

УДК 517.977

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА РЕГУЛЯРИЗАТОРОВ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ПРОСТЕЙШИХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

А. В. Макаров

В.К. Ивановым в ряде работ построена вещественная, ассоциативная, коммутативная, дифференциальная алгебра, порожденная простейшими распределениями (обобщенными функциями) с особенностями в нуле. Значения произведений при $x \neq 0$ не изменяются. Следуя идеям С.Л. Соболева, М. Сато, Г. Бремермана, каждому распределению ставится в соответствие его представление Пуассона, которое есть гармоническая функция в верхней полуплоскости. Произведение гармонических функций в редких случаях есть гармоническая функция. В алгебре произведений гармонических функций, соответствующих простейшим распределениям, построен мультипликативный гомоморфизм (регуляризатор), ставящий в соответствие произведению гармонических функций гармоническую функцию, что есть представление Пуассона некоторой простейшей обобщенной функции. Тем самым определено произведение распределений. Причем доказано, что такой гомоморфизм единственный. В предлагаемой работе строится параметрическое семейство регуляризаторов, порождающих вещественную, коммутативную, дифференциальную алгебру простейших распределений с особенностями в нуле. Ассоциативность произведений и сохранение значений при $x \neq 0$ не предполагается. Получены соотношения между произведениями простейших обобщенных функций и распределениями.

Ключевые слова: произведения простейших обобщенных функций, преобразование Пуассона, регуляризатор.

A. V. Makarov. Parametric families of regularizers for products of elementary generalized functions.

V.K. Ivanov, in a series of works, constructed a real, associative, commutative, differential algebra generated by elementary distributions (generalized functions) with singularities at the origin. The values of products for $x \neq 0$ remain unchanged. Following ideas of S.L. Sobolev, M. Sato, and G. Bremermann, each distribution is associated with its Poisson representation, which is a harmonic function in the upper half-plane. The product of harmonic functions is harmonic only in rare cases. In the algebra of products of harmonic functions corresponding to elementary distributions, a multiplicative homomorphism (a regularizer) is constructed that assigns to the product of harmonic functions a harmonic function which is the Poisson representation of some elementary generalized function. Thus a product of distributions is defined. Moreover, it is proved that such a homomorphism is unique. In the present work, a parametric family of regularizers is constructed that generates a real, commutative, differential algebra of elementary distributions with singularities at the origin. Associativity of products and preservation of values for $x \neq 0$ are not assumed. Relations are obtained between the products of elementary generalized functions and distributions.

Keywords: products of elementary generalized functions, Poisson transform, regularizer.

MSC: 46F10, 46F30

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-3-185-199

1. Введение

В классической работе Л. Шварца [1] построено пространство распределений (обобщенных функций) (D') , в котором определяется произведение распределений на распределение, что есть бесконечно дифференцируемая функция (мультипликатор). Уже в работе Л. Шварца [2] показано, что невозможно определить ассоциативную операцию умножения распределений: $(Px^{-1} \cdot x) \cdot \delta(x) = \delta(x)$, однако $Px^{-1} \cdot (x \cdot \delta(x)) = 0$. Здесь мультипликатор $\varphi(x) = x$ “гасит” особенности распределений в $x = 0$ остальных множителей.

Поскольку умножение обобщенных функций возникает во многих математических моделях физики, да и самой математики (см. [3; 4]), естественно возникают проблемы с определением

произведений распределений с совпадающими особенностями. Один из простейших классов распределений с особенностями только в точке $x = 0$ есть $Px^{-n}, \delta^{(n-1)}, n \in \mathbb{N}$.

Существует несколько подходов, связанных с проблемой умножения распределений. Отметим некоторые из них.

Подход, восходящий к С. Л. Соболеву [5], Я. Микусинскому [6; 7] основан на идее распределения как классе эквивалентности фундаментальных последовательностей непрерывных функций. Произведения распределений сводится к произведению функций из соответствующих классов функций.

Известен подход М. Сато [8], Г. Бремермана [4], при котором распределению ставится в соответствие аналитическая функция (аналитическое представление распределения) всюду, за исключением, возможно, вещественной оси. При этом действие распределения на основную функцию есть предел действия скачка аналитического представления распределения на основную функцию при стремлении мнимой части к нулю.

Следуя идеям С. Л. Соболева, М. Сато и Г. Бремермана, В. К. Иванов в серии своих работ (см. [9–12]) построил вещественную, ассоциативную, коммутативную, дифференциальную алгебру, порожденную простейшими распределениями (обобщенными функциями) с особенностями в нуле. Значения произведений при $x \neq 0$ не изменяются.

Другой подход основан на расширении пространства распределений. В алгебре обобщенных функций Ж.-Ф. Коломбо (J.F. Colombeau) [13] существуют произведения любых обобщенных функций Шварца из (D') , но это произведение не всегда принадлежит (D') , что приводит к неудобствам при физической интерпретации результатов умножения.

Отметим, что интерес к этой проблематике сохраняется и в настоящее время (см., например, [14–18]).

Поскольку данная работа идейно примыкает к работе В. К. Иванова [12], то несколько подробнее остановимся на ней.

В работе [12] построена вещественная, ассоциативная, коммутативная, дифференциальная алгебра, порожденная простейшими распределениями (обобщенными функциями), и значения произведений при $x \neq 0$ не изменяются:

$$Px^{-m}, \delta^{(n-1)}, m, n = 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

Произведения этих элементов названы гиперраспределениями, так как, вообще говоря, эти произведения могут не быть распределениями, имеющими особенность только в $x = 0$.

Линейное пространство, порожденное простейшими распределениями, обозначается через E_0 . Согласно [4; 8] каждому распределению $f(x)$ ставится в соответствие ее аналитическое представление Коши. Тогда представление Пуассона распределения $f(x)$ есть $f(x, y) = \hat{f}(z) - \hat{f}(\bar{z})$ — это вещественная гармоническая функция в верхней полуплоскости:

$$f(x) \sim f(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} * f(x), \quad y > 0. \quad (1.2)$$

С опорой на таблицу Г. Бремермана [4] представления базисных элементов имеют вид

$$Px^{-m} \sim \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z^m} + \frac{1}{\bar{z}^m} \right) = f(x, y), \quad z = x + iy, \quad (1.3)$$

$$C_{(n-1)} \delta^{(n-1)}(x) = \frac{(-1)^n \pi}{(n-1)!} \delta^{(n-1)}(x) \sim \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z^n} - \frac{1}{\bar{z}^n} \right) = f(x, y), \quad (1.4)$$

где $(n-1)$ — порядок производной функции $\delta(x)$.

Справедлива следующая формула обращения этого соответствия:

$$\forall \varphi \in D: \lim_{y \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \varphi(x) dx =: \langle f, \varphi \rangle. \quad (1.5)$$

Это соответствие позволяет заменить действия над распределениями действиями над соответствующими им представлениями Пуассона. Образы элементов из E_0 обозначаются как \hat{E}_0 .

Далее рассматривается алгебра \hat{A}_0 произведений гармонических функций из \hat{E}_0 , и они, вообще говоря, не гармонические функции.

Найдено линейное отображение λ (мультипликативный гомоморфизм \equiv регуляризатор), порождающий алгебру в \hat{E}_0 и, соответственно, в E_0 :

$$\lambda : \hat{A}_0 \rightarrow \hat{E}_0 \quad \forall f, g \in \hat{E}_0 : f \circ g = \lambda(f \cdot g) \quad (1.6)$$

В работе [12] доказано, что существует единственный регуляризатор, превращающий \hat{E}_0 в вещественную, ассоциативную, коммутативную, дифференциальную (для производной произведения выполняется правило Лейбница) алгебру и при этом значения гиперраспределений при $x \neq 0$ не изменяются.

В предлагаемой работе мы строим параметрическое семейство регуляризаторов, порождающих вещественную, коммутативную, дифференциальную алгебру простейших распределений с особенностями в нуле. Ассоциативность произведений и сохранение значений при $x \neq 0$ не предполагается. Получены новые соотношения между произведениями простейших обобщенных функций и распределениями.

2. Векторная запись представлений Пуассона

Представления Пуассона элементов из E_0 можно записать через вещественную и мнимую часть дроби $1/z^m$ (см. [12])

$$Px^{-m} \sim \frac{\cos m\varphi}{|z|^m} = \operatorname{Re} \frac{1}{z^m}, \quad (2.1)$$

$$C_{(m-1)} \delta^{(m-1)}(x) \sim -\frac{\sin m\varphi}{|z|^m} = \operatorname{Im} \frac{1}{z^m}. \quad (2.2)$$

Действительно,

$$\operatorname{Re} \frac{1}{z^m} = \operatorname{Re} \frac{e^{-im\varphi}}{|z|^m} = \operatorname{Re} \frac{\cos(-m\varphi) + i \sin(-m\varphi)}{|z|^m} = \frac{\cos m\varphi}{|z|^m}.$$

Аналогично

$$\operatorname{Im} \frac{1}{z^m} = -\frac{\sin m\varphi}{|z|^m}.$$

Функции $\operatorname{Re} 1/z^m$, $\operatorname{Im} 1/z^m$ — дроби, где знаменатели суть $|z|^{2m} = \rho^{2m}$, а числители — многочлены двух переменных x, y с вещественными коэффициентами; поэтому естественно следующее соответствие между представлениями Пуассона \hat{E}_0 обобщенных функций из E_0 и векторами из \mathbb{R}^{m+1} :

$$\operatorname{Re} \frac{1}{z^m} \sim \left(1, 0, \frac{m(m-1)}{2}, \dots, 0\right), \quad m \text{ нечетное};$$

$$\operatorname{Re} \frac{1}{z^m} \sim \left(1, 0, \frac{m(m-1)}{2}, \dots, (-1)^{m/2}\right), \quad m \text{ четное}; \quad (2.3)$$

$$\operatorname{Im} \frac{1}{z^m} \sim \left(0, -m, 0, \dots, (-1)^{(m+1)/2}\right), \quad m \text{ нечетное};$$

$$\operatorname{Im} \frac{1}{z^m} \sim \left(0, -m, 0, \dots, 0\right), \quad m \text{ четное}; \quad (2.4)$$

получаем, сопоставляя элементу из \hat{E}_0 вектор, составленный из соответствующих коэффициентов разложения $(x - iy)^m$, заменяя при этом нулями места с мнимыми частями — в случае

Px^{-m} и нулями при вещественных слагаемых — при $\delta^{(m-1)}$. Обозначим линейное пространство этих векторов как \tilde{E}_0 .

Для малых значений m воспользуемся треугольником Паскаля для нахождения коэффициентов выражения $(x - iy)^m$:

$$\begin{array}{cccccc} & & & 1 & & -i \\ & & & & 1 & & -1 \\ & & 1 & & -2i & & -1 \\ & & & 1 & & -3i & & -3 & & i \\ & 1 & & -4i & & -6 & & 4i & & 1 \\ & & 1 & & -5i & & -10 & & 10i & & 5 & & -i \end{array} .$$

Согласно этому соответствию

$$\begin{aligned} Px^{-1} &\sim (1, 0) = l_{11}, & -\pi\delta(x) &\sim (0, -1) = l_{21}, \\ Px^{-2} &\sim (1, 0, -1) = l_{12}, & \pi\delta'(x) &\sim (0, -2, 0) = l_{22}, \\ Px^{-3} &\sim (1, 0, -3, 0) = l_{13}, & -\frac{\pi}{2}\delta''(x) &\sim (0, -3, 0, 1) = l_{23}, \\ Px^{-4} &\sim (1, 0, -6, 0, 1) = l_{14}, & \frac{\pi}{6}\delta'''(x) &\sim (0, -4, 0, 4, 0) = l_{24}. \end{aligned}$$

В дальнейшем нам понадобится связь операции дифференцирования гармонических функций из \tilde{E}_0 с соответствующей ей операции “дифференцирования” векторов из \tilde{E}_0 .

Установим сначала два соотношения.

Лемма 1. *Имеют место равенства, где ∂ — операция дифференцирования по переменной x :*

$$\partial \operatorname{Re} \frac{1}{z^m} = \operatorname{Re} \partial \frac{1}{z^m}; \quad \partial \operatorname{Im} \frac{1}{z^m} = \operatorname{Im} \partial \frac{1}{z^m}; \quad m \geq 1. \quad (2.5)$$

Доказательство. Действительно, вычислим, где $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\partial \operatorname{Re} \frac{1}{z^m} = \partial \operatorname{Re} \frac{\bar{z}^m}{\rho^{2m}} = \partial \operatorname{Re} \frac{u + iv}{\rho^{2m}} = \partial \frac{u}{\rho^{2m}} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{\rho^{2m}} - 2m \frac{1}{\rho^{2m+1}} \frac{\partial \rho}{\partial x} u = \frac{1}{\rho^{2m}} \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2m u x}{\rho^2} \right],$$

сравним с

$$\operatorname{Re} \partial \frac{1}{z^m} = \operatorname{Re} \partial \frac{u + iv}{\rho^{2m}} = \operatorname{Re} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{1}{\rho^{2m}} - (u + iv) 2m \frac{1}{\rho^{2m+1}} \frac{x}{\rho} \right] = \frac{1}{\rho^{2m}} \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2m u x}{\rho^2} \right].$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \partial \operatorname{Im} \frac{1}{z^m} &= \partial \operatorname{Im} \frac{u + iv}{\rho^{2m}} = \partial \frac{v}{\rho^{2m}} = \frac{1}{\rho^{2m}} \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2m v x}{\rho^2} \right], \\ \operatorname{Im} \partial \frac{1}{z^m} &= \operatorname{Im} \partial \frac{u + iv}{\rho^{2m}} = \operatorname{Im} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{1}{\rho^{2m}} - (u + iv) 2m \frac{x}{\rho^{2m+2}} \right] = \frac{1}{\rho^{2m}} \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2m v x}{\rho^2} \right]. \end{aligned}$$

□

Используя лемму 1, результат “дифференцирования” в \tilde{E}_0 запишем на языке векторов l_{jm} , $j = 1, 2$, $m \geq 1$.

Лемма 2.

$$\partial l_{jm} = -m l_{j(m+1)}, \quad j = 1, 2, \quad m \geq 1. \quad (2.6)$$

Доказательство проводим путем вычисления

$$\begin{aligned} \partial l_{1m} &\sim \partial \operatorname{Re} \frac{1}{z^m} = \operatorname{Re} \partial \frac{1}{z^m} = \operatorname{Re} \frac{-m \partial(x + iy)}{z^{m+1}} = -m \operatorname{Re} \frac{1}{z^{m+1}} \sim -m l_{1m+1}, \\ \partial l_{2m} &\sim \partial \operatorname{Im} \frac{1}{z^m} = \operatorname{Im} \partial \frac{1}{z^m} = \operatorname{Im} \frac{-m \partial(x + iy)}{z^{m+1}} = -m \operatorname{Im} \frac{1}{z^{m+1}} \sim -m l_{2m+1}. \end{aligned}$$

□

3. Векторная запись произведений представлений Пуассона

Итак, \hat{E}_0 — функциональное пространство вещественных гармонических функций в верхней полуплоскости. Поэтому в нем определено естественное функциональное умножение элементов из \hat{E}_0 . Все эти возможные произведения обозначим через \hat{A}_0 . В \hat{E}_0 элементы суть дроби: числитель — многочлен, соответствующий векторам $l_{jm}, j = 1, 2, m \geq 1$, а знаменатель есть $|z|^{2m} = \rho^{2m}$.

Произведения таких функций тоже является дробью: знаменатели суть $|z|^{2m+2n}$, а числители — произведения многочленов, которые можно описать через “произведения” векторов $l_{jm} \cdot l_{kn}, k, j = 1, 2$.

Обозначим через \tilde{A}_0 линейное пространство “произведений” векторов $l_{jm} \cdot l_{kn}$ по правилу “позиционного” произведения:

$$(a_1, \dots, a_m) \cdot (b_1, \dots, b_n) = (a_1 b_1, a_1 b_2 + a_2 b_1, \dots, a_{m-1} b_n + a_m b_{n-1}, a_m b_n), \quad (3.1)$$

что соответствует произведению целых чисел в десятичной системе счисления (только без переносов) и произведению многочленов переменных x, y путем приведения подобных членов.

Приведем примеры произведений элементов из \tilde{E}_0 при малых размерностях.

Пусть $m = 2$:

$$\begin{aligned} Px^{-1} &\in E_0, & Px^{-1} &\sim (1, 0) = l_{11} \in \tilde{E}_0; \\ (-\pi)\delta(x) &\in E_0, & (-\pi)\delta(x) &\sim (0, -1) = l_{21} \in \tilde{E}_0; \\ Px^{-2} &\in E_0, & Px^{-2} &\sim (1, 0, -1) = l_{12} \in \tilde{E}_0; \\ (\pi)\delta'(x) &\in E_0, & (\pi)\delta'(x) &\sim (0, -2, 0) = l_{22} \in \tilde{E}_0. \end{aligned}$$

Произведения суть:

$$\begin{aligned} Px^{-1} \cdot Px^{-1} &\sim l_{11} \cdot l_{11} = (1, 0) \cdot (1, 0) = (1, 0, 0) \notin \tilde{E}_0, \\ Px^{-1} \cdot (-\pi)\delta(x) &\sim l_{11} \cdot l_{21} = (1, 0) \cdot (0, -1) = (0, -1, 0) \in \tilde{E}_0, \\ (-\pi)\delta(x) \cdot (-\pi)\delta(x) &\sim l_{21} \cdot l_{21} = (0, -1) \cdot (0, -1) = (0, 0, 1) \notin \tilde{E}_0. \end{aligned}$$

Пусть $m = 3$:

$$\begin{aligned} Px^{-3} &\in E_0, & Px^{-3} &\sim (1, 0, 3, 0) = l_{13} \in \tilde{E}_0; \\ \left(-\frac{\pi}{2}\right)\delta''(x) &\in E_0, & \left(-\frac{\pi}{2}\right)\delta''(x) &\sim (0, -3, 0, 1) = l_{23} \in \tilde{E}_0. \end{aligned}$$

Произведения суть:

$$\begin{aligned} Px^{-1} \cdot Px^{-2} &\sim l_{11} \cdot l_{12} = (1, 0) \cdot (1, 0, -1) = (1, 0, -1, 0) \notin \tilde{E}_0, \\ Px^{-1} \cdot (\pi)\delta'(x) &\sim l_{11} \cdot l_{22} = (1, 0) \cdot (0, -2, 0) = (0, -2, 0, 0) \notin \tilde{E}_0, \\ Px^{-2} \cdot (-\pi)\delta(x) &\sim l_{12} \cdot l_{21} = (1, 0, -1) \cdot (0, -1) = (0, -1, 0, 1) \notin \tilde{E}_0, \\ (-\pi)\delta(x) \cdot (\pi)\delta'(x) &\sim l_{21} \cdot l_{22} = (0, -1) \cdot (0, -2, 0) = (0, 0, 2, 0) \notin \tilde{E}_0. \end{aligned}$$

Введем обозначения всех парных произведений множителей из \tilde{E}_0 одной суммарной степени в знаменателе: $\rho^{2k}\rho^{2n} = \rho^{2m}, m = k + n$:

$$\begin{aligned} l_1^m &= l_{11}l_{1(m-1)}, & l_2^m &= l_{11}l_{2(m-1)}, & l_3^m &= l_{21}l_{1(m-1)}, & l_4^m &= l_{21}l_{2(m-1)} \\ l_5^m &= l_{12}l_{1(m-2)}, & l_6^m &= l_{11}l_{2(m-2)}, & l_7^m &= l_{22}l_{1(m-2)}, & l_8^m &= l_{22}l_{2(m-2)} \\ & & & & \dots & & \\ l_{4k-3}^m &= l_{1k}l_{1(m-k)}, & l_{4k-2}^m &= l_{1k}l_{2(m-k)}, & l_{4k-1}^m &= l_{2k}l_{1(m-k)}, & l_{4k}^m &= l_{2k}l_{2(m-k)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

...

$$l_{4(m-1)-3}^m = l_{1(m-1)}l_{11}, \quad l_{4(m-1)-2}^m = l_{1(m-1)}l_{21}, \quad l_{4(m-1)-1}^m = l_{2(m-1)}l_{11}, \quad l_{4(m-1)}^m = l_{2(m-1)}l_{21}.$$

Последующее за последним произведение по этому правилу имеет вид: $l_{4m-3}^m = l_{1m}l_{10}$ — уже не существующее произведение. В этой таблице всего $4(m-1)$ элементов всевозможных парных произведений общей суммарной степени равной m с учетом перестановочности произведений.

Таблице (3.2) парных произведений в \tilde{A}_0 соответствуют гиперраспределения в A_0 :

$$Px^{-1} \cdot Px^{1-m}, \quad Px^{-1} \cdot C_{m-2}\delta^{(m-2)}(x), \quad C_0\delta(x) \cdot Px^{1-m}, \quad C_0\delta(x) \cdot C_{m-1}\delta^{(m-1)}(x), \\ Px^{-2} \cdot Px^{2-m}, \quad Px^{-2} \cdot C_{m-3}\delta^{(m-3)}(x), \quad C_1\delta'(x) \cdot Px^{2-m}, \quad C_1\delta'(x) \cdot C_{m-3}\delta^{(m-3)}(x), \quad (3.3)$$

...

$$Px^{1-m} \cdot Px^{-1}, \quad Px^{1-m} \cdot C_0\delta(x), \quad C_{(m-2)}\delta^{(m-2)}(x) \cdot Px^{-1}, \quad C_{m-2}\delta^{(m-2)}(x) \cdot C_0\delta(x).$$

В множестве \tilde{A}_0 парных произведений существуют тождественные соотношения, связывающие гиперраспределения с распределениями.

Теорема 1. *Справедливы следующие равенства:*

$$l_2^m + l_3^m = l_{2m}, \quad l_6^m + l_7^m = l_{2m}, \quad \dots, \quad l_{4k-1}^m + l_{4k-2}^m = l_{2m}, \quad \dots, \quad l_{4(m-1)-1}^m + l_{4(m-1)-2}^m = l_{2m}, \quad (3.4)$$

$$l_1^m - l_4^m = l_{1m}, \quad l_5^m - l_8^m = l_{1m}, \quad \dots, \quad l_{4k-3}^m - l_{4k}^m = l_{1m}, \quad \dots, \quad l_{4(m-1)-3}^m - l_{4(m-1)}^m = l_{1m}. \quad (3.5)$$

□

Перепишем эти тождественные соотношения (3.4) и (3.5) в терминах элементов из \hat{A}_0 и \hat{E}_0 , т. е. гиперраспределений и распределений:

$$C_{k-1}\delta^{(k-1)}(x) \cdot Px^{-m+k} + Px^{-k} \cdot C_{m-k-1}\delta^{(m-k-1)}(x) = C_{m-1}\delta^{(m-1)}(x), \quad k = 1, \dots, m-1, \quad (3.6)$$

$$Px^{-k} \cdot Px^{-m+k} - C_{k-1}\delta^{(k-1)}(x) \cdot C_{m-k-1}\delta^{(m-k-1)}(x) = Px^{-m}, \quad k = 1, \dots, m-1. \quad (3.7)$$

При $m = 2$ и $k = 1$ соотношение из (3.7) имеет вид

$$Px^{-1} \cdot Px^{-1} - (-\pi\delta(x)) \cdot (-\pi\delta(x)) = Px^{-2}. \quad (3.8)$$

Формула (3.8) получена Я. Микусинским [6]. Общий случай (3.6), (3.7) установлен Б. Фишером (см. [19]). При этом формула (3.6) имеет следующий вид:

$$Px^{-1} \cdot (-\pi\delta(x)) + (-\pi\delta(x)) \cdot Px^{-1} = \pi\delta'(x), \quad (3.9)$$

Соотношение (3.9) получено у А. Гонсалеса-Домингеса и Р. Скарфиэлло [20].

Можно выписать еще одну систему соотношений в \tilde{A}_0 , вытекающую из коммутативности произведений в функциональном пространстве гармонических функций \hat{A}_0 , а, значит, и \tilde{A}_0 .

Согласно обозначений (3.2) получаем

$$l_1^m = l_{4(m-1)-3}^m, \quad l_2^m = l_{4(m-1)-1}^m, \quad l_3^m = l_{4(m-1)}^m, \quad l_4^m = l_{4(m-1)-4}^m, \\ l_5^m = l_{4(m-1)-7}^m, \quad l_6^m = l_{4(m-1)-5}^m, \quad l_7^m = l_{4(m-1)-6}^m, \quad l_8^m = l_{4(m-1)-8}^m, \dots \quad (3.10)$$

Действительно, при m нечетном количество строчек по 4 элемента в (3.2) равно $(m-1)$, это число четное, и каждой строчке из верхней половины соответствует строчка из нижней половины.

При m четном количество строчек по 4 элемента в (3.2) равно $(m-1)$ — нечетное число, и каждой строчке “выше средней” соответствует строчка из “ниже средней”. В “серединной строке”: $l_{2m-2}^m = l_{2m-1}^m$. Оставшимся двум элементам из нее: $l_{2m-3}^m = l_{1\frac{m}{2}} \cdot l_{1\frac{m}{2}}$ и $l_{2m}^m = l_{2\frac{m}{2}} \cdot l_{2\frac{m}{2}}$ нет равных в (3.2).

4. Семейства регуляризаторов при $m = 2, 3$

Соотношения (3.4), (3.5), (3.10) образуют систему уравнений относительно векторов

$$l_1^m, l_2^m, \dots, l_{4(m-1)}^m$$

из \tilde{A}_0 с известными векторами, “распределениями” l_{1m}, l_{2m}, θ .

При $m = 2$ эта система имеет вид

$$\begin{cases} l_1^2 - l_4^2 = l_{12}, \\ l_2^2 + l_3^2 = l_{22}, \\ l_2^2 = l_3^2, \end{cases} \sim \begin{cases} 1 & 0 & 0 & -1 = l_{12}, \\ 0 & 1 & 1 & 0 = l_{22}, \\ 0 & 1 & -1 & 0 = \theta, \end{cases} \sim \begin{cases} 1 & 0 & 0 & -1 = l_{12}, \\ 0 & 2 & 0 & 0 = l_{22}, \\ 0 & 0 & 2 & 0 = \theta. \end{cases} \quad (4.1)$$

Дефект системы (4.1) равен единице и в ее решении неизвестный вектор l_4^2 произвольный:

$$\begin{cases} l_1^2 = l_{12} + \alpha l_{12} + \beta l_{22}, \\ l_2^2 = \frac{1}{2} l_{22}, \\ l_3^2 = \frac{1}{2} l_{22}, \\ l_4^2 = \alpha l_{12} + \beta l_{22}. \end{cases} \quad (4.2)$$

В терминах гиперраспределений и распределений, получаем

$$\begin{aligned} Px^{-1} \cdot Px^{-1} &= (1 + \alpha)Px^{-2} + \beta\pi\delta'(x), \\ Px^{-1} \cdot (-\pi\delta(x)) &= \frac{\pi}{2}\delta'(x), \\ (-\pi\delta(x)) \cdot (-\pi\delta(x)) &= \alpha Px^{-2} + \beta\pi\delta'(x). \end{aligned} \quad (4.3)$$

При $\alpha = \beta = 0$, имеем

$$\begin{aligned} Px^{-1} \cdot Px^{-1} &= Px^{-2}, \\ Px^{-1} \cdot (-\pi\delta(x)) &= \frac{\pi}{2}\delta'(x), \\ (-\pi\delta(x)) \cdot (-\pi\delta(x)) &= \theta. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Что совпадает с соотношениями в [12].

В дальнейшем для сокращения записи системы линейных уравнений для векторов l_i^j будем записывать (системы) в виде, аналогичном виду последней системы в (4.1), но без скобки системы и знаков равенства. Иногда строки в таких системах будут нумероваться для дальнейшей ссылки на них.

При $m = 3$ получим систему (4.5), в левой части которой — коэффициенты при неизвестных векторах $l_1^3, l_2^3, \dots, l_8^3$, а в правой части — известные векторы θ, l_{13}, l_{23} :

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \theta \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & l_{13} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & l_{23} \end{array} \quad (4.5)$$

После элементарных преобразований имеем

$$\begin{array}{cccccccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \theta \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \theta \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \theta \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \theta \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & l_{13} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & l_{23} .
 \end{array} \tag{4.6}$$

Дефект системы (4.6) равен двум.

5. Дифференцирование в \tilde{A}_0

Операция “дифференцирования” в \tilde{A}_0 тоже порождает соотношения в \tilde{A}_0 . Используя лемму 2 и свойство лейбницевого свойства операции дифференцирования, получим следующее утверждение:

Лемма 3. Для всех $m \geq 3$ и $1 \leq k \leq m - 2$, $0 \leq j \leq 3$ имеют место

$$-\partial l_{4k-j}^{m-1} = (m-1-k)l_{4k-j}^m + kl_{4(k+1)-j}^m. \tag{5.1}$$

Доказательство. Очевидны следующие соотношения:

при $j = 0$, $k = \overline{1, m-2}$

$$\begin{aligned}
 -\partial l_{4k}^{m-1} &= -\partial(l_{2,k} \cdot l_{2,m-1-k}) = -l_{2,k} \cdot \partial l_{2,m-1-k} - \partial l_{2,k} \cdot l_{2,m-1-k} \\
 &= (m-1-k)l_{2,k} \cdot l_{2,m-k} + kl_{2,k+1} \cdot l_{2,m-1-k} = (m-1-k)l_{4k}^m + kl_{4(k+1)}^m;
 \end{aligned}$$

при $j = 1$, $k = \overline{1, m-2}$

$$\begin{aligned}
 -\partial l_{4k-1}^{m-1} &= -\partial(l_{2,k} \cdot l_{1,m-1-k}) = -l_{2,k} \cdot \partial l_{1,m-1-k} - \partial l_{2,k} \cdot l_{1,m-1-k} \\
 &= (m-1-k)l_{2,k} \cdot l_{1,m-k} + kl_{2,k+1} \cdot l_{1,m-1-k} = (m-1-k)l_{4k-1}^m + kl_{4(k+1)-1}^m;
 \end{aligned}$$

при $j = 2$, $k = \overline{1, m-2}$

$$\begin{aligned}
 -\partial l_{4k-2}^{m-1} &= -\partial(l_{1,k} \cdot l_{2,m-1-k}) = -l_{1,k} \cdot \partial l_{2,m-1-k} - \partial l_{1,k} \cdot l_{2,m-1-k} \\
 &= (m-1-k)l_{1,k} \cdot l_{2,m-k} + kl_{1,k+1} \cdot l_{2,m-1-k} = (m-1-k)l_{4k-2}^m + kl_{4(k+1)-2}^m;
 \end{aligned}$$

при $j = 3$, $k = \overline{1, m-2}$

$$\begin{aligned}
 -\partial l_{4k-3}^{m-1} &= -\partial(l_{1,k} \cdot l_{1,m-1-k}) = -l_{1,k} \cdot \partial l_{1,m-1-k} - \partial l_{1,k} \cdot l_{1,m-1-k} \\
 &= (m-1-k)l_{1,k} \cdot l_{1,m-k} + kl_{1,k+1} \cdot l_{1,m-1-k} = (m-1-k)l_{4k-3}^m + kl_{4(k+1)-3}^m.
 \end{aligned}$$

□

При $m = 2$ соотношения (5.1) не имеют смысла, поэтому к системе (4.1) с неизвестными $l_1^2, l_2^2, l_3^2, l_4^2$ не добавляются дополнительные уравнения, дефект системы остается равным единице и решение системы (4.1) зависит от произвольного вектора $l_4^2 = \alpha l_{12} + \beta l_{22}$.

Непосредственным вычислением проверяется:

$$\lambda \partial l_k^2 = \partial \lambda l_k^2, \quad k = 1, \dots, 4, \tag{5.2}$$

т. е. операции дифференцирования и регуляризации перестановочны при $m = 2$.

При $m = 3$ к обеим частям уравнений системы (4.6) с неизвестными $l_k^3, k = 1, \dots, 8$, применим оператор регуляризации λ и ввиду линейности регуляризатора λ получим систему с

той же левой частью относительно неизвестных векторов $\lambda l_k^3, k = 1, \dots, 8$, а правая часть не изменится, так как регуляризатор тождественен на \tilde{E}_0 . Получим систему (5.3):

$$\begin{array}{l}
 \text{"1"} \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \theta \\
 \text{"2"} \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad \theta \\
 \text{"3"} \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad \theta \\
 \text{"4"} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad \theta \\
 \text{"5"} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad l_{13} \\
 \text{"6"} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad l_{23} \quad .
 \end{array} \tag{5.3}$$

Добавим к системе (5.3) строки, полученные из перестановки (5.2), дифференцируя в левой части (5.2) с использованием леммы 3:

$$\begin{aligned}
 -\partial\lambda_1^2 &= -\lambda\partial l_1^2 = \lambda l_1^3 + \lambda l_5^3, \\
 -\partial\lambda_2^2 &= -\lambda\partial l_2^2 = \lambda l_2^3 + \lambda l_6^3, \\
 -\partial\lambda_3^2 &= -\lambda\partial l_3^2 = \lambda l_3^3 + \lambda l_7^3, \\
 -\partial\lambda_4^2 &= -\lambda\partial l_4^2 = \lambda l_4^3 + \lambda l_8^3.
 \end{aligned}$$

В правой части (5.2) вектора $\partial\lambda_1^2, \partial\lambda_2^2, \partial\lambda_3^2, \partial\lambda_4^2$ известны, смотри (4.2), где при дифференцировании применяем лемму 2. Получим дополнительные строки к системе (5.3) относительно тех же неизвестных $\lambda l_k^3, k = 1, \dots, 8$:

$$\begin{array}{l}
 \text{"7"} \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2l_{13} + 2(\alpha l_{13} + \beta l_{23}) \\
 \text{"8"} \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad l_{23} \\
 \text{"9"} \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad l_{23} \\
 \text{"10"} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2(\alpha l_{13} + \beta l_{23}) \quad .
 \end{array} \tag{5.4}$$

Отметим, что:

строка "7" есть линейная комбинация строк "1" и "5" системы (5.3);

строка "8" — линейная комбинация строк "2" и "6" системы (5.3);

строка "9" — линейная комбинация строк "3" и "6" системы (5.3);

строка "10" в линейной комбинации со строкой "4" системы (5.3) получает строку "7" в (5.5).

$$\begin{array}{l}
 \text{"1"} \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \theta \\
 \text{"2"} \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad \theta \\
 \text{"3"} \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad \theta \\
 \text{"4"} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad \theta \\
 \text{"5"} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad l_{13} \\
 \text{"6"} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad l_{23} \\
 \text{"7"} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 2(\alpha l_{13} + \beta l_{23}) \quad .
 \end{array} \tag{5.5}$$

Система (5.5) имеет дефект, равный единице. Вектор λl_7^3 свободный: $\lambda l_7^3 = \epsilon l_{13} + \zeta l_{23}$ и решение системы (5.5) выписывается с учетом тождеств в \tilde{A}_0 :

$$\begin{cases}
 \lambda l_1^3 = \lambda l_5^3 = l_{13} + \alpha l_{13} + \beta l_{23}, \\
 \lambda l_2^3 = \lambda l_7^3 = \epsilon l_{13} + \zeta l_{23}, \\
 \lambda l_3^3 = \lambda l_6^3 = l_{23} - (\epsilon l_{13} + \zeta l_{23}), \\
 \lambda l_4^3 = \lambda l_8^3 = \alpha l_{13} + \beta l_{23}.
 \end{cases} \tag{5.6}$$

В терминах распределений и гиперраспределений имеем

$$\begin{cases}
 Px^{-1} \cdot Px^{-2} = (1 + \alpha)Px^{-3} + \beta \frac{-\pi}{2} \delta''(x), \\
 Px^{-1} \cdot \pi \delta'(x) = \epsilon Px^{-3} + \zeta \left(\frac{-\pi}{2} \delta''(x) \right), \\
 -\pi \delta(x) \cdot Px^{-2} = \frac{-\pi}{2} \delta''(x) - \epsilon Px^{-3} + \zeta \left(\frac{-\pi}{2} \delta''(x) \right), \\
 -\pi \delta(x) \cdot \pi \delta'(x) = \alpha Px^{-3} + \beta \left(\frac{-\pi}{2} \delta''(x) \right).
 \end{cases} \tag{5.7}$$

При $\alpha = \beta = \epsilon = \zeta = 0$ получаем (см. [1])

$$\begin{cases} Px^{-1} \cdot Px^{-2} = Px^{-3}, \\ Px^{-1} \cdot \pi\delta'(x) = \theta, \\ -\pi\delta(x) \cdot Px^{-2} = \frac{-\pi}{2}\delta''(x), \\ -\pi\delta(x) \cdot \pi\delta'(x) = \theta. \end{cases} \quad (5.8)$$

З а м е ч а н и е 1. Можно доказать, что если выписать систему типа (5.2) при $m = 3$ и к ней добавить тождества (3.4), (3.5), (3.10), то окончательный результат будет тот же (5.6), (5.7).

6. Основная теорема

Рассмотрим общий случай вида регуляризатора при $m \geq 3$. Докажем сначала свойство, как в (5.2), в общем случае.

Лемма 4. Для любых $m \geq 3$ и $1 \leq k \leq m - 1, 0 \leq j \leq 3$ имеют место перестановочности

$$\partial[\lambda l_{4k-j}^m] = \lambda[\partial l_{4k-j}^m]. \quad (6.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\begin{aligned} \lambda[\partial l_{4k-j}^m] &= \lambda[\partial(cl_{1,m} + dl_{2,m})] && \text{(см. (2.6))} \\ &= \lambda[-(cml_{1,m+1} + dml_{2,m+1})] && \text{(регуляризатор} \\ &&& \text{оставляет на месте о.ф.)} \\ &= -(cml_{1,m+1} + dml_{2,m+1}) = c(\partial l_{1,m}) + d(\partial l_{2,m}) && \text{(см. (2.6))} \\ &= \partial(cl_{1,m} + dl_{2,m}) && \text{(регуляризатор} \\ &&& \text{оставляет на месте о.ф.)} \\ &= \partial(c\lambda l_{1,m} + d\lambda l_{2,m}) \\ &= c(\partial\lambda l_{1,m}) + d(\partial\lambda l_{2,m}) = \partial[\lambda(cl_{1,m} + dl_{2,m})] = \partial[\lambda l_{4k-j}^m]. \end{aligned}$$

Теорема 2. Для любых $m \geq 2$ существует регуляризатор в \tilde{A}_0 , порождающий вещественную, дифференциальную, коммутативную алгебру в \tilde{E}_0 , зависящий от $2(m - 1)$ вещественных параметров.

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем индукцией по размерности m .

При $m = 2, 3$ такие регуляризаторы найдены.

Пусть известен регуляризатор для размерности $m - 1$. Применив искомый регуляризатор λ на обе части системы (5.1) и используя лемму 4, получим систему (6.2). Для всех $m \geq 3$ и $1 \leq k \leq m - 2, 0 \leq j \leq 3$ имеют место

$$\lambda[(m - 1 - k)l_{4k-j}^m + kl_{4(k+1)-j}^m] = -\lambda\partial[l_{4k-j}^{m-1}] = -\partial[\lambda l_{4k-j}^{m-1}]. \quad (6.2)$$

Парные произведения общей размерности m оказались составлены в таком порядке (см. (3.2)), что коэффициенты линейной системы (6.2) при неизвестных $\lambda l_1^m, \dots, \lambda l_{4(m-1)}^m$ (при $2 \leq k \leq m - 1, 0 \leq j \leq 3$) образуют в левой части матрицу. В ней ниже диагонали стоят нули, и миноры четвертого порядка с диагоналями, расположенными на главной диагонали матрицы (6.2), имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{cccc} m-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m-2 \end{array} \right\} \sim \left\{ \begin{array}{cccc} m-3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m-3 \end{array} \right\} \sim \dots \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\}.$$

А наддиагональ — миноры четвертого порядка, имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\} \sim \left\{ \begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right\} \sim \dots \left\{ \begin{array}{cccc} m-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m-2 \end{array} \right\}. \quad (6.3)$$

Число уравнений в системе (6.2) равно $4(m-2)$, а неизвестных — $4(m-1)$, и дефект системы равен четырем. Добавим к системе (6.4) два уравнения из системы тождеств (3.5), (3.4):

$$\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & l_{1,m-1}, \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & l_{2,m-1}. \end{array} \quad (6.4)$$

Дефект расширенной системы, образованный (6.2) и (6.4), окажется равен двум. Далее, при m четном добавим к системе уравнений (6.3) и (6.4) уравнение из системы тождеств (3.10) — уравнение (6.5):

$$0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad . \quad . \quad . \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \theta. \quad (6.5)$$

С помощью элементарных преобразований полученной системы, с использованием строк “2, 6, 10, ..., 4(m-2) - 6, 4(m-2) - 10” основной таблицы и “2”-й строки из (6.4), получим строку (6.6):

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad . \quad . \quad . \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad v. \quad (6.6)$$

где v — некоторый известный вектор, полученный в результате этих преобразований.

Теперь дефект системы уравнений равен единице.

Добавление к системе соотношений, оставшихся из (3.10) и имеющим в последнем блоке ненулевые элементы (6.7):

$$\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & -1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0, \\ 0 & 0 & 0 & -1 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0, \\ -1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0, \end{array} \quad (6.7)$$

не уменьшают дефект системы. При m нечетном аналогичные преобразования дают дефект системы, равный единице. \square

7. Ассоциативные регуляризаторы при $m = 3$

Для $m = 3$ требование ассоциативности умножения для всех возможных произведений приводит к системе, связывающих параметры регуляризатора, которая имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha\beta - (\alpha + 1)\epsilon = \frac{\epsilon}{2}, \\ (\alpha + 1)(1 - \zeta) + \beta^2 = \frac{\zeta}{2}, \\ \alpha(\alpha + 1) + \beta\epsilon = \frac{\alpha}{2}, \\ \alpha\beta + \beta\zeta = \frac{\beta}{2}. \end{array} \right.$$

Решение этой нелинейной системы есть лишь две четверки чисел:

$$\text{“1” } \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \epsilon = 0, \quad \zeta = \frac{2}{3},$$

$$\text{“2” } \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = 0, \quad \epsilon = 0, \quad \zeta = \frac{1}{2}.$$

В первом случае получаем регулялизатор из [1]:

$$\begin{cases} \lambda(Px^{-1} \cdot Px^{-2}) = Px^{-3}, \\ \lambda(Px^{-1} \cdot (\pi\delta'(x))) = -\frac{\pi}{3}\delta''(x), \\ \lambda(Px^{-2} \cdot (-\pi\delta(x))) = -\frac{\pi}{6}\delta''(x), \\ \lambda((-\pi\delta(x)) \cdot (\pi\delta'(x))) = \theta. \end{cases}$$

Во втором случае имеем

$$\begin{cases} \lambda(Px^{-1} \cdot Px^{-2}) = \frac{1}{2}Px^{-3}, \\ \lambda(Px^{-1} \cdot (\pi\delta'(x))) = -\frac{\pi}{4}\delta''(x), \\ \lambda(Px^{-2} \cdot (-\pi\delta(x))) = -\frac{\pi}{4}\delta''(x), \\ \lambda((-\pi\delta(x)) \cdot (\pi\delta'(x))) = -\frac{1}{2}Px^{-3}. \end{cases}$$

Заметим, что значения гиперраспределений во втором случае при $x \neq 0$ не сохраняются.

8. Расширение \tilde{A}_0

В \tilde{A}_0 есть элементы

$$\frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} \sim Px^{-1} \cdot Px^{-1}, \quad \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} \sim (-\pi\delta(x)) \cdot (-\pi\delta(x)),$$

их сумма тоже лежит в \tilde{A}_0 :

$$\frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\rho^2} \in \tilde{A},$$

т. е. $\frac{1}{\rho^2} \sim Px^{-1} \cdot Px^{-1} + \pi^2\delta(x) \cdot \delta(x)$. С другой стороны,

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \sim Px^{-2} + 2\pi^2\delta(x) \cdot \delta(x)$$

и тогда $Px^{-1} \cdot Px^{-1} + \pi^2\delta(x) \cdot \delta(x) = Px^{-2} + 2\pi^2\delta(x) \cdot \delta(x)$.

Если $1/\rho^2$ умножить на Px^{-1} имеем $Px^{-1} \cdot \frac{1}{\rho^2} = Px^{-1} \cdot Px^{-1} \cdot Px^{-1} + \pi^2Px^{-1} \cdot \delta(x) \cdot \delta(x)$,

т. е. особенность в $x = 0$ повышается.

В \tilde{A}_0 нет элемента $\rho^2 = x^2 + y^2$.

Пусть $\tilde{\tilde{A}}_0$ — все возможные произведения элементов из \tilde{A}_0 на $(x^2 + y^2)^n = \rho^{2n}$:

$$\rho^2 \cdot Px^{-1} \sim (x^2 + y^2) \frac{x}{x^2 + y^2} = x \rightarrow f(x) = x,$$

$$\rho^4 \cdot Px^{-2} \sim (x^2 + y^2)^2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = x^2 - y^2 \rightarrow f(x) = x^2,$$

$$\rho^4 \cdot Px^{-1} \sim (x^2 + y^2)^2 \frac{x}{x^2 + y^2} = x^3 + xy^2 \rightarrow f(x) = x^3.$$

Все пределы в (D') при $y \rightarrow +0$.

Таким образом, в $\tilde{\tilde{A}}_0$ содержатся представления многочленов по переменной x .

Аналогично

$$\rho^2 \cdot \delta(x) \sim (x^2 + y^2) \frac{-y}{x^2 + y^2} = -y \rightarrow f(x) = 0.$$

Рассмотрим тройное произведение

$$(Px^{-1} \cdot x) \cdot (\pi\delta(x)) \sim \frac{x}{x^2 + y^2} x \frac{-y}{x^2 + y^2} \sim Px^{-1}(x \cdot \pi\delta(x)).$$

Как видно, выполняется ассоциативность в пространстве гиперраспределений в отличие от произведений обобщенных функций по Шварцу, где такое произведение неассоциативно.

Найдем распределение, соответствующее такому представлению тройного произведения:

$$Px^{-1}x\pi\delta(x) \sim \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)^2 x \rho^2 \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-yx^2}{(x^2 + y^2)^2} = f(x, y),$$

$$\forall \varphi \in D : \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-yx^2}{(x^2 + y^2)^2} \varphi(x) dx = -y \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} \varphi(x) dx.$$

Поскольку, используя действие регуляризатора λ , имеем

$$\forall \varphi \in D : \lim_{y \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} \varphi(x) dx = \langle Px^{-1} \cdot Px^{-1}, \varphi \rangle = \langle \alpha Px^{-2} + \beta(-\pi\delta'(x)), \varphi \rangle,$$

получим

$$\lim_{y \rightarrow +0} y \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} \varphi(x) dx = \theta.$$

Отсюда, тройное произведение $Px^{-1} \cdot x \cdot (\pi\delta(x)) = \theta$. Однако,

$$\frac{-yx^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-y}{(x^2 + y^2)} + \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2},$$

где функции $\frac{-y}{(x^2 + y^2)}$, $\frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2}$ — элементы \tilde{A}_0 .

Тогда,

$$\forall \varphi \in D : \lim_{y \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{-y}{(x^2 + y^2)} + \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2} \right) \varphi(x) dx$$

$$= \langle \pi\delta(x), \varphi \rangle + \lim_{y \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2} \right) \varphi(x) dx = \langle \pi\delta(x), \varphi \rangle.$$

Так как

$$\lim_{y \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \varphi(x) dx = \langle \pi\delta(x) \cdot \pi\delta(x), \varphi \rangle = \langle \alpha Px^{-2} + \beta(-\pi\delta'(x)), \varphi \rangle,$$

то

$$\lim_{y \rightarrow +0} y \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \varphi(x) dx = \theta$$

и

$$Px^{-1} \cdot x \cdot (\pi\delta(x)) = \pi\delta(x).$$

Таким образом, действие регуляризатора λ на это тройное произведение в пространстве \tilde{A}_0 неоднозначно и эти значения совпадают с разными значениями тройного произведения по Шварцу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Schwartz L.** Theorie des distributions. Hermann; Paris, vol. I, 1950, 148 p; vol II, 1951, 169 p.
2. **Schwartz L.** Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions, Schwartz L. Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions // C.R. Acad. Sci. Paris. 1954. Vol. 239. P. 847–848.
3. **Bremermann H.J.** Some remarks on analytic representations and products of distributions // SIAM J. Appl. Math. 1967. Vol 15, no. 4. P. 929–943. <https://doi.org/10.1137/0115083>
4. **Бремерман Г.** Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М.: Мир, 1968. 276 с.
5. **Соболев С.Л.** Задача Коши в пространстве функционалов // Докл. АН СССР. 1935. Т. 3. С. 291–294.
6. **Mikusinski J.** On the square of the Dirac delta-distribution // Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 1966. Vol. 14, no. 9. P. 511–513.
7. **Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р.** Теория обобщенных функций. М.: Мир, 1976. 311 с.
8. **Sato M.** Theory of hyperfunctions I,II // J. Fac. Sci. Univ. Tokio. 1959. Vol. I. P. 139–193; 1960. Vol. II. P. 387–437.
9. **Иванов В.К.** Умножение распределений и регуляризация расходящихся интегралов, Изв. вузов. Математика. 1971. № 3. С. 41–49.
10. **Иванов В.К.** Гиперраспределения и умножение распределений Шварца // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204, № 5. С. 1045–1048
11. **Иванов В.К.** Алгебра, порождаяемая функцией Хевисайда и дельта-функциями, Изв. вузов. Математика. 1977. № 10. С. 65–69.
12. **Иванов В.К.** Ассоциативная алгебра простейших обобщенных функций // Сиб. мат. журн. 1979. Т. 20, № 4. С. 731–740.
13. **Colombeau J.-F** Elementary introduction to new generalized functions. Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1985. 285 p.
14. **Дерр В.Я., Кинзебулатов Д.М.** Динамические обобщенные функции и проблема умножения. Изв. вузов, Математика. 2007. № 5. С. 33–45.
15. **Антоневич А.Б., Шагова Т.Г.** Умножение распределений и алгебры мнемофункций // Современная математика. Фундаментальные направления. 2019. Vol. 65, № 3. P. 339–389.
16. **Dias N.C., Jorge C., Prata J.N.** An existence and uniqueness result about algebras of Schwartz distributions // Monatshefte für Mathematik. 2024. Vol. 203. P. 43–61. <https://doi.org/10.1007/s00605-023-01917-z>
17. **Miteva M., Koceva Lazarova L., Zlatanovska B, Stojkovikj N.** Products of distributions in Colombeau algebra // Asian-European J. Math. 2024. Vol. 17, no. 7. Art. no. 2450048. <https://doi.org/10.1142/S1793557124500487>
18. **Chaib M., Taqibibt M., Melliani S., El Omari M.** Colombeau algebras of asymptotically almost automorphic generalized functions: Properties and applications // Analysis. 2025. Vol. 45, no. 2. P. 105–114. <https://doi.org/10.1515/analy-2023-0030>
19. **Fisher B.** Products of generalized functions // Studia Math. 1969. Vol. 33, no. 2. p. 227–230.
20. **Gonzalez-Dominguez A., Scarfiello R.** Nota sobre la formula v.p. $\frac{1}{x}\delta = -\frac{1}{2}\delta'$ // Rev. de la Union Matem. Argen. 1956. Vol. XVII. P. 53–67.

Поступила 21.02.2025

После доработки 7.08.2025

Принята к публикации 18.08.2025

Макаров Анатолий Васильевич
 канд. физ.-мат. наук, доцент
 деп. математики, механики и комп. наук
 Институт естественных наук и математики
 Уральский федеральный университет
 г. Екатеринбург
 e-mail: anatoliy.makarov@urfu.ru

REFERENCES

1. Schwartz L. *Théorie des distributions*. Paris, Hermann, vol. I, 1950, 148 p.; vol. II, 1951, 169 p.
2. Schwartz L. Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 1954, vol. 239, pp. 847–848.
3. Bremermann H.J. Some remarks on analytic representations and products of distributions. *SIAM J. Appl. Math.*, 1967, vol. 15, no. 4, pp. 929–943. <https://doi.org/10.1137/0115083>
4. Bremermann H. *Distributions, complex variables and Fourier transforms*. Addison-Wesley Pub. Co., 1965, 186 p. Translated to Russian under the title *Raspredeleniya, kompleksnyye peremennyye i preobrazovaniya Fur'ye*. Moscow, Mir Publ., 1968, 276 p.
5. Sobolev S.L. The Cauchy problem in the space of functionals. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1935, vol. 3, pp. 291–294 (in Russian).
6. Mikusinski J. On the square of the Dirac delta-distribution. *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 1966, vol. 14, no. 9, pp. 511–513.
7. Antosik P., Mikusinsky Ya., Sikorsky R. *Theory of distributions. The sequential approach*. Amsterdam, Elsevier, 1973, 285 p. Translated to Russian under the title *Teoriya obobshchennykh funktsiy. Sekventsial'nyy podkhod*. Moscow, Mir Publ., 1976, 311 p.
8. Sato M. Theory of hyperfunctions. *J. Fac. Sci. Univ. Tokio.*, 1959, vol. I, pp. 139–193; 1960, vol. II, pp. 387–437.
9. Ivanov V.K. Multiplication of distributions and regularization of divergent integrals. *Izv. Vyssh. Ucheb. Zaved. Matematika*, 1971, no. 3, pp. 41–49 (in Russian).
10. Ivanov V.K. Hyperdistributions and the multiplication of Schwartz distributions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1972, vol. 204, no. 5, pp. 1045–1048 (in Russian).
11. Ivanov V. The algebra generated by the Heaviside function and the delta-functions. *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 1977, vol. 21(10), pp. 53–56.
12. Ivanov V.K. An associative algebra of elementary generalized functions. *Siberian Math. J.*, 1979, vol. 20, no. 4, pp. 509–516.
13. Colombeau J.-F. *Elementary introduction to new generalized functions*. Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1985, 282 p.
14. Derr V.Y., Kinzebulatov D.M. Dynamical generalized functions and the multiplication problem. *Russ. Math. (Izv. VUZ. Matematika)*, 2007, vol. 51, no. 5, pp. 32–43. <https://doi.org/10.3103/S1066369X07050040>
15. Antonevich A.B., Shagova T.G. Multiplication of distributions and algebras of mnemofunctions. *J. Math. Sci.*, 2022, vol. 266, pp. 1–40. <https://doi.org/10.1007/s10958-022-06051-z>
16. Dias N.C., Jorge C., Prata J.N. An existence and uniqueness result about algebras of Schwartz distributions. *Monatshefte für Mathematik*, 2024, vol. 203, pp. 43–61. <https://doi.org/10.1007/s00605-023-01917-z>
17. Miteva M., Koceva Lazarova L., Zlatanovska B, Stojkovikj N. Products of distributions in Colombeau algebra. *Asian-European J. Math.*, 2024, vol. 17, no. 7, art. no. 2450048. <https://doi.org/10.1142/S1793557124500487>
18. Chaib M., Taqibit M., Melliani S., El Omari M. Colombeau algebras of asymptotically almost automorphic generalized functions: Properties and applications // *Analysis*. 2025. Vol. 45, no. 2. P. 105–114. <https://doi.org/10.1515/anly-2023-0030>
19. Fisher B. Products of generalized functions. *Studia Math.*, 1969, vol. 33, no. 2, pp. 227–230.
20. Gonzalez-Dominguez A., Scarfiello R. Nota sobre la formula v. p. $\frac{1}{x}\delta = -\frac{1}{2}\delta'$. *Rev. de la Union Matem. Argen.*, 1956, vol. XVII, pp. 53–67.

Received February 21, 2025

Revised August 7, 2025

Accepted August 18, 2025

Anatoliy Vasilievich Makarov, Cand. Sci. (Phys-Math), Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: anatoliy.makarov@urfu.ru.

Cite this article as: A. V. Makarov. Parametric families of regularizers for products of elementary generalized functions. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 3, pp. 185–199.