

УДК 512.644

## УСКОРЕННЫЙ ФЕЙЕРОВСКИЙ ПРОЦЕСС ПОИСКА НЕОТРИЦАТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ<sup>1</sup>

В. И. Ерохин, Г. Ш. Тамасян, Н. А. Степенко

Работа лежит в русле исследований, основы которых были заложены и развиты в работах И. И. Еремина, В. В. Васина, Л. Д. Попова, Е. А. Бердниковой, И. М. Соколинской, А. В. Ершовой, Е. А. Нурминского и других. Основным результатом является новый вариант фейеровского отображения для нахождения неотрицательного решения системы линейных алгебраических уравнений. Указанное отображение объединяет операцию ортогонального проектирования вектора в линейное подпространство решений системы линейных алгебраических уравнений и операцию проектирования вектора на неотрицательный ортант, но не с помощью традиционной операции положительной срезки, а с помощью поэлементной операции вычисления абсолютного значения. Доказана глобальная линейная сходимость полученного алгоритма и оценена его константа асимптотики. Вычислительные эксперименты демонстрируют значительно более быструю сходимость изученного отображения по сравнению с отображением с использованием операции положительной срезки. Представлены описание алгоритма, его теоретическое обоснование и результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: фейеровские процессы, системы линейных уравнений и неравенств.

**V. I. Erokhin, G. Sh. Tamasyan, N. A. Stepenko. An accelerated Fejér-type process for finding a non-negative solution to a system of linear algebraic equations.**

The paper is in line with research, that was founded and developed in the papers of I. I. Eremin, V. V. Vasin, L. D. Popov, E. A. Berdnikova, I. M. Sokolinskaya, A. V. Ershova, E. A. Nurminskii and others. The main result is a new version of the Fejér-type mapping constructed for finding a non-negative solution to a system of linear algebraic equations. This mapping combines the operation of orthogonal projection onto a linear space of solutions to a system of linear algebraic equations and the operation of projection onto a non-negative orthant, without using the traditional positive slice operation, but instead using an elementwise operation of calculating the absolute value. The global linear convergence of the obtained algorithm is proved and its asymptotic constant is estimated. Computational experiments demonstrate significantly faster convergence of the studied mapping compared to the mapping using the positive slice operation. A description of the algorithm, its theoretical justification and the results of computational experiments are presented.

Keywords: Fejér-type processes, systems of linear equations and inequalities.

MSC: 15A06, 52B12, 65B99, 65K05, 90C99

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-3-fon-05

### Введение

Теория, методы и практические приложения линейного программирования (ЛП), начатые в новаторских работах Л. В. Канторовича, не остались в прошлом — они развиваются в наши дни, когда к многочисленным экономическим, техническим и военным приложениям присоединились задачи, связанные с проблемами создания систем искусственного интеллекта и обработки больших объемов данных. При исследовании указанных проблем возникает необходимость решения задач ЛП высокой размерности (сотни тысяч, миллионы переменных и ограничений). Задачи такого масштаба не поддаются решению с помощью комбинаторных алгоритмов, таких как метод последовательного улучшения плана или симплекс-метод, и внимание исследователей обращается к методам с теоретически обоснованной полиномиальной

<sup>1</sup>Результаты разд. 7 получены в Институте проблем машиноведения РАН за счет Российского научного фонда (проект № 23-41-00060).

временной сложностью (или линейной и более высокой скоростью сходимости), к которым относятся алгоритмы внутренних точек и фейеровские отображения. В данной работе мы рассматриваем важную частную задачу линейного программирования — задачу построения неотрицательного решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с использованием быстрого итерационного алгоритма фейеровского типа.

## 1. Предыстория

Рассматриваемый алгоритм и соответствующее отображение фейеровского типа были открыты экспериментально при решении производственной задачи *согласования* материального баланса химического предприятия с непрерывным производственным циклом [1; 2].

Уравнения материального баланса предприятия представляют собой СЛАУ

$$Ax = b, \quad (1.1)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $b \neq 0$ ,  $m \leq n$ ,  $1 \leq \text{rank } A \leq m$ . Задача *согласования* материального баланса (в упрощенной постановке) заключается в том, чтобы найти неотрицательное решение  $x \in \mathbb{R}^n$  системы (1.1), близкое, насколько это возможно, к заданному вектору  $x^{\text{изм}} \geq 0$ , составленному из *измеренных* значений массовых расходов соответствующих материальных потоков.

В качестве способа приближенного решения указанной задачи был использован итерационный алгоритм Гаусса — Ньютона [3, гл. 10, § 10.2], примененный к недоопределенной нелинейной системе уравнений

$$A \text{diag}(y)y = b \quad (1.2)$$

с начальным приближением  $y^0 = ((x_1^{\text{изм}})^{1/2}, \dots, (x_n^{\text{изм}})^{1/2})^\top$ . Шаг алгоритма с номером  $k > 0$  имел вид

$$y^k = y^{k-1} + \frac{1}{2} \tilde{A}^+ (b - A \text{diag}(y^{k-1})y^{k-1}), \quad (1.3)$$

где  $\tilde{A}^+$  — матрица, псевдообратная к матрице  $\tilde{A} = A \text{diag}(y^{k-1})$ .

Если  $y$  — решение системы (1.2), то решение системы (1.1) имеет вид  $x = \text{diag}(y)y \geq 0$ . Выбор стартовой точки  $y^0$ , построенной на основе  $x^{\text{изм}}$ , позволял получать решения, устраивающие технологов и метрологов предприятия, т. е. в некоторой степени близкие к  $x^{\text{изм}}$ .

Со временем, в процессе развития предприятия, увеличилось количество элементов технологической схемы, усложнились ее топология и логика балансовых расчетов, что привело к росту размерности системы (1.1). При этом стали более заметными недостатки алгоритма (1.3), такие как *отсутствие глобальной сходимости* (приводящее к необходимости “ручной” корректировки начального приближения) и “тяжелый” (из-за наличия обязательного пересчета матрицы  $\tilde{A}^+$ ), итерационный шаг, приводящий с ростом размерности задачи к существенному увеличению времени работы алгоритма.

Для преодоления второго недостатка была рассмотрена нелинейная негладкая система уравнений

$$A|x| = b,$$

где  $|\cdot|$  — поэлементная операция взятия абсолютной величины, и экспериментально исследована возможность ее решения с помощью алгоритма Гаусса — Ньютона, аналогичного (1.3):

$$x^0 = x^{\text{изм}}; \quad x^k = x^{k-1} + \bar{A}^+ (b - A|x^{k-1}|), \quad k = 1, 2, \dots; \quad (1.4)$$

здесь  $\bar{A} = A \text{diag}(s)$ ,  $s = \text{sign}(x^{k-1})$ ,  $\text{sign}(\cdot)$  — поэлементная операция взятия знака.

При условии, что вектор  $x^{k-1}$  не имеет нулевых элементов, трудоемкость пересчета матрицы  $\bar{A}^+$  и алгоритма в целом существенно снижается по сравнению с трудоемкостью алгоритма (1.3), так как

$$\bar{A}^+ = \text{diag}(s) A^+, \quad \bar{A}^+ (b - A|x^{k-1}|) = \text{diag}(s) A^+ (b - A|x^{k-1}|), \quad (1.5)$$

что можно легко показать с использованием, например, уравнений Мура — Пенроуза [4;5]. Несложный анализ формул (1.5) показывает, что вычисление  $A^+$  может быть выполнено не на каждом итерационном шаге, а только один раз, перед началом итерационного процесса. Для оценки трудоемкости вычисления псевдообратной матрицы можно ориентироваться на оценки трудоемкости распространенных алгоритмов решения СЛАУ методом наименьших квадратов, приведенные, например, в [5, гл. 5, § 5.5.9] и [6, табл. 19.1, с. 93].

Но в общем случае вектор  $x^{k-1}$  имеет нулевые элементы и при “наивном” обнулении соответствующих элементов вектора  $s$  формулы (1.5) неверны. Проблемы алгоритма (1.4) при этом являются даже более глубокими и заключаются в том, что гарантирующие его сходимость значения соответствующих элементов вектора  $s$  неочевидны и могут быть определены только методами негладкого анализа (см., например [7;8]). Эксперименты с их “угадыванием” не имели успеха, но привели к алгоритму (с “легким” итерационным шагом)

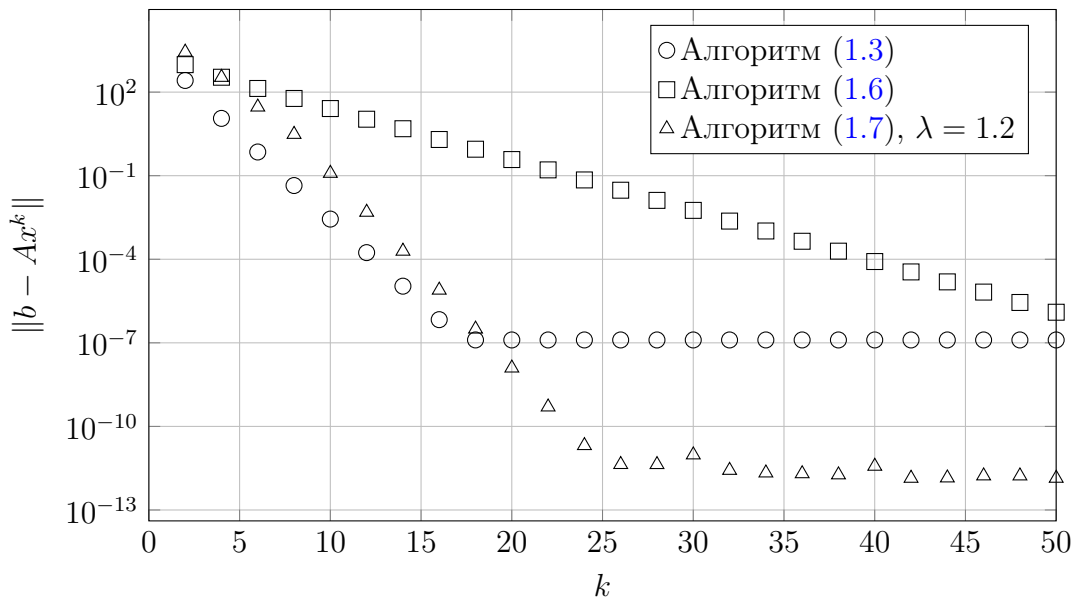
$$x^0 = x^{\text{изм}}; \quad x^k = |x^{k-1} + A^+(b - Ax^{k-1})|, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

Алгоритм (1.6) оказался работоспособным и на тестовых задачах (с реальными данными) демонстрировал сходимость к решению при произвольном выборе начального приближения. Кроме того, указанный алгоритм выполнялся существенно быстрее, чем алгоритм (1.3), хотя затрачивал для нахождения решения большее количество шагов. При выборе  $x^{\text{изм}}$  в качестве начального приближения, так же как и для алгоритма (1.3), получались решения, в некоторой степени близкие к  $x^{\text{изм}}$  и устраивающие технологов и метрологов предприятия. Итерационный шаг алгоритма (1.6) оказался “легким”, поскольку он не содержал операцию вычисления псевдообратной матрицы, выполняемую только один раз перед началом итерационного процесса.

Эксперименты с алгоритмом (1.6), в свою очередь, привели к появлению его модифицированного варианта, содержащего “параметр релаксации”  $\lambda > 0$ :

$$x^0 = x^{\text{изм}}; \quad x^k = |x^{k-1} + \lambda A^+(b - Ax^{k-1})|, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

На тестовых задачах (с реальными данными) выбором  $\lambda > 1$  удалось существенно уменьшить количество шагов алгоритма (1.7) до значений, сопоставимых с количеством шагов алгоритма (1.3), что иллюстрирует рис. 1.



**Рис. 1.** Пошаговые невязки алгоритмов (1.3), (1.6), (1.7) при решении задачи согласования материального баланса, содержащей 136 уравнений и 327 неизвестных.

В вычислительных экспериментах алгоритм (1.7) также находил некоторое неотрицательное решение системы (1.1) при произвольно выбранном начальном приближении, однако даже при  $x^0 = x^{\text{изм}}$  оно уже могло оказаться “недостаточно близким” к  $x^{\text{изм}}$  (не удовлетворяло технологов и метрологов предприятия).

Полученные в отношении алгоритма (1.7) экспериментальные результаты, с одной стороны, показали его *ограниченное* соответствие конкретной практической задаче согласования материального баланса. В то же время указанные результаты побудили провести теоретическое исследование алгоритма (необходимые и достаточные условия сходимости, локальная сходимость или глобальная, порядок сходимости и пр.), чтобы выявить, имеет ли данный алгоритм потенциал для того, чтобы служить инструментом поиска неотрицательных решений СЛАУ, востребованным как во многих прикладных задачах, так и в теории и методах линейного программирования.

Ответы на поставленные вопросы удалось найти, установив, что алгоритмы (1.6) и (1.7) принадлежат к классу  $M$ -фейеровских отображений.

## 2. Общие сведения о фейеровских отображениях

Фейеровские отображения являются обобщением сжимающих отображений, в котором понятие *неподвижной точки* обобщается до *множества неподвижных точек*, а понятие *сходимости к точке* — до понятия *сходимости к множеству*.

Системное исследование фейеровских отображений берет свое начало с работы И. И. Еремина [9]. Историю дальнейших исследований по широкому кругу вопросов, связанных с фейеровскими отображениями, можно проследить, например, по монографиям [10–14] и обзору [15]. Укажем также работы недавнего времени [16–18].

Признанными достоинствами итерационных процессов, построенных на фейеровских отображениях, являются следующие качества:

- возможность декомпозиции (решение систем уравнений, неравенств, задач ЛП и выпуклого программирования большой размерности, параллельные вычисления);
- глобальная линейная сходимость;
- устойчивость к ошибкам округления, самоисправляемость;
- возможность обработки динамических (изменяющихся во времени) данных;
- пригодность для ввода алгоритмов внутренних точек в допустимую область решаемой задачи;
- возможность адаптации к решению широкого круга задач, в том числе поиска псевдорешений несовместных систем линейных уравнений, неравенств и задач математического программирования.

Заметим, что характерной слабой стороной фейеровских отображений является медленная сходимость. Внимание на этом недостатке не всегда акцентируется авторами соответствующих исследований, но “между строк” (а также по времени счета и количеству итераций, приводимых в соответствующих таблицах с результатами вычислительных экспериментов) оно прослеживается в публикациях, рассматривающих вопросы построения вычислительных реализаций фейеровских итерационных процессов с использованием техники параллельных вычислений (см., например [19–24]). Преодоление указанного недостатка является (наряду с теоретическими обоснованиями) одной из задач данной работы.

### 2.1. $M$ -фейеровские отображения

Пусть  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi : D \rightarrow D$  — некоторое отображение. Обозначим через  $M$  множество неподвижных точек отображения  $\varphi$ , т. е.  $M = \{x \in D \mid \varphi(x) = x\}$ .

**О п р е д е л е н и е 1.** Отображение  $\varphi$  называется  $M$ -фейеровским, если множество  $M$  непусто и выполняется строгое неравенство

$$\|\varphi(x) - y\| < \|x - y\| \quad \forall x \in D \setminus M, \forall y \in M. \quad (2.1)$$

В неравенстве (2.1) и далее во всем тексте статьи будем считать, что символом  $\|\cdot\|$  обозначена евклидова векторная норма. Класс  $M$ -фейеровских отображений обозначим через  $\mathcal{F}_M$ .

Рассмотрим последовательность  $\{x^k\}$ , которая строится по правилу

$$\begin{aligned} x^0 &\in D \setminus M; \\ x^{j+1} &= \varphi(x^j), \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

Приведем несколько свойств  $M$ -фейеровских отображений. Пусть  $\{x^k\}$  построена по правилу (2.2) с помощью отображения  $\varphi \in \mathcal{F}_M$ .

**С в о й с т в о 1.** Если  $\{x^k\} \cap M = \emptyset$ , то  $x^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} y \in M$ . Иначе найдется такое  $k \in \mathbb{N}$ , что  $x^j \in M$  при всех  $j \geq k$ .

**С в о й с т в о 2.** Отображение вида  $\lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)x$  является  $M$ -фейеровским при  $\lambda \in (0, 1)$ .

**С в о й с т в о 3.** Пусть  $\varphi_j$  — соответствующие  $M_j$ -фейеровские отображения,  $j = 1 : m$ , множество  $M = \bigcap_{j=1:m} M_j$  непусто. Отображения вида

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{j=1:m} \lambda_j \varphi_j(x) \quad \text{при } \lambda_j > 0, \quad \sum_{j=1:m} \lambda_j = 1, \\ \varphi(x) &= \varphi_1(\varphi_2(\dots \varphi_m(x) \dots)), \end{aligned}$$

являются  $M$ -фейеровскими.

## 2.2. Базовые конструкции $M$ -фейеровских отображений для решения систем линейных алгебраических уравнений и неравенств

Положим  $\mathbb{R}_+^n$  — неотрицательный ортант,  $[x]_+ = \max\{0, x\}$  — поэлементная операция положительной срезки вектора  $x \in \mathbb{R}^n$ . Приведем несколько примеров базовых отображений, используемых в дальнейшем.

**П р и м е р 1.** Пусть  $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$  — непустое множество решений системы линейных алгебраических уравнений. Проекция произвольной точки  $x \in \mathbb{R}^n$  на  $X$  задается  $X$ -фейеровским отображением  $\pi_X(x) = x + A^+(b - Ax)$ , где  $A^+$  — псевдообратная матрица.

**П р и м е р 2.** Проекция произвольной точки  $x \in \mathbb{R}^n$  на  $M = \mathbb{R}_+^n$  задается отображением “срезка”  $\mathcal{C}(x) = [x]_+$ . Оно принадлежит классу  $\mathcal{F}_M$ , так как является частным случаем прох-отображений (см. следствие 3.7 в монографии [13, разд. 3.3, гл. I]), и при этом

$$\mathcal{C}(x) = \operatorname{argmin} \{\|x - y\| : y \in M\}.$$

**П р и м е р 3.** Введем отображение  $\mathcal{C}_{X_+}(x)$  как суперпозицию отображений  $\mathcal{C}(x)$  и  $\pi_X(x)$ , а именно

$$\mathcal{C}_{X_+}(x) := \mathcal{C}(\pi_X(x)) = [x + A^+(b - Ax)]_+, \quad (2.3)$$

где  $X_+ := \mathbb{R}_+^n \cap X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ . В силу свойства 3 оно является  $X_+$ -фейеровским.

Отображение  $\mathcal{C}_{X_+}$  встречалось в работах [12–15; 20–22], но не являлось предметом отдельного теоретического и экспериментального исследования. В работах, использующих отображение  $\mathcal{C}_{X_+}$ , предполагалось, что матрица  $A$  исследуемой СЛАУ имеет полный строчный ранг, в силу чего псевдообратная матрица может быть представлена в виде

$$A^+ = A^\top (AA^\top)^{-1}. \quad (2.4)$$

**З а м е ч а н и е 1.** Требование полноты строчного ранга матрицы  $A$  является избыточным, и в приводимых ниже теоретических выкладках не используется. При этом заметим, что в случае неполноты ранга матрицы  $A$  формула (2.4) неприменима, и для вычисления псевдообратной матрицы необходимо использовать более общие методы (см., например, [5, гл. 5, § 5.5.4; 6]).

С другими конструкциями  $M$ -фейеровских отображений можно ознакомиться в работе [13, § 1, гл. III]. Несложно убедиться, что приведенные выше отображения удовлетворяют условию  $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x)$ .

### 3. Два новых фейеровских отображения для поиска неотрицательного решения СЛАУ: незначительно модифицированное “классическое” (база сравнения) и “ускоренное” (основной предмет исследования)

Положим  $r(x) = b - Ax$ ,  $\lambda > 0$ . Рассмотрим естественную модификацию отображения (2.3):

$$\mathcal{C}_{X+}^{\lambda}(x) := [x + \lambda A^+ r(x)]_+. \quad (3.1)$$

Ясно, что оно является параметризованным по  $\lambda$  семейством отображений, а при  $\lambda = 1$  получаем отображение (2.3). В литературе число  $\lambda$  называют коэффициентом релаксации.

Введем еще одно отображение

$$\mathcal{A}_{X+}^{\lambda}(x) := |x + \lambda A^+ r(x)|, \quad (3.2)$$

где  $|\cdot|$  — поэлементная операция взятия абсолютной величины.

Далее мы покажем, что отображения (3.1) и (3.2) являются  $X_+$ -фейеровскими при  $\lambda \in (0, 2)$ . Отображение  $\mathcal{C}_{X+}^{\lambda}$ , учитывая публикации, посвященные его прототипу — отображению  $\mathcal{C}_{X+}$ , будем считать “классическим” и рассматривать как базу для сравнения с новым, “ускоренным”, отображением  $\mathcal{A}_{X+}^{\lambda}$ , которое и есть основная цель исследования данной работы.

Рассмотрим вспомогательное утверждение.

**Лемма 1.** Пусть  $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$  непусто. Отображение  $\mathcal{P}_X^{\lambda}(x) = x + \lambda A^+ r(x)$  является  $X$ -фейеровским при  $\lambda \in (0, 2)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Надо показать справедливость неравенства (см. (2.1))

$$\|\mathcal{P}_X^{\lambda}(x) - y\| < \|x - y\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus X, \forall y \in X. \quad (3.3)$$

Зафиксируем два вектора  $x$  и  $y$  из  $\mathbb{R}^n$  такие, что  $x \notin X$ ,  $y \in X$ . Тогда

$$b = Ay, \quad r(x) = A(y - x). \quad (3.4)$$

Справедлива цепочка равенств  $\mathcal{P}_X^{\lambda}(x) = x + \lambda A^+(b - Ax) = x + \lambda A^+ A(y - x) = y + (x - y) + \lambda A^+ A(y - x)$  или  $\mathcal{P}_X^{\lambda}(x) - y = (x - y) + \lambda A^+ A(y - x) = (1 - \lambda)A^+ A(x - y) + (I - A^+ A)(x - y) = (1 - \lambda)P(x - y) + Q(x - y) = (1 - \lambda)p + q$ . Здесь  $I$  — единичная матрица;  $P$  — ортогональный проектор в линейное подпространство  $L$  строк матрицы  $A$ ;  $Q$  — ортогональный проектор в линейное подпространство  $L^{\perp}$ , являющийся ортогональным дополнением подпространства  $L$ . Поэтому для  $p := P(x - y)$  и  $q := Q(x - y)$  справедливо условие  $p \perp q$ , и в силу свойств евклидовой нормы

$$\|p\|^2 + \|q\|^2 = \|x - y\|^2. \quad (3.5)$$

Таким образом, имеем

$$\|\mathcal{P}_X^{\lambda}(x) - y\|^2 = (1 - \lambda)^2 \|p\|^2 + \|q\|^2 = \|x - y\|^2 + \lambda(\lambda - 2)\|p\|^2. \quad (3.6)$$

Покажем, что  $p \neq \mathbf{0}$  при  $x \notin X$ ,  $y \in X$ . Предложим противное. Пусть  $p = P(x - y) = \mathbf{0}$ . Тогда, вследствие (3.4) и равенств  $AP = AA^+A = A$  имеем

$$Px = Py \Rightarrow APx = APy \Rightarrow Ax = Ay = b \Rightarrow x \in X.$$

Получили противоречие.

Теперь ясно, что в равенстве (3.6) при  $\lambda \in (0, 2)$  слагаемое  $\lambda(\lambda - 2)\|p\|^2$  является отрицательным, а значит, справедливо неравенство (3.3).  $\square$

Далее всюду предполагается, что множество  $X_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq \mathbf{0}\}$  непусто.

**Теорема 1.** *Отображение  $\mathcal{C}_{X_+}^\lambda(x) = [x + \lambda A^+r(x)]_+$  принадлежит классу  $\mathcal{F}_{X_+}$  при всех  $\lambda \in (0, 2)$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о** вытекает из примера 3 и леммы 1. Действительно, отображение  $\mathcal{C}_{X_+}^\lambda$  является суперпозицией  $X$ -фейеровского отображения  $\mathcal{P}_X^\lambda$  и отображения “срезка” на  $\mathbb{R}_+$ , а именно  $\mathcal{C}_{X_+}^\lambda(x) = [\mathcal{P}_X^\lambda(x)]_+$ .  $\square$

Ниже будет полезен следующий результат.

**Лемма 2.** *Справедливо неравенство*

$$\left| |\alpha + \beta| - \alpha \right| \leq |\beta| \quad \forall \alpha \geq 0, \beta \in \mathbb{R}.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Воспользуемся известными неравенствами

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|, \quad |\alpha + \beta| \geq |\alpha| - |\beta|.$$

Из обеих частей неравенств вычтем неотрицательное  $\alpha$ , имеем

$$|\alpha + \beta| - \alpha \leq |\alpha| + |\beta| - \alpha = |\beta|, \quad |\alpha + \beta| - \alpha \geq |\alpha| - |\beta| - \alpha = -|\beta|.$$

Что и требовалось доказать.  $\square$

**Теорема 2.** *Отображение  $\mathcal{A}_{X_+}^\lambda(x) = |x + \lambda A^+r(x)|$  принадлежит классу  $\mathcal{F}_{X_+}$  при всех  $\lambda \in (0, 2)$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $x \notin X_+$ ,  $y \in X_+$ . Повторяя те же рассуждения, что и при доказательстве леммы 1, получим  $\mathcal{A}_{X_+}^\lambda(x) = |y + (x - y) + \lambda A^+A(y - x)| = |y + (1 - \lambda)p + q|$ . Тогда

$$|\mathcal{A}_{X_+}^\lambda(x) - y| = \left| |y + (1 - \lambda)p + q| - y \right|.$$

Применяя к правой части равенства результат леммы 2 и учитывая, что  $y \in \mathbb{R}_+$ , имеем

$$|\mathcal{A}_{X_+}^\lambda(x) - y| \leq |(1 - \lambda)p + q|.$$

Отметим, что это неравенство выполняется поэлементно.

Продолжая рассуждения, аналогичные доказательству леммы 1, используя равенство (3.6) и то, что  $p \neq \mathbf{0}$  при  $x \notin X_+$ ,  $y \in X_+$ , получим

$$\|\mathcal{A}_{X_+}^\lambda(x) - y\|^2 \leq \|x - y\|^2 + \lambda(\lambda - 2)\|p\|^2 < \|x - y\|^2 \quad \text{при } \lambda \in (0, 2). \quad (3.7)$$

Следовательно, отображение  $\mathcal{A}_{X_+}^\lambda$  является  $X_+$ -фейеровским.  $\square$

#### 4. Алгоритм поиска неотрицательного решения СЛАУ, основанный на отображении $\mathcal{A}_{X+}^\lambda$

Перед тем как привести рабочую схему по поиску некоторого решения системы

$$Ax = b, \quad x \geq 0, \quad (4.1)$$

опишем правило выхода из алгоритма в случае несовместности системы (4.1).

Нам понадобится следующий результат.

**Лемма 3.** Пусть  $\hat{x} = A^+b$ . Для некоторого  $x \in \mathbb{R}$  вычислим  $d = A^+(b - Ax)$ . Если

$$d \leq 0, \quad \hat{x}^\top d > 0, \quad (4.2)$$

то система (4.1) несовместна.

**Доказательство.** Системе (4.1) сопоставим альтернативную:  $A^\top z \leq 0, b^\top z > 0$ .

Воспользуемся леммой Фаркаша—Минковского об альтернативах (см. [25; 26, с. 55; 27, упражнение 2.4.6, с. 135]). Покажем, что при выполнении условий леммы вектор  $z_* = (A^+)^\top d$  есть решение альтернативной системы. Действительно, в силу (4.2) имеем

$$\begin{aligned} A^\top z_* &= A^\top (A^+)^\top d = (A^+A)^\top d = A^+Ad = A^+AA^+(b - Ax) = A^+(b - Ax) = d \leq 0, \\ b^\top z_* &= b^\top (A^+)^\top d = (A^+b)^\top d = \hat{x}^\top d > 0. \end{aligned}$$

Что и требовалось показать.  $\square$

**Следствие 1.** Если  $\hat{x} = A^+b < 0$ , то система (4.1) несовместна. Действительно, достаточно заметить, что при  $x = 0$  имеем  $d = \hat{x}$ .

**А л г о р и т м** (на основе отображения  $\mathcal{A}_{X+}^\lambda$ ).

*Инициализация.*

- Требуется единожды вычислить псевдообратную матрицу  $A^+$  и вектор  $\hat{x} = A^+b$ . Если  $\hat{x} < 0$ , то система (4.1) несовместна. Вычисления закончены.
- Фиксируем параметр  $\lambda \in (0, 2)$ .
- В качестве начального приближения  $x^0$  берем произвольный вектор из  $\mathbb{R}_+^n$ .

*Общий шаг.*

1. Пусть уже имеется  $k$ -е приближение  $x^k$ .

- Вычислим  $d^k = A^+(b - Ax^k)$ . Если  $d^k \leq 0$  и  $\hat{x}^\top d^k > 0$ , то система (4.1) несовместна. Вычисления закончены.
- Вычислим  $y^k = x^k + d^k$ . Если  $y^k \geq 0$ , то система (4.1) имеет решение  $x^* = y^k$ . Вычисления закончены.

2. Иначе  $x^{k+1} = [x^k + \lambda d^k]$  — очередное приближение.

**З а м е ч а н и е 2.** По построению все приближения  $x^k$  лежат в неотрицательном ортанте.

**З а м е ч а н и е 3.** Вектор  $y^k = x^k + d^k$  является проекцией точки  $x^k$  на множество решений системы  $Ax = b$ , т. е.  $y^k = \pi_X(x^k)$  (см. пример 1).

**З а м е ч а н и е 4.** Аналогичный алгоритм справедлив и для отображения  $\mathcal{C}_{X+}^\lambda$ . Единственное отличие — в том, что очередное приближение необходимо вычислять по формуле

$$x^{k+1} = [x^k + \lambda d^k]_+.$$

## 5. Теоретическое исследование сходимости отображений $\mathcal{A}_{X_+}^\lambda$ и $\mathcal{C}_{X_+}^\lambda$

Покажем, что сходимость последовательностей векторов  $x^k$ , порождаемых отображениями  $\mathcal{A}_{X_+}^\lambda$  и  $\mathcal{C}_{X_+}^\lambda$ , а также сходимость норм соответствующих невязок  $\|r(x^k)\|$  имеет порядок не ниже первого, и оценим соответствующие константы асимптотики. Результаты, относящиеся к сходимости числовых последовательностей  $\|r(x^k)\|$ , будут полезны при анализе вычислительных экспериментов, поскольку их элементы можно реально вычислить, в отличие от величин  $\|\varphi(x^k) - y\|$ ,  $\|x^k - y\|$ , входящих в определение (2.1).

Рассмотрим при  $\lambda \in (0, 2)$  отображение  $\mathcal{A}_{X_+}^\lambda$  (см. (3.2)) и порождаемую им последовательность  $\{x^k\}$ , задаваемую рекуррентным соотношением

$$x^{k+1} = |x^k + \lambda A^+ r(x^k)|. \quad (5.1)$$

Далее нам понадобится лемма Хоффмана (см. [13, с. 130; 26, упражнение 4.121, с. 83; 27, § 2.5]). Приведем ее для итерационного процесса (5.1). Пусть  $S = \text{con} \{x^k\}$ . Существует константа  $C > 0$  такая, что

$$\rho(x, X_+) \leq C \|b - Ax\| \quad \text{для всех } x \in S, \quad (5.2)$$

где  $\rho(x, X_+) := \inf_{y \in X_+} \|x - y\|$ . Отметим, что константа  $C$  зависит только от матрицы  $A$ .

**Теорема 3.** *Для последовательности  $x^k$ , порождаемой соотношением (5.1), справедлива оценка*

$$\rho(x^{k+1}, X_+) \leq \Theta \rho(x^k, X_+), \quad (5.3)$$

где

$$\Theta = \left(1 + \frac{\lambda(\lambda - 2)}{C^2 \|A\|^2}\right)^{1/2}, \quad (5.4)$$

$\Theta \in [0, 1)$ ,  $C$  — константа из неравенства (5.2).

**Доказательство.** Так как отображение  $\mathcal{A}_{X_+}^\lambda$  является  $X_+$ -фейеровским, то в силу свойства 1 имеем  $x^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} y \in X_+$ . Из равенств (3.4) вытекает, что  $r(x^k) = b - Ax^k = A(y - x^k) = AA^+ A(y - x^k) = AP(y - x^k) = Ap^k$ . Отсюда  $\|p^k\| \geq \frac{\|r(x^k)\|}{\|A\|}$ .

В то же время из условия (5.2) следует, что

$$\|r(x^k)\| \geq \frac{\rho(x^k, X_+)}{C}.$$

Таким образом, из последних двух неравенств, получим оценку (при любом  $y \in X_+$ )

$$\|p^k\| \geq \frac{\rho(x^k, X_+)}{C \|A\|}. \quad (5.5)$$

Теперь перейдем к выкладкам по установлению оценки (5.3). Выберем  $y$  из  $X_+$  так, чтобы  $\|x^k - y\| = \inf_{y \in X_+} \|x^k - y\| = \rho(x^k, X_+)$ . В силу (3.7), (5.5) и  $\lambda \in (0, 2)$  имеем

$$\begin{aligned} \rho(x^{k+1}, X_+)^2 &\leq \|x^{k+1} - y\|^2 \stackrel{(3.7)}{\leq} \|x^k - y\|^2 + \lambda(\lambda - 2) \|p^k\|^2 \\ &\stackrel{(5.5)}{\leq} \|x^k - y\|^2 + \lambda(\lambda - 2) \frac{\rho(x^k, X_+)^2}{C^2 \|A\|^2} = \rho(x^k, X_+)^2 + \lambda(\lambda - 2) \frac{\rho(x^k, X_+)^2}{C^2 \|A\|^2} \\ &= \left(1 + \frac{\lambda(\lambda - 2)}{C^2 \|A\|^2}\right) \rho(x^k, X_+)^2 = \Theta^2 \rho(x^k, X_+)^2. \end{aligned}$$

Осталось отметить, что  $C\|A\| \geq 1$ , и поэтому в силу (5.4) величина  $\Theta$  принадлежит интервалу  $[0, 1)$ . Действительно, подставив в левую часть неравенства (5.5) выражение  $\|x^k - y\| \geq \|p^k\|$  (см. (3.5)), а в правую —  $\rho(x^k, X_+) = \|x^k - y\|$ , получим

$$\|x^k - y\| \geq \|p^k\| \geq \frac{\rho(x^k, X_+)}{C\|A\|} = \frac{\|x^k - y\|}{C\|A\|}. \quad (5.6)$$

Таким образом, отображение  $\mathcal{A}_{X_+}^\lambda$  порождает сходящуюся последовательность векторов, а порядок ее сходимости — не ниже первого.  $\square$

**Теорема 4.** Пусть последовательность  $\{x^k\}$  порождается соотношением (5.1). Тогда последовательность  $\|r(x^k)\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$  и при этом справедлива оценка

$$\|r(x^{k+1})\| \leq \Theta_r \|r(x^k)\|. \quad (5.7)$$

Здесь константа  $\Theta_r = \sqrt{C^2\|A\|^2 + \lambda(\lambda - 2)}$ ,  $C$  — константа из неравенства (5.2).

**Д о к а з а т е л ь с т в о** проводится аналогично доказательству теоремы 3 применительно к неравенству  $\|r(x)\| \stackrel{(3.4)}{=} \|A(y - x)\| \leq \|A\| \cdot \|(y - x)\|$ .  $\square$

**З а м е ч а н и е 5.** Несложно убедиться, что константы  $\Theta$  (см. (5.4)) и  $\Theta_r$  связаны соотношением

$$\Theta_r = C\|A\|\Theta.$$

Так как  $C\|A\| \geq 1$  (см. (5.6)), а  $\Theta \in [0, 1)$ , то величина  $\Theta_r$  — теперь необязательно из интервала  $[0, 1)$ . Ясно, что константа  $\Theta_r$  будет меньше 1 при конкретном  $\lambda \in (0, 2)$ , если только

$$C\|A\| < \sqrt{2 - (1 - \lambda)^2} \leq \sqrt{2}.$$

**З а м е ч а н и е 6.** Полученная для константы  $\Theta$  оценка (5.4) имеет вид, очень близкий к виду оценок соответствующих констант, полученных ранее при исследовании сходимости фейеровских процессов (см., например, [12–14]).

Аналогичные теоремам 3 и 4 утверждения справедливы и для отображения

$$\mathcal{C}_{X_+}^\lambda(x) = [x + \lambda A^+ r(x)]_+.$$

**Теорема 5.** Для последовательности  $\{x^k\}$ , порождаемой соотношением

$$x^{k+1} = [x^k + \lambda A^+ r(x^k)]_+, \quad (5.8)$$

выполняется оценка (5.3) с такой же константой  $\Theta$  (заданной формулой (5.4)).

**Теорема 6.** Пусть последовательность  $\{x^k\}$  порождается соотношением (5.8). Тогда последовательность  $\|r(x^k)\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ , и при этом справедлива оценка (5.7).

## 6. Экспериментальное исследование сходимости отображений $\mathcal{A}_{X_+}^\lambda$ и $\mathcal{C}_{X_+}^\lambda$

Было проделано большое количество разнообразных экспериментов с совместными и несовместными системами вида (4.1), однако ниже будут приведены результаты решения только совместных систем.

### 6.1. Генерация тестовых задач

Для генерации совместной системы

$$Ax = b, \quad x \geq 0,$$

осуществлены следующие шаги:

1. С помощью генератора псевдослучайных чисел определены матрица  $A$  размерности  $m \times n$  и вектор  $x^* \in \mathbb{R}_+^n$ .
2. Вычислен вектор  $b = Ax^*$ .

### 6.2. Результаты расчетов

В табл. 1–6 приведены результаты расчетов для задач с количеством неизвестных  $n \in \{100, 500, 750\}$  и уравнений  $m = \gamma n$ ,  $\gamma \in \{0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9, 0.95\}$ . В них представлено медианное значение шагов итерационных процессов, порождаемых отображениями  $\mathcal{A}_{X_+}^\lambda$  и  $\mathcal{C}_{X_+}^\lambda$ , при решении 1000 сгенерированных примеров при фиксированных  $n$  и  $m$ . Далее соответствующие итерационные процессы для краткости будем называть *итерационный процесс*  $\mathcal{A}_{X_+}^\lambda$  и *итерационный процесс*  $\mathcal{C}_{X_+}^\lambda$ . В первоначальных экспериментах в соответствии с замечанием 1 подразд. 3.2 на ранг матрицы  $A$  не было наложено никаких ограничений, кроме условия  $A \neq 0$ . Расчеты подтвердили работоспособность исследуемых алгоритмов и справедливость установленных теоретических утверждений. Были также рассмотрены СЛАУ, которые не имели неотрицательного решения. С их помощью была экспериментально проверена справедливость леммы 3. В последующих экспериментах, результаты которых представлены ниже, матрицы всех исследуемых систем имели полный строчный ранг, СЛАУ были совместны и имели неотрицательное решение. В качестве начального приближения бралась точка  $x^0 = 0$ .

Расчеты прекращались при выполнении одного из правил останова:

- 1)  $x^k \geq 0$ ; 2)  $\|r(x^k)\| < \varepsilon$ ; 3) исчерпан лимит по итерациям (MaxIter).

Т а б л и ц а 1

Медианное значение количества шагов  
для итерационных процессов  $\mathcal{A}_{X_+}^\lambda$  и  $\mathcal{C}_{X_+}^\lambda$  при  $\lambda = 1$

| $n \backslash \gamma$ | 0.1 | 0.25 | 0.5 | 0.75 | 0.9 | 0.95 |
|-----------------------|-----|------|-----|------|-----|------|
| 100                   | 4   | 5    | 24  | 71   | 183 | 310  |
|                       | 26  | 36   | 64  | 144  | 357 | 596  |
| 500                   | 5   | 6    | 30  | 94   | 288 | 580  |
|                       | 31  | 43   | 78  | 192  | 562 | 1112 |
| 750                   | 5   | 6    | 32  | 99   | 310 | 673  |
|                       | 32  | 45   | 82  | 202  | 605 | 1300 |

Т а б л и ц а 2

Отношение медианного значения количества  
шагов для итерационного процесса  $\mathcal{C}_{X_+}^\lambda$  к  $\mathcal{A}_{X_+}^\lambda$  при  $\lambda = 1$

| $n \backslash \gamma$ | 0.1 | 0.25 | 0.5 | 0.75 | 0.9  | 0.95 |
|-----------------------|-----|------|-----|------|------|------|
| 100                   | 6.5 | 7.2  | 2.7 | 2.03 | 1.95 | 1.92 |
| 500                   | 6.2 | 7.2  | 2.6 | 2.04 | 1.95 | 1.92 |
| 750                   | 6.4 | 7.5  | 2.6 | 2.04 | 1.95 | 1.93 |

Т а б л и ц а 3  
Медианное значение количества шагов  
для итерационных процессов  $\mathcal{A}_{X+}^{\lambda}$  и  $\mathcal{C}_{X+}^{\lambda}$  при оптимальном  $\lambda$

| $n \backslash \gamma$ | 0.1 | 0.25 | 0.5 | 0.75 | 0.9 | 0.95 |
|-----------------------|-----|------|-----|------|-----|------|
| 100                   | 3   | 3    | 4   | 4    | 6   | 6    |
|                       | 5   | 12   | 24  | 59   | 220 | 271  |
| 500                   | 4   | 4    | 4   | 6    | 11  | 12   |
|                       | 6   | 18   | 26  | 101  | 356 | 569  |
| 750                   | 4   | 4    | 5   | 6    | 11  | 14   |
|                       | 6   | 19   | 33  | 111  | 375 | 725  |

Т а б л и ц а 4  
Отношение медианного значения количества шагов  
для итерационного процесса  $\mathcal{C}_{X+}^{\lambda}$  к количеству шагов  
итерационного процесса  $\mathcal{A}_{X+}^{\lambda}$  при оптимальном  $\lambda$

| $n \backslash \gamma$ | 0.1 | 0.25 | 0.5 | 0.75 | 0.9 | 0.95 |
|-----------------------|-----|------|-----|------|-----|------|
| 100                   | 1.7 | 4    | 6   | 15   | 32  | 45   |
| 500                   | 1.5 | 4.5  | 6   | 16   | 34  | 47   |
| 750                   | 1.5 | 4.8  | 7   | 19   | 36  | 52   |

Т а б л и ц а 5  
Оптимальное значение параметра релаксации  
для итерационных процессов  $\mathcal{A}_{X+}^{\lambda}$  и  $\mathcal{C}_{X+}^{\lambda}$

| $n \backslash \gamma$ | 0.1   | 0.25 | 0.5   | 0.75  | 0.9   | 0.95  |
|-----------------------|-------|------|-------|-------|-------|-------|
| 100                   | 1.1   | 1.17 | 1.25  | 1.55  | 1.725 | 1.8   |
|                       | 1.775 | 1.85 | 1.95  | 1.775 | 1.9   | 1.925 |
| 500                   | 1.075 | 1.18 | 1.275 | 1.575 | 1.75  | 1.8   |
|                       | 1.725 | 1.85 | 1.975 | 1.8   | 1.925 | 1.95  |
| 750                   | 1.075 | 1.15 | 1.25  | 1.575 | 1.75  | 1.8   |
|                       | 1.725 | 1.85 | 1.975 | 1.8   | 1.925 | 1.95  |

Значения соответствующих параметров были приняты следующими:  $\text{MaxIter} = 3000$  — верхняя граница по количеству итераций,  $\varepsilon = 10^{-11}$ .

Эксперименты проводились в среде MATLAB®, версия R2022b. Характеристики компьютера: процессор Intel® Core™ i5-10400F CPU (2.90GHz, 6 ядер, 12 потоков), оперативная память — 16 ГБ. Операционная система — Майкрософт® Windows® 10, версия 21H2.

В таблицах *серым цветом* выделены результаты расчетов для итерационного процесса  $\mathcal{A}_{X+}^{\lambda}$ .

В табл. 1 и 2 приведены результаты расчетов при  $\lambda = 1$ . Из них следует, что последовательность приближений, построенная с помощью отображения  $\mathcal{A}_{X+}^{\lambda}$  сходится значительно быстрее, чем для отображения  $\mathcal{C}_{X+}^{\lambda}$ .

В табл. 3–5 приведены результаты, полученные при “оптимальном” значении параметра  $\lambda$ . Здесь под “оптимальным” понимается такое значение, при котором итерационный процесс сходился за наименьшее число шагов. Поиск оптимального значения производился перебором значений параметра  $\lambda$  от 0 до 2 с шагом в 0.005.

В табл. 6 представлены результаты численного эксперимента по исследованию количества

Т а б л и ц а 6  
**Количество шагов и процент итерационных процессов  $\mathcal{A}_{X+}^\lambda$**   
**и  $\mathcal{C}_{X+}^\lambda$ , завершенных по условию  $x^k \geq 0$**

| $\lambda \backslash \gamma$ | 0.1     | 0.25    | 0.5      | 0.75     | 0.9      | 0.95     |
|-----------------------------|---------|---------|----------|----------|----------|----------|
| 0.1                         | 184 (3) | 190 (0) | 724 (0)  | 1641 (0) | 2989 (0) | 3000 (0) |
|                             | 184 (3) | 189 (0) | 752 (0)  | 1713 (0) | 3000 (0) | 3000 (0) |
| 0.2                         | 88 (2)  | 90 (0)  | 363 (0)  | 828 (0)  | 1475 (0) | 2200 (0) |
|                             | 88 (2)  | 90 (0)  | 393 (0)  | 906 (0)  | 1620 (0) | 2401 (0) |
| 0.3                         | 55 (3)  | 57 (0)  | 229 (0)  | 532 (0)  | 913 (0)  | 1434 (0) |
|                             | 55 (3)  | 57 (0)  | 258 (0)  | 612 (0)  | 1053 (0) | 1658 (0) |
| 0.4                         | 39 (4)  | 40 (0)  | 154 (0)  | 365 (0)  | 644 (0)  | 934 (0)  |
|                             | 39 (4)  | 41 (0)  | 186 (0)  | 445 (0)  | 775 (0)  | 1139 (0) |
| 0.5                         | 29 (2)  | 30 (0)  | 117 (0)  | 283 (0)  | 475 (0)  | 730 (0)  |
|                             | 29 (2)  | 34 (0)  | 150 (0)  | 365 (0)  | 616 (0)  | 931 (0)  |
| 0.6                         | 2 (97)  | 23 (5)  | 97 (0)   | 207 (0)  | 378 (0)  | 570 (0)  |
|                             | 22 (2)  | 27 (0)  | 131 (0)  | 286 (0)  | 518 (0)  | 789 (0)  |
| 0.7                         | 2 (100) | 13 (56) | 72 (0)   | 189 (0)  | 297 (0)  | 464 (0)  |
|                             | 17 (0)  | 21 (0)  | 105 (0)  | 280 (0)  | 442 (0)  | 674 (0)  |
| 0.8                         | 2 (100) | 4 (56)  | 60 (0)   | 138 (0)  | 232 (0)  | 372 (0)  |
|                             | 13 (3)  | 18 (0)  | 100 (0)  | 219 (0)  | 372 (0)  | 610 (0)  |
| 0.9                         | 2 (100) | 3 (99)  | 38 (0)   | 113 (0)  | 198 (0)  | 311 (0)  |
|                             | 10 (2)  | 14 (0)  | 76 (0)   | 205 (0)  | 344 (0)  | 541 (0)  |
| 1.0                         | 2 (100) | 3 (100) | 29 (5)   | 88 (0)   | 147 (0)  | 254 (0)  |
|                             | 8 (2)   | 12 (0)  | 74 (0)   | 180 (0)  | 290 (0)  | 493 (0)  |
| 1.1                         | 2 (100) | 3 (100) | 7 (80)   | 64 (0)   | 124 (0)  | 188 (0)  |
|                             | 8 (90)  | 10 (0)  | 65 (0)   | 157 (0)  | 276 (0)  | 416 (0)  |
| 1.2                         | 2 (100) | 3 (100) | 5 (99)   | 39 (28)  | 87 (0)   | 151 (0)  |
|                             | 2 (100) | 12 (62) | 61 (0)   | 141 (0)  | 245 (0)  | 399 (0)  |
| 1.3                         | 2 (100) | 3 (100) | 4 (100)  | 6 (94)   | 32 (49)  | 84 (25)  |
|                             | 2 (100) | 3 (92)  | 51 (0)   | 135 (0)  | 221 (0)  | 350 (0)  |
| 1.4                         | 2 (100) | 3 (100) | 5 (100)  | 6 (100)  | 5 (95)   | 4 (80)   |
|                             | 2 (100) | 3 (100) | 51 (0)   | 122 (0)  | 205 (0)  | 350 (0)  |
| 1.5                         | 2 (100) | 3 (100) | 5 (100)  | 5 (100)  | 4 (100)  | 3 (100)  |
|                             | 2 (100) | 3 (100) | 43 (6)   | 113 (0)  | 202 (0)  | 318 (0)  |
| 1.6                         | 2 (100) | 3 (100) | 4 (100)  | 5 (100)  | 4 (100)  | 3 (100)  |
|                             | 2 (100) | 3 (100) | 41 (23)  | 107 (0)  | 179 (0)  | 295 (0)  |
| 1.7                         | 2 (100) | 3 (100) | 5 (100)  | 4 (100)  | 3 (100)  | 3 (100)  |
|                             | 2 (100) | 3 (100) | 45 (73)  | 91 (0)   | 180 (0)  | 277 (0)  |
| 1.8                         | 2 (100) | 3 (100) | 5 (100)  | 4 (100)  | 3 (100)  | 3 (100)  |
|                             | 2 (100) | 3 (100) | 38 (99)  | 92 (7)   | 171 (0)  | 280 (0)  |
| 1.9                         | 2 (100) | 3 (100) | 5 (100)  | 4 (100)  | 4 (100)  | 3 (100)  |
|                             | 2 (100) | 3 (100) | 35 (100) | 127 (89) | 185 (4)  | 258 (0)  |

шагов итерационных процессов  $\mathcal{A}_{X+}^\lambda$  и  $\mathcal{C}_{X+}^\lambda$  и условий их завершения в зависимости от значения параметров  $\lambda$  и  $\gamma$  при  $n = 100$ . Первое число в ячейке — количество шагов, а число в скобках — количество процессов, завершенных по условию  $x^k \geq 0$ , выраженное в процентах.

Полученные данные свидетельствуют о существовании связи количества шагов и условий завершения. Наименьшее количество шагов обоих итерационных процессов наблюдается при

остановке вычислений по условию  $x^k \geq 0$ , что очень похоже на получение решения за конечное число шагов в фейеровских процессах решения систем линейных неравенств с зеркальной релаксацией (см., например, теорему 2.2 в монографии [13, с. 115]).

Зависимость исследуемых параметров от  $\lambda$  носит сложный характер, но можно отметить, что меньшее число шагов наблюдается вблизи оптимальных значений параметра релаксации.

Для обоих итерационных процессов  $\mathcal{C}_{X+}^\lambda$  и  $\mathcal{A}_{X+}^\lambda$  количество шагов увеличивается с ростом значения параметра  $\gamma$ , но для процесса  $\mathcal{A}_{X+}^\lambda$  это происходит только при значениях параметра релаксации, меньших оптимального.

Область значений параметров  $\lambda$  и  $\gamma$ , связанных с условием завершения  $x^k \geq 0$  для процесса  $\mathcal{A}_{X+}^\lambda$ , шире соответствующей области для процесса  $\mathcal{C}_{X+}^\lambda$ . В целом представленные результаты свидетельствуют о преимуществе итерационного процесса  $\mathcal{A}_{X+}^\lambda$  над  $\mathcal{C}_{X+}^\lambda$ .

### Заключение

- Введены новые фейеровские отображения  $\mathcal{A}_{X+}^\lambda$  и  $\mathcal{C}_{X+}^\lambda$ .
- Доказана линейная скорость сходимости последовательностей  $\{x^k\}$  и  $\|r(x^k)\|$ , порожденных фейеровскими отображениями  $\mathcal{A}_{X+}^\lambda$  и  $\mathcal{C}_{X+}^\lambda$ . Найдены соответствующие оценки констант асимптотики для  $\{x^k\}$  и  $\|r(x^k)\|$ .
- Экспериментально установлено, что количество шагов в итерационных процессах, порождаемых фейеровскими отображениями  $\mathcal{A}_{X+}^\lambda$  и  $\mathcal{C}_{X+}^\lambda$ , зависит от значения параметра релаксации  $\lambda$ , а оптимальные значения указанного параметра для обоих процессов лежат в интервале  $(1, 2)$ .
- Количество итераций обоих итерационных процессов в большей степени зависит от числа линейно независимых строк матрицы  $A$ , чем от количества неизвестных.
- Количество шагов итерационного процесса, построенного на отображении  $\mathcal{A}_{X+}^\lambda$ , существенно меньше, чем количество шагов итерационного процесса, построенного на отображении  $\mathcal{C}_{X+}^\lambda$ , при всех значениях параметра  $\lambda$ , включая “оптимальные” для каждого из процессов значения.
- Наименьшее количество шагов обоих итерационных процессов наблюдается при остановке вычислений по условию  $x^k \geq 0$ , что очень похоже на получение решения за конечное число шагов в фейеровских процессах решения систем линейных неравенств с зеркальной релаксацией.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ерохин В.И., Лаптев А.Ю., Лисицын Н.В. Согласование материального баланса крупного нефтеперерабатывающего завода в условиях неполных данных // Изв. РАН. ТИСУ. 2010. № 2. С. 130–140.
2. Kuzichkin N., Erohin V., Lisitsyn N. Reconciliation of experimental data for balance calculation in chemical-technological systems // Adv. Chem. Engin. Res. 2013. Vol. 2, no. 4. P. 98–105.
3. Дэннис Дж., мл., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир, 1988. 440 с.
4. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977. 224 с.
5. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999. 548 с.
6. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. М.: Наука, 1986. 232 с.
7. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.
8. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 432 с.

9. **Еремин И.И.** Обобщение релаксационного метода Моцкина — Агмона // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20, № 2. С. 183–187.
10. **Еремин И.И., Мазуров В.Д.** Нестационарные процессы математического программирования. М.: Наука, 1979. 205 с.
11. **Васин В.В., Агеев А.Л.** Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: УИФ “Наука”, 1993. 248 с.
12. **Еремин И.И.** Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1998. 248 с.
13. **Васин В.В., Еремин И.И.** Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2005. 200 с.
14. **Еремин И.И.** Фейеровские методы для задач выпуклой и линейной оптимизации // Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2009. 199 с.
15. **Еремин И.И., Попов Л.Д.** Фейеровские процессы теории и практике: обзор последних результатов // Изв. вузов. Математика. 2009. № 1. С. 44–65.
16. **Васин В.В.** Итерационные фейеровские процессы в некорректных задачах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2020. Т. 60. № 6. С. 963–974.
17. **Васин В.В.** Решение нелинейных обратных задач на основе регуляризованного модифицированного метода Гаусса–Ньютона // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 504. С. 47–50.
18. **Васин В.В.** Итерационные процессы фейеровского типа в задаче условной квадратичной минимизации // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 29, № 3. С. 26–41. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2023-29-3-26-41>
19. **Бердникова Е.А., Попов Л.Д.** О применении декомпозиции при реализации фейеровских методов решения больших систем линейных неравенств на МВС-100 // Алгоритмы и програм. средства парал. вычислений: сб. науч. тр. / Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2000. Вып. 4. С. 51–62.
20. **Еремин И.И., Попов Л.Д.** Параллельные фейеровские методы для сильно структурированных систем линейных неравенств и уравнений // Алгоритмы и програм. средства парал. вычислений: сб. науч. тр. / Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2002. Вып. 6. С. 57–82.
21. **Еремин И.И., Соколинская И.М.** Фейеровские итерационные процессы для несобственных задач линейного программирования // Математические структуры и моделирование. 2002. Вып. 9. С. 1–17.
22. **Бердникова Е.А., Еремин И.И., Попов Л.Д.** Распределенные фейеровские процессы для систем линейных неравенств и задач линейного программирования // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 16–32.
23. **Ершова А.В., Соколинская И.М.** Параллельный алгоритм решения задачи сильной отделимости на основе фейеровских отображений // Вычисл. методы и программирование. 2011. Т. 12. № 4. С. 423–434.
24. **Нурминский Е.А.** Фейеровские алгоритмы с адаптивным шагом // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2011. Т. 51. № 5. С. 791–801.
25. **Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.** Теоремы об альтернативах и их применение в численных методах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2003. Т. 43. № 3. С. 354–375.
26. **Ашманов С.А., Тимохов А.В.** Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991. 448 с.
27. **Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю.** Линейное программирование. М.: МЦНМО, 2020. 412 с.

Поступила 9.05.2025

После доработки 9.06.2025

Принята к публикации 16.06.2025

Опубликована онлайн 26.06.2025

Ерохин Владимир Иванович  
д-р физ.-мат. наук, профессор

старший науч. сотрудник

Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского

г. Санкт-Петербург

e-mail: erohin\_v\_i@mail.ru

Тамасян Григорий Шаликович  
 канд. физ.-мат. наук, доцент  
 старший науч. сотрудник  
 Военно-космической академии им. А. Ф. Можайского;  
 Институт проблем машиноведения РАН  
 г. Санкт-Петербург  
 e-mail: grigoriytamasjan@mail.ru

Степенко Николай Анатольевич  
 канд. физ.-мат. наук, доцент  
 Санкт-Петербургский государственный университет  
 г. Санкт-Петербург  
 e-mail: nick\_st@mail.ru

## REFERENCES

1. Erokhin V.I., Laptev A.Y., Lisitsyn N.V. Reconciliation of material balance of a large petroleum refinery in conditions of incomplete data. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2010, vol. 49, no. 2, pp. 295–305.  
<https://doi.org/10.1134/S1064230710020140>
2. Kuzichkin N., Erohin V., Lisitsyn N. Reconciliation of experimental data for balance calculation in chemical-technological systems. *Adv. Chem. Engin. Res.*, 2013, vol. 2, no. 4, pp. 98–105.
3. Dennis-J.E. Jr., Schnabel R.B. *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*. London, Englewood Cliffs, 1983, 378 p. ISBN-10: 0136272169. Translated to Russian under the title *Chislennyye metody bezuslovnoy optimizatsii i resheniya nelineynykh uravneniy*, Moscow, Mir Publ., 1988, 440 p. ISBN: 5-03-001102-1.
4. Albert A. *Regression and the Moore – Penrose pseudoinverse*. London, New York, Academic Press, 1972, 180 p. Translated to Russian under the title *Regressiya, pseudoinversiya i rekurrentnoye otsenivaniye*, Moscow, Nauka Publ., 1977, 224 p.
5. Golub G.H., Van Loan Ch.F. *Matrix computations*, 3rd ed. Baltimore, London, the John Hopkins Univ. Press, 1996, 728 p. ISBN-10: 0801854148. Translated to Russian under the title *Matrichnyye vychisleniya*, Moscow, Mir Publ., 1999, 548 p. ISBN: 5-03-002406-9.
6. Lawson Ch.L. *Solving least squares problems*. New Jersey, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, Inc., 1974, 340 p. Translated to Russian under the title *Chislennoye resheniye zadach metoda naimen'shikh kvadratov*, Moscow, Nauka Publ., 1986, 232 p.
7. Demyanov V.F., Vasiliev L.V. *Nedifferentsiruyemaya optimizatsiya* [Nondifferentiable optimization]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 384 p.
8. Dem'yanov V.F., Rubinov A.M. *Osnovy negladkogo analiza i kvazidifferentsial'noye ischisleniye* [Fundamentals of nonsmooth analysis and quasidifferential calculus]. Moscow, Nauka Publ., 1990, 432 p. ISBN: 5-02-014241-7.
9. Eremin I.I. Generalization of the relaxation method of Motzkin – Agmon. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1965, vol. 20, no. 2(122), pp. 183–187 (in Russian).
10. Eremin I.I., Mazurov V.D. *Nestatsionarnyye protsessy matematicheskogo programmirovaniya* [Nonstationary processes of mathematical programming]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 288 p.
11. Vasin V.V., Ageev A.L. *Ill-posed problems with a priori information*, Utrecht, VSP, 1995, 255 c. ISBN: 906764191X. Original Russian text was published in Vasin V. V., Ageev A. L. *Nekorrektnyye zadachi s apriorno informatsiei*, Yekaterinburg, Ural Publ. House “Nauka”, 1993, 264 p. ISBN: 5-7691-0390-6.
12. Eremin I.I. *Theory of linear optimization*. Berlin, Walter de Gruyter, 2002, 248 p. ISBN: 906764353X. Original Russian text was published in Eremin I.I. *Teoriya lineinoi optimizatsii*, Yekaterinburg, Izd-vo UrO RAN, 1998, 247 p.
13. Vasin V.V., Eremin I.I. *Operators and iterative processes of Fejér type. Theory and applications*, Berlin, NY, Walter de Gruyter, 2009, 155 p. ISBN: 3110218186. Original Russian text was published in Vasin V. V., Eremin I.I. *Operatory i iteratsionnyye protsessy feierovskogo tipa. Teoriya i prilozheniya*, Izhevsk, Regul. Khaot. Dinamika, 2005, 200 p. ISBN: 5-93972-427-2.
14. Eremin I.I. *Feyyervoskiye metody dlya zadach vypukloy i lineynoy optimizatsii* [Fejer methods for problems of convex and linear optimization]. Chelyabinsk, Izd. tsentr YuUrGU, 2009, 199 p. ISBN: 978-5-696-04003-5.

15. Eremin I.I., Popov L.D. Fejér processes in theory and practice: recent results. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2009, vol. 53, no. 1, pp. 36–55.
16. Vasin V.V. Iterative Fejér processes in ill-posed problems. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2020, vol. 60, no. 6, pp. 938–949. <https://doi.org/10.1134/S0965542520060111>
17. Vasin V.V. Solving nonlinear inverse problems based on the regularized modified Gauss—Newton method. *Dokl. Math.*, 2022, vol. 105, no. 3, pp. 175–177. <https://doi.org/10.1134/S1064562422030103>
18. Vasin V.V. Fejér-type iterative processes in the constrained quadratic minimization problem. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2023, vol. 323, suppl. 1, pp. S305–S320. <https://doi.org/10.1134/S008154382306024X>
19. Berdnikova E.A., Popov L.D. On the application of decomposition in the implementation of Fejér methods for solving large systems of linear inequalities on the MVS-100. *Algoritmy i Prog. Sredstva Paral. Vych.: sb. nauch. trudov*, Yekaterinburg, IMM UrO RAN, 2000, vol. 4, pp. 51–62 (in Russian).
20. Eremin I.I., Popov L.D. Parallel Fejér methods for strongly structured systems of linear inequalities and equations. *Algoritmy i Prog. Sredstva Paral. Vych.: sb. nauch. trudov*, Yekaterinburg, IMM UrO RAN, 2000, vol. 6, pp. 57–82 (in Russian).
21. Eremin I.I., Sokolinskaya I.M. Fejér iterative processes for improper linear programming problems. *Mat. Struktury i modelirovaniye*, 2002, vol. 9, pp. 1–17 (in Russian).
22. Berdnikova E.A., Eremin I.I., Popov L.D. Distributed Fejér processes for systems of linear inequalities and problems of linear programming. *Automat. Remote Control*, 2004, vol. 65, no. 2, pp. 168–183. <https://doi.org/10.1023/B:AURC.0000014714.97496.79>
23. Ershova A.V., Sokolinskaya I.M. A parallel algorithm for solving strong separability problem on the basis of Fejér mappings. *Vych. Metody Prog.*, 2011, vol. 12, no. 4, pp. 423–434 (in Russian).
24. Nurminski E.A. Fejér algorithms with an adaptive step. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2011, vol. 51, no. 5, pp. 741–750. <https://doi.org/10.1134/S0965542511050137>
25. Golikov A.I., Evtushenko Yu.G. Theorems on alternatives and their application to numerical methods. *Comput. Math. Math. Phys.* 2003, vol. 43, no. 3, pp. 338–358.
26. Ashmanov S.A., Timokhov A.V. *Teoriya optimizatsii v zadachakh i uprazhneniyakh* [Optimization theory in problems and exercises]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 448 p. ISBN: 5-02-014253'0.
27. Vasil'ev F.P., Ivanitskii A.Yu. *Linejnoe programmirovaniye* [Linear programming]. Moscow, MCNMO, 2020, 412 p. ISBN: 978-5-4439-1359-9.

Received May 9, 2025

Revised June 9, 2025

Accepted June 16, 2025

Published online June 26, 2025

**Funding Agency.** The results of section 7 were obtained at the Institute of Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, funded by the Russian Science Foundation (project no. 23-41-00060).

*Vladimir Ivanovich Erokhin*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Mozhayskii Military-Space Academy, St. Petersburg, 197198 Russia, e-mail: [erohin\\_v\\_i@mail.ru](mailto:erohin_v_i@mail.ru).

*Grigoriy Shalikhovich Tamasyan*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Mozhayskii Military-Space Academy, St. Petersburg, 197198 Russia; Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, 198178 Russia, e-mail: [grigoriytamasjan@mail.ru](mailto:grigoriytamasjan@mail.ru).

*Nikolay Anatolievich Stepenko*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), St. Petersburg State University, St. Petersburg, 199034 Russia, e-mail: [nick\\_st@mail.ru](mailto:nick_st@mail.ru).

Cite this article as: V.I. Erokhin, G.Sh. Tamasyan, N.A. Stepenko. An accelerated Fejér-type process for finding a negative solution to a system of linear algebraic equations. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2025-31-3-fon-05>