

УДК 517.988.68

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ НА ОСНОВЕ СЕПАРАЦИИ ДЛЯ ЛОКАЛИЗАЦИИ ЛИНИЙ РАЗРЫВА

А. Л. Агеев, Т. В. Антонова

Рассматривается некорректно поставленная задача определения положения (локализации) линий разрыва функции двух переменных по зашумленным данным. Предполагается, что вне линий разрыва функция гладкая, а на линиях имеет разрыв первого рода. В каждом узле равномерной сетки с шагом τ известны средние значения на квадрате со стороной τ от возмущенной функции. Возмущенная функция приближает точную в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$. Уровень возмущения δ считается известным. Для локализации линий разрыва конструируются и исследуются методы на основе сепарации исходных зашумленных данных. Удастся показать, что методы сепарации обеспечивают гарантированную оценку точности работ авторов, т. е. при существенно более слабых условиях на линию разрыва. Для простоты изложения предполагается, что линии разрыва являются ломаными. Ослаблены условия на размер звеньев и углов. Получены оценки точности аппроксимации и других важных характеристик построенных методов. Приведены примеры, которые показывают, что для негладких границ методы сепарации гарантируют лучшую точность аппроксимации, чем методы усреднения. Алгоритм данной работы может быть использован при построении методов на основе сепарации для аппроксимации фрактальных линий разрыва.

Ключевые слова: некорректная задача, метод регуляризации, линия разрыва, сепарация данных, глобальная локализация, условие Липшица.

A. L. Ageev, T. V. Antonova. Study of separation-based methods for localization of discontinuity lines.

The ill-posed problem of determining the position (localization) of discontinuity lines of a function of two variables from noisy data is considered. The function is assumed to be smooth outside the discontinuity lines and to have a discontinuity of the first kind on these lines. At each node of a uniform grid with step τ , the mean values of the perturbed function on a square with side τ are known. The perturbed function approximates the exact function in space $L_2(\mathbb{R}^2)$. It is assumed that the level of perturbation δ is known. The discontinuity lines are localized using methods based on the separation of the original noisy data that has been constructed and investigated. This paper shows that, compared to the averaging methods in the authors' previous works, separation methods provide a guaranteed estimate of the localization accuracy over a wider class of correctness, i.e., under substantially weaker conditions on the discontinuity line. For the sake of simplicity, it is assumed that the discontinuity lines are polygonal. The requirements for grid step size and angles have been relaxed. Estimates of the approximation accuracy and other important characteristics of the constructed method are obtained. As demonstrated by the provided examples, in the case of nonsmooth boundaries, separation-based methods guarantee better approximation accuracy than averaging methods. The algorithm in this paper can be used in the construction of separation-based methods for approximating fractal discontinuity lines.

Keywords: ill-posed problems, regularization method, discontinuity line, data separation, global localization, Lipschitz condition.

MSC: 65J22, 68U10

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-3-fon-03

Введение

Задача определения границ объектов часто возникает в процессе обработки изображений в качестве основного или промежуточного этапа. Границы объектов являются линиями, на которых функция двух переменных (изображение) терпит разрыв первого рода (линии разрыва). Вне линий разрыва функция считается гладкой. Предполагается, что точная функция f неизвестна, а вместо нее известны средние от приближенной в L_2 функции f^δ (точная постановка задачи в разд. 1). Уровень погрешности δ известен. Легко видеть, что в такой постановке задача локализации линий разрыва оказывается некорректно поставленной, и для ее решения

необходимо строить регуляризующие алгоритмы [1; 2]. Для простоты изложения рассматривается случай, когда линии разрыва являются ломаными (обобщение на кусочно-гладкие линии не вызывает затруднений).

Традиционно для локализации линий разрыва используются методы усреднения, например, алгоритм Кэни [3]. В настоящей работе для решения этой задачи конструируются и исследуются алгоритмы из другого класса — методы сепарации исходных зашумленных данных. Термин “сепарация” используется для обозначения принципа обработки исходных данных. Исходные данные (средние на квадратах зашумленной функции) разбиваются на группы в зависимости от значения. Методы выделения площадных объектов на изображении, основанные на том же принципе обработки исходных данных, в литературе обычно называются методами кластеризации. Подобные алгоритмы описаны, например, в [4, гл.10] и в настоящее время активно используются при обработке изображений [5; 6]. Кроме того, в последнее время особую популярность получили алгоритмы на основе нейронных сетей, в которых для получения обучающей выборки можно также использовать методы кластеризации [7].

В настоящей работе сконструирован и теоретически исследован метод локализации ломанных на основе сепарации исходных зашумленных данных. Методом исследования алгоритмов локализации является проведение оценок точности аппроксимации и других характеристик метода на классах корректности. Класс корректности определяет условия на точную (неизвестную) функцию и расширение класса означает ослабление условий на точную функцию. Исследование построенного в работе метода и получение оценок точности проводится на более широком по сравнению с методами усреднения [8] классе функций. Анализ конкретных примеров позволяет выдвинуть гипотезу, что для границ с нарушением гладкости методы сепарации гарантируют лучшую точность аппроксимации по сравнению с методами усреднения. Отметим, что рассмотрение негладких (возможно даже фрактальных) границ важно, так как часто именно негладкие линии являются границами естественных объектов на изображении (например, см. [9]). Заметим, что подход к работе с фрактальными линиями разрыва основан на аппроксимации фракталов последовательностью ломанных линий [10] и, таким образом, важно ослабление ограничений на точность локализации для ломанных; это должно привести к ослаблению условий на фрактальную линию разрыва.

Сравним результаты статьи [8] и данной работы. В [8] показано, что оценка точности аппроксимации метода усреднения в окрестности углов ломаной будет хуже, чем в середине звена. При этом, чем угол между соседними звеньями ломаной меньше, тем аппроксимация в окрестности такого угла хуже. Под углом между звеньями понимаем наименьший положительный угол между направляющими этих звеньев. Оценка точности аппроксимации дополнительно зависит от расположения углов ломаной относительно осей координат. Например, ни для какого угла ломаной линии разрыва нельзя гарантировать его хорошей аппроксимации при определенном положении этого угла относительно осей координат. Улучшить оценку для методов усреднения позволяет дополнительная априорная информация о расположении углов.

Для метода сепарации, построенного и исследованного в настоящей работе, положение углов не влияет на точность аппроксимации. Удастся показать, что для любого угла не меньше величины $\arcsin 4/5 \approx 53.13^\circ$ можно гарантировать одинаковую точность аппроксимации как внутри звеньев, так и в окрестности углов. Таким образом, приведен теоретический аргумент, что методы сепарации более приспособлены для локализации негладких линий разрыва по сравнению с методами усреднения, что формально выражается в ослаблении условий на класс корректности, на котором проводятся оценки, по сравнению с методами усреднения. В работе построен пример с ломаной линией разрыва, углы которой больше либо равны $\arcsin 4/5$. Показано, что такая линия аппроксимируется целиком с одинаковой точностью.

В разд. 1 дана постановка задачи локализации и построена вспомогательная функция. В разд. 2 выписан класс корректности, приведены примеры функций, входящих в этот класс, и проведено исследование вспомогательной функции. В разд. 3 описан алгоритм локализации и доказана теорема сходимости с оценками точности аппроксимации.

1. Постановка задачи и построение вспомогательной функции

Пусть функция двух переменных $f(x, y) \in L_2(\mathbb{R}^2)$ вне квадрата $\mathfrak{D} = \{(x, y) : |x| \leq d, |y| \leq d\}$, $d > 0$, равна нулю и не имеет скачка на границе $\mathfrak{D}$ (последнее условие не принципиально и может быть снято). Будем считать, что линия разрыва Γ состоит из конечного числа l отрезков Γ_k , $k = 1, 2, \dots, l$, образующих замкнутый контур¹: $\Gamma = \bigcup_{k=1}^l \Gamma_k$. Квадрат $\mathfrak{D}$ линией разрыва Γ делится на две области, внутри которых функция f липшицева, а на границе Γ областей функция f имеет разрыв первого рода (точные условия на функцию f будут сформулированы в следующем пункте).

Введем в квадрате $\mathfrak{D}$ равномерную сетку $T = \{(x^n, y^m)\}$ с шагом τ (условия на τ будут сформулированы перед теоремой сходимости): $x^n = -d + (n - 1/2)\tau$, $y^m = -d + (m - 1/2)\tau$, где $n = 1, 2, \dots, 2d/\tau$, $m = 1, 2, \dots, 2d/\tau$. (Без ограничения общности будем считать, что $2d/\tau$ целое число, поскольку всегда можно подходящим образом увеличить d .)

Приведем общую постановку задачи локализации линий разрыва Γ функций $f \in \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ — класс корректности, который будет выписан в следующем пункте.

Постановка задачи. Пусть $f \in \mathfrak{M}$, функция $f^\delta \in L_2(\mathbb{R}^2)$ такова, что $\|f - f^\delta\|_{L_2} \leq \delta$. По уровню погрешности δ и значениям $f_{n,m}^\delta$ в точках равномерной сетки $T = \{(x^n, y^m)\}$ с заданным шагом τ , которые связаны с функцией f^δ следующим образом:

$$f_{n,m}^\delta = \frac{1}{\tau^2} \int_{y^m - \tau/2}^{y^m + \tau/2} \int_{x^n - \tau/2}^{x^n + \tau/2} f^\delta(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (1.1)$$

требуется аппроксимировать множество Γ подмножеством точек сетки T с оценкой точности приближения.

Область интегрирования в (1.1) назовем τ -ячейкой точки (x^n, y^m) сетки T .

З а м е ч а н и е 1. Понятие “аппроксимировать” вводится в формулировке теоремы, в которой оценивается не только близость точек сетки, найденных алгоритмом, к множеству линий разрыва, но и их количество.

Для упрощения дальнейших выкладок введем нормированную функцию

$$\bar{f}(x, y) = (f(x, y) + 1)/2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Пусть $|f(x, y)| \leq 1$ для всех $(x, y) \in \mathfrak{D}$, тогда функция $\bar{f}$ неотрицательна и ее значения не превосходят единицы. Положим

$$\bar{f}^\delta(x, y) = (f^\delta(x, y) + 1)/2, \quad \Delta \bar{f}^\delta(x, y) = \bar{f}^\delta(x, y) - \bar{f}(x, y). \quad (1.2)$$

Нетрудно видеть, что $\|\Delta \bar{f}^\delta\|_{L_2} \leq \delta/2$. Во всех точках $(x^n, y^m) \in T$ определим величины

$$\bar{f}_{n,m} = (f_{n,m} + 1)/2, \quad \text{где} \quad f_{n,m} = \frac{1}{\tau^2} \int_{y^m - \tau/2}^{y^m + \tau/2} \int_{x^n - \tau/2}^{x^n + \tau/2} f(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (1.3)$$

$$\bar{f}_{n,m}^\delta = \begin{cases} (f_{n,m}^\delta + 1)/2, & |f_{n,m}^\delta| \leq 1, \\ 1, & f_{n,m}^\delta > 1, \\ 0, & f_{n,m}^\delta < -1, \end{cases} \quad \Delta \bar{f}_{n,m}^\delta = \bar{f}_{n,m}^\delta - \bar{f}_{n,m}. \quad (1.4)$$

¹Замкнутость контуров в доказательствах не используется. Она необходима для существования функции f , удовлетворяющей всем условиям.

Во всех точках $(x^n, y^m) \in T$ величина $\bar{f}_{n,m}^\delta$ принимает значения от 0 до 1. Для построения вспомогательной функции, на исследовании которой основан алгоритм локализации линий разрыва, будем проводить сепарацию величин $\bar{f}_{n,m}^\delta$. Введем разбиение отрезка $[0, 1]$. Пусть R — натуральное число, положим шаг разбиения $\Delta z = R^{-1}$, точки разбиения $z_r = \Delta z \cdot r$, $r = 0, 1, \dots, R$. Введем дискретный параметр регуляризации $M \in \mathbb{N}$ и соответствующий непрерывный параметр $\lambda = (2M + 1)\tau/2$. (Параметр M будет определен ниже как функция уровня погрешности δ). Для точки $(x^n, y^m) \in T$ обозначим через $G_r^\delta(x^n, y^m)$ количество точек $(x^{\bar{n}}, y^{\bar{m}})$ сетки T из квадрата $\Pi_\lambda(x^n, y^m) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |x - x^n| \leq \lambda, |y - y^n| \leq \lambda\}$, для которых значения $\bar{f}_{\bar{n}, \bar{m}}^\delta$ лежат в полуинтервале $[z_r, z_{r+1})$; будем говорить, что эти значения принадлежат r -му кластеру. В квадрате $\Pi_\lambda(x^n, y^m)$ находится $(2\lambda/\tau)^2 = (2M + 1)^2$ точек сетки T вместе со своими τ -ячейками. Следовательно, $0 \leq G_r^\delta(x^n, y^m) \leq (2M + 1)^2$ для всех $r = 0, 1, \dots, R - 1$.

Пример 1. Проиллюстрируем поведение функции $G_r^\delta = G_r^\delta(x^n, y^m)$ при $\delta = 0$ на примере (параметр $\delta = 0$ в обозначениях будем опускать). Пусть функция f имеет разрыв по линии Γ , которая состоит из четырех отрезков Γ_k , $k = 1, 2, 3, 4$, образующих замкнутый контур (см. рис. 1). Считаем, что вне контура функция f равна минус единице, а внутри контура — единице. На рис. 1 приведено три варианта возможного взаимного расположения линии Γ и квадрата $\Pi_\lambda(x^n, y^m)$. На рис. 2 изображены соответствующие этим положениям функции $G_r = G_r(x^n, y^m)$ в зависимости от z_r , $r = 0, 1, \dots, R$.

На рис. 1(a) квадрат $\Pi_\lambda(x^n, y^m)$ полностью находится вне контура Γ . Все значения $\bar{f}_{\bar{n}, \bar{m}}$, соответствующие точкам $(x^{\bar{n}}, y^{\bar{m}}) \in \Pi_\lambda(x^n, y^m)$, равны нулю, т. е. принадлежат одному (нулевому) кластеру. Следовательно, при $z_0 = 0$ функция G_r равна $(2M + 1)^2$ (см. рис. 2(a)), а при всех остальных r эта функция равна нулю. На рис. 1(b) квадрат $\Pi_\lambda(x^n, y^m)$ целиком нахо-

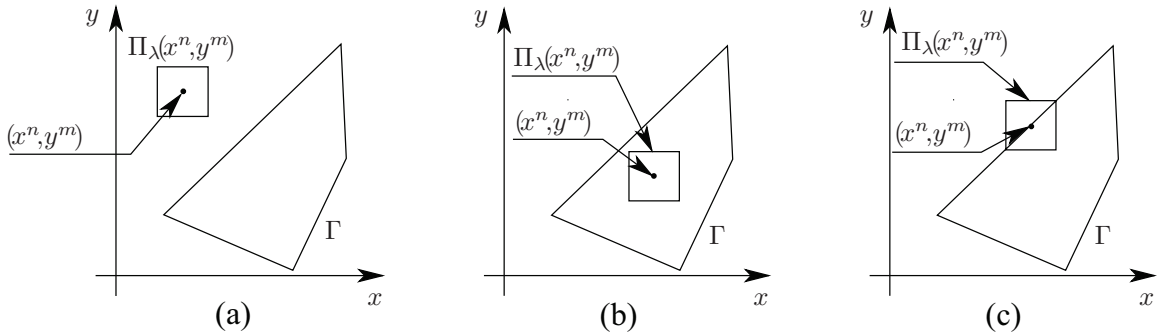


Рис. 1. Ломаная Γ и квадрат $\Pi_\lambda(x^n, y^m)$: (a) квадрат $\Pi_\lambda(x^n, y^m)$ вне контура Γ ; (b) квадрат $\Pi_\lambda(x^n, y^m)$ внутри контура Γ ; (c) линия Γ проходит через точку (x^n, y^m) (центр квадрата $\Pi_\lambda(x^n, y^m)$).

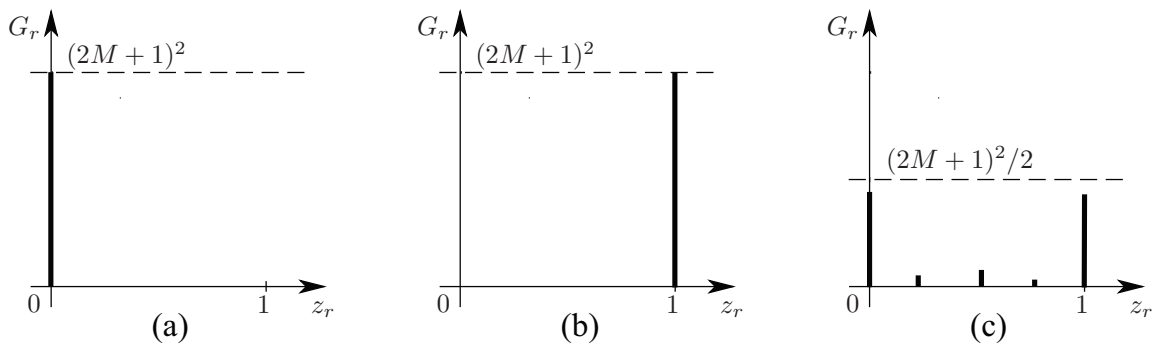


Рис. 2. Функции G_r (жирная линия), соответствующие рис. 1, в зависимости от z_r , $r = 0, 1, \dots, R$.

дится внутри контура Γ . Все величины $\bar{f}_{\bar{n},\bar{m}}$, соответствующие точкам $(x^{\bar{n}}, y^{\bar{m}}) \in \Pi_\lambda(x^n, y^m)$, равны единице. Следовательно, при $z_R = 1$ функция G_r равна $(2M+1)^2$ (см. рис. 2(b)), а при всех остальных r эта функция равна нулю. На рис. 1(c) линия Γ проходит через точку (x^n, y^m) — центр квадрата $\Pi_\lambda(x^n, y^m)$. Одна часть величин $\bar{f}_{\bar{n},\bar{m}}$, соответствующих точкам $(x^{\bar{n}}, y^{\bar{m}}) \in \Pi_\lambda(x^n, y^m)$, которые вместе со своими τ -ячейками лежат вне контура Γ , равны нулю. Вторая часть величин $\bar{f}_{\bar{n},\bar{m}}$, соответствующих точкам $(x^{\bar{n}}, y^{\bar{m}}) \in \Pi_\lambda(x^n, y^m)$, которые вместе со своими τ -ячейками лежат внутри контура Γ , равны единице. Количества этих величин равны между собой и меньше половины всего количества точек в квадрате $\Pi_\lambda(x^n, y^m)$. Величины $\bar{f}_{\bar{n},\bar{m}}$, соответствующие точкам $(x^{\bar{n}}, y^{\bar{m}}) \in \Pi_\lambda(x^n, y^m)$, τ -ячейки которых пересекает линия Γ , принимают значения между нулем и единицей (см. рис. 2(c)). В сумме все количество τ -ячеек равно $(2M+1)^2$.

В случае, когда $\delta \neq 0$ и функция f не является кусочно-постоянной, дельта-функции на рис. 2 будут “размываться”. Тем не менее можно подобрать параметр регуляризации $M = M(\delta)$ так, чтобы качественная картина была подобна той, что изображена на рис. 2: если квадрат $\Pi_\lambda(x^n, y^m)$ полностью находится вне контура Γ или внутри контура Γ (случаи (a) или (b)), то функция $G_r^\delta(x^n, y^m)$ будет иметь один пик, а в случае, когда одно из звеньев линии разрыва Γ пересекает τ -ячейку точки (x^n, y^m) (случай (c)), функция $G_r^\delta(x^n, y^m)$ будет иметь два примерно одинаковых пика, высота которых ниже пика в случаях (a) и (b).

Однако, при некотором выборе параметров может получиться так, что “размытый” пик разделится между двумя соседними полуинтервалами $[z_r, z_{r+1})$, $[z_{r+1}, z_{r+2})$. Поэтому кроме функции $G_r^\delta(x^n, y^m)$ необходимо дополнительно ввести функцию $G_{r+1/2}^\delta(x^n, y^m)$ — это количество точек $(x^{\bar{n}}, y^{\bar{m}}) \in \Pi_\lambda(x^n, y^m)$, для которых значения $\bar{f}_{\bar{n},\bar{m}}$ лежат в полуинтервале $[z_{r+1/2}, z_{r+3/2}) = [z_r + \Delta z/2, z_{r+1} + \Delta z/2)$.

Для всех точек (x^n, y^m) сетки T введем вспомогательную функцию

$$H^\delta(x^n, y^m) = (2M+1)^2 - \max \left\{ \max_{0 \leq r \leq R-1} G_r^\delta(x^n, y^m), \max_{0 \leq r \leq R-2} G_{r+1/2}^\delta(x^n, y^m) \right\}. \quad (1.5)$$

В примере 1 при $\delta = 0$ функция $H(x^n, y^m)$ равна нулю в случаях (a) и (b), т.е. когда квадрат $\Pi_\lambda(x^n, y^m)$ и линия Γ не пересекаются; в случае (c), когда линия Γ проходит через точку (x^n, y^m) , величина $H(x^n, y^m)$ всегда больше $(2M+1)^2/2$. Таким образом, при подходящем выборе параметров, исследуя поведение функции $H(x^n, y^m)$, можно определить положение линии Γ , а размер квадрата $\Pi_\lambda(x^n, y^m)$ позволяет получить оценку точности аппроксимации.

При исследовании функции $H^\delta(x^n, y^m)$ нужно учитывать, что при $\delta \neq 0$ некоторые значения $\bar{f}_{\bar{n},\bar{m}}^\delta$ могут достаточно сильно отличаться от точных значений $\bar{f}_{\bar{n},\bar{m}}$. В следующей лемме дана оценка количества тех значений, которые могут сильно отличаться за счет погрешности δ . Показано, что это количество не может быть большим и имеет порядок $O(M)$.

Для точки $(x^n, y^m) \in T$ для произвольного числа $\varrho > 0$ через $\Delta G_{n,m}^\delta(\varrho)$ обозначим количество точек $(x^{\bar{n}}, y^{\bar{m}})$ сетки T из квадрата $\Pi_\lambda(x^n, y^m)$, для которых $|\Delta \bar{f}_{\bar{n},\bar{m}}^\delta| \geq \varrho$, где $\Delta \bar{f}_{\bar{n},\bar{m}}^\delta = \bar{f}_{\bar{n},\bar{m}}^\delta - \bar{f}_{\bar{n},\bar{m}}$. Напомним, что $M \in \mathbb{N}$ — дискретный параметр регуляризации, $\lambda = (2M+1)\tau/2$ — соответствующий непрерывный параметр.

З а м е ч а н и е 2. Для корректности полученных ниже оценок дискретный параметр регуляризации $M \in \mathbb{N}$ должен быть достаточно большим. Величина M , выписанная перед формулировкой основной теоремы, будет такой, что это требование будет учтено.

Лемма 1. Пусть зафиксировано натуральное число M . Тогда в условиях рассматриваемой задачи при $\lambda = (2M+1)\tau/2$ для любых точек $(x^n, y^m) \in T$ и $\varrho > 0$ имеем

$$\Delta G_{n,m}^\delta(\varrho) \leq \frac{2M+1}{2\varrho\tau} \delta.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем функцию $\Delta \hat{f}^\delta(x, y) = |\Delta \bar{f}^\delta(x, y)|$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, функция $\Delta \bar{f}^\delta(x, y)$ определена в (1.2). Ясно, что $\|\Delta \hat{f}^\delta\|_{L_2} = \|\Delta \bar{f}^\delta\|_{L_2} \leq \delta/2$. Для всех $(x^n, y^m) \in T$

величина (см. 1.1)

$$\Delta \hat{f}_{n,m}^{\delta} = \frac{1}{\tau^2} \int_{y^m - \tau/2}^{y^m + \tau/2} \int_{x^n - \tau/2}^{x^n + \tau/2} \Delta \hat{f}^{\delta}(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

неотрицательна. Суммируя по всем точкам сетки T из квадрата $\Pi_{\lambda}(x^n, y^m)$ и учитывая, что $\lambda = (2M + 1)\tau/2$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{m}=-M}^M \sum_{\bar{n}=-M}^M |\Delta \bar{f}_{n+\bar{n}, m+\bar{m}}^{\delta}| &= \sum_{\bar{m}=-M}^M \sum_{\bar{n}=-M}^M \Delta \hat{f}_{n+\bar{n}, m+\bar{m}}^{\delta} \\ &= \frac{1}{\tau^2} \sum_{\bar{m}=-M}^M \sum_{\bar{n}=-M}^M \int_{y^{m+\bar{m}} - \tau/2}^{y^{m+\bar{m}} + \tau/2} \int_{x^{n+\bar{n}} - \tau/2}^{x^{n+\bar{n}} + \tau/2} \Delta \hat{f}^{\delta}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{1}{\tau^2} \int_{y^m - \lambda}^{y^m + \lambda} \int_{x^n - \lambda}^{x^n + \lambda} \Delta \hat{f}^{\delta}(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Используя для последнего выражения неравенство Коши — Буняковского, получаем оценку сверху для исходной суммы

$$\sum_{\bar{m}=-M}^M \sum_{\bar{n}=-M}^M |\Delta \bar{f}_{n+\bar{n}, m+\bar{m}}^{\delta}| \leq \frac{2\lambda}{\tau^2} \|\Delta \hat{f}^{\delta}\|_{L_2} \leq \frac{\lambda\delta}{\tau^2}.$$

С другой стороны, из определения величины $\Delta G_{n,m}^{\delta}(\varrho)$ следует оценка снизу

$$\sum_{\bar{m}=-M}^M \sum_{\bar{n}=-M}^M |\Delta \bar{f}_{n+\bar{n}, m+\bar{m}}^{\delta}| \geq \varrho \cdot \Delta G_{n,m}^{\delta}(\varrho).$$

Следовательно,

$$\Delta G_{n,m}^{\delta}(\varrho) \leq \frac{\lambda\delta}{\varrho\tau^2} = \frac{2M+1}{2\varrho\tau} \delta.$$

Лемма доказана.

2. Класс корректности и исследование вспомогательной функции

Введем условия для функции f вне множества Γ . Пусть для $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ норма определяется как $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$. Положим

$$\rho(U_1; U_2) = \inf\{\|u - v\| : u \in U_1, v \in U_2\}$$

— расстояние между множествами U_1, U_2 точек из $\mathbb{R}^2$.

Напомним, что линия разрыва Γ состоит из конечного числа l отрезков $\Gamma_k, k = 1, 2, \dots, l$, образующих замкнутый контур: $\Gamma = \cup_{k=1}^l \Gamma_k$. Квадрат $\mathfrak{D}$ делится линией Γ на две области: внутреннюю и внешнюю. Считаем, что сама линия Γ принадлежит обеим областям.

О п р е д е л е н и е 1. Введем множество $M\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ функций двух переменных $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$, имеющих линию разрыва Γ , для которых выполнено условие Липшица на внутренней и внешней областях линии Γ : для любых двух точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathfrak{D}$, если обе эти точки принадлежат либо внутренней, либо внешней областям линии Γ выполнено $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq \mathcal{L} \rho((x_1, y_1), (x_2, y_2))$.

З а м е ч а н и е 3. Отрезок, соединяющий точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ в определении 1, может пересекать (причем несколько раз) линию разрыва Γ .

Без ограничения общности будем считать, что константа $\mathcal{L}$ в условии Липшица в определении 1 равна единице. Введем условия на линию разрыва Γ .

О п р е д е л е н и е 2. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Будем говорить, что точка $(x, y) \in \Gamma$ является ε -регулярной, если существует точка $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathfrak{D}$ такая, что $(x, y) \in \Pi_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y})$ и линия Γ делит квадрат $\Pi_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y})$ на две области d_{in} и d_{out} (соответственно внутри и снаружи контура, ограниченного линией Γ) с одинаковой площадью. Обозначим через Γ^ε множество всех ε -регулярных точек линии Γ .

Будем считать, что Γ^ε — ломанные линии (изолированные точки исключаем). Обозначим через $|\Gamma|$ длину линии Γ ; считаем, что длина Γ конечна.

О п р е д е л е н и е 3. Линия Γ называется *аппроксимируемой* с параметрами $(\bar{\varepsilon}, p, p_1)$, если существуют $\bar{\varepsilon}, p_1 > 0$ и $p \geq 0$ такие, что для всех $\varepsilon: 0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ множество $\Gamma^\varepsilon \neq \emptyset$ и справедливы неравенства: $|\Gamma \setminus \Gamma^\varepsilon| \leq p\varepsilon$, $\max_{(x,y) \in \mathfrak{D}} |\Gamma \cap \Pi_\varepsilon(x, y)| \leq p_1\varepsilon$.

П р и м е р 2. Приведем пример линии Γ аппроксимируемой с параметрами $(\bar{\varepsilon}, p, p_1)$. Пусть $\Gamma = \bigcup_{k=1}^l \Gamma_k$ — выпуклая замкнутая ломаная. Отрезки, имеющие общие концы, назовем смежными. Занумеруем отрезки так, чтобы Γ_k и Γ_{k+1} были смежными (отрезки Γ_1 и Γ_l также считаются смежными); через γ_k обозначим наименьший положительный угол между направляющими этих отрезков; $|\Gamma_k|$ — длина отрезка Γ_k . Пусть выполнены условия: $\min_{1 \leq k \leq l} \gamma_k \geq \gamma^{\min} = \arcsin(4/5)$ и $\min_{1 \leq k \leq l} |\Gamma_k| \geq S^{\min} > 0$. Определим значения параметров $\bar{\varepsilon}, p, p_1$ для этого примера.

Докажем вспомогательное утверждение. Пусть γ — угол, образованный двумя лучами, исходящими из одной точки; $\gamma < \pi$. Пусть угол γ делит квадрат $\Pi_\varepsilon(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, на две области: d_{out} — внешняя, d_{in} — внутренняя. Через $|d_{\text{out}}|$, $|d_{\text{in}}|$ обозначим площади этих областей. Заметим, что $0 \leq d_{\text{out}}, d_{\text{in}} \leq 4\varepsilon^2$, $|d_{\text{out}}| + |d_{\text{in}}| = 4\varepsilon^2$.

Предложение 1. Если $\gamma \geq \gamma^{\min}$, то при любом расположении угла γ относительно осей координат для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ такая, что квадрат $\Pi_\varepsilon(x, y)$ содержит вершину угла γ и $|d_{\text{in}}| = |d_{\text{out}}|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Величина $\gamma^{\min} = \arcsin(4/5) = 2 \arcsin(1/\sqrt{5}) \approx 53.13^\circ$. Совместим начало системы координат с вершиной угла γ . Пусть сторона квадрата $\Pi_\varepsilon(x, y)$ содержит начало координат, и квадрат перемещается вокруг этой точки (при этом точка (x, y) перемещается по границе квадрата со стороной 2ε с центром в начале координат).

Для произвольного угла γ введем функцию $\phi[\gamma, \beta](x, y) = |d_{\text{in}}|$, где β — угол между биссектрисой угла γ и положительным направлением оси OX , который определяет положение угла γ ; (x, y) — центр квадрата $\Pi_\varepsilon(x, y)$. Если для угла γ при любом β существует точка (x, y) такая, что $\phi[\gamma, \beta](x, y) = 2\varepsilon^2$, то исходное утверждение верно.

(1) Покажем сначала, что если существует точка $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ такая, что квадрат $\Pi_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y})$ содержит вершину угла γ и для всех β имеем $\phi[\gamma, \beta](\bar{x}, \bar{y}) > 2\varepsilon^2$, то для такого угла γ исходное утверждение верно.

Для любого фиксированного β в заданной системе координат будет хотя бы одна четверть, которая не пересекается с углом γ . Непрерывно сдвигаем квадрат $\Pi_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y})$ на свободную четверть (сдвигаем точку $(\bar{x}, \bar{y})$ по границе квадрата вокруг начала системы координат, т.е. вершина угла γ всегда принадлежит квадрату $\Pi_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y})$). В какой то момент обязательно будет $\phi[\gamma, \beta](\bar{x}, \bar{y}) < 2\varepsilon^2$, а значит, существует точка $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ такая, что $\phi[\gamma, \beta](x, y) = 2\varepsilon^2$. Следовательно, исходное утверждение верно.

(2) Покажем, что для угла $\gamma^{\min}$ исходное утверждение верно. Для этого нужно для всех положений β найти точку $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ такую, что квадрат $\Pi_\varepsilon(x, y)$ содержит вершину угла $\gamma^{\min}$ и $\phi[\gamma^{\min}, \beta](x, y) \geq 2\varepsilon^2$. Без ограничения общности считаем, что $\gamma^{\min}$ лежит справа от оси OY . Следовательно, достаточно рассмотреть β от $-\gamma^{\min}/2$ до $\pi/2 - \gamma^{\min}/2$.

а) Пусть угол $\gamma^{\min}$ принадлежит двум четвертям, первой и четвертой. Значит β меняется от $-\gamma^{\min}/2$ до $\gamma^{\min}/2$. Если $\beta = 0$, то лучи, образующие угол $\gamma^{\min}$, пересекают квадрат $\Pi_\varepsilon(\varepsilon, 0)$

в углах и, следовательно, $\phi[\gamma^{\min}, 0](\varepsilon, 0) = 2\varepsilon^2$. Таким образом, исходное утверждение верно. Пусть $\beta \neq 0$. При сдвиге центра $(\varepsilon, 0)$ квадрата по y (вверх или вниз в зависимости от знака β) обязательно найдется положение, при котором стороны угла $\gamma^{\min}$ будут пересекать противоположные стороны квадрата, параллельные оси OX , т. е. существует значение $\bar{y}$: $-\varepsilon \leq \bar{y} \leq \varepsilon$, для которого $\phi[\gamma^{\min}, \beta](\varepsilon, \bar{y}) > 2\varepsilon^2$. Значит исходное утверждение также верно.

б) Пусть угол $\gamma^{\min}$ принадлежит первой четверти. В этом случае $\gamma^{\min}/2 \leq \beta \leq \pi/2 - \gamma^{\min}/2$. Нетрудно видеть, что для всех таких β имеем $\phi[\gamma^{\min}, \beta](\varepsilon, \varepsilon) > 2\varepsilon^2$. Таким образом, исходное утверждение верно.

(3) Покажем, что исходное утверждение верно для всех $\gamma \geq \gamma^{\min}$.

В (2) показано, что для $\gamma^{\min}$ при всех β существует точка $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ такая, что квадрат $\Pi_\varepsilon(x, y)$ содержит вершину угла $\gamma^{\min}$ и $\phi[\gamma^{\min}, \beta](x, y) \geq 2\varepsilon^2$. Поскольку $\gamma \geq \gamma^{\min}$, то для того же самого квадрата $\Pi_\varepsilon(x, y)$ имеем $\phi[\gamma, \beta](x, y) \geq \phi[\gamma^{\min}, \beta](x, y) \geq 2\varepsilon^2$. Значит, согласно (1), исходное утверждение верно.

Утверждение доказано.

Определим параметры $\bar{\varepsilon}$, p и p_1 . Рассмотрим точки на отрезке Γ_k , лежащие на расстоянии $\sqrt{2}\varepsilon/\sin \gamma_k$ и $\sqrt{2}\varepsilon/\sin \gamma_{k+1}$ от его концов (назовем эти точки внутренними). Поскольку для всех k имеем $\sin \gamma_k \geq \sin \gamma^{\min} = 4/5$, то $\sqrt{2}\varepsilon/\sin \gamma_k \leq 5\sqrt{2}\varepsilon/4$. Положим $\bar{\varepsilon} = S^{\min}/(5\sqrt{2}/2)$. Тогда для всех $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ после исключения концов у отрезка Γ_k останется хотя бы одна внутренняя точка. Очевидно, что квадрат $\Pi_\varepsilon(x, y)$ с центром в любой внутренней точке отрезка Γ_k не содержит других отрезков Γ_j , $j \neq k$, и делится отрезком Γ_k пополам. Значит, все точки отрезка Γ_k , лежащие на расстоянии $(\sqrt{2}/\sin \gamma_k - 1)\varepsilon$ и $(\sqrt{2}/\sin \gamma_{k+1} - 1)\varepsilon$ от его концов, являются ε -регулярными. С другой стороны, из доказанного выше утверждения следует, что ε -регулярными будут все точки линии Γ , лежащие на расстоянии не более ε от вершин углов. Поскольку для всех k имеем $\sqrt{2}/\sin \gamma_k - 1 < 1$, то все точки отрезка Γ_k будут ε -регулярными. Следовательно, $\Gamma^\varepsilon = \Gamma$, т. е. $p = 0$. Кроме того, для всех ε : $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$, в квадрате со стороной 2ε может лежать не больше $4\sqrt{2}\varepsilon$ длины линии Γ , т. е. $p_1 = 4\sqrt{2}$.

Вернемся к условиям на точную функцию. Введем скачок функции f на линии Γ .

О п р е д е л е н и е 4. Пусть для $f \in M\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ в точках $(x, y) \in \Gamma$ существуют конечные пределы $f(x \pm h_x, y \pm h_y)$, где (h_x, h_y) — направление отрезка, один конец которого принадлежит внутренней области, а второй — внешней, причем оба конца не принадлежат линии Γ и отрезок пересекает Γ только в одной точке. Введем для $(x, y) \in \Gamma$ функцию $\Delta(x, y) = |f(x + h_x, y + h_y) - f(x - h_x, y - h_y)|$.

Отметим, что из условия $f \in M\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ следует, что функция $\Delta(x, y)$ непрерывна и ее значения не зависят от направления (h_x, h_y) , выбранного в определении 4.

Введем класс корректности $\mathfrak{M}$, на функциях из которого будут проводиться оценки.

О п р е д е л е н и е 5. Класс $\mathfrak{M}$ состоит из функций $f \in M\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ с разрывами по линии Γ , которая является замкнутой ломаной, состоящей из конечного числа отрезков $\Gamma = \cup_{k=1}^l \Gamma_k$ и аппроксимируемой с параметрами $(\bar{\varepsilon}, p, p_1)$ в смысле определения 3. Пусть скачок функции f на линии разрыва Γ удовлетворяет определению 4 и дополнительно выполнены следующие условия:

- (i) для всех $(x, y) \in \mathfrak{D}$ имеем $|f(x, y)| \leq 1$;
- (ii) задано положительное число $\Delta^{\min}$ такое, что $\min\{\Delta(x, y) : (x, y) \in \Gamma\} \geq \Delta^{\min}$.

Класс корректности $\mathfrak{M}$ зависит от параметров $\Delta^{\min}, \bar{\varepsilon}, p, p_1$. Для краткости будем опускать эти параметры в обозначении класса.

Сравним введенный класс корректности с классом корректности из [8]. В примере 2 работы [8] в качестве Γ рассматривался равносторонний треугольник с основанием, лежащим на оси OX . Пусть функция f равна нулю вне области, ограниченной линией Γ , и единице внутри этой области, т. е. $\Delta^{\min} = 1$. Если в работе [8] константа Липшица в условии на линию Γ равна единице, то, полагая $\bar{\varepsilon}$ равным половине радиуса вписанной в треугольник окружности,

получим, что Γ^ε — это внутренние точки сторон треугольника без концов длины $2\varepsilon/\sqrt{3}$, т. е. $p = 4\sqrt{3}$. В рамках настоящей работы линия Γ вкладывается в вышеприведенный пример. Следовательно, все точки линии Γ являются ε -регулярными ($p = 0$) и вся линия аппроксимируется с одинаковой точностью (причем расположение треугольника относительно осей координат не имеет значения).

В определениях выше мы использовали параметр ε . Ниже, применяя эти определения, вместо ε будем использовать параметр λ , поскольку в дальнейшем этот параметр будет совпадать с параметром λ из разд. 1 настоящей статьи.

Перейдем к исследованию вспомогательной функции $H^\delta(x^n, y^m)$, определенной формулой (1.5), на классе $\mathfrak{M}$. Положим количество отрезков в разбиении отрезка $[0, 1]$ $R = 3/\Delta^{\min}$. Отметим, что уменьшив величину $\Delta^{\min}$, мы всегда можем сделать R целым числом (при этом класс корректности $\mathfrak{M}$ только увеличится). Тогда шаг разбиения $\Delta z = R^{-1} = \Delta^{\min}/3$. Нам нужно получить оценки сверху для функции H^δ вне малой окрестности Γ и оценки снизу в точках сетки T , близких к Γ^λ . Сначала докажем вспомогательную лемму. Напомним, что константы $\Delta^{\min}$, p_1 являются параметрами класса $\mathfrak{M}$, величины $f_{n,m}$ определены в (1.3).

Лемма 2. Пусть $f \in \mathfrak{M}$. Для произвольного $\lambda > 0$ и точек $(x^{n_i}, y^{m_i}), i = 1, 2$, сетки T из квадрата $\Pi_\lambda(x^n, y^m)$ таких, что их τ -ячейки не пересекает линия Γ , имеют место оценки

- (1) если либо $(x^{n_i}, y^{m_i}) \in d_{\text{in}}$, либо $(x^{n_i}, y^{m_i}) \in d_{\text{out}}, i = 1, 2$, то $|f_{n_1, m_1} - f_{n_2, m_2}| \leq 2\sqrt{2}\lambda$;
- (2) если $(x^{n_1}, y^{m_1}) \in d_{\text{in}}$, а $(x^{n_2}, y^{m_2}) \in d_{\text{out}}$, то $|f_{n_1, m_1} - f_{n_2, m_2}| \geq \Delta^{\min} - 2\sqrt{2}\lambda$.

Доказательство. Пусть $(x^{n_i}, y^{m_i}) \in \Pi_\lambda(x^n, y^m), i = 1, 2$, — произвольные точки такие, что их τ -ячейки не пересекает линия Γ . Учитывая (1.3) и применяя обобщенную теорему о среднем, имеем равенство

$$f_{n_1, m_1} - f_{n_2, m_2} = f(\tilde{\vartheta}_1, \bar{\vartheta}_1) - f(\tilde{\vartheta}_2, \bar{\vartheta}_2), \quad (2.1)$$

где $\tilde{\vartheta}_i \in (x^{n_i} - \tau/2, x^{n_i} + \tau/2)$, $\bar{\vartheta}_i \in (y^{m_i} - \tau/2, y^{m_i} + \tau/2), i = 1, 2$.

Покажем справедливость (1). Поскольку обе точки принадлежат либо внутренности, либо внешности, $f \in M\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ и $\mathcal{L} = 1$, то получаем следующую оценку для модуля (2.1):

$$|f_{n_1, m_1} - f_{n_2, m_2}| = |f(\tilde{\vartheta}_1, \bar{\vartheta}_1) - f(\tilde{\vartheta}_2, \bar{\vartheta}_2)| \leq \rho((\tilde{\vartheta}_1, \bar{\vartheta}_1); (\tilde{\vartheta}_2, \bar{\vartheta}_2)) \leq 2\sqrt{2}\lambda.$$

Перейдем к доказательству (2). Поскольку точки $(\tilde{\vartheta}_1, \bar{\vartheta}_1), (\tilde{\vartheta}_2, \bar{\vartheta}_2)$ из равенства (2.1) лежат в разных областях (пусть $(\tilde{\vartheta}_1, \bar{\vartheta}_1) \in d_{\text{in}}, (\tilde{\vartheta}_2, \bar{\vartheta}_2) \in d_{\text{out}}$), то отрезок, их соединяющий, пересекает Γ нечетное количество раз. Выберем такую точку $(\tilde{x}, \tilde{y})$ на этом отрезке, которая принадлежит d_{out} , и отрезок $[(\tilde{\vartheta}_1, \bar{\vartheta}_1), (\tilde{x}, \tilde{y})]$ пересекает линию Γ один раз; точку пересечения обозначим как $(\bar{x}, \bar{y})$. Через $(\bar{h}_x, \bar{h}_y)$ обозначим направляющий вектор этого отрезка. Продолжая (2.1), запишем равенство

$$\begin{aligned} f_{n_1, m_1} - f_{n_2, m_2} &= f(\tilde{\vartheta}_1, \bar{\vartheta}_1) - f(\tilde{x}, \tilde{y}) + f(\tilde{x}, \tilde{y}) - f(\tilde{\vartheta}_2, \bar{\vartheta}_2) = f(\bar{x} + \bar{h}_x, \bar{y} + \bar{h}_y) - f(\bar{x} - \bar{h}_x, \bar{y} - \bar{h}_y) \\ &\quad + (f(\tilde{\vartheta}_1, \bar{\vartheta}_1) - f(\bar{x} + \bar{h}_x, \bar{y} + \bar{h}_y)) + (f(\bar{x} - \bar{h}_x, \bar{y} - \bar{h}_y) - f(\tilde{x}, \tilde{y})) + (f(\tilde{x}, \tilde{y}) - f(\tilde{\vartheta}_2, \bar{\vartheta}_2)). \end{aligned}$$

Поскольку $f \in \mathfrak{M}$ и все рассматриваемые точки лежат на одном отрезке внутри квадрата $\Pi_\lambda(x^n, y^m)$, то для модуля (2.1) получаем следующую оценку снизу:

$$|f_{n_1, m_1} - f_{n_2, m_2}| \geq \Delta^{\min} - 2\sqrt{2}\lambda.$$

Лемма доказана.

Используя эту лемму, докажем оценки для функции H^δ .

Лемма 3. Пусть зафиксировано натуральное число M . В условиях рассматриваемой задачи при $\lambda = (2M+1)\tau/2$, если $\lambda \leq \min\{\bar{\varepsilon}, \Delta^{\min}/(18\sqrt{2})\}$, то для функции H^δ , определенной в (1.5), имеют место оценки

- (1) если для $(x^n, y^m) \in T$ имеем $\rho((x^n, y^m); \Gamma) \geq \sqrt{2}\lambda$, то $H^\delta(x^n, y^m) \leq 9(2M+1)\delta/(\tau\Delta^{\min})$;
- (2) если $(x, y) \in \Gamma^\lambda$, то существует точка $(x^n, y^m) \in T$ такая, что $\rho((x^n, y^m); (x, y)) \leq \sqrt{2}(\lambda + \tau/2)$ и $H^\delta(x^n, y^m) \geq (2M+1)^2/2 - (2M+1)(2 + p_1/2 + 9(2M+1)\delta/(\tau\Delta^{\min}))$.

Доказательство. Для произвольных точек $(x^{n_i}, y^{m_i}) \in \Pi_\lambda(x^n, y^m)$, $i = 1, 2$, таких, что их τ -ячейки не пересекает линия Γ , рассмотрим разность (величины $\bar{f}_{n,m}^\delta$ определены в (1.4))

$$\bar{f}_{n_1, m_1}^\delta - \bar{f}_{n_2, m_2}^\delta = (f_{n_1, m_1} - f_{n_2, m_2})/2 + \Delta \bar{f}_{n_1, m_1}^\delta - \Delta \bar{f}_{n_2, m_2}^\delta. \quad (2.2)$$

Покажем справедливость (1). Из условия $\rho((x^n, y^m); \Gamma) \geq \sqrt{2}\lambda$ следует, что линия Γ не пересекает квадрат $\Pi_\lambda(x^n, y^m)$, т. е. либо $(x^{n_i}, y^{m_i}) \in d_{\text{in}}$, либо $(x^{n_i}, y^{m_i}) \in d_{\text{out}}$, $i = 1, 2$. Из п. (1) леммы 2 следует, что

$$|f_{n_1, m_1} - f_{n_2, m_2}| \leq 2\sqrt{2}\lambda.$$

Пусть $|\Delta \bar{f}_{n_i, m_i}^\delta| < \Delta z/6$, $i = 1, 2$. Поскольку $\Delta z = \Delta^{\min}/3$, то $\lambda \leq \Delta^{\min}/(18\sqrt{2}) = \Delta z/(6\sqrt{2})$, и получаем оценку для модуля (2.2)

$$|\bar{f}_{n_1, m_1}^\delta - \bar{f}_{n_2, m_2}^\delta| < \sqrt{2}\lambda + \Delta z/3 \leq \Delta z/2.$$

Из этой оценки следует, что для всех точек $(x^{\bar{n}}, y^{\bar{m}}) \in \Pi_\lambda(x^n, y^m)$ таких, что $|\Delta \bar{f}_{\bar{n}, \bar{m}}^\delta| < \Delta z/6$, все значения $\bar{f}_{\bar{n}, \bar{m}}^\delta$ принадлежат одному кластеру. Учитывая, что $\Delta z = \Delta^{\min}/3$, количество точек $(x^{\bar{n}}, y^{\bar{m}})$ в квадрате $\Pi_\lambda(x^n, y^m)$, для которых $|\Delta \bar{f}_{\bar{n}, \bar{m}}^\delta| \geq \Delta z/6$ согласно лемме 1 не превышает

$$\Delta G_{n,m}^\delta(\Delta z/6) \leq \frac{6(2M+1)\delta}{2\Delta z\tau} = \frac{9(2M+1)\delta}{\Delta^{\min}\tau}. \quad (2.3)$$

Поскольку все количество точек сетки T в квадрате $\Pi_\lambda(x^n, y^m)$ равно $(2M+1)^2$, то количество точек в одном кластере не меньше $(2M+1)^2 - 9(2M+1)\delta/(\Delta^{\min}\tau)$, т. е.

$$\max \left\{ \max_{0 \leq r \leq R-1} G_r^\delta(x^n, y^m), \max_{0 \leq r \leq R-2} G_{r+1/2}^\delta(x^n, y^m) \right\} \geq (2M+1)^2 - \frac{9(2M+1)\delta}{\Delta^{\min}\tau}.$$

Значит, согласно (1.5)

$$H^\delta(x^n, y^m) \leq \frac{9(2M+1)\delta}{\Delta^{\min}\tau}.$$

Перейдем к доказательству п. (2). Пусть $(x, y) \in \Gamma^\lambda$. Тогда, ввиду определения 2 существует точка $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathfrak{D}$ такая, что $(x, y) \in \Pi_\lambda(\bar{x}, \bar{y})$ и линия Γ делит квадрат $\Pi_\lambda(\bar{x}, \bar{y})$ на две области (внутри и снаружи контура, ограниченного линией Γ) с одинаковой площадью. Пусть (x^n, y^m) — точка сетки T , ближайшая к $(\bar{x}, \bar{y})$: $\rho((x^n, y^m); (\bar{x}, \bar{y})) \leq \sqrt{2}\tau/2$. Квадрат $\Pi_\lambda(x^n, y^m)$ отличается от квадрата $\Pi_\lambda(\bar{x}, \bar{y})$ не более $2(2M+1)$ точками, которые назовем “новыми”. Заметим, что $\rho((x^n, y^m); (x, y)) \leq \sqrt{2}(\lambda + \tau/2)$. Рассмотрим произвольные точки $(x^{n_i}, y^{m_i}) \in \Pi_\lambda(x^n, y^m)$, $i = 1, 2$, которые лежат по разные стороны от Γ (одна внутри, а вторая снаружи), не являются “новыми” и Γ не пересекает соответствующие им τ -ячейки.

Если $|\Delta \bar{f}_{n_i, m_i}^\delta| < \Delta z/6$, $i = 1, 2$, то, используя оценку из п. (2) леммы 2 и учитывая, что $\lambda \leq \Delta z/(6\sqrt{2})$, для модуля (2.2) получаем оценку

$$|\bar{f}_{n_1, m_1}^\delta - \bar{f}_{n_2, m_2}^\delta| > \Delta^{\min}/2 - \sqrt{2}\lambda - \Delta z/3 > \Delta z. \quad (2.4)$$

Поскольку линия Γ делит квадрат $\Pi_\lambda(\bar{x}, \bar{y})$ пополам, то с одной стороны лежит половина, т. е. $(2M+1)^2/2$, точек $(x^{\bar{n}}, y^{\bar{m}})$ сетки T . В доказательстве п. (1) настоящей леммы показано, что

все величины $\bar{f}_{\tilde{n},\tilde{m}}^\delta$, соответствующие этим точкам, могут принадлежать одному кластеру. Поскольку нам ничего не известно про “новые” точки, то считаем, что и для квадрата $\Pi_\lambda(x^n, y^m)$ не менее $(2M+1)^2/2$ точек сетки T могут принадлежать одному кластеру. Рассмотрим точки $(x^{\tilde{n}}, y^{\tilde{m}}) \in \Pi_\lambda(x^n, y^m)$, которые лежат по другую сторону от Γ и Γ не пересекает соответствующие им τ -ячейки. Из (2.4) следует, что величины $\bar{f}_{\tilde{n},\tilde{m}}^\delta$, для которых $|\Delta \bar{f}_{\tilde{n},\tilde{m}}^\delta| < \Delta z/6$, не могут принадлежать тому же кластеру, что и величины $\bar{f}_{\tilde{n},\tilde{m}}^\delta$. Однако этому кластеру могут принадлежать величины $\bar{f}_{\tilde{n},\tilde{m}}^\delta$, для которых $|\Delta \bar{f}_{\tilde{n},\tilde{m}}^\delta| \geq \Delta z/6$. Согласно лемме 1 количество этих величин не превышает $9(2M+1)\delta/(\Delta^{\min}\tau)$ (см. (2.3)). Кроме того, нельзя исключать, что этому же кластеру принадлежат величины $\bar{f}_{\tilde{n},\tilde{m}}^\delta$, соответствующие точкам $(x^{\tilde{n}}, y^{\tilde{m}}) \in \Pi_\lambda(x^n, y^m)$, τ -ячейки которых пересекает линия Γ . По определению 3 количество таких точек в квадрате $\Pi_\lambda(x^n, y^m)$ не более $p_1\lambda/\tau = p_1(2M+1)/2$. В этот же кластер может добавиться не более $2(2M+1)$ величин, соответствующих “новым” точкам. Для получения оценки сверху для количества точек в одном кластере нужно сложить все эти величины. Таким образом,

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \max_{0 \leq r \leq R-1} G_r^\delta(x^n, y^m), \max_{0 \leq r \leq R-2} G_{r+1/2}^\delta(x^n, y^m) \right\} \\ & \leq \frac{(2M+1)^2}{2} + 2(2M+1) + \frac{p_1(2M+1)}{2} + \frac{9(2M+1)\delta}{\Delta^{\min}\tau}. \end{aligned}$$

Значит, с учетом (1.5)

$$H^\delta(x^n, y^m) \geq \frac{(2M+1)^2}{2} - (2M+1) \left(2 + \frac{p_1}{2} + \frac{9\delta}{\Delta^{\min}\tau} \right).$$

Лемма доказана.

3. Исследование алгоритма локализации линий разрыва

В настоящем разделе проводится согласование всех параметров, позволяющее получить регуляризующий алгоритм локализации, который определяет множество T^δ точек сетки, аппроксимирующих множество Γ . Обозначим через $N = N(T^\delta)$ количество точек множества T^δ . Договоримся, если $T^\delta = \emptyset$, считать $\rho((x^n, y^m); T^\delta) = \infty$ для любой точки (x^n, y^m) сетки T . Напомним, что константы $\Delta^{\min}, \bar{\varepsilon}, p, p_1$ являются параметрами класса $\mathfrak{M}$.

Выпишем исходные данные и параметры, необходимые для работы алгоритма:

- уровень погрешности δ , шаг сетки τ , нормированные величины $\bar{f}_{\tilde{n},\tilde{m}}^\delta = (f_{\tilde{n},\tilde{m}}^\delta + 1)/2$;
- количество точек разбиения отрезка $[0, 1]$ $R = 3/\Delta^{\min}$ (напомним, что уменьшив величину $\Delta^{\min}$, мы всегда можем сделать R целым числом, при этом класс корректности $\mathfrak{M}$ только увеличится), шаг разбиения $\Delta z = R^{-1}$;
- дискретный и непрерывный параметры регуляризации M и λ как функции от уровня погрешности исходных данных δ

$$M = M(\tau, \delta) = \left\lceil \frac{D\delta}{\tau} - \frac{1}{2} \right\rceil, \quad \lambda = \frac{2M+1}{2}\tau, \quad (3.1)$$

где $D = 20/\Delta^{\min}$, $[z] = [z] + 1$, $[z]$ — целая часть числа z ;

— порог $P = (2M+1)^2/4$.

Вычисление значения вспомогательной функции $H^\delta(x^n, y^m)$ оформим в виде отдельной процедуры (процедура сепарации), к которой будем обращаться в основном алгоритме. Внутри процедуры введем векторы $\{g_r\}$ и $\{g'_r\}$: $g_r = G_r^\delta(x^n, y^m)$, $0 \leq r \leq R-1$, — количество точек $(x^{\tilde{n}}, y^{\tilde{m}})$ сетки T из квадрата $\Pi_\lambda(x^n, y^m)$, для которых значения $\bar{f}_{\tilde{n},\tilde{m}}^\delta = (f_{\tilde{n},\tilde{m}}^\delta + 1)/2$ лежат в полуинтервале $[z_r, z_{r+1})$; $g'_r = G_{r+1/2}^\delta(x^n, y^m)$, $0 \leq r \leq R-2$, — количество точек $(x^{\tilde{n}}, y^{\tilde{m}})$ сетки T из квадрата $\Pi_\lambda(x^n, y^m)$, для которых значения $\bar{f}_{\tilde{n},\tilde{m}}^\delta$ лежат в полуинтервале $[z_{r+1/2}, z_{r+3/2})$.

Тогда согласно (1.5)

$$H^\delta(x^n, y^m) = (2M+1)^2 - \max \left\{ \max_{0 \leq r \leq R-1} g_r, \max_{0 \leq r \leq R-2} g'_r \right\}.$$

Процедура сепарации $H^\delta(x^n, y^m)$.

Положим $g_r := 0$ для $0 \leq r \leq R-1$, $g'_r := 0$ для $0 \leq r \leq R-2$.

Для точек $(x^{\bar{n}}, y^{\bar{m}}) \in \Pi_\lambda(x^n, y^m)$ положим $g_r := g_r + 1$, где $r = [\bar{f}_{\bar{n}, \bar{m}}^\delta / \Delta z]$.

Для точек $(x^{\bar{n}}, y^{\bar{m}}) \in \Pi_\lambda(x^n, y^m)$: $\Delta z/2 \leq \bar{f}_{\bar{n}, \bar{m}}^\delta \leq R - \Delta z/2$, положим

$$g'_r := g'_r + 1, \text{ где } r = [\bar{f}_{\bar{n}, \bar{m}}^\delta / \Delta z - 1/2].$$

Положим $H^\delta(x^n, y^m) = (2M+1)^2 - \max \left\{ \max_{0 \leq r \leq R-1} g_r, \max_{0 \leq r \leq R-2} g'_r \right\}$.

А л г о р и т м $\Pi(\delta, \tau, \bar{f}_{n,m}^\delta)$.

Подготовка к циклу. Положим $N = 0$; $T^\delta = \emptyset$.

Цикл перебора точек (x^n, y^m) *сетки* T . Если в процессе перебора не осталось не рассмотренных точек сетки T , то конец цикла.

Пусть (x^n, y^m) — текущая точка. Если $H^\delta(x^n, y^m) > P$ и $\rho((x^n, y^m); T^\delta) > 3\sqrt{2}\lambda$, то $N := N + 1$; $T^\delta := T^\delta \cup (x^n, y^m)$ и продолжаем цикл;

иначе — продолжаем цикл.

Заметим, что выше сформулирован целый класс алгоритмов. Чтобы получить конкретный метод, нужно зафиксировать правило перебора точек (при разном порядке перебора точек сетки T получаемые множества T^δ могут отличаться). Далее будем считать, что конкретное правило перебора выбрано и зафиксировано.

В алгоритме проводится прореживание $\rho((x^n, y^m); T^\delta) > 3\sqrt{2}\lambda$, которое гарантирует отсутствие сгущений и позволяет получить оценку количества точек аппроксимирующего множества T^δ .

Пусть U_1, U_2 — множества точек из $\mathbb{R}^2$. Введем меру близости множества U_1 к множеству U_2 :

$$\mu(U_1; U_2) = \sup_{u \in U_1} \inf_{v \in U_2} \|u - v\|.$$

Напомним, что $D = 20/\Delta^{\min}$. Для формулировки теоремы нам понадобятся константы

$$\delta_0 = \min \left\{ \frac{\Delta^{\min}}{36\sqrt{2}D}, \frac{|\Gamma|}{3Dp}, \frac{\bar{\varepsilon}}{2D} \right\}, \quad B_0 = \frac{2}{(p_1 + 4)\Delta^{\min}}.$$

Все константы, участвующие в теореме ниже, зависят только от параметров класса корректности $\mathfrak{M}(\Delta^{\min}, \bar{\varepsilon}, p, p_1)$. Напомним, что Γ^λ — это множество всех λ -регулярных точек линии Γ (см. определение 2).

Теорема 1. В условиях рассматриваемой задачи на классе $\mathfrak{M}(\Delta^{\min}, \bar{\varepsilon}, p, p_1)$ для всех $\delta \leq \delta_0$, $\tau \leq B_0\delta$ при связи параметров (3.1) алгоритм $\Pi(\delta, \tau, \bar{f}_{n,m}^\delta)$ построит множество точек $T^\delta \neq \emptyset$ такое, что:

- (1) $\mu(T^\delta; \Gamma) \leq 2\sqrt{2}D\delta$;
- (2) $\mu(\Gamma^\lambda; T^\delta) \leq 5\sqrt{2}D\delta$; $\mu(\Gamma; T^\delta) \leq (5\sqrt{2} + p)D\delta$;
- (3) для всех различных точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in T^\delta$ справедливо неравенство

$$\rho((x_1, y_1); (x_2, y_2)) > 3\sqrt{2}D\delta;$$

- (4) для количества точек $N(T^\delta)$, найденных алгоритмом, справедлива оценка

$$\frac{1}{18\pi p_1 D} \frac{|\Gamma|}{\delta} - \frac{p}{9\pi p_1} \leq N(T^\delta) \leq \frac{1}{\sqrt{2}D} \frac{|\Gamma|}{\delta}.$$

Доказательство. Заметим, что $D\delta \leq \lambda \leq D\delta + \tau < 2D\delta$. Условие $\delta \leq \delta_0$ гарантирует выполнение условий на λ в лемме 3.

Согласно п. (2) леммы 3, если $(x, y) \in \Gamma^\lambda$, то существует точка $(x^n, y^m): \rho((x^n, y^m); (x, y)) \leq \sqrt{2}(\lambda + \tau/2)$ и

$$H^\delta(x^n, y^m) \geq \frac{(2M+1)^2}{2} - (2M+1)\left(2 + \frac{p_1}{2} + \frac{9\delta}{\Delta_{\min\tau}}\right).$$

Учитывая, что $\lambda = (2M+1)\tau/2$ и $\tau \leq B_0\delta$, оценим сумму

$$\begin{aligned} (2M+1)\left(2 + \frac{p_1}{2} + \frac{9\delta}{\Delta_{\min\tau}}\right) &= \frac{(2M+1)^2\tau}{4\lambda} \left[4 + p_1 + \frac{18\delta}{\Delta_{\min\tau}}\right] \\ &= \frac{(2M+1)^2}{4\lambda} \left[(4+p_1)\tau + \frac{18\delta}{\Delta_{\min}}\right] \leq \frac{5(2M+1)^2\delta}{\lambda\Delta_{\min}}. \end{aligned}$$

Используя при оценке последней дроби соотношение $\lambda \geq D\delta$, где $D = 20/\Delta_{\min}$, получаем

$$(2M+1)\left(2 + \frac{p_1}{2} + \frac{9\delta}{\Delta_{\min\tau}}\right) \leq \frac{(2M+1)^2}{4}. \quad (3.2)$$

Следовательно,

$$H^\delta(x^n, y^m) \geq \frac{(2M+1)^2}{4} = P. \quad (3.3)$$

Согласно п. (1) леммы 3, если $\rho((x^n, y^m); \Gamma) \geq \sqrt{2}\lambda$, то

$$H^\delta(x^n, y^m) \leq \frac{9(2M+1)\delta}{\Delta_{\min\tau}}.$$

Используя оценку (3.2), получаем, что для точек $(x^n, y^m): \rho((x^n, y^m); \Gamma) \geq \sqrt{2}\lambda$,

$$H^\delta(x^n, y^m) < P. \quad (3.4)$$

Перейдем к доказательству пп. (1)–(4) настоящей теоремы.

Докажем оценку (1). Из (3.4) следует, что $\mu(T^\delta; \Gamma) \leq \sqrt{2}\lambda < 2\sqrt{2}D\delta$.

Докажем оценку (2). Пусть S — объединение кругов с центром в точках из множества T^δ радиусом $3\sqrt{2}\lambda$. Множество S может не покрыть все Γ^λ , поскольку при прореживании в алгоритме часть точек выбрасывается. Однако, из (3.3) следует, что $\mu(\Gamma^\lambda; S) \leq \sqrt{2}(\lambda + \tau/2)$. Следовательно, $\mu(\Gamma^\lambda; T^\delta) \leq 3\sqrt{2}\lambda + \sqrt{2}(\lambda + \tau/2) = 4\sqrt{2}\lambda + \sqrt{2}\tau/2$ и $\mu(\Gamma; T^\delta) \leq 4\sqrt{2}\lambda + \sqrt{2}\tau/2 + p\lambda$. Учитывая условия на параметры, получаем требуемые оценки.

Докажем оценку (3). Пусть $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in T^\delta$. Поскольку при построении множества T^δ алгоритмом П применяется прореживание, то

$$\rho((x_1, y_1); (x_2, y_2)) \geq 3\sqrt{2}\lambda \geq 3\sqrt{2}D\delta.$$

Докажем оценку (4). Согласно оценке (3.4) круг с центром в точке из множества T^δ радиусом $\sqrt{2}\lambda$ обязательно содержит точку из Γ . Пусть $(x^n, y^m) \in T^\delta$, тогда существует $(x, y) \in \Gamma$, для которой $\rho((x^n, y^m); (x, y)) \leq \sqrt{2}\lambda$. Аналогично для $(x^{\bar{n}}, y^{\bar{m}}) \in T^\delta$ существует $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Gamma$ такая, что $\rho((x^{\bar{n}}, y^{\bar{m}}); (\bar{x}, \bar{y})) \leq \sqrt{2}\lambda$. Значит, $\rho((x, y); (\bar{x}, \bar{y})) \geq \rho((x^{\bar{n}}, y^{\bar{m}}); (x^n, y^m)) - 2\sqrt{2}\lambda$. Используя для первого слагаемого оценку из доказательства п. (3) настоящей теоремы, имеем $\rho((x, y); (\bar{x}, \bar{y})) \geq \sqrt{2}\lambda$. Следовательно, справедлива оценка сверху

$$N(T^\delta) \leq \frac{|\Gamma|}{\sqrt{2}\lambda} \leq \frac{|\Gamma|}{\sqrt{2}D\delta}.$$

Получим для $N(T^\delta)$ оценку снизу. В доказательстве оценки (2) настоящей теоремы показано, что S покрывает не все Γ^λ . Все Γ^λ покрывается кругами радиуса $4\sqrt{2}\lambda + \sqrt{2}\tau/2$ с центром

в точках из множества T^δ . Так как $\tau < \lambda/4$, то в каждом таком круге помещается не более $(4\sqrt{2}\lambda + \sqrt{2}\tau/2)^2\pi/(4\lambda^2) < 9\pi$ квадратов со стороной 2λ , а в каждом квадрате по определению 3 — не более чем $p_1\lambda$ длины линии Γ^λ . Таким образом, количество таких кругов на Γ^λ , а значит, и точек в T^δ , должно быть не меньше

$$\frac{\Gamma^\lambda}{9\pi p_1\lambda} \geq \frac{|\Gamma| - p\lambda}{9\pi p_1\lambda} > \frac{|\Gamma|}{18\pi p_1 D\delta} - \frac{p}{9\pi p_1}.$$

Поскольку $\delta \leq |\Gamma|/(3Dp)$, то эта разность строго больше нуля.

Теорема доказана.

Заключение

В настоящей работе для некорректно поставленной задачи локализации линий разрыва зашумленной функции конструируются методы на основе сепарации исходных данных. Получены оценки точности локализации и других важных характеристик метода. Показано, что применение данного алгоритма позволяет ослабить условия на линию разрыва по сравнению с методами на основе усреднения, что позволяет улучшить оценки точности аппроксимации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
2. Vasin V.V., Ageev A.L. Ill-posed problems with a priori information. Utrecht: VSP, 1995. 255 с.
3. Canny J. A computational approach to edge detection // IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intel. 1986. Vol. PAMI-8, no. 6. P. 679–698. <https://doi.org/10.1109/TPAMI.1986.4767851>
4. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. Изд. 3-е исправ. и доп.). М.: Техносфера, 2012. 1104 с.
5. Gao B., Li X., Woo W.L., Tian G.Y. Physics-based image segmentation using first order statistical properties and genetic algorithm for inductive termography imaging // IEEE Trans. Image Process. 2018. Vol. 27, no. 5. P. 2160–2175. <https://doi.org/10.1109/TIP.2017.2783627>
6. Xiao X., Zhou Y. Content-adaptive superpixel segmentation // IEEE Trans. Image Process. 2018. Vol. 27, no. 6. P. 2883–2896. <https://doi.org/10.1109/TIP.2018.2806201>
7. Saha M., Chakraborty C. Her2Net: a deep framework for semantic segmentation and classification of cell membranes and nuclei in breast cancer evaluation // IEEE Trans. Image Process. 2018. Vol. 27, no. 5. P. 2189–2200. <https://doi.org/10.1109/TIP.2018.2795742>
8. Агеев А.Л., Антонова Т.В. Новые оценки точности методов локализации линий разрыва зашумленной функции // Сиб. журнал вычисл. математики. 2020. Т. 23, № 4. С. 351–364. <https://doi.org/10.15372/SJNM20200401>
9. Luo S., Tong L., Chen Y. A multi-region segmentation method for SAR images based on the multi-texture model with level sets // IEEE Trans. Image Process. 2018. Vol. 27, no. 5. P. 2560–2574. <https://doi.org/10.1109/TIP.2018.2806201>
10. Агеев А.Л., Антонова Т.В. О локализации фрактальных линий разрыва по зашумленным данным // Изв. вузов. 2023. Т. 25, № 9. С. 27–44. <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2023-9-27-44>

Поступила 17.03.2025

После доработки 3.05.2025

Принята к публикации 12.05.2025

Опубликована онлайн 19.06.2025

Агеев Александр Леонидович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: ageev@imm.uran.ru

Антонова Татьяна Владимировна

д-р физ.-мат. наук

ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: tvantonova@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Methods for solutions of ill-posed problems*. Transl. from the 2nd Russian ed., NY, Wiley, 1977, 258 p. ISBN: 0470991240. Original Russian text published in Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach*, Moscow, Nauka Publ., 1979, 285 p.
2. Vasin V.V., Ageev A.L. *Ill-posed problems with a priori information*, Utrecht, VSP, 1995, 255 c. ISBN: 906764191X. Original Russian text was published in Vasin V. V., Ageev A. L. *Nekorrektnye zadachi s apriornoi informatsiei*, Yekaterinburg, Ural Publ. House "Nauka", 1993, 264 p. ISBN: 5-7691-0390-6.
3. Canny J. A computational approach to edge detection. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intel.*, 1986, vol. PAMI-8, no. 6, pp. 679–698. <https://doi.org/10.1109/TPAMI.1986.4767851>
4. Gonzalez R.C., Woods R.E. *Digital image processing* (3rd Edt.), Pearson, 2006, 976 p. ISBN: 013168728X. Translated to Russian under the title *Tsifrovaya obrabotka izobrazhenii*, Moscow, Tekhnosfera Publ., 2012, 1104 p. ISBN 978-5-94836-331-8.
5. Gao B., Li X., Woo W.L., Tian G.Y. Physics-based image segmentation using first order statistical properties and genetic algorithm for inductive termography imaging. *IEEE Trans. Image Process*, 2018, vol. 27, no. 5, pp. 2160–2175. <https://doi.org/10.1109/TIP.2017.2783627>
6. Xiao X., Zhou Y. Content-adaptive superpixel segmentation. *IEEE Trans. Image Process*, 2018, vol. 27, no. 6, pp. 2883–2896. <https://doi.org/10.1109/TIP.2018.2806201>
7. Saha M., Chakraborty C. Her2Net: a deep framework for semantic segmentation and classification of cell membranes and nuclei in breast cancer evaluation. *IEEE Trans. Image Process*, 2018, vol. 27, no. 5, pp. 2189–2200. <https://doi.org/10.1109/TIP.2018.2795742>
8. Ageev A.L., Antonova T.V. New accuracy estimates for methods for localizing discontinuity lines of a noisy function. *Numer. Analys. Appl.*, 2020, vol. 13, no. 4, pp. 293–305. <https://doi.org/10.1134/S1995423920040011>
9. Luo S., Tong L., Chen Y. A multi-region segmentation method for SAR images based on the multi-texture model with level sets. *IEEE Trans. Image Process*, 2018, vol. 27, no. 5, pp. 2560–2574. <https://doi.org/10.1109/TIP.2018.2806201>
10. Ageev A.L., Antonova T.V. On the localization of fractal lines of discontinuity from noisy data. *Russ. Math.*, 2023, vol. 67, no. 9, pp. 23–38. <https://doi.org/0.3103/S1066369X23090037>

Received March 17, 2025

Revised May 3, 2025

Accepted May 12, 2025

Published online June 19, 2025

Alexander Leonidovich Ageev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: ageev@imm.uran.ru .

Tatiana Vladimirovna Antonova, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: tvantonova@imm.uran.ru .

Cite this article as: A. L. Ageev, T. V. Antonova. Study of separation-based methods for localization of discontinuity lines. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025.

<https://doi.org/10.21538/0134-4889-2025-31-3-fon-03>