{i_k}\subseteq A_k\subseteq U_k$ для каждого $k\in\mathbb{N}$.

Для каждого $k\in\mathbb{N}$ мы рассмотрим семейство $\{W_{k,j}\colon j\in\mathbb{N}\}$ функционально-открытых множеств пространства X такое, что $A_k=\bigcap\{W_{k,j}\colon j\in\mathbb{N}\}$, $W_{k,j+1}\subset W_{k,j}$ и $W_{k,1}\subset U_k$ для любого $j,k\in\mathbb{N}$.

Рассмотрим множество $A=\bigcap\limits_{j\in\mathbb{N}}\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}W_{k,j}$. Заметим, что $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}A_k\subseteq A$.

Проверим, что $A\subseteq\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}A_k$. Пусть $x\notin\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}A_k$. Тогда множество $\{k\colon x\in U_k\}$ конечно. Пусть $\{k_1,\ldots,k_m\}=\{k\colon x\in U_k\}$. Для каждого $s\in\{1,\ldots,m\}$ существует $j_s\in\mathbb{N}$ такое, что $x\notin W_{k_s,j_s}$. Обозначим $l=\max\{j_s\colon s\in\{1,\ldots,m\}\}$. Тогда $x\notin W_{k,l}$ для каждого $k\in\mathbb{N}$ и, следовательно, $x\notin A$. Тем самым $A\subseteq\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}A_k$. Таким образом, $A=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}A_k$ — Coz_δ-множество в пространстве X.

Пусть $C\subset S$. Так как $\bigcup\limits_{x\in S\setminus C}S_x$ есть Zer_σ-множество, то $\bigcup\limits_{x\in C}S_x=A\setminus(\bigcup\limits_{x\in S\setminus C}S_x)$ является Coz_δ-множеством пространства X.

Отсюда следует, что семейство $\{S_x\colon x\in\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}F_{i_k}\}$ нуль-множеств пространства X является дизъюнктным и вполне Coz_δ-аддитивным.

(5) $\Rightarrow$ (1). Применяя теорему 3.1, достаточно доказать, что любое счетное сильно G_δ-дизъюнктное множество является сильно Coz_δ-дизъюнктным.

Пусть множество $A=\{a_i\colon i\in\mathbb{N}\}$ — сильно G_δ-дизъюнктное множество, т. е. существует дизъюнктное семейство $\{U_a\colon a\in A\}$ G_δ-окрестностей точек $a\in A$ такое, что для каждого $B\subset A$ множество $\bigcup\{U_a\colon a\in B\}$ является G_δ-множеством в пространстве X.

Для каждого $a\in A$ рассмотрим нуль-множество F_a такое, что $a\in F_a\subseteq U_a$. Проверим, что $\bigcup\{F_a\colon a\in B\}$ есть G_δ множество в X для каждого $B\subseteq A$. Фиксируем $B\subset A$.

Пусть $b\in B$. Так как F_b является G_δ-множеством и $\bigcup\{U_s\colon s\in B\setminus\{b\}\}$ — G_δ-множество в пространстве X, то $\bigcup\{U_s\colon s\in B\setminus\{b\}\}\cup F_b$ — G_δ-множество в X и, следовательно, множество $S_b=X\setminus(\bigcup\{U_s\colon s\in B\setminus\{b\}\}\cup F_b)$ является F_σ-множеством в X. Отсюда следует, что множество $S=\bigcup\{S_b\colon b\in B\}$ является F_σ и $\bigcup\{F_a\colon a\in B\}=X\setminus S$ является G_δ.

Пусть $\bigcup\{F_a\colon a\in A\}=\bigcap\{W_i\colon i\in\mathbb{N}\}$, где W_i — открытые множества в X. Поскольку X — тихоновское пространство, для каждой точки $a\in A$ и $i\in\mathbb{N}$ существует функционально открытое множество $V_{a,i}$ такое, что $a\in V_{a,i}\subseteq W_i$. Тогда функционально открытое множество $V_i=\bigcup\{V_{a,i}\colon a\in A\}$ такое, что $A\subseteq V_i\subset W_i$. Пусть $V=\bigcap\{V_i\colon i\in\mathbb{N}\}$.

Подчеркнем, что $A\subseteq V\subseteq\bigcup\{F_a\colon a\in A\}$. Пусть $Q_a=V\cap F_a$ для каждого $a\in A$. Заметим, что $\{Q_a\colon a\in A\}$ является полной Coz_δ-аддитивной системой. Действительно, пусть $B\subset A$. Тогда $\bigcup\{Q_a\colon a\in B\}=V\setminus\bigcup\{F_a\colon a\in A\setminus B\}$ есть Coz_δ-множество в X.

Таким образом, A является сильно Coz_δ-дизъюнктным множеством.

3.2. Свойство Бэра для $B_1(X,[0,1])$ и $K_1(X,\mathbf{2})$

Как мы уже отмечали во введении, вторая категория и свойство Бэра совпадают в классе однородных топологических пространств, в частности в классе топологических групп, например, таких, как $B_1(X,\mathbb{R})$ или $K_1(X,\mathbf{2})$. Однако пространство $B_1(X,[0,1])$ не является однородным и тем самым мы не можем ссылаться на утверждения для однородных пространств. Впрочем, для пространства $B_1(X,[0,1])$ бэровость и вторая категория также совпадают. Для обоснования этого факта мы воспользуемся идеей Е. А. Резниченко о плотности орбиты некоторой точки, реализуемой для пространства $C_p(X,[0,1])$ в [14, утверждения 3.1, 3.2].

Для любого топологического пространства X пусть $G = \mathrm{Aut}(X)$ — группа автогомеоморфизмов X и $Gx = \{g(x) : g \in G\}$ — множество орбит для каждого $x \in X$.

Предложение 3.1 [14, Propositions 3.1]. *Пусть X — второй категории и $\overline{Gx} = X$ для некоторого $x \in X$. Тогда X — пространство со свойством Бэра.*

Предложение 3.2. *Пусть $X = B_1(Y,[0,1])$, $f \equiv \dfrac{1}{2}$, $G = \mathrm{Aut}(X)$. Тогда $\overline{Gf} = X$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\widetilde{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Ясно, что $\widetilde{\mathbb{R}}$ гомеоморфно $[0,1]$. Для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$ мы определяем $f_\alpha : \widetilde{\mathbb{R}} \to \widetilde{\mathbb{R}}$ следующим образом:

$$f_\alpha(x) := \begin{cases} +\infty & \text{для } x = +\infty, \\ x + \alpha & \text{для } \ x \in \mathbb{R}, \\ -\infty & \text{для } x = -\infty. \end{cases}$$

Заметим, что f_α — непрерывная функция.

Для каждого $g \in B_1(Y,\mathbb{R})$ мы определяем $\varphi_g \colon X \to X$ $(X = B_1(Y,\widetilde{\mathbb{R}}))$ как $\varphi_g(h)(x) = f_{g(x)}(h(x))$. Пусть $G^* = \{\varphi_g \colon g \in B_1(Y,\mathbb{R})\} \subset G$. Тогда $G^* f = B_1(Y,\mathbb{R})$ — всюду плотное подмножество пространства $B_1(Y,\widetilde{\mathbb{R}})$).

Итак, исходя из результатов предложений 3.1 и 3.2, приходим к выводу, что если $B_1(X,[0,1])$ — пространство второй категории, то оно бэровское.

Множества A и B будем называть *CZ-отделимыми*, если существует CZ-множество C в пространстве X такое, что $A \subseteq C$ и $B \subseteq X \setminus C$. Другими словами, множества A и B CZ-отделимы, если существует $f \in K_1(X,\mathbf{2})$ такая, что $f(A) = \{0\}$ и $f(B) = \{1\}$.

В работе [15, теорема 1] была получена следующая характеристика свойства Бэра для пространства $K_1(X,\mathbf{2})$.

Теорема 3.3. *Пусть X — топологическое пространство. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. *$K_1(X,\mathbf{2})$ — бэровское пространство.*

2. *Всякая дизъюнктная последовательность конечных подмножеств $\Delta_n \subset X$, $\Delta_n = A_n \cup B_n$, $A_n \cap B_n = \varnothing$, $n \in \mathbb{N}$, содержит подпоследовательность $\{\Delta_{n_k} \colon k \in \mathbb{N}\}$ такую, что множества $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_{n_k}$ и $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_{n_k}$ CZ-отделимы.*

О п р е д е л е н и е 1. Пространство X будем называть *обладающим свойством* (κ_2), если для всякой дизъюнктной последовательности конечных подмножеств $\Delta_n \subset X$, $\Delta_n = A_n \cup B_n$, $A_n \cap B_n = \varnothing$, $n \in \mathbb{N}$ существует подпоследовательность $\{\Delta_{n_k} \colon k \in \mathbb{N}\}$ такая, что множества $A' = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_{n_k}$ и $B' = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_{n_k}$ G_δ-отделены, т. е. существуют G_δ-множества U и V такие, что $U \cap V = \varnothing$, $A' \subset U$ и $B' \subset V$.

Покажем, что бэровость пространства $B_1(X,[0,1])$ эквивалентна бэровости пространства $K_1(X,\mathbf{2})$, а также получим характеристику свойства Бэра для этих пространств без понятия Coz_δ-множества.

Теорема 3.4. *Пусть X — топологическое пространство. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. *$B_1(X,[0,1])$ — бэровское пространство.*
2. *$K_1(X,\mathbf{2})$ — бэровское пространство.*
3. *X обладает свойством (κ_2).*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\{\Delta_n\colon n\in\mathbb{N}\}$ — дизъюнктная последовательность конечных подмножеств $\Delta_n\subset X$, $\Delta_n=A_n\cup B_n$, $A_n\cap B_n=\varnothing$, $n\in\mathbb{N}$. Для каждого $m\in\mathbb{N}$ рассмотрим множество

$$F_m=\Big\{f\in B_1(X,[0,1])\colon \sum_{x\in A_n}f(x)-\sum_{x\in B_n}f(x)\le |A_n|-\frac{1}{3}\ \text{для всех}\ n\ge m\Big\}.$$

Заметим, что множество F_m (для каждого $m\in\mathbb{N}$) является замкнутым и нигде не плотным в пространстве $B_1(X,[0,1])$.

Поскольку пространство $B_1(X,[0,1])$ обладает свойством Бэра, $B_1(X,[0,1])\ne\bigcup_{m=1}^{\infty}F_m$. Таким образом, существует $f\in B_1(X,[0,1])\setminus\bigcup_{m=1}^{\infty}F_m$. А это значит, что существует последовательность $\{n_k : k\in\mathbb{N}\}$ такая, что

$$\sum_{x\in A_{n_k}}f(x)-\sum_{x\in B_{n_k}}f(x)>|A_{n_k}|-\frac{1}{3}$$

для каждого $k\in\mathbb{N}$. Пусть $A=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_{n_k}$ и $B=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}B_{n_k}$. Тогда

$$f\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{n_k}\Big)\subseteq\Big[\frac{1}{2},1\Big]\quad\text{и}\quad f\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}B_{n_k}\Big)\subseteq\Big[0,\frac{1}{3}\Big].$$

Положим $C_1=f^{-1}\Big(\Big[0,\frac{1}{3}\Big]\Big)$ и $C_2=f^{-1}\Big(\Big[\frac{1}{2},1\Big]\Big)$. Заметим, что C_1 и C_2 являются непересекающимися Coz_δ-множествами в X и при этом справедливы соотношения $A\subseteq C_2$ и $B\subseteq C_1$. В этом случае по теореме 2 в [16, § 30] существует CZ-множество C такое, что $A\subset C\subset(X\setminus B)$. Тогда по теореме 3.3 пространство $K_1(X,\mathbf{2})$ — со свойством Бэра.

(2) $\Rightarrow$ (1). Заметим, что если $K_1(X,\mathbf{2})$ — бэровское пространство, то $(K_1(X,\mathbf{2}))^\omega$ является бэровским. Получаем, что $K_1(X,\mathbf{2}^\omega)=(K_1(X,\mathbf{2}))^\omega$ есть бэровское пространство. Пусть $\varphi:2^\omega\to[0,1]$ — непрерывное сюръективное неприводимое отображение канторового совершенного множества 2^ω на метрический компакт $[0,1]$. В силу леммы 3.15 в [14] пространство $B_1(X,[0,1])$ является бэровским.

(2) $\Rightarrow$ (3). Очевидно вследствие теоремы 3.3 и определения 1 свойства (κ_2).

(3) $\Rightarrow$ (2). Эта импликация будет следовать из теоремы 3.3 и утверждения, что если два счетных множества G_δ-отделимы, то они отделимы CZ-множеством. Докажем это утверждение.

Пусть A и B есть счетные G_δ-отделимые подмножества X, т. е. существуют G_δ множества P и R такие, что $P\cap R=\varnothing$, $A\subset P$ и $B\subset R$. Пусть $(U_n)_n$ и $(V_n)_n$ — семейства открытых множеств такие, что $P=\bigcap_n U_n$, $R=\bigcap_n V_n$.

Фиксируем $n\in\mathbb{N}$. Пространство X является тихоновским, поэтому для каждого $a\in A$ существует функционально-открытое множество W_a такое, что $a\in W_a\subset U_n$. Пусть $U'_n=\bigcup\{W_a : a\in A\}$. Поскольку A счетно, то U'_n — функционально открытое множество. Заметим, что $A\subset U'_n\subset U_n$. Аналогично существует функционально-открытое множество V'_n такое, что $B\subset V'_n\subset V_n$.

Пусть $\mathcal{F}=\{X\setminus U'_n, X\setminus V'_n\colon n\in\mathbb{N}\}$. Счетное семейство $\mathcal{F}=\{F_n\colon n\in\mathbb{N}\}$ нуль-множеств является покрытием пространства X. Для семейства $\mathcal{F}$ выполняется: если $F\in\mathcal{F}$, тогда $A\cap F=\varnothing$ или $B\cap F=\varnothing$.

Рассмотрим $P_n = F_n \setminus \bigcup_{i<n} F_i$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Обозначим $\mathcal{P} = \{P_n : n \in \mathbb{N}\}$. Заметим, что $\mathcal{P}$ — счетное разбиение пространства X, состоящее из Zer_σ-множеств, и при этом $\mathcal{P}$ вписано в $\mathcal{F}$, т. е. $P_n \subset F_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Тогда $A \cap P = \varnothing$ или $B \cap P = \varnothing$ для каждого $P \in \mathcal{P}$. Пусть $Q = \bigcup\{P \in \mathcal{P} : P \cap A \neq \varnothing\}$. В этом случае $A \subset Q$, $B \subset X \setminus Q$ и Q является CZ-множеством в X.

Ясно, что если пространство $B_1(X)$ является бэровским, то из этого следует: пространство $B_1(X, [0,1])$ также бэровское.

Заметим, что существует счетно компактное пространство X такое, что $C_p(X, [0,1])$ есть бэровское пространство, но $C_p(X, \mathbb{R})$ не является бэровским (S286 в [17]). С другой стороны, для пространств $B_1^{st}(X, \mathbb{R})$ и $B_1^{st}(X, [0,1])$ свойство Бэра выполняется одновременно.

Возникает естественный вопрос о существовании такого пространства X, что $B_1(X, [0,1])$ есть бэровское пространство, а $B_1(X, \mathbb{R})$ нет. Соответственно мы формулируем следующий вопрос.

В о п р о с 1. Существует ли пример тихоновского пространства X, обладающего свойством (κ_2), но не обладающего свойством (κ)?

3.3. Свойство Шоке и псевдополнота для $B_1(X, \mathbb{R})$

Свойство Бэра и свойство 1-й категории имеют двойственные характеризации через наличие (или отсутствие) стратегии игроков в топологической игре Банаха — Мазура [18].

Игра $G_I(X)$ начинается *первым* (**I**) игроком; он выбирает непустое открытое множество $V_0 \subseteq X$. Затем *второй* (**II**) игрок выбирает непустое открытое множество $V_1 \subseteq V_0$.

На n-шаге игрок **I** выбирает непустое открытое множество $V_{2n} \subseteq V_{2n-1}$, и затем игрок **II** выбирает непустое открытое множество $V_{2n+1} \subseteq V_{2n}$.

Игрок **I** побеждает в игре $G_I(X)$, если $\bigcap\limits_{n\in\omega} V_n = \varnothing$. Иначе выигрывает игрок **II**.

Игра $G_{II}(X)$ отличается от игры $G_I(X)$ порядком ходов игроков. Игру $G_{II}(X)$ начинает игрок **II**, выбирая непустое открытое множество $V_0 \subseteq X$. Затем игрок **I** выбирает непустое открытое множество $V_1 \subseteq V_0$. На n-шаге игрок **II** выбирает непустое открытое множество $V_{2n} \subseteq V_{2n-1}$, и затем игрок **I** выбирает непустое открытое множество $V_{2n+1} \subseteq V_{2n}$. Игрок **I** побеждает в игре $G_{II}(X)$, если $\bigcap\limits_{n\in\omega} V_n = \varnothing$. Иначе выигрывает игрок **II** в игре $G_{II}(X)$.

Следующую характеризацию свойства Бэра и свойства первой категории можно найти в работе [18].

Теорема 3.5 (Дж. Окстоби, [18]). *Топологическое пространство X является пространством.*

1. *Первой категории тогда и только тогда, когда игрок* **I** *имеет выигрышную стратегию в игре $G_{II}(X)$.*

2. *Бэровским тогда и только тогда, когда игрок* **I** *не имеет выигрышной стратегии в игре $G_I(X)$.*

О п р е д е л е н и е 2. Топологическое пространство X называется *пространством Шоке* (*или обладающим свойством Шоке*), если игрок **II** имеет выигрышную стратегию в игре $G_I(X)$.

Ясно, что любое пространство Шоке является пространством со свойством Бэра. Также заметим, что если пространство X содержит всюду плотное подмножество Y, которое является пространством Шоке, то и само X — пространство Шоке.

Последовательность $\{\mathcal{C}_n : n \in \mathbb{N}\}$ называется *псевдополной*, если для любого семейства $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$, в котором $\overline{U_{n+1}} \subseteq U_n$ и $U_n \in \mathcal{C}_n$, для каждого $n \in \mathbb{N}$ мы получаем, что $\bigcap\{U_n : n \in \mathbb{N}\} \neq \varnothing$. Пространство X называют *псевдополным*, если существует псевдополная последовательнасть $\{\mathcal{B}_n : n \in \mathbb{N}\}$ π-баз пространства X.

Хорошо известно, что любое псевдополное пространство является бэровским и любое полное по Чеху пространство — псевдополное. Заметим, что если X имеет всюду плотное псевдополное подпространство (в частности, если X имеет всюду плотное полное по Чеху попространство) тогда X есть псевдополное пространство [17, с. 47].

В работе [8, теорема 4.5] был получен следующий критерий.

Теорема 3.6. *Для пространства X следующие условия эквивалентны.*

1. $B_1(X,\mathbb{R})$ — *пространство Шоке.*
2. $B_1(X,\mathbb{R})$ — *псевдополное пространство.*
3. $B_1(X,\mathbb{R})$ *является G_δ-плотным подмножеством в $\mathbb{R}^X$.*
4. *Каждое счетное подмножество X является сильно Coz_δ-дизъюнктным.*

Семейство $\mathcal{F} \subseteq Y^X$ отображений из множества X в множество Y называют *ω-полным вЁY^X*, если каждое отображение $f : Z \to Y$, определенное на любом счетном множестве $Z \subseteq X$, имеет продолжение $\widetilde{f} \in \mathcal{F}$ на все множество X.

Множество $Y \subset X$ называют

• B_1-*вложенным* в X, если для любой $f \in B_1(Y,\mathbb{R})$ существует $\widetilde{f} \in B_1(X,\mathbb{R})$ такая, что $\widetilde{f} \mid Y = f$;

• B_1^*-*вложенным* в X, если для любой ограниченной $f \in B_1(Y,\mathbb{R})$ существует $\widetilde{f} \in B_1(X,\mathbb{R})$ такая, что $\widetilde{f} \mid Y = f$.

В теореме 3.1 (импликация (5) $\Rightarrow$ (1)) было доказано, что любое счетное сильно G_δ-дизъюнктное множество является сильно Coz_δ-дизъюнктным. Таким образом, теорему 3.6 можно переформулировать не применяя при этом понятия Coz_δ-множества.

Теорема 3.7. *Для пространства X следующие условия эквивалентны.*

1. $B_1(X,\mathbb{R})$ — *пространство Шоке.*
2. *Каждое счетное подмножество X является сильно G_δ-дизъюнктным.*
3. X *есть Δ_1-пространство.*
4. *Каждое счетное подмножество X является B_1-вложенным.*
5. $B_1(X,\mathbb{R})$ *ω-полно в $\mathbb{R}^X$.*

Эквивалентность (2) и (3) доказана в работе [19] (см. также п. (5) $\Rightarrow$ (1) в теореме 3.2).

Следствие 3.1 [7, теорема 6.10]. *Для пространства X, обладающего счетным псевдохарактером, следующие условия эквивалентны.*

1. $B_1(X,\mathbb{R})$ — *пространство Шоке.*
2. X — *λ-пространство.*

3.4. Свойство Шоке и псевдополнота для $B_1(X,[0,1])$ и $K_1(X,\mathbf{2})$

Напомним, что отображение $\varphi : K \to M$ называется *почти открытым*, если для всякого непустого открытого множества $V \subseteq K$, $\mathrm{Int}(\varphi(V)) \neq \varnothing$. Класс почти открытых отображений включает в себя как открытые отображения, так и неприводимые отображения компактов. Заметим, что если $\varphi_\alpha : K_\alpha \to M_\alpha$ — почти открытое сюръективное отображение для каждого $\alpha \in A$, то произведение отображений $\prod\limits_{\alpha\in A} \varphi_\alpha : \prod\limits_{\alpha\in A} K_\alpha \to \prod\limits_{\alpha\in A} M_\alpha$ — также почти открытое сюръективное отображение.

Лемма 3.1. *Пусть $\psi : P \to L$ — сюръективное непрерывное почти открытое отображение. Множество $E \subseteq P$ всюду плодно в P и является пространством Шоке. Тогда множество $\psi(E)$ — пространство Шоке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть β — стратегия игрока **II** в игре $G_I(E)$.

Рассмотрим игру $G_I(\psi(E))$. Игрок **I** выбирает непустое открытое множество $V_0 \subseteq \psi(E)$. Тогда считаем, что первый ход игрока **I** в игре $G_I(E)$ — это $W_0 = \psi^{-1}(V_0)$. Пусть $W_1 = \beta(W_0)$. Поскольку ψ — почти открытое отображение, $\mathrm{Int}(\psi(W_1)) \neq \varnothing$. Полагаем $V_1 = \mathrm{Int}(\psi(W_1))$ как первый ход игрока **II** в игре $G_I(\psi(E))$.

Пусть каждый из игроков сделал n ходов в игре $G_I(\psi(E))$, т. е. определены $V_0, \ldots, V_{2n-1}$. Игрок **I** выбирает непустое открытое множество $V_{2n} \subseteq V_{2n-1}$. Тогда считаем $(n+1)$-м ходом игрока **I** в игре $G_I(E)$; это $W_{2n} = W_{2n-1} \cap \psi^{-1}(V_{2n})$. Пусть $W_{2n+1} = \beta(W_{2n})$. Поскольку ψ — почти открытое отображение, $\mathrm{Int}(\psi(W_{2n+1})) \neq \varnothing$. Полагаем $V_{2n+1} = \mathrm{Int}(\psi(W_{2n+1}))$ как $(n+1)$-й ход игрока **II** в игре $G_I(\psi(E))$.

Так продолжая для каждого $n \in \mathbb{N}$, мы полностью проведем игру $G_I(\psi(E))$. Игрок **II** применял стратегию β в игре $G_I(E)$, поэтому $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} W_n \neq \varnothing$. Пусть $p \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} W_n \neq \varnothing$. Тогда $\psi(p) \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Таким образом, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n \neq \varnothing$.

О п р е д е л е н и е 3. Топологическое пространство X будем называть *λ_2-пространством*, если любые два дизъюнктных счетных подмножества $A, B \subset X$ G_δ-отделены, т. е. существуют G_δ-множества U и V такие, что $A \subset U$, $B \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$.

Теорема 3.8. *Для пространства X и $Y \in \{[0,1], \{0,1\}\}$ следующие условия эквивалентны.*

1. *$K_1(X,Y)$ — пространство Шоке.*
2. *$K_1(X,Y)$ — псевдополное пространство.*
3. *$K_1(X,Y)$ является G_δ-плотным в Y^X.*
4. *$K_1(X,Y)$ ω-полно в Y^X.*
5. *$K_1(X,Y)$ псевдокомпактно.*
6. *X — λ_2-пространство.*
7. *Каждое счетное подмножество пространства X является B_1^*-вложенным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) $\Rightarrow$ (6). Пусть $B_1(X,[0,1]) = K_1(X,[0,1])$ – пространство Шоке. Рассмотрим непрерывное почти открытое отображение $\varphi\colon I \to \mathbb{S}^1$ отрезка $I = [0,1]$ на окружность $\mathbb{S}^1$, отождествляя концевые точки 0 и 1 ($\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ рассматривается как фактор-группа группы $\mathbb{R}$ по подгруппе целых чисел $\mathbb{Z}$).

Отображение $\varphi^X : I^X \to (\mathbb{S}^1)^X$ — сюръективное непрерывное почти открытое отображение. Так как $B_1(X,[0,1])$ всюду плотно в I^X и является пространством Шоке, то в силу леммы 3.1 $\varphi^X(B_1(X,[0,1]))$ — пространство Шоке. Но $\varphi^X(B_1(X,[0,1])) = \{\varphi \circ f : f \in B_1(X,[0,1])\} \subseteq B_1(X,\mathbb{S}^1)$, т. е. $B_1(X,\mathbb{S}^1)$ содержит всюду плотное пространство Шоке $\varphi^X(B_1(X,[0,1]))$ и, следовательно, само является пространством Шоке.

Так как $\mathbb{S}^1$ — топологическая группа, то $B_1(X,\mathbb{S}^1)$ также является топологической группой (с поточечной групповой операцией).

В работе [20, теорема 3] доказывается, что топологическая группа G — пространство Шоке тогда и только тогда, когда пополнение по Райкову $\widetilde{G}$ — пространство Шоке и G — G_δ-плотное подмножество пространства $\widetilde{G}$. Отсюда следует, что пространство $B_1(X,\mathbb{S}^1)$ — G_δ-плотное в пространстве $(\mathbb{S}^1)^X$.

В [7, утверждение 2.16] доказывается, что для произвольных топологических пространств X, Y и $\mathcal{F} \subseteq Y^X$, где Y счетного псевдохарактера, G_δ-плотность $\mathcal{F}$ в пространстве Y^X эквивалентна ω-полноте $\mathcal{F}$ в Y^X. Отсюда следует, что пространство $B_1(X,\mathbb{S}^1)$ ω-полно в пространстве $(\mathbb{S}^1)^X$.

Пусть A и B — два дизъюнктных счетных подмножества пространства X и a и b — две различные точки в пространстве $\mathbb{S}^1$. В силу ω-полноты пространства $B_1(X,\mathbb{S}^1)$ отображение $f : A \cup B \to \mathbb{S}^1$ такое, что $f(A) \subseteq \{a\}$ и $f(B) \subseteq \{b\}$, продолжается до отображения $\widetilde{f} \in B_1(X,\mathbb{S}^1)$, т. е. $\widetilde{f}|(A \cup B) = f$.

Осталось заметить, что $\widetilde{f}^{-1}(a)$ и $\widetilde{f}^{-1}(b)$ — это два непересекающихся G_δ-множества такие, что $A \subseteq \widetilde{f}^{-1}(a)$ и $B \subseteq \widetilde{f}^{-1}(b)$.

Пусть $K_1(X, \mathbf{2})$ — пространство Шоке. Тогда по теореме 3 в [20] пространство $K_1(X, \mathbf{2})$ — G_δ-плотное в пространстве 2^X. По утверждению 2.16 в [7], $K_1(X, \mathbf{2})$ ω-полно в пространстве 2^X. Пусть A и B — два дизъюнктных счетных подмножества пространства X. В силу ω-полноты пространства $K_1(X, \mathbf{2})$ отображение $f : A \cup B \to \{0, 1\}$ такое, что $f(A) \subseteq \{0\}$ и $f(B) \subseteq \{1\}$, продолжается до отображения $\widetilde{f} \in K_1(X, \mathbf{2})$, т. е. $\widetilde{f}|(A \cup B) = f$.

Осталось заметить, что $\widetilde{f}^{-1}(0)$ и $\widetilde{f}^{-1}(1)$ — это два непересекающихся G_δ-множества такие, что $A \subseteq \widetilde{f}^{-1}(0)$ и $B \subseteq \widetilde{f}^{-1}(1)$.

(6) $\Rightarrow$ (4). Пусть A — счетное подмножество X и $B \subset A$. Так как X — λ_2-пространство, то множества B и $A \setminus B$ G_δ-отделены. В теореме 3.4 (в доказательстве импликации (3) $\Rightarrow$ (2)) мы показали, что если счетные множества G_δ-отделены, то они отделены CZ-множеством. Следовательно, существует CZ-множество C такое, что $A \setminus B \subseteq C \subseteq (X \setminus B)$. Заметим, что множество $X \setminus C$ также является CZ-множеством и $B = A \cap (X \setminus C)$.

Пусть $f : A \to \{0, 1\}$ — произвольное отображение. Обозначим $B = \{x \in A : f(x) = 0\}$. Пусть C — CZ-множество, разделяющее множества B и $A \setminus B$, т. е. $B \subseteq C$ и $A \setminus B \subseteq X \setminus C$. Тогда отображение $\widetilde{f}$, определяемое как $\widetilde{f}(x) = 0$ для любого $x \in C$ и $\widetilde{f}(x) = 1$ для любого $x \in X \setminus C$, является продолжением отображения f на X и $\widetilde{f} \in B_1(X, \mathbf{2})$. Отсюда следует, что пространство $B_1(X, \mathbf{2})$ — ω-полно в $\mathbf{2}^X$.

По утверждению 5.1 в работе [21] получаем, что любое счетное множество A пространства X является B_1^*-вложенным в X, иначе говоря любое отображение $f : A \to [0, 1]$ продолжается на X до отображения $\widetilde{f} \in B_1(X, [0, 1])$ (т. е. $\widetilde{f}|A = f$). Отсюда следует, что пространство $B_1(X, [0, 1])$ ω-полно в I^X.

(4) $\Leftrightarrow$ (3). Как уже отмечалось в доказательстве импликации (1) $\Leftrightarrow$ (6) для произвольных топологических пространств X, Y и $\mathcal{F} \subseteq Y^X$, где Y счетного псевдохарактера, G_δ-плотность $\mathcal{F}$ в пространстве Y^X эквивалентна ω-полноте $\mathcal{F}$ в Y^X [7, Proposition 2.16].

(3) $\Leftrightarrow$ (5). Так как Y^X является компактификацией пространства $K_1(X, Y)$, то свойства (3) и (2) эквивалентны, что следует непосредственно из теоремы 1.7.7 (или теоремы 1.3.3) работы [22].

(5) $\Rightarrow$ (2). Заметим, что любое псевдокомпактное пространство является псевдополным (см. [17, с. 473]).

(2) $\Rightarrow$ (1). Очевидно выполняется для любых пространств.

(4) $\Leftrightarrow$ (7). Условие (7) — это более привычная переформулировка условия (4).

Заметим, что существует псевдокомпактное пространство X такое, что $C_p(X, [0, 1])$ есть псевдополное пространство (пространство Шоке), но $C_p(X, \mathbb{R})$ не является псевдополным [17, с. 477]). Возникает естественный вопрос о существовании такого пространства X, что $B_1(X, [0, 1])$ — псевдополное пространство, а $B_1(X, \mathbb{R})$ — нет. Отсюда мы получаем следующий

Вопрос 2. Существует ли пример тихоновского λ_2-пространства X, которое не является Δ_1-пространством? В частности, существует ли λ_2-пространство со счетным псевдохарактером (метрическое сепарабельное), которое не является λ-пространством?

4. Решение вопроса Ткачука

Хорошо известно, что для нормального пространства X свойства псевдополноты и псевдокомпактности пространства $C_p(X, [0, 1])$ совпадают (см. в [17, с. 478]).

Идеи доказательства теоремы 3.8 позволяют решить нам следующий открытый вопрос в [17, Problem 4.2.10]:

Предположим, что $C_p(X, [0, 1])$ является псевдополным. Должно оно быть псевдокомпактным?

Следующая теорема отвечает на данный вопрос.

Теорема 4.1. *Для любого пространства X следующие утверждения эквивалентны.*
1. $C_p(X,[0,1])$ *является псевдополным.*
2. $C_p(X,[0,1])$ *является псевдокомпактным.*
3. $C_p(X,[0,1])$ *— пространство Шоке.*
4. $C_p(X,[0,1])$ *есть G_δ-плотное в I^X.*
5. $C_p(X,[0,1])$ *ω-полно в I^X.*
6. $\beta(C_p(X,[0,1])) = I^X$.
7. $\nu(C_p(X,[0,1])) = I^X$.

Доказательство. (3) $\Rightarrow$ (5). Доказательство в точности повторяет доказательство импликации (1) $\Rightarrow$ (6) в теореме 3.8.

Пусть $C_p(X,[0,1])$ — пространство Шоке. Рассмотрим непрерывное почти открытое отображение $\varphi : I \to \mathbb{S}^1$ отрезка $I = [0,1]$ на окружность $\mathbb{S}^1$, отождествляя концевые точки 0 и 1 ($\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ рассматривается как факторгруппа группы $\mathbb{R}$ по подгруппе целых чисел $\mathbb{Z}$).

Отображение $\varphi^X : I^X \to (\mathbb{S}^1)^X$ — сюръективное непрерывное почти открытое отображение. Так как $C_p(X,[0,1])$ всюду плотно в I^X и является пространством Шоке, то в силу леммы 3.1 $\varphi^X(C_p(X,[0,1]))$ — пространство Шоке. Но $\varphi^X(C_p(X,[0,1])) = \{\varphi \circ f : f \in C_p(X,[0,1])\} \subseteq C_p(X,\mathbb{S}^1)$, т. е. $C_p(X,\mathbb{S}^1)$ содержит всюду плотное пространство Шоке $\varphi^X(C_p(X,[0,1]))$ и, следовательно, само является пространством Шоке.

Поскольку $\mathbb{S}^1$ — топологическая группа, то $C_p(X,\mathbb{S}^1)$ также является топологической группой.

В силу [20, теорема 3] пространство $C_p(X,\mathbb{S}^1)$ есть G_δ-плотное в пространстве $(\mathbb{S}^1)^X$. По теореме 1.7.7 в [22] следует, что $C_p(X,\mathbb{S}^1)$ ω-полно в пространстве $(\mathbb{S}^1)^X$. Отсюда вытекает, что $C_p(X,[0,1])$ ω-полно в пространстве в I^X.

(4) $\Leftrightarrow$ (5) $\Leftrightarrow$ (6) $\Leftrightarrow$ (7) $\Leftrightarrow$ (2). Следует непосредственно из теоремы 1.7.7 работы [22].

(2) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (3). Выполняется для произвольных пространств [17, с. 473].

5. Заключение

В работе [19] был построен наивный (т. е. в ZFC) пример сепарабельного псевдокомпактного пространства X такого, что $B_1(X,\mathbb{R})$ является бэровским, но не является пространством Шоке. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 5.1 [19, теорема 4.5]. *Существует пример сепарабельного псевдокомпактного пространства X, обладающего свойством (κ), но не являющегося Δ_1-пространством.*

Интересен также следующий

Вопрос 3. Существует ли пример тихоновского пространства X со свойством (κ_2), которое не является λ_2-пространством?

Соотношение свойств Бэра и Шоке для пространств $B_1(X,\mathbb{R})$ и $B_1(X,[0,1])$ представлено на рис. 1.

$$\begin{array}{ccc}
B_1(X,\mathbb{R}) \text{ — Choquet space} & \Longrightarrow & B_1(X,\mathbb{R}) \text{ — Baire space}\\
\Downarrow & & \Downarrow\\
B_1(X,[0,1]) \text{ — Choquet space} & \Longrightarrow & B_1(X,[0,1]) \text{ — Baire space}
\end{array}$$

Рис. 1

Соотношения свойств функциональных пространств на рис. 1 позволяют представить соотношения свойств для пространства X (см. рис. 2).

$$
\begin{tikzcd}
\Delta_1\text{-space} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{Property } (\kappa) \arrow[l, dotted, bend right, "\text{Theorem } 5.1"'] \arrow[d, Rightarrow] \\
\lambda_2\text{-space} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[u, dotted, bend left, "\text{Question 2}"] & \text{Property } (\kappa_2) \arrow[u, dotted, bend right, "\text{Question 1}"'] \arrow[l, dotted, bend left, "\text{Question 3}"]
\end{tikzcd}
$$

Рис. 2

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Александров П.С., Пасынков Б.А.** Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973. 575 с.
2. **Окстоби Дж.** Мера и категория. М.: Мир, 1974. 158 с.
3. **Lutzer D., McCoy R.** Category in function spaces. I // Pacific J. Math. 1980. Vol. 90, no.1. P. 145–168. https://doi.org/10.2140/pjm.1980.90.145
4. **Пыткеев Е.Г.**, Свойство Бэра пространств непрерывных функций // Мат. заметки. 1985. Vol. 38, № 5. P. 726–740.
5. **Tkachuk V.** Characterization of the Baire property in $C_p(X)$ by the properties of the space X // Research papers in Topology–Maps and extensions of topological spaces (Ustinov). 1985. P. 21–27.
6. **Douwen E.K. van** Collected papers. Vol. 1 / ed. J. van Mill. Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1994. 767 p. ISBN-10: 0444816259 .
7. **Banakh T., Gabriyelyan S.** Baire category properties of some Baire type function spaces // Topol. Appl. 2020. Vol. 272. Art. no. 107078. https://doi.org/10.1016/j.topol.2020.107078
8. **Osipov A.V.** Baire property of space of Baire-one functions // Eur. J. Math. 2025. Vol. 11. Art. no. 8. 25 p. https://doi.org/10.1007/s40879-024-00799-1
9. **Lukeš J., Malý J., Zajiček L.** Fine topology methods in real analysis and potential theory. Ser. Lecture Notes in Math., vol. 1189. Berlin; Heidelberg: Springer, 1986. 476 p. https://doi.org/10.1007/BFb0075894
10. **Sakai M.** Two properties of $C_p(X)$ weaker than the Fréchet-Urysohn property // Topol. Appl. 2006. Vol. 153, no. 15. P. 2795–2804. https://doi.org/10.1016/j.topol.2005.11.012
11. **Kąkol J., Kurka O., Leiderman A.** Some classes of topological spaces extending the class of Δ-spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 2024. Vol. 152, no. 2. P. 883–898. https://doi.org/10.1090/proc/16661
12. **Osipov A.V.** Baireness of the space of pointwise stabilizing functions of the first Baire class // Topol. Appl. 2025. Vol. 362. Art. no. 109218. 5 p. https://doi.org/10.1016/j.topol.2025.109218
13. **Karlova O., Mykhaylyuk V.** On stable Baire classes // Acta Math. Hungar. 2016. Vol. 150, no. 1. P. 36–48. https://doi.org/10.1007/s10474-016-0636-8
14. **Osipov A.V., Pytkeev E.G.** Baire property of spaces of $[0,1]$-valued continuous functions // Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat. 2023. Vol. 117, no. 1. Art. no. 38. 10 p. https://doi.org/10.1007/s13398-022-01371-w
15. **Осипов А.В.** О свойстве Бэра пространства индикаторных бэровских функций // Мат. заметки. 2025. Vol. 118, № 4. P. 564–574 . `https://www.mathnet.ru/rus/mzm14478`
16. **Kuratowski K.** Topology. Vol. 1. NY: Acad. Press, 1966. 560 p. https://doi.org/10.2307/3611898
17. **Tkachuk V.V.** A C_p-theory problem book. Topological and function spaces. NY: Springer, 2011. 488 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7442-6
18. **Oxtoby J.C.** The Banach–Mazur game and Banach category theorem // Contributions to the theory of games, vol. 3; Ann. of Math. Stud., no. 39, NJ, Princeton, Princeton Univer. Press, 1957. P. 159–163.
19. **Osipov A.V.** The Δ_1-property of X is equivalent to the Choquet property of $B_1(X)$ // Topol. Appl. 2025. Vol. 370. Art. no. 109395. 6 p. https://doi.org/10.1016/j.topol.2025.109395

20. **Banakh T., Hryniv O.** Some Baire category properties of topological groups // Visnyk Lviv. Univ. Ser. Mech.-Mat. 2018. Vol. 86. P. 71–76. https://doi.org/10.48550/arXiv.1901.01420
21. **Karlova O.** On α-embedded sets and extension of mappings // Comment. Math. Univ. Carolin. 2013. Vol. 54, no. 3. P. 377–396. https://doi.org/10.48550/arXiv.1407.6155
22. **Hrušák M., Tamariz-Mascarúa Á., Tkachenko M.** Pseudocompact topological spaces. A survey of classic and new results with open problems. Cham: Springer, 2018. 299 p. (Ser. Developments in Mathematics; vol. 55.) https://doi.org/10.1007/978-3-319-91680-4

Поступила 25.04.2025
После доработки 24.06.2025
Принята к публикации 30.06.2025

Осипов Александр Владимирович
д-р физ.-мат. наук
зав. сектором отдела алгебры и топологии
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: OAB@list.ru

REFERENCES

1. Aleksandrov P.S., Pasynkov B.A. *Vvedeniye v teoriyu razmernosti* [Introduction to the dimensionality theory]. Moscow, Mir Publ., 1973, 575 p.
2. Oxtoby J.C. *Measure and category. A survey of the analogies between topological and measure spaces.* NY, Springer, 1971. doi: https://doi.org/10.1007/978-1-4615-9964-7. Translated to Russian under the title *Mera i kategoriya*, Moscow, Mir Publ, 1974, 158 p.
3. Lutzer D., McCoy R. Category in function spaces. I. *Pacific J. Math.*, 1980, vol. 90, no. 1, pp. 145–168. https://doi.org/10.2140/pjm.1980.90.145
4. Pytkeev E.G. Baire property of spaces of continuous functions. *Math. Notes*, 1985, vol. 38, no. 5, pp. 908–915. https://doi.org/10.1007/BF01157538
5. Tkachuk V. Characterization of the Baire property in $C_p(X)$ by the properties of the space X. *Research papers in Topology–Maps and extensions of topological spaces (Ustinov)*, 1985, pp. 21–27.
6. Douwen E.K. van Collected papers. Vol. 1 / ed. J. van Mill. Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1994. 767 p. ISBN-10: 0444816259 .
7. Banakh T., Gabriyelyan S. Baire category properties of some Baire type function spaces. *Topol. Appl.*, 2020, vol. 272, art. no. 107078. https://doi.org/10.1016/j.topol.2020.107078
8. Osipov A.V. Baire property of space of Baire-one functions // Eur. J. Math. 2025. Vol. 11. Art. no. 8. 25 p. https://doi.org/10.1007/s40879-024-00799-1
9. Lukeš J., Malý J., Zajiček L. *Fine topology methods in real analysis and potential theory.* Lecture Notes in Mathematics Ser., vol. 1189. Berlin, Heidelberg, Springer, 1986, p. 476. https://doi.org/10.1007/BFb0075894
10. Sakai M. Two properties of $C_p(X)$ weaker than the Fréchet — Urysohn property. *Topol. Appl.*, 2006, vol. 153, no. 15, pp. 2795–2804. https://doi.org/10.1016/j.topol.2005.11.012
11. Kąkol J., Kurka O., Leiderman A. Some classes of topological spaces extending the class of Δ-spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2024, vol. 152, no. 2, pp. 883–898. https://doi.org/10.1090/proc/16661
12. Osipov A.V. Baireness of the space of pointwise stabilizing functions of the first Baire class. *Topol. Appl.*, 2025, vol. 362, art. no. 109218, 5 p. https://doi.org/10.1016/j.topol.2025.109218
13. Karlova O., Mykhaylyuk V. On stable Baire classes. *Acta Math. Hungar.*, 2016, vol. 150, no. 1, pp. 36–48. https://doi.org/10.1007/s10474-016-0636-8
14. Osipov A.V., Pytkeev E.G. Baire property of spaces of $[0,1]$-valued continuous functions. *Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat.* Ser. A-Mat, 2023, vol. 117, no. 1, art. no. 38, 10 p. https://doi.org/10.1007/s13398-022-01371-w
15. Osipov A.V. On the Baire property of the space of Baire indicator functions. *Mat. Zam.*, 2025, vol. 118, no. 4, pp. 564–574 (in Russian). `https://www.mathnet.ru/eng/mzm14478`
16. Kuratowski K. *Topology*, vol. 1. NY, Acad. Press, 1966, 560 p. https://doi.org/10.2307/3611898. Translated to Russian under the title *Topologiya*, Moscow, Mir Publ., 1966, 594 p.

17. Tkachuk V.V. *A C_p-theory problem book. Topological and function spaces.* NY, Springer, 2011, 488 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7442-6
18. Oxtoby J.C. The Banach–Mazur game and Banach category theorem. In: *Contributions to the theory of games*, Vol. 3; *Ann. of Math. Stud.*, no. 39, NJ, Princeton, Princeton Univer. Press, 1957. P. 159–163.
19. Osipov A.V. The Δ_1-property of X is equivalent to the Choquet property of $B_1(X)$. *Topol. Appl.*, 2025, vol. 370, no. art. 109395, 6 p. https://doi.org/10.1016/j.topol.2025.109395
20. Banakh T., Hryniv O. Some Baire category properties of topological groups. *Visnyk Lviv. Univ. Ser. Mech.-Mat.*, 2018, vol. 86, pp. 71–76. https://doi.org/10.48550/arXiv.1901.01420
21. Karlova O. On α-embedded sets and extension of mappings. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 2013, vol. 54, no. 3, pp. 377–396. https://doi.org/10.48550/arXiv.1407.6155
22. Hrušák M., Tamariz-Mascarúa Á., Tkachenko M. *Pseudocompact topological spaces. A survey of classic and new results with open problems.* Developments in Mathematics Ser., vol. 55. Cham, Springer, 2018, 299 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-91680-4

Received April 25, 2025
Revised June 24, 2025
Accepted June 30, 2025

Alexander Vladimirovich Osipov, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: OAB@list.ru .

Cite this article as: A. V. Osipov. On the properties of completeness type of spaces of first functional class Lebesgue mappings. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 3, pp. 200–214 .