Online First 2025

УДК 519.85, 519.83, 519.7

ВАРИАНТ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ УСТУПОК И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ НА ОСНОВЕ КОНЕЧНЫХ ПРОЦЕДУР ОТСЕЧЕНИЙ[1]

И. Я. Заботин, О. Н. Шульгина, Р. С. Яруллин

Рассматривается вариант метода последовательных уступок для решения задачи многокритериальной оптимизации, который отличается от названного известного метода более общим способом задания уступок. В предлагаемом варианте уступки задаются таким образом, чтобы решения частных задач двух соседних этапов могли отличаться между собой как по оптимальному значению целевых функций, так и по расстоянию на величины, не превышающие заранее заданные. Предлагается реализация метода для случая, когда все частные задачи являются задачами выпуклого программирования. Реализация основана на разработанном алгоритме условной минимизации недифференцируемых функций, который относится к классу методов отсечений. Этот алгоритм характеризуется тем, что использует аппроксимацию многогранными множествами как области ограничений, так и надграфика целевой функции задачи, а итерационные точки строятся принадлежащими допустимому множеству.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, недифференцируемая оптимизация, методы отсечений, последовательность приближений, сходимость, аппроксимация, отсекающая плоскость.

I. Ya. Zabotin, O. N. Shulgina, R. S. Yarullin. A variant of the successive concessions method and its implementation based on cutting procedures.

We consider a variant of the successive concessions method for solving a multi-objective optimization problem. The proposed variant differs from the well-known method by the general way of specifying concessions. In the proposed variant, the concessions are defined in such a way that the solutions of the particular problems of two adjacent stages can differ from each other both in the optimal value of the objective functions and in the distance by values not exceeding specified ones. We propose the implementation of the method for the case where all particular problems are convex programming problems. The implementation is based on the developed algorithm of conditional minimization of non-differentiable functions. This algorithm belongs to the class of cutting methods and is characterized by the fact that it uses approximation by polyhedral sets of both the constraint region and the epigraph of the objective function of the problem, and iteration points are constructed as belonging to the feasible set.

Keywords: multi-objective optimization, non-differentiable optimization, cutting-plane methods, approximations sequence, convergence, approximating set, cutting plane.

MSC: 90C29, 90-08, 90C30

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-3-fon-08

Введение

Для решения задач многокритериальной (векторной) оптимизации существует значительное число методов, основанных на различных принципах (см., например, [1–4]). Эти принципы существенно исходят из того, ранжированы ли частные критерии задачи по их значимости или все критерии равноценны между собой. Сразу подчеркнем, что предлагаемый здесь метод предназначен для решения задач первого из названных типов.

Одним из известных методов решения многокритериальных задач, в которых частные оптимизационные критерии отличаются друг от друга по значимости, является так называемый метод последовательных уступок (см., например, [2]). Число этапов (шагов) в методе совпадает с количеством частных критериев задачи. Критерии нумеруются в порядке убывания

[1]Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета (“ПРИОРИТЕТ-2030”).

их значимости. На первом этапе на множестве ограничений исходной задачи находится оптимальное значение целевой функции, относящейся к первому, т. е. главному, критерию. На каждом следующем этапе при тех же основных ограничениях находится экстремальная точка и соответственно оптимальное значение целевой функции очередного по значимости критерия со следующими дополнительными условиями: значение в этой точке целевой функции каждого из предыдущих критериев должно отличаться от своего найденного ранее оптимального значения на величину, не превышающую заранее заданную. Решение задачи последнего этапа принимается за решение исходной многокритериальной задачи.

Обратим внимание на следующую особенность описанного классического метода. Экстремальная точка как решение задачи текущего этапа может существенно отличаться по расстоянию от решений предыдущих этапов. В частности, расстояние между решением последнего этапа, т. е. решением исходной многокритериальной задачи, и решением первого (главного) этапа может оказаться нежелательно большим. Легко привести пример (в частности, с линейными функциями цели и ограничений), когда уже на втором этапе при незначительной величине уступки решение задачи второго этапа сильно отличается по расстоянию от множества решений задачи первого этапа.

Указанная особенность метода отрицательно сказывается на выборе его для решения тех прикладных задач, где частные критерии существенно отличаются между собой по их значимости и решение исходной задачи не должно сильно отличаться по расстоянию от решений задач первых этапов. В связи с этим, по-видимому, имеет смысл изменить в методе способ задания уступок. Ниже будет предложен такой вариант метода последовательных уступок, где на каждом этапе при желании можно обеспечивать заданные отклонения между решениями соседних этапов не только по значению целевых функций, но и по расстоянию.

Итак, после постановки задачи и описания классического метода последовательных уступок будет представлен вариант метода с более общим способом задания уступок и проведено его обсуждение. Затем будет предложена и обоснована одна из реализаций метода для случая, когда все частные критерии определены выпуклыми, вообще говоря, недифференцируемыми функциями, а допустимое множество задачи выпукло замкнуто и ограничено. Эта реализация основана на разработанном методе решения задачи выпуклого программирования, который относится к классу методов отсечений и характеризуется следующим. Во-первых, он использует при построении приближений аппроксимацию многогранными множествами как области ограничений, так и надграфика целевой функции, и, во-вторых, основные итерационные точки строятся в нем принадлежащими допустимому множеству. Обе особенности делают этот метод отсечений удобным с практической точки зрения в том числе и для задач многокритериальной оптимизации.

1. Постановка задачи

Решается задача многокритериальной оптимизации с m частными критериями, где $m \geq 2$. Пусть эти критерии заданы определенными в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}_n$ непрерывными функциями $f_j(x)$, $j = 1, \ldots, m$, а множество ограничений $D \subset \mathbb{R}_n$ выпукло замкнуто и ограничено.

Положим $J = \{1, \ldots, m\}$. Не ограничивая общности, будем считать, что для каждого $j \in J$ частная задача, относящаяся к j-му оптимизационному критерию, имеет вид

$$\min\{f_j(x) : x \in D\}.$$

Договоримся также, что частные критерии не равноценны друг другу. А именно, первый критерий, определенный функцией $f_1(x)$, является главным, т. е. самым значимым. Остальные критерии, заданные соответственно функциями $f_2(x), \ldots, f_m(x)$, пронумерованы в порядке убывания их значимости.

Положим для каждого $j \in J$

$$\mu_j = \min\{f_j(x) : x \in D\}, \quad X_j^* = \{x \in D : f_j(x) = \mu_j\}.$$

Поскольку множество $\bigcap\limits_{j \in J} X_j^*$, как правило, пусто, то задача заключается в отыскании такой точки $x^* \in D$, что она сама или соответствующие ей значения $f_j(x^*)$ близки в определенном смысле для всех или некоторых $j \in J$ к множествам X_j^* или числам μ_j соответственно. Такую точку x^* принято называть решением (в общем смысле) исходной многокритериальной задачи.

Отметим, что в каждом методе многокритериальной оптимизации подразумевается свой критерий выбора в множестве D точки x^*, т. е. свое определение решения исходной задачи. В классическом методе последовательных уступок, как уже сказано выше, под решением многокритериальной задачи понимается любое решение вспомогательной задачи последнего, m-го, этапа. В предлагаемом здесь варианте названного известного метода заложен свой критерий выбора точки x^* как решение задачи. Формальное правило задания такой точки x^* и способ учета всех критериев при отыскании этой точки будут представлены при описании предлагаемого варианта.

2. Классический метод последовательных уступок

Опишем сначала формально и проанализируем классический метод последовательных уступок. Метод состоит из m этапов. Номера этапов будем обозначать переменной k, принимающей значения $1, \dots, m$. Метод заключается в следующем.

Задаются числа $\varepsilon_j > 0$, $j = 1, \dots, m-1$. На первом этапе, т. е. при $k = 1$, отыскивается точка $x_1 \in D$ как решение задачи

$$\min\{f_1(x) : x \in D\}. \tag{2.1}$$

Затем последовательно при каждом $k = 2, \dots, m$ находится точка $x_k \in D$ как решение задачи

$$\min\big\{f_k(x) : x \in D,\ f_j(x) \le f_j(x_j) + \varepsilon_j,\ j = 1, \dots, k-1\big\}. \tag{2.2}$$

Точка x_m принимается в качестве решения x^* исходной задачи многокритериальной оптимизации.

Заметим, что методом не гарантируется, что число $f_k(x_k)$, полученное на k-м этапе, где $2 \le k \le m-1$, будет ближе к числу μ_k, чем значение $f_{k+1}(x_{k+1})$ менее важного $(k+1)$-го критерия к своему оптимальному на множестве D значению μ_{k+1}.

Согласно (2.1), (2.2) для точки $x^* = x_m$ при всех $k = 1, \dots, m-1$ выполняются неравенства

$$|f_k(x_k) - f_k(x^*)| \le \varepsilon_k.$$

В частности, с учетом равенства $f_1(x_1) = \mu_1$ имеем

$$f_1(x^*) - \mu_1 \le \varepsilon_1.$$

Значит, для главного критерия отличие величины $f_1(x^*)$ от оптимального значения μ_1 при малом ε_1 незначительно. Однако, как отмечено выше, легко привести пример многокритериальной задачи, когда при малом ε_1 расстояние от точки $x^* = x_m$ до множества X_1^* решений частной задачи (2.1) первого этапа оказывается существенным. Следовательно, метод не гарантирует заранее заданную максимально допустимую величину отклонения точки x^* от множества X_1^*, поскольку не обеспечивается заданное расстояние между решениями x_k, x_{k+1} соседних этапов. Ниже предлагается такой вариант метода, в котором при желании можно гарантировать фиксированное отклонение не только значений $f_k(x_k)$, $f_{k+1}(x_{k+1})$ друг от друга, но и расстояний между точками x_k, x_{k+1}, $1 \le k \le m-1$.

3. Вариант метода последовательных уступок

Опишем сначала принципиальную схему метода, а потом обсудим ее возможные реализации. Схема, как и классический метод, состоит из m этапов, номера которых будем также обозначать переменной k.

Выбираются числа $\varepsilon_k > 0$, $\delta_k > 0$, $k = 1, \dots, m-1$. Полагается $D_1 = D$, $k = 1$.

1. Отыскивается точка $x_k \in D_k$, как решение задачи

$$\min\{f_k(x) : x \in D_k\}. \tag{3.1}$$

2. Если $k = m$, то в качестве решения x^* исходной многокритериальной задачи принимается точка x_k, и процесс завершается. В противном случае значение k увеличивается на единицу и следует переход к п. 3.

3. Строятся множества

$$G_{k-1} = \{x \in \mathbb{R}_n : f_{k-1}(x) \le f_{k-1}(x_{k-1}) + \varepsilon_{k-1}\}, \quad U_{k-1} = \{x \in \mathbb{R}_n : \|x - x_{k-1}\| \le \delta_{k-1}\},$$

полагается $D_k = D_{k-1} \cap G_{k-1} \cap U_{k-1}$, и следует переход к п. 1. □

Сделаем несколько замечаний, касающихся описанного варианта. Метод позволяет при желании не учитывать в решении задачи (3.1) для всех или некоторых $k = 1, \dots, m$ ограничения

$$\|x - x_{k-1}\| \le \delta_{k-1}, \tag{3.2}$$

задающие множества $U_1, \dots, U_{m-1}$. Поясним это.

Поскольку множество D ограничено, то для всех $x \in D$ имеет место неравенство $\|x\| \le \delta$ при некотором $0 < \delta < +\infty$. Пусть на k-м этапе метода, где $k \ge 2$, число δ_{k-1} считается достаточно большим, а именно

$$\delta_{k-1} > \delta.$$

Тогда решение x_k задачи (3.1) при этом значении k будет найдено без учета ограничения (3.2), так как в таком случае можно считать, что $D_k = D_{k-1} \cap G_{k-1}$.

Например, если при решении многокритериальной задачи достаточно учесть близость точки x^* лишь к решению x_1 первого (главного) этапа, то значения $\delta_2, \dots, \delta_{m-1}$ можно не задавать, считая их сколь угодно большими. Если же бесконечно большими считать все значения δ_k, $k = 1, \dots, m-1$, то предложенный вариант представляет собой классический метод последовательных уступок, поскольку на всех этапах учитываются уступки только традиционного вида.

Аналогичное замечание можно сделать относительно учета в (3.1) для всех или некоторых k ограничений вида $f_j(x) \le f_j(x_j) + \varepsilon_j$, $j = 1, \dots, m-1$, участвующих в построении множеств D_k. В силу условий задания множества D и функций $f_j(x)$, $j = 1, \dots, m$, можно, например, при всех $k \ge 2$ положить

$$D_k = D_{k-1} \cap U_{k-1},$$

считая, что значения $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1}$ достаточно велики. Тогда в методе вместо традиционных уступок на всех этапах будут учитываться только уступки по расстоянию вида (3.2).

Пусть на всех этапах метода учитываются оба вида уступок. Тогда для решения x^* многокритериальной задачи при каждом $k = 1, \dots, m-1$ одновременно выполняются следующие неравенства:

$$\|x^* - x_k\| \le \delta_k, \quad |f_k(x^*) - f_k(x_k)| \le \varepsilon_k.$$

В частности, для главного критерия отклонения точки x^* и значения $f_1(x^*)$ от точки x_1 и значения $f_1(x_1)$ соответственно не превышают заранее заданных величин.

Далее, в предложенном варианте множества U_k, $k = 1, \ldots, m-1$, задаются в $\mathbb{R}_n$ в виде шаров с центрами в точках x_k. Ясно, что множества U_k можно задавать в методе и другими способами. Пусть все частные критерии исходной задачи определены линейными функциями, а множество D является выпуклым многогранником. В таком случае множества U_k удобно выбирать тоже в виде выпуклых многогранников, например в виде n-мерных кубов с центрами в точках $x_k = (\xi_1^k, \ldots, \xi_n^k)$, т. е.

$$U_k = \{x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}_n : \xi_i^k - \delta_k \leq \xi_i \leq \xi_i^k + \delta_k,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Тогда на всех этапах метода задачи отыскания точек x_k будут задачами линейного программирования, и в этом частном случае практическая реализация описанной схемы не вызывает проблем.

Допустим теперь, что для построения множеств D_k используются уступки вида (3.2). Если функции $f_j(x)$, $j = 1, \ldots, m$, линейны, то к задаче (3.1) применимы и удобны с практической точки зрения методы отсечений, использующие аппроксимацию множества D_k некоторыми многогранными множествами (см., например, [5;6]). Удобство их заключается в том, что каждая итерационная точка отыскивается путем решения задачи линейного программирования. Однако последовательность приближений строится по этим методам как не принадлежащая области ограничений. Поэтому при решении задачи (3.1) таким методом в качестве точки x_k будет принято некоторое приближение, не принадлежащее D_k. Тогда при малом δ_k множество D_{k+1} может оказаться пустым и задача $(k+1)$-го этапа не будет иметь решения.

Если же функции $f_j(x)$ нелинейны, то упомянутые методы отсечений практически не применимы. В случае выпуклости всех функций $f_j(x)$ для решения задач (3.1) можно применять на практике и другие методы отсечений (см., например, [7; 8]), в рамках которых при построении итерационных точек используется аппроксимация многогранными множествами не только области ограничений, но и надграфика целевой функции. За счет такой одновременной аппроксимации последовательность приближений согласно этим методам строится с помощью решения задач линейного программирования. Однако и в этом случае не гарантируется принадлежность множеству D_k решения x_k задачи k-го этапа, следовательно, нет гарантии непустоты множества D_{k+1}.

В связи с этими замечаниями предложим теперь в качестве реализации описанного варианта метода последовательных уступок такой метод отсечений, где все итерационные точки строятся принадлежащими допустимой области.

4. Реализация метода и ее обсуждение

Будем считать далее, что функции $f_k(x)$, $k = 1, \ldots, m$, выпуклы в $\mathbb{R}_n$, а множество D выпукло замкнуто ограничено и имеет непустую внутренность $\operatorname{int} D$.

Положим $\operatorname{epi}(f_k, \mathbb{R}_n) = \{(x, \gamma) \in \mathbb{R}_{n+1} \colon x \in \mathbb{R}_n, \gamma \geq f_k(x)\}$, $k = 1, \ldots, m$, $A(z, Q) = \{a \in \mathbb{R}_n \colon \|a\| = 1, \langle a, x - z\rangle \leq 0\ \forall x \in Q\}$, $B(r, Q') = \{b \in \mathbb{R}_{n+1} \colon \|b\| = 1, \langle b, u - r\rangle \leq 0\ \forall u \in Q'\}$ — множества нормированных обобщенно-опорных векторов для множества $Q \subset \mathbb{R}_n$ в точке $z \in \mathbb{R}_n$ и множества $Q' \subset \mathbb{R}_{n+1}$ в точке $r \in \mathbb{R}_{n+1}$ соответственно.

Метод отыскания решений $x_1, \ldots, x_m$ задач (3.1), а значит, и решения x^* исходной задачи заключается в следующем.

Строится выпуклое ограниченное замкнутое множество $G \subset \mathbb{R}_n$ такое, что $D \subset G$. Задаются числа $\varepsilon_k > 0$, $\delta_k > 0$, $k = 1, \ldots, m-1$, $\Delta_k > 0$, $k = 1, \ldots, m$, и $q > 1$. Полагается $D_1 = D$, $k = 1$.

1. Пусть $G_k^0 = G$. Строится выпуклое замкнутое множество $M_k^0 \subset \mathbb{R}_{n+1}$ такое, что $\operatorname{epi}(f_k, \mathbb{R}_n) \subset M_k^0$ и для любой точки $(x, \gamma) \in M_k^0$, где $x \in G$, выполняется неравенство

$$\gamma \geq \bar{\gamma}_k; \tag{4.1}$$

здесь $-\infty < \bar{\gamma}_k \le \min\{f_k(x) : x \in G\}$. Выбирается точка $v_k \in \operatorname{int} D_k$, полагается $v'_k = (v_k, \theta_k)$, где $\theta_k > f_k(v_k)$. Принимается $w_k^{-1} = v_k$, $i = 0$.

2. Находится решение $u_k^i = (y_k^i, \gamma_k^i)$, где $y_k^i \in \mathbb{R}_n$, $\gamma_k^i \in \mathbb{R}_1$, следующей задачи:

$$\min\{\gamma : (x, \gamma) \in M_k^i, x \in G_k^i\}. \tag{4.2}$$

Если

$$y_k^i \in D_k, \quad f_k(y_k^i) = \gamma_k^i, \tag{4.3}$$

то y_k^i — решение задачи (3.1) k-го этапа, и поэтому полагается $x_k = y_k^i$, следует переход к п. 9.

3. Фиксируются точки z_k^i, $\tilde{y}_k^i \in \mathbb{R}_n$ таким образом. Если $y_k^i \in D_k$, то

$$z_k^i = y_k^i, \quad \tilde{y}_k^i = y_k^i.$$

В противном случае,

$$z_k^i = \lambda_k^i v_k + (1 - \lambda_k^i) y_k^i, \quad \tilde{y}_k^i = y_k^i + q_k^i (z_k^i - y_k^i),$$

где числа $\lambda_k^i \in (0, 1)$, $q_k^i \in [1, q]$ выбраны с условием, что

$$z_k^i \notin \operatorname{int} D_k, \quad \tilde{y}_k^i \in D_k.$$

Если

$$f(\tilde{y}_k^i) = \gamma_k^i, \tag{4.4}$$

то точка $\tilde{y}_k^i$ является решением задачи (3.1) k-го этапа. В таком случае полагается $x_k = \tilde{y}_k^i$, и следует переход к п. 9.

4. Из точек $\tilde{y}_k^i$, w_k^{i-1} выбирается рекордная для функции $f_k(x)$ и обозначается через w_k^i, т. е.

$$f_k(w_k^i) = \min\{f_k(\tilde{y}_k^i), f_k(w_k^{i-1})\}. \tag{4.5}$$

Если

$$f_k(w_k^i) = \gamma_k^i, \tag{4.6}$$

то w_k^i — решение задачи (3.1), полагается $x_k = w_k^i$, и выполняется п. 9.

5. Если выполняется неравенство

$$f_k(w_k^i) - \gamma_k^i \le \Delta_k, \tag{4.7}$$

то w_k^i — Δ_k-решение задачи (3.1), полагается $x_k = w_k^i$, и осуществляется переход к п. 9. Иначе выполняется п. 6.

6. Строится множество G_k^{i+1} следующим образом. Если $y_k^i \in D_k$, то полагается

$$G_k^{i+1} = G_k^i.$$

В противном случае,

$$G_k^{i+1} = G_k^i \cap \{x \in \mathbb{R}_n : \langle a_k^i, x - z_k^i \rangle \le 0\}, \quad \text{где} \quad a_k^i \in A(z_k^i, D_k).$$

7. Пусть

$$r_k^i = \alpha_k^i v'_k + (1 - \alpha_k^i) u_k^i,$$

где число $\alpha_k^i \in [0, 1)$ выбрано так, что $r_k^i \notin \operatorname{int} \operatorname{epi}(f_k, \mathbb{R}_n)$ и при некотором $\tilde{q}_k^i \in [1, q]$ для точки $\tilde{r}_k^i = u_k^i + \tilde{q}_k^i (r_k^i - u_k^i)$ выполняется включение $\tilde{r}_k^i \in \operatorname{epi}(f_k, \mathbb{R}_n)$.

8. Задается

$$M_k^{i+1} = M_k^i \cap \{u \in \mathbb{R}_{n+1} : \langle b_k^i, u - r_k^i \rangle \le 0\},$$

где $b_k^i \in B(r_k^i, \mathrm{epi}\,(f_k, \mathbb{R}_n))$, значение i увеличивается на единицу, и следует переход к п. 2.

9. Если $k = m$, то устанавливается $x^* = x_k$, и процесс решения задачи многокритериальной оптимизации завершается. Иначе полагается

$$D_{k+1} = D_k \cap \{x \in \mathbb{R}_n : f_k(x) \leq f_k(x_k) + \varepsilon_k, \|x - x_k\| \leq \delta_k\}, \tag{4.8}$$

и следует переход к п. 1 при k, увеличенном на единицу. □

Приведем сначала некоторые свойства предложенной реализации, касающиеся разрешимости задачи (4.2) и критериев оптимальности, заложенных в пп. 2–4. Положим $K = \{1, \ldots, m\}$, $I = \{0, 1, \ldots\}$.

Лемма 1. *Для всех $k \in K$ и $i \in I$ справедливы включения*

$$D_k \subset G_k^i, \quad \mathrm{epi}\,(f_k, \mathbb{R}_n) \subset M_k^i.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно выбору множества G на предварительном шаге реализации и заданию множества D_1 выполняется включение $D_1 \subset G$. Но в силу (4.8) $D_{k+1} \subset D_k$, $k = 1, \ldots, m-1$, т. е. $D_k \subset G$ для всех $k \in K$. Значит, с учетом способа задания множества G_k^0 в п. 1

$$D_k \subset G_k^0, \quad k \in K.$$

Тогда несложно доказать по индукции, что при фиксированном значении k способ построения множеств G_k^{i+1}, $i \geq 0$, в п. 6 с использованием точек $z_k^i \notin \mathrm{int}\, D_k$ и векторов $a_k^i \in A(z_k^i)$ гарантирует включение $D_k \subset G_k^{i+1}$ для всех $i \geq 0$. Таким образом, первое из утверждений леммы справедливо.

Имея в виду способ выбора при фиксированном $k \in K$ множества M_k^0 и способ построения в п. 8 множеств M_k^{i+1}, $i \geq 0$, с использованием точек $r_k^i \notin \mathrm{int}\,\mathrm{epi}\,(f_k, \mathbb{R}_n)$ и обобщенно-опорных векторов b_k^i по индукции можно обосновать также и второе утверждение. □

Из леммы 1 с учетом условия (4.1) следует разрешимость задачи (4.2) при всех $k \in K$, $i \in I$.

Обоснуем теперь критерии оптимальности точек y_k^i, $\tilde{y}_k^i$, w_k^i для задачи (3.1), которые сформулированы в виде соотношений (4.3), (4.4), (4.6) соответственно.

Лемма 2. *Если точка $x \in D_k$ такова, что*

$$f_k(x) = \gamma_k^i \tag{4.9}$$

при некоторых $k \in K$, $i \in I$, то x — решение задачи (3.1) k-го этапа описанного варианта метода последовательных уступок.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть номера k, i таковы, что выполняется (4.9), а x_k^* — решение задачи (3.1) при выбранном k и $f_k^* = f_k(x_k^*)$. Поскольку (y_k^i, γ_k^i) — решение задачи (4.2), то для любой точки (x, γ) из области ограничений этой задачи выполняется неравенство $\gamma_k^i \leq \gamma$. Но $x_k^* \in D_k$, $(x_k^*, f_k^*) \in \mathrm{epi}\,(f_k, \mathbb{R}_n)$, т. е. согласно лемме 1 точка (x_k^*, f_k^*) удовлетворяет ограничениям задачи (4.2). Следовательно,

$$\gamma_k^i \leq f_k^*. \tag{4.10}$$

Далее, по условию леммы $x \in D_k$ и, значит, $f_k(x) \geq f_k^*$. С другой стороны, в силу (4.9), (4.10) $f_k(x) \leq f_k^*$. Таким образом, $f(x) = f_k^*$ и утверждение леммы доказано. □

Теорема 1. *Пусть при некоторых $k \in K$ и $i \in I$ для какой-то из точек y_k^i, $\tilde{y}_k^i$ или w_k^i выполняется соотношение (4.3), (4.4) или (4.6) соответственно. Тогда эта точка является решением задачи (3.1).*

Доказательство утверждения следует из леммы 2, так как при условии (4.3) для y_k^i выполняется включение $y_k^i \in D_k$, а согласно пп. 3, 4 реализации точки $\tilde{y}_k^i$, а значит, и точки w_k^i строятся для всех k, i принадлежащими множеству D_k.

Теорема доказана.

Сделаем далее несколько замечаний, касающихся предложенной выше реализации. Будем считать при этом, что номер $k \in K$ фиксирован.

Замечание 1. Множества G и M_k^0 удобно выбирать многогранными, тогда задачи (4.2) при всех $i \in I$ будут задачами линейного программирования. Если в исходной многокритериальной задаче множество D — многогранник, то без дополнительных построений можно положить $G = D$. В п. 1 реализации допустимо считать, что $M_k^0 = \mathbb{R}_{n+1}$. Однако в таком случае для существования решения задачи (4.2) при $i = 0$ к ее ограничениям следует добавить неравенство (4.1).

Замечание 2. Если $y_k^i \notin D_k$ при некотором $i \in I$, то для построения отсекающей плоскости в интервале (v_k, y_k^i) отыскивается вспомогательная точка z_k^i. Если считать $q_k^i = 1$, то z_k^i будет точкой пересечения отрезка $[v_k, y_k^i]$ с границей множества D_k. Выбор $q_k^i > 1$ позволяет находить эту точку пересечения приближенно. Аналогично выбор в п. 7 значения $\tilde{q}_k^i > 1$ дает возможность приближенного вычисления r_k^i как точки пересечения отрезка $[v'_k, u_k^i]$ с границей множества $\mathrm{epi}\,(f_k, \mathbb{R}_n)$.

Замечание 3. Пусть функция $f_k(x)$ представляет собой функцию максимума из линейных функций. Тогда нет смысла в аппроксимации ее надграфика многогранными множествами. В этом случае естественно положить $M_k^0 = \mathrm{epi}\,(f_k, \mathbb{R}_n)$ и при каждом $i \in I$, выбирая $\tilde{q}_k^i = 1$, без вычисления r_k^i, $\tilde{r}_k^i$, b_k^i можно считать в п. 8, что $M_k^{i+1} = M_k^i = \mathrm{epi}\,(f_k, \mathbb{R}_n)$.

Замечание 4. Задание точки w_k^{-1} в п. 1 можно опустить и при $i = 0$ в п. 4 сразу положить $w_k^0 = \tilde{y}_k^0$, считая, что в (4.5) $w_k^{-1} = \tilde{y}_k^0$.

Замечание 5. Согласно п. 3 и условию (4.5) задания точек w_k^i для всех $i \in I$ имеет место включение $w_k^i \in D_k$. Следовательно, с учетом (4.10) для значения $f_k^* = \min\{f_k(x) : x \in D_k\}$ при всех $i \in I$ справедливы оценки

$$\gamma_k^i \le f_k^* \le f_k(w_k^i). \tag{4.11}$$

Поэтому выполнение неравенства (4.7) при некотором $i \in I$ означает, что точка w_k^i является Δ_k-решением задачи (3.1) k-го этапа и можно переходить через п. 9 к решению задачи $(k+1)$-го этапа. Если при этом $k = m$, то точка w_k^i принимается в качестве решения x^* исходной многокритериальной задачи. Отметим, что позже будет обосновано существование номера $i \in I$, для которого при любом фиксированном значении $\Delta_k > 0$ справедливо неравенство (4.7).

5. Обоснование сходимости

Перейдем к доказательству того, что при каждом $k \in K$ найдется номер $i = i_k \in I$, для которого выполнится неравенство (4.7), а значит, зафиксируется приближенное решение $x_k = w_k^{i_k}$ задачи (3.1) k-го этапа.

Пусть при фиксированном $k \in K$, независимо от условия (4.7), пп. 1–8 выполняются для всех $i \in I$, т. е. построены последовательности $\{u_k^i\}$, $\{z_k^i\}$, $\{\tilde{y}_k^i\}$, $\{w_k^i\}$, $\{r_k^i\}$, $\{\tilde{r}_k^i\}$, $i \in I$. Отметим, что все они ограничены в силу ограниченности множества D_k, выбора множеств G_k^0, M_k^0 и способов построения множеств G_k^i, M_k^i, $i \ge 1$.

Лемма 3. *Пусть $\{y_k^i\}$, $i \in I' \subset I$, — сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{y_k^i\}$, $i \in I$, и $y_k^i \notin D_k$ для всех $i \in I'$. Тогда $\lim\limits_{i \in I'} \|z_k^i - y_k^i\| = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу условия леммы и п. 3 реализации $z_k^i \neq y_k^i$, $i \in I'$, т.е.

$$z_k^i = y_k^i + \lambda_k^i (v_k - y_k^i) \quad \forall i \in I'. \tag{5.1}$$

Зафиксируем номера l, $p \in I'$ так, что $p > l$. Согласно способу построения множеств G_k^i, $i \in I$, в п. 6 выполняется включение $G_k^p \subset G_k^l$. Кроме того, $y_k^p \in G_k^p$, так как (y_k^p, γ_k^p) — решение задачи (4.2) при $i = p$. Поскольку вектор a_k^l, использованный для построения множества G_k^{l+1}, является обобщенно-опорным в точке z_k^l и к множеству G_k^p, то $\langle a_k^l, y_k^p - z_k^l \rangle \leq 0$. Отсюда с учетом (5.1) имеем

$$\langle a_k^l, y_k^l - y_k^p \rangle \geq \lambda_k^l \langle a_k^l, y_k^l - v_k \rangle.$$

Вследствие леммы 1 из работы [9] существует такое $\beta > 0$, что для всех $i \in I'$ выполняется неравенство $\langle a_k^i, y_k^i - v_k \rangle \geq \beta$. Следовательно, $\langle a_k^l, y_k^l - y_k^p \rangle \geq \beta \lambda_k^l$, а поскольку $\|a_k^l\| = 1$, то $\|y_k^l - y_k^p\| \geq \beta \lambda_k^l$. Из последнего неравенства, справедливого при любых l, $p \in I'$, $p > l$, и сходимости подпоследовательности $\{y_k^i\}$, $i \in I'$, получаем предельное соотношение $\lambda_k^i \to 0$, $i \to \infty$, $i \in I'$. Тогда из равенства (5.1) с учетом ограниченности последовательности $\{\|v_k - y_k^i\|\}$, $i \in I'$, следует утверждение леммы. $\square$

Лемма 4. *Пусть номер $k \in K$ зафиксирован, $\{u_k^i\}$, $i \in I' \subset I$, — сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{u_k^i\}$, $i \in I$. Тогда $\lim\limits_{i \in I'} \|r_k^i - u_k^i\| = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем по методике обоснования леммы 3. Пусть номера l, $p \in I'$ таковы, что $p > l$. Поскольку $M_k^p \subset M_k^l$, $u_k^p \in M_k^p$, а вектор b_k^l является обобщенно-опорным в точке r_k^l к множеству M_k^p, то $\langle b_k^l, u_k^p - r_k^l \rangle \leq 0$. Согласно п. 7 реализации точки z_k^i, $i \in I'$, имеют вид

$$r_k^i = u_k^i + \alpha_k^i (v_k' - u_k^i), \tag{5.2}$$

поэтому $\langle b_k^l, u_k^l - u_k^p \rangle \geq \alpha_k^l \langle b_k^l, u_k^l - v_k' \rangle$. На основании той же леммы 1 из [9] найдется $\beta > 0$ такое, что $\langle b_k^i, u_k^i - v_k' \rangle \geq \beta$ для всех $i \in I'$. Значит, $\|u_k^l - u_k^p\| \geq \beta \alpha_k^l$, и из сходимости последовательности $\{u_k^i\}$, $i \in I'$, имеем $\alpha_k^i \to 0$, $i \to \infty$, $i \in I'$. Тогда из (5.2) с учетом ограниченности $\{\|v_k' - u_k^i\|\}$, $i \in I'$, следует утверждение леммы. $\square$

Лемма 5. *Пусть выполняются условия леммы 4 и $\bar{u}_k = (\bar{y}_k, \bar{\gamma}_k)$ — предельная точка подпоследовательности $\{u_k^i\}$, $i \in I'$. Тогда справедливы включение*

$$\bar{u}_k \in \operatorname{epi}(f_k, \mathbb{R}_n) \tag{5.3}$$

и равенства

$$f_k(\bar{y}_k) = \bar{\gamma}_k. \tag{5.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обоснуем сначала первое утверждение. Выделим из последовательности $\{\tilde{r}_k^i\}$, $i \in I'$, сходящуюся подпоследовательность $\{\tilde{r}_k^i\}$, $i \in I'' \subset I'$. Пусть $\bar{r}_k$ — ее предельная точка. Заметим, что

$$\bar{r}_k \in \operatorname{epi}(f_k, \mathbb{R}_n), \tag{5.5}$$

поскольку множество $\operatorname{epi}(f_k, \mathbb{R}_n)$ замкнуто. Так как $\tilde{r}_k^i = u_k^i + \tilde{q}_k^i (r_k^i - u_k^i)$, $i \in I''$, и по лемме 4 получаем $\lim\limits_{i \in I''} \|r_k^i - u_k^i\| = 0$, то с учетом ограниченности последовательности $\{\tilde{q}_k^i\}$, $i \in I''$, справедливо равенство $\bar{r}_k = \bar{u}_k$. Отсюда и из (5.5) следует включение (5.3).

Далее, сразу отметим, что в силу (5.3) имеет место неравенство

$$f_k(\bar{y}_k) \leq \bar{\gamma}_k. \tag{5.6}$$

Докажем теперь, что

$$f_k(\bar{y}_k) \geq \bar{\gamma}_k. \tag{5.7}$$

Поскольку $(y_k^i, f_k(y_k^i)) \in \mathrm{epi}\,(f_k, \mathbb{R}_n)$, то по лемме 1 выполняется включение $(y_k^i, f_k(y_k^i)) \in M_k^i$ $\forall i \in I'$. Кроме того, $y_k^k \in G_k^i$, $i \in I'$, согласно (4.2), поэтому $(y_k^i, f_k(y_k^i))$ — допустимая точка задачи (4.2) при каждом $i \in I'$. Тогда для решения (y_k^i, γ_k^i) задачи (4.2) справедливо неравенство $f_k(y_k^i) \geq \gamma_k^i$, $i \in I'$. Из последнего неравенства следует (5.7). Таким образом, из (5.6), (5.7) получаем равенство (5.4). □

Теорема 2. *Для последовательности* $\{w_k^i\}$, $i \in I$, *построенной при фиксированном* $k \in K$, *справедливо равенство*

$$\lim_{i\to\infty} f_k(w_k^i) = f_k^*.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть подмножество $I' \subset I$ такое, что последовательности точек $u_k^i = (y_k^i, \gamma_k^i)$ и w_k^i, $i \in I$, являются сходящимися. Обозначим через $\bar{u}_k = (\bar{y}_k, \bar{\gamma}_k)$ и $\bar{w}_k$ соответственно их предельные точки. Так как $w_k^i \in D_k$, $i \in I'$, а множество D_k замкнуто, то $\bar{w}_k \in D_k$ и, значит,

$$f_k(\bar{w}_k) \geq f_k^*. \tag{5.8}$$

Докажем теперь, что

$$f_k(\bar{w}_k) \leq f_k(\bar{y}_k). \tag{5.9}$$

Согласно (4.5)

$$f_k(w_k^i) \leq f_k(\tilde{y}_k^i), \quad i \in I'. \tag{5.10}$$

Если для бесконечного числа номеров $i \in I'$ выполняется равенство $\tilde{y}_k^i = y_k$, то из (5.10) сразу следует (5.9). Поэтому будем считать, что для всех $i \in I'$, начиная с некоторого номера, точки $\tilde{y}_k^i$ имеют вид $\tilde{y}_k^i = y_k^i + q_k^i(z_k^i - y_k^i)$. Тогда с учетом леммы 3 и ограниченности последовательности $\{q_k^i\}$, $i \in I'$, из (5.10) также следует (5.9).

Далее, из (5.9), (5.4) имеем $f_k(\bar{w}_k) \leq \bar{\gamma}_k$. Но в силу (4.10) $\gamma_k^i \leq f_k^*$ для всех $i \in I'$, поэтому $\bar{\gamma}_k \leq f_k^*$ и, значит, $f_k(\bar{w}_k) \leq f_k^*$. Отсюда и из (5.8) вытекает, что

$$f_k(\bar{w}_k) = f_k^*. \tag{5.11}$$

Отметим, что последовательность $\{f_k(w_k^i)\}$, $i \in I$, сходится, так как монотонно убывает согласно (4.5) и ограничена. Тогда с учетом непрерывности функции $f_k(x)$ и равенства (5.11) имеем $\lim\limits_{i\in I} f_k(w_k^i) = \lim\limits_{i\in I'} f_k(w_k^i) = f_k(\bar{w}_k) = f_k^*$.

Теорема доказана.

Из теоремы 2 и известной теоремы (см., например, [10, с. 62]) следует, что построенная при фиксированном $k \in K$ последовательность $\{w_k^i\}$, $i \in I$, сходится к множеству решений задачи (3.1).

Обоснуем, наконец, с учетом (4.11), что для каждого $k \in K$ гарантируется фиксирование на шаге 5 Δ_k-решения задачи (3.1).

Теорема 3. *Для каждого* $k \in K$ *найдется такой номер* $i = i_k \in I$, *при котором зафиксируется точка* $x_k = w_k^{i_k}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $k \in K$. Покажем для выбранного номера k существование номера $i = i_k$, при котором для точки w_k^i выполнится неравенство (4.7), тогда теорема будет доказана.

Допустим противное, т. е. для всех $i \in I$ имеет место неравенство

$$f_k(w_k^i) - \gamma_k^i > \Delta_k. \tag{5.12}$$

Пусть $\{u_k^i\}$, $i \in I' \subset I$, — сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{u_k^i\}$, $i \in I$, и $\bar{u}_k = (\bar{y}_k, \bar{\gamma}_k)$ — ее предельная точка. Сразу отметим, что поскольку $\gamma_k^i \leq f_k^*$, $i \in I'$, то

$$\bar{\gamma}_k \leq f_k^*. \tag{5.13}$$

Далее, выделим из последовательности $\{\tilde{y}_k^i\}$, $i \in I'$, сходящуюся подпоследовательность $\{\tilde{y}_k^i\}$, $i \in I'' \subset I'$, и пусть $\bar{\bar{y}}_k$ — ее предельная точка. Так как $\tilde{y}_k^i = y_k^i$ или $\tilde{y}_k^i = y_k^i + q_k^i(z_k^i - y_k^i)$ для каждого $i \in I''$, то с учетом леммы 3 и ограниченности $\{q_k^i\}$, $i \in I''$, имеем $\bar{\bar{y}}_k = \bar{y}_k$, и в силу (5.4) $f_k(\bar{\bar{y}}_k) = \bar{\gamma}_k$. Но $\bar{\bar{y}}_k \in D_k$, поскольку $\tilde{y}_k^i \in D_k$, $i \in I''$. Значит, $f_k(\bar{\bar{y}}_k) \geq f_k^*$, т. е. $\bar{\gamma}_k \geq f_k^*$. Отсюда и из (5.13) следует, что

$$\bar{\gamma}_k = f_k^*. \tag{5.14}$$

Перейдем в неравенстве (5.12) к пределу по $i \to \infty$, $i \in I''$. Тогда с учетом (5.14) и утверждения теоремы 2 получим $\Delta_k \leq 0$, что противоречит выбору чисел Δ_k на предварительном шаге реализации.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кини Р.Л., Райфа Х.** Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М.: Радио и связь, 1981. 560 с.
2. **Лотов А.В., Поспелова И.И.** Многокритериальные задачи принятия решений: уч. пос. М.: МАКС Пресс, 2008. 197 с.
3. **Nelyubin A.P., Podinovski A.P.** Multicriteria problems with importance-ordered criteria groups // Autom. Remote Control. 2022. Vol. 83, no. 7. P. 1108–1122. https://doi.org/10.1134/S0005117922070074
4. **Klamroth K., Stiglmayr M., Totzeck C.** Consensus-based optimization for multi-objective problems: a multi-swarm approach // J. Glob. Optim. 2024. Vol. 89. P. 745–776. https://doi.org/10.1007/s10898-024-01369-1
5. **Булатов В.П.** Методы погружения в задачах оптимизации. Новосибирск: Наука, 1977. 164 с.
6. **Хамисов О.В.** Развитие методов оптимизации в работах В.П. Булатова // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. “ Математика”. 2011. Т. 4, № 2. С. 6–15.
7. **Zabotin I.Ya., Shulgina O.N., Yarullin R.S.** A minimization method with approximation of feasible set and epigraph of objective function // Russian Math. (Iz. VUZ). 2016. Vol. 60, no. 11. P. 78–81. https://doi.org/10.3103/S1066369X16110098
8. **Демьянов В.Ф., Васильев Л.В.** Недифференцируемая оптимизация. М: Наука, 1981. 384 с.
9. **Заботин И.Я.** О некоторых алгоритмах погружений-отсечений для задачи математического программирования // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. “Математика”. 2011. Т. 4, № 2. С. 91–101.
10. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации: в 2-х кн., кн. 1. М.: МЦНМО, 2011. 620 с.

Поступила 13.05.2025
После доработки 26.05.2025
Принята к публикации 1.06.2025
Опубликована онлайн 30.06.2025

Заботин Игорь Ярославич
д-р физ.-мат. наук, доцент
профессор кафедры анализа данных и технологий программирования
Институт вычислительной математики и информационных технологий
Казанского (Приволжского) федерального университета
г. Казань
e-mail: iyazabotin@mail.ru

Шульгина Оксана Николаевна
канд. физ.-мат. наук, доцент
доцент кафедры анализа данных и технологий программирования
Институт вычислительной математики и информационных технологий
Казанского (Приволжского) федерального университета
г. Казань
e-mail: onshul@mail.ru

Яруллин Рашид Саматович
канд. физ.-мат. наук, доцент
доцент кафедры анализа данных и технологий программирования
Институт вычислительной математики и информационных технологий
Казанского (Приволжского) федерального университета
г. Казань
e-mail: yarullinrs@gmail.com

REFERENCES

1. Keeney R.L., Raiffa H. *Decisions with multiple objectives: preferences and value trade-offs.* NY, Wiley, 1976, 569 p. ISBN: 0471465100 . Translated to Russian under the title *Prinyatiye resheniy pri mnogikh kriteriyakh: predpochteniya i zameshcheniya*, Moscow, Radio i svyaz', 1981, 560 p.
2. Lotov A.V., Pospelova I.I. *Mnogokriterial'nyye zadachi prinyatiya resheniy: uchebnoye posobiye* [Multicriteria decision making problems: tutorial]. Moscow, MAKS Press, 2008. 197 p. http://www.ccas.ru/mmes/mmeda/L&P2008.pdf
3. Nelyubin A.P., Podinovski A.P. Multicriteria problems with importance-ordered criteria groups. *Autom. Remote Control*, 2022, vol. 83, no. 7, pp. 1108–1122. https://doi.org/10.1134/S0005117922070074
4. Klamroth K., Stiglmayr M., Totzeck C. Consensus-based optimization for multi-objective problems: a multi-swarm approach. *J. Glob. Optim.*, 2024, vol. 89, pp. 745–776. https://doi.org/10.1007/s10898-024-01369-1
5. Bulatov V.P. *Metody pogruzheniya v zadachakh optimizatsii* [Embedding methods in optimization problems]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1977, 164 p.
6. Khamisov O.V. Development optimization methods in investigations of V. P. Bulatov. *Izv. Irkutsk. Gos. Un-ta.* Ser. Matematika, 2011, vol. 5, no. 2, pp. 6–15 (in Russian).
7. Zabotin I.Ya., Shulgina O.N., Yarullin R.S. A minimization method with approximation of feasible set and epigraph of objective function. *Russian Math.* (*Iz. VUZ*), 2016, vol. 60, no. 11, pp. 78–81. https://doi.org/10.3103/S1066369X16110098
8. Demyanov V.F., Vasil'ev L.V. *Nedifferentsiruyemaya optimizatsiya* [Nondifferentiable optimization]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 384 p.
9. Zabotin I.Ya. On the several algorithms of immersion-severances for the problem of mathematical programming. *Izv. Irkutsk. Gos. Un-ta.* Ser. Matematika. 2011, vol. 4, no. 2, pp. 91–101 (in Russian).
10. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii. Tom 1* [Optimization methods. Vol. 1]. Moscow, MCNMO, 2011, 620 p. ISBN: 978-5-94057-707-2 .

Received May 13, 2025
Revised May 26, 2025
Accepted June 1, 2025
Published online June 30, 2025

Funding Agency: This study was supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program (PRIORITY-2030).

Igor' Yarolslavich Zabotin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Institute of Computer Mathematics and Information Technologies of Kazan (Volga region) Federal University, Kazan, 420008 Russia, e-mail: iyazabotin@mail.ru .

Oksana Nikolaevna Shul'gina, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Institute of Computer Mathematics and Information Technologies of Kazan (Volga region) Federal University, Kazan, 420008 Russia, e-mail: onshul@mail.ru .

Rashid Samatovich Yarullin, Cand.Sci. (Phys.-Math.), Institute of Computer Mathematics and Information Technologies of Kazan (Volga region) Federal University, Kazan, 420008 Russia, e-mail: yarullinrs@gmail.com .

Cite this article as: I. Ya. Zabotin, O. N. Shulgina, R. S. Yarullin. A variant of the successive concessions method and its implementation based on cutting procedures. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2025-31-3-fon-08