ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 31 № 3 2025

УДК 517.518.86

НЕРАВЕНСТВО БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ ДРОБНЫХ СТЕПЕНЕЙ ОДНОМЕРНОГО ЛАПЛАСИАНА ДАНКЛЯ И МНОГОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

А. О. Леонтьева

В статье рассматриваются дробные степени порядка $\alpha > 0$ лапласиана Данкля и оператора Лапласа (производные Рисса) на классах целых функций экспоненциального сферического типа одной и нескольких переменных. Изучаются различные определения этих дробных степеней: при помощи множителя Фурье (Фурье—Данкля), гиперсингулярных интегралов, интерполяционных формул, содержащих обычные и обобщенные сдвиги с равномерными и неравномерными шагами. Исследована взаимосвязь между дробной степенью лапласиана Данкля и производной Рисса для функций одной и нескольких переменных. Исследуются точные неравенства Бернштейна для этих операторов. Ранее С. С. Платонов (2007) установил точное неравенство для лапласиана Данкля ($\alpha = 2$) на множестве четных функций. О. Л. Виноградов (2023) доказал точные неравенства для дробной степени лапласиана Данкля и производной Рисса функций нескольких переменных при $\alpha \geqslant 1$. В данной статье получены точные неравенства Бернштейна для дробной степени лапласиана Данкля и производной Рисса функций нескольких переменных при $0 < \alpha < 1$. Инструментом доказательства являются интерполяционные формулы, содержащие обобщенные сдвиги Данкля с неравномерными шагами — нулями функций Бесселя.

Ключевые слова: производная Рисса, лапласиан Данкля, целые функции экспоненциального сферического типа, неравенство Бернштейна, равномерная норма.

Leont'eva A.O. Bernstein inequality for fractional powers of univariate Dunkl Laplacian and multivariate Laplace operator of entire functions.

We consider fractional powers of order $\alpha > 0$ of the Dunkl Laplacian and the Laplace operator (Riesz derivatives) on classes of entire functions of exponential spherical type of one and many variables. The present study investigates various definitions of these fractional powers, including those involving Fourier (Fourier–Dunkl) multipliers, hypersingular integrals, interpolation formulas containing usual and generalized translations with equidistant and non-equidistant steps. We examine the interrelations between the fractional powers of the Dunkl Laplacian and Riesz derivatives for functions of one and many variables. Sharp Bernstein inequalities for these operators are explored. The study delves into the exploration of sharp Bernstein inequalities for these operators. Earlier, S. S. Platonov (2007) obtained a sharp inequality for the Dunkl Laplacian ($\alpha = 2$) on the set of even functions. O. L. Vinogradov (2023) proved sharp inequalities for the fractional powers of the Dunkl Laplacian and Riesz derivatives of functions of several variables for $\alpha \geqslant 1$. In this paper, we obtain sharp Bernstein inequalities for the fractional powers of the Dunkl Laplacian and Riesz derivatives of functions of several variables for $0 < \alpha < 1$. The tools for the proof are interpolation formulas containing generalized Dunkl translations with non-equidistant steps, which are zeros of Bessel functions.

Keywords: Riesz derivative, Dunkl Laplacian, entire functions of exponential spherical type, Bernstein inequality, uniform norm.

MSC: 26A33, 32A15, 41A17

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-3-167-184

1. Введение

В статье доказана эквивалентность нескольких определений дробных степеней порядка $\alpha > 0$ лапласиана Данкля на классе Бернштейна целых функций экспоненциального типа одной переменной, а также эквивалентность определений дробных степеней оператора Лапласа на классе Бернштейна целых функций экспоненциального сферического типа нескольких переменных. Исследована взаимосвязь дробных степеней лапласиана Данкля, оператора Лапласа и производных Рисса.

Получены точное неравенство Бернштейна для дробных степеней $0 < \alpha < 1$ лапласиана Данкля на классе Бернштейна целых функций экспоненциального типа одной переменной и точное неравенство Бернштейна для дробных степеней $0 < \alpha < 1$ оператора Лапласа на классе Бернштейна целых функций экспоненциального сферического типа нескольких переменных.

В этом разделе содержатся необходимые обозначения, информация об операторе Лапласа в $\mathbb{R}^m$ и одномерном лапласиане Данкля, излагаются нужные в дальнейшем сведения из гармонического анализа Фурье—Данкля, приводятся вспомогательные утверждения о целых функциях экспоненциального сферического типа. Раздел 2 посвящен изучению дробных степеней $(-\Delta)^{\alpha/2}$ и $\left(-D_\nu^2\right)^{\alpha/2}$ оператора Лапласа Δ в $\mathbb{R}^m$ и лапласиана Данкля D_ν^2 на вещественной оси. Доказана эквивалентность различных подходов, использовавшихся ранее различными авторами, к определению дробных степеней, изучена связь между $(-\Delta)^{\alpha/2}$ и $\left(-D_\nu^2\right)^{\alpha/2}$. В разд. 3 описана история изучения неравенств Бернштейна, формулируются точные неравенства для дробных степеней Δ и D_ν^2. В разд. 4 приведены доказательства точных неравенств Бернштейна.

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^m$ — вещественное m-мерное пространство. Для m-мерных векторов $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ обычным образом определяется их скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \ldots + x_m y_m$ и евклидова норма $|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$. Всюду далее $\mathbb{B}_r^m$ — замкнутый m-мерный евклидов шар радиуса r с центром в начале координат, $\mathbb{S}^{m-1}$ — евклидова единичная $(m-1)$-мерная сфера. Будем обозначать через μ меру Лебега на сфере. Известно, что мера всей сферы равна $\mu(\mathbb{S}^{m-1}) = 2\pi^{m/2}/\Gamma(m/2)$.

Через $L_p(\mathbb{R}^m)$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ обозначаются классические пространства Лебега измеримых комплекснозначных функций на $\mathbb{R}^m$, а через $C(\mathbb{R}^m)$ — пространство непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}^m$ функций. Всюду в статье $\|\cdot\|$ будет обозначать равномерную норму $\|f\| = \|f\|_{C(\mathbb{R}^m)} = \sup\{|f(x)|\colon x \in \mathbb{R}^m\}$ функции на $\mathbb{R}^m$ (на оси при $m = 1$). Кроме того, при $\nu \geqslant -1/2$ и $1 \leqslant p < \infty$ рассматриваются пространства $L_p^\nu(\mathbb{R}) = L_p(\mathbb{R}, |x|^{2\nu+1}dx)$ измеримых комплекснозначных функций вещественной переменной, для которых функция $|f(x)|^p|x|^{2\nu+1}$ суммируема на $\mathbb{R}$. При $p = \infty$ имеет место $L_\infty^\nu(\mathbb{R}) = L_\infty(\mathbb{R})$ для всех $\nu \geqslant -1/2$; при $\nu = -1/2$, соответственно, $L_p^{-1/2}(\mathbb{R}) = L_p(\mathbb{R})$.

1.1. Классический оператор Лапласа и лапласиан Данкля

Пусть f — непрерывная функция на $\mathbb{R}^m$. Обозначим через $(S_{\mathbf{x}}f)(y)$ усреднение функции f по сферам с центром в точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ радиуса $|y|$, где $y \in \mathbb{R}$:

$$(S_{\mathbf{x}}f)(y) = \frac{1}{\mu(\mathbb{S}^{m-1})} \int\limits_{\mathbb{S}^{m-1}} f(\mathbf{x} + |y|\mathbf{t})\,d\mu(\mathbf{t}), \quad (S_{\mathbf{x}}f)(0) = \lim_{y\to 0}(S_{\mathbf{x}}f)(y) = f(\mathbf{x}),$$

где $d\mu(\mathbf{t})$ — дифференциал площади единичной сферы $\mathbb{S}^{m-1}$ пространства $\mathbb{R}^m$.

Равенство

$$\Delta f(\mathbf{x}) = 2m \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(S_{\mathbf{x}}f)(\varepsilon) - (S_{\mathbf{x}}f)(0)}{\varepsilon^2} \tag{1.1}$$

на функциях, для которых этот предел существует, определяет *оператор Лапласа* (см., например, [1, гл. 2, §4]). Если f дважды непрерывно дифференцируема, то (1.1) совпадает с классическим определением $\Delta f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^m \partial^2 f/\partial x_k^2$. Из (1.1) следует, что значение оператора Лапласа в точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ выражается через средние значения функции по сферам с центром в точке $\mathbf{x}$ формулой

$$\Delta f(\mathbf{x}) = \Delta F_{\mathbf{x}}(0) = m(S_{\mathbf{x}}f)''(0), \quad F_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = (S_{\mathbf{x}}f)(|\mathbf{y}|), \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m. \tag{1.2}$$

На множестве непрерывно дифференцируемых на оси $\mathbb{R}$ функций f соотношением

$$D_\nu f(x) = f'(x) + \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{f(x) - f(-x)}{x}$$

определяется *дифференциально-разностный оператор Данкля.* Квадрат оператора Данкля $D_\nu^2 = D_\nu D_\nu$ называют *лапласианом Данкля* (*одномерным лапласианом Данкля*). Подробную информацию о лапласиане Данкля и более общем многомерном лапласиане Данкля и его дробных степенях можно найти в [2].

Оператор Лапласа и лапласиан Данкля тесно взаимосвязаны. Для четных функций лапласиан Данкля совпадает с оператором Бесселя $d^2/dx^2 + ((2\nu+1)/x)(d/dx)$ [3], который при $\nu = (m-2)/2$ является радиальной частью оператора Лапласа. А именно, пусть f является радиальной функцией, т.е. $f(\mathbf{x}) = f_0(|\mathbf{x}|)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, где f_0 — четная, тогда справедливо равенство

$$\Delta f(\mathbf{x}) = f_0''(r) + \frac{m-1}{r} f_0'(r) = \left(D^2_{\frac{m-2}{2}} f_0\right)(r), \quad r = |\mathbf{x}|.$$

Для произвольной дважды дифференцируемой функции f, используя (1.2), получаем

$$\Delta f(\mathbf{x}) = m(S_{\mathbf{x}} f)''(0) = D^2_{\frac{m-2}{2}}(S_{\mathbf{x}} f)(0), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m. \tag{1.3}$$

Гармонический анализ Фурье — Данкля интенсивно развивается в последние десятилетия; эта тематика хорошо изложена в статьях [2;4;5] (см. также приведенные там ссылки). Он обобщает классическую теорию преобразования Фурье аналогично тому, как анализ Фурье — Бесселя (см., например, [3, §2; 6, §3]) обобщает косинус-преобразование Фурье четных функций. Приведем здесь лишь необходимые и используемые в дальнейшем понятия и утверждения из анализа Фурье — Данкля.

1.2. Сведения из гармонического анализа Фурье — Данкля

На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ определим функции e_ν равенством

$$e_\nu(z) := j_\nu(z) - i j_\nu'(z) = j_\nu(z) + \frac{iz}{2\nu+2} j_{\nu+1}(z),$$

в котором $j_\nu(z) = 2^\nu \Gamma(\nu+1) J_\nu(z)/z^\nu$ — нормированные функции Бесселя (см. [7]). Для произвольного $y \in \mathbb{R}$ функция $e_\nu(y\cdot)$ является собственной функцией оператора Данкля D_ν, соответствующей чисто мнимому собственному числу iy. А именно, для произвольного $y \in \mathbb{R}$ функции $e_\nu(y\cdot)$ являются единственным решением задачи Коши $D_\nu e_\nu(xy) = iy\, e_\nu(xy)$, $e_\nu(0) = 1$. Функции e_ν обобщают экспоненты с мнимым показателем; при $\nu = -1/2$ имеет место равенство $e_{-1/2}(x) = e^{ix}$. Кроме того, отметим, что e_ν — целые функции экспоненциального типа $\sigma = 1$, ограниченные на вещественной оси: $|e_\nu(x)| \leqslant e_\nu(0) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Для произвольного числа $y \in \mathbb{R}$ линейные комбинациии $g_y(x) = a j_\nu(xy) + b j_\nu'(xy)$, рассматриваемые как функции переменной $x \in \mathbb{R}$, являются собственными функциями лапласиана Данкля:

$$D_\nu^2 g_y(x) = -y^2 g_y(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Прямое и обратное преобразования Фурье — Данкля определяются для функций из $L_1^\nu(\mathbb{R})$ по формулам

$$\mathscr{F}_\nu f(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e_\nu(-xy) |x|^{2\nu+1} dx, \quad \mathscr{F}_\nu^{-1} g(x) = \frac{1}{4^{\nu+1}\Gamma^2(\nu+1)} \int_{\mathbb{R}} g(y) e_\nu(xy) |y|^{2\nu+1} dy.$$

Если $f \in L_1^\nu(\mathbb{R})$ и $g = \mathscr{F}_\nu f \in L_1^\nu(\mathbb{R})$, то $f = \mathscr{F}_\nu^{-1} g$. Ясно, что при $\nu = -1/2$ преобразование $\mathscr{F}_\nu$ совпадает с классическим преобразованием Фурье. Если $f \in L_1^\nu$ и $\widetilde{f} = \mathscr{F}_\nu^{-1} f \in L_1^\nu \cap L_1^{\nu+1}$ и при этом f непрерывно дифференцируема, то имеет место формула $\mathscr{F}_\nu(D_\nu f)(y) = iy\, \mathscr{F}_\nu f(y)$.

В дальнейшем будет использоваться более общее понятие преобразования Фурье — Данкля конечной (комплекснозначной) борелевской меры ω, определяемое формулой

$$(\mathscr{F}_\nu \omega)(y) = \int_{\mathbb{R}} e_\nu(xy) d\omega(x).$$

Обобщенный сдвиг Данкля τ_ν^y является обобщением классического оператора сдвига $\tau_{-1/2}^y f(x) = f(x+y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Историю его изучения и подробную информацию о нем можно найти в [8, §1–§3; 2, §1,2; 9, §2; 4, §2.3] и указанных там ссылках. Явный вид этого оператора приведен в [10].

Для функций $f \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap L_1^\nu(\mathbb{R})$ таких, что $f = \mathscr{F}_\nu \widetilde{f}$, где $\widetilde{f} \in L_1^\nu(\mathbb{R})$, обобщенный сдвиг Данкля $\tau_\nu^y f$ определяет равенство

$$\tau_\nu^y f(x) = \int_{\mathbb{R}} |t|^{2\nu+1} e_\nu(tx) e_\nu(ty) \widetilde{f}(t) dt.$$

Усредненный оператор сдвига $T_\nu^y = T^y$ (см. [8, §3; 2, §2; 4, §2.1] и данные там ссылки) определяется по формуле $T_\nu^y = (\tau_\nu^y + \tau_\nu^{-y})/2$. На четных функциях T_ν^y совпадает с обобщенным сдвигом Бесселя [3, §1, §2; 6, §4.1].

1.3. Классы целых функций экспоненциального типа

Обозначим через $\mathbf{E}_\sigma^m$ множество целых функций экспоненциального сферического типа не выше σ, т. е. целых функций f, обладающих свойством

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists A_\varepsilon \colon \ \ \forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}^m \ \ |f(\mathbf{z})| \leqslant A_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)|\mathbf{z}|}, \quad |\mathbf{z}| = \sqrt{|z_1|^2 + \ldots + |z_m|^2}.$$

По теореме Пэли — Винера — Шварца [11, гл. 3, §3.2.6] преобразование Фурье функций из $\mathbf{E}_\sigma^m \cap L_p(\mathbb{R}^m)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, понимаемое как обобщенная функция, сосредоточено в замкнутом шаре $\mathbb{B}_\sigma^m$ радиуса σ с центром в начале координат. В частности, если $f \in \mathbf{E}_\sigma^m \cap L_p(\mathbb{R}^m)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, то имеет место представление

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{B}_\sigma^m} e^{i(\mathbf{t},\mathbf{x})} g(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \quad g \in L_{p'}(\mathbb{B}_\sigma^m), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Наиболее широким среди $\mathbf{E}_\sigma^m \cap L_p(\mathbb{R}^m)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, является класс Бернштейна $\mathbf{B}_\sigma^m := \mathbf{E}_\sigma^m \cap L_\infty(\mathbb{R}^m) = \mathbf{E}_\sigma^m \cap C(\mathbb{R}^m)$ — класс целых функций экспоненциального сферического типа не выше σ, ограниченных на $\mathbb{R}^m$. В одномерном случае этот класс был введен и изучен С. Н. Бернштейном [12], будем обозначать его $\mathbf{B}_\sigma = \mathbf{B}_\sigma^1$. Кроме того, используем обозначение $\mathbf{B}_\sigma^{m,\mathrm{rad}}$ для множества радиальных на $\mathbb{R}^m$ функций из $\mathbf{B}_\sigma^m$; $\mathbf{B}_\sigma^{\mathrm{ev}}$ для подмножества четных функций из $\mathbf{B}_\sigma$.

Обозначим через $\mathbf{V}_\sigma^m$ класс целых функций f экспоненциального сферического типа, не превосходящего σ, которые представимы в виде преобразования Фурье конечной борелевской меры ω, сосредоточенной в шаре $\mathbb{B}_\sigma^m$:

$$f(\mathbf{z}) = \int_{\mathbb{B}_\sigma^m} e^{i(\mathbf{t},\mathbf{z})} d\omega(\mathbf{t}), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{C}^m. \tag{1.4}$$

При $\nu \geqslant -1/2$ обозначим через $\mathbf{V}_{\sigma,\nu}$ класс целых функций f одной переменной экспоненциального типа, не превосходящего σ, которые представимы в виде преобразования Фурье — Данкля конечной борелевской меры ω на отрезке $[-\sigma, \sigma]$:

$$f(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} e_\nu(tz) d\omega(t), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{1.5}$$

В случае $m = 1$ и $\nu = -1/2$ имеет место $\mathbf{V}_\sigma^1 = \mathbf{V}_{\sigma,-1/2}$; для такого класса будем использовать обозначение $\mathbf{V}_\sigma$.

Неравенство $|e_\nu(x)| \leqslant e_\nu(0) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, влечет вложение классов $\mathbf{V}_{\sigma,\nu} \subseteq \mathbf{B}_\sigma$, $\nu \geqslant -1/2$. Аналогично неравенство $\left|e^{i(\mathbf{t},\mathbf{x})}\right| \leqslant 1$, $\mathbf{t},\mathbf{x} \in \mathbb{R}$, влечет вложение $\mathbf{V}_\sigma^m \subseteq \mathbf{B}_\sigma^m$. Обратные вложения не имеют места.

В дальнейшем понадобятся следующие утверждения, связывающие классы $\mathbf{B}_\sigma^m$ и $\mathbf{B}_\sigma^{\mathrm{ev}}$.

Лемма 1. *Если $F \in \mathbf{B}_\sigma^m$, то для произвольного $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ функция $S_\mathbf{x}F$ — из класса $\mathbf{B}_\sigma^{\mathrm{ev}}$, при этом $\|S_\mathbf{x}F\| \leqslant \|F\|$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $\mathbf{x} = 0$. Действительно, если $F \in \mathbf{B}_\sigma^m$, то $F_\mathbf{x}(\mathbf{t}) = f(\mathbf{t} - \mathbf{x}) \in \mathbf{B}_\sigma^m$ и $S_\mathbf{x}F = S_0F_\mathbf{x}$.

В лемме статьи [13] доказано, что если $F \in \mathbf{B}_\sigma^m \cap L(\mathbb{R}^m)$, то $S_0F \in \mathbf{B}_\sigma^{\mathrm{ev}}$. На самом деле доказательство леммы подходит для любой $F \in \mathbf{B}_\sigma^m$. Наконец, для произвольного $y \in \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$|S_0F(y)| \leqslant \frac{1}{\mu(\mathbb{S}^{m-1})} \int\limits_{\mathbb{S}^{m-1}} |F(|y|\mathbf{t})|d\mu(\mathbf{t}) \leqslant \|F\|.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Радиальная функция $F(\mathbf{x}) = f(|\mathbf{x}|)$ принадлежит $\mathbf{B}_\sigma^{m,\mathrm{rad}}$ тогда и только тогда, когда f принадлежит $\mathbf{B}_\sigma^{\mathrm{ev}}$. При этом $\|F\| = \|f\|$.*

Доказательство. В силу леммы 1 достаточно показать, что если $f \in \mathbf{B}_\sigma^{\mathrm{ev}}$, то $F \in \mathbf{B}_\sigma^{m,\mathrm{rad}}$ и $\|F\| \leqslant \|f\|$. В [11, гл. 3, §3.6.1] доказано, что в этом случае $F \in \mathbf{E}_\sigma^m$. Радиальность F и нужное неравенство для $\|F\|$ очевидны.

Лемма 2 доказана.

На классах $\mathbf{V}_\sigma^m$ и $\mathbf{V}_{\sigma,\nu}$ соответственно операторы Лапласа и Данкля задаются множителями в интегралах Фурье и Фурье—Данкля. А именно, имеют место следующие представления. Пусть функция $f \in \mathbf{V}_\sigma^m$ задана интегралом Фурье (1.4), тогда $\Delta f(\mathbf{x}) = -\int_{\mathbb{B}_\sigma^m} |\mathbf{t}|^2 e^{i(\mathbf{t},\mathbf{x})} d\omega(\mathbf{t})$. Если функция $f \in \mathbf{V}_{\sigma,\nu}$ задана интегралом Фурье—Данкля (1.5), то для операторов Данкля $D_\nu f$ и $D_\nu^2 f$ справедливы формулы

$$D_\nu f(x) = \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} ite_\nu(tx)d\omega(t), \quad D_\nu^2 f(x) = -\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} t^2 e_\nu(tx)d\omega(t).$$

Отметим, что на классе $\mathbf{V}_{\sigma,\nu}$ операторы обобщенного сдвига Данкля и усредненного обобщенного сдвига также определяются мультипликаторами. А именно, если функция $f \in \mathbf{V}_{\sigma,\nu}$ задана интегралом Фурье—Данкля (1.5), то для обобщенных сдвигов имеют место формулы

$$\tau_\nu^y f(x) = \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} e_\nu(ty)e_\nu(tx)d\omega(t), \quad T_\nu^y f(x) = \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} j_\nu(ty)e_\nu(tx)d\omega(t). \tag{1.6}$$

Из последних равенств, в частности, следует, что операторы обобщенных сдвигов τ_ν^y и T_ν^y действуют из пространства $\mathbf{V}_{\sigma,\nu}$ в себя. Кроме того, для любой $f \in \mathbf{V}_{\sigma,\nu}$ при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}$ функции $\tau_\nu^y f(x)$ и $T_\nu^y f(x)$ по переменной y аналитически продолжаются в комплексную плоскость до целых функций класса $\mathbf{V}_{\sigma,\nu}$, при этом вторая является четной функцией. На самом деле для усредненного обобщенного сдвига справедливо более сильное утверждение.

Лемма A [9, лемма 1]. *Пусть $f \in \mathbf{B}_\sigma$ и $\nu \geqslant -1/2$. Тогда при любом фиксированном $x \in \mathbb{R}$ функция $g_x(y) = T_\nu^y f(x)$, $y \in \mathbb{R}$, продолжается в комплексную плоскость до целой функции из $\mathbf{B}_\sigma^{\mathrm{ev}}$. При этом выполняется неравенство*

$$|T_\nu^y f(x)| \leqslant \|f\|, \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Для функций $f \in \mathbf{B}_\sigma^{\mathrm{ev}}$ утверждение леммы A следует из того, что в [6, Lemma 4] была доказана принадлежность $g = T_\nu^y f$ классу $\mathbf{E}_\sigma^1$, а в [3, (2.21)] доказано неравенство (1.7) на множестве четных функций, равномерно непрерывных и ограниченных на полуоси. При этом обобщенный сдвиг Бесселя определялся при помощи явной формулы (см. [3, (1.4)]).

Лемма A была доказана при помощи следующей явной формулы для обобщенного сдвига Данкля [8, §3; 9, §2]:

$$T_\nu^y f(x) = \int\limits_0^\pi \Big(f_+(s) + (x - y\cos\theta)\frac{f_-(s)}{s}\Big) w_\nu(\theta)d\theta, \quad \nu > -\frac{1}{2}, \quad \frac{f(x+y)+f(x-y)}{2}, \quad \nu = -\frac{1}{2};$$

$$s = \sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}, \quad f_\pm(x) = \frac{f(x)\pm f(-x)}{2}, \quad w_\nu(\theta) = \frac{\Gamma(\nu+1)\sin^{2\nu}\theta}{\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)\Gamma\big(\nu+\frac{1}{2}\big)}, \quad \int\limits_0^\pi w_\nu(\theta)d\theta = 1.$$

В частности, из нее следует, что

$$T^y f(x) = T^x f(y), \quad T^y f(0) = f(y), \quad f \in \mathbf{B}_\sigma^{\mathrm{ev}}. \tag{1.8}$$

При $\nu = (m-2)/2$, $m \in \mathbb{N}$, обобщенный сдвиг имеет наглядный геометрический смысл (см., например, [3, §1]): если $F(\mathbf{x}) = f(|\mathbf{x}|)$, то обобщенный сдвиг — это усреднение функции F относительно точки $\mathbf{e}x$ ($\mathbf{e}$ — произвольный единичный вектор):

$$T_{\frac{m-2}{2}}^y f(x) = (S_{\mathbf{e}x}F)(y). \tag{1.9}$$

2. О дробных степенях операторов

Раздел посвящен определениям, конструкциям и взаимосвязи дробных степеней лапласиана Данкля $\big(-D_\nu^2\big)^{\alpha/2}$ на числовой прямой $\mathbb{R}$ и оператора Лапласа $(-\Delta)^{\alpha/2}$ в $\mathbb{R}^m$ при $\alpha > 0$.

Пусть $\alpha, \sigma > 0$ и $\nu \geqslant -1/2$. На классе $\mathbf{V}_{\sigma,\nu}$ дробную степень α лапласиана Данкля $\big(-D_\nu^2\big)^{\alpha/2}$ определим (см. [4, §4.1]) при помощи множителя Фурье—Данкля $|t|^\alpha$:

$$\big(-D_\nu^2\big)^{\alpha/2} f(x) = \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |t|^\alpha e_\nu(tx)d\omega(t), \quad f(x) = \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} e_\nu(tx)d\omega(t). \tag{2.1}$$

При $\nu = -1/2$ оператор (2.1) является классической производной Рисса порядка $\alpha > 0$ (см., например, [14–16]).

На классе $\mathbf{V}_\sigma^m$ дробная степень оператора Лапласа $(-\Delta)^{\alpha/2}$, $\alpha > 0$, определяется равенствами

$$(-\Delta)^{\alpha/2} f(\mathbf{x}) = \int\limits_{B_\sigma^m} |\mathbf{t}|^\alpha e^{i(\mathbf{t},\mathbf{x})}d\omega(\mathbf{t}), \quad f(\mathbf{x}) = \int\limits_{B_\sigma^m} e^{i(\mathbf{t},\mathbf{x})}d\omega(\mathbf{t}). \tag{2.2}$$

Дробную степень оператора Лапласа для произвольного m также называют *производной Рисса*. Классическую производную Рисса (при $m = 1$) будем в дальнейшем обозначать как $\big(-d^2/dx^2\big)^{\alpha/2}$.

Далее в этом разделе рассматриваются три конструкции (в терминах гиперсингулярных интегралов и интерполяционных формул) продолжения операторов (2.1) и (2.2) с пространств $\mathbf{V}_{\sigma,\nu}$ и $\mathbf{V}_\sigma^m$ на более широкие пространства $\mathbf{B}_\sigma$ и $\mathbf{B}_\sigma^m$.

2.1. Гиперсингулярные интегралы

С. Г. Самко [17, гл. 2] (см. также [18, §25, 26]) изучал представление дробной степени оператора Лапласа в виде гиперсингулярного интеграла

$$\mathbf{D}^{\alpha} f(\mathbf{x}) = \frac{1}{d_{m,r}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \sum_{k=-r}^{r} (-1)^k C_{2r}^{r+k} f(\mathbf{x} - k\mathbf{y}) \, \frac{d\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^{\alpha+m}}, \quad 0 < \alpha < 2r, \quad r \in \mathbb{N}, \tag{2.3}$$

в котором $d_{m,r}(\alpha) = A_{2r}(\alpha) I_m(\alpha)$,

$$A_{2r}(\alpha) = -2 \sum_{k=1}^{r} (-1)^k C_{2r}^{r+k} k^{\alpha}, \quad I_m(\alpha) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{1 - e^{-i\mathbf{u}}}{|\mathbf{u}|^{\alpha+m}} d\mathbf{u} = \frac{2^{1-\alpha}\, \pi^{(m/2+1)}}{\Gamma\left((2+\alpha)/2\right) \Gamma\left((m+\alpha)/2\right) \sin\left(\pi\alpha/2\right)}.$$

Приведем необходимые в дальнейшем свойства интегралов (2.3). Более подробное обсуждение (2.3) см. [17, гл. 2]. Имеет место [17, гл. 2, §8, п. 1–3] следующая теорема.

Теорема A. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$ и $r \in \mathbb{N}$, $2r > \alpha$. Тогда справедливы утверждения.*

1. *Интеграл $\mathbf{D}^{\alpha} f$ существует как интеграл Лебега на функциях f, ограниченных вместе со своими производными до порядка $[\alpha] + 1$ и не зависит от выбора r, если $r \in \mathbb{N}$ и $2r > \alpha$.*

2. *Для φ из пространства Шварца основных функций $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ справедливо равенство в образах Фурье*

$$\widehat{\mathbf{D}^{\alpha}\varphi}(\mathbf{t}) = |\mathbf{t}|^{\alpha} \widehat{\varphi}(\mathbf{t}).$$

Повторение рассуждений доказательства второго утверждение теоремы A (см. [17, §8, п. 1]) для функций класса $\mathbf{V}_{\sigma}^{m}$ обосновывает следующее утверждение.

Лемма 3. *Для произвольной функции f класса $\mathbf{V}_{\sigma}^{m}$ дробная степень оператора Лапласа (2.2) и гиперсингулярный интеграл (2.3) совпадают:*

$$(-\Delta)^{\alpha/2} f = \mathbf{D}^{\alpha} f, \quad \alpha > 0, \quad f \in \mathbf{V}_{\sigma}^{m}.$$

При $\nu \geqslant -1/2$ для функций f класса $\mathbf{B}_{\sigma}$ рассмотрим интеграл

$$\mathbf{D}_{\nu}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\widetilde{d}_{\nu}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{k=-r}^{r} (-1)^k C_{2r}^{r+k} T_{\nu}^{ky} f(x) \, \frac{dy}{|y|^{\alpha+1}}, \quad 0 < \alpha < 2r, \quad \nu \geqslant -1/2, \tag{2.4}$$

в котором

$$\widetilde{d}_{\nu}(\alpha) = A_{2r}(\alpha) I(\nu, \alpha), \quad I(\nu, \alpha) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1 - j_{\nu}(u)}{|u|^{\alpha+1}} du = \frac{2^{1-\alpha} \pi \Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left((2+\alpha)/2\right) \Gamma\left((2\nu+2+\alpha)/2\right) \sin\left(\pi\alpha/2\right)}.$$

Лемма 4. *Пусть $\nu \geqslant -1/2$, $\alpha > 0$ и $r \in \mathbb{N}$, $2r > \alpha$. Тогда справедливы утверждения.*

1. *Интеграл $\mathbf{D}_{\nu}^{\alpha} f$ существует как интеграл Лебега на функциях $f \in \mathbf{B}_{\sigma}$ и не зависит от выбора r, если $r \in \mathbb{N}$ и $2r > \alpha$.*

2. *Для произвольной функции f класса $\mathbf{V}_{\sigma,\nu}$ дробная степень лапласиана Данкля (2.1) и гиперсингулярного интеграла (2.4) совпадают:*

$$\left(-D_{\nu}^{2}\right)^{\alpha/2} f = \mathbf{D}_{\nu}^{\alpha} f, \quad f \in \mathbf{V}_{\sigma,\nu}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $f \in \mathbf{B}_{\sigma}$, то по лемме A функция $g(y) = T_{\nu}^{y} f(x)$ при любом $x \in \mathbb{R}$ принадлежит $\mathbf{B}_{\sigma}^{\mathrm{ev}}$ как функция переменной y. Посмотрим на интеграл (2.4) как на интеграл (2.3) для g, который по теореме A абсолютно сходится при любых $\alpha > 0$ и $2r > \alpha$ и не зависит от выбора r. Первое утверждение доказано.

Докажем второе утверждение. Пусть $f \in \mathbf{V}_{\sigma,\nu}$ и $x \in \mathbb{R}$. Тогда $T_\nu^y f(x)$ может быть выражен формулой (1.6) и принадлежит $\mathbf{V}_{\sigma,\nu}$ как функция переменной y. Рассмотрим интеграл $\mathbf{D}_\nu^\alpha f(x)$ и преобразуем его:

$$\widetilde{d}_\nu(\alpha)\mathbf{D}_\nu^\alpha f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{k=-r}^{r} (-1)^k C_{2r}^{r+k} T_\nu^{ky} f(x) \frac{dy}{|y|^{\alpha+1}}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{k=-r}^{r} (-1)^k C_{2r}^{r+k} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} j_\nu(kty) e_\nu(tx) d\omega(t) \frac{dy}{|y|^{\alpha+1}} = \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} e_\nu(tx) \int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{k=-r}^{r} (-1)^k C_{2r}^{r+k} j_\nu(kty) \frac{dy}{|y|^{\alpha+1}} d\omega(t).$$

Замена переменной $u = ty$ дает равенство

$$\begin{aligned}\widetilde{d}_\nu(\alpha)\mathbf{D}_\nu^\alpha f(x) &= \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |t|^\alpha e_\nu(tx) d\omega(t) \int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{k=-r}^{r} (-1)^k C_{2r}^{r+k} j_\nu(ku) \frac{du}{|u|^{\alpha+1}} \\ &= d_{1,r}(\alpha)\mathbf{D}^\alpha j_\nu(0)(-D_\nu^2)^{\alpha/2} f(x).\end{aligned} \tag{2.5}$$

Функции Бесселя при $\nu > -1/2$ представимы в виде интеграла Пуассона [7, Sect. 3.31, (6)]

$$j_\nu(x) = c_\nu \int\limits_{-1}^{1} e^{itx}(1-t^2)^{(\nu-1/2)} dt, \quad c_\nu = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)},$$

в частности, $j_\nu \in \mathbf{V}_\sigma$. Тогда в силу леммы 3 имеем

$$\mathbf{D}^\alpha j_\nu(0) = \Big(-\frac{d^2}{dy^2}\Big)^{\alpha/2} j_\nu(0) = c_\nu \int\limits_{-1}^{1} (1-t^2)^{(\nu-1/2)} |t|^\alpha dt$$

$$= c_\nu \int\limits_{0}^{1} (1-u)^{(\nu-1/2)} u^{(\alpha/2-1/2)} du = \frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma((\alpha+1)/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\alpha/2+1)}.$$

Введем обозначение

$$\gamma(\nu,\alpha) := \mathbf{D}^\alpha j_\nu(0) = \Big(-\frac{d^2}{dy^2}\Big)^{\alpha/2} j_\nu(0) = \frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma((\alpha+1)/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\alpha/2+1)}. \tag{2.6}$$

Для завершения доказательства достаточно подставить (2.6) в (2.5) и убедиться, что справедливо равенство $d_{1,r}(\alpha)\gamma(\nu,\alpha) = \widetilde{d}_\nu(\alpha)$. Тем самым второе утверждение леммы доказано.

Лемма доказана.

В дальнейшем будем считать, что на классе $\mathbf{B}_\sigma$ дробная степень лапласиана Данкля $(-D_\nu^2)^{\alpha/2}$ определяется гиперсингулярным интегралом (2.4), а на классе $\mathbf{B}_\sigma^m$ дробная степень оператора Лапласа — интегралом (2.3):

$$\big(-D_\nu^2\big)^{\alpha/2} f = \mathbf{D}_\nu^\alpha f, \quad f \in \mathbf{B}_\sigma, \quad \nu \geqslant -\frac{1}{2}, \quad \alpha > 0; \tag{2.7}$$

$$(-\Delta)^{\alpha/2} F = \mathbf{D}^\alpha F, \quad F \in \mathbf{B}_\sigma^m, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \alpha > 0. \tag{2.8}$$

В силу лемм 3 и 4 формулы (2.7) и (2.8) осуществляют продолжение операторов (2.1) и (2.2) с пространств $\mathbf{V}_{\sigma,\nu}$ и $\mathbf{V}_\sigma^m$ на более широкие пространства $\mathbf{B}_\sigma$ и $\mathbf{B}_\sigma^m$. Далее в §4.2 будет показано, что при этом продолжении норма оператора сохраняется.

Используя представления (2.7) и (2.8) дробных степеней операторов через гиперсингулярные интегралы, получим взаимосвязь дробной степени лапласиана Данкля $\big(-D_\nu^2\big)^{\alpha/2}$, дробной степени оператора Лапласа $(-\Delta)^{\alpha/2}$ и (одномерной) производной Рисса.

Теорема 1. *При $\nu \geqslant -1/2$ и $\alpha > 0$ для функций из класса $\mathbf{B}_\sigma$ дробная степень оператора D_ν^2 взаимосвязана с производной Рисса обобщенного сдвига $T_\nu^y f(x)$ в точке $y = 0$ равенством*

$$\left(-D_\nu^2\right)^{\alpha/2} f(x) = \frac{1}{\gamma(\nu,\alpha)} \Big[\Big(-\frac{d^2}{dy^2}\Big)^{\alpha/2} T_\nu^y f(x)\Big]_{y=0}, \quad f \in \mathbf{B}_\sigma, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.9}$$

в котором величина $\gamma(\nu,\alpha)$ определена в (2.6).

Доказательство. В силу леммы A обобщенный сдвиг $g_x(y) = T_\nu^y f(x)$ функции $f \in \mathbf{B}_\sigma$ принадлежит классу $\mathbf{B}_\sigma$ как функция переменной y. Тогда, используя представления (2.7) и (2.8), получим

$$\left(-D_\nu^2\right)^{\alpha/2} f(x) = \mathbf{D}_\nu^\alpha f(x) = \frac{d_{1,r}(\alpha)}{\widetilde{d}_\nu(\alpha)} \mathbf{D}^\alpha g_x(0) = \frac{1}{\gamma(\nu,\alpha)} \Big[\Big(-\frac{d^2}{dy^2}\Big)^{\alpha/2} T_\nu^y f(x)\Big]_{y=0}.$$

Теорема 1 доказана.

В следующей теореме на классе $\mathbf{B}_\sigma^m$ получены аналоги свойств (1.2) и (1.3) классического оператора Лапласа для дробной степени оператора Лапласа (производной Рисса) $(-\Delta)^{\alpha/2}$.

Теорема 2. *При произвольных $m \in \mathbb{N}$ и $\alpha, \sigma > 0$ для любой функции $f \in \mathbf{B}_\sigma^m$ и любой точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ справедливы равенства*

$$\begin{gathered}(-\Delta)^{\alpha/2} f(\mathbf{x}) = (-\Delta)^{\alpha/2} F_{\mathbf{x}}(0) = \frac{1}{\gamma((m-2)/2,\alpha)} \Big(-\frac{d^2}{dy^2}\Big)^{\alpha/2} (S_{\mathbf{x}} f)(0), \\ F_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = (S_{\mathbf{x}} f)(|\mathbf{y}|);\end{gathered} \tag{2.10}$$

$$(-\Delta)^{\alpha/2} f(\mathbf{x}) = \Big(-D_{\frac{m-2}{2}}^2\Big)^{\alpha/2} (S_{\mathbf{x}} f)(0). \tag{2.11}$$

Доказательство. В интеграле (2.3), определяющем производную Рисса $(-\Delta)^{\alpha/2} f(\mathbf{x})$, перейдем к полярным координатам:

$$(-\Delta)^{\alpha/2} f(\mathbf{x}) = \mathbf{D}^\alpha f(\mathbf{x}) = \frac{1}{d_{m,r}(\alpha)} \int\limits_0^\infty \sum_{k=-r}^{r} (-1)^k C_{2r}^{r+k} \int\limits_{\mathbb{S}^{m-1}} f(\mathbf{x} - k\rho\mathbf{t})\, d\mu(\mathbf{t}) \frac{d\rho}{\rho^{\alpha+1}}$$

$$= \frac{\mu(\mathbb{S}^{m-1})}{2 d_{m,r}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{k=-r}^{r} (-1)^k C_{2r}^{r+k} (S_{\mathbf{x}} f)(k\rho) \frac{d\rho}{\rho^{\alpha+1}} = \frac{\mu(\mathbb{S}^{m-1}) d_{1,r}(\alpha)}{2 d_{m,r}(\alpha)} \mathbf{D}^\alpha (S_{\mathbf{x}} f)(0)$$

$$= \frac{1}{\gamma((m-2)/2,\alpha)} \Big(-\frac{d^2}{dy^2}\Big)^{\alpha/2} (S_{\mathbf{x}} f)(0).$$

Функция $F_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = (S_{\mathbf{x}} f)(|\mathbf{y}|)$ в силу леммы 1 и леммы 2 принадлежит $\mathbf{B}_\sigma^m$ и является радиальной. Применяя к ней предыдущее равенство и учитывая $S_0 F_{\mathbf{x}} = S_{\mathbf{x}} f$, получим

$$(-\Delta)^{\alpha/2} F_{\mathbf{x}}(0) = \frac{1}{\gamma((m-2)/2,\alpha)} \Big(-\frac{d^2}{dy^2}\Big)^{\alpha/2} (S_0 F_{\mathbf{x}})(0) = \frac{1}{\gamma((m-2)/2,\alpha)} \Big(-\frac{d^2}{dy^2}\Big)^{\alpha/2} (S_{\mathbf{x}} f)(0).$$

Равенство (2.10) доказано.

Покажем справедливость равенства (2.11). Для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ функция $F_{\mathbf{x}}$ является радиальной, следовательно, из равенства (1.9) имеем

$$(S_{\mathbf{x}} f)(y) = (S_0 F_{\mathbf{x}})(y) = T_{\frac{m-2}{2}}^y (S_{\mathbf{x}} f)(0), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Тогда, используя (2.10) и теорему 1, для произвольного $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m$ получим цепочку равенств

$$(-\Delta)^{\alpha/2}f(\mathbf{x})=(-\Delta)^{\alpha/2}F_{\mathbf{x}}(0)=\frac{1}{\gamma((m-2)/2,\alpha)}\Big[\Big(-\frac{d^2}{dy^2}\Big)^{\alpha/2}(S_{\mathbf{x}}f)(y)\Big]_{y=0}$$

$$=\frac{1}{\gamma((m-2)/2,\alpha)}\Big[\Big(-\frac{d^2}{dy^2}\Big)^{\alpha/2}T^y_{\frac{m-2}{2}}(S_{\mathbf{x}}f)(0)\Big]_{y=0}=\Big(-D^2_{\frac{m-2}{2}}\Big)^{\alpha/2}(S_{\mathbf{x}}f)(0).$$

Равенство (2.11) и тем самым теорема 2 целиком доказаны.

Так же как лапласиан Данкля является радиальной частью классического оператора Лапласа, так и дробная степень оператора D^2_ν является радиальной частью дробной степени оператора Лапласа. А именно, справедливо утверждение.

Следствие 1. *Пусть $f\in\mathbf{B}^m_\sigma$ — радиальная функция, т. е. $f(\mathbf{x})=f_0(|\mathbf{x}|)$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m$, где f_0 — четная, тогда справедливо равенство*

$$(-\Delta)^{\alpha/2}f(\mathbf{x})=\Big(\Big(-D^2_{\frac{m-2}{2}}\Big)^{\alpha/2}f_0\Big)(r),\quad r=|\mathbf{x}|. \tag{2.12}$$

Доказательство. Обозначим для краткости $\gamma=\gamma((m-2)/2,\alpha)$. В силу равенства (2.10), формулы (1.9) и теоремы 1 имеем

$$(-\Delta)^{\alpha/2}f(\mathbf{x})=\frac{1}{\gamma}\Big(-\frac{d^2}{dy^2}\Big)^{\alpha/2}(S_{\mathbf{x}}f)(0)$$

$$=\frac{1}{\gamma}\Big[\Big(-\frac{d^2}{dy^2}\Big)^{\alpha/2}\Big(T^y_{\frac{m-2}{2}}f_0\Big)(|\mathbf{x}|)\Big]_{y=0}=\Big(\Big(-D^2_{\frac{m-2}{2}}\Big)^{\alpha/2}f_0\Big)(|\mathbf{x}|).$$

Следствие 1 доказано.

Отметим, что равенство (2.11) для производной Рисса произвольной функции $f\in\mathbf{B}^m_\sigma$ следует из первого равенства в (2.10) и равенства (2.12), примененного к радиальной функции $F_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})=(S_{\mathbf{x}}f)(|\mathbf{y}|)$. Действительно, справедливы соотношения

$$(-\Delta)^{\alpha/2}f(\mathbf{x})=(-\Delta)^{\alpha/2}F_{\mathbf{x}}(0)=\Big(\Big(-D^2_{\frac{m-2}{2}}\Big)^{\alpha/2}(S_{\mathbf{x}}f)\Big)(0).$$

2.2. Интерполяционные формулы

В этом разделе будет получено представление на классах Бернштейна операторов $\big(-D^2_\nu\big)^{\alpha/2}$ и $(-\Delta)^{\alpha/2}$ интерполяционными формулами.

Вначале обсудим две формулы для производной Рисса функций одной переменной.

Пусть $\alpha>0$ и числа $c_k(\alpha)$ являются коэффициентами Фурье в разложении функции $|t|^\alpha$ на отрезке $[-\sigma,\sigma]$ в тригонометрический ряд Фурье:

$$|t|^\alpha=\sigma^\alpha\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k(\alpha)e^{(i\pi kt)/\sigma}=\sigma^\alpha\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k(\alpha)\cos\Big(\frac{\pi kt}{\sigma}\Big),\quad |t|\leqslant\sigma. \tag{2.13}$$

Ряд в (2.13) сходится абсолютно, так как $|t|^\alpha$ на $[-\sigma,\sigma]$ имеет ограниченное изменение и удовлетворяет условию Липшица с показателем $\min\{\alpha,1\}$ [19, гл. 9, §3, следствие 1]. Тогда, используя определение (2.2), получим, что на классе $\mathbf{V}_\sigma$ для производной Рисса порядка $\alpha>0$ имеет место формула

$$\Big(-\frac{d^2}{dx^2}\Big)^{\alpha/2}f(x)=\sigma^\alpha\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k(\alpha)f\Big(x-\frac{\pi k}{\sigma}\Big),\quad f\in\mathbf{V}_\sigma,\quad \alpha>0. \tag{2.14}$$

Эту формулу для тригонометрических полиномов получили и использовали при $\alpha = 1$ Г. Сегё [20], а при произвольном $\alpha > 0$ Г. Т. Соколов [15]. С помощью формулы (2.14) определение производной Рисса (2.2) с класса $\mathbf{V}_\sigma$ на более широкий класс $\mathbf{B}_\sigma$ перенес при $\alpha = 1$ Н. И. Ахиезер [21, §83, 84], при $\alpha > 0$ — П. И. Лизоркин [14].

В работе [22] мы получили интерполяционную формулу по неравномерным узлам для производной Рисса порядка $0 < \alpha < 1$:

$$\Bigl(-\frac{d^2}{dx^2}\Bigr)^{\alpha/2} f(x) = \sigma^\alpha \kappa(\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\alpha) \Bigl[f\Bigl(x - \frac{2\lambda_k}{\sigma}\Bigr) - 2f(x) + f\Bigl(x + \frac{2\lambda_k}{\sigma}\Bigr)\Bigr], \tag{2.15}$$

в которой

$$\kappa(\alpha) = -\frac{\pi\Gamma(\alpha+1)}{2^{2\alpha+1}\sin(\pi\alpha/2)\Gamma^2\bigl(1+\alpha/2\bigr)}, \quad a_k(\alpha) = j^2_{\alpha/2}(\lambda_k)$$

и $\lambda_k = \lambda_k(-\alpha/2)$ — положительные нули функции Бесселя $j_{-\alpha/2}$. При этом ряд из $a_k(\alpha)$ абсолютно сходится при всех $0 < \alpha < 1$. Отметим, что формула (2.15) была установлена с использованием к гиперсингулярному интегралу (2.3) квадратурных формул К. Фрапье и П. Оливье [23] по нулям функций Бесселя. Поэтому на классе $\mathbf{B}_\sigma$ при $0 < \alpha < 1$ определения производной Рисса при помощи формул (2.8) и (2.15) совпадают.

Утверждение 1. *При $0 < \alpha < 1$ операторы, определяющие производную Рисса при помощи формул (2.8), (2.14) и (2.15), на классе Бернштейна $\mathbf{B}_\sigma$ совпадают.*

Воспользуемся свойствами полиномов Левитана [21, §85, 86]. Обозначим через f_n, $n \in \mathbb{N}$, последовательность полиномов Левитана функции $f \in \mathbf{B}_\sigma$. Они принадлежат $\mathbf{V}_\sigma$ и обладают следующим свойством: последовательность f_n на любом отрезке (а на самом деле внутри комплексной плоскости) равномерно сходится к функции f, при этом $\|f_n\| \leqslant \|f\|$. Введем обозначения операторов, определяемых правыми частями в (2.14) и (2.15):

$$\Sigma^0_\alpha(f, x) = \sigma^\alpha \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(\alpha) f(x - \pi k),$$

$$\Sigma_\alpha(f, x) = \sigma^\alpha \kappa(\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\alpha) \Bigl[f\Bigl(x - \frac{2\lambda_k}{\sigma}\Bigr) - 2f(x) + f\Bigl(x + \frac{2\lambda_k}{\sigma}\Bigr)\Bigr].$$

Для произвольного n имеет место равенство $\Sigma^0_\alpha(f_n, x) = \Sigma_\alpha(f_n, x)$. Отсюда получаем оценку

$$|\Sigma^0_\alpha(f, x) - \Sigma_\alpha(f, x)| \leqslant |\Sigma^0_\alpha(f - f_n, x)| + |\Sigma_\alpha(f_n - f, x)|. \tag{2.16}$$

Оценим вторую сумму в правой части последнего неравенства. Пусть $A > 0$, для произвольного $x \in [-A, A]$, обозначив $K_N = [-A - 2\lambda_N/\sigma, A + 2\lambda_N/\sigma]$, имеем

$$|\Sigma_\alpha(f_n - f, x)| \leqslant -\sigma^\alpha \kappa(\alpha) \Bigl[4\|f - f_n\|_{C(K_N)} \sum_{k=1}^{N} a_k(\alpha) + 8\|f\| \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k(\alpha)\Bigr].$$

Остаток сходящегося ряда с элементами $a_k(\alpha)$ мал при достаточно большом N. Выбирая достаточно большие n, за счет равномерной сходимости f_n к функции f на отрезке K_N получим, что сумма сколь угодно мала. Эта оценка означает, что $\Sigma_\alpha(f_n, x)$ равномерно на любом отрезке сходится к $\Sigma_\alpha(f, x)$.

Первая сумма в правой части неравенства (2.16) оценивается аналогично. Тем самым для произвольной функции $f \in \mathbf{B}_\sigma$ верно равенство $\Sigma^0_\alpha(f, x) = \Sigma_\alpha(f, x)$.

Утверждение 1 доказано.

Перейдем к представлению интерполяционными формулами на классах Бернштейна операторов $\bigl(-D^2_\nu\bigr)^{\alpha/2}$ и $(-\Delta)^{\alpha/2}$.

Из теорем 1, 2 и интерполяционной формулы (2.14) следуют соотношения

$$\left(-D_\nu^2\right)^{\alpha/2} f=\sigma^\alpha \gamma(\nu,\alpha)^{-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(\alpha) T_\nu^{(\pi k)/\sigma} f,\quad f\in\mathbf{B}_\sigma,\quad \nu\geqslant -\frac{1}{2},\quad \alpha>0, \tag{2.17}$$

$$(-\Delta)^{\alpha/2} f(\mathbf{x})=\sigma^\alpha \gamma\Big(\frac{m-2}{2},\alpha\Big)^{-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(\alpha)(S_{\mathbf{x}}f)\Big(\frac{\pi k}{\sigma}\Big),\quad f\in\mathbf{B}_\sigma^m,\quad \alpha>0, \tag{2.18}$$

где величина $\gamma(\nu,\alpha)$ определена формулой (2.6).

А. И. Камзолов [24] нашел представление оператора Лапласа на множестве функций из $\mathbf{B}_\sigma^m$ в виде формулы (2.18), в которой $m\geqslant 2$ и $\alpha=2$. При $\nu>-1/2$ С. С. Платонов [3] при помощи нетривиальных и тонких рассуждений определил дробную степень оператора Бесселя на классе $\mathbf{B}_\sigma^{\mathrm{ev}}$; в итоге получилось, что на этом классе она может быть определена при помощи (2.17). О. Л. Виноградов [4] рассматривал операторы, определенные на классах $\mathbf{V}_{\sigma,\nu}$ при помощи множителей Фурье—Данкля, и изучал для них представление в виде интерполяционных формул по обобщенным сдвигам и продолжение с их помощью на более широкий класс $\mathbf{B}_\sigma$.

Однако формулы (2.17) и (2.18) при $0<\alpha<1$ не являются соответственно продолжением операторов $\left(-D_\nu^2\right)^{\alpha/2}$ и $(-\Delta)^{\alpha/2}$ с классов целых функций на пространства $C(\mathbb{R})$ и $C(\mathbb{R}^m)$ с минимальной нормой и не дают возможность получить точные неравенства типа Бернштейна. Такие продолжения — представление дробной степени лапласиана Данкля и оператора Лапласа интерполяционными формулами по (неравномерным узлам) нулям функций Бесселя — получаются при использовании теорем 1, 2 и интерполяционной формулы (2.15). А именно, справедливо следующее утверждение.

Лемма 5. *При всех $0<\alpha<1$ для произвольной $f\in\mathbf{B}_\sigma$ имеют место равенства*

$$\left(-D_\nu^2\right)^{\alpha/2} f=\frac{\sigma^\alpha\kappa(\alpha)}{\gamma(\nu,\alpha)}\sum_{k=1}^{\infty} a_k(\alpha)\big[T_\nu^{(2\lambda_k)/\sigma}-2T_\nu^0+T_\nu^{-(2\lambda_k)/\sigma}\big] f,\quad f\in\mathbf{B}_\sigma,\quad \nu\geqslant-\frac{1}{2}; \tag{2.19}$$

$$(-\Delta)^{\alpha/2} f(\mathbf{x})=\frac{\sigma^\alpha\kappa(\alpha)}{\gamma(\nu,\alpha)}\sum_{k=1}^{\infty} a_k(\alpha)\Big[(S_{\mathbf{x}}f)\Big(\frac{2\lambda_k}{\sigma}\Big)-2(S_{\mathbf{x}}f)(0)+(S_{\mathbf{x}}f)\Big(-\frac{2\lambda_k}{\sigma}\Big)\Big],\quad f\in\mathbf{B}_\sigma^m, \tag{2.20}$$

в которых $a_k(\alpha)=j_{\alpha/2}^2(\lambda_k)$ и $\lambda_k=\lambda_k(-\alpha/2)$ — положительные нули функции Бесселя $j_{-\alpha/2}$.

3. Неравенства Бернштейна

Данный раздел посвящен точным неравенствам Бернштейна для степени лапласиана Данкля $\left(-D_\nu^2\right)^{\alpha/2}$ на пространстве целых функций $\mathbf{B}_\sigma$ и для степени оператора Лапласа $(-\Delta)^{\alpha/2}$ соответственно на пространстве $\mathbf{B}_\sigma^m$ относительно равномерных норм.

Точные неравенства для полиномов и целых функций играют важную роль в теории приближения и в других разделах математики. Об этом подробно написано в обзоре [25, §6].

Обозначим через $M_\sigma(\nu,\alpha)$ точную (наименьшую возможную) константу в неравенстве Бернштейна для степени лапласиана Данкля

$$\Big\|\left(-D_\nu^2\right)^{\alpha/2} f\Big\|\leqslant M_\sigma(\nu,\alpha)\|f\|,\quad \nu>-\frac{1}{2},\quad \alpha>0,\quad f\in\mathbf{B}_\sigma. \tag{3.1}$$

Соответственно через $\mathbf{M}_\sigma(m,\alpha)$ обозначим точную (наименьшую возможную) константу в неравенстве Бернштейна для степени оператора Лапласа

$$\|(-\Delta)^{\alpha/2} f\|\leqslant \mathbf{M}_\sigma(m,\alpha)\|f\|,\quad m\in\mathbb{N},\quad \alpha>0,\quad f\in\mathbf{B}_\sigma^m. \tag{3.2}$$

Для любых $\nu \geqslant -1/2$, $m \in \mathbb{N}$ и $\alpha \geqslant 1$ для точных констант неравенств (3.1) и (3.2) справедливы равенства

$$M_\sigma(\nu,\alpha) = \sigma^\alpha \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\alpha/2+\nu+1\right)}{\Gamma\left((\alpha+1)/2\right)\Gamma(\nu+1)},$$
$$\mathbf{M}_\sigma(m,\alpha) = \sigma^\alpha \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left((\alpha+m)/2\right)}{\Gamma\left((\alpha+1)/2\right)\Gamma\left(m/2\right)} = M_\sigma\Big(\frac{m-2}{2},\alpha\Big). \tag{3.3}$$

В этом случае экстремальной функцией в неравенстве (3.1), т. е. функцией, на которой неравенство обращается в равенство, является $\cos\sigma x$, а в неравенстве (3.2) — функция $\cos\sigma|\mathbf{x}|$.

В работе [22] нами была изложена история изучения неравенства (3.2) в одномерном случае. При $m \geqslant 2$ неравенство (3.2) для оператора Лапласа с константой (3.3) установил в 1974 г. А. И. Камзолов [24]. Для целых степеней оператора Лапласа неравенство (3.2) получили в 2019 г. Д. В. Горбачёв и В. И. Иванов [26].

В работе [26] авторы пришли к более общему результату: точное неравенство Бернштейна для целой степени Δ_κ^r многомерного лапласиана Данкля Δ_κ, который при $\kappa = 0$ совпадает с оператором Лапласа. В [2] они исследовали его дробные степени Δ_κ^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, и получили для них порядковое неравенство Бернштейна.

В 2007 г. С. С. Платонов [3, теорема 1.3] установил точное неравенство Бернштейна для оператора Бесселя: $\left\|D_\nu^2 f\right\| \leqslant (2\nu+2)\sigma^2\|f\|$, $f \in \mathbf{B}_\sigma^{\mathrm{ev}}$, $\nu \geqslant -1/2$. В 2023 г. О. Л. Виноградов [4] доказал, что при $\alpha \geqslant 1$ неравенство (3.1) выполняется с точной константой $M_\sigma(\nu,\alpha)$, определенной равенством (3.3). Экстремальной функцией является $\cos x$. Как следствие, О. Л. Виноградов установил точное неравенство (3.2) для $\alpha \geqslant 1$. Кроме того, в [4, теорема 3] содержится точное неравенство Бернштейна для оператора D_ν.

Основным аппаратом исследования неравенств является представление операторов интерполяционной формулой (2.17) по обобщенным сдвигам с равномерными шагами $T^{\pi k/\sigma}$, $k \in \mathbb{Z}$. Отметим, что в работе [26] применяется иной метод, основанный на переходе к функциям одной переменной и разложении их в ряд Тейлора.

В статье [22] мы получили в неравенстве (3.2) точную константу

$$\mathbf{M}_\sigma(1,\alpha) = \sigma^\alpha \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma^2((1-\alpha)/2)}\,\frac{\pi}{\cos(\pi\alpha/2)} \tag{3.4}$$

при помощи интерполяционной формулы (2.15) при $m = 1$ для $0 < \alpha < 1$.

Неравенство (3.1) для $0 < \alpha < 1$ мало изучено, а именно, С. С. Платонов [3, теорема 3.4] установил порядковое неравенство (3.1) в этом случае.

В следующих двух теоремах получены точные константы $M_\sigma(\nu,\alpha)$ и $\mathbf{M}_\sigma(m,\alpha)$ неравенств Бернштейна (3.1) и (3.2) при всех $0 < \alpha < 1$ и указаны для них экстремальные функции.

Обозначим через f_α^* целую функцию из $\mathbf{B}_1$, определяемую равенством

$$f_\alpha^*(x) = 2j_{-\alpha/2}^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1. \tag{3.5}$$

Теорема 3. *При любом $\nu > -1/2$ и $0 < \alpha < 1$ для точной константы неравенства* (3.1) *справедливо равенство*

$$M_\sigma(\nu,\alpha) = \sigma^\alpha \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma^2\left((1-\alpha)/2\right)}\,\frac{\pi}{\cos\left(\pi\alpha/2\right)}\,\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\alpha/2+1\right)}{\Gamma\left((\alpha+1)/2\right)\Gamma\left(\nu+1\right)}.$$

Неравенство (3.1) *обращается в равенство на функциях $cf_\alpha^*(\sigma x)$, $c \in \mathbb{C}$.*

Теорема 4. *При любом $m \in \mathbb{N}$ и $0 < \alpha < 1$ для точной константы неравенства* (3.2) *справедливо равенство*

$$\mathbf{M}_\sigma(m,\alpha) = M_\sigma\Big(\frac{m-2}{2}\Big).$$

Неравенство (3.2) *обращается в равенство на функциях $cf_\alpha^*(\sigma|\mathbf{x}|)$, $c \in \mathbb{C}$.*

З а м е ч а н и е 1. Константы в неравенствах (3.1) и (3.2) на классах $\mathbf{V}_{\sigma,\nu}$ и $\mathbf{V}_\sigma^m$ нельзя уменьшить.

4. Доказательство теорем 3, 4 и замечания 1

4.1. Взаимосвязь неравенств (3.1) и (3.2) и доказательство теорем

Лемма 6. *При $m \in \mathbb{N}$, $\nu \geqslant -1/2$ и $\alpha > 0$ справедливы следующие утверждения.*

1. *Имеют место равенства между точными константами в неравенствах (3.2) и (3.1):*

$$M_\sigma(\nu,\alpha) = \mathbf{M}_\sigma(1,\alpha)\,\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1+\alpha/2)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma((\alpha+1)/2)}; \tag{4.1}$$

$$\mathbf{M}_\sigma(m,\alpha) = \mathbf{M}_\sigma(1,\alpha)\,\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma((\alpha+m)/2)}{\Gamma(m/2)\Gamma((\alpha+1)/2)} = M_\sigma\Big(\frac{m-2}{2},\alpha\Big). \tag{4.2}$$

2. *Если неравенство (3.2) при $m=1$ обращается в равенство на функции $g^* \in \mathbf{B}_\sigma^{\mathrm{ev}}$, при этом норма производной Рисса достигается в точке $x=0$, то неравенство (3.1) обращается в равенство на функции g^*, а неравенство (3.2) — на радиальной функции $G^*(\mathbf{x}) = g^*(|\mathbf{x}|)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольной функции $f \in \mathbf{B}_\sigma$, последовательно применяя равенство (2.9), неравенство (3.2) при $m=1$ и неравенство (1.7), получим цепочку соотношений

$$\Big|\,(-D_\nu^2)^{\alpha/2} f(x)\Big| = \Big|\frac{1}{\gamma(\nu,\alpha)}\Big[\Big(-\frac{d^2}{dy^2}\Big)^{\alpha/2} T_\nu^y f(x)\Big]_{y=0}\Big|$$
$$\leqslant \frac{\mathbf{M}_\sigma(1,\alpha)}{\gamma(\nu,\alpha)} \sup_{x,y\in\mathbb{R}} \big|T_\nu^y f(x)\big| \leqslant \frac{\mathbf{M}_\sigma(1,\alpha)}{\gamma(\nu,\alpha)}\|f\|.$$

Если $f(x) = f_\alpha^*(\sigma x)$ — четная экстремальная функция неравенства (3.2) при $m=1$, то оба неравенства обращаются в равенство при $x=0$ и $y=0$. Действительно, если $x=0$, то $T^y f_\alpha^*(0) = f_\alpha^*(\sigma y)$ (см. (1.8)), а для этой функции норма производной Рисса достигается при $y=0$. Кроме того, $\sup_{x,y\in\mathbb{R}}\big|T_\nu^y f_\alpha^*(x)\big| = |f_\alpha^*(0)| = \|f_\alpha^*(0)\|$ достигается при $y=0$. Соотношение (4.1) доказано.

Для произвольной функции $f \in \mathbf{B}_\sigma^m$, применяя равенство (2.11) и предыдущее неравенство, получаем

$$\big|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\mathbf{x})\big| = \Big|\Big(-D^2_{\frac{m-2}{2}}\Big)^{\alpha/2}(S_{\mathbf{x}}f)(0)\Big| \leqslant M_\sigma\Big(\frac{m-2}{2},\alpha\Big)\|S_{\mathbf{x}}f\|$$
$$= \frac{\mathbf{M}_\sigma(1,\alpha)}{\gamma((m-2)/2,\alpha)}\|S_{\mathbf{x}}f\| \leqslant \frac{\mathbf{M}_\sigma(1,\alpha)}{\gamma((m-2)/2,\alpha)}\|f\|.$$

Если f радиальная, достигает нормы в точке $\mathbf{x}=0$ и $S_0 f$ является экстремальной в (3.2) при $m=1$, причем норма ее производной Рисса достигается в точке 0, то неравенства обращаются в равенство. Такой функцией является $f_\alpha^*(\sigma|\mathbf{x}|)$.

Равенство (4.2) и лемма 6 доказаны.

Доказательство теорем 3 и 4. Теоремы следуют из леммы 6 и равенства (3.4).

4.2. Второе доказательство теорем 3 и 4

Приведем прямые доказательства теорем 3 и 4, основанные на формулах (2.19) и (2.20), осуществляющих продолжение дробных степеней операторов на пространство непрерывных функций (как это будет следовать из дальнейшего) с минимальной нормой.

В силу равенства (2.19) при $0<\alpha<1$ для $f\in\mathbf{B}_\sigma$ и неравенства (1.7) имеем

$$\|\left(-D_\nu^2\right)^{\alpha/2} f\| \leqslant \frac{\sigma^\alpha\kappa(\alpha)}{\gamma(\nu,\alpha)}\sum_{k=1}^{\infty} a_k(\alpha)\left\|\left[T_\nu^{y_k/\sigma}-2T_\nu^0+T_\nu^{-y_k/\sigma}\right]f\right\|$$

$$\leqslant 4\frac{\sigma^\alpha\kappa(\alpha)}{\gamma(\nu,\alpha)}\sum_{k=1}^{\infty} a_k(\alpha)\|f\|.$$

Отсюда и из вычислений, проведенных в [22, §5.2], следует, что

$$M_\sigma(\nu,\alpha)\leqslant \sigma^\alpha\frac{4\kappa(\alpha)}{\gamma(\nu,\alpha)}\sum_{k=1}^{\infty} j_{\alpha/2}^2\left(\lambda_k(-\alpha/2)\right)=\frac{\sigma^\alpha}{\gamma(\nu,\alpha)}\,\frac{2\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma^2\left((1-\alpha)/2\right)}\,\frac{\pi}{\cos\left(\pi\alpha/2\right)}.$$

Неравенство (3.1) обращается в равенство на функции $f_\alpha^*(\sigma x)$, где функция f_α^* определена равенством (3.5). Чтобы убедиться в этом, достаточно воспользоваться интерполяционной формулой (2.19), учесть равенство $T_\nu^y f(0)=f(y)$, верное для $f\in\mathbf{B}_\sigma^{\mathrm{ev}}$, и значения функции f_α^* в узлах формулы: $f_\alpha^*(0)=1$ и $f_\alpha^*(\pm 2\lambda_k/\sigma)=-1$.

Теорема 3 доказана.

Аналогично доказывается теорема 4 на основе формулы (2.20).

Доказательство замечания 1. Убедимся, что неравенство (3.1) точно на классе $\mathbf{V}_{\sigma,\nu}$. В силу леммы 3 из [4] найдется последовательность четных функций $f_n^*=f_{\nu,n}^*\in\mathbf{V}_{\sigma,\nu}\cap L_1^\nu(\mathbb{R})$, равномерно на каждом отрезке сходящаяся к f^* и такая, что $\|f_{\nu,n}^*\|\leqslant\|f^*\|$. Рассуждая аналогично доказательству утверждения 1, нетрудно показать, что

$$\left(-D_\nu^2\right)^{\alpha/2}(f_n^*-f^*)(0)=\frac{\sigma^\alpha\kappa(\alpha)}{\gamma(\nu,\alpha)}\sum_{k=1}^{\infty} a_k(\alpha)\left[T_\nu^{(2\lambda_k)/\sigma}-2T_\nu^0+T_\nu^{(-2\lambda_k)/\sigma}\right](f_n^*-f^*)(0)$$

стремится к нулю при $n\to\infty$. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\left(-D_\nu^2\right)^{\alpha/2} f_n^*(0)|}{\|f_n^*\|}\geqslant\frac{|\left(-D_\nu^2\right)^{\alpha/2} f^*(0)|}{\|f^*\|}=M_\sigma(\nu,\alpha).$$

Отсюда следует точность неравенства (3.1) на классе $\mathbf{V}_{\sigma,\nu}$.

Для доказательства точности неравенства (3.2) на классе $\mathbf{V}_\sigma^m$ достаточно рассмотреть последовательность функций $f_{(m-2)/2,\,n}^*$. В силу леммы 2 функции $F_n(\mathbf{x})=f_{(m-2)/2,\,n}^*(\sigma|\mathbf{x}|)$ принадлежат $\mathbf{B}_\sigma^m$. В силу изоморфизма между подпространством четных функций из $L_1^\nu(\mathbb{R})$ и подпространством радиальных функций из $L_1(\mathbb{R}^m)$, задаваемого отображением $g\mapsto g(|\mathbf{x}|)$ (см. [3, §1]), функции F_n принадлежат $L_1(\mathbb{R}^m)$. Как следствие теоремы Пэли — Винера, они лежат в $\mathbf{V}_\sigma^m$.

Благодарности

Автор благодарит В. В. Арестова и Р. Р. Акопяна за полезное и содержательное обсуждение задачи и постоянное внимание к работе автора, а также рецензентов и А. Г. Бабенко за важные замечания к статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тиман А.Ф., Трофимов В.Н.** Введение в теорию гармонических функций. М., Наука, 1968. 208 с.
2. **Gorbachev D.V., Ivanov V.I.** Fractional smoothness in L^p with Dunkl weight and its applications // Math. Notes. 2019. Vol. 106, no. 4. P. 537–561. https://doi.org/10.1134/S0001434619090232

3. **Платонов С.С.** Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой // Изв. РАН. Сер. математическая. 2007. Т. 71, № 5. С. 149–196. https://doi.org/10.4213/im720
4. **Виноградов О.Л.** Точные неравенства типа Бернштейна для мультипликаторов Фурье—Данкля // Мат. сб. 2023. Т. 214, № 1. С. 3–30. https://doi.org/10.4213/sm9724
5. **Горбачёв Д.В.** Гипотеза Боаса на оси для преобразования Фурье—Данкля и его обобщения // Чебышёвский сборник, 2023, т. 24, no. 2, с. 141–153. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2023-24-2-141-153
6. **Arestov V.V., Babenko A.G., Deikalova M.V., Horvát Á.** Nikol'skii inequality between the uniform norm and integral norm with bessel weight for entire functions of exponential type on the half-line // Analysis Math. 2018. Vol. 44, no. 1. P. 21–42. https://doi.org/10.1007/s10476-018-0103-6
7. **Ватсон Г.Н.** Теория бесселевых функций. М.: Иностр. лит., 1949. 798 p.
8. **Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S.Y.** Positive L^p-bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications // Constr. Approx. 2018. P. 1–51. https://doi.org/10.1007/s00365-018-9435-5
9. **Горбачёв Д.В., Добровольский Н.Н.** Константы Никольского в пространствах $L^p(\mathbb{R}, |x|^\alpha dx)$ // Чебышёвский сб. 2018. Т. 19, № 2. С. 67–79. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-2-67-79
10. **Rösler M.** Bessel-type signed hypergroups on $\mathbb{R}$ // Probability measures on groups and related structures XI / eds. H. Heyer, A. Mukherjea.: Proc. (Oberwolfach 1994). Singapore: World Scientific, 1995. P. 292–304.
11. **Никольский С.М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., Наука: гл. ред. физ.-мат. литературы, 1977. 456 p.
12. **Бернштейн С.Н.** Об одном свойстве целых функций: собрание соч. Т. 1: Конструктивная теория функций. М.: Изд-во АН СССР, 1952. 582 с.
13. **Горбачёв Д.В.** Экстремальные задачи для целых функций экспоненциального сферического типа // Мат. заметки. 2000. Т. 68, № 2. P. 179–187.
14. **Лизоркин П.И.** Оценки тригонометрических интегралов и неравенство Бернштейна для дробных производных // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1965. Т. 4, № 3. С. 109–126.
15. **Соколов Г.Т.** О некоторых экстремальных свойствах тригонометрических сумм // Изв. АН СССР. VII серия. Отд. мат. и ест. наук. 1935. Вып. 6-7. С. 857–884.
16. **Civin P.** Inequalities for trigonometric integrals // Duke Math. J. 1941. Vol. 8. P. 656–665.
17. **Самко С.Г.** Гиперсингулярные интегралы и их приложения. Ростов-на-Дону: Изд–во Ростов. ун-та, 1984, 208 с.
18. **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 638 с.
19. **Бари Н.К.** Тригонометрические ряды. М.: Физматлит, 1961. 936 p.
20. **Szegő G.** Uber einen Satz des Herrn Serge Bernstein // Schrift. Königsberg. Gelehrten Gesellschaft. 1928. J. 5, H. 4. S. 59–70.
21. **Ахиезер Н.И.** Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. литературы, 1965. 409 p.
22. **Леонтьева А.О.** Неравенство Бернштейна для производной Рисса порядка $0 < \alpha < 1$ целых функций экспоненциального типа в равномерной норме // Мат. заметки. 2024. Т. 115, № 2. С. 245–256. https://doi.org/10.4213/mzm13959
23. **Frappier C., Olivier P.** A quadrature formula involving zeros of Bessel functions // Math. Comp. 1993. Vol. 60, no. 201. P. 303–316. https://doi.org/10.2307/2153168
24. **Камзолов А. И.** Об интерполяционной формуле Рисса и неравенстве Бернштейна для функций на однородных пространствах // Мат. заметки. 1974. Т. 15, no. 6. С. 967–978.
25. **Горбачёв Д. В.** Точные неравенства Бернштейна—Никольского для полиномов и целых функций экспоненциального типа // Чебышёвский сб. 2021. Т. 22, no. 5. С. 58–110. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-5-58-110
26. **Горбачёв Д. В., Иванов В. И.** Константы Никольского—Бернштейна для целых функций экспоненциального сферического типа в весовых пространствах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 2. С. 75–87. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-2-75-87

Поступила 31.03.2025
После доработки 16.06.2025
Принята к публикации 23.06.2025

Леонтьева Анастасия Олеговна
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: lao-imm@yandex.ru

REFERENCES

1. Timan A.F., Trofimov V.N. *Vvedenie v teoriyu garmonicheskikh funktsii* [Introduction to the theory of harmonic functions]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 208 p.
2. Gorbachev D.V., Ivanov V.I. Fractional smoothness in L^p with Dunkl weight and its applications. *Math. Notes*, 2019, vol. 106, no. 4, pp. 537–561. https://doi.org/10.1134/S0001434619090232
3. Platonov S.S. Bessel harmonic analysis and approximation of functions on the half-line. *Izv. Math.*, 2007, vol. 71, no. 5, pp. 1001–1048. https://doi.org/10.1070/IM2007v071n05ABEH002379
4. Vinogradov O.L. Sharp Bernstein-type inequalities for Fourier — Dunkl multipliers. *Sb. Math.*, 2023, vol. 214, no. 1, pp. 1–27. https://doi.org/10.4213/sm9724e
5. Gorbachev D.V. Boas conjecture on the axis for Fourier — Dunkl transform and its generalization. *Cheb. Sb.*, 2023, vol. 24, no. 2, pp. 141–153 (in Russian). https://doi.org/10.22405/2226-8383-2023-24-2-141-153
6. Arestov V.V., Babenko A.G., Deikalova M.V., Horvát Á. Nikol'skii inequality between the uniform norm and integral norm with bessel weight for entire functions of exponential type on the half-line. *Anal. Math.*, 2018, vol. 44, no. 1, pp. 21–42. https://doi.org/10.1007/s10476-018-0103-6
7. Watson G.N. *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1944, 804 p. ISBN: 9780722230435 . Translated to Russian under the title *Teoriya besselevykh funktsii. Ch.* 1, Moscow, Inostr. Liter. Publ., 1949, 798 p.
8. Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S.Y. Positive L^p-bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications. *Constr. Approx.*, 2019, vol. 49, no. 3, pp. 555–605. https://doi.org/10.1007/s00365-018-9435-5
9. Gorbachev D.V., Dobrovol'skii N.N. Nikol'skii constants in spaces $L^p(\mathbb{R}, |x|^\alpha dx)$. *Cheb. Sb.*, 2018, vol. 19, no. 2, pp. 67–79 (in Russian). https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-2-67-79
10. Rösler M. Bessel-type signed hypergroups on $\mathbb{R}$. In: H. Heyer, A. Mukherjea (eds.), Probability measures on groups and related structures XI, Proc. Oberwolfach 1994, World Scientific, Singapore, 1995. P. 292–304.
11. Nikol'skii S.M. *Approximation of functions of several variables and embedding theorems*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2011, 420 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-65711-5. Original Russian text published in Nikol'skii S.M. *Priblizhenie funktsii mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya*, Moscow, Nauka Publ., 1977, 456 p.
12. Bernstein S.N. On one property of entire functions. In: *Sobranie sochinenii* [Collected works], vol. 1: *Konstruktivnaya teoriya funktsii* [Constructive functions theory], Akad. Nauk SSSR Publ., 1952, 582 p.
13. Gorbachev D.V. Extremum problems for entire functions of exponential spherical type. *Math. Notes*, 2000, vol. 68, no. 2, pp. 159–166. https://doi.org/10.1007/BF02675341
14. Lizorkin P.I. Estimations of trigonometric integrals and Bernstein inequality for fractional derivatives. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 1965, vol. 29, no. 1, pp. 109–126 (in Russian).
15. Sokolov G.T. Some extremal properties of trigonometric sums. *Izv. Akad. Nauk SSSR. VII ser. Branch Math. Nat. Sci.*, 1935, vol. 6–7, pp. 857–884 (in Russian).
16. Civin P. Inequalities for trigonometric integrals. *Duke Math. J.*, 1941, vol. 8, pp. 656–665. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-41-00855-4
17. Samko S.G. *Hypersingular integrals and their applications*, London, CRC Press, 2002, 378 p. https://doi.org/10.1201/9781482264968 . Original Russian text published in Samko S.G. *Gipersingulyarnye integraly i ikh prilozheniya*, Rostov-na-Donu, Izd. Rostov. Univ., 1984, 208 p.
18. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Fractional integrals and derivatives. Theory and applications*. Yverdon, Gordon and Breach, 1993, 976 p. ISBN: 9782881248641 . Original Russian text published in Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya*, Minsk, Nauka i Tekhnika Publ., 1987, 638 p.
19. Bari N.K. *A treatise on trigonometric series*. NY, Pergamon Press, 1964, pp. 1061. ISBN: 9780080100029 . Original Russian text published in Bari N. K. *Trigonometricheskie ryady*, Moscow, Fizmatlit Publ., 1961, 936 p.

20. Szego G. Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein. Schrift. Königsberg. *Gelehrten Gesellschaft*, 1928, vol. 5, no. 4, pp. 59–70.
21. Akhiezer N.I. *Lektsii po teorii approksimatsii* [Lectures on the theory of approximation]. Moscow, Nauka Publ., 1965, 409 p.
22. Leont'eva A.O. Bernstein inequality for the Riesz derivative of order of entire functions of exponential type in the uniform norm. *Math. Notes*, 2024, vol. 115, no. 2, pp. 205–214. https://doi.org/10.1134/S000143462401019X
23. Frappier C., Olivier P. A quadrature formula involving zeros of Bessel functions. *Math. Comp.*, 1993, vol. 60, no. 201, pp. 303–316. https://doi.org/10.2307/2153168
24. Kamzolov A.I. On Riesz's interpolational formula and Bernshtein's inequality for functions on homogeneous spaces. *Math. Notes*, 1974, vol. 15, no. 6, pp. 576–582. https://doi.org/10.1007/BF01152838
25. Gorbachev D.V. Sharp Bernstein–Nikol'skii inequalities for polynomials and entire functions of exponential type. *Chebyshevskii sbornik*, 2021, vol. 22, no. 5, pp. 58–110 (in Russian). https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-5-58-110
26. Gorbachev D.V., Ivanov V.I. Nikol'skii — Bernstein constants for entire functions of exponential spherical type in weighted spaces. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2020, vol. 309, suppl. 1, pp. S24–S35. https://doi.org/10.1134/S0081543820040045

Received March 31, 2025
Revised June 16, 2025
Accepted June 23, 2025

Anastasiya Olegovna Leont'eva, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: lao-imm@yandex.ru .

Cite this article as: Leont'eva A.O. Bernstein inequality for fractional powers of univariate Dunkl laplacian and multivariate Laplace operator of entire functions. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 3, pp. 167–184 .