ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Online First 2025

УДК 517.518+517.983

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА В РАВНОМЕРНОЙ НОРМЕ НА ОСИ НА КЛАССЕ ФУНКЦИЙ С СУММИРУЕМЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ФУРЬЕ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ[1]

В. В. Арестов

Дано решение задачи Стечкина о наилучшем приближении в равномерной норме на числовой оси операторов дифференцирования дробного (а точнее, вещественного) порядка k линейными ограниченными операторами из пространства L^2 в пространство C на классе функций $\mathcal{Q}^n$, преобразование Фурье дробной производной порядка n, $0 \le k < n$, которых суммируемо. Приведено соответствующее точное неравенство Колмогорова. Получено решение задачи об оптимальном восстановлении оператора дифференцирования дробного порядка k на функциях класса $\mathcal{Q}^n$, заданных с известной погрешностью в пространстве L^2.

Ключевые слова: оператор дробного дифференцирования, задача Стечкина, неравенство Колмогорова, оптимальное дифференцирование.

V. V. Arestov. Best approximation of a fractional-order differentiation operator in the uniform norm on the axis on the class of functions with integrable Fourier transform of the highest derivative.

A solution is given to Stechkin's problem on the best approximation in the uniform norm on the real axis of differentiation operators of fractional (more precisely, real) order k by bounded linear operators from the space L^2 to the space C on the class of functions $\mathcal{Q}^n$ whose Fourier transform of the nth-order fractional derivative, $0 \le k < n$, is integrable. The corresponding exact Kolmogorov inequality is given. A solution is obtained to the problem of optimal recovery of the differentiation operator of fractional order k on functions of the class $\mathcal{Q}^n$ defined with a known error in the space L^2.

Keywords: fractional-order differentiation operator, Stechkin's problem, Kolmogorov inequality, optimal differentiation.

MSC: 47B38, 54C35, 47A58, 26D10

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-3-fon-01

1. Введение

1.1. Обозначения и предварительные сведения

В данной статье исследуется вариант задачи Стечкина о наилучшем приближении оператора дифференцирования линейными ограниченными операторами на классе гладких функций. Задача приближения линейного неограниченного оператора линейными ограниченными операторами на классе элементов возникла в исследованиях С. Б. Стечкина [1]. В настоящее время существует большое число результатов о приближении оператора дифференцирования порядка k на классе n раз $(0 \le k < n)$ дифференцируемых функций в пространствах Лебега на оси и полуоси. Такие задачи изучали С. Б. Стечкин, Л. В. Тайков, Ю. Н. Субботин, В. Н. Габушин, В. И. Бердышев; В. М. Тихомиров, А. П. Буслаев, Г. Г. Магарил-Ильяев, В. Ф. Бабенко, Ю. В. Бабенко, О. В. Коваленко, Н. В. Парфинович, В. В. Арестов, Р. Р. Акопян, В. Г. Тимофеев, М. А. Филатова, Е. Е. Бердышева и многие другие (см., в частности, работы [2–7], монографию [8] и библиографию в них). С. Б. Стечкин заметил, что задача приближения оператора дифференцирования в пространствах Лебега на оси и полуоси

[1]Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 25-21-00118.

связана с задачей о точных неравенствах Колмогорова между нормами промежуточных производных функций. Такие неравенства изучали Г. Харди, Дж. Литтльвуд, Е. Ландау, Ж. Адамар, B. Szőkefalvi-Nagy, А. Н. Колмогоров, С. Б. Стечкин, I. J. Schoenberg, A. Cavaretta, Л. В. Тайков, В. Н. Габушин, В. И. Бердышев, Н. П. Купцов, В. М. Тихомиров, А. П. Буслаев, Г. Г. Магарил-Ильяев, В. Ф. Бабенко, А. А. Лигун, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов и др. (см. [2; 3; 5; 8; 9] и библиографию в них). Связь этих двух задач оказалась результативным методом исследования обеих; данный метод будет применен и в настоящей работе. Результаты, полученные при решении двух задачах, находят применение в исследовании задачи оптимального восстановления операторов дифференцирования на функциях, заданных с ошибкой (численном дифференцировании приближенно заданных функций); указанной задаче в настоящее время посвящены обширные исследования, см. [3; 10–12] и библиографию в них. Вариант задачи восстановления будет обсуждаться ниже в данной работе.

В статье используются стандартные обозначения пространств комплекснозначных функций на числовой оси: $L^\gamma = L^\gamma(-\infty,\infty)$ для вещественного γ, $1 \le \gamma < \infty$, есть пространство Лебега измеримых функций f, у которых γ-степень модуля $|f|^\gamma$ суммируема на оси. Пространство L^γ наделено нормой

$$\|f\|_\gamma = \|f\|_{L^\gamma} = \left(\int |f(t)|^\gamma dt\right)^{1/\gamma}$$

(здесь и ниже в интегралах по оси множество интегрирования не указано); $L^\infty = L^\infty(-\infty,\infty)$ — пространство измеримых, существенно ограниченных функций на оси, наделенное нормой $\|f\|_\infty = \|f\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}\{|f(t)|\colon t \in (-\infty,\infty)\}$; $C = C(-\infty,\infty)$ — пространство непрерывных, ограниченных функций на оси, наделенное равномерной нормой $\|f\|_C = \sup\{|f(t)|\colon t \in (-\infty,\infty)\}$; $C_0 = C_0(-\infty,\infty)$ — подпространство пространства C функций, имеющих нулевой предел на $\pm\infty$.

Перечисленные функциональные пространства и их нормы инвариантны относительно группы сдвигов $\{\tau_h,\ h \in \mathbb{R}\}$, определенных формулой $(\tau_h f)(t) = f(t-h)$, $t \in \mathbb{R}$. Наряду с $\{\tau_h,\ h \in \mathbb{R}\}$ определим родственное семейство операторов $\{\sigma_h,\ h \in \mathbb{R}\}$, заданных формулой $(\sigma_h f)(t) = f(h-t)$, $t \in \mathbb{R}$. Операторы этих двух семейств связаны следующим образом: $\sigma_h = \tau_h\sigma_0$, где σ_0 – оператор изменения знака аргумента функции: $(\sigma_0 f)(t) = f(-t)$, $t \in \mathbb{R}$.

В дальнейшем для пары функций f, g с суммируемым произведением fg, в частности для пары функций $f \in L^\gamma$, $g \in L^{\gamma'}$, $1 \le \gamma \le \infty$, $1/\gamma + 1/\gamma' = 1$, будет использоваться обозначение

$$\langle f, g\rangle = \int f(t)g(t)\,dt.$$

Пусть далее $\mathscr{S}$ — пространство быстро убывающих, бесконечно дифференцируемых функций на оси со стандартной топологией, а $\mathscr{S}'$ — соответствующее двойственное пространство обобщенных функций (см., например, [13; 14]). Значение функционала $\theta \in \mathscr{S}'$ на функции $\phi \in \mathscr{S}$ будем обозначать как $\langle\theta,\phi\rangle$. Пространство $\mathscr{S}'$ содержит множество $\mathscr{L} = \mathscr{L}(\mathbb{R})$ функций f, измеримых, локально суммируемых на $\mathbb{R}$ и удовлетворяющих условию $\int (1 + |t|)^d |f(t)| dt < \infty$ с некоторым показателем $d = d(f) \in \mathbb{R}$; функции $f \in \mathscr{L}$ называют медленно растущими (классическими) функциями. Функции $f \in \mathscr{L}$ сопоставляется функционал $f \in \mathscr{S}'$ по формуле

$$\langle f, \phi\rangle = \int f(t)\phi(t)\,dt, \quad \phi \in \mathscr{S}.$$

Сверткой $\theta * \phi$ элемента $\theta \in \mathscr{S}'$ и функции $\phi \in \mathscr{S}$ называют функцию $y(\eta) = \langle\theta, \sigma_\eta\phi\rangle$. Если $\theta \in \mathscr{L}$ — классическая функция, то

$$(\theta * \phi)(\eta) = \int \theta(t)\phi(\eta - t)\,dt. \tag{1.1}$$

Прямое и обратное преобразования Фурье функций определены соответственно формулами

$$\widehat{f}\,(t) = \int e^{-2\pi t\eta i} f(\eta)\,d\eta, \quad \check{g}(t) = \int e^{2\pi t\eta i} g(\eta)\,d\eta = \widehat{g}\,(-t). \tag{1.2}$$

В этих формулах интегралы в классическом смысле существуют лишь для суммируемых функций f, g. Оператор (преобразования) Фурье, определенный первой формулой (1.2), является естественным и особенно полезным в пространстве L^2 (его определение и свойства можно найти, к примеру, в [13, гл. 1, разд. 1 и разд. 2]). В пространстве L^2 для преобразования Фурье выполняется равенство Парсеваля

$$\|\widehat{f}\,\|_2 = \|f\|_2, \quad f \in L^2. \tag{1.3}$$

Для удобства дальнейших ссылок отметим еще равенство

$$\langle f, \widehat{g}\,\rangle = \langle \widehat{f}, g\rangle, \quad f, g \in L^2, \tag{1.4}$$

по сути, эквивалентное равенству Парсеваля (1.3).

Преобразование Фурье (обобщенной функции) функционала $\theta \in \mathscr{S}'$ есть функционал $\widehat{\theta} \in \mathscr{S}'$, действующий по формуле

$$\langle \widehat{\theta}, \phi\rangle = \langle \theta, \widehat{\phi}\,\rangle, \quad \phi \in \mathscr{S}, \tag{1.5}$$

(ср. с (1.4)). Пусть, в частности, $g \in L(-\infty, \infty)$ и (в классическом смысле) $f = \widehat{g}$; в этом случае $f \in C_0$. Построение функции g по функции f, т. е. обращение преобразования Фурье $g = \check{f}$ в данной ситуации строится с помощью методов суммирования (см., к примеру, в [13, гл. 1, разд. 1]). Однако можно использовать подход (1.5) теории обобщенных функций. В самом деле, согласно (1.5) имеем $\langle \check{f}, \phi\rangle = \langle f, \check{\phi}\rangle = \langle \widehat{g}, \check{\phi}\rangle$. Применив вновь (1.5), находим $\langle \widehat{g}, \check{\phi}\rangle = \langle g, \widehat{\check{\phi}}\,\rangle = \langle g, \phi\rangle$. В результате получаем $\langle \check{f}, \phi\rangle = \langle g, \phi\rangle$, $\phi \in \mathscr{S}$, так что $\check{f} = g$.

1.2. Постановка задач и формулировка результатов

При вещественном положительном n обозначим через $\mathcal{W}^n$ пространство функций $f \in L^2$, производная $D^n f$ вещественного (иногда говорят дробного) порядка n которых принадлежит пространству C_0: $D^n f \in C_0$ и, более того, преобразование Фурье этой производной суммируемо: $\widehat{D^n f} \in L$. Для того чтобы строго описать пространство $\mathcal{W}^n$, дадим некоторые определения.

В комплексной плоскости $\mathbb{C}(\theta_0) = \mathbb{C} \setminus \ell(\theta_0)$ с разрезом вдоль луча

$$\ell(\theta_0) = \{re^{i\theta_0} \colon 0 \le r < \infty\}, \quad -\pi < \theta_0 < -\pi/2,$$

определим для вещественного $\rho > 0$ функцию

$$z^\rho = \exp(\rho \ln_0 z) = |z|^\rho \exp(i\rho \arg z), \quad z \in \mathbb{C}(\theta_0), \quad \theta_0 < \arg z < \theta_0 + 2\pi,$$

где $\ln_0$ есть однозначная аналитическая ветвь логарифма $\ln_0 z = \ln|z| + i \arg z$, $z \in \mathbb{C}(\theta_0)$, $\theta_0 < \arg z < \theta_0 + 2\pi$; в области $\mathbb{C}(\theta_0)$ функция z^ρ аналитическая. Легко проверить следующие два свойства функции z^ρ:

(1) $z^\rho \to 0$ при $z \to 0$, $z \in \mathbb{C}(\theta_0)$; в связи с этим будем считать, что $0^\rho = 0$;

(2) для $\rho_1, \rho_2 > 0$ имеет место равенство

$$z^{\rho_1} z^{\rho_2} = z^{\rho_1+\rho_2}, \quad z \in \mathbb{C}(\theta_0). \tag{1.6}$$

Для вещественного (необязательно целого) $n > 0$ определим производную $D^n\phi$ порядка n основных функций $\phi \in \mathscr{S}$ формулой

$$D^n\phi(t) = \int (-2\pi\eta i)^n e^{2\pi t\eta i} \widehat{\phi}\,(\eta)\,d\eta, \quad \phi \in \mathscr{S}. \tag{1.7}$$

Функция $D^n\phi$ бесконечно дифференцируема, ограничена и принадлежит пространству L^2 на оси, а значит, и всем L^p, $2 \le p \le \infty$, однако, вообще говоря, она может не принадлежать пространству $\mathscr{S}$. Если для пары функций $f \in L^p$, $1 \le p \le 2$, и $g \in \mathscr{L}$ выполняется свойство

$$\langle g, \phi\rangle = \langle f, D^n\phi\rangle, \quad \phi \in \mathscr{S}, \tag{1.8}$$

то будем считать функцию g производной (дробного или вещественного) порядка n функции f и применять для нее обозначение $g = D^n f$. Если для функции f найдется функция $g \in \mathscr{L}$ со свойством (1.8), то будем говорить, что у функции f существует производная порядка n; соотношением (1.8) производная $D^n f$ по функции f определена однозначно (если, конечно, она существует). При $n = 0$ стандартно считаем $D^0 f = f$. Для натурального n свойство (1.8) пары функций $f, g \in \mathscr{L}$ влечет, что $g = (-1)^n f^{(n)}$; здесь $f^{(n)}$ есть классическая производная порядка n функции f, а точнее, функция f на оси $n-1$ раз непрерывно дифференцируема, ее производная $f^{(n-1)}$ порядка $n-1$ локально абсолютно непрерывна и ее производная (т. е. производная $f^{(n)}$ порядка n функции f) почти всюду на оси равна функции $(-1)^n g$. Если же функция g непрерывная, то функция f является n раз непрерывно дифференцируемой (см., например, разд. 5 гл. 1 в [14]).

Обозначим через $W^n_{2,\infty}$, $n \ge 0$, пространство функций $f \in L^2$, у которых производная $D^n f$ порядка n существует и является существенно ограниченной функцией: $D^n f \in L^\infty$.

При вещественном $n \ge 0$ обозначим через $\mathcal{W}^n$ пространство функций $f \in W^n_{2,\infty}$, преобразование Фурье $\widehat{D^n f}$ производной $D^n f$ порядка n которых суммируемо: $\widehat{D^n f} \in L$. Здесь преобразование Фурье $y_n = \widehat{D^n f}$ функции $D^n f \in L^\infty$ понимается в пространстве $\mathscr{S}'$ и определяется соотношением (1.5):

$$\langle y_n, \phi\rangle = \langle D^n f, \widehat{\phi}\rangle, \quad \phi \in \mathscr{S}.$$

В этой ситуации $D^n f$ есть классическое обратное преобразование Фурье функции y_n: $D^n f = \widetilde{y_n}$, $y_n \in L$; это, в частности, влечет, что $D^n f \in C_0$. Итак, можно сказать, что пространство $\mathcal{W}^n$ образовано функциями $f \in L^2$, производная $D^n f$ порядка n которых есть функция пространства C_0 и, более того, является (классическим обратным) преобразованием Фурье суммируемой функции.

Ниже, в подразд. 2.1, будут приведены некоторые свойства пространства $\mathcal{W}^n$, в частности будет доказано, что при любых $0 \le k < n$ имеет место вложение $\mathcal{W}^n \subset \mathcal{W}^k$. Последний факт позволяет рассматривать модуль непрерывности

$$\omega(\delta) = \sup\{\|D^k f\|_C \colon f \in \mathcal{Q}^n, \ \|f\|_{L^2} \le \delta\}, \quad \delta \ge 0, \tag{1.9}$$

оператора дифференцирования D^k порядка k, $0 \le k < n$, в равномерной норме на оси на классе

$$\mathcal{Q}^n = \{f \in \mathcal{W}^n \colon \|\widehat{D^n f}\|_1 \le 1\}.$$

Для модуля непрерывности (1.9) имеет место формула

$$\omega(\delta) = \omega(1)\delta^\alpha, \quad \alpha = \frac{n-k}{n+1/2}, \quad \delta > 0; \tag{1.10}$$

эта формула будет доказана в лемме 2.

Формула (1.10) влечет, что для функций пространства $\mathcal{W}^n$ справедливо неравенство колмогоровского типа

$$\|D^k f\|_C \le K \|f\|_2^\alpha \|\widehat{D^n f}\|_1^\beta, \quad f \in \mathcal{W}^n, \tag{1.11}$$

$$\alpha = \frac{2(n-k)}{2n+1}, \quad \beta = 1 - \alpha = \frac{2k+1}{2n+1}, \tag{1.12}$$

с наилучшей (наименьшей возможной) константой $K = \omega(1)$.

Обозначим через $\mathfrak{B}(L^2, C)$ множество всех линейных ограниченных операторов из L^2 в C и через $\mathfrak{B}(N; L^2, C)$, $N > 0$, — множество операторов $T \in \mathfrak{B}(L^2, C)$ с нормой $\|T\|_{L^2 \to C} \le N$. Для оператора $T \in \mathfrak{B}(L^2, C)$ величина

$$U(T) = \sup\{\|D^k f - Tf\|_{C(\mathbb{R})} \colon f \in \mathcal{Q}^n\}$$

есть уклонение в пространстве C оператора T от оператора дифференцирования D^k на классе $\mathcal{Q}^n$. Тогда при $N > 0$ величина

$$E(N) = E(N; n, k) = \inf\{U(T) \colon T \in \mathfrak{B}(N; L^2, C)\} \tag{1.13}$$

есть наилучшее приближение (в пространстве C) оператора дифференцирования D^k на классе $\mathcal{Q}^n$ множеством (линейных ограниченных операторов $\mathfrak{B}(N; L^2, C)$. Задача состоит в исследовании величины (1.13) и экстремального оператора, на котором в (1.13) достигается нижняя грань; это конкретный вариант задачи Стечкина о приближении неограниченного линейного оператора линейными ограниченными [1].

Основными в данной работе являются следующие два утверждения. В их формулировке используется функция

$$\theta_h(t) = (2\pi t i)^k \max\left\{0, \left(1 - (2\pi h)^{n-k}|t|^{n-k}\right)\right\}, \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{1.14}$$

зависящая от параметра $h > 0$. Заготовим на будущее оператор типа свертки (1.1), ядро которого есть преобразование Фурье $\widehat{\theta_h}$ функции θ_h:

$$(T_h f)(x) = (f \star \widehat{\theta_h})(x) = \int f(x+t)\widehat{\theta_h}(t)\,dt, \quad f \in L^2. \tag{1.15}$$

Теорема 1. *Для задачи* (1.13) *при* $0 \le k < n$ *и*

$$N = N(h) = \left(\frac{2}{\pi h^{2k+1}}\right)^{1/2} \frac{(n-k)}{\left\{(2k+1)(2n+1)(n+k+1)\right\}^{1/2}}, \quad h > 0, \tag{1.16}$$

справедливы следующие утверждения:

(1) *имеет место равенство*

$$E(N(h)) = h^{n-k}; \tag{1.17}$$

(2) *оператор свертки* T_h*, определенный формулой* (1.15)*, является экстремальным в задаче* (1.13).

Теорема 2. *На множестве* $\mathcal{W}^n$ *выполняется неравенство* (1.11)*. В этом неравенстве наилучшая константа* $K = K(n,k)$ *имеет значение*

$$K = \left(\frac{1}{2\pi(n+k+1)}\right)^{(n-k)/(2n+1)} \left(\frac{2n+1}{2k+1}\right)^{(n+k+1)/(2n+1)}, \tag{1.18}$$

и функция $f_h = \overline{\widehat{\theta_h}}$, $h > 0$, *определенная с помощью функции* (1.14)*, является экстремальной.*

Эти две теоремы будут доказаны ниже в подразд. 3.1 одновременно.

Результаты теорем 1 и 2 позволяют получить решение задачи об оптимальном восстановлении оператора D^k дифференцирования дробного порядка k на функциях класса $\mathcal{Q}^n$ при $0 \le k < n$, заданных с известной погрешностью в пространстве L^2.

Опишем задачу точно. Пусть $\mathcal{O}$ — множество всех однозначных отображений пространства L^2 в пространство C; отображения этого множества будем называть здесь методами восстановления. Для метода $T \in \mathcal{O}$ величина

$$u(\delta, T) = \sup_{f \in \mathcal{Q}^n} \sup_{\|\varphi - f\|_{L^2} \le \delta,\ \varphi \in L^2} \|D^k f - T\varphi\|_C \tag{1.19}$$

есть погрешность восстановления оператора D^k на функциях класса $\mathcal{Q}^n$, заданных с известной погрешностью δ в пространстве L^2. Тогда величина

$$\nu(\delta) = \inf\{u(\delta, T) \colon T \in \mathcal{O}\} \tag{1.20}$$

— наименьшая (оптимальная) погрешность восстановления, а метод T^*, на котором в (1.20) достигается нижняя грань, называют оптимальным методом восстановления.

Задачи восстановления неограниченных операторов на элементах класса (класса корректности), известных с погрешностью, возникают и изучаются в теории некорректных задач, теории приближения и других разделах математики и ее приложениях (см., в частности, [3; 11; 12] и библиографию в них). Обширные исследования посвящены задаче оптимального восстановления операторов дифференцирования на функциях, заданных с ошибкой (численному дифференцированию приближенно заданных функций), к которой относится и задача (1.20) (см. [3; 10–12] и библиографию в них).

Как частный случай более общих результатов известно (см., к примеру, [3; 10]), что величина (1.20), модуль непрерывности (1.9) и значение (1.13) задачи Стечкина связаны неравенствами

$$\omega(\delta) \le \nu(\delta) \le \ell(\delta), \quad \ell(\delta) = \inf\{E(N) + N\delta \colon N > 0\}. \tag{1.21}$$

В следующем утверждении содержится уточнение этого результата.

Теорема 3. *При любых $0 \le k < n$ и $\delta > 0$ справедливы следующие два утверждения.*

(1) *Оба неравенства (1.21) обращаются в равенство, в частности*

$$\nu(\delta) = K\delta^{\alpha}, \quad \alpha = \frac{2(n-k)}{2n+1};$$

константа K определена формулой (1.18).

(2) *Оператор свертки T_{h^*}, определенный формулой (1.15), при*

$$h^* = \delta^{2/(2n+1)} \left(\frac{2k+1}{2\pi(2n+1)(n+k+1)} \right)^{1/(2n+1)}$$

является оптимальным методом восстановления в задаче (1.20).

Согласно теореме 3 в задаче (1.20) линейный метод T_{h^*} оказался оптимальным. Известно (см., к примеру, [10]), что в задаче (1.20) существует и нелинейный метод.

Доказательство теоремы 3 будет приведено в подразд. 3.2.

2. Вспомогательные утверждения

2.1. Пространство $\mathcal{W}^n$

В следующем утверждении обсуждаются свойства функций пространства $\mathcal{W}^n$. Это утверждение является аналогом леммы 2 из [7].

Лемма 1. *При любом вещественном $n \ge 0$ пространство $\mathcal{W}^n$ состоит из функций $f \in L^2$, обладающих свойством*

$$y_n(\eta) = (2\pi\eta i)^n \widehat{f}(\eta) \in L(-\infty, \infty); \tag{2.1}$$

при этом

$$D^n f(t) = \widecheck{y_n}(t) = \int e^{2\pi t\eta i} (2\pi\eta i)^n \widehat{f}(\eta)\, d\eta. \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть $f \in \mathcal{W}^n$; это означает, что $f \in L^2$, производная $D^n f$ существует и $y_n = \widehat{D^n f} \in L$. Предстоит доказать, что для функции y_n справедливо представление (2.1), а следовательно и соотношение (2.2).

Согласно определению (1.8)

$$\langle D^n f, \phi \rangle = \langle f, D^n \phi \rangle, \quad \phi \in \mathscr{S}. \tag{2.3}$$

Функция $f \in L^2$ восстанавливается по ее преобразованию Фурье формулой обратного преобразования: $f = \widecheck{\upsilon}$, $\upsilon = \widehat{f}$. Подставив это представление и равенство $D^n f = \widecheck{y_n}$ в (2.3), получаем

$$\langle \widecheck{y_n}, \phi \rangle = \langle \widecheck{\upsilon}, D^n \phi \rangle, \quad \phi \in \mathscr{S}. \tag{2.4}$$

Для пары функций $u, v \in L^2$ выполняется равенство $\langle \widecheck{u}, v \rangle = \langle u, \widecheck{v} \rangle$, эквивалентное равенству Парсеваля (1.3) и равенству (1.4). Применив это равенство в левой и правой частях (2.4), приходим к соотношению

$$\langle y_n, \widecheck{\phi} \rangle = \langle \widehat{f}, \widecheck{D^n \phi} \rangle, \quad \phi \in \mathscr{S}. \tag{2.5}$$

Для $\phi \in \mathscr{S}$ положим $\psi = \widecheck{\phi}$; это отображение есть биекция пространства $\mathscr{S}$ на себя. Имеем $\phi = \widehat{\psi}$. Выразим теперь $\widecheck{D^n \phi}$ через ψ. Формула (1.7) влечет, что $\widehat{D^n \phi}(\eta) = (-2\pi\eta i)^n \widehat{\phi}(\eta)$, $\eta \in \mathbb{R}$; равенство здесь понимается в пространстве L^2. Отсюда

$$\widecheck{D^n \phi}(\eta) = \widehat{D^n \phi}(-\eta) = (2\pi\eta i)^n \widehat{\phi}(-\eta) = (2\pi\eta i)^n \widecheck{\phi}(\eta) = (2\pi\eta i)^n \psi(\eta), \quad \eta \in \mathbb{R},$$

и окончательно имеем

$$\widecheck{D^n \phi}(\eta) = (2\pi\eta i)^n \psi(\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Подставив теперь представление ϕ через ψ в (2.5), получаем равенство

$$\int y_n(\eta) \psi(\eta)\, d\eta = \int \widehat{f}(\eta) (2\pi\eta i)^n \psi(\eta)\, d\eta$$

или

$$\int \Big(y_n(\eta) - (2\pi\eta i)^n \widehat{f}(\eta) \Big) \psi(\eta)\, d\eta = 0, \quad \psi \in \mathscr{S}.$$

Последнее соотношение влечет, что

$$y_n(\eta) - (2\pi\eta i)^n \widehat{f}(\eta) = 0, \quad \text{п. в. на оси.}$$

Необходимость свойства (2.1) доказана.

Достаточность. Предположим, что $f \in L^2$ и для функции f выполняется свойство (2.1). Убедимся, что тогда производная $D^n f$ существует и, более того, $D^n f = \widecheck{y_n}$, а значит $f \in \mathcal{W}^n$. В предположении (2.1), применяя, в частности, свойство (2.6) для $\phi \in \mathscr{S}$, находим

$$\langle \widecheck{y_n}, \phi \rangle = \big\langle y_n, \widecheck{\phi} \big\rangle = \int (2\pi\eta i)^n \widehat{f}(\eta) \widecheck{\phi}(\eta) d\eta = \big\langle \widehat{f}, \widecheck{D^n \phi} \big\rangle = \langle f, D^n \phi \rangle.$$

Итак, имеет место соотношение $\langle \widecheck{y_n}, \phi \rangle = \langle f, D^n \phi \rangle$, $\phi \in \mathscr{S}$. Согласно определению (1.8) последнее соотношение означает, что $D^n f$ существует и, более того, $D^n f = \widecheck{y_n}$. Таким образом, $f \in \mathcal{W}^n$.

Лемма 1 полностью доказана.

Следствие 1. *При $0 \le k < n$ имеет место вложение $\mathcal{W}^n \subset \mathcal{W}^k$ и для производной $D^k f$ порядка k, $0 \le k \le n$, функции $f \in \mathcal{W}^n$ справедлива формула*

$$D^k f(t) = \widecheck{y_k}(t) = \int e^{2\pi t\eta i} (2\pi\eta i)^k \widehat{f}(\eta)\, d\eta, \tag{2.7}$$

в которой функция $y_k(\eta) = (2\pi\eta i)^k \widehat{f}(\eta)$, $\eta \in \mathbb{R}$, суммируема. Как следствие, функция $f \in \mathcal{W}^n$ и любая ее производная $D^k f$, $0 \le k < n$, принадлежат пространству C_0.

Формуле (2.7) можно дать такое толкование: при $0 \le k \le n$ для преобразования Фурье (понимаемого в смысле теории обобщенных функций) $\widehat{D^k f}$ производной $D^k f$ функции $f \in \mathcal{W}^n$ имеет место формула

$$\widehat{D^k f}(\eta) = (2\pi\eta i)^k \widehat{f}(\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия. Неравенство

$$|(2\pi\eta i)^k \widehat{f}(\eta)| \le (1 + |(2\pi\eta i)^n|)|\widehat{f}(\eta)|, \quad \eta \in \mathbb{R},$$

свойство (2.1) и свойство $f \in L^2$ влекут, что функция $y_k(\eta) = (2\pi\eta i)^k \widehat{f}(\eta)$ суммируема на оси. Отсюда в силу леммы 1 вытекает, что $f \in \mathcal{W}^k$. Так что для $f \in \mathcal{W}^n$ формула (2.7) выполняется уже при любом k, $0 \le k \le n$. Интеграл в правой части формулы (2.7) является непрерывной функцией, а точнее, принадлежит пространству C_0. Следствие 1 обосновано. □

Следствие 1 влечет

Следствие 2. *Для неотрицательного целого n пространство $\mathcal{W}^n$ состоит из функций $f \in L^2$, непрерывно дифференцируемых (в классическом смысле) n раз на оси, все их производные $f^{(k)}$, $0 \le k \le n$, принадлежат пространству C_0 и, более того, являются преобразованиями Фурье суммируемых функций.*

2.2. Однородность модуля непрерывности

Формула (1.10) для модуля непрерывности (1.9) доказывается стандартным образом (см. [1] и, к примеру, [3]). Однако в связи с тем что в данной работе рассматриваются не классические, а дробные производные, ее обоснование имеет некоторые особенности, поэтому здесь будет приведено доказательство формулы (1.10).

Определим более общую в сравнении с модулем непрерывности (1.9) функцию двух переменных $\delta, M > 0$:

$$\begin{gathered} \omega(\delta, M) = \sup\{\|D^k f\|_C \colon f \in \mathcal{W}(\delta, M)\}, \\ \mathcal{W}(\delta, M) = \{f \in \mathcal{W}^n,\ \|f\|_{L^2} \le \delta,\ \|\widehat{D^n f}\|_L \le M\}. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Получаем $\omega(\delta) = \omega(\delta, 1)$.

Лемма 2. *При любых $\delta > 0,\ M > 0$ имеет место формула*

$$\omega(\delta, M) = \omega(1)\delta^\alpha M^\beta, \tag{2.10}$$

в которой

$$\alpha = \frac{2(n-k)}{2n+1}, \quad \beta = 1 - \alpha = \frac{2k+1}{2n+1}.$$

В частности,

$$\omega(\delta) = \delta^\alpha \omega(1). \tag{2.11}$$

Из теоремы 1 следует, что модуль непрерывности (1.9) конечен при любом $\delta > 0$. На данном этапе мы этим фактом пользоваться не будем. Впрочем, утверждение леммы 2 влечет, в частности, что если модуль непрерывности конечен при каком-либо $\delta > 0$, то он будет конечен и при любом $\delta > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 2. При $h > 0$ определим оператор растяжения аргумента функции $\lambda[h]$ формулой $(\lambda[h]f)(t) = f(ht)$, $t \in (-\infty, \infty)$. Убедимся, что если $f \in \mathcal{W}^n$, то $\lambda[h]f \in \mathcal{W}^n$ и имеет место вполне ожидаемое равенство

$$D^n(\lambda[h]f) = h^n \lambda[h](D^n f). \tag{2.12}$$

Для функции $\phi \in \mathscr{S}$ определим функцию $\psi = \lambda[1/h]\phi$; эта функция также принадлежит $\phi \in \mathscr{S}$. Согласно первой формуле (1.2) имеем

$$\widehat{\psi}(t) = \int e^{-2\pi t\eta i}\psi(\eta)\,d\eta = \int e^{-2\pi t\eta i}\phi(\eta/h)\,d\eta = h\int e^{-2\pi th\eta i}\phi(\eta)\,d\eta = h\widehat{\phi}(th)$$

и, окончательно,

$$\widehat{\psi} = h(\lambda[h]\widehat{\phi}). \tag{2.13}$$

Теперь, исходя из определения (1.7) и применив формулу (2.13), находим

$$D^n\psi(t) = \int(-2\pi\eta i)^n e^{2\pi t\eta i}\widehat{\psi}\,(\eta)\,d\eta = \int(-2\pi\eta i)^n e^{2\pi t\eta i}h\widehat{\phi}(\eta h)\,d\eta$$
$$= h^{-n}D^n\phi(t/h) = h^{-n}\lambda[1/h](D^n\phi)(t);$$

таким образом,

$$D^n\psi = h^{-n}\lambda[1/h](D^n\phi). \tag{2.14}$$

Пусть $f \in \mathcal{W}^n$ и $F = D^n f$. В соответствии с определением (1.8) выполняется равенство $\langle F,\psi\rangle = \langle f, D^n\psi\rangle$. Подставив сюда соотношения (2.13) и (2.14), получим $\langle F,\lambda[1/h]\phi\rangle = \langle f, h^{-n}\lambda[1/h]D^n\phi\rangle$, или, в явном виде,

$$\int F(t)\phi(t/h)\,dt = h^{-n}\int f(t)\,(D^n\phi)(t/h)\,dt.$$

Сделав здесь замену переменного, приходим к равенству

$$h^n\int F(th)\phi(t)\,dt = \int f(th)\,(D^n\phi)(t)\,dt.$$

Это равенство можно записать как

$$h^n\langle\lambda[h]F,\phi\rangle = \langle\lambda[h]f,\,(D^n\phi)(t)\rangle,\quad \phi\in\mathscr{S}.$$

Согласно определению (1.7) последнее соотношение означает, что при любом $h > 0$ функция $\lambda[h]f$ имеет производную $D^n(\lambda[h]f)$ порядка n и, более того, справедлива формула

$$D^n(\lambda[h]f) = h^n\lambda[h](D^n f),$$

а это и есть формула (2.12).

Предположение $f \in \mathcal{W}^n$ содержит, в частности, такое свойство, что $D^n f = \widecheck{y_n}$, где $y_n = \widehat{D^n f} \in L$. С учетом второго соотношения (1.2) это означает, что

$$D^n f(t) = \widecheck{y_n}(t) = \int e^{2\pi t\eta i}y_n(\eta)\,d\eta.$$

Следовательно,

$$(\lambda[h](D^n f))(t) = (D^n f)(th) = \int e^{2\pi th\eta i}y_n(\eta)\,d\eta = h^{-1}\int e^{2\pi t\eta i}y_n(\eta/h)\,d\eta.$$

Таким образом, имеем $(\lambda[h](D^n f)) = h^{-1}\widecheck{\lambda[1/h]y_n}$. Отсюда и из (2.12) вытекает, что

$$\widehat{D^n(\lambda[h]f)}\;= h^{n-1}\lambda[1/h]\widehat{D^n f}.$$

Это равенство, в частности, влечет, что

$$\|\,\widehat{D^n(\lambda[h]f)}\,\|_1 = h^{n-1}\int\left|\widehat{D^n f}(t/h)\right|\,dt = h^n\int\left|\widehat{D^n f}(t)\right|\,dt = h^n\|\widehat{D^n f}\|_1$$

или

$$\| \widehat{D^n(\lambda[h]f)} \|_1 = h^n \|\widehat{D^n f}\|_1. \qquad (2.15)$$

Очевидно, оператор $\lambda[h]$, $h > 0$, есть биекция $\mathcal{W}^n$ на себя и, как нетрудно проверить, наряду с (2.15) выполняются соотношения

$$\|\lambda[h]f\|_2 = h^{-1/2}\|f\|_2, \quad \|D^k(\lambda[h]f)\|_C = h^k\|D^k f\|_C. \qquad (2.16)$$

Для двух положительных параметров c, h определим в $\mathcal{W}^n$ оператор $\Lambda = \Lambda[c,h]$ формулой

$$F(t) = (\Lambda[c,h]f)(t) = cf(ht), \quad t \in (-\infty,\infty).$$

Это вновь есть биекция $\mathcal{W}^n$ на себя и, как следствие (2.16), справедливы равенства

$$\|\Lambda f\|_2 = ch^{-1/2}\|f\|_2, \ \ \|D^k(\Lambda f)\|_C = ch^k\|D^k f\|_C, \ \ \| \widehat{D^n(\Lambda f)} \|_1 = ch^n\|\widehat{D^n f}\|_1. \qquad (2.17)$$

При $\delta, M > 0$ выберем параметры c, h так, чтобы оператор $\Lambda = \Lambda[c,h]$ отображал множество $\mathcal{W}(1,1)$ на множество $\mathcal{W}(\delta, M)$. В силу (2.17) это будет возможно в том случае, если

$$ch^{-1/2} = \delta, \quad ch^n = M.$$

Отсюда находим

$$h = M^{2/(2n+1)}\delta^{-2/(2n+1)}, \quad c = M^{1/(2n+1)}\delta^{2n/(2n+1)}, \quad ch^k = M^{(2k+1)/(2n+1)}\delta^{2(n-k)/(2n+1)}.$$

Теперь для величины (2.9) имеем

$$\omega(\delta, M) = \sup\{\|D^k F\|_C \colon F \in \mathcal{W}(\delta, M)\} \sup\{\|D^k(\Lambda f)\|_C \colon f \in \mathcal{W}(1,1)\} =$$
$$= ch^k \sup\{\|D^k f\|_C \colon f \in \mathcal{W}(1,1)\} = M^{(2k+1)/(2n+1)}\delta^{2(n-k)/(2n+1)}\omega(1,1).$$

Формулы (2.10) и (2.11) обоснованы.

Доказательство леммы 2 завершено.

2.3. Два вспомогательных утверждения к теореме 1

Лемма 3. *Если для функции $\theta \in L^2$ выполняется условие*

$$\zeta(\eta) = \frac{(2\pi\eta i)^k - \theta(\eta)}{(2\pi\eta i)^n} \in L^\infty(-\infty,\infty),$$

то имеет место представление

$$D^k f(0) - \langle \widehat{\theta}, f\rangle = \big\langle \zeta, \widehat{D^n f}\big\rangle, \quad f \in \mathcal{W}^n. \qquad (2.18)$$

Доказательство. Для функции $f \in \mathcal{W}^n$ при $0 \le k < n$, используя формулы (2.7), (1.4) и (2.8), находим

$$D^k f(0) - \langle \widehat{\theta}, f\rangle = D^k f(0) - \langle \theta, \widehat{f}\rangle = \int \Big((2\pi\eta i)^k - \theta(\eta)\Big)\widehat{f}(\eta)\,d\eta = \int \zeta(\eta)(2\pi\eta i)^n \widehat{f}(\eta)\,d\eta.$$

Применив теперь соотношение (2.2), имеем

$$D^k f(0) - \langle \widehat{\theta}, f\rangle = \int \zeta(\eta)\widehat{D^n f}(\eta)\,d\eta.$$

Представление (2.18) получено.

Лемма 3 доказана.

При $h > 0$ с помощью функции θ_h (см. (1.14)) определим на вещественной оси функцию

$$\zeta_h(\eta) = \frac{(2\pi\eta i)^k - \theta_h(\eta)}{(2\pi\eta i)^n}. \qquad (2.19)$$

Лемма 4. *При $0 \le k < n$ и $h > 0$ функции θ_h и ζ_h имеют следующие значения норм:*

$$\|\widehat{\theta_h}\|_2 = \|\theta_h\|_2 = \left(\frac{2}{\pi h^{2k+1}}\right)^{1/2} \frac{(n-k)}{\big((2k+1)(2n+1)(n+k+1)\big)^{1/2}}, \tag{2.20}$$

$$\|\zeta_h\|_\infty = |\zeta_h(\eta)| = h^{n-k}, \quad |\eta| \le \frac{1}{2\pi h}. \tag{2.21}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обсудим более подробно вид функций (1.14) и (2.19). Имеем

$$\theta_h(\eta) = \begin{cases} (2\pi\eta i)^k - (2\pi\eta i)^k (2\pi h)^{n-k} |\eta|^{n-k}, & |\eta| \le \dfrac{1}{2\pi h}, \\ 0, & |\eta| \ge \dfrac{1}{2\pi h}. \end{cases}$$

Отсюда, используя свойство (1.6), находим, что если $|\eta| \le 1/2\pi h$, то

$$\zeta_h(\eta) = \frac{(2\pi\eta i)^k - \theta_h(\eta)}{(2\pi\eta i)^n} = \frac{(2\pi h)^{n-k}|\eta|^{n-k}(2\pi\eta i)^k}{(2\pi\eta i)^n} = \frac{(2\pi h)^{n-k}|\eta|^{n-k}}{(2\pi\eta i)^{n-k}} = \frac{h^{n-k}}{i^{n-k}}, \tag{2.22}$$

а если $|\eta| \ge 1/2\pi h$, то

$$\zeta_h(\eta) = \frac{(2\pi\eta i)^k}{(2\pi\eta i)^n} = \frac{1}{(2\pi\eta i)^{n-k}}, \quad |\eta| \ge \frac{1}{2\pi h}. \tag{2.23}$$

Соотношения (2.22) и (2.23) влекут (2.21).

Вычислим теперь норму $\|\theta_h\|_2$. Получим

$$\|\theta_h\|_2^2 = 2 \int\limits_0^{1/2\pi h} \left|(2\pi\eta i)^k - (2\pi\eta i)^k (2\pi\eta h)^{n-k}\right|^2 d\eta = 2h^{-2k} \int\limits_0^{1/2\pi h} |(2\pi\eta h)^{2k} \left|1 - (2\pi\eta h)^{n-k}\right|^2 d\eta$$

$$= \Big[2\pi\eta h = t\Big] = \frac{1}{\pi h^{2k+1}} \int_0^1 t^{2k}(1 - t^{n-k})^2 dt = \frac{2(n-k)^2}{\pi h^{2k+1}(2k+1)(2n+1)(n+k+1)}.$$

Соотношение (2.20) также доказано.

Обоснование всех утверждений леммы 4 завершено.

2.4. Вспомогательное утверждение к теореме 2

Заготовим на будущее некоторые свойства функции

$$f_h = \overline{\widehat{\theta_h}}, \quad h > 0. \tag{2.24}$$

Лемма 5. *При $0 \le k < n$ и $h > 0$ функция f_h принадлежит пространству $\mathcal{W}^n$ и для нее справедливы соотношения*

$$\|f_h\|_2 = \left(\frac{2}{\pi h^{2k+1}}\right)^{1/2} \frac{n-k}{\{(2k+1)(2n+1)(n+k+1)\}^{1/2}}, \tag{2.25}$$

$$D^k f_h(0) = \frac{1}{\pi h^{(2k+1)}} \frac{n-k}{(2k+1)(n+k+1)}, \tag{2.26}$$

$$\left\|\widehat{D^n f_h}\right\|_1 = \frac{1}{\pi\, h^{n+k+1}} \frac{n-k}{(n+k+1)(2n+1)}. \tag{2.27}$$

Доказательство. Определение (2.24) функции f_h и утверждение (2.20) влекут, что $f_h \in L^2$ и справедливо равенство (2.25).

Формулу (2.24) можно переписать в виде $f_h = \overline{\breve{\theta}_h}$. Отсюда следует, что

$$\widehat{f_h} = \overline{\theta_h}.$$

Эта функция непрерывная на оси и имеет компактный носитель; как следствие, для функции f_h выполняется свойство (2.1). Согласно лемме 1 функция f_h принадлежит пространству $\mathcal{W}^n$. Применив (2.1), имеем

$$\left\|\widehat{D^n f_h}\right\|_1 = \int\limits_{-1/(2\pi h)}^{1/(2\pi h)} \left|(2\pi\eta i)^n \overline{\theta}_h(\eta)\right| d\eta = 2 \int\limits_{0}^{1/(2\pi h)} (2\pi\eta)^{n+k} \left(1 - (2\pi h)^{n-k}\eta^{n-k}\right) d\eta$$

$$= \frac{2}{2\pi h^{n+k+1}} \int\limits_{0}^{1/(2\pi h)} (2\pi\eta h)^{n+k} \left(1 - (2\pi h)^{n-k}\eta^{n-k}\right) d(2\pi h\eta).$$

Сделав замену переменной интегрирования по формуле $u = 2\pi h\eta$, получаем

$$\left\|\widehat{D^n f_h}\right\|_1 = \frac{1}{\pi h^{n+k+1}} \int\limits_0^1 u^{n+k}(1-u^{n-k})\, du = \frac{1}{\pi h^{n+k+1}}\, \frac{n-k}{(n+k+1)(2n+1)}.$$

Формула (2.27) также проверена.

Далее, воспользовавшись формулой (2.7), находим

$$D^k f_h(0) = \int (2\pi\eta i)^k \widehat{f_h}(\eta)\, d\eta = \int (2\pi\eta i)^k \overline{\theta_h}(\eta)\, d\eta = 2 \int\limits_0^{1/(2\pi h)} (2\pi\eta)^{2k}\left(1 - (2\pi h)^{n-k}\eta^{n-k}\right) d\eta.$$

Сделав вновь в интеграле замену переменной $u = 2\pi h\eta$, получаем

$$D^k f_h(0) = \frac{1}{\pi h^{2k+1}} \int\limits_0^1 u^{2k}\left(1 - u^{n-k}\right) du = \frac{1}{\pi h^{2k+1}}\, \frac{n-k}{(2k+1)(n+k+1)}.$$

Равенство (2.26) проверено.

Лемма 5 полностью доказана.

3. Доказательство теорем

3.1. Доказательство теорем 1 и 2

Проведем доказательство теорем 1 и 2 одновременно в несколько шагов по известной для данной тематики схеме, восходящей к С. Б. Стечкину [1].

1. Дадим вначале оценку сверху значения задачи Стечкина (1.13). Для этого в качестве аппроксимирующего оператора возьмем оператор свертки T_h, $h > 0$, определенный формулой (1.15). Начнем с нормы этого оператора; имеем $\|T_h\|_{L^2\to C} = \|\widehat{\theta_h}\|_2 = \|\theta_h\|_2$, последнее равенство выполняется в силу равенства Парсеваля (1.3). Величина $\|\widehat{\theta_h}\|_2 = \|\theta_h\|_2$ была вычислена в (2.20). Именно эта величина обозначена в (1.16) через $N(h)$. Итак, $\|T_h\|_{L^2\to C} = N(h)$.

Оценим сверху уклонение

$$U(T_h) = \sup\left\{\|D^k f - T_h f\|_C \colon f \in \mathcal{W}^n,\ \|\widehat{D^n f}\|_1 \le 1\right\}. \tag{3.1}$$

Согласно лемме 3 имеет место представление

$$D^k f(0) - \langle \widehat{\theta_h}, f\rangle = \big\langle \zeta_h, \widehat{D^n f}\big\rangle, \quad f \in \mathcal{W}^n, \tag{3.2}$$

функция ζ_h этого представления определена в (2.19). Пусть $f \in \mathcal{W}^n$. Для $x \in (-\infty,\infty)$ определим функцию $f[x]$ равенством $f[x](\eta) = f(x+\eta)$, $\eta \in (-\infty,\infty)$. Имеем $f[x] \in \mathcal{W}^n$, при этом $\widehat{D^n f[x]}\,(t) = e^{2\pi i x t}\widehat{D^n f}(t)$, $t \in (-\infty,\infty)$, а потому $\|\,\widehat{D^n f[x]}\,\|_1 = \|\widehat{D^n f}\|_1$. Подставив функцию $f[x]$ в (3.2), получаем представление

$$D^k f(x) - (T_h f)(x) = \big\langle \zeta_h, \, \widehat{D^n f[x]}\,\big\rangle, \quad f \in \mathcal{W}^n.$$

Это равенство влечет для величины уклонения (3.1) оценку сверху $U(T_h) \le \|\zeta_h\|_\infty$. Определение (1.13) и формула (2.21) дают неравенства

$$E(N(h) \le U(T_h) \le h^{n-k}. \tag{3.3}$$

Отсюда, в частности, следует, что величина (1.13) конечна при любом $N > 0$.

2. Значение $E(N)$ задачи (1.13) приближения оператора дифференцирования и модуль непрерывности оператора дифференцирования (1.9) связаны неравенством

$$E(N) \ge \sup\{\omega(\delta) - N\delta \colon \delta > 0\}. \tag{3.4}$$

Неравенство (3.4) есть конкретный вариант более общего утверждения С. Б. Стечкина, содержащегося в [1, разд. 2], тем не менее мы это неравенство сейчас докажем, следуя разд. 2 из [1]. Имеем

$$\begin{aligned} E(N) &= \inf_{\|T\|_{L^2\to C}\le N}\ \sup_{f\in\mathcal{Q}^n} \|D^k f - Tf\|_C \ge \inf_{\|T\|_{L^2\to C}\le N}\ \sup_{f\in\mathcal{Q}^n} \big(\|D^k f\|_C - \|Tf\|_C\big) \\ &\ge \sup_{f\in\mathcal{Q}^n} \big(\|D^k f\|_C - N\|f\|_2\big) = \sup_{\delta>0}\ \sup_{\{f\in\mathcal{Q}^n,\|f\|_2\le\delta\}} \big(\|D^k f\|_C - N\|f\|_2\big) \\ &\ge \sup_{\delta>0}\ \sup_{\{f\in\mathcal{Q}^n,\|f\|_2\le\delta\}} \big(\|D^k f\|_C - N\delta\big) = \sup_{\delta>0}\big(\omega(\delta) - N\delta\big). \end{aligned}$$

В результате получено неравенство (3.4). Это неравенство, в частности, влечет, что $\omega(\delta) < \infty$, $\delta \ge 0$.

Подставив в (3.4) выражение (1.10) для $\omega(\delta)$ и осуществив элементарные преобразования, получаем, что значение задачи Стечкина (1.13) и наилучшая константа K в (1.11) связаны неравенством

$$E(N) \ge \beta\alpha^{\alpha/\beta} K^{1/\beta} N^{-\alpha/\beta}. \tag{3.5}$$

3. Получим теперь для константы K в неравенстве (1.11) оценку снизу. Для этого воспользуемся функцией $f_h \in \mathcal{W}^n$, определенной формулой (2.24) и рассмотренной в лемме 5. Подставив функцию f_h в неравенство (1.11), имеем

$$K \ge \frac{\|D^k f_h\|_C}{\|f_h\|_2^\alpha \|\widehat{D^n f_h}\|_1^\beta} \ge \underline{K} = \frac{|D^k f_h(0)|}{\|f_h\|_2^\alpha \|\widehat{D^n f_h}\|_1^\beta}, \quad \alpha = \frac{2(n-k)}{2n+1}, \quad \beta = 1-\alpha = \frac{2k+1}{2n+1}. \tag{3.6}$$

Применив формулы (2.25)–(2.27) и осуществив элементарные преобразования, находим

$$\underline{K} = \left(\frac{1}{2\pi(n+k+1)}\right)^{(n-k)/(2n+1)} \left(\frac{2n+1}{2k+1}\right)^{(n+k+1)/(2n+1)}. \tag{3.7}$$

4. Неравенства (3.5) и (3.6) дают для величины (1.13) при $N = N(h)$ (см. (1.16)) оценку снизу

$$E(N(h)) \ge \beta\alpha^{\alpha/\beta} K^{1/\beta} (N(h))^{-\alpha/\beta} \ge \underline{E}(h), \quad \underline{E}(h) = \beta\alpha^{\alpha/\beta}\,(\underline{K})^{1/\beta}\,(N(h))^{-\alpha/\beta}.$$

Подставив в выражение для $\underline{E}(h)$ значения (1.12) показателей α, β, выражение (3.7) для величины $\underline{K}$, значение (1.16) величины $N(h)$ и осуществив элементарные преобразования, выводим оценку

$$E(N(h)) \geq \underline{E}(h) = h^{n-k}.$$

5. Из последнего неравенства и неравенства (3.3) получаем равенства

$$E(N(h)) = U(T_h) = h^{n-k}.$$

Формула (1.17) и экстремальность оператора T_h в задаче (1.13) обоснованы.

Теорема 1 доказана полностью.

6. Неравенство (3.5) можно переписать в виде

$$K \leq \alpha^{-\alpha}\beta^{-\beta}(E(N))^{\beta}N^{\alpha}.$$

Подставив сюда значение (1.16) величины $N = N(h)$ и значение (1.17) величины $E(N(h))$, получаем для константы K оценку сверху

$$K \leq \overline{K} = \Big(\frac{1}{2\pi(n+k+1)}\Big)^{(n-k)/(2n+1)}\Big(\frac{2n+1}{2k+1}\Big)^{(n+k+1)/(2n+1)}.$$

Сопоставив эту оценку с неравенствами (3.6) и формулой (3.7) для константы $\underline{K}$, получаем равенства

$$K = \Big(\frac{1}{2\pi(n+k+1)}\Big)^{(n-k)/(2n+1)}\Big(\frac{2n+1}{2k+1}\Big)^{(n+k+1)/(2n+1)} = \frac{\|D^k f_h\|_C}{\|f_h\|_2^{\alpha}\|\widehat{D^n f_h}\|_1^{\beta}}.$$

В этом соотношении содержатся и формула (1.18), и свойство экстремальности функции f_h в неравенстве (1.11).

Теорема 2 также доказана.

3.2. Доказательство теоремы 3

Обратимся к неравенствам (1.21). Воспользовавшись результатом теоремы 2, вычислим величину

$$\ell(\delta) = \inf\{E(N) + N\delta\colon N > 0\}.$$

При фиксированном $\delta > 0$, подставив в выражение $E(N) + N\delta$ значения (1.16) и (1.17), получаем функцию переменного $h > 0$

$$F(h) = E(N(h)) + \delta N(h) = h^{n-k} + A\delta h^{-(k+1/2)},$$

где

$$A = \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{1/2}\frac{(n-k)}{\big((2k+1)(2n+1)(n+k+1)\big)^{1/2}}.$$

Имеем $\ell(\delta) = \inf\{F(h)\colon h > 0.\}$ Дифференцируя функцию $F(h)$, находим

$$F'(h) = h^{-k-3/2}\Big((n-k)\, h^{n+1/2} - (k+1/2)\, A\delta\Big). \tag{3.8}$$

Нулем производной является точка

$$h^* = \Big(\frac{(k+1/2)\, A\delta}{n-k}\Big)^{1/(n+1/2)} = \delta^{2/(2n+1)}\Big(\frac{2k+1}{2\pi(2n+1)(n+k+1)}\Big)^{1/(2n+1)}.$$

Анализируя знак производной (3.8), делаем вывод, что h^* есть точка (абсолютного) минимума функции F на полуоси $h \in (0, \infty)$. Произведя элементарные вычисления, получаем

$$F(h^*) = (h^*)^{n-k} + A\delta(h^*)^{-(k+1/2)} = \delta^{(n-k)/(n+1/2)}K;$$

здесь K — наилучшая константа в неравенстве (1.11), определенная формулой (1.18) в формулировке теоремы 2. Итак, $\ell(\delta) = K\delta^{\alpha}$.

Согласно (1.10) подобная формула имеет место и для модуля непрерывности: $\omega(\delta) = K\delta^{\alpha}$. Таким образом, в (1.21) оба неравенства являются равенствами; отсюда в частности, следует, что $\nu(\delta) = K\delta^{\alpha}$.

В теореме 3 осталось обосновать экстремальность метода T_{h^*}. Исходя из определения (1.20), имеем

$$K\delta^{\alpha} = \nu(\delta) \le u(\delta, T_{h^*}). \tag{3.9}$$

Далее, согласно (1.19)

$$u(\delta, T_{h^*}) = \sup_{f\in\mathcal{Q}^n} \sup_{\|\varphi - f\|_{L^2}\le\delta} \|D^k f - T_{h^*}\varphi\|_C.$$

Записав $D^k f - T_{h^*}\varphi = (D^k f - T_{h^*} f) + T_{h^*}(f - \varphi)$, находим

$$\|D^k f - T_{h^*}\varphi\| \le \|(D^k f - T_{h^*} f)\| + \|T_{h^*}(f-\varphi)\| \le U(T_{h^*}) + \|T_{h^*}\|\delta.$$

Следовательно,

$$u(\delta, T_{h^*}) \le U(T_{h^*}) + \|T_{h^*}\|\delta = E(N(h^*)) + N(h^*)\delta = \ell(\delta) = K\delta^{\alpha}. \tag{3.10}$$

Первая величина в (3.9) и последняя величина в (3.10) совпадают. Отсюда вытекает, что $\nu(\delta) = u(\delta, T_{h^*}) = K\delta^{\alpha}$. Но это и означает, что T_{h^*} — оптимальный метод в задаче восстановления (1.20).

Теорема 3 доказана полностью.

Заключение

В заключение отметим, что к тематике данной статьи близка еще одна тройка экстремальных задач.

Начнем с варианта неравенства Колмогорова. Согласно результату В. Н. Габушина [15] при целых $0 \le k < n$ на $W^n_{2,\infty}$ справедливо неравенство

$$\|f^{(k)}\|_C \le \mathrm{G}\|f\|^{\alpha}_{L^2}\|f^{(n)}\|^{\beta}_{L^\infty}, \quad f \in W^n_{2,\infty}, \tag{3.11}$$

$$\alpha = \frac{2(n-k)}{2n+1}, \quad \beta = 1 - \alpha = \frac{2k+1}{2n+1},$$

с конечной константой $\mathrm{G} = \mathrm{G}(n,k)$. Точное значение константы G в (3.11) известно лишь при $n = 1$, $k = 0$ [16] и при $n = 2$ для $k = 1$ и $k = 0$ [17].

Неравенство (3.11) можно изучать для произвольных вещественных $0 \le k < n$. Имеет место вложение $\mathcal{W}^n \subset W^n_{2,\infty}$ и для $f \in \mathcal{W}^n$ выполняется неравенство $\|D^n f\|_{C_0} \le \|\widehat{D^n f}\|_L$. Поэтому константы в (3.11) и (1.11) связаны неравенством $K \le \mathrm{G}$.

Неравенство (3.11) для произвольных вещественных $0 \le k < n$ не изучалось. В связи с неравенством (3.11), конечно, возникают также аналоги задач (1.13) и (1.20).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Стечкин С.Б.** Наилучшее приближение линейных операторов // Мат. заметки. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 137–148.
2. **Арестов В.В., Габушин В.Н.** Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // Изв. вузов. Математика. 1995. № 11. С. 42–68.
3. **Арестов В.В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, № 6(312). С. 89–124. https://doi.org/10.4213/rm1019
4. **Arestov V.V., Filatova M.A.** Best approximation of the differentiation operator in the space L_2 on the semiaxis // J. Approx. Theory. 2014. Vol. 187. P. 65–81. https://doi.org/10.1016/j.jat.2014.08.001
5. **Арестов В.В., Акопян Р.Р.** Задача Стечкина о наилучшем приближении неограниченного оператора ограниченными и родственные ей задачи // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 4. С. 7–31. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-4-7-31
6. **Babenko V., Kovalenko O., Parfinovych N.** On approximation of hypersingular integral operators by bounded ones // J. Math. Anal. Appl. 2022. Vol. 513. P. 1–21. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2022.126215
7. **Arestov V.V.** Approximation of differentiation operators by bounded linear operators in Lebesgue spaces on the axis and related problems in the spaces of (p, q)-multipliers and their predual spaces // Ural Math. J. 2023. Vol. 9, no. 2. P. 4–27. https://doi.org/10.15826/umj.2023.2.001
8. **Бабенко В.Ф., Корнейчук Н.П., Кофанов В.А., Пичугов С.А.** Неравенства для производных и их приложения. Киев: Наук. думка, 2003. 591 с.
9. **Тихомиров В.М., Магарил-Ильяев Г.Г.** Неравенства для производных // Избранные тр. Математика и механика А. Н. Колмогоров. М.: Наука, 1985. С. 387–390.
10. **Арестов В.В.** О равномерной регуляризации задачи вычисления значений оператора // Мат. заметки. 1977. Т. 22, № 2. С. 231–244.
11. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
12. **Осипенко К.Ю.** Введение в теорию оптимального восстановления: учебное пособие для вузов. СПб.: Лань, 2022. 388 с.
13. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 333 с.
14. **Шилов Г.Е.** Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука, 1965. 328 с.
15. **Габушин В.Н.** Неравенства для норм функции и ее производных в метриках L_p // Мат. заметки. 1967. Т. 1, № 3. С. 291–298.
16. **Szőkefalvi-Nagy B.** Über Integralunglechungen zwischen einer Funktion und ihrer ableitung // Acta Sci. Math. 1941. Vol. 10. P. 64–74.
17. **Габушин В.Н.** Точные константы в неравенствах между нормами производных функции // Мат. заметки. 1968. Т. 4, № 2. С. 221–232.

Поступила 13.03.2025
После доработки 3.04.2025
Принята к публикации 7.04.2025
Опубликована онлайн 30.05.2025

Арестов Виталий Владимирович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: vitalii.arestov@urfu.ru

REFERENCES

1. Stechkin S.B. Best approximation of linear operators. *Math. Notes*, 1967, vol. 1, no. 2, pp. 91–99. https://doi.org/10.1007/BF01268056

2. Arestov V.V., Gabushin V.N. Best approximation of unbounded operators by bounded operators. *Russian Math.* (*Iz. VUZ*), 1995, vol. 39, no. 11, pp. 38–63.
3. Arestov V.V. Approximation of unbounded operators by bounded operators and related extremal problems. *Russian Math. Surv.*, 1996, vol. 51, no. 6, pp. 1093–1126. https://doi.org/10.1070/RM1996v051n06ABEH003001
4. Arestov V.V., Filatova M.A. Best approximation of the differentiation operator in the space L_2 on the semiaxis. *J. Approx. Theory*, 2014, vol. 187, pp. 65–81. https://doi.org/10.1016/j.jat.2014.08.001
5. Arestov V.V., Akopyan R.R. Stechkin's problem on the best approximation of an unbounded operator by bounded ones and related problems. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 4, pp. 7–31 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-4-7-31
6. Babenko V., Kovalenko O., Parfinovych N. On approximation of hypersingular integral operators by bounded ones. *J. Math. Anal. Appl.*, 2022, vol. 513, no. 2, art. no. 126215. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2022.126215
7. Arestov V.V. Approximation of differentiation operators by bounded linear operators in Lebesgue spaces on the axis and related problems in the spaces of (p, q)-multipliers and their predual spaces. *Ural Math. J.*, 2023, vol. 9, no. 2, pp. 4–27. https://doi.org/10.15826/umj.2023.2.001
8. Babenko V.F., Korneichuk N.P., Kofanov V.A., Pichugov S.A. *Neravenstva dlya proizvodnykh i ikh prilozheniya* [Inequalities for derivatives and their applications]. Kiev, Naukova Dumka, 2003, 591 p.
9. Tikhomirov V.M., Magaril-Il'yaev G.G. *Neravenstva dlya proizvodnykh* [Inequalities for derivatives]. In: *Izbrannye Trudy. Matematika i Mekhanika* [Selected Works. Mathematics and Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1985, pp. 387–390.
10. Arestov V.V. Uniform regularization of the problem of calculating the values of an operator. *Math. Notes*, 1977, vol. 22, no. 2, pp. 618–626. https://doi.org/10.1007/BF01780971
11. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Theory of linear ill-posed problems and its applications.* In: *Inverse and ill-posed problems series*, vol. 36. Utrecht etc., VSP, 2002, 281 p. https://doi.org/10.1515/9783110944822. Original Russian text published in Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya*, Moscow, Nauka Publ., 1978, 206 p.
12. Osipenko K.Yu. *Vvedeniye v teoriyu optimal'nogo vosstanovleniya* [Introduction to the theory of optimal recovery]. St. Petersburg, Lan', 2022, 388 p. ISBN: 978-5-507-44358-1 .
13. Stein E.M., Weiss G. *Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces.* Princeton, Princeton Univ. Press, 1971, 312 p. ISBN: 9780691080789 . Translated to Russian under the title *Vvedenie v garmonicheskii analiz na evklidovykh prostranstvakh*, Moscow, Mir Publ., 1974, 333 p.
14. Shilov G.E. *Matematicheskii analiz. Vtoroi spetsial'nyi kurs* [Mathematical analysis. The second special course]. Moscow, Nauka Publ., 1965, 328 p.
15. Gabushin V.N. Inequalities for the norms of a function and its derivatives in metric L_p. *Math. Notes*, 1967, vol. 1, no. 3, pp. 194–198. https://doi.org/10.1007/BF01098882
16. Szőkefalvi-Nagy B. Über integralunglechungen zwischen einer funktion und ihrer ableitung. *Acta Sci. Math.*, 1941, vol. 10, pp. 64–74.
17. Gabushin V.N. Exact constants in inequalities between norms of derivatives of functions. *Math. Notes*, 1968, vol. 4, no. 2, pp. 624–630. https://doi.org/10.1007/BF01094963

Received March 13, 2025
Revised April 3, 2025
Accepted April 7, 2025
Published online May 30, 2025

Funding Agency: This work was supported by Russian Science Foundation, project 25-21-00118, https://rscf.ru/project/25-21-00118/ .

Vitalii Vladimirovich Arestov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: vitalii.arestov@urfu.ru .

Cite this article as: V. V. Arestov. Best approximation of a fractional-order differentiation operator in the uniform norm on the axis on the class of functions with integrable Fourier transform of the highest derivative. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2025-31-3-fon-01