ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 31 № 2 2025

УДК 517.977

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ФУНКЦИОНАЛОМ КАЧЕСТВА, ОПРЕДЕЛЕННЫМ НА ГРАНИЦЕ

А. Р. Данилин, И. В. Першин

Рассматривается задача оптимального управления значением решения уравнения эллиптического типа в ограниченной области с гладкой границей посредством потока через границу области. Оператор уравнения есть сумма оператора Лапласа с малым коэффициентом и оператора нулевого порядка. Управление стеснено интегральным соотношением. Функционал качества есть сумма квадратов норм отклонения состояния от заданного состояния на границе области и управления. Получено полное асимптотическое разложение по степеням малого параметра решения задачи.

Ключевые слова: сингулярные задачи, оптимальное управление, краевые задачи для систем уравнений в частных производных, асимптотические разложения.

A. R. Danilin, I. V. Pershin. Asymptotics of a solution to an optimal boundary control problem with performance index defined on a boundary.

In this paper, we study the optimal control problem of the value of the solution to an elliptic equation in a bounded domain with a smooth boundary by means of a flow through the domain boundary. We consider the operator of the equation, which is the sum of the Laplace operator with a small coefficient and a zero-order operator. The control is constrained by an integral relation. As a performance index, we employ the sum of the squared norm of the deviation of a state from a prescribed state on the domain boundary and the squared norm of the control. We obtain a complete asymptotic expansion of the solution to the problem in powers of the small parameter.

Keywords: singular problems, optimal control, boundary value problems for systems of partial differential equations, asymptotic expansions.

MSC: 35C20, 49J20, 49N05

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-2-94-107

Введение

Статья посвящена исследованию асимптотики решения задачи оптимального граничного (потоком через границу Γ) управления [1] в плоской строго выпуклой области Ω с гладкой границей и малым параметром при старших производных эллиптического оператора. Оператор уравнения есть сумма оператора Лапласа с малым коэффициентом и оператора нулевого порядка. В данной работе, в отличие от других подобных работ, критерий качества зависит от поведения решения задачи не в области Ω, а на ее границе Γ. Другие сингулярные задачи оптимального управления решениями эллиптических уравнений рассматривались в [2–6].

Отметим, что исследование задач оптимального управления решениями уравнений в частных производных, даже без зависимости от малого параметра, до сих пор актуальны [7–9].

1. Постановка задачи и определяющие соотношения

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2,3)$ — ограниченная область с границей $\Gamma := \partial\Omega$, удовлетворяющей условию: граница Γ области Ω есть бесконечно дифференцируемое многообразие размерности $n-1$, расположенное локально по одну сторону от области Ω (иными словами, мы рассматриваем $\overline{\Omega}$ как многообразие с краем Γ класса C^∞).

Рассматривается следующая задача граничного оптимального управления [1, гл. 2, соотношения (2.41), (2.9)]:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon := -\varepsilon^2 \Delta z_\varepsilon + a(x) z_\varepsilon = f(x), \quad x \in \Omega, \quad z_\varepsilon \in H^1(\Omega), \\ \varepsilon^\beta \dfrac{\partial z_\varepsilon}{\partial n} = u_\varepsilon(x), \quad x \in \Gamma, \quad u_\varepsilon \in \mathcal{U}, \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\mathcal{U} := \mathcal{U}_1, \quad \text{где} \quad \mathcal{U}_r := \big\{ u(\cdot) \in L_2(\Gamma) \colon |||u||| \leqslant r \big\}, \tag{1.2}$$

$$J(u_\varepsilon) := |||z_\varepsilon - z_d|||^2 + \nu_\varepsilon^{-1} |||u_\varepsilon(\cdot)|||^2 \to \inf, \quad u \in \mathcal{U}. \tag{1.3}$$

Здесь $\nu_\varepsilon := \nu \varepsilon^{-1}$, $\nu > 0$, $\beta \in \{1, 2\}$, $H^1(\Omega)$ — соболевское пространство функций, $\partial/\partial n$ — производная по внешней нормали к Γ, а через $|||\cdot|||$ обозначена норма в пространстве $L_2(\Gamma)$.

Через $\|\cdot\|$ будем обозначать норму в пространстве $L_2(\Omega)$, а скалярные произведения в пространствах $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$ будем обозначать через $(\cdot,\cdot)$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ соответственно.

Отметим, что при таком ν_ε, если $J(u_\varepsilon) = O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$, то и $|||z_\varepsilon - z_d|||^2 = O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.

Предполагается, что выполнены следующие условия:

$$\begin{gathered} a(\cdot), f(\cdot) \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad z_d(\cdot) \in C^\infty(\Gamma), \\ \forall\, x \in \overline{\Omega} \quad a(x) \geqslant \alpha > 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \end{gathered} \tag{1.4}$$

а решение краевой задачи (1.1) понимается в обобщенном смысле (см., например, [1, гл. 1, § 3, п. 3.4.]): для любого $\varphi \in H^1(\Omega)$ справедливо равенство

$$\varepsilon^2 (\nabla z_\varepsilon, \nabla\varphi) + (a(\cdot) z_\varepsilon, \varphi) - \varepsilon^{2-\beta} \langle u_\varepsilon, \varphi \rangle = (f, \varphi).$$

Умножив граничное условие в (1.1) на $\varepsilon^{2-\beta}$, получим задачу стандартного вида (см. [1, гл. 2, п. 4.4]) с новыми

$$\widetilde{u} = \varepsilon^{2-\beta} u, \quad \widetilde{\mathcal{U}}_\varepsilon = \mathcal{U}_{\varepsilon^{2-\beta}}, \quad \widetilde{\nu}_\varepsilon = \nu \varepsilon^{3-2\beta} :$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon = f(x), \quad x \in \Omega, \quad z_\varepsilon \in H^1(\Omega), \\ \varepsilon^2 \dfrac{\partial z_\varepsilon}{\partial n} = \widetilde{u}_\varepsilon(x), \quad x \in \Gamma, \quad u_\varepsilon \in \widetilde{\mathcal{U}}_\varepsilon, \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\widetilde{\mathcal{U}}_\varepsilon = \mathcal{U}_{r_\varepsilon}, \quad r_\varepsilon := \varepsilon^{2-\beta}, \tag{1.6}$$

$$J(\widetilde{u}_\varepsilon) := |||z_\varepsilon - z_d|||^2 + \widetilde{\nu}_\varepsilon^{-1} |||\widetilde{u}_\varepsilon(\cdot)|||^2 \to \inf, \quad \widetilde{u}_\varepsilon \in \widetilde{\mathcal{U}}_\varepsilon. \tag{1.7}$$

Как показано в [1, гл. 2, п. 4.4], задача (1.5)–(1.7) разрешима единственным образом, а ее решение — пара функций $\{z_\varepsilon, \widetilde{u}_\varepsilon\}$ — характеризуется дополнительными соотношениями (см. [1, гл. 2, соотношения (4.24), (4.26), (4.27), $M \equiv 1$]): существует $\widetilde{p}_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ такое, что

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta \widetilde{p}_\varepsilon + a(x) \widetilde{p}_\varepsilon = 0, \quad x \in \Omega, \\ \varepsilon^2 \dfrac{\partial \widetilde{p}_\varepsilon}{\partial n} - z_\varepsilon = -z_d, \quad x \in \Gamma, \end{cases} \tag{1.8}$$

$$\forall\, v \in \widetilde{\mathcal{U}} \quad \langle \widetilde{p}_\varepsilon + \widetilde{\nu}_\varepsilon^{-1} \widetilde{u}_\varepsilon, v - \widetilde{u}_\varepsilon \rangle \geqslant 0. \tag{1.9}$$

В работе [6, лемма 1] показано, что при $\widetilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U}_{r_\varepsilon}$ соотношение (1.9) эквивалентно следующему: существует $\widetilde{\lambda}_\varepsilon > 0$ такое, что

$$\widetilde{u}_\varepsilon = -\widetilde{\lambda}_\varepsilon \widetilde{p}_\varepsilon \Big|_\Gamma, \tag{1.10}$$

$$\widetilde{\lambda}_\varepsilon \in (0; \widetilde{\nu}_\varepsilon], \quad \widetilde{\lambda}_\varepsilon |||\widetilde{p}_\varepsilon||| \leqslant r_\varepsilon, \quad (\widetilde{\nu}_\varepsilon - \widetilde{\lambda}_\varepsilon)(r_\varepsilon - \widetilde{\lambda}_\varepsilon |||\widetilde{p}_\varepsilon|||) = 0. \tag{1.11}$$

Введем λ_ε и p_ε по формулам

$$\lambda_\varepsilon := \varepsilon^{2\beta-3}\widetilde{\lambda}_\varepsilon, \quad p_\varepsilon := \varepsilon^{1-\beta}\widetilde{p}_\varepsilon. \tag{1.12}$$

Отметим, что

$$u_\varepsilon = -\lambda_\varepsilon p_\varepsilon\Big|_\Gamma, \quad \text{а} \quad \widetilde{u}_\varepsilon = -\varepsilon^{2-\delta}\lambda_\varepsilon p_\varepsilon\Big|_\Gamma. \tag{1.13}$$

Таким образом, задача (1.1)–(1.3) с учетом формул (1.8)–(1.13) эквивалентна краевой задаче

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon = f(x), \quad \mathcal{L}_\varepsilon p_\varepsilon = 0, \quad x \in \Omega, \quad z_\varepsilon,\, p_\varepsilon \in H^1(\Omega), \\ \varepsilon^2 \dfrac{\partial z_\varepsilon}{\partial n} + \varepsilon^{2-\beta}\lambda_\varepsilon p_\varepsilon(x) = 0, \quad \varepsilon^2 \dfrac{\partial p_\varepsilon}{\partial n} - \varepsilon^{1-\beta} z_\varepsilon = -\varepsilon^{1-\beta} z_d, \quad x \in \Gamma, \end{cases} \tag{1.14}$$

зависящей от скалярного параметра λ_ε с дополнительным соотношением

$$\lambda_\varepsilon \in (0;\nu], \quad \lambda_\varepsilon |||p_\varepsilon||| \leqslant 1, \quad (\nu - \lambda_\varepsilon)(1 - \lambda_\varepsilon |||p_\varepsilon|||) = 0. \tag{1.15}$$

Цель работы — изучить поведение z_ε, p_ε и λ_ε при $\varepsilon \to 0$.

2. Априорные оценки

В дальнейшем различные положительные константы, зависящие только от области Ω и коэффициента $a(\cdot)$, часто будем обозначать одной и этой же буквой K (возможно с индексами).

Рассмотрим систему более общего вида, чем (1.14):

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon = f_1(x), \quad \mathcal{L}_\varepsilon p_\varepsilon = f_2(x), \quad x \in \Omega, \quad z_\varepsilon,\, p_\varepsilon \in H^1(\Omega), \\ \varepsilon^2 \dfrac{\partial z_\varepsilon}{\partial n} + \varepsilon^{2-\beta}\lambda_\varepsilon p_\varepsilon(x) = g_1, \quad \varepsilon^2 \dfrac{\partial p_\varepsilon}{\partial n} - \varepsilon^{1-\beta} z_\varepsilon = \varepsilon^{1-\beta} g_2, \quad x \in \Gamma, \end{cases} \tag{2.1}$$

где

$$f_i(\cdot) \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad g_i(\cdot) \in C^\infty(\Gamma), \quad i = 1, 2, \quad 0 < \lambda_\varepsilon \leqslant \lambda^* \text{— const}. \tag{2.2}$$

Решение системы (2.1) в случае $f_1 = f$, $f_2 = 0$, $g_1 = 0$, $\lambda_\varepsilon = \nu$ и $g_2 = -z_d$ будем обозначать как $z_{\varepsilon,d,\nu}$, $p_{\varepsilon,d,\nu}$.

Решение системы (2.1) также понимается в обобщенном смысле: для любых φ, $\psi \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2(\nabla z, \nabla\varphi) + (a(\cdot)z, \varphi) + \langle \varepsilon^{2-\beta}\lambda_\varepsilon p_\varepsilon(x) - g_1, \varphi\rangle = (f_1, \varphi), \\ &\varepsilon^2(\nabla p, \nabla\psi) + (a(\cdot)p, \psi) + \langle \varepsilon^{1-\beta} z_\varepsilon - \varepsilon^{1-\beta} g_2, \psi\rangle = (f_2, \psi). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Отметим, что положив в (2.3) $\varphi := p$, $\psi := z$ и вычитая из первого равенства второе, получим соотношение

$$\varepsilon^{1-\beta}|||z_\varepsilon|||^2 + \varepsilon^{2-\beta}\lambda_\varepsilon|||p_\varepsilon|||^2 = (f_1, p_\varepsilon) - (f_2, z_\varepsilon) + \langle g_1, p\rangle - \varepsilon^{1-\beta}\langle g_2, z_\varepsilon\rangle. \tag{2.4}$$

Кроме этого, будем использовать следующую элементарную оценку неотрицательных решений квадратичного неравенства.

Пусть $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $\gamma_x \geqslant 0$, $\gamma_y \geqslant 0$, $A_x \geqslant 0$, $A_y \geqslant 0$. Тогда

$$\text{если} \quad \gamma_x^2 x^2 + \gamma_y^2 y^2 \leqslant A_x x + A_y y, \quad \text{то} \quad x \leqslant \frac{A_x}{\gamma_x^2} + \frac{A_y}{2\gamma_x\gamma_y} \quad \text{и} \quad y \leqslant \frac{A_y}{\gamma_y^2} + \frac{A_x}{2\gamma_x\gamma_y}. \tag{2.5}$$

Аналогично доказательсту теоремы 1 из [10] доказывается справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть функция* $a(\cdot)$ *удовлетворяет условию из* (1.4).

Если $f_j \in L_2(\Omega)$ *и* $g_i \in H^{1/2}(\Gamma_i)$ $(i = 1, 2)$, *то при любом* $\lambda_\varepsilon > 0$ *задача* (2.1) *разрешима единственным образом и* $\{z, p\}$ — *ее решение с* $z, p \in H^2(\Omega)$.

При этом, если выполнены условия (2.2), *то* $z, p \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

В [6, лемма 2] доказана следующая априорная оценка для решения задачи:

$$\mathcal{L}_\varepsilon w_\varepsilon = f, \quad x \in \Omega, \qquad \varepsilon^2 \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial n} = g, \quad x \in \Gamma:$$

$$\max\{\varepsilon^{1/2}\|w_\varepsilon\|,\ \varepsilon|||w_\varepsilon|||,\ \varepsilon^{3/2}\|\nabla w_\varepsilon\|\} \leqslant K\big(\varepsilon^{1/2}\|f\| + |||g|||\big). \tag{2.6}$$

Теперь мы получим априорные оценки для решения системы (2.1) (не самые точные, но достаточные для обоснования асимптотических разложений рассматриваемой задачи (1.14), (1.15)).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (1.4) *и* (2.2).

Если $\{z_\varepsilon, p_\varepsilon\}$ — *решение задачи* (2.1), *то существует* $K > 0$ *такое, что для всех малых* $\varepsilon > 0$ *справедливы оценки*

$$\max\{\varepsilon^{1/2}\|z_\varepsilon\|, \varepsilon^{1/2}\|p_\varepsilon\|, \varepsilon|||z_\varepsilon|||, \varepsilon|||p_\varepsilon|||, \varepsilon^{3/2}\|\nabla z_\varepsilon\|, \varepsilon^{3/2}\|\nabla p_\varepsilon\|\} \leqslant \varepsilon^{-5/2}KN(f,g), \tag{2.7}$$

где $N(f,g) := \|f_1\| + \|f_2\| + |||g_1||| + |||g_2|||$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала рассмотрим $z_{\varepsilon,1}$ и $p_{\varepsilon,1}$ — решение задачи

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon z_{\varepsilon,1} = f_1(x), \quad \mathcal{L}_\varepsilon p_{\varepsilon,1} = f_2(x), \quad x \in \Omega, \\ \varepsilon^2 \dfrac{\partial z_{\varepsilon,1}}{\partial n} = g_1(x), \quad \varepsilon^2 \dfrac{\partial p_{\varepsilon,1}}{\partial n} = \varepsilon^{1-\beta} g_2(x), \quad x \in \Gamma. \end{cases}$$

Тогда в силу оценки (2.6) и того, что $1 - \beta \geqslant -1$, получим оценку

$$\max\{\varepsilon^{1/2}\|z_{\varepsilon,1}\|, \varepsilon^{3/2}\|p_{\varepsilon,1}\|, \varepsilon|||z_{\varepsilon,1}|||, \varepsilon^2|||p_{\varepsilon,1}|||, \varepsilon^{3/2}\|\nabla z_{\varepsilon,1}\|, \varepsilon^{5/2}\|\nabla p_{\varepsilon,1}\|\} \leqslant KN(f,g). \tag{2.8}$$

Теперь функции $z_{\varepsilon,2} := z - z_{\varepsilon,1}$ и $p_{\varepsilon,2} := p - p_{\varepsilon,1}$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon z_{\varepsilon,2} = 0, \quad \mathcal{L}_\varepsilon p_{\varepsilon,2} = 0, \quad x \in \Omega, \\ \varepsilon^2 \dfrac{\partial z_{\varepsilon,2}}{\partial n} + \varepsilon^{2-\beta}\lambda_\varepsilon p_{\varepsilon,2} = -\varepsilon^{2-\beta}\lambda_\varepsilon p_{\varepsilon,1}, \quad \varepsilon^2 \dfrac{\partial p_{\varepsilon,2}}{\partial n} - \varepsilon^{1-\beta} z_{\varepsilon,2} = \varepsilon^{1-\beta} z_{\varepsilon,1}, \quad x \in \Gamma. \end{cases} \tag{2.9}$$

Соотношение (2.4), примененное к z_2 и p_2, с учетом вида системы (2.9) дает неравенство

$$\varepsilon^{1-\beta}|||z_{\varepsilon,2}|||^2 + \varepsilon^{2-\beta}\lambda_\varepsilon|||p_{\varepsilon,2}|||^2 \leqslant \varepsilon^{2-\beta}\lambda_\varepsilon|||p_{\varepsilon,1}|||\cdot|||p_{\varepsilon,2}||| + \varepsilon^{1-\beta}|||z_{\varepsilon,1}|||\cdot|||z_{\varepsilon,1}|||. \tag{2.10}$$

В соответствие с (2.8) неравенство (2.10) принимает вид

$$\varepsilon^{1-\beta}|||z_{\varepsilon,2}|||^2 + \varepsilon^{2-\beta}\lambda_\varepsilon|||p_{\varepsilon,2}|||^2 \leqslant \varepsilon^{-\beta}\lambda_\varepsilon KN(f,g)|||p_{\varepsilon,2}||| + \varepsilon^{-\beta}KN(f,g)|||z_{\varepsilon,2}|||$$

или

$$\varepsilon|||z_{\varepsilon,2}|||^2 + \varepsilon^2\lambda_\varepsilon|||p_{\varepsilon,2}|||^2 \leqslant \lambda_\varepsilon KN(f,g)|||p_{\varepsilon,2}||| + KN(f,g)|||z_{\varepsilon,2}|||. \tag{2.11}$$

Из неравенства (2.11) в силу (2.5) с учетом соотношения $\lambda_\varepsilon \leqslant \lambda^*$ получим

$$\begin{gathered} |||z_{\varepsilon,2}||| \leqslant KN(f,g)(\varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-3/2}\sqrt{\lambda_\varepsilon}/2) \leqslant K_1 N(f,g)\varepsilon^{-3/2}, \\ |||p_{\varepsilon,2}||| \leqslant KN(f,g)\big(\varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-3/2}/(2\sqrt{\lambda_\varepsilon})\big). \end{gathered} \tag{2.12}$$

Оценки (2.12) согласно (2.6) дают

$$\max\{\varepsilon^{1/2}\|p_{\varepsilon,2}\|,\ \varepsilon|||p_{\varepsilon,2}|||,\ \varepsilon^{3/2}\|\nabla p_{\varepsilon,2}\|\} \leqslant K\varepsilon^{1-\beta}|||z_{\varepsilon,2}||| \leqslant K_2N(f,g)\varepsilon^{-5/2},$$

$$\max\{\varepsilon^{1/2}\|z_{\varepsilon,2}\|,\ \varepsilon|||z_{\varepsilon,2}|||,\ \varepsilon^{3/2}\|\nabla z_{\varepsilon,2}\|\} \leqslant \varepsilon^{2-\beta}\lambda_\varepsilon|||p_{\varepsilon,1}|||$$
$$\leqslant K_3N(f,g)\bigl(\lambda_\varepsilon\varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-3/2}\sqrt{\lambda_\varepsilon}/2\bigr) \leqslant K_4N(f,g)\varepsilon^{-2} \leqslant K_4N(f,g)\varepsilon^{-5/2}.$$

Теперь для получения итоговых оценок (2.7) осталось применить неравенство треугольника для норм функций $z = z_1 + z_2$ и $p = p_1 + p_2$. □

Отметим, что итоговые оценки равномерны по $\lambda_\varepsilon \leqslant \lambda^*$.

3. Аппроксимационные теоремы

Для обоснования асимптотических разложений решений задачи (1.14), (1.15) при $r = 1$ нужны теоремы об оценке уклонения точного решения $\{z_\varepsilon, p_\varepsilon, \lambda_\varepsilon\}$ этой задачи от решений аппроксимационной задачи

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon z_{\varepsilon,\gamma} = f(x) + f_{1,\gamma}(x), \quad \mathcal{L}_\varepsilon p_{\varepsilon,\gamma} = f_{2,\gamma}(x), \qquad x \in \Omega, \\ \varepsilon^2\dfrac{\partial z_{\varepsilon,\gamma}}{\partial n} + \varepsilon^{2-\beta}\lambda_{\varepsilon,\gamma}p_{\varepsilon,\gamma} = g_{1,\gamma}(x), \\ \varepsilon^2\dfrac{\partial p_{\varepsilon,\gamma}}{\partial n} - \varepsilon^{1-\beta}z_{\varepsilon,\gamma} = \varepsilon^{1-\beta}(-z_d(x) + g_{2,\gamma}(x)), \quad x \in \Gamma, \end{cases} \tag{3.1}$$

в случае, когда при $\varepsilon \to 0$

$$f_{i,\gamma} \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad g_{i,\gamma} \in C^\infty(\Gamma), \quad \|f_{i,\gamma}\| = O\bigl(\varepsilon^\gamma\bigr), \quad |||g_{i,m}||| = O\bigl(\varepsilon^\gamma\bigr), \quad i = 1,2, \tag{3.2}$$

и при аппроксимации условия (1.15).

Если при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство

$$\lambda_\varepsilon|||p_\varepsilon||| < 1, \tag{3.3}$$

то в этом случае условие (1.15) переходит в равенство $\lambda_\varepsilon = \nu$.

Если при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство

$$\lambda_\varepsilon < \nu. \tag{3.4}$$

то в этом случае условие (1.11) переходит в равенство

$$\lambda_\varepsilon|||p_\varepsilon||| = 1, \tag{3.5}$$

Утверждение 1. *Пусть выполнены условия* (1.4).

1. *Если* $\nu\,|||p_{\varepsilon,d,\nu}||| < 1$ *при всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$, *то реализуется случай* (3.3).

2. *Если* $\nu\,|||p_{\varepsilon,d,\nu}||| > 1$ *при всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$, *то реализуется случай* (3.5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В первом случае $\{z_{\varepsilon,\nu}, p_{\varepsilon,d,\nu}\}$ — решение задачи (1.14), (1.15) с $\lambda_\varepsilon = \nu$, а невыполнение условия (3.5) приводит к тому, что $\{z_{\varepsilon_n,d,\nu}, p_{\varepsilon_n,d,\nu}\}$ есть решение задачи (1.14), (1.15) с $\lambda_{\varepsilon_n} = \nu$ для некоторой последовательности $\{\varepsilon_n\}$. □

При выполнении (3.3) теорема 2 дает необходимые оценки погрешности аппроксимаций.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (1.4), (3.2) *и* (3.3).

Если $\{z_\varepsilon, p_\varepsilon, \lambda_\varepsilon\}$ *— решение задачи* (1.14), (1.15), *а* $\{z_{\varepsilon,\gamma,\nu}, p_{\varepsilon,\gamma,\nu}\}$ *— решение задачи* (3.1) *с* $\lambda_{\varepsilon,\gamma} = \nu$, *то*

$$\max\{\varepsilon^{1/2}\|z_\varepsilon - z_{\varepsilon,\gamma,\nu}\|, \varepsilon|||z_\varepsilon - z_{\varepsilon,\gamma,\nu}|||, \varepsilon^{3/2}\|\nabla(z_\varepsilon - z_{\gamma,\nu})\|\} = O\bigl(\varepsilon^{\gamma-5/2}\bigr),$$

$$\max\{\varepsilon^{1/2}\|p_\varepsilon - p_{\varepsilon,\gamma,\nu}\|, \varepsilon|||p_\varepsilon - p_{\varepsilon,\gamma,\nu}|||, \varepsilon^{3/2}\|\nabla(p_\varepsilon - p_{\gamma,\nu})\|\} = O\bigl(\varepsilon^{\gamma-5/2}\bigr)$$

при $\varepsilon \to 0$.

В случае (3.4) аппроксимация условия (1.15) имеет вид

$$\lambda_{\varepsilon,\gamma}|||p_{\varepsilon,\gamma}||| = 1 + O\big(\varepsilon^{\gamma}\big), \tag{3.6}$$

и для получения аппроксимационной теоремы требуется вспомогательное утверждение о зависимости от r оптимального $u_{\varepsilon,r}$ в задаче (1.1)–(1.3) при условии с $\mathcal{U} = \mathcal{U}_r$ и $|||u_{\varepsilon,r}||| = r$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (1.4), *а* $u_{\varepsilon,r}$ *— решение задачи* (1.1), (1.3) *с* $\mathcal{U} = \mathcal{U}_r$ *и* $|||u_{\varepsilon,r}||| = r$ *при всех* $r \in [r_*; r^*]$.

Тогда при некоторых $K > 0$ *и* $\varepsilon_0 > 0$

$$\forall\, r, r' \in [r_*; r^*], \quad \forall\, \varepsilon \in (0; \varepsilon_0] \qquad |||u_r - u_{r'}||| \leqslant K\varepsilon^{-8}|r - r'|. \tag{3.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $z_{\varepsilon,0}$ — решение задачи (1.1) с $u = 0$, а оператор $A_\varepsilon : L_2(\Gamma) \to L_2(\Gamma)$ ставит в соответствие функции u_ε сужение решения задачи (1.1) с $f = 0$ на Γ. Тогда $z_\varepsilon = z_{\varepsilon,0} + A_\varepsilon u_\varepsilon$ и функционал качества примет вид

$$J(u_\varepsilon) = |||A_\varepsilon u_\varepsilon + v_0|||^2 + \nu_\varepsilon^{-1}|||u_\varepsilon|||^2,$$

где $v_0 := z_{\varepsilon,0} - z_d$. В теореме 3 из [11] при условии $r, r' \in [r_*; r^*]$ получена оценка

$$|||u_r - u_{r'}||| \leqslant |r - r'|\frac{\nu_\varepsilon^2 r^*}{r_*}\|A_\varepsilon\|^2\Big(2\|A_\varepsilon\| + \frac{1}{r_*}\|v_0\|\Big)^4. \tag{3.8}$$

По определению $\|A_\varepsilon\|$ в силу оценок (2.6) имеем $\|A_\varepsilon\| \leqslant K\varepsilon^{-1}$. При этом

$$|||v_0||| \leqslant |||z_{\varepsilon,0}||| + |||z_d||| \overset{(2.7)}{\leqslant} K\varepsilon^{-1/2}\|f\| + |||z_d||| \leqslant K_1, \quad \nu_\varepsilon^2 = \nu^2\varepsilon^{-2}.$$

Тем самым ввиду (3.8)

$$|||u_r - u_{r'}||| \leqslant K_2\varepsilon^{-8}|r - r'|$$

при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. □

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (1.4), (3.2) *и* (3.4).

Если $\{z_\varepsilon,\ p_\varepsilon,\ \lambda_\varepsilon\}$ *— решение задачи* (1.14), (1.15), *а* $\{z_{\varepsilon,\gamma}, p_{\varepsilon,\gamma}\}$ *— решение задачи* (3.1) *с* (3.6), *то*

$$\begin{gathered}\max\{\varepsilon^{1/2}\|z_\varepsilon - z_{\varepsilon,\gamma}z\|, \varepsilon|||z_\varepsilon - z_{\varepsilon,\gamma}|||, \varepsilon^{3/2}\|\nabla z_\varepsilon - z_{\varepsilon,\gamma}\|\} = O\big(\varepsilon^{\gamma-9}\big),\\ \max\{\varepsilon^{1/2}\|p_\varepsilon - p_{\varepsilon,\gamma}\|, \varepsilon|||p_\varepsilon - p_{\varepsilon,\gamma}|||, \varepsilon^{3/2}\|\nabla p_\varepsilon - p_{\varepsilon,\gamma}\|\} = O\big(\varepsilon^{\gamma-9}\big),\\ |\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,\gamma}| = O\big(\varepsilon^{\gamma-10}\big)\end{gathered} \tag{3.9}$$

при $\varepsilon \to 0$, *и* $\gamma > 10$. □

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функции $\widetilde{z}_{\varepsilon,\gamma} := z_{\varepsilon,\gamma} - z_\varepsilon$ и $\widetilde{p}_{\varepsilon,\gamma} := p_{\varepsilon,\gamma} - p_\varepsilon$ являются решением системы

$$\left\{\begin{aligned} &\mathcal{L}_\varepsilon\widetilde{z}_{\varepsilon,\gamma} = f_{1,\gamma}(x), \quad \mathcal{L}_\varepsilon\widetilde{p}_{\varepsilon,\gamma} = f_{2,\gamma}(x), \quad x \in \Omega,\\ &\varepsilon^2\frac{\partial\widetilde{z}_{\varepsilon,\gamma}}{\partial n} = g_{1,\gamma}(x) + \lambda_\varepsilon p_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,\gamma}\widetilde{p}_{\varepsilon,\gamma}, \quad \varepsilon^2\frac{\partial\widetilde{p}_{\rho,\gamma}}{\partial n} - \varepsilon^{1-\beta}\widetilde{z}_{\varepsilon,\gamma} = \varepsilon^{1-\beta}g_{2,\gamma}(x), \quad x \in \Gamma.\end{aligned}\right. \tag{3.10}$$

Поскольку

$$|||\lambda_\varepsilon p_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,\gamma}p_{\varepsilon,\gamma}||| \overset{(3.7)}{\leqslant} K\varepsilon^{-8}\Big|\lambda_\varepsilon|||p_\varepsilon||| - \lambda_{\varepsilon,\gamma}|||p_{\varepsilon,\gamma}|||\Big| \overset{(3.5),(3.6)}{=} O\big(\varepsilon^{\gamma-8}\big) \tag{3.11}$$

при $\varepsilon \to 0$, то, применяя к решению системы (3.10) оценки (2.6), получим сначала, что

$$\max\{\varepsilon^{1/2}\|z_\varepsilon - z_{\varepsilon,\gamma}z\|, \varepsilon|||z_\varepsilon - z_{\varepsilon,\gamma}|||, \varepsilon^{3/2}\|\nabla z_\varepsilon - z_{\varepsilon,\gamma}\|\} = O\big(\varepsilon^{\gamma-8}\big).$$

Поэтому

$$|||\varepsilon^{1-\beta}\widetilde{z}_{\varepsilon,\gamma} - \varepsilon^{1-\beta}g_{2,\gamma}||| = O\big(\varepsilon^{\gamma-9}\big),$$

что в силу (2.6) дает оценки

$$\max\{\varepsilon^{1/2}\|p_\varepsilon - p_{\varepsilon,\gamma}\|, \varepsilon|||p_\varepsilon - p_{\varepsilon,\gamma}|||, \varepsilon^{3/2}\|\nabla p_\varepsilon - p_{\varepsilon,\gamma}\|\} = O\big(\varepsilon^{\gamma-9}\big).$$

Тем самым обоснованы все оценки из (3.9), кроме оценки величины $|\lambda_\varepsilon - \Lambda_\gamma|$.

Так как $\lambda_\varepsilon \overset{(3.5)}{=} |||p_\varepsilon|||^{-1} \overset{(1.11)}{\leqslant} \nu$, то

$$|||p_\varepsilon||| \geqslant \nu^{-1}. \tag{3.12}$$

Из уже полученных оценок следует, что

$$|||p_{\varepsilon,\gamma}||| \geqslant |||p_\varepsilon||| - |||p_\varepsilon - p_{\varepsilon,\gamma}||| \overset{(3.12)}{\geqslant} \nu^{-1} + O\big(\varepsilon^{\gamma-10}\big) \overset{\gamma>10}{\geqslant} \frac{1}{2\nu} \tag{3.13}$$

при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Поэтому

$$\lambda_{\varepsilon,\gamma} \overset{(3.6)}{=} \frac{1 + O\big(\varepsilon^\gamma\big)}{|||p_{\varepsilon,\gamma}|||} \overset{(3.13)}{=} O(1) \tag{3.14}$$

при $\varepsilon \to 0$. Тогда

$$\begin{aligned}|\lambda_{\varepsilon,\gamma} - \lambda_\varepsilon| \cdot |||p_\varepsilon||| &= |||\lambda_\varepsilon p_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,\gamma}(p_{\varepsilon,\gamma} - \widetilde{p}_{\varepsilon,\gamma})||| \\ &\leqslant |||\lambda_\varepsilon p_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,\gamma}p_{\varepsilon,\gamma}||| + |\lambda_{\varepsilon,\gamma}| \cdot |||\widetilde{p}_{\varepsilon,\gamma}||| \overset{(3.11),(3.14)}{=} O\big(\varepsilon^{\gamma-10}\big)\end{aligned}$$

при $\varepsilon \to 0$. □

4. Построение асимптотики

В силу теорем 3 и 5 для построения асимптотического разложения рассматриваемой задачи нужно построить ее *формальное асимптотическое решение* (ф. а. р.) (см., например, [12, введение]). Его построение осуществляется аналогично тому, как это делается в случае одного уравнения (см., например, [13; 14]).

При этом истинные оценки погрешности (сильно завышенные в доказанных теоремах) будут определяться порядком членов ф. а. р.

Внешнее разложение ищем в виде рядов

$$z_{\text{out}}(x,\varepsilon) := \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} z_{2k}(x), \quad p_{\text{out}}(x,\varepsilon) := \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} p_{2k}(x), \quad \varepsilon \to 0, \tag{4.1}$$

коэффициенты которых находятся из соответствующей рекуррентной системы

$$z_0(x) = \frac{f(x)}{a(x)}, \quad p_0(x) = 0, \quad z_{2k}(x) = \frac{\Delta z_{2k-2}}{a(x)}, \quad p_{2k} = 0, \quad k \geqslant 1. \tag{4.2}$$

Отметим, что в рассматриваемой задаче $p_{\text{out}}(x,\varepsilon) \equiv 0$.

В силу (1.4) все $z_{2k} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ и ряды (4.1) хорошо аппроксимируют уравнения из (1.14) но, вообще говоря, не аппроксимируют граничные условия (и дополнительное условие (1.15) в случае (3.5)).

Для того чтобы устранить невязку в граничных условиях, построим экспоненциально убывающие функции в окрестности всей границы Γ, удовлетворяющие соответствующей однородной системе.

Для аппроксимации граничных условий (и дополнительного условия (1.15)) в малой окрестности границы Γ (пограничный слой) вводятся новые переменные (это можно сделать в силу гладкости границы) (s,τ), где s — это координата на многообразии Γ, а τ — расстояние по нормали к Γ, исходящей из точки на Γ с координатой s.

В пограничном слое, стандартно, перейдем к новым, *растянутым*, координатам (см., например, [12, с. 31–34]) $\xi=\tau\varepsilon^{-1}$.

При этом оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ перейдет в оператор

$$\widetilde{\mathcal{L}}_\varepsilon Z=-\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}Z-\varepsilon L_1\frac{\partial}{\partial\xi}Z-\varepsilon^2L_2Z+\widetilde{a}(s,\varepsilon\xi)Z\ =:\ -\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}Z+\widetilde{a}(s,\varepsilon\xi)Z+\varepsilon\mathcal{M}_\varepsilon Z. \tag{4.3}$$

Здесь L_1 и L_2 — дифференциальные операторы 1-го и 2-го порядка, содержащие лишь дифференцирование по переменной s, с гладкими коэффициентами от s и $\tau=\varepsilon\xi$, а $\widetilde{a}(s,\tau)$ — это функция $a(x)$ в переменных s, τ.

В силу (4.3) однородная система для функций пограничного слоя в переменных s и ξ, соответствующая системе из (1.14), имеет вид

$$\left\{\widetilde{\mathcal{L}}_0Z:=-\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}Z+\widetilde{a}_0(s)Z=-\varepsilon\mathcal{M}_\varepsilon Z,\quad \widetilde{\mathcal{L}}_0P=-\varepsilon\mathcal{M}_\varepsilon P,\right. \tag{4.4}$$

где

$$\widetilde{a}(s,\varepsilon\xi)=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m\xi^m\widetilde{a}(s)_m(s).$$

Для граничных условий с учетом того, что

$$\frac{\partial}{\partial n}Z(s,\tau/\varepsilon)=-\frac{\partial}{\partial\tau}Z(s,\tau/\varepsilon)=-\varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial\xi}Z(s,\xi),\quad \frac{\partial}{\partial n}P(s,\tau/\varepsilon)=-\varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial\xi}P(s,\xi),$$

выводим следующие соотношения:

$$\left\{\begin{aligned}&-\varepsilon\frac{\partial}{\partial\xi}Z(s,0)+\varepsilon^2\widetilde{\frac{\partial}{\partial n}z_{\mathrm{out}}}(s,0)+\varepsilon^{2-\beta}\lambda_\varepsilon\nu P(s,0)=0),\\ &-\varepsilon\frac{\partial}{\partial\xi}P(s,0)-\varepsilon^{1-\beta}\big(Z(s,0)+\widetilde{z_{\mathrm{out}}}(s,0)\big)=-\varepsilon^{1-\beta}\widetilde{z}_d(s).\end{aligned}\right. \tag{4.5}$$

Здесь волна над функцией, определенной в переменных x, означает выражение этой функции в переменных s и τ.

Внутреннее разложение (в окрестности Γ) с учетом (3.14) будем искать в виде

$$\begin{gathered}Z_{\mathrm{in}}(s,\xi,\varepsilon)=\varepsilon^{m_z}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^mZ_m(s,\xi),\quad P_{\mathrm{in}}(s,\xi,\varepsilon)=\varepsilon^{m_p}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^mP_m(s,\xi),\\ \Lambda_\varepsilon=\varepsilon^{m_\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m\lambda_m,\quad m_z,m_p,m_\lambda\in\mathbb{Z},\quad m_\lambda\geqslant0\quad Z_0\neq0,\quad P_0\neq0,\quad \lambda_0\neq0.\end{gathered} \tag{4.6}$$

В случае (3.5), когда ограничения на управление по существу и $\lambda_\varepsilon\neq\nu$, к (4.4) и (4.5) добавляется дополнительное условие на $\{\lambda_m\}$ в виде асимптотического при $\varepsilon\to0$ равенства

$$1\overset{as}{=}\Big(\varepsilon^{m_\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m\lambda_m\Big)^2\Big\langle\varepsilon^{m_p}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m\ P_m,\varepsilon^{m_p}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^mP_m\Big\rangle. \tag{4.7}$$

Если ряды (4.6) будут ф. а. р. задачи (4.4), (4.5), (4.7), то в силу доказанных теорем аппроксимации будут справедливы следующие асимптотические разложения:

$$\begin{gathered}z_\varepsilon\overset{as}{=}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{2k}z_{2k}(x)+\eta(s,\tau)\varepsilon^{m_z}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^mZ_m(s,\tau/\varepsilon),\quad p_\varepsilon\overset{as}{=}\eta(s,\tau)\varepsilon^{m_p}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^mP_m(s,\tau/\varepsilon),\\ \lambda_\varepsilon\overset{as}{=}\varepsilon^{m_\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m\lambda_m\quad\text{при }\varepsilon\to0.\end{gathered} \tag{4.8}$$

Здесь $\eta(s,\tau)$ — срезающая функция пограничного слоя, т. е. бесконечно дифференцируемая функция, равная 1 в некоторой окрестности границы Γ и равная 0 вне чуть больших окрестностей границы Γ.

При этом будут выполняться соотношения

$$\lambda_\varepsilon |||p_\varepsilon||| = \varepsilon^{m_\lambda+m_p}\lambda_0|||P_0||| + o\big(\varepsilon^{m_\lambda+m_p}\big) \leqslant 1$$

или

$$\lambda_0|||P_0||| \leqslant \varepsilon^{-m_\lambda-m_p} + o\big(1\big). \tag{4.9}$$

Из (4.9) следует, что если $m_\lambda + m_p \geqslant 1$, то реализуется случай (3.3), т. е. ограничения на управление не по существу и тем самым

$$\lambda_0 = \nu, \quad m_\lambda = 0, \quad m_p \geqslant 1. \tag{4.10}$$

Поэтому в случае (3.5) с необходимостью выполняется соотношение

$$m_\lambda + m_p \leqslant 0. \tag{4.11}$$

В соответствие с (4.6) и (4.4) задача для главных членов внутреннего разложения имеет вид

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{L}}_0 Z_0 = 0, \quad \widetilde{\mathcal{L}}_0 P_0 = 0, \\ -\varepsilon^{m_z+1}\dfrac{\partial}{\partial\xi}Z_0 + \varepsilon^2\widetilde{\dfrac{\partial}{\partial n}z_0}(s,0) + \varepsilon^{2-\beta+m_\lambda+m_p}\lambda_0 P_0 = 0, \quad \xi = 0, \\ -\varepsilon^{1+m_p}\dfrac{\partial}{\partial\xi}P_0 - \varepsilon^{1-\beta+m_z}Z_0 = \varepsilon^{1-\beta}(\widetilde{z}_0 - \widetilde{z}_d), \quad \xi = 0. \end{cases} \tag{4.12}$$

В классе экспоненциально убывающих при $\xi \to +\infty$ функций система (4.12) имеет единственное решение

$$Z_0 = C_0(s)e^{-\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}\xi}, \quad Z_0 = D_0(s)e^{-\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}\xi},$$

где $C_0(s) = [C_\varepsilon(s)]_0 \neq 0$, $D_0(s) = [D_\varepsilon(s)]_0 \neq 0$ (здесь $[\cdot]_0$ означает взятие суммы слагаемых порядка до ε^0), а $C_\varepsilon(s)$ и $D_\varepsilon(s)$ находятся из линейной системы уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon^{m_z+1}\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}C_\varepsilon + \varepsilon^{2-\beta+m_\lambda+m_p}\lambda_0 D_\varepsilon = \varepsilon^2 g_1(s), \\ \varepsilon^{\beta+m_p}\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}D_\varepsilon - \varepsilon^{m_z}C_\varepsilon = g_2(s), \end{cases} \tag{4.13}$$

где

$$g_1(s) := -\varepsilon^2\widetilde{\frac{\partial}{\partial n}z_0}(s,0), \quad g_2(s) := \widetilde{z}_0 - \widetilde{z}_d. \tag{4.14}$$

Решая систему (4.13), получим

$$C_\varepsilon = \frac{-\varepsilon^{m_\lambda}\lambda_0 g_2(s) + \varepsilon^{2\beta}\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}g_1(s)}{\varepsilon^{m_z}\big(\varepsilon^{m_\lambda}\lambda_0 + \varepsilon^{2\beta-1}\widetilde{a}_0(s)\big)}, \quad D_\varepsilon = \frac{\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}g_2(s) - \varepsilon g_1(s)}{\varepsilon^{1-\beta+m_p}\big(\varepsilon^{m_\lambda}\lambda_0 + \varepsilon^{2\beta-1}\widetilde{a}_0(s)\big)}. \tag{4.15}$$

В дальнейшем будем предполагать, что функции, определенные в (4.14), удовлетворяют условиям

$$g_1(s) \neq 0, \quad g_2(s) \neq 0. \tag{4.16}$$

Поскольку $C_0 = [C_\varepsilon]_0$ и $D_0 = [D_\varepsilon]_0$, то из (4.15) и (4.16) имеем

$$\min\{2\beta, m_\lambda\} = \min\{2\beta - 1 + m_z, m_\lambda + m_z\}, \quad \min\{\beta + m_p, 1 - \beta + m_\lambda + m_p\} = 0. \tag{4.17}$$

1. Сначала рассмотрим $m_\lambda = 0$ (этот случай соответствует, в частности, ситуации (4.10), когда $\lambda_\varepsilon = \nu$).

При этом условии из (4.17) получим, что

$$\begin{gathered} m_z = 0, \quad m_p = \beta - 1, \quad C_0 = -g_2(s), \quad D_0 = \frac{g_2\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}}{\lambda_0}, \\ Z_0(s,\xi) = -g_2(s)e^{-\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}\xi}, \quad P_0(s,\xi) = \frac{g_2\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}}{\lambda_0}e^{-\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}\xi}. \end{gathered} \tag{4.18}$$

Поскольку из (4.18) следует, что $m_\lambda + m_p = m_p = \beta - 1$, то ввиду (4.9) при $\beta = 2$ ограничения на управление не по существу и $\lambda_\varepsilon = \nu$, а $\lambda_m = 0$ при $m \geqslant 1$.

При $\beta = 1$ согласно (4.18) $m_p = 0$ и $\lambda_0|||P_0||| = |||g_2(\cdot)\sqrt{\widetilde{a}_0(\cdot)}|||$. Тем самым при выполнении условия

$$A := |||g_2(\cdot)\sqrt{\widetilde{a}_0(\cdot)}||| < 1 \tag{4.19}$$

в силу (4.9) ограничения на управление не по существу, как и при $\beta = 2$, справедливы равенства $\lambda_\varepsilon = \nu$, а $\lambda_m = 0$ при $m \geqslant 1$.

Подставляя ряды (4.6) в (4.4) и (4.5) для нахождения Z_m и P_m, при $m \geqslant 1$ получим систему

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{L}}_0 Z_m = F_m(s,\xi), \quad \widetilde{\mathcal{L}}_0 P_m = G_m(s,\xi), \qquad m \geqslant 1, \\ -\dfrac{\partial Z_m}{\partial \xi} + \nu P_m = g_{1,m}(s), \quad Z_m = g_{2,m}(s), \quad m \geqslant 1. \end{cases} \tag{4.20}$$

При этом решения системы (4.20) имеют вид

$$\begin{cases} Z_m = e^{-\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}\xi}\big(C_m(s) + \widehat{F}_m(s,\xi)\big), \quad P_m = e^{-\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}\xi}\big(D_m(s) + \widehat{G}_m(s,\xi)\big), \\ \sqrt{\widetilde{a}_0(s)}C_m(s) + \nu D_m(s) = \widehat{g}_{1,m}, \quad C_m(s) = \widehat{g}_{2,m}, \end{cases} \tag{4.21}$$

где $\widehat{F}_m(s,\xi)$, $\widehat{F}_m(s,\xi)$ — многочлены по ξ с коэффициентами, гладко зависящими от s, и гладкие функции $\widehat{g}_{1,m}$, $\widehat{g}_{2,m}$ однозначно определяются внешним разложением (4.2) и Z_k, и P_k при $k < m$.

Из (4.21) коэффициенты $C_m(s)$ и $D_m(s)$ находятся однозначно, а функции $Z_m(s,\xi)$ и $P_m(s,\xi)$ являются ограниченными. Поэтому построенные ряды (4.6) будут ф. а. р. задачи (1.14), (1.15), и, значит, справедлива

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* (1.4).

Если $\beta = 2$ или ($\beta = 1$ и выполнено (4.19)*), то справедливы асимптотические разложения* (4.8)*, где $\lambda_\varepsilon = \nu$, $m_z = 0$, $m_p = \beta - 1$.* □

2. Теперь рассмотрим случай

$$\beta = 1, \quad A > 1. \tag{4.22}$$

При этих условиях $m_\lambda \geqslant 1$ и реализуется равенство (3.5), а (4.9) принимает вид

$$\lambda_0|||P_0||| = \varepsilon^{-(m_\lambda + m_p)} + o(1) = 1,$$

откуда с учетом неравенства (4.11) следует, что

$$m_\lambda + m_p = 0, \quad \lambda_0|||P_0||| = 1. \tag{4.23}$$

Равенства (4.17) в этом случае дают соотношения

$$\begin{gathered} \min\{2\beta, m_\lambda\} = \min\{1 + m_z, m_\lambda + m_z\} = [m_\lambda \geqslant 1] = 1 + m_z, \\ \min\{\beta + m_p, 1 - \beta + m_\lambda + m_p\} = [m_\lambda \geqslant 1] = 1 + m_p = 0. \end{gathered}$$

В силу (4.23) отсюда следует

$$m_\lambda = 1,\ m_z = 0,\ m_p = -1, \quad C_0(s) = \frac{-\lambda_0 g_2(s)}{\widetilde{a}_0(s) + \lambda_0}, \quad D_0(s) = \frac{g_2(s)\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}}{\widetilde{a}_0(s) + \lambda_0}. \tag{4.24}$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (1.4) *и* (4.22).
Тогда существует единственное λ_0 *такое, что* $\lambda_0|||P_0||| = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду (4.24)

$$\lambda_0|||P_0||| = \lambda_0\Big|\Big|\Big|\frac{g_2(s)\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}}{\widetilde{a}_0(s)+\lambda_0}\Big|\Big|\Big| = \Big|\Big|\Big|\frac{g_2(s)\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}}{\lambda_0^{-1}\widetilde{a}_0(s)+1}\Big|\Big|\Big| =: \mathcal{F}(\lambda_0).$$

Функция $\mathcal{F}$ непрерывна, строго убывает на $(0;+\infty)$ и

$$\lim_{\lambda\to+0}\mathcal{F}(\lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda\to+\infty}\mathcal{F}(\lambda) = A > 1.$$

Теперь осталось применить теорему о промежуточном значении. □

Таким образом, в силу леммы 1 найдено λ_0 из (4.6), удовлетворяющее соотношению (4.23).

Подставляя ряды (4.6) в (4.4), (4.5) и (4.7), получим систему для нахождения Z_m, P_m и λ_m при $m \geqslant 1$:

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{L}}_0 Z_m = F_m(s,\xi), \quad \widetilde{\mathcal{L}}_0 P_m = G_m(s,\xi), \\ -\dfrac{\partial Z_m}{\partial \xi} + \lambda_0 P_m = -\lambda_m P_0 + g_{1,m}(s), \quad -\dfrac{\partial P_m}{\partial \xi} - Z_m = g_{2,m}(s), \\ 2\lambda_0^2\langle P_0, P_m\rangle + 2\lambda_0\lambda_m|||P_0|||^2 = \gamma_m, \end{cases} \tag{4.25}$$

Как и в случае (4.21),

$$\begin{cases} Z_m = e^{-\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}\xi}\big(C_m(s) + \widehat{F}_m(s,\xi)\big), \quad P_m = e^{-\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}\xi}\big(D_m(s) + \widehat{G}_m(s,\xi)\big), \\ \sqrt{\widetilde{a}_0(s)}C_m(s) + \lambda_0 D_m(s) = -\lambda_m D_0 + \widehat{g}_{1,m}, \quad C_m(s) + \sqrt{\widetilde{a}_0(s)}D_m(s) = \widehat{g}_{2,m}, \end{cases} \tag{4.26}$$

где $\widehat{F}_m(s,\xi)$, $\widehat{F}_m(s,\xi)$ — многочлены по ξ с коэффициентами, гладко зависящими от s, и гладкие функции $\widehat{g}_{1,m}$, $\widehat{g}_{2,m}$ однозначно определяются внешним разложением и Z_k, и P_k при $k < m$.

Пусть $C_{m,1}$, $D_{m,1}$ — решение системы

$$\Big\{\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}C_m(s) + \lambda_0 D_m(s) = \widehat{g}_{1,m}, \quad C_m(s) + \sqrt{\widetilde{a}_0(s)}D_m(s) = \widehat{g}_{2,m},$$

а $C_{m,2}$, $D_{m,2}$ — решение системы

$$\Big\{\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}C_m(s) + \lambda_0 D_m(s) = -\lambda_m D_0, \quad C_m(s) + \sqrt{\widetilde{a}_0(s)}D_m(s) = 0. \tag{4.27}$$

Тогда $C_m = C_{m,1} + C_{m,2}$, $D_m = D_{m,1} + D_{m,2}$, а $C_{m,1}$ и $D_{m,1}$ однозначно определяются по $\widehat{g}_{1,m}$ и $\widehat{g}_{2,m}$. Решая систему (4.27), имеем

$$C_{m,2}(s) = -\lambda_m\frac{D_0(s)\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}}{\widetilde{a}_0(s)+\lambda_0}, \quad D_{m,2}(s) = -\lambda_m\frac{D_0(s)}{\widetilde{a}_0(s)+\lambda_0}. \tag{4.28}$$

Поэтому последнее уравнение в системе (4.25) в силу (4.26) и (4.28) преобразуется к виду

$$\lambda_m\big(\lambda_0\langle P_0, \widehat{P}\rangle + |||P_0|||^2\big) = \widehat{\gamma}_m, \quad \text{где} \quad \widehat{P}(s,\xi) := \frac{-D_0(s)}{\widetilde{a}_0(s)+\lambda_0}e^{-\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}\xi}. \tag{4.29}$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (1.4) *и* (4.22).
Тогда $\lambda_0\langle P_0, \widehat{P}\rangle + |||P_0|||^2 \neq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользовавшись (4.29), получим

$$\lambda_0\langle P_0, \widehat{P}\rangle + |||P_0|||^2 = -\lambda_0\Big\langle D_0(\cdot), \frac{-D_0(\cdot)}{\widetilde{a}_0(\cdot)+\lambda_0}\Big\rangle + \langle D_0(\cdot), D_0(\cdot)\rangle$$

$$= \Big\langle D_0(\cdot), D_0(\cdot) + \frac{-\lambda_0 D_0(\cdot)}{\widetilde{a}_0(\cdot)+\lambda_0}\Big\rangle = \Big\langle D_0^2(\cdot), \frac{\widetilde{a}_0(\cdot)}{\widetilde{a}_0(\cdot)+\lambda_0}\Big\rangle > 0.$$

Последнее неравенство справедливо в силу непрерывности и положительности каждого из сомножителей. □

Таким образом, в соответствие с леммой 2 из (4.29) величины λ_m находятся однозначно, а построенные ряды (4.6) — ф.а.р. задачи (4.5), (4.7). Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия* (1.4) *и* (4.22).
Тогда справедливы асимптотические разложения (4.8), *где* $m_\lambda = 1$, $m_z = 0$, $m_p = -1$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
2. **Данилин А.Р.** Асимптотика ограниченных управлений для сингулярной эллиптической задачи в области с малой полостью // Мат. сб. 1998. Т. 189, № 11. С. 27–60.
3. **Данилин А.Р.** Аппроксимация сингулярно возмущенной эллиптической задачи оптимального управления // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 10. С. 3–12.
4. **Капустян В.Е.** Асимптотика ограниченных управлений в оптимальных эллиптических задачах // Докл. АН Украины. Сер. Математика, естествознание, технические науки. 1992. № 2. С. 70–74.
5. **Капустян В.Е.** Оптимальные бисингулярные эллиптические задачи с ограниченным управлением // Докл. АН Украины. 1993. № 6. С. 81–85.
6. **Данилин А.Р., Зорин А.П.** Асимптотика решения задачи оптимального граничного управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 95–107.
7. **Lou H., Yong J.** Second-order necessary conditions for optimal control of semilinear elliptic equations with leading term containing controls // Math. Control Relat. Fields. 2018. Vol. 8, no. 1. P. 57–88. https://doi.org/10.3934/mcrf.2018003
8. **Betz Livia M.** Second-order sufficient optimality conditions for optimal control of nonsmooth, semilinear parabolic equations // SIAM J. Control Optim. 2019. Vol. 57, no. 6. P. 4033–4062. https://doi.org/10.1137/19M1239106
9. **Лубышев Ф.В., Файрузов М.Э.** Аппроксимация задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений конвекции-диффузии с граничным наблюдением конормальной производной, с управлениями в коэффициентах оператора конвективного переноса и нелинейном члене уравнения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2024. Т. 64, № 7. С. 1163–1182. https://doi.org/10.31857/S0044466924070055
10. **Данилин А.Р.** Оптимальное граничное управление в области с малой полостью // Уфим. мат. журн. 2012. Т. 4, № 2. С. 87–100.
11. **Данилин А.Р.** Асимптотика решения задачи оптимального граничного управления потоком через часть границы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 116–127.
12. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.

13. **Вишик М.И., Люстерник Л.А.** Регуляроное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, вып. 5. С. 3–122.
14. **Ильин А.М.** Пограничный слой // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 34. М.: ВНИТИ, 1988. С. 175–214. (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР.)

Поступила 21.11.2024
После доработки 22.01.2025
Принята к публикации 27.01.2025

Данилин Алексей Руфимович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: dar@imm.uran.ru

Першин Игорь Викторович
математик первой категории
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: piv@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Lions J.L. *Controle optimal de systemes gouvernes par des equations aux derivees partielles*. Paris, Dunod, Gauthier-Villars, 1968, 426 p. Translated to Russian under the title *Optimal'noye upravleniye sistemami, opisyvayemymi uravneniyami s chastnymi proizvodnymi*, Moscow, Mir Publ., 1972, 414 p.
2. Danilin A.R. Asymptotic behaviour of bounded controls for a singular elliptic problem in a domain with a small cavity. *Sb. Math.*, 1998, vol. 189, no. 11, pp. 1611–1642. https://doi.org/10.1070/SM1998v189n11ABEH000364
3. Danilin A.R. Approximation of a singularly perturbed elliptic problem of optimal control. *Sb. Math.*, 2000, vol. 191, no. 10, pp. 1421–1431. https://doi.org/10.1070/SM2000v191n10ABEH000512
4. Kapustyan V.E. Asymptotics of bounded controls in optimal elliptic problems. *Dokl. Akad. Nauk Ukr.*, 1992, no. 2, pp. 70–74 (in Russian).
5. Kapustyan V.E. Optimal bisingular elliptic problems with bounded control. *Dokl. Akad. Nauk Ukr.*, 1993, no. 6, pp. 81—85.
6. Danilin A.R., Zorin A.P. Asymptotics of a solution to an optimal boundary control problem. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2010, vol. 269, suppl. 1, pp. S81–S94. https://doi.org/10.1134/S0081543810060088
7. Lou H., Yong J. Second-order necessary conditions for optimal control of semilinear elliptic equations with leading term containing controls. *Math. Control Relat. Fields*, 2018, vol. 8, no. 1, pp. 57–88. https://doi.org/10.3934/mcrf.2018003
8. Betz Livia M. Second-order sufficient optimality conditions for optimal control of nonsmooth, semilinear parabolic equations. *SIAM J. Control Optim.*, 2019, vol. 57, no. 6, pp. 4033–4062. https://doi.org/10.1137/19M1239106
9. Lubyshev F.V., Fairuzov M.E. Approximation of optimal control problems for semilinear elliptic convection–diffusion equations with boundary observation of the conormal derivative and with controls in coefficients of the convective transport operator and in nonlinear term of the equation. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2024, vol. 64, no. 7, pp. 1443–1460. https://doi.org/10.1134/S0965542524700659
10. Danilin A.R. Optimal boundary control in a small concave domain. *Ufimsk. Mat. Zh.*, 2012, vol. 4, no. 2, pp. 87–100 (in Russian).
11. Danilin A.R. Asymptotics of the solution in a problem of optimal boundary control of a flow through a part of the boundary. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 292, suppl. 1, pp. S55–S66. https://doi.org/10.1134/S008154381602005X
12. Il'in A.M. *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*. Providence, Amer. Math. Soc., 1992, 281 p. ISBN: 978-0-8218-4561-5. Original Russian text published in Il'in A. M. *Soglasovanie asimtoticheskikh razlozhenii reshenii kraevykh zadach*, Moscow, Nauka Publ., 1989, 336 p.

13. Vishik M.I., Lyusternik L.A. Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter. *Uspehi Mat. Nauk* (*N.S.*), 1957, vol. 12, no. 5(77), pp. 3–122 (in Russian).
14. Il'in A.M. A boundary layer. *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr.*, 1988, vol. 34, pp. 175–213 (in Russian).

Received November 21, 2024
Revised January 22, 2025
Accepted January 27, 2025

Aleksey Rufimovich Danilin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: dar@imm.uran.ru .

Igor' Viktorovich Pershin, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: piv@imm.uran.ru .

Cite this article as: A. R. Danilin, I. V. Pershin. Asymptotics of a solution to an optimal boundary control problem with performance index defined on a boundary. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 2, pp. 94–107.