ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 31 № 2 2025

УДК 517.977

О ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В КЛАССЕ ПОЗИЦИОННЫХ КОНТРУПРАВЛЕНИЙ[1]

Н. Л. Григоренко

Рассматривается линейный конфликтно управляемый процесс двух игроков с терминальным множеством в виде суммы линейного подпространства и выпуклого компакта в его ортогональном дополнении. Процесс рассматривается с точки зрения 1-го игрока. Его цель — вывести управляемый объект на терминальное множество. Считается, что первый игрок знает динамические характеристики управляемого объекта, фазовые переменные и управление 2-го игрока. Изложены достаточные условия, при которых первый игрок может гарантировать выведение фазового вектора игры на терминальное множество. Приводится форма позиционного контрупрaвления 1-го игрока, гарантирующая завершение процесса. Такое позиционное контрупрaвление предназначено для работы в рамках логики пошагового позиционного управления совокупной системой, включающей реальный управляемый объект и модель (поводыря) и реализующей отслеживание движения поводыря в виде процедуры экстремального прицеливания, которая выполняется пошагово в дискретной системе и обладает устойчивостью к информационным помехам, достигаемой в схеме с поводырем. Рассмотрены примеры.

Ключевые слова: дифференциальные игры, позиционное управление, контрупрaвление, позиционное контрупрaвление, задача сближения, структурный синтез, управление с поводырем, аналитическое конструирование агрегированных регуляторов.

N. L. Grigorenko. On linear differential games of pursuit in the class of positional counter-controls.

A linear conflict-controlled process of two players with a terminal set in the form of the sum of a linear subspace and a convex compact in its orthogonal complement is considered. The process is considered from the point of view of the first player. Its goal is to bring the controlled object to the terminal set. It is assumed that the first player knows the dynamic characteristics of the controlled object, the phase variables and the control of the second player. Sufficient conditions are presented under which the first player can guarantee the bringing of the phase vector of the game to the terminal set. A form of positional counter-control of the first player guaranteeing the completion of the process is given. Such positional counter-control is intended for operation in the logic of step-by-step positional control of a combined system including a real controlled object and a model (guide) and implementing tracking of the guide's movement in the form of an extreme aiming procedure implemented step-by-step in a discrete system and having resistance to information interference, achieved in a scheme with a guide. Examples are considered.

Keywords: differential games, positional control, counter-control, positional counter-control, object bringing problem, structural synthesis, guide control, analytical design of aggregated controllers.

MSC: 91A23, 91A24, 91A80

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-2-69-80

Введение

В работах [1–3] разработана позиционная процедура управления с поводырем для решения задач сближения-уклонения в нелинейных дифференциальных играх. В ней движение управляемого объекта описывается подходящей математической моделью — управляемой системой, которая передполагается заданной при постановке задачи. Информация о ее движении поступает в форме измерения фазового вектора управляемого процесса. Система поводыря не задана в постановке задачи управления, а построена в процессе ее решения. Информацию о движении поводыря доставляют вычисления, которые предусмотрены в рамках предлагаемой

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284 и госбюджетной темы НИР № 5.4 ВМК МГУ.

процедуры. Движение поводыря моделируется параллельно с реализацией движения управляемой системы. Эти движения согласно позиционной процедуре взаимосвязаны и формируются в зависимости от состояний управляемой системы и поводыря. Для решения задачи сближения в системе поводыря могут применяться алгоритмы решения задачи сближения в классе контруправлений [4–7]. В данной статье для случая линейных дифференциальных игр предложен подход к конструированию управлений, решающих задачу сближения для поводыря в классе позиционных контруправлений, который использует классификацию игровых управляемых систем по параметру “активизация” и основан на технологии метода аналитического конструирования агрегированных регуляторов [8]. Такое позиционное контруправление предназначено для работы в рамках логики пошагового позиционного управления совокупной системой, включающей реальный управляемый объект и модель (поводыря) и реализующей отслеживание движения поводыря в виде процедуры экстремального прицеливания, которая выполняется пошагово в дискретной системе и обладает устойчивостью к информационным помехам, достигаемой в схеме с поводырем. Получены: аналитические выражения для управления 1-го игрока в рассматриваемых задачах сближения; оценка гарантированного времени окончания игры; ресурс 1-го игрока, достаточный для окончания игры.

1. Постановка задачи сближения для линейной дифференциальной игры в классе позиционных контруправлений

Рассматривается управляемый объект вида [4–7]:

$$\dot{w}(t) = Aw(t) + Bu(w(t), v(t), t) - Cv(t), \quad w(0) = w_0, \quad v(t) \in Q. \tag{1.1}$$

Здесь $w(t) \in \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$; $(w, u, t) \to u(w, u, t) \in P(w, t) \subset \mathbb{R}^{n_1}$ — заданное отображение $(n_1 \geq 1)$; $v(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$ $(n_2 \geq 1)$ — значение фазового вектора и векторов управления 1-го и 2-го игроков в момент $t \geq 0$ соответственно; $w_0 \in \mathbb{R}^n$ — начальное состояние системы; $P(w, t)$ — непустое, замкнутое (не обязательно ограниченное) множество в $\mathbb{R}^{n_1}$, непрерывное в метрике Хаусдорфа по w, t; Q — заданный компакт в $\mathbb{R}^{n_2}$; A, B, C — постоянные $n \times n$-, $n \times n_1$-, $n \times n_2$-матрицы соответственно. Через $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 1)$ обозначено m-мерное арифметическое евклидово пространство m-мерных векторов, записываемых в виде столбцов, со стандартным скалярным произведением векторов $(\cdot, \cdot)$ и со стандартной длиной вектора $|\cdot|$.

Допустимые управления игроков в задаче сближения при различных параметрах уравнения (1.1) будем рассматривать двух видов.

Первый вид: измеримые по Борелю функции $v(t) \in Q$ для 2-го игрока и функции $(w, u, t) \to u(w, v, t) \in P(w, t)$, непрерывные по (w, v) и измеримые по t, — для 1-го игрока. В момент t управление $v(\tau), \tau \in [0, t]$, известно 1-му игроку. Будущие значения управления $v \in Q$ неизвестны. Вектор $w(t)$ является решением системы (1.1) при управлениях $u(t) = u(w(t), v(t), t)$, $v(t)$ и $w(0) = w_0$.

Второй вид: дифференцируемые функции $v(t)$ до порядка m для 2-го игрока,

$$\bar{v} = (v, v', \ldots, v^{(m)}), \quad v^{(j)} = \frac{d^j v}{dt^j}, \quad v^{(j)} \in Q_j, \quad j = 0, \ldots, m, \quad Q_j \text{ — компакт из } \mathbb{R}^{n_2} \ (n_2 \geq 1),$$

и контруправления $u(w, \bar{v}, t) \in P(w, t)$, непрерывные по $(w, \bar{v})$ и измеримые по t, — для 1-го игрока. Управление $v(\tau)$ и его производные по τ: $v^{(j)}(\tau) \in Q_j$, $j = 0, \ldots, m$, при $\tau \in [0, t]$ известны 1-му игроку. Будущие значения управления $v \in Q$ и его производные неизвестны. Вектор $w(t)$ рассчитывается из уравнения (1.1) при управлениях $u(w(t), \bar{v}(t), t)$, $\bar{v}(t)$ и $w(0) = w_0$.

Считается, что 1-й игрок заинтересован в скорейшем выведении вектора $w(t)$ на терминальное множество вида

$$M = \{w : \pi w(\theta) = a + S_l^2\},$$

где π — матрица ортогонального проектирования $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$; S_l^2 — шар радиуса l; a — фиксированный вектор из $\mathbb{R}^2$; $l \geq 0$ — фиксированная константа, θ — не фиксированный момент окончания процесса сближения. Предполагается, что 1-й игрок знает динамические характеристики конфликтно управляемого объекта (1.1), т. е. знает матрицы A, B, C, множества $P(w,t)$, Q, M. Управление $v(t) \in Q, t \geq 0$, моделирует возможные возмущения, действующие на управляемый объект (1.1). Можно считать, что роль 2-го игрока играет природа, действия которой непредсказуемы, но они ограничены некоторыми рамками.

Задача сближения: Найти условия на параметры системы (1.1), при которых существуют $u(w,v,t) \in P(w,t)$, $\theta > 0$: $\pi w(\theta) \in a + S_l^2$ для $\forall\ \bar{v}(t)$: $v^{(j)}(t) \in Q_j$, $j = 0, \ldots, m$, $t \in [0, \theta]$.

Определение 1. В модели (1.1) множества $P(w,t)$ и Q соответствуют а-параметрам (параметрам активизации) $k_i, k_j \geq 1$, если существуют векторы $q_i, h_j \in \mathbb{R}^2$ такие, что множества $\pi A^i BP(w,t)$ и $\pi A^j CQ$ являются одноточечными при $i = 0, \ldots, k_i - 1$, $w \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, и $j = 0, \ldots, k_j - 1$, соответственно, $\pi A^i BP(w,t) = q_i$, $i = 0, \ldots, k_i - 1$, $\pi A^j CQ = h_j$, $j = 0, \ldots, k_j - 1$, а множества $\pi A^{k_i} BP(w,t)$ и $\pi A^{k_j} CQ$ телесные для $\forall w$, $t \geq 0$, т. е. каждое содержит шар $S_r^\nu(b)$ размерности $\nu \geq 1$, радиуса $r > 0$ с центром в точке b. Скажем, что а-параметры 1-го и 2-го игроков одинаковые, если $k_i = k_j$; а-параметр 1-го игрока меньше а-параметра 2-го игрока, если $k_i < k_j$; а-параметр 1-го игрока, больше а-параметра 2-го игрока, если $k_i > k_j$.

2. Линейная игра с одинаковыми а-параметрами игроков

Рассмотрим систему (1.1) при управлениях игроков первого вида. Введем векторную функцию рассогласования $\varphi = \pi w - a$ и рассмотрим ее производные в силу системы (1.1).

$$\begin{cases} \varphi = \pi w - a = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{R}^2, \\ \varphi' = \pi w' = \pi(Aw + Bu - Cv) = \pi Aw + q_0 - h_0, \\ \varphi'' = (\pi Aw)' = \pi A(Aw + Bu - Cv) = \pi A^2 w + q_1 - h_1, \\ \qquad\qquad \ldots \quad \ldots \\ \varphi^{(k-1)} = \pi A^{k-2} w' = \pi A^{k-2}(Aw + Bu - Cv) \\ \qquad\quad = \pi A^{k-1} w + q_{k-2} - h_{k-2}, \\ \varphi^{(k)} = \pi A^{k-1} w' = \pi A^{k-1}(Aw + Bu - Cv) \\ \qquad = \pi A^k w + \pi A^{k-1} Bu - \pi A^{k-1} Cv, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $k \geq 1$ — наименьшее, при котором $\varphi^{(k)}$ зависит от u. Обозначим: K — 2×2-матрица, $\det K \neq 0$; ψ_1 — векторная функция $\psi_1 = K\varphi = K(\pi w - a)$.

Предположение 1. *Пусть для системы (1.1) $k_i = k_j = k$, и векторная функция $\psi_1(t) = (\psi_{11}(t), \psi_{12}(t))$ удовлетворяет системе уравнений*

$$\psi_1^{(k)} + T_1 \psi_1^{(k-1)} + T_2 \psi_1^{(k-2)} \ldots + T_k \psi_1 = 0, \tag{2.3}$$

где T_i — 2×2-диагональные матрицы с элементами T_{i1}, T_{i2} на диагонали $(i = 1, \ldots, k)$ при $T_{ij} > 0$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, 2$, при каждом j, удовлетворяющие условию Рауса — Гурвица [8].

При выполнении предположения 1 решение каждого уравнения системы (2.3) асимптотически устойчиво, $\psi_{1j}(t) \to 0$, $j = 1, 2$, $t \to \infty$. Момент $\bar{\theta}$, при котором $\|\psi_1(\bar{\theta})\| \leq l_1$, $l_1 > 0$, находится из теоремы об оценке времени регулирования [9, теорема 4.20] по начальным условиям для ψ_1 и параметру l_1.

Предположение 2. *Квадратная 2×2-матрица $G = \pi A^{k-1} B$ невырожденная.*

Управление 1-го игрока находится из (2.3), (2.2), (1.1) при предположениях 1, 2 и является измеримой функцией [10]:

$$u(t) = u(w(t), v(t), t) = G^{-1}\big(\pi A^{k-1}Cv(t) - \pi A^k w(t) - K^{-1}\Sigma_{i=1}^k T_i \psi_1^{(k-i)}(t)\big). \tag{2.4}$$

Предположение 3. *При выполнении для системы* (1.1) *условия* $k_i = k_j = k$ *множество, которому принадлежат* $u(t)$, *имеет следующую форму*:

$$P_1(w(t), t) = G^{-1}\big(\pi A^{k-1}CQ - \pi A^k w(t) - K^{-1}\Sigma_{i=1}^k T_i \psi_1^{(k-i)}(t)\big). \tag{2.5}$$

Теорема 1. *Если в игре* (1.1) *выполнены предположения* 1–3, *a-параметры* 1*-го и* 2*-го игроков одинаковы, игроки используют управления первого вида и множество* $P(w,t)$ *имеет форму* (2.5), *то управление* $u(w,v,t)$ *в виде соотношения* (2.4) *гарантирует окончание игры к моменту* $\bar\theta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (1.1), в рассматриваем случае $k_i = k_j$, с учетом (2.2), (2.3) получаем

$$\pi A^{k-1}\dot w = -K^{-1}\Sigma_{i=1}^k T_i \psi_1^{(k-i)},$$
$$(\pi w - a)^k + T_1(\pi w - a)^{k-1} + T_2(\pi w - a)^{k-2} \ldots + T_k(\pi w - a) = 0.$$

Из предположения 1 имеем $\psi_1(t) \to 0$ и $((\pi w(t))_j - a_j) \to 0, j = 1, 2,$ при $t \to \infty$. Момент $\bar\theta$ определим как $\max_i \theta_i$, где θ_i — первый момент времени выполнения неравенства $|(\pi w(t))_i - a_i| \le l,\ i = 1, 2$. Множество $P_1(w,t)$, являющееся ограничением на управление u, находится из соотношения (2.4) при учете ограниченности решения системы (1.1) для $t \in [0, \bar\theta]$, ограничений на v и параметры $q_i, h_i,\ i = 0, \ldots, k-2$ и $T_i,\ i = 1, \ldots, k$. Выбор параметров $T_{i1},\ T_{i2},\ i = 1, \ldots, k$, влияет на гарантированное время окончания игры $\bar\theta$ и параметры множества $P_1(w,t)$ (2.5), при котором выполнено включение $u(t) \in P_1(w,t),\ t \in [0, \bar\theta]$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Согласно (2.5) множество $P_1(w,t) \ni u(t)$ компактно в силу компактности Q и ограниченности $w(t), \psi_1^{(k-i)}(t)$ для $i = 1, \ldots, k,\ t \in [0, \bar\theta]$.

З а м е ч а н и е 2. Предположение 1 для ψ_1 и уравнений (1.1) формирует управление 1-го игрока. Соотношение (2.3) является уравнением Эйлера — Лагранжа для соответствующего сопровождающего оптимизирующего функционала [8]. Порядок производной k — первая производная функции ψ_1, зависящая от управления u.

3. Линейная игра при меньшем значении a-параметра первого игрока, чем значение a-параметра второго игрока

Рассмотрим систему (1.1) при $k_i < k_j$ и при управлениях игроков первого вида. Обозначим $\bar k = k_i$. Запишем векторное рассогласование $\varphi_2 = \pi w - a$ и его производные, вычисленные для случая $k_i < k_j$ по аналогии с (2.2) и отличающиеся от (2.2) компонентой $\varphi_2^{(\bar k)}$:

$$\varphi_2^{(\bar k)} = \pi A^{\bar k - 1} w' = \pi A^{\bar k - 1}(Aw + Bu - Cv) \quad = \pi A^{\bar k} w + \pi A^{\bar k - 1} Bu - h_{\bar k - 1}, \tag{3.1}$$

где $\bar k \ge 1$ — наименьшее, при котором $\varphi_2^{(\bar k)}$ зависит от u. Обозначим: K_2 — 2×2-матрица, $\det K_2 \ne 0$, ψ_2 — векторная функция, $\psi_2 = K_2(\pi w - a)$.

Предположение 4. *Пусть для системы* (1.1) $\bar k = k_i < k_j$ *и векторная функция* $\psi_2(t)$ *удовлетворяет системе уравнений*

$$\psi_2^{(\bar k)} + T_1 \psi_2^{(\bar k - 1)} + T_2 \psi_2^{(\bar k - 2)} \ldots + T_{\bar k} \psi_2 = 0, \tag{3.2}$$

где T_i — 2×2*-диагональные матрицы с элементами* T_{i1}, T_{i2} *на диагонали* $(i = 1, \ldots, k)$ *для* $j = 1$ *и* $j = 2$ *при* $T_{ij} > 0,\ i = 1, \ldots, k,$ *при каждом* j, *удовлетворяющие условию Рауса — Гурвица* [11].

При выполнении предположения 4 для решения каждого уравнения системы (4.2) имеем $\psi_{2j} \to 0$, $j = 1, 2$, $t \to \infty$. Момент $\bar{\theta}$, при котором $\|\psi_2(\bar{\theta})\| \le l_1$, $l_1 > 0$, находится из теоремы о времени регулирования [9] по начальным условиям для ψ_2 и параметру l_1. Предположение 4 и уравнение (4.2) выполняют функции, аналогичные сформулированным в замечании 2.

Предположение 5. *Квадратная* 2×2*-матрица* $G_2 = \pi A^{\bar{k}-1}B$ *невырожденная.*

Управление 1-го игрока находится из соотношений (3.1), (4.2), (1.1) при предположениях 4, 5:

$$u(t) = u(w(t), t) = G_2^{-1}\big(h_{\bar{k}-1} - \pi A^{\bar{k}} w(t) - K_2^{-1}\Sigma_{i=1}^{\bar{k}} T_i \psi_2^{(\bar{k}-i)}(t)\big). \tag{3.3}$$

Предположение 6. *При выполнении для системы* (1.1) *условия* $\bar{k} = k_i < k_j$ *множество* (*одноточечное*), *которому принадлежат* $u(t)$, *имеет следующую форму*:

$$P_2(w(t), t) = G_2^{-1}\big(h_{\bar{k}-1} - \pi A^{\bar{k}} w(t) - K_2^{-1}\Sigma_{i=1}^{\bar{k}} T_i \psi_2^{(\bar{k}-i)}(t)\big). \tag{3.4}$$

Теорема 2. *Если в игре* (1.1) *выполнены предположения* 4–6, *a-параметр* 1*-го игрока меньше a-параметра* 2*-го игрока, игроки используют управления первого вида и множество* $P(w, t)$ *имеет форму* (3.4), *то управление* $u(w, t)$, *определяемое соотношением* (3.3), *гарантирует окончание игры к моменту* $\bar{\theta}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2 проводится аналогично доказательству теоремы 1.

4. Игра при значении a-параметра первого игрока большем, чем значение a-параметра второго игрока

Рассмотрим систему (1.1) при $\hat{k} = k_i = l + m > k_j = l$ и при управлениях игроков второго вида. Векторное рассогласование $\varphi = \pi w - a$ и его производные рассмотрим при выполнении соотношения $k_i = l + m > k_j = l$. Они отличаются от (2.2) компонентами $\varphi^{(l)}$, $\varphi^{(l+1)}$, $\ldots \varphi^{(l+m)}$ следующего вида:

$$\begin{cases} \varphi^{(l)} = \pi A^{l-1} w^{(1)} = \pi A^{l-1}(Aw + Bu - Cv) \\ \qquad = \pi A^l w + q_{l-1} - \pi A^{l-1} C v, \\ \varphi^{(l+1)} = \pi A^l w^{(1)} - \pi A^{l-1} C v^{(1)} = \pi A^l (Aw + Bu - Cv) - \pi A^{l-1} C v^{(1)} \\ \qquad = \pi A^{l+1} w + q_l - \pi A^l C v - \pi A^{l-1} C v^{(1)}, \\ \qquad\qquad \ldots \quad \ldots \\ \varphi^{(l+m)} = \pi A^{l+m} w + \pi A^{l+m-1} B u - \pi A^{l+m-1} C v - \pi A^{l+m-2} C v^{(1)} - \ldots \\ \qquad \ldots - \pi A^{l-1} C v^{(m)}, \end{cases} \tag{4.1}$$

где $\hat{k} = l + m \ge 1$ — наименьшее k_i, при котором $\varphi^{(k_i)}$ зависит от u. Обозначим: K_3 — 2×2–матрица, $\det K_3 \ne 0$; ψ_3 — векторная функция $\psi_3 = K_3(\pi w - a)$.

Предположение 7. *Пусть для системы* (1.1) $\hat{k} = k_i = l + m > k_j = l$ *и векторная функция* $\psi_3(t)$ *удовлетворяет системе уравнений*

$$\psi_3^{(\hat{k})} + T_1 \psi_3^{(\hat{k}-1)} + T_2 \psi_3^{(\hat{k}-2)} \ldots + T_{\hat{k}} \psi_3 = 0. \tag{4.2}$$

T_i — 2×2*-диагональные матрицы с элементами* T_{i1}, T_{i2} *на диагонали* $(i = 1, \ldots, \hat{k})$ *при* $T_{i1} > 0$, $T_{i2} > 0$, $i = 1, \ldots, \hat{k}$, *удовлетворяющие условию Рауса — Гурвица* [11].

При выполнении предположения 7 решение каждого уравнения системы (4.2) асимптотически устойчиво, $\psi_{3j} \to 0$, $j = 1, 2$. Момент $\bar{\theta}$, при котором $\|\psi(\bar{\theta})\| \le l_1$, находится согласно теореме о времени регулирования [9] по начальным условиям для ψ_3 и параметру l.

Предположение 8. *Квадратная* 2×2-*матрица* $G_3 = \pi A^{\hat{k}-1} B$ *невырожденная.*

Управление 1-го игрока находится из (4.2), (4.1), (1.1):

$$\begin{gathered} u(w, \bar{v}, t) = u(w, v, v^{(1)}, \ldots, v^{(m)}, t) \\ = G_3^{-1}\big(- \pi A^{\hat{k}} w + \Sigma_{i=0}^m \pi A^{\hat{k}-1-i} C v^{(i)} - K_3^{-1} \Sigma_{i=1}^l T_i \psi_3^{(\hat{k}-i)}(t) \big). \end{gathered} \tag{4.3}$$

Предположение 9. *При выполнении для системы* (1.1) *условия* $\hat{k} = k_i = l + m > k_j = l$ *множество, которому принадлежат* $u(t)$, *имеет следующую форму*:

$$P_3(w, t) = G_3^{-1}\big(- \pi A^{\hat{k}} w + \Sigma_{i=0}^m \pi A^{\hat{k}-1-i} C Q_i - K_3^{-1} \Sigma_{i=1}^l T_i \psi_3^{(\hat{k}-i)}(t) \big). \tag{4.4}$$

Теорема 3. *Если в игре* (1.1) *выполнены предположения* 7–9, *a-параметр* 1-*го игрока больше a-параметра* 2-*го игрока, игроки используют управления второго вида для игры* (1.1) *и множество* $P(w, t)$ *имеет форму* (4.4), *то управление* $u(w, \bar{v}, t)$ *в виде соотношения* (4.3) *гарантирует окончание игры к моменту* $\bar{\theta}$.

З а м е ч а н и е 3. Множество $P_3(w, t)$, определяемое (4.4), компактно в силу компактности $Q_i, i = 1, \ldots, m$, и ограниченности $w(t), \psi_2^{\hat{k}-i}(t)$ для $i = 1, \ldots, l$, $t \in [0, \bar{\theta}]$.

5. Примеры

П р и м е р 1. Игра “два крокодила” [4–7]. Задача сближения:

$$\begin{cases} P: \ \ddot{y} = u, \quad \|u\| \le \rho, \\ E: \ \ddot{z} = v, \quad \|v\| \le \sigma, \quad y, z, u, v \in \mathbb{R}^2, \\ M = \{(y, \dot{y}, z, \dot{z})\colon \|y - z\| \le l\}. \end{cases}$$

Соответствующая дифференциальная игра: $w = (w_1, w_2) = (y - z, \dot{y} - \dot{z})$,

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = w_2, \quad \|u\| \le \rho, \quad \|v\| \le \sigma, \\ \dot{w}_2 = u - v, \quad w_i \in \mathbb{R}^2, \quad M = \{(w_1, w_2)\colon \|w_1 - a\| \le l\}, \quad a = (a_1, a_2). \end{cases} \tag{5.1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix}, \quad \pi = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\pi B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \pi C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \pi A B u = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \pi A C v = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix},$$

а-параметры 1-го и 2-го игроков $k = k_i = k_j = 2$. Функция рассогласования и ее производные:

$$\varphi = w_1 - a, \quad \varphi' = w_2, \quad \varphi'' = u - v,$$

Предположение 10. *Выполнено функциональное уравнение для*

$$\psi = K(w_1 - a), \quad K = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix}, \quad \det K \ne 0, \quad T_i = \begin{pmatrix} T_{i1} & 0 \\ 0 & T_{i2} \end{pmatrix}, \quad T_{i1} > 0, \quad T_{i2} > 0, \quad i = 1, 2,$$

$$\psi'' + T_1 \psi' + T_2 \psi = 0. \tag{5.2}$$

Из соотношения (5.2) имеем

$$u(w_1, w_2, v) = v - K^{-1} T_1 K w_2 - K^{-1} T_2 K (w_1 - a), \tag{5.3}$$

Гарантированное время окончания игры $\bar{\theta}$ для начальной точки $\psi(0), \psi'(0)$ и заданного l находится из теоремы об оценке времени регулирования [9].

Предположение 11. *Для параметра ρ выполнено соотношение*

$$\rho > \sigma + \max_{t\in[0,\bar\theta]} \|K^{-1}T_1Kw_2(t) + K^{-1}T_2K(w_1(t)-a)\|, \quad T_{ij} > 0, \quad i,j = 1,2.$$

При управлении (5.3) система (5.1) имеет вид

$$\begin{cases} \dot w_1 = w_2, \\ \dot w_2 = -K^{-1}T_1Kw_2 - K^{-1}T_2K(w_1-a), \end{cases}$$

и, следовательно,

$$w_1'' + K^{-1}T_1Kw_2 + K^{-1}T_2K(w_1-a) = 0,$$
$$K(w_1-a)'' + T_1K(w_1-a)' + T_2K(w_1-a) = 0.$$

Решение последней системы $(w_1(t)-a) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, $\dot w_1(t) = w_2(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, $w_1(t), w_2(t)$ ограничены, и, таким образом, за конечное время $\bar\theta$ вектор $w_1(t)$ окажется в l-окрестности целевого вектора a. Отметим, что T_1, T_2 выбираются пользователем при условии $T_{i1} > 0$, $T_{i2} > 0$, $i = 1,2$. Из уравнения (5.3) следует, что при достаточно малых положительных T_{i1}, T_{i2} имеем $\rho > \sigma$, и $\bar\theta$ может оказаться большим, а при возрастании T_{i1}, T_{i2} уменьшается $\bar\theta$, но возрастает требуемое ограничение ρ для окончания игры.

П р и м е р 2. Игра “мальчик и крокодил” [4–7]. Задача сближения:

$$\begin{cases} P: \ \dot y = u, \\ E: \ \dot z = v, \quad y,z,u,v \in \mathbb{R}^2, \quad \|v\| \le \sigma, \\ M = \{(y,\dot y, z) : \|y-z\| \le l\}. \end{cases}$$

Соответствующая дифференциальная игра: $w = (w_1, w_2) = (y - z, \dot y)$,

$$\begin{cases} \dot w_1 = w_2 - v, \quad \|u\| \le \rho, \quad \|v\| \le \sigma, \quad \|v'\| \le \sigma_1, \quad w_i \in \mathbb{R}^2, \\ \dot w_2 = u, \quad M = \{(w_1,w_2) : \|w_1 - a\| \le l\}, \quad a = (a_1, a_2), \end{cases} \tag{5.4}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -E \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \pi = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi B = 0,$$

$\pi ABu = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$, $\pi Cv = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$, а-показатели игроков P: $k_i = 2$ и E: $k_j = 1$. Функция рассогласования и ее производные: $\varphi = w_1 - a$, $\varphi' = w_2 - v$, $\varphi'' = u - v'$.

Предположение 12. *Выполнено функциональное уравнение для $\psi_3 = K_3(w_1 - a)$, $K_3 = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix}$, $\det K_3 \neq 0$:*

$$\psi_3'' + T_1\psi_3' + T_2\psi_3 = 0, \quad T_i = \begin{pmatrix} T_{i1} & 0 \\ 0 & T_{i2} \end{pmatrix}, \quad T_{i1} > 0, \quad T_{i2} > 0. \tag{5.5}$$

Решая уравнения (5.5), (5.4) относительно параметра u, находим

$$u(w_1, w_2, v, v') = v' - K_3^{-1}T_1K_3(w_2 - v) - K_3^{-1}T_2K_3(w_1 - a), \tag{5.6}$$

где $v(t)$ — кусочно-дифференцируемая функция. Если $\|v'(t)\| \le \sigma_1$, то $\rho \ge \sigma_1 + \epsilon$ при $T_{i1} > 0$, $T_{i2} \to 0$, $i = 1,2$. Здесь $\epsilon > 0$ — малая константа. При управлении (5.6) имеем

$$w_1'' = u - v' = -K_3^{-1}T_1K_3(w_2 - v) - K_3^{-1}T_2K_3(w_1 - a)$$

и, следовательно, $K_3(w_1-a)''+T_1K_3(w_1-a)'+T_2K_3(w_1-a)=0$. Решение последней системы асимптотически устойчиво, и, таким образом, за конечное время $\bar{\theta}$ вектор $x_1(t)$ окажется в l-окрестности целевого вектора a. Отметим, что матрицы T_1, T_2 выбираются пользователем при условии $T_{i1}>0, T_{i2}>0$. Из уравнения (5.6) следует, что при достаточно малых положительных T_{i1}, T_{i2} имеем $\rho>\sigma$, и $\bar{\theta}$ может оказаться большим, а при возрастании T_{i1}, T_{i2} уменьшается $\bar{\theta}$, но возрастает требуемое ограничение на ρ для окончания игры.

Пример 3. Игра "контрольный пример" [4–7]. Запишем задачу сближения:

$$\begin{cases} P: \ \ddot{y}=-\alpha\,\dot{y}+u, \\ E: \ \ddot{z}=-\beta\,\dot{z}+v, \quad y,z,u,v\in\mathbb{R}^2, \quad \|v\|\le\sigma, \\ M \ =\{(y,\dot{y},z,\dot{z}):\|y-z\|\le l\}. \end{cases}$$

Соответствующая дифференциальная игра: $w=(w_1,w_2,w_3)=(y-z,\dot{y},\dot{z})$,

$$\begin{cases} \dot{w}_1 &= w_2-w_3, \ \|u\|\le\rho, \ \|v\|\le\sigma, \ w_i\in\mathbb{R}^2, \\ \dot{w}_2 &= -\alpha w_2+u, \ M=\{(w_1,w_2,w_3):\|w_1-a\|\le l\}, \ a=(a_1,a_2), \\ \dot{w}_3 &= -\beta w_3+v, \end{cases} \tag{5.7}$$

$$A=\begin{pmatrix}0 & E & -E\\ 0 & -\alpha & 0\\ 0 & 0 & -\beta\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}0\\ E\\ 0\end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ E\end{pmatrix}, \quad \pi=\begin{pmatrix}E & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\pi B=\begin{pmatrix}u\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \quad \pi ABu=\begin{pmatrix}u\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \quad \pi C=\begin{pmatrix}u\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \quad \pi ACv=\begin{pmatrix}-v\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Используя обозначения $w_i=(w_{i1},w_{i2})$, $i=1,2,3$, имеем

$$\dot{w}_{11}=w_{21}-w_{31}, \quad \dot{w}_{12}=w_{22}-w_{32}, \quad \dot{w}_{21}=-\alpha w_{21}+u_1,$$

$$\dot{w}_{22}=-\alpha w_{22}+u_2, \quad \dot{w}_{31}=-\beta w_{31}+v_1, \quad \dot{w}_{32}=-\beta w_{32}+v_2,$$

Функция рассогласования $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$:

$$\varphi_1=c_1(w_{11}-a_1)+c_2(w_{12}-a_2), \quad \varphi_2=h_1(w_{11}-a_1)+h_2(w_{12}-a_2),$$

$$\varphi_1'=c_1(w_{21}-w_{31})+c_2(w_{22}-w_{32}), \quad \varphi_2'=h_1(w_{21}-w_{31})+h_2(w_{22}-w_{32}),$$

$$\varphi_1''=c_1(-\alpha w_{21}+u_1+\beta w_{31}-v_1)+c_2(-\alpha w_{22}+u_2+\beta w_{32}-v_2),$$

$$\varphi_2''=h_1(-\alpha w_{21}+u_2+\beta w_{31}-v_1)+h_2(-\alpha w_{22}+u_2+\beta w_{32}-v_2).$$

Здесь $k=2$, $K=\begin{pmatrix}c_1 & c_2\\ h_1 & h_2\end{pmatrix}$, c_i,h_i — const, $i=1,2$, $c_1h_2-c_2h_1\ne 0$.

Предположение 13. *Выполнено функциональное уравнение для* $\psi=K(\varphi-a)$, $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$, $K=\begin{pmatrix}c_1 & c_2\\ h_1 & h_2\end{pmatrix}$, $\det K\ne 0:$

$$\psi''+T_1\psi'+T_2\psi=0, \quad T_i=\begin{pmatrix}T_{i1} & 0\\ 0 & T_{i2}\end{pmatrix}, \quad T_{ij}>0, \quad T_{i2}>0. \tag{5.8}$$

Из соотношения (5.8) находим u_1, u_2:

$$u_1(w,v) = \frac{v_1(c_1h_2 - c_2h_1) + F_{11}(w)h_2 - F_{21}(w)c_2}{c_1h_2 - c_2h_1} = v_1 + \frac{F_{11}(w)h_2 - F_{21}(w)c_2}{c_1h_2 - c_2h_1}, \tag{5.9}$$

$$u_2(w,v) = \frac{v_2(c_2h_1 - c_1h_2) + F_{11}(w)h_1 - F_{21}(w)c_1}{-c_1h_2 + c_2h_1} = v_2 + \frac{F_{11}(w)h_1 - F_{21}(w)c_1}{-c_1h_2 + c_2h_1}, \tag{5.10}$$

где

$$F_{11}(w) = -c_1(-\alpha w_{21} + \beta w_{31}) - c_2(-\alpha w_{22} + \beta w_{32})$$
$$+ T_{11}\big(c_1(w_{21} - w_{31}) + c_2(w_{22} - w_{32})\big)T_{21}\big(c_1(w_{11} - a_1) + c_2(w_{12} - a_2)\big);$$
$$F_{21}(w) = -h_1(-\alpha w_{21} + \beta w_{31}) - h_2(-\alpha w_{22} + \beta w_{32})$$
$$+ T_{12}\big(h_1(w_{21} - w_{31}) + h_2(w_{22} - w_{32})\big) + T_{22}\big(h_1(w_{11} - a_1) + h_2(w_{12} - a_2)\big).$$

В силу (5.7) и предположения 13 при управлении (5.9), (5.10) для $\Delta = \dfrac{l}{\sqrt{2}}$ и момента $\bar\theta$, вычисленного для (5.8) при $t > \bar\theta$, $\|w_{11}(t) - a_1\| \le \Delta$, $\|w_{12}(t) - a_2\| \le \Delta$.

Формулу для управления (5.9), (5.10) запишем в виде

$$u_p(w,v) = \begin{pmatrix} u_1(w,v) \\ u_2(w,v) \end{pmatrix} = v + F(w).$$

Ограниченность функций u_1, u_2 следует из ограниченности $v \in Q$, ограниченности функций $w_2(t), w_3(t)$ при $\alpha > 0, \beta > 0$, ограниченности $w_1(t), t \in [0, \bar\theta]$.

При подстановке управления u из (5.9), (5.10) в (5.7) убеждаемся, что в момент $\bar\theta$ выполнено условие окончания игры

$$\begin{cases} w_1'' = w_2' - w_3' = -\alpha w_2 + u + \beta w_3 - v = -T_1(w_2 - w_3) - T_2(w_1 - a); \\ (w_1 - a)'' + T_1(w_1 - a)' + T_2(w_1 - a) = 0; \\ w_1 \to a, \quad w_1' \to 0, \quad t \to \infty. \end{cases}$$

Приведем результат численного моделирования фазовых траекторий системы (5.7) примера 3 при $n = 2$. На рис. 1 приведен график первых двух компонент фазового вектора системы при контруправлении 1-го игрока и управлении $v(t) = (\sin t, 12\cos t)$ — 2-го игрока. Параметры игры: $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\bar\theta_p = 22$, $T_{ij} = 0.1$, $i,j = 1,2$, $w_1(0) = (8,8)$, $w_2(0) = (-1,-1)$, $w_3(0) = (-1,1)$. На рис. 2, 3 — графики компонент контруправления при таких параметрах игры T_{ij}.

6. Использование позиционных контруправлений при решении задачи сближения в классе позиционных управлений с поводырем

Расмотрим линейную дифференциальную игру сближения:

$$\dot x(t) = Ax(t) + Bu(x(t), w(t), t) - Cv(t), \quad x(0) = x_0, \quad u(x,w,t) \in P_4(x,w,t), \quad v(t) \in Q, \tag{6.1}$$

в классе позиционных управлений с поводырем 1-го игрока [1–3].

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ $(n \ge 1)$; $u(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$ $(n_1 \ge 1)$; $v(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$ $(n_2 \ge 1)$ — значения фазового вектора и векторов управления 1-го и 2-го игроков в момент $t \ge 0$ соответственно; $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — начальное состояние системы; $P_4(x,w,t)$ — непустое компактное множество в $\mathbb{R}^{n_1}$, непрерывное в метрике Хаусдорфа по x, w, t; w — фазовый вектор поводыря (будут определены далее); Q — заданный компакт в $\mathbb{R}^{n_2}$; A, B, C — постоянные $n \times n$-, $n \times n_1$-,

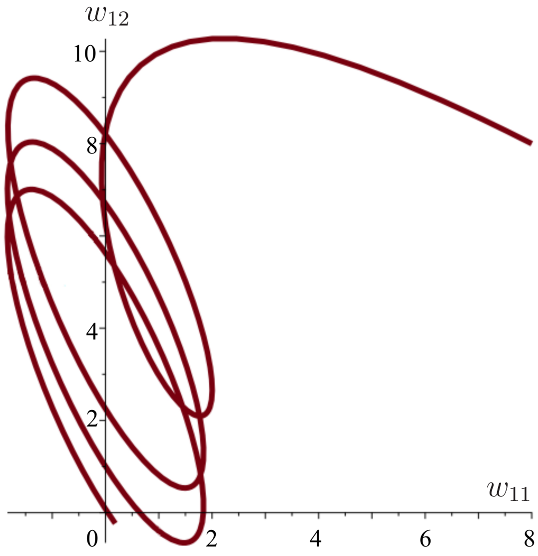

Рис. 1. $w_{11}(t), w_{12}(t)$

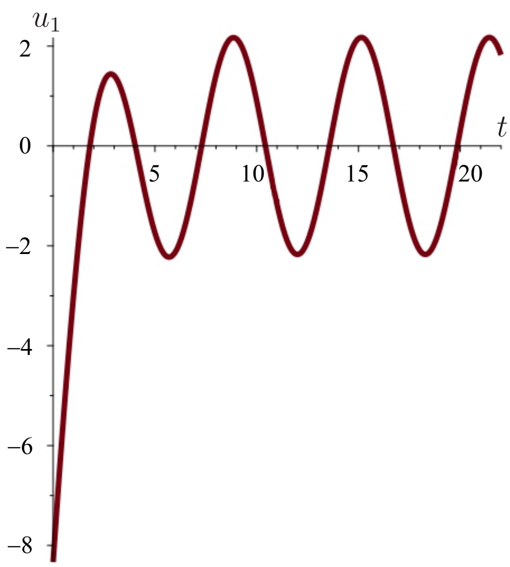

Рис. 2. $u_{1p}(t)$

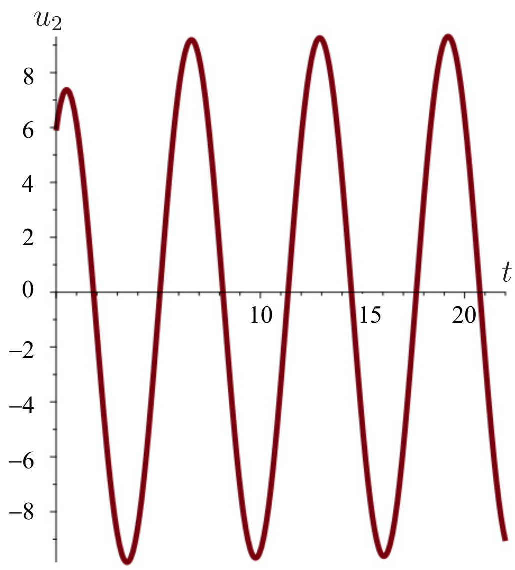

Рис. 3. $u_{2p}(t)$

$n \times n_2$-матрицы соответственно. Игра заканчивается при достижении фазовым вектором малой окрестности целевого множества M.

В работах [1–3] показано, что задача сближения имеет решение в классе позиционных управлений с поводырем, если для поводыря существует управление 1-го игрока для начальной позиции x_0, гарантирующее окончание игры при любом допустимом управлении 2-го игрока.

В случае использования системы поводыря с позиционным контуправлением процедура управления с поводырем [3] имеет следующий вид. Система поводыря — вспомогательная управляемая система, в которой первый игрок формирует управление поводыря u_p при управлении v_p, выбранном по правилу экстремального прицеливания для управления 2-го игрока. Фазовый вектор системы поводыря $w(t)$ находится как решение уравнения

$$\begin{gathered} \dot{w}(t) = Aw(t) + Bu_p(w(t), v_p(x(t), w(t)), t) - Cv_p(x, w), \quad w(0) = x_0, \\ u_p \in P_4(x, w, t), \quad v_p(t) \in Q, \end{gathered} \tag{6.2}$$

где функция $v_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to Q$ и удовлетворяет условию

$$(x(t) - w(t))' C v_p(x(t), w(t)) = \max_{v \in Q} (x(t) - w(t))' C v, \tag{6.3}$$

$u_p(w(t), v_p(x(t), w(t)), t)$ — позиционное контруправление поводыря, описанное в предыдущих разделах. Такое управление может иметь одну из форм (2.4), (3.3), (4.3).

Управление 1-го игрока в игре (6.26) выбирается по правилу экстремального прицеливания [1–3]. Определим $P_4(x, w, t)$ как множество, которому принадлежит позиционное контруправление $u_p(w, v_p(x, w), t)$ при управлении 2-го игрока $v_p(x, w)$ (6.3). Такое множество может иметь соответственно одну из форм (2.5), (3.4), (4.4). Определим функцию $u_d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_2} \to P_1(x, w, Q)$, удовлетворяющую условию

$$(x(t) - w(t))' B u_d(w(t), x(t), v_p(x(t), w(t))) = \min_{u \in P_4(x,w,t)} (x(t) - w(t))' B u. \tag{6.4}$$

Выбранное управление $u_d(t)$ в паре с управлением $v(t) \in Q(t_0 \le t < \vartheta)$, реализованным 2-м игроком, определит движение $x(t)$ управляемой системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_d(w(t), x(t), v_p(v(t), w(t))) - Cv(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Справедливо следующее

Утверждение 1. *Для начального условия $x(0) = x_0$ и ограничения на управление 1-го игрока $P_4(x, w, t)$, решение системы (6.1), конструируемое при управлении (6.4) по алгоритму работы [3] с поводырем (6.2), приходит в малую окрестность терминального множества M к моменту времени $\bar{\theta}$, определяемому системой поводыря.*

Д о к а з а т е л ь с т в о утверждения проводится по схеме доказательства теоремы о разрешимости задачи преследования работы [3].

Представленный в работе подход к решению линейной дифференциальной игры в классе позиционных контруправлений для поводыря зависит от параметров настройки, влияющих на гарантированное время сближения, необходимый ресурс управления 1-го игрока и характеристики процесса сближения. Аналитический вид управления поводыря удобен при численной реализации управлений игроков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М. Физматлит, 1985. 520 с.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М. Физматлит, 1981. 288 с.
4. **Понтрягин Л.С.** Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. Новая серия. 1980. Т. 112, № 3. С. 307–330.
5. **Куржанский А.Б.** Задача идентификации — теория гарантированных оценок // Автоматика и телемеханика. 1991. № 4. С. 3–26.
6. **Никольский М.С.** Первый прямой метод Л. С. Понтрягина в дифференциальных играх. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 65 с.
7. **Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В.** Дифференциальные игры. Киев: Наукова думка, 1992. 264 с.
8. **Колесников А.А.** Синергетические методы управления сложными системами. Теория системного синтеза. М.: Книжный дом “Либроком”, 2019. 240 с.
9. **Ким Д.П.** Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. М.: Физматлит, 2007. 440 с.

10. **Филиппов А.Ф.** О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестн. МГУ. № 2. 1959. С. 25–32.
11. **Филиппов А.Ф.** Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., 2004. 176 с.

Поступила 17.01.2025
После доработки 14.04.2025
Принята к публикации 21.04.2025

Григоренко Николай Леонтьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
г. Москва
e-mail: grigor@cs.msu.ru

REFERENCES

1. Krasovskiy N.N. *Upravleniye dinamicheskoy sistemoy. Zadacha o minimume garantirovannogo rezul'tata* [Dynamic system control. Minimum guaranteed result problem]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 520 p.
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* New York, Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8. Original Russian text was published in Krasovskii N. N., Subbotin A. I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
3. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniy* [Guarantee optimization in control problems]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 288 p.
4. Pontryagin L.S. Linear differential games of pursuit. *Math. USSR-Sb.*, 1981, vol. 40, no. 3, pp. 285–303. https://doi.org/10.1070/SM1981v040n03ABEH001815
5. Kurzhanskii A.B. The identification problem — the theory of guaranteed estimates. *Autom. Remote Control*, 1991, vol. 52, no. 4, pp. 447–465.
6. Nikol'skiy M.S. *Pervyy pryamoy metod L. S. Pontryagina v differentsial'nykh igrakh* [The first direct method of L. S. Pontryagin in differential games]. Moscow, MGU Publ., 1984, 65 p.
7. Pshenichnyi B.N., Ostapenko V.V. *Differentsial'nyye igry* [Differential games]. Kyiv, Naukova Dumka, 1992, 259 p. ISBN: 5120023592.
8. Kolesnikov A.A. *Sinergeticheskiye metody upravleniya slozhnymi sistemami. Teoriya sistemnogo sinteza* [Synergetic methods of managing complex systems. Theory of system synthesis]. Moscow, KD Librokom, 2019, 240 p. ISBN: 978-5-397-06702-7.
9. Kim D.P. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya. T.2. Mnogomernyye, nelineynyye, optimal'nyye i adaptivnyye sistemy: uchebnoye posobiye* [Theory of automatic control. T. 2. Multidimensional, nonlinear, optimal and adaptive systems: a tutorial]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004, 464 p. ISBN: 5-9221-0534-5.
10. Filippov A.F. On some issues of the theory of optimal control. *Vestnik MGU*, 1959, no. 2, pp. 25–32 (in Russian).
11. Filippov A.F. *Sbornik zadach po differentsial'nym uravneniyam* [Collection of problems on differential equations]. Izhevsk, NITS "Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika", 2000, 176 p. ISBN: 5-93972-008-0.

Received January 17, 2025
Revised April 14, 2025
Accepted April 21, 2025

Funding Agency: The paper was published with the financial support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation as part of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under the agreement no. 075-15-2022-284 and state-funded research topic № 5.4 of the Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics of the Moscow State University.

Nikolay Leontievich Grigorenko, Dr. Phis.-Math Sci., Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics of the Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia,
e-mail: grigor@cs.msu.ru.

Cite this article as: N. L. Grigorenko. On linear differential games of pursuit in the class of positional countercontrols. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 2, pp. 69–80.