ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 31 № 2 2025

УДК 517.977

МНОЖЕСТВА ПРИТЯЖЕНИЯ В АБСТРАКТНЫХ ЗАДАЧАХ О ДОСТИЖИМОСТИ

А. Г. Ченцов

Рассматриваются абстрактные задачи о достижимости в топологическом пространстве (ТП) при наличии ограничений асимптотического характера (ОАХ); данные ОАХ могут возникать, в частности, при последовательном ослаблении тех или иных стандартных ограничений. Упомянутые ОАХ порождаются непустым семейством множеств в исходном пространстве обычных решений (управлений). Результатом действия ОАХ можно в упомянутых случаях считать множество притяжения, являющееся предельным по отношению к “обычным” достижимым множествам (ДМ); данные ДМ в задачах управления могут соответствовать областям достижимости при тех или иных конкретных ограничениях на выбор управлений.

Ключевые слова: задача о достижимости, множество притяжения, фильтр.

A. G. Chentsov. Attraction sets in abstract reachability problems.

The abstract reachability problems in topological space with constraints of asymptotic nature (CAN) are considered; given CAN can arise (in particular) through the consistent weakening of one or more standard constraints. The above-mentioned CAN are generated by a nonempty family of sets in the initial space of usual solutions (controls). As a result of the action of CAN, we can (in the above-mentioned cases) consider attraction set being the limit with respect to “usual” reachable sets (RS); in control problems, a given RS may correspond to reachability domains under one or more concrete constraints on the control choice.

Keywords: attainability problem, attraction set, filter.

MSC: 05A05, 97N70, 97N80

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-2-fon-02

Введение

Статья продолжает цикл исследований автора, посвященных вопросам достижимости элементов топологических пространств (ТП) при наличии ограничений асимптотического характера (ОАХ). Данные вопросы были мотивированы исследованиями в области теории управления (см. [1–3] и др.) и математического программирования (см. [4; 5]), касающимися оптимизации и достижимости (в меньшей степени) при сколь угодно малом ослаблении стандартных ограничений, таких, например, как фазовые ограничения в задачах управления и неравенства в задачах математического программирования.

В работах, связанных с построением корректных расширений (см. [1–3;6]), был указан весьма общий подход, опирающийся на своеобразную компактификацию пространства решений исходной задачи. Данный подход в большей степени применялся к исследованию экстремальных задач и, в частности, задач оптимального управления; особо отметим работы [1–3]. При исследовании задач управления с импульсными ограничениями Н. Н. Красовский предложил (см. [7]) использовать конструкции с применением аппарата обобщенных функций. Заметим в этой связи, что в случае линейных управляемых систем с разрывностью в коэффициентах при управляющих воздействиях и ограничениях импульсного характера возникают эффекты, имеющие смысл произведения разрывной функции на обобщенную. В работах [8–11] и ряде других для преодоления возникающих при этом трудностей было предложено использовать аппарат расширений в классе (скалярных и векторных) конечно-аддитивных мер. В рамках данного направления затем получили развитие методы исследования задач о достижимости с ОАХ;

данные ОАХ могут возникать при последовательном ослаблении стандартных ограничений, но также и изначально (см. [12–14]). Сами же ОАХ определяются в общем случае посредством непустого семейства множеств в пространстве обычных решений; данное семейство без потери общности можно полагать направленным.

Заметим, что один из вариантов задачи, актуальной для приложений, связан с исследованием асимптотического поведения области достижимости (ОД) управляемой системы при последовательном ослаблении ограничений на выбор управления; исходная ОД (в невозмущенной задаче) "заменяется" при этом множеством притяжения (МП) в пространстве терминальных состояний. Однако подобные по смыслу МП могут возникать и в других содержательных задачах (см. в этой связи [15, гл. 8]; отметим также [15, (8.3.10), предложение 8.3.1]), где проясняется понятие МП, и [9, предложение 3.3.1], где указаны условия секвенциальной реализации МП. Важную роль в общих построениях МП играют фильтры и направленности (см. [16, разд. 1.6]); в настоящей статье особое внимание уделяется использованию ультрафильтров (у/ф), т. е. максимальных фильтров. Заметим, в частности, что по ряду причин, обсуждаемых ниже, при исследовании МП в содержательных постановках задачи о достижимости можно в существенной части ограничиться рассмотрением случаев, когда семейство, порождающее ОАХ, является фильтром. Разумеется, речь идет о построениях качественного характера; важно отметить, что фильтры позволяют (см. [16, разд. 1.6; 17, гл. I]) реализовать в очень общей форме понятие сходимости в ТП. Сосредоточимся здесь на представлениях МП в терминах фильтров и у/ф множества, точки которого имеют смысл обычных решений.

Настоящий выпуск посвящен Александру Борисовичу Куржанскому. Во время подготовки журнала случилось непоправимое — Александр Борисович ушел из жизни. Вечная память нашему замечательному ученому и педагогу, сделавшему очень много для математической науки и образования на Урале.

1. Общие сведения

Используем стандартную теоретико-множественную символику (кванторы, связки и др), "$\triangleq$" — равенство по определению, "$\varnothing$" — пустое множество, def заменяет фразу "по определению". *Семейством* называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Принимаем аксиому выбора. *Неупорядоченной парой* объектов u и v называем и обозначаем через $\{u;v\}$ единственное множество со свойствами $u \in \{u;v\}$, $v \in \{u;v\}$ и при $z \in \{u;v\}$ $(z = u) \vee (z = v)$. Множества — объекты, а тогда (см. [18, с. 67]) для любых объектов x и y в виде $(x, y) \triangleq \{\{x\};\{x;y\}\}$ имеем упорядоченную пару (УП) с первым элементом x и вторым элементом y. Если h есть УП, то через $\mathrm{pr}_1(h)$ и $\mathrm{pr}_2(h)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы h, однозначно определенные равенством $h = (\mathrm{pr}_1(h), \mathrm{pr}_2(h))$. Каждому множеству H сопоставляется семейство $\mathcal{P}(H)$ всех подмножеств (п/м) H; $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\varnothing\}$, а $\mathrm{Fin}(H)$ — семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(H)$, т. е. семейство всех непустых конечных п/м H. В качестве H может использоваться семейство. Напомним, что (см. [18, гл. II, § 4]) для любых двух множеств X и Y

$$X \times Y \triangleq \{z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X \cup Y)) \mid \exists x \in X \ \exists y \in Y \colon z = (x, y)\}$$

есть декартово произведение X и Y. Непустому семейству $\mathcal{A}$ и множеству B сопоставляем след $\mathcal{A}|_B \triangleq \{A \cap B \colon A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B))$ данного семейства на B. Если $\mathbb{M}$ — множество и $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$, то в виде

$$\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \triangleq \{\mathbb{M} \setminus M \colon M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$$

имеем (непустое) подсемейство $\mathcal{P}(\mathbb{M})$, двойственное к $\mathcal{M}$.

Некоторые специальные семейства. Фиксируем до конца настоящего пункта множество $\mathbf{I}$. Тогда в виде

$$\pi[\mathbf{I}] \triangleq \{\, \mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \,|\, (\varnothing \in \mathcal{I}) \,\&\, (\mathbf{I} \in \mathcal{I}) \,\&\, (\, A \cap B \in \mathcal{I} \;\; \forall A \in \mathcal{I} \;\; \forall B \in \mathcal{I})\}$$

имеем семейство всех π-систем (см. [19, с. 14]) п/м $\mathbf{I}$ с "нулем" и "единицей". При этом

$$(\mathrm{top})[\mathbf{I}] \triangleq \Big\{\, \tau \in \pi[\mathbf{I}] \;|\; \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \;\; \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\Big\} \in \mathcal{P}'(\pi[\mathbf{I}])$$

есть семейство всех топологий на $\mathbf{I}$; если $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$, то в виде $(\mathbf{I}, \tau)$ имеем ТП, а $\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\tau]$ есть семейство всех п/м $\mathbf{I}$, замкнутых в этом ТП. Семейство всех решеток на множестве $\mathbf{I}$ есть $(\mathrm{LAT})_0[\mathbf{I}] \triangleq \{\, \mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}] \,|\, A \cup B \in \mathcal{I} \;\; \forall A \in \mathcal{I} \;\; \forall B \in \mathcal{I}\}$.

Если $\mathcal{H}$ — семейство, а S — множество, то полагаем $[\mathcal{H}](S) \triangleq \{H \in \mathcal{H} \mid S \subset H\}$. Наконец, непустому семейству $\mathcal{M}$ сопоставляем семейство

$$(\mathrm{Cen})[\mathcal{M}] \triangleq \Big\{\mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{M}) \;|\; \bigcap_{Z \in \mathcal{K}} Z \neq \varnothing \;\; \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{Z})\Big\}$$

всех непустых центрированных подсемейств $\mathcal{M}$; если Y — множество и $\mathcal{Y} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(Y))$, то

$$(\mathrm{COV})[Y \,|\, \mathcal{Y}] \triangleq \Big\{\, \mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{Y}) \,\Big|\, Y = \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} Z\Big\}$$

есть семейство всех покрытий Y множествами из $\mathcal{Y}$. Если A и B — множества, то через B^A обозначаем множество всех отображений (функций) из A в B, следуя [18, гл. II, §9]; свойство $f \in B^A$ записываем также как $f\colon A \to B$ (в этом случае $f(a) \in B$ есть, как обычно, значение f в точке $a \in A$). Если U и V — множества, $g \in V^U$ и $W \in \mathcal{P}(U)$, то $g^1(W) \triangleq \{g(x)\colon x \in W\} \in \mathcal{P}(V)$ (образ W при действии g); прообраз $H \in \mathcal{P}(V)$ обозначаем стандартно через $g^{-1}(H)$.

Элементы топологии. Если (X, τ) есть ТП, т. е. X — множество и $\tau \in (\mathrm{top})[X]$, и $x \in X$, то $N_\tau^0(x) \triangleq \{G \in \tau \mid x \in G\}$ и $N_\tau(x) \triangleq \{\, H \in \mathcal{P}(X) \mid \exists G \in N_\tau^0(x)\colon G \subset H\}$; введены окрестности x в (X, τ) (см. [17, гл. I]). Ясно (см.[17, гл. I, § 1.2]), что при $\tau \in (\mathrm{top})[X]$, где X — множество, $\tau = \{\, G \in \mathcal{P}(X) \,|\, G \in N_\tau(x) \;\; \forall x \in G\}$; если при этом $A \in \mathcal{P}(X)$, то

$$\mathrm{cl}(A, \tau) \triangleq \{\, x \in X \,|\, A \cap H \neq \varnothing \;\; \forall H \in N_\tau(x)\} = \{\, x \in X \,|\, A \cap G \neq \varnothing \;\; \forall G \in N_\tau^0(x)\},$$

$[\mathbf{C}_X[\tau]](A) \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_X[\tau])$ и $\mathrm{cl}(A, \tau)$ есть пересечение всех множеств из $[\mathbf{C}_X[\tau]](A)$; итак, имеем различные представления замыкания A в ТП (X, τ). Через $(\mathrm{top})_0[\mathbf{I}]$ обозначаем семейство всех топологий на множестве $\mathbf{I}$, превращающих $\mathbf{I}$ в T_2-пространство:

$$(\mathrm{top})_0[\mathbf{I}] \triangleq \{\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}] \mid \forall y \in \mathbf{I} \;\; \forall z \in \mathbf{I} \setminus \{y\} \;\; \exists G_1 \in N_\tau^0(y) \;\; \exists G_2 \in N_\tau^0(z)\colon G_1 \cap G_2 = \varnothing\}. \quad (1.1)$$

Для произвольного множества $\mathbb{Y}$

$$(\mathbf{c}-\mathrm{top})[\mathbb{Y}] \triangleq \Big\{\tau \in (\mathrm{top})[\mathbb{Y}] \,\Big|\, \forall \mathcal{Z} \in (\mathrm{COV})[\mathbb{Y}|\tau] \;\; \exists \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{Z})\colon \mathbb{Y} = \bigcup_{Z \in \mathcal{K}} Z\Big\}$$
$$= \Big\{\tau \in (\mathrm{top})[\mathbb{Y}] \;|\; \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \varnothing \;\; \forall \mathcal{F} \in (\mathrm{Cen})[\mathbf{C}_{\mathbb{Y}}[\tau]]\Big\} \quad (1.2)$$

есть множество всех топологий на $\mathbb{Y}$, превращающих $\mathbb{Y}$ в компактное ТП; если $\mathbf{t} \in (\mathbf{c}-\mathrm{top})[\mathbb{Y}]$, а $(\mathbb{Y}, \mathbf{t})$ — T_2-пространство, то $(\mathbb{Y}, \mathbf{t})$ называют *компактом* (здесь и ниже T_0-, T_1-, T_2-, T_3- и

T_4-пространства, регулярные и нормальные ТП понимаются в соответствии с [16, гл. I]). Для произвольного ТП $(\mathbb{H},\tau)$

$$(\tau-\mathrm{comp})[\mathbb{H}] \triangleq \big\{\mathbf{K}\in\mathcal{P}(\mathbb{H})\,|\,\tau|_{\mathbf{K}}\ \in(\mathbf{c}-\mathrm{top})[\mathbf{K}]\big\} \tag{1.3}$$

есть семейство всех компактных в $(\mathbb{H},\tau)$ п/м $\mathbb{H}$; отметим естественную связь (1.2) и (1.3);

$$(\tau-\mathrm{comp})^0[\mathbb{H}] \triangleq \big\{H\in\mathcal{P}(\mathbb{H})\ |\ \exists\, K\in(\tau-\mathrm{comp})[\mathbb{H}]\colon H\subset K\big\}. \tag{1.4}$$

Если (U,τ_1), $U\neq\varnothing$, и (V,τ_2), $V\neq\varnothing$, суть два ТП, то

$$C(U,\tau_1,V,\tau_2)\triangleq\big\{\ f\in V^U\,|\,f^{-1}(G)\in\tau_1\ \ \forall G\in\tau_2\big\}, \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}C_{\mathrm{cl}}(U,\tau_1,V,\tau_2)&\triangleq\big\{f\in C(U,\tau_1,V,\tau_2)\ |\ f^1(F)\in\mathbf{C}_V[\tau_2]\ \ \forall F\in\mathbf{C}_U[\tau_1]\big\}\\&=\big\{f\in V^U\ |\ f^1(\mathrm{cl}(A,\tau_1))=\mathrm{cl}(f^1(A),\tau_2)\ \ \forall A\in\mathcal{P}(U)\big\}\end{aligned} \tag{1.6}$$

(введены непрерывные и замкнутые отображения из одного ТП в другое); если (U,τ_1) — компактное ТП, а (V,τ_2) есть T_2-пространство, то (см. (1.5), (1.6); [16, теорема 3.1.12])

$$C(U,\tau_1,V,\tau_2)=C_{\mathrm{cl}}(U,\tau_1,V,\tau_2). \tag{1.7}$$

2. Направленные семейства, фильтры и базы фильтров

Зафиксируем в настоящем разделе непустое множество T. В виде

$$\mathfrak{F}[T]\triangleq\big\{\ \mathcal{F}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}'(T))\ |\ (A\cap B\in\mathcal{F}\ \ \forall A\in\mathcal{F}\ \ \forall B\in\mathcal{F})\,\&\,([\mathcal{P}(T)](F)\subset\mathcal{F}\ \ \forall F\in\mathcal{F})\big\} \tag{2.1}$$

имеем непустое семейство всех фильтров T (ясно, что $\{T\}\in\mathfrak{F}[T]$). При $\tau\in(\mathrm{top})[T]$ и $x\in T$ непременно $N_\tau(x)\in\mathfrak{F}[T]$. Далее, в виде

$$\beta[T]\triangleq\big\{\ \mathcal{B}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(T))\ |\ \forall B_1\in\mathcal{B}\ \ \forall B_2\in\mathcal{B}\ \ \exists B_3\in\mathcal{B}\colon B_3\subset B_1\cap B_2\big\} \tag{2.2}$$

имеем семейство всех непустых направленных подсемейств $\mathcal{P}(T)$, а в виде

$$\beta_0[T]\triangleq\big\{\mathcal{B}\in\beta[T]\,|\,\varnothing\notin\mathcal{B}\big\}=\big\{\mathcal{B}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}'(T))\,|\,\forall B_1\in\mathcal{B}\ \ \forall B_2\in\mathcal{B}\ \ \exists B_3\in\mathcal{B}\colon B_3\subset B_1\cap B_2\big\} \tag{2.3}$$

— семейство всех баз фильтров (БФ) множества T. Легко видеть, что

$$(T-\mathbf{fi})[\mathcal{B}]\triangleq\big\{S\in\mathcal{P}(T)\,|\,\exists B\in\mathcal{B}\colon B\subset S\big\}\in\mathfrak{F}[T]\quad\forall\mathcal{B}\in\beta_0[T]. \tag{2.4}$$

В (2.4) проявляется роль БФ из (2.3) в построении фильтров. При $\tau\in(\mathrm{top})[T]$ и $x\in T$ имеем $N^0_\tau(x)\in\beta_0[T]$ и $N_\tau(x)=(T-\mathbf{fi})[N^0_\tau(x)]$; как обычно (см. [17, гл. I]), при $\mathcal{B}\in\beta_0[T]$

$$(\mathcal{B}\overset{\tau}{\Longrightarrow}x)\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}(N_\tau(x)\subset(T-\mathrm{fi})[\mathcal{B}]). \tag{2.5}$$

Ясно, что $\mathfrak{F}[T]\subset\beta_0[T]$; при $\mathcal{F}\in\mathfrak{F}[T]$ имеем $(T-\mathbf{fi})[\mathcal{F}]=\mathcal{F}$, а потому $\forall\,\tau\in(\mathrm{top})[T]\ \ \forall\,x\in T$

$$(\mathcal{F}\overset{\tau}{\Longrightarrow}x)\Longleftrightarrow(N_\tau(x)\subset\mathcal{F}). \tag{2.6}$$

Итак, сходимость фильтров (см. (2.6)) есть частный случай сходимости БФ, определяемой в (2.5). В виде

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[T]\triangleq\big\{\ \mathcal{U}\in\mathfrak{F}[T]\ |\ \forall\,\mathcal{F}\in\mathfrak{F}[T]\ (\mathcal{U}\subset\mathcal{F})\Longrightarrow(\mathcal{U}=\mathcal{F})\big\} \tag{2.7}$$

имеем (непустое) множество всех у/ф (максимальных фильтров) T. При этом

$$(T - \mathrm{ult})[x] \triangleq \{H \in \mathcal{P}(T) \mid x \in H\} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[T] \quad \forall\, x \in T; \tag{2.8}$$

в (2.8) определен тривиальный у/ф, соответствующий точке x. Отметим один важный вариант БФ, фиксируя до конца раздела π-систему $\mathcal{I} \in \pi[T]$. Действительно,

$$\begin{gathered}\mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}) \mid (\varnothing \notin \mathcal{F})\,\&\,(A \cap B \in \mathcal{F}\ \ \forall A \in \mathcal{F}\ \ \forall B \in \mathcal{F})\\ \&\,([\mathcal{I}](F) \subset \mathcal{F}\ \ \forall F \in \mathcal{F})\} \subset \beta_0[T].\end{gathered} \tag{2.9}$$

Семейства — элементы $\mathbb{F}^*(\mathcal{I})$ (см. (2.9)) — суть фильтры широко понимаемого измеримого пространства $(T, \mathcal{I})$; такие $\mathcal{I}$-фильтры являются БФ в смысле (2.3). Действуя в духе (2.7), вводим (см. [15, разд. 1.4, 2.1]) семейство

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) &\triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I})\ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Rightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\}\\ &= \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \mid \forall L \in \mathcal{I}\ \ (L \cap U \neq \varnothing\ \ \forall U \in \mathcal{U}) \Rightarrow (L \in \mathcal{U})\}\\ &= \{\mathcal{U} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{I}] \mid \forall \mathcal{Z} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{I}]\ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{Z}) \Rightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{Z})\};\end{aligned} \tag{2.10}$$

с использованием леммы Цорна (см. [16, введение, 1.4]) проверяется, что

$$\forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I})\ \ \exists \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})\colon \mathcal{F} \subset \mathcal{U}. \tag{2.11}$$

Поскольку при $x \in T$ имеем с очевидностью, что

$$(\mathcal{I} - \mathrm{triv})[x] \triangleq \{L \in \mathcal{I} \mid x \in L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I}), \tag{2.12}$$

получаем из (2.11), что $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \neq \varnothing$; свойство максимальности у тривиального $\mathcal{I}$-фильтра (2.12) может отсутствовать (см. [15, пример 2.2.1]) в отличие от (2.8).

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что $\mathcal{P}(T) \in \pi[T]$. Рассмотрим случай $\mathcal{I} = \mathcal{P}(T)$;

$$(\mathfrak{F}[T] = \mathbb{F}^*(\mathcal{P}(T)))\,\&\,(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[T] = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{P}(T))); \tag{2.13}$$

кроме того, $(\mathcal{P}(T) - \mathrm{triv})[x] = (T - \mathrm{ult})[x] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{P}(T))$ при $x \in T$. □

3. Множества притяжения

Всюду в дальнейшем фиксируем непустое множество E, точки которого называем обычными решениями. Будем использовать направленные подсемейства $\mathcal{P}(E)$, т. е. семейства из $\beta[E]$, для формирования ОАХ (данный случай вполне достаточен; см. [15, разд. 8.4]). Если (X, τ), $X \neq \varnothing$, есть ТП (т. е. $\tau \in (\mathrm{top})[X]$), $h \in X^E$ и $\mathcal{E} \in \beta[E]$, то

$$(\mathrm{AS})[E; X; \tau; h; \mathcal{E}] \triangleq \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \mathrm{cl}(h^1(\Sigma), \tau) \in \mathcal{P}(X) \tag{3.1}$$

называем МП (в ТП (X, τ)) при ОАХ, порождаемых $\mathcal{E}$.

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что ранее рассматривались в [15, (8.3.10), (8.3.11)] МП и в более общем случае: $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$. Однако (см. [15, (8.4.18), предложение 8.4.2]) в данном случае при несущественном преобразовании $\mathcal{E}$ все сводится к варианту (3.1). Отметим также в этой связи [15, (8.3.10), предложение 8.4.1]. Здесь же напомним об условиях секвенциальной реализации МП в [9, предложение 3.3.1]. □

С учетом (3.1) имеем, в частности, что при $\mathcal{E} \in \beta[E] \setminus \beta_0[E]$ непременно $(\mathrm{AS})[E; X; \tau; h; \mathcal{E}] = \varnothing$. Действительно, в этом случае (см. (2.2), (2.3)) $\varnothing \in \mathcal{E}$. Данный случай не представляет интереса, и мы поэтому, как правило, ограничиваемся в (3.1) вариантом $\mathcal{E} \in \beta_0[E]$, т. е. случаем, когда $\mathcal{E}$ является БФ. В частности, рассматриваем вариант, когда семейство $\mathcal{E}$, порождающее ОАХ, является фильтром E. Отметим в этой связи следующее легко проверяемое положение.

Предложение 1. *Если* (X, τ), $X \neq \varnothing$, *есть* ТП, $h \in X^E$ *и* $\mathcal{E} \in \beta_0[E]$, *то*

$$(\mathrm{AS})[E; X; \tau; h; \mathcal{B}] = (\mathrm{AS})[E; X; \tau; h; (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}]]. \tag{3.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем ТП (X, τ), $X \neq \varnothing$, $h \in X^E$ и $\mathcal{E} \in \beta_0[E]$. Тогда в силу (2.4) $\mathcal{B} \subset (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}]$, а потому (см. (3.1))

$$(\mathrm{AS})[E; X; \tau; h; (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}]] \subset (\mathrm{AS})[E; X; \tau; h; \mathcal{B}]. \tag{3.3}$$

Пусть $x_* \in (\mathrm{AS})[E; X; \tau; h; \mathcal{B}]$, т. е $x_* \in \mathrm{cl}(h^1(B), \tau)$ при $B \in \mathcal{B}$. Выберем произвольно $\mathbb{F} \in (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}]$. С учетом (2.4) подберем $\mathbb{B} \in \mathcal{B}$ со свойством $\mathbb{B} \subset \mathbb{F}$, получая вложение $\mathrm{cl}(h^1(\mathbb{B}), \tau) \subset \mathrm{cl}(h^1(\mathbb{F}), \tau)$, где $x_* \in \mathrm{cl}(h^1(\mathbb{B}), \tau)$ по выбору x_*. В итоге $x_* \in \mathrm{cl}(h^1(\mathbb{F}), \tau)$. Поскольку $\mathbb{F}$ выбиралось произвольно, $x_* \in \mathrm{cl}(h^1(F), \tau)$ $\forall F \in (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}]$. Тогда $x_* \in (\mathrm{AS})[E; X; \tau; h; (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}]]$, чем завершается проверка вложения $(\mathrm{AS})[E; X; \tau; h; \mathcal{B}] \subset (\mathrm{AS})[E; X; \tau; h; (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}]]$ и (см. (3.3)) равенства (3.2). □

Итак, с практической точки зрения при исследовании МП (3.1) можно ограничиться рассмотрением зависимости

$$\mathcal{F} \mapsto (\mathrm{AS})[E; X; \tau; h; \mathcal{F}] \colon \mathfrak{F}[E] \to \mathcal{P}(X), \tag{3.4}$$

где (X, τ) есть ТП, $X \neq \varnothing$, и $h \in X^E$; с учетом (1.4) и (3.4) введем также множество

$$\mathbb{F}^0_{\mathbf{C}}[E; X; \tau] \stackrel{\triangle}{=} \{ f \in X^E \mid f^1(E) \in (\tau - \mathrm{comp})^0[X] \} \tag{3.5}$$

((3.5) содержательно в случае, когда (X, τ) есть T_2-пространство).

Предложение 2. *Если* (X, τ), $X \neq \varnothing$, *есть* T_2*-пространство,* $h \in \mathbb{F}^0_{\mathbf{C}}[E; X; \tau]$ *и* $\mathcal{B} \in \beta_0[E]$, *то*

$$(\mathrm{AS})[E; X; \tau; h; \mathcal{B}] \in (\tau - \mathrm{comp})[X] \setminus \{\varnothing\}. \tag{3.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем (X, τ), h и $\mathcal{B}$ в соответствии с условиями. Тогда $(\mathrm{AS})[E; X; \tau; h; \mathcal{B}] \neq \varnothing$ в силу [15, (8.8.13), предложение 8.8.2], поскольку семейство $\mathcal{B}$ центрировано (см. (2.2), (2.3), [9, (3.3.16)]). Рассмотрим вопрос о компактности данного МП. С учетом T_2-отделимости ТП (X, τ) для (1.4) легко устанавливается, что

$$(\tau - \mathrm{comp})^0[X] = \{ H \in \mathcal{P}(X) \mid \mathrm{cl}(H, \tau) \in (\tau - \mathrm{comp})[X] \}$$

(следствие замкнутости п/м X, компактных в (X, τ)). Поэтому (см. (3.5)) $Y \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{cl}(h^1(E), \tau) \in (\tau - \mathrm{comp})[X]$, а $(Y, \tilde{\tau})$ — непустой компакт, где $\tilde{\tau} \stackrel{\triangle}{=} \tau|_Y$. Так как $Y \in \mathbf{C}_X[\tau]$, имеем (см. (3.1)), что при $\Sigma \in \mathcal{B}$ $\mathrm{cl}(h^1(\Sigma), \tau) \in \mathbf{C}_X[\tau] \bigcap \mathcal{P}(Y)$ и, как следствие, $\mathrm{cl}(h^1(\Sigma), \tau) = \mathrm{cl}(h^1(\Sigma), \tilde{\tau}) \in \mathbf{C}_Y[\tilde{\tau}]$; таким образом (см. (3.1)), $(\mathrm{AS})[E; X; \tau; h; \mathcal{B}] \in \mathbf{C}_Y[\tilde{\tau}]$ и, поскольку $\tilde{\tau} \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})[Y]$, $(\mathrm{AS})[E; X; \tau; h; \mathcal{B}] \in (\tilde{\tau} - \mathrm{comp})[Y]$, следовательно,

$$\tau|_{(\mathrm{AS})[E;X;\tau;h;\mathcal{B}]} = \tilde{\tau}|_{(\mathrm{AS})[E;X;\tau;h;\mathcal{B}]} \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})[(\mathrm{AS})[E; X; \tau; h; \mathcal{B}]] \tag{3.7}$$

(используем транзитивность операции перехода к подпространству ТП). С учетом (1.3) и (3.7) получаем (3.6) (непустота МП установлена ранее). □

В связи с (3.4) и предложением 2 имеем отображение

$$\mathcal{F} \mapsto (\mathrm{AS})[E; X; \tau; h; \mathcal{F}] \colon \mathfrak{F}[E] \to (\tau - \mathrm{comp})[X] \setminus \{\varnothing\}, \tag{3.8}$$

где (X, τ), $X \neq \varnothing$, есть T_2-пространство и $h \in \mathbb{F}^0_{\mathbf{C}}[E; X; \tau]$. Заметим, что последнее условие на h типично выполняется в задачах управления. В связи с моделями МП для постановок, не связанных с задачами управления, отметим [15, предложения 8.6.2, 8.6.3, (8.6.17)], где, в частности, рассматривалось представление в виде МП множества всех у/ф, мажорирующих исходный фильтр.

Сейчас совсем кратко коснемся вопроса, связанного с применением компактификаторов для построения МП. Используем символ "$\circ$" при обозначении композиции функций (см. [16, с. 18]). Прежде всего заметим, что для непустых множеств K и X, топологий $\tau_1 \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})[K]$ и $\tau_2 \in (\mathrm{top})_0[X]$ (см. (1.1)), $m \in K^E$ и $g \in C(K, \tau_1, X, \tau_2)$ имеем $g \circ m \in \mathbb{F}^0_{\mathbf{C}}[E; X; \tau_2]$ (используется [16, теорема 3.1.10]); при этом (см. (3.1), [9, предложение 5.2.1])

$$(\mathrm{AS})[E; X; \tau_2; g \circ m; \mathcal{E}] = g^1((\mathrm{AS})[E; K; \tau_1; m; \mathcal{E}]) \quad \forall\, \mathcal{E} \in \beta[E]. \tag{3.9}$$

Свойство (3.9), лежащее в основе построения расширений задач о достижимости в условиях ОАХ, допускает ряд обобщений (см., например, [10, предложения 3.4.10, 3.4.11; 20]).

4. Ультрафильтры и представления множеств притяжения

В связи с (3.8) естественным образом возникает вопрос об использовании у/ф в конструкциях, связанных с МП. Сейчас логично обратиться к (3.9). Для этого сначала напомним оснащение $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ топологией, превращающей данное множество в непустой компакт; речь пойдет о схеме Стоуна. Итак, пусть (см. [15, разд. 8.2]) отображение

$$\mathbf{S} \colon \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]) \tag{4.1}$$

определяется условием $\mathbf{S}(A) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \mid A \in \mathcal{U}\}\ \forall\, A \in \mathcal{P}(E)$. При этом, как легко проверить, $(\mathbf{UF})[E] \triangleq \mathbf{S}^1(\mathcal{P}(E))$ является базой топологии

$$\tau_{\mathbf{fi}} \triangleq \Big\{ \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M : \mathfrak{M} \in \mathcal{P}((\mathbf{UF})[E]) \Big\} \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]] \cap (\mathrm{top})_0[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]], \tag{4.2}$$

реализующей непустой нульмерный (см. [16, с. 529]) компакт $(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}})$. В работе [15, разд. 8.2] указано представление этого компакта как варианта более общей конструкции, связанной с применением у/ф широко понимаемых измеримых пространств и обсуждаемой в (2.10)–(2.12). Полагая $\tilde{\pi}^0[E] \triangleq \{\mathcal{I} \in \pi[E] \mid \forall\, L \in \mathcal{I}\ \forall\, g \in E \setminus L\ \exists\, \Lambda \in \mathcal{I} \colon (g \in \Lambda)\,\&\,(\Lambda \cap L = \varnothing)\}$, ограничимся сейчас ссылкой на [15, предложение 8.6.2]: при $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{U}\} = (\mathrm{AS})[E; \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}); \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]; (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{E}],$$

где топология $\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] \in (\mathrm{top})_0[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})]$ указана в [15, разд. 2.3] (топология стоуновского типа), а $(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]$ есть отображение $x \mapsto (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x] \colon E \to \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$. Теперь имеет смысл воспользоваться (2.9)–(2.12) в случае $\mathcal{L} = \mathcal{P}(E)$. Тогда в виде $(E, \mathcal{L}) = (E, \mathcal{P}(E))$ реализуется, в частности, измеримое пространство с алгеброй множеств и согласно [15, теорема 4.7.3] $\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})] \cap (\mathrm{top})_0[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})]$; с другой стороны (см. (2.13)), в данном случае

$$(\mathfrak{F}[E] = \mathbb{F}^*(\mathcal{L}))\,\&\,(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] = \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})). \tag{4.3}$$

При этом (см. [15, (8.2.3),(8.2.4)]) $\tau_{\mathbf{fi}} = \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]$ (в нашем случае $\mathcal{L} = \mathcal{P}(E)$), что и соответствует (4.2). Данное толкование (4.2) используем без дополнительных пояснений. При этом

$\mathcal{P}(E) \in (\mathrm{LAT})_0[E]$, а потому (см. (4.3), [15, предложение 9.4.3]) $\forall \mathcal{F}_1 \in \mathfrak{F}[E]$ $\forall \mathcal{F}_2 \in \mathfrak{F}[E]$ $\forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$

$$(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{U}) \Rightarrow \big((\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{U}) \vee (\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{U})\big). \tag{4.4}$$

В связи с (4.4) отметим, что $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \in \mathfrak{F}[E]$ при $\mathcal{F}_1 \in \mathfrak{F}[E]$ и $\mathcal{F}_2 \in \mathfrak{F}[E]$; легко видеть, что

$$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \big\{\mathrm{pr}_1(z) \cup \mathrm{pr}_2(z) \colon z \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2\big\}; \tag{4.5}$$

итак, $A \cup B \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ при $A \in \mathcal{F}_1$ и $B \in \mathcal{F}_2$ и, кроме того, $\forall F \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ $\exists \widetilde{A} \in \mathcal{F}_1$ $\exists \widetilde{B} \in \mathcal{F}_2 \colon F = \widetilde{A} \cup \widetilde{B}$.

Предложение 3. *Если $\mathcal{F}_1 \in \mathfrak{F}[E]$ и $\mathcal{F}_2 \in \mathfrak{F}[E]$, то*

$$[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2) = [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}_1) \cup [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}_2).$$

Доказательство вытекает из (4.4); (4.5) проясняет структуру пересечения двух фильтров. В дальнейшем используем обозначения $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$ ($\mathbb{R}$ — вещественная прямая) и при $n \in \mathbb{N}$ $\overline{1, n} \triangleq \{k \in \mathbb{N} \mid k \leqslant n\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})$. Полагаем, что элементы $\mathbb{N}$ — натуральные числа — не являются множествами; с учетом этого для всякого множества H и числа $n \in \mathbb{N}$ вместо $H^{\overline{1,n}}$ используем более традиционное обозначение H^n для множества всех отображений из $\overline{1, n}$ в H. По индукции устанавливается свойство: при $m \in \mathbb{N}$ и $(\mathcal{F}_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \mathfrak{F}[E]^m$

$$\bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{F}_i \in \mathfrak{F}[E] \colon [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]]\Big(\bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{F}_i\Big) = \bigcup_{i=1}^{m} [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}_i), \tag{4.6}$$

где

$$\bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{F}_i = \Big\{\bigcup_{i=1}^{m} F_i \colon (F_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \prod_{i=1}^{m} \mathcal{F}_i\Big\}. \tag{4.7}$$

Вернемся к (3.8), фиксируя в дальнейшем непустое множество X и топологию $\tau \in (\mathrm{top})[X]$; итак, (X, τ) есть ТП. Дополнительные условия на (X, τ) будут накладываться по мере надобности. Если $f \in X^E$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то

$$f^1[\mathcal{E}] \triangleq \big\{f^1(\Sigma) \colon \Sigma \in \mathcal{E}\big\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)) \tag{4.8}$$

рассматриваем в качестве образа семейства $\mathcal{E}$; если при этом $\mathcal{E} \in \beta_0[E]$, то (см. [15, предложение 8.2.1]) $f^1[\mathcal{E}] \in \beta_0[X]$ (в качестве $\mathcal{E}$ могут использоваться фильтры и у/ф). Тогда, в частности, имеем (см. [15, (8.2.6), предложение 8.3.1]) при $h \in X^E$ и $\mathcal{B} \in \beta[E]$ равенство

$$(\mathrm{AS})[E; X; \tau; h; \mathcal{B}] = \big\{x \in X \mid \exists \mathcal{U} \in [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{B}) \colon h^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Rightarrow} x\big\} \tag{4.9}$$

(здесь у/ф играют фактически роль приближенных решений Дж. Варги; см. [1, гл. III]). Фиксируя в дальнейшем $\mathbf{h} \in \mathbb{F}^0_{\mathbf{C}}[E; X; \tau]$ и полагая далее $\tau \in (\mathrm{top})_0[X]$, заметим (см. (3.8)), что

$$(\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{U}] \in (\tau - \mathrm{comp})[X] \setminus \{\varnothing\} \quad \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]. \tag{4.10}$$

Предложение 4. *Если $\tau \in (\mathrm{top})_0[X]$ и $\mathfrak{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$, то $\exists!\, \mathbf{x} \in X \colon (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathfrak{U}] = \{\mathbf{x}\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\tau \in (\mathrm{top})_0[X]$ (итак, (X, τ) есть T_2-пространство) и $\mathfrak{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$. Тогда $\mathbf{h}^1[\mathfrak{U}] \in \beta_0[X]$ и при этом (см. [15, предложение 8.2.1])

$$(X - \mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathfrak{U}]] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X]. \tag{4.11}$$

Заметим, что согласно (3.1) и (4.8) реализуется равенство

$$(\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathfrak{U}] = \bigcap_{\mathbb{B} \in \mathbf{h}^1[\mathfrak{U}]} \mathrm{cl}(\mathbb{B}, \tau) = \bigcap_{F \in (X - \mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathfrak{U}]]} \mathrm{cl}(F, \tau). \tag{4.12}$$

Ввиду (4.9), (4.11) и (4.12) получаем, что (см. [15, предложение 8.3.2])

$$(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathfrak{U}] = \{x \in X \mid (X-\mathbf{fi})[\mathbf{h}^{\mathbf{1}}[\mathfrak{U}]] \overset{\tau}{\Rightarrow} x\}. \tag{4.13}$$

Теперь с учетом (4.10) и того, что (X,τ) — T_2-пространство, получаем, что для некоторого (единственного) $v \in X$ $(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathfrak{U}] = \{v\}$. □

Итак, МП, возникающие в T_2-пространстве в ситуации, когда ОАХ порождаются у/ф, непременно являются синглетонами. Из предложения 4 вытекает, что при $\tau \in (\mathrm{top})_0[X]$

$$\exists!\, s \in X^{\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]}\colon (\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{U}] = \{s(\mathcal{U})\} \quad \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]. \tag{4.14}$$

Полагаем в дальнейшем. если не оговорено противное, что $\tau \in (\mathrm{top})_0[X]$, т. е. рассматриваем случай, когда (X,τ) есть T_2-пространство. С учетом (4.14) полагаем, что отображение $\Psi \in X^{\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]}$ удовлетворяет условию

$$(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{U}] = \{\Psi(\mathcal{U})\} \quad \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]. \tag{4.15}$$

Итак, Ψ сопоставляет каждому у/ф множества E его элемент притяжения (ЭП) в T_2-пространстве (X,τ). Следовательно, у/ф — особые в смысле (4.9), (4.10) фильтры.

Предложение 5. *Если $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E]$, то $\Psi^1([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})) \subset (\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{F}]$.*

Доказательство. Фиксируем фильтр $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E]$, получая (непустое) множество $[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}) \in \mathcal{P}'(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E])$. С другой стороны, имеем (см. (3.8)) непустое множество

$$(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{F}] = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(F),\tau) \in \mathcal{P}'(X). \tag{4.16}$$

При $\mathcal{U} \in [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})$ имеем, что $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$, а тогда (см. (4.15), (4.16))

$$\{\Psi(\mathcal{U})\} = \bigcap_{F \in \mathcal{U}} \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(F),\tau) \subset (\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{F}],$$

и отсюда $\Psi(\mathcal{U}) \in (\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{F}]$. Используя определение образа множества $[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})$ при действии Ψ, получаем требуемое утверждение. □

Предложение 6. *Если $\mathfrak{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$, то $(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathfrak{U}] = \{x \in X \mid \mathbf{h}^1[\mathfrak{U}] \overset{\tau}{\Rightarrow} x\}$.*

Доказательство является (см. (4.13)) простым следствием [15, предложение 8.3.2] и использует конструкции предыдущего доказательства. С учетом (4.15) получаем теперь, что

$$\{x \in X \mid \mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Rightarrow} x\} = \{\Psi(\mathcal{U})\} \quad \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]. \tag{4.17}$$

Теорема 1. *Если $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E]$, то*

$$(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{F}] = \Psi^1([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})). \tag{4.18}$$

Доказательство. В силу предложения 5 достаточно установить, что

$$(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{F}] \subset \Psi^1([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})). \tag{4.19}$$

Выберем произвольно $\mathbf{x} \in (\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{F}]$. Тогда $\mathbf{x} \in X$ и в силу (4.9) для некоторого $\mathfrak{U} \in [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})$

$$\mathbf{h}^1[\mathfrak{U}] \overset{\tau}{\Rightarrow} \mathbf{x}. \tag{4.20}$$

Тогда $\mathfrak{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ и при этом $\mathcal{F} \subset \mathfrak{U}$. Далее, $\mathbf{h}^1[\mathfrak{U}] \in \beta_0[X]$ и определен фильтр $(X-\mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathfrak{U}]] \in \mathfrak{F}[X]$, для которого (см. (4.20)) также $(X-\mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathfrak{U}]] \overset{\tau}{\Rightarrow} \mathbf{x}$. Из (4.17) и (4.20) вытекает, что

$\mathbf{x} = \Psi(\mathfrak{U})$. По выбору Ψ имеем, как следствие, что $\mathbf{x} \in \Psi^1([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}))$. Итак, установлено (4.19) и, значит, требуемое равенство (4.18). □

Отметим следующее легко проверяемое свойство:

$$\Psi((E - \mathrm{ult})[u]) = \mathbf{h}(u) \quad \forall\, u \in E. \tag{4.21}$$

Кроме того, из определений следует (см. (4.17)), что

$$\mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Rightarrow} \Psi(\mathcal{U}) \quad \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]. \tag{4.22}$$

В связи с (4.22) отметим связь с построениями из [15, разд. 2.4]. Здесь снова используем $\mathcal{P}(E)$ в качестве (отделимой) π-системы: $\mathcal{P}(E) \in \tilde{\pi}^0[E]$. При этом учитываем (2.9) в сочетании с (4.8). Тогда (см. [15, (2.4.4)]) согласно (4.3) имеем для

$$\mathbb{F}_{\mathrm{lim}}[E; X; \mathcal{P}(E); \tau] \overset{\triangle}{=} \left\{g \in X^E \mid \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]\ \exists\, x \in X\colon g^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Rightarrow} \mathbf{x}\right\}$$

очевидное свойство $\mathbb{F}^0_{\mathbf{C}}[E; X; \tau] \subset \mathbb{F}_{\mathrm{lim}}[E; X; \mathcal{P}(E); \tau]$, а потому $\mathbf{h} \in \mathbb{F}_{\mathrm{lim}}[E; X; \mathcal{P}(E); \tau]$ и определено отображение $\varphi_{\mathrm{lim}}[E; X; \mathcal{P}(E); \tau; \mathbf{h}] \in X^{\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]}$ (см. [15, с. 58]); более того, имеем (см. (4.22), [15, (2.4.6)]) в силу T_2-отделимости ТП (X, τ) равенство $\varphi_{\mathrm{lim}}[E; X; \mathcal{P}(E); \tau; \mathbf{h}] = \Psi$. Теперь из работы [15, предложение 2.4.2] извлекается следующее положение.

Предложение 7. *Если* (X, τ) *есть регулярное* ТП *(т. е* T_1*- и* T_3*-пространство одновременно), то отображение* Ψ *непрерывно*: $\Psi \in C(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}, X, \tau)$. □

Здесь следует, конечно, учесть равенство $\tau_{\mathbf{fi}} = \mathbf{T}^*_{\mathcal{P}[E]}[E]$, отмеченное в связи с (4.3) (напомним, кстати, что каждое регулярное ТП удовлетворяет аксиоме T_2; см. [16, с. 72]). Заметим, что из предложения 7 следует, что в случае регулярного ТП (X, τ) $\Psi \in C_{\mathrm{cl}}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}, X, \tau)$ (в этой связи см. (1.7)) и при этом

$$\Psi^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]) = \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E), \tau). \tag{4.23}$$

Здесь учитывается (1.6) и свойство плотности множества $\{(E - \mathrm{ult})[u]\colon u \in E\}$ в компакте $(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}})$, извлекаемое из положения (см. [15, с. 85]) об аналогичной плотности в случае пространства у/ф для ТП $(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{P}(E)), \mathbf{T}^*_{\mathcal{P}(E)}[E])$. Заметим теперь, что в случае регулярного ТП (X, τ) в виде $(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}, (E - \mathrm{ult})[\cdot], \Psi)$, где $(E - \mathrm{ult})[\cdot] = ((E - \mathrm{ult})[u])_{u \in E}$, имеем $(E, X, \tau, \mathbf{h})$-компактификатор в смысле [15, с. 325], т. е. “инструмент” (правда, весьма сложный) для построения МП в задачах о достижимости с ОАХ.

5. Некоторые свойства множеств притяжения

Полагаем в данном разделе, если не оговорено противное, что (X, τ) есть T_2-пространство, т. е. $\tau \in (\mathrm{top})_0[X]$. Напомним предложение 3, (4.5), (4.7).

Предложение 8. *Если* $\mathcal{F}_1 \in \mathfrak{F}[E]$ *и* $\mathcal{F}_2 \in \mathfrak{F}[E]$*, то*

$$(\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2] = (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}_1] \cup (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}_2].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\mathcal{F}_1 \in \mathfrak{F}[E]$ и $\mathcal{F}_2 \in \mathfrak{F}[E]$. Тогда с учетом предложения 3 и теоремы 1 имеем для фильтра $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \in \mathfrak{F}[E]$ (см. (4.6)) цепочку равенств

$$(\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2] = \Psi^1\bigl([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)\bigr) = \Psi^1\bigl([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}_1) \cup [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}_2)\bigr)$$

$$= \Psi^1\bigl([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}_1)\bigr) \cup \Psi^1\bigl([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}_2)\bigr) = (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}_1] \cup (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}_2]. \qquad \square$$

Из предложения 8 рассуждением по индукции извлекается следующее положение.

Теорема 2. *Если* $m \in \mathbb{N}$ *и* $(\mathcal{F}_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \mathfrak{F}[E]^m$, *то*

$$(\mathrm{AS})\Big[E; X; \tau; \mathbf{h}; \bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{F}_i\Big] = \bigcup_{i=1}^{m} (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}_i]. \qquad \square$$

Напомним в связи с теоремой 2 представление фильтра-пересечения в (4.7). Заметим также, что в задачах управления с ОАХ в качестве семейств, порождающих данные ОАХ, обычно не используются фильтры. Напомним предложение 1: из теоремы 2 и данного предложения вытекает очевидное следствие.

Следствие 1. *Если* $m \in \mathbb{N}$ *и* $(\mathcal{B}_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \beta_0[E]^m$, *то*

$$\bigcup_{i=1}^{m} (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{B}_i] = (\mathrm{AS})\Big[E; X; \tau; \mathbf{h}; \bigcap_{i=1}^{m} (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}_i]\Big].$$

Сейчас, дополняя предложение 8, рассмотрим простое следствие равенства (4.5). Заметим в этой связи, что каждый фильтр E — непустое семейство п/м E и, стало быть, определено пересечение всех множеств данного фильтра.

Предложение 9. *Если* $\mathcal{F}_1 \in \mathfrak{F}[E]$ *и* $\mathcal{F}_2 \in \mathfrak{F}[E]$, *то*

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2} F = \Big(\bigcap_{F \in \mathcal{F}_1} F\Big) \cup \Big(\bigcap_{F \in \mathcal{F}_2} F\Big). \tag{5.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем для краткости

$$\Big(\mathbb{A} \triangleq \bigcap_{F \in \mathcal{F}_1} F\Big) \,\&\, \Big(\mathbb{B} \triangleq \bigcap_{F \in \mathcal{F}_2} F\Big) \,\&\, \Big(\mathbb{C} \triangleq \bigcap_{F \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2} F\Big). \tag{5.2}$$

Тогда $\mathbb{A} \subset \mathbb{C}$, $\mathbb{B} \subset \mathbb{C}$ и, как следствие, $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} \subset \mathbb{C}$. Достаточно установить, что

$$\mathbb{C} \subset \mathbb{A} \cup \mathbb{B}. \tag{5.3}$$

Допустим, что (5.3) неверно, т. е. имеет место свойство

$$\mathbb{C} \setminus (\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) \neq \varnothing. \tag{5.4}$$

С учетом (5.4) выберем $x_* \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{A} \cup \mathbb{B})$, т. е. $x_* \in \mathbb{C}$ и при этом $x_* \notin \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$. Тогда $x_* \notin \mathbb{A}$ и $x_* \notin \mathbb{B}$. В силу (5.2) для некоторых множеств $\Phi_1 \in \mathcal{F}_1$ и $\Phi_2 \in \mathcal{F}_2$

$$\big(x_* \notin \Phi_1\big) \,\&\, \big(x_* \notin \Phi_2\big). \tag{5.5}$$

С другой стороны, из (4.5) следует по определению $\mathbb{C}$, что $x_* \in F_1 \cup F_2 \;\forall F_1 \in \mathcal{F}_1 \;\forall F_2 \in \mathcal{F}_2$. Тогда, в частности, $x_* \in \Phi_1 \cup \Phi_2$, что невозможно в силу (5.5). Полученное противоречие показывает, что (5.4) невозможно, и на самом деле справедливо (5.3), а тогда $\mathbb{C} = \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$. С учетом (5.2) получаем требуемое равенство (5.1). $\square$

Следствие 2. *Если* $m \in \mathbb{N}$ *и* $(\mathcal{F}_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \mathfrak{F}[E]^m$, *то* $\bigcap\limits_{F \in \bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{F}_i} F = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \Big(\bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}_i} F\Big)$.

Доказательство получается (с учетом (4.6) и предложения 9) рассуждением по индукции.

З а м е ч а н и е 3. Возвращаясь к предложению 1 и следствию 1, заметим, что в задачах управления характерный источник ОАХ можно связать со следующей ситуацией: указано (непустое) множество $E_0 \in \mathcal{P}'(E)$, определяющее стандартное ограничение $e \in E_0$ на выбор обычного решения (управления), и рассматривается семейство $\widetilde{\mathcal{E}} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ п/м E со свойством $E_0 = \bigcap\limits_{\Sigma \in \widetilde{\mathcal{E}}} \Sigma$. Без потери общности можно считать семейство $\widetilde{\mathcal{E}}$ направленным, т. е. полагать, что $\widetilde{\mathcal{E}} \in \beta[E]$. В силу непустоты E_0 это означает (см. (2.3)), что $\widetilde{\mathcal{E}} \in \beta_0[E]$ (итак, $\widetilde{\mathcal{E}}$ есть БФ на E). Тогда $\widetilde{\mathcal{E}}$ можно рассматривать как источник ОАХ, результат действия которых можно связать с МП (3.1) при $h = \mathbf{h}$ и $\mathcal{E} = \widetilde{\mathcal{E}}$, и, как следствие (см. предложение 1), с МП $(\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \widetilde{\mathcal{F}}]$, где $\widetilde{\mathcal{F}} = (E - \mathbf{fi})[\widetilde{\mathcal{E}}]$. В данной ситуации логично предполагать, что пересечение всех множеств семейства $\widetilde{\mathcal{E}}$ совпадает с E_0, с тем, чтобы исключить "лишние" обычные решения; ранее оговорили данное естественное требование к $\widetilde{\mathcal{E}}$. Далее, из (2.4) легко следует равенство $\bigcap\limits_{\Sigma \in \widetilde{\mathcal{E}}} \Sigma = \bigcap\limits_{F \in \widetilde{\mathcal{F}}} F$. Пришли к модели ОАХ с использованием фильтра, множества которого в пересечении реализуют E_0. При этом, конечно, выбор $\widetilde{\mathcal{E}}$ и, следовательно, реализация $\widetilde{\mathcal{F}} \in \mathfrak{F}[E]$ со свойством

$$\bigcap_{F \in \widetilde{\mathcal{F}}} F = E_0 \tag{5.6}$$

может быть весьма различной: стандартному ограничению, определяемому в виде E_0, сопоставляются, таким образом, разные фильтры, реализующие всякий раз свой тип ОАХ, и, значит, свое МП. Грубо говоря, мы должны говорить здесь о фильтрах, "привязанных" к E_0 посредством (5.6); возникает непустое семейство фильтров $\mathbf{F} \triangleq \big\{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E] \,\big|\, E_0 = \bigcap\limits_{F \in \widetilde{\mathcal{F}}} F\big\}$. Тогда в силу следствия 2 получаем (см. (4.6)) в этом частном случае, что $\bigcap\limits_{i=1}^{m} \mathcal{F}_i \in \mathbf{F}\ \ \forall\, m \in \mathbb{N}$ $\forall\, (\mathcal{F}_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \mathbf{F}^m$ (реализация данного фильтра-пересечения указана в (4.7)). □

В связи с теоремой 2 и предложением 8 для наших целей утверждение следствия 2 вполне достаточно. Но все же рассмотрим естественное обобщение, фиксируя до конца настоящего раздела произвольное непустое множество T и отображение

$$(\mathcal{F}_t)_{t \in T} \in \mathfrak{F}[E]^T, \tag{5.7}$$

т. е. фиксируем параметризованное семейство фильтров множества E. С (5.7) связывается множество-произведение

$$\prod_{t \in T} \mathcal{F}_t = \big\{(F_t)_{t \in T} \in \mathcal{P}'(E)^T \mid F_\eta \in \mathcal{F}_\eta\ \ \forall\, \eta \in T\big\},$$

являющееся непустым множеством (действительно $\mathcal{F}_t \neq \varnothing$ при $t \in T$). Из (2.1) легко следует, что

$$\bigcap_{t \in T} \mathcal{F}_t \in \mathfrak{F}[E]; \tag{5.8}$$

при этом имеет место следующее представление фильтра (5.8), подобное (4.7):

$$\bigcap_{t \in T} \mathcal{F}_t = \Big\{\bigcup_{t \in T} F_t \colon (F_t)_{t \in T} \in \prod_{t \in T} \mathcal{F}_t\Big\}; \tag{5.9}$$

свойство (5.9) практически очевидно (см. (2.1)).

Предложение 10. *Справедливо равенство*

$$\bigcap_{F \in \bigcap\limits_{t \in T} \mathcal{F}_t} F = \bigcup_{t \in T} \Big(\bigcap_{F \in \mathcal{F}_t} F\Big). \tag{5.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагаем для краткости

$$\Big(\mathbb{B}_t \triangleq \bigcap_{F \in \mathcal{F}_t} F \ \ \forall\, t \in T\Big) \,\&\, \Big(\mathbb{C} \triangleq \bigcap_{F \in \bigcap\limits_{t \in T} \mathcal{F}_t} F\Big), \tag{5.11}$$

получая п/м E. Требуется (см. (5.10)) установить равенство

$$\mathbb{C} = \bigcup_{t \in T} \mathbb{B}_t. \tag{5.12}$$

Покажем сначала, что справедливо вложение

$$\mathbb{C} \subset \bigcup_{t \in T} \mathbb{B}_t. \tag{5.13}$$

В самом деле, допустим противное: пусть

$$\mathbb{C} \setminus \Big(\bigcup_{t \in T} \mathbb{B}_t\Big) \neq \varnothing. \tag{5.14}$$

С учетом (5.14) выберем и зафиксируем точку $x^* \in \mathbb{C} \setminus \big(\bigcup\limits_{t \in T} \mathbb{B}_t\big)$. Тогда $x^* \in \mathbb{C}$ и вместе с тем $x^* \notin \mathbb{B}_t \ \ \forall\, t \in T$. Последнее означает, что (см. (5.11)) $\forall\, t \in T \ \exists\, F \in \mathcal{F}_t \colon x^* \notin F$. Иными словами,

$$\mathcal{F}_t^* \triangleq \big\{F \in \mathcal{F}_t \mid x^* \notin F\big\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{F}_t) \quad \forall\, t \in T. \tag{5.15}$$

В связи с (5.15) отметим, что $\mathcal{F}_t^* \subset \mathcal{P}'(E) \ \ \forall\, t \in T$. Тогда (с учетом аксиомы выбора)

$$\prod_{t \in T} \mathcal{F}_t^* = \big\{(F_t)_{t \in T} \in \mathcal{P}'(E)^T \mid F_\xi \in \mathcal{F}_\xi^* \ \ \forall\, \xi \in T\big\} \neq \varnothing.$$

Ввиду этого выберем и зафиксируем

$$(F_t^*)_{t \in T} \in \prod_{t \in T} \mathcal{F}_t^*. \tag{5.16}$$

Из (5.16) следует, что $(F_t^*)_{t \in T} \colon T \to \mathcal{P}'(E)$, и при этом $F_\xi^* \in \mathcal{F}_\xi^*$ при $\xi \in T$. В силу (5.15) получаем, что

$$x^* \notin F_t^* \quad \forall\, t \in T. \tag{5.17}$$

Тогда имеем, как следствие, что $\bigcup\limits_{t \in T} F_t^* \in \mathcal{P}'(E) \colon x^* \notin \bigcup\limits_{t \in T} F_t^*$. Вместе с тем из (5.15) и (5.16) вытекает, что $F_t^* \in \mathcal{F}_t$ при $t \in T$. Тогда $(F_t^*)_{t \in T} \in \prod\limits_{t \in T} \mathcal{F}_t$ и согласно (5.9) $\bigcup\limits_{t \in T} F_t^* \in \bigcap\limits_{t \in T} \mathcal{F}_t$. Из (5.11) получаем с очевидностью, что $\mathbb{C} \subset \bigcup\limits_{t \in T} F_t^*$. По выбору $x^* \in \mathbb{C}$ имеем теперь, что $x^* \in F_\theta^*$ для некоторого $\theta \in T$, что противоречит (5.17). Полученное противоречие означает, что (5.14) невозможно и на самом деле справедливо (5.13). Далее, из (5.11) имеем, что $\mathbb{B}_\eta \subset \mathbb{C}$ при $\eta \in T$ (действительно, $\bigcap\limits_{t \in T} \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_\eta$), а потому

$$\bigcup_{t \in T} \mathbb{B}_t \subset \mathbb{C} \tag{5.18}$$

и, как следствие (см. (5.13), (5.18)), справедливо (5.12), откуда в силу (5.11) вытекает (5.10). □

Рассмотрим одно простое следствие. Фильтр $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E]$ назовем *свободным*, если пересечение всех множеств из $\mathcal{F}$ пусто (данное определение применяется обычно к у/ф, но теперь распространим его и на произвольные фильтры); тогда $\mathfrak{F}_{\mathbf{f}}[E] \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E] \mid \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \varnothing\}$ есть семейство всех свободных фильтров E. Из предложения 10 имеем, что

$$\big(\mathcal{F}_t \in \mathfrak{F}_{\mathbf{f}}[E] \;\; \forall\, t \in T\big) \Rightarrow \Big(\bigcap_{t \in T} \mathcal{F}_t \in \mathfrak{F}_{\mathbf{f}}[E]\Big).$$

Итак, пересечение произвольного непустого семейства свободных фильтров само является свободным фильтром. Заметим, что (см. (3.8)) МП при ОАХ, порождаемых свободными фильтрами, не только могут быть непустыми, но и обладать непустой внутренностью (с учетом предложения 1 такой случай доставляет, в частности, пример из [15, разд. 1.7]). С учетом же предложения 4 видим, что свободные у/ф — элементы множества

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{(\mathbf{f})}[E] \triangleq \Big\{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \mid \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \varnothing\Big\} \in \mathcal{P}(\mathfrak{F}_{\mathbf{f}}[E])$$

могут в качестве "своих" МП реализовать только синглетоны. Напомним, полагая, что $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{(\mathbf{t})}[E] \triangleq \big\{(E-\mathrm{ult})[e]\colon e \in E\big\}$, следующее известное (см. [15, (1.5.1), (1.5.8), следствие 2.2.1]) свойство

$$\big(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] = \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{(\mathbf{t})}[E] \cup \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{(\mathbf{f})}[E]\big) \;\&\; \big(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{(\mathbf{t})}[E] \cap \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{(\mathbf{f})}[E] = \varnothing\big).$$

Предложение 11. *Если (X, τ) есть регулярное пространство и $y \in \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E), \tau) \setminus \mathbf{h}^1(E)$, то*

$$\big\{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \mid y = \Psi(\mathcal{U})\big\} \in \mathcal{P}'\big(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{(\mathbf{f})}[E]\big). \tag{5.19}$$

Доказательство. Пусть (X, τ) — регулярное ТП и $y \in \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E), \tau) \setminus \mathbf{h}^1(E)$. Обозначим через Ω множество в левой части (5.19). В силу (4.23) имеем, что $\Omega \neq \varnothing$. Выберем произвольно $\mathfrak{U} \in \Omega$. Тогда $\mathfrak{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ и при этом $y = \Psi(\mathfrak{U})$. Заметим, что по выбору y имеем свойство $y \neq \mathbf{h}(e)\;\;\forall\, e \in E$. Поэтому (см. (4.21)) $y \neq \Psi((E-\mathrm{ult})[e])\;\;\forall\, e \in E$. Иными словами, $y \neq \Psi(\mathcal{U})$ при $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{(\mathbf{t})}[E]$, а тогда $\mathfrak{U} \notin \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{(\mathbf{t})}[E]$ и, как следствие, $\mathfrak{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{(\mathbf{f})}[E]$. Итак, установлено, что $\Omega \subset \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{(\mathbf{f})}[E]$, откуда и вытекает (5.19). □

6. Добавление

В настоящем разделе коснемся вопросов применения более общего определения МП (см. [15, (8.3.10), предложение 8.3.1]), допуская к использованию при построении ОАХ семейства, которые могут не быть направленными в смысле (2.2). Таковыми, в частности, могут быть объединения фильтров. Полагаем в настоящем разделе, что T — непустое множество и фиксировано отображение (5.7); иными словами, $\mathcal{F}_t \in \mathfrak{F}[E]$ при $t \in T$. Введем в рассмотрение

$$\mathbb{F} \triangleq \Big\{\bigcap_{t \in T} F_t \colon (F_t)_{t \in T} \in \prod_{t \in T} \mathcal{F}_t\Big\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \tag{6.1}$$

Предложение 12. *Истинна эквивалентность*

$$\Big(\bigcap_{t \in T} F_t \neq \varnothing \;\; \forall\,(F_t)_{t \in T} \in \prod_{t \in T} \mathcal{F}_t\Big) \Leftrightarrow \big(\mathbb{F} \in \mathfrak{F}[E]\big). \tag{6.2}$$

Доказательство. Из (2.1) и (6.1) вытекает, что $A \cap B \in \mathbb{F}$ при $A \in \mathbb{F}$ и $B \in \mathbb{F}$. Пусть

$$\bigcap_{t \in T} F_t \neq \varnothing \quad \forall\,(F_t)_{t \in T} \in \prod_{t \in T} \mathcal{F}_t. \tag{6.3}$$

Тогда (см. (6.1)) $\varnothing \notin \mathbb{F}$, и, поскольку $\prod\limits_{t\in T} \mathcal{F}_t \neq \varnothing$, имеем, что

$$\mathbb{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(E))\colon A \cap B \in \mathbb{F} \quad \forall A \in \mathbb{F} \quad \forall B \in \mathbb{F}. \tag{6.4}$$

Пусть $\Phi \in \mathbb{F}$ и (см. (6.1)) $(\Phi_t)_{t\in T} \in \prod\limits_{t\in T} \mathcal{F}_t$ реализует Φ в виде пересечения

$$\Phi = \bigcap_{t\in T} \Phi_t. \tag{6.5}$$

Выберем произвольно $\mathbb{H} \in [\mathcal{P}(E)](\Phi)$, т. е. $\mathbb{H} \in \mathcal{P}(E)$ и $\Phi \subset \mathbb{H}$. Тогда (см. (2.1))

$$\widetilde{\Phi}_t \triangleq \Phi_t \cup \mathbb{H} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \in T. \tag{6.6}$$

Получили (см. (6.1), (6.6)) множество

$$\hat{\Phi} \triangleq \bigcap_{t\in T} \widetilde{\Phi}_t \in \mathbb{F}, \tag{6.7}$$

для которого $\mathbb{H} \subset \hat{\Phi}$ в силу (6.6), (6.7). Выберем произвольно $x_* \in \hat{\Phi}$. Тогда $(x_* \in \mathbb{H}) \vee (x_* \notin \mathbb{H})$.

Пусть $x_* \notin \mathbb{H}$. В силу (6.7) имеем, однако, что $x_* \in \widetilde{\Phi}_t \ \ \forall t \in T$. С учетом (6.6) получаем, что $x_* \in \Phi_t \ \ \forall t \in T$. В силу (6.5) $x_* \in \Phi$ и по выбору $\mathbb{H}$ $x_* \in \mathbb{H}$. Получили противоречие с предположением, которое означает, что свойство $x_* \notin \mathbb{H}$ невозможно и, следовательно, $x_* \in \mathbb{H}$. Поскольку выбор x_* был произвольным, установлено вложение $\hat{\Phi} \subset \mathbb{H}$; в итоге $\mathbb{H} = \hat{\Phi} \in \mathbb{F}$ (см. (6.7)). Итак, $[\mathcal{P}(E)](\Phi) \subset \mathbb{F}$. Коль скоро выбор Φ был произвольным, получили свойство $[\mathcal{P}(E)](F) \subset \mathbb{F} \ \ \forall F \in \mathbb{F}$. С учетом (2.1) и (6.4) имеем теперь $\mathbb{F} \in \mathfrak{F}[E]$. Таким образом (см. (6.3)),

$$\Big(\bigcap_{t\in T} F_t \neq \varnothing \ \ \forall (F_t)_{t\in T} \in \prod_{t\in T} \mathcal{F}_t\Big) \Rightarrow \big(\mathbb{F} \in \mathfrak{F}[E]\big). \tag{6.8}$$

Проверим истинность противоположной импликации. Пусть $\mathbb{F} \in \mathfrak{F}[E]$. Тогда $\varnothing \notin \mathbb{F}$ в силу (2.1). Выберем произвольно $(M_t)_{t\in T} \in \prod\limits_{t\in T} \mathcal{F}_t$. В силу (6.1) $\bigcap\limits_{t\in T} M_t \in \mathbb{F}$, а потому $\bigcap\limits_{t\in T} M_t \neq \varnothing$. Поскольку выбор $(M_t)_{t\in T}$ был произвольным, установлено, что $\bigcap\limits_{t\in T} F_t \neq \varnothing \ \ \forall (F_t)_{t\in T} \in \prod\limits_{t\in T} \mathcal{F}_t$. Итак, установлена истинность импликации

$$\big(\mathbb{F} \in \mathfrak{F}[E]\big) \Rightarrow \Big(\bigcap_{t\in T} F_t \neq \varnothing \ \ \forall (F_t)_{t\in T} \in \prod_{t\in T} \mathcal{F}_t\Big).$$

С учетом (6.8) имеем (6.2). □

Напомним, что из (2.1) и (6.1) легко следует, что $A \cap B \in \mathbb{F} \ \forall A \in \mathbb{F} \ \forall B \in \mathbb{F}$. Это означает, в частности, что $\mathbb{F} \in \beta[E]$. Заметим, что (см. (2.1)) определены семейство

$$\bigcup_{t\in T} \mathcal{F}_t \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(E)) \tag{6.9}$$

и семейство всех конечных пересечений множеств из семейства (6.9). Введем сейчас, однако, общий вариант семейств такого рода, следуя [15, (1.2.1)]. Итак, если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то

$$\{\cap\}_\sharp(\mathcal{E}) \triangleq \Big\{\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{K}} \Sigma\colon \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{E})\Big\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E));$$

при этом $\mathcal{E} \subset \{\cap\}_\sharp(\mathcal{E})$. В частности, определено семейство

$$\{\cap\}_\sharp\Big(\bigcup_{t\in T} \mathcal{F}_t\Big) \triangleq \Big\{\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{K}} F\colon \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}\Big(\bigcup_{t\in T} \mathcal{F}_t\Big)\Big\} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big). \tag{6.10}$$

Отметим легко проверяемое свойство: если T — конечное множество, то

$$\mathbb{F} = \{\cap\}_\sharp\Big(\bigcup_{t\in T}\mathcal{F}_t\Big). \tag{6.11}$$

Сейчас напомним одно представление МП (см. [15, предложение 8.3.1]) в случае, когда семейство п/м E, порождающих ОАХ, не является направленным. Итак (см. [15, (8.4.18), предложение 8.4.2]), при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ семейство $\{\cap\}_\sharp(\mathcal{E}) \in \beta[E]$ таково, что

$$(\mathbf{as})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}] \stackrel{\triangle}{=} (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \{\cap\}_\sharp(\mathcal{E})] \in \mathcal{P}(X); \tag{6.12}$$

в связи с (6.12) см. также [15, предложения 8.3.1, 8.4.1]. Имеем в (6.12) общее определение МП в смысле [15, гл. 8]. Заметим, что семейство (6.9) не является, вообще говоря, ни фильтром, ни БФ. Однако оно может использоваться в (6.12) в качестве семейства $\mathcal{E}$. При этом из (6.12) и (6.11) вытекает следующее свойство: если T — непустое конечное множество, то

$$(\mathbf{as})\Big[E; X; \tau; \mathbf{h}; \bigcup_{t\in T}\mathcal{F}_t\Big] \stackrel{\triangle}{=} (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathbb{F}], \tag{6.13}$$

где $\mathbb{F} \in \beta[E]$; важный частный случай (6.13) поясняется предложением 12.

Сейчас распространим представление, подобное (6.13), на случай, когда T — произвольное непустое множество. С этой целью введем (в общем случае непустого множества T) семейство

$$\widetilde{\mathbf{F}} \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{K\in\mathrm{Fin}(T)}\Big\{\bigcap_{t\in K}F_t\colon (F_t)_{t\in K} \in \prod_{t\in K}\mathcal{F}_t\Big\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \tag{6.14}$$

Предложение 13. *Семейство $\widetilde{\mathbf{F}}$ является подсемейством $\mathbb{F}$, и, кроме того,*

$$A \cap B \in \widetilde{\mathbf{F}} \quad \forall A \in \widetilde{\mathbf{F}} \quad \forall B \in \widetilde{\mathbf{F}}. \tag{6.15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала проверим (6.15). Фиксируем $\mathbb{A} \in \widetilde{\mathbf{F}}$ и $\mathbb{B} \in \widetilde{\mathbf{F}}$. Ввиду (6.14) имеем, что для некоторых

$$K_1 \in \mathrm{Fin}(T), \quad K_2 \in \mathrm{Fin}(T), \quad (F'_t)_{t\in K_1} \in \prod_{t\in K_1}\mathcal{F}_t, \quad (F''_t)_{t\in K_2} \in \prod_{t\in K_2}\mathcal{F}_t$$

справедливы равенства

$$\Big(\mathbb{A} = \bigcap_{t\in K_1}F'_t\Big) \,\&\, \Big(\mathbb{B} = \bigcap_{t\in K_2}F''_t\Big). \tag{6.16}$$

Согласно (6.14) $(\mathbb{A} \in \mathcal{P}(E))\,\&\,(\mathbb{B} \in \mathcal{P}(E))$. Тогда $K_1 \cup K_2 \in \mathrm{Fin}(T)$ и при этом

$$K_1 \cup K_2 = (K_1 \setminus K_2) \cup (K_1 \cap K_2) \cup (K_2 \setminus K_1), \tag{6.17}$$

причем три множества в правой части (6.17) попарно дизъюнктны. Имеем в силу (2.1), что $F'_t \cap F''_t \in \mathcal{F}_t \ \ \forall t \in K_1 \cap K_2$. С учетом этого вводим $(\widetilde{F}_t)_{t\in K_1\cup K_2} \in \prod\limits_{t\in K_1\cup K_2}\mathcal{F}_t$ по следующему правилу (см. (6.17)):

$$\big(\widetilde{F}_t \stackrel{\triangle}{=} F'_t \ \ \forall t \in K_1 \setminus K_2\big) \,\&\, \big(\widetilde{F}_t \stackrel{\triangle}{=} F'_t \cap F''_t \ \ \forall t \in K_1 \cap K_2\big) \,\&\, \big(\widetilde{F}_t \stackrel{\triangle}{=} F''_t \ \ \forall t \in K_2 \setminus K_1\big). \tag{6.18}$$

Тогда в силу (6.14) реализуется свойство

$$\mathbb{C} \stackrel{\triangle}{=} \bigcap_{t\in K_1\cup K_2}\widetilde{F}_t \in \widetilde{\mathbf{F}}. \tag{6.19}$$

Сравним множества $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ и $\mathbb{C}$. Пусть $x_* \in \mathbb{A} \cap \mathbb{B}$. Тогда $x_* \in E$ и согласно (6.16)

$$\big(x_* \in F'_t \ \ \forall\, t \in K_1\big) \,\&\, \big(x_* \in F''_t \ \ \forall\, t \in K_2\big).$$

Поэтому (см. (6.17), (6.18)) $x_* \in \widetilde{F}_t \ \ \forall\, t \in K_1 \cup K_2$. С учетом (6.19) имеем, что $x_* \in \mathbb{C}$. Итак,

$$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} \subset \mathbb{C}. \tag{6.20}$$

Пусть $x^* \in \mathbb{C}$. Тогда $x^* \in \widetilde{F}_t$ при $t \in K_1 \cup K_2$. С учетом (6.17) и (6.18) получаем, что

$$\big(x^* \in F'_t \ \ \forall\, t \in K_1 \setminus K_2\big) \,\&\, \big(x^* \in F'_t \cap F''_t \ \ \forall\, t \in K_1 \cap K_2\big) \,\&\, \big(x^* \in F''_t \ \ \forall\, t \in K_2 \setminus K_1\big). \tag{6.21}$$

При этом $K_1 = (K_1 \setminus K_2) \cup (K_1 \cap K_2)$ и $K_2 = (K_2 \setminus K_1) \cup (K_1 \cap K_2)$. Тогда из двух первых положений в (6.21) вытекает, в частности, что $x^* \in F'_t \ \ \forall\, t \in K_1$. Поэтому (см. (6.16)) $x^* \in \mathbb{A}$. Далее, из второго и третьего положений в (6.21) следует, что $x^* \in F''_t \ \ \forall\, t \in K_2$. Тогда (см. (6.16)) $x^* \in \mathbb{B}$. Получили в итоге, что $x^* \in \mathbb{A} \cap \mathbb{B}$. Тем самым установлено вложение $\mathbb{C} \subset \mathbb{A} \cap \mathbb{B}$, откуда с учетом (6.20) получаем равенство $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \mathbb{C}$. С учетом (6.19) имеем теперь свойство $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} \in \widetilde{\mathbf{F}}$. Поскольку $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ выбирались произвольно, установлено (6.15). Выберем произвольно $\Phi \in \widetilde{\mathbf{F}}$. С учетом (6.14) тогда $\Phi \in \mathcal{P}(E)$ и

$$\Phi = \bigcap_{t \in \mathbb{K}} \Phi_t \tag{6.22}$$

для некоторых $\mathbb{K} \in \mathrm{Fin}(T)$ и $(\Phi_t)_{t \in \mathbb{K}} \in \prod\limits_{t \in \mathbb{K}} \mathcal{F}_t$. Пусть теперь

$$(\widetilde{\Phi}_t)_{t \in T} \in \prod_{t \in T} \mathcal{F}_t \tag{6.23}$$

определяется правилом

$$\big(\widetilde{\Phi}_t \triangleq \Phi_t \ \ \forall\, t \in \mathbb{K}\big) \,\&\, \big(\widetilde{\Phi}_t \triangleq E \ \ \forall\, t \in T \setminus \mathbb{K}\big) \tag{6.24}$$

(учитываем здесь, что в силу (2.1) $E \in \mathcal{F}$ при $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E]$; поэтому $E \in \mathcal{F}_t$ при $t \in T$). Из того, что $\mathbb{K} \subset T$, следует, что (см. (6.22), (6.24))

$$\bigcap_{t \in T} \widetilde{\Phi}_t \subset \bigcap_{t \in \mathbb{K}} \widetilde{\Phi}_t = \bigcap_{t \in \mathbb{K}} \Phi_t = \Phi. \tag{6.25}$$

Пусть $x^\natural \in \Phi$. Тогда $x^\natural \in E$ и согласно (6.22)

$$x^\natural \in \Phi_t \quad \forall\, t \in \mathbb{K}. \tag{6.26}$$

С учетом (6.24) получаем, что $x^\natural \in \widetilde{\Phi}_t \ \ \forall\, t \in T \setminus \mathbb{K}$. Тогда в силу (6.24) и (6.26) $x^\natural \in \widetilde{\Phi}_t \ \ \forall\, t \in T$. Иными словами, $x^\natural \in \bigcap\limits_{t \in T} \widetilde{\Phi}_t$, чем и завершается проверка вложения $\Phi \subset \bigcap\limits_{t \in T} \widetilde{\Phi}_t$, а, следовательно (см. (6.25)), и равенства

$$\Phi = \bigcap_{t \in T} \widetilde{\Phi}_t. \tag{6.27}$$

Однако (см. (6.1), (6.23)) $\bigcap\limits_{t \in T} \widetilde{\Phi}_t \in \mathbb{F}$, а потому из (6.27) следует включение $\Phi \in \mathbb{F}$. Поскольку выбор Φ был произвольным, установлено, что $\widetilde{\mathbf{F}} \subset \mathbb{F}$. Коль скоро (6.15) установлено ранее, предложение доказано. $\square$

Итак, получили следующее свойство:

$$\widetilde{\mathbf{F}} \in \mathcal{P}'(\mathbb{F})\colon A \cap B \in \widetilde{\mathbf{F}} \quad \forall\, A \in \widetilde{\mathbf{F}} \quad \forall\, B \in \widetilde{\mathbf{F}}. \tag{6.28}$$

Предложение 14. *Истинна эквивалентность*

$$\Big(\bigcap_{t\in K} F_t \neq \varnothing \ \ \forall K \in \mathrm{Fin}(T) \ \ \forall (F_t)_{t\in K} \in \prod_{t\in K} \mathcal{F}_t\Big) \Leftrightarrow (\widetilde{\mathbf{F}} \in \mathfrak{F}[E]). \tag{6.29}$$

Доказательство. Пусть

$$\bigcap_{t\in K} F_t \neq \varnothing \quad \forall K \in \mathrm{Fin}(T) \quad \forall (F_t)_{t\in K} \in \prod_{t\in K} \mathcal{F}_t. \tag{6.30}$$

Затем в силу (6.14) и (6.30) $\varnothing \notin \widetilde{\mathbf{F}}$, а потому (см. (6.14), (6.28)) в силу предложения 13

$$\widetilde{\mathbf{F}} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(E))\colon A \cap B \in \widetilde{\mathbf{F}} \quad \forall A \in \widetilde{\mathbf{F}} \quad \forall B \in \widetilde{\mathbf{F}}. \tag{6.31}$$

Пусть $\Phi \in \widetilde{\mathbf{F}}$. Используя (6.14), подберем $\mathbb{K} \in \mathrm{Fin}(T)$ и $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{K}} \in \prod_{t\in\mathbb{K}} \mathcal{F}_t$ со свойством

$$\Phi = \bigcap_{t\in\mathbb{K}} \Phi_t. \tag{6.32}$$

Пусть $\mathbb{H} \in [\mathcal{P}(E)](\Phi)$. Тогда $\mathbb{H} \in \mathcal{P}(E)$ и при этом $\Phi \subset \mathbb{H}$. Поскольку $\mathcal{F}_t \in \mathfrak{F}[E]$ при $t \in \mathbb{K}$, имеем следующее свойство (см. (2.1)):

$$\widetilde{\Phi}_t \triangleq \Phi_t \cup \mathbb{H} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \in \mathbb{K}. \tag{6.33}$$

Тогда $(\widetilde{\Phi}_t)_{t\in\mathbb{K}} \in \prod_{t\in\mathbb{K}} \mathcal{F}_t$ и определено (см. (6.14)) множество-пересечение

$$\widetilde{\Phi} \triangleq \bigcap_{t\in\mathbb{K}} \widetilde{\Phi}_t \in \widetilde{\mathbf{F}}. \tag{6.34}$$

Отметим, что в силу (6.33) и (6.34) $\mathbb{H} \subset \widetilde{\Phi}$. Выберем произвольно $x_* \in \widetilde{\Phi}$. Тогда ввиду (6.34) $x_* \in \widetilde{\Phi}_t$ при $t \in \mathbb{K}$. Поэтому (см. (6.33)) $\forall t \in \mathbb{K}$

$$(x_* \in \Phi_t) \vee (x_* \in \mathbb{H}). \tag{6.35}$$

При этом $(x_* \notin \mathbb{H}) \vee (x_* \in \mathbb{H})$. Допустим, что $x_* \notin \mathbb{H}$. В этом случае в силу (6.35) имеем свойство: $x_* \in \Phi_t \ \forall t \in \mathbb{K}$. В силу (6.32) $x_* \in \Phi$, и по выбору $\mathbb{H}$ имеем, как следствие, $x_* \in \mathbb{H}$ вопреки предположению. Полученное противоречие показывает, что свойство $x_* \notin \mathbb{H}$ невозможно, а потому $x_* \in \mathbb{H}$. Итак, $\widetilde{\Phi} \subset \mathbb{H}$, а, значит, $\mathbb{H} = \widetilde{\Phi} \in \widetilde{\mathbf{F}}$ (см. (6.34)). Итак, $[\mathcal{P}(E)](\Phi) \subset \widetilde{\mathbf{F}}$. Поскольку выбор Φ был произвольным, установлено, что $[\mathcal{P}(E)](F) \subset \widetilde{\mathbf{F}} \ \forall F \in \widetilde{\mathbf{F}}$. Таким образом (см. (2.1), (6.31)), при условии (6.30) $\widetilde{\mathbf{F}} \in \mathfrak{F}[E]$. Получили импликацию

$$\Big(\bigcap_{t\in K} F_t \neq \varnothing \ \ \forall K \in \mathrm{Fin}(T) \ \ \forall (F_t)_{t\in K} \in \prod_{t\in K} \mathcal{F}_t\Big) \Rightarrow (\widetilde{\mathbf{F}} \in \mathfrak{F}[E]). \tag{6.36}$$

Пусть $\widetilde{\mathbf{F}} \in \mathfrak{F}[E]$. Тогда согласно (2.1) $\varnothing \notin \widetilde{\mathbf{F}}$. Если $K \in \mathrm{Fin}(T)$ и $(F_t)_{t\in K} \in \prod_{t\in K} \mathcal{F}_t$, то ввиду (6.14) $\bigcap_{t\in K} F_t \in \widetilde{\mathbf{F}}$, а потому $\bigcap_{t\in K} F_t \neq \varnothing$. Итак, имеем очевидную импликацию

$$(\widetilde{\mathbf{F}} \in \mathfrak{F}[E]) \Rightarrow \Big(\bigcap_{t\in K} F_t \neq \varnothing \ \ \forall K \in \mathrm{Fin}(T) \ \ \forall (F_t)_{t\in K} \in \prod_{t\in K} \mathcal{F}_t\Big).$$

С учетом (6.36) получаем требуемую эквивалентность (6.29). $\square$

Предложение 15. *Справедливо равенство*

$$\widetilde{\mathbf{F}} = \{\cap\}_\sharp\Big(\bigcup_{t\in T}\mathcal{F}_t\Big). \tag{6.37}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольно $\mathbb{P} \in \widetilde{\mathbf{F}}$, после чего, используя (6.14), подберем $\mathbb{K} \in \mathrm{Fin}(T)$ и $(P_t)_{t\in\mathbb{K}} \in \prod\limits_{t\in\mathbb{K}}\mathcal{F}_t$, для которых

$$\mathbb{P} = \bigcap_{t\in\mathbb{K}} P_t. \tag{6.38}$$

Тогда $P_t \in \mathcal{F}_t$ при $t \in \mathbb{K}$. Ясно, что $\mathbf{P} \triangleq \{P_t : t\in\mathbb{K}\} \in \mathrm{Fin}\big(\bigcup\limits_{t\in T}\mathcal{F}_t\big)$; согласно (6.10) и (6.38) имеем свойство $\mathbb{P} = \bigcap\limits_{F\in\mathbf{P}} F \in \{\cap\}_\sharp\big(\bigcup\limits_{t\in T}\mathcal{F}_t\big)$. Поскольку выбор $\mathbb{P}$ был произвольным, установлено, что

$$\widetilde{\mathbf{F}} \subset \{\cap\}_\sharp\Big(\bigcup_{t\in T}\mathcal{F}_t\Big). \tag{6.39}$$

Выберем произвольно $Q \in \{\cap\}_\sharp\big(\bigcup\limits_{t\in T}\mathcal{F}_t\big)$. Исходя из этого, для некоторых $r\in\mathbb{N}$ и $(Q_l)_{l\in\overline{1,r}} \in \big(\bigcup\limits_{t\in T}\mathcal{F}_t\big)^r$ имеем равенство

$$Q = \bigcap_{l=1}^{r} Q_l. \tag{6.40}$$

Заметим, что по выбору r и $(Q_l)_{l\in\overline{1,r}}$

$$\mathbb{T}_l \triangleq \big\{t\in T \mid Q_l \in \mathcal{F}_t\big\} \in \mathcal{P}'(T) \quad \forall\, l\in\overline{1,r}. \tag{6.41}$$

Тогда $(\mathbb{T}_l)_{l\in\overline{1,r}} \in \mathcal{P}'(T)^r$, а потому

$$\prod_{l=1}^{r}\mathbb{T}_l = \big\{(t_i)_{i\in\overline{1,r}} \in T^r \mid t_k\in\mathbb{T}_k \ \forall\, k\in\overline{1,r}\big\} \in \mathcal{P}'(T^r).$$

С учетом этого выберем и зафиксируем $(\theta_l)_{l\in\overline{1,r}} \in \prod\limits_{l=1}^{r}\mathbb{T}_l$, получая, в частности, $(\theta_l)_{l\in\overline{1,r}} \in T^r$ (нумерация $(\theta_l)_{l\in\overline{1,r}}$ не является, вообще говоря, инъективной). При этом, конечно,

$$\Theta \triangleq \big\{\theta_l : l\in\overline{1,r}\big\} \in \mathrm{Fin}(T). \tag{6.42}$$

Отметим, что (по построению) $\theta_l \in \mathbb{T}_l$ при $l\in\overline{1,r}$, а потому согласно (6.41) $Q_l \in \mathcal{F}_{\theta_l}$. Далее, из (6.42) вытекает, что при $t\in\Theta$

$$\mathcal{L}_t \triangleq \big\{l\in\overline{1,r} \mid \theta_l = t\big\} \in \mathcal{P}'(\overline{1,r}). \tag{6.43}$$

Ввиду (2.1) и (6.43) получаем (в связи с (2.1) привлекается индукция), что при $t\in\Theta$

$$\mathbb{Q}_t \triangleq \bigcap_{l\in\mathcal{L}_t} Q_l \in \mathcal{F}_t; \tag{6.44}$$

здесь учитываем, что (см. (6.42), (6.43)) при $t\in\Theta$ и $l\in\mathcal{L}_t$ непременно $Q_l\in\mathcal{F}_t$. Тогда $(\mathbb{Q}_t)_{t\in\Theta} \in \prod\limits_{t\in\Theta}\mathcal{F}_t$. Вследствие (6.14) и (6.44) имеем, что

$$\mathbf{Q} \triangleq \bigcap_{t\in\Theta}\mathbb{Q}_t \in \widetilde{\mathbf{F}}. \tag{6.45}$$

Сравним множества Q и $\mathbf{Q}$. Пусть $y_* \in Q$. В этом случае, в частности, $y_* \in E$. При этом согласно (6.40)

$$y_* \in Q_l \quad \forall\, l \in \overline{1,r}. \tag{6.46}$$

Выберем произвольно $\xi \in \Theta$, получая, в частности, что $\xi \in T$. Из (6.43) вытекает,что $\mathcal{L}_\xi = \{l \in \overline{1,r} \mid \theta_l = \xi\} \in \mathcal{P}'(\overline{1,r})$; тогда $\mathcal{L}_\xi \neq \varnothing$ и $\mathcal{L}_\xi \subset \overline{1,r}$. Из (6.44) получаем, что

$$\mathbb{Q}_\xi = \bigcap_{l \in \mathcal{L}_\xi} Q_l. \tag{6.47}$$

Из (6.46) имеем $y_* \in Q_l$ при $l \in \mathcal{L}_\xi$. Как следствие (см. (6.47)), $y_* \in \mathbb{Q}_\xi$. Поскольку $\xi \in \Theta$ выбиралось произвольно, установлено, что $y_* \in \mathbb{Q}_t$ при $t \in \Theta$. В силу (6.45) $y_* \in \mathbf{Q}$. Итак,

$$Q \subset \mathbf{Q}. \tag{6.48}$$

Пусть $y^* \in \mathbf{Q}$. Значит, (см. (6.14), (6.45)) $y^* \in E$, и при этом

$$y^* \in \bigcap_{t \in \Theta} \mathbb{Q}_t, \tag{6.49}$$

т. е. $y^* \in \mathbb{Q}_t \;\; \forall t \in \Theta$. Пусть $\nu \in \overline{1,r}$. Тогда ввиду (6.41) $\mathbb{T}_\nu = \big\{t \in T \mid Q_\nu \in \mathcal{F}_t\big\} \in \mathcal{P}'(T)$, где $Q_\nu \in \bigcup\limits_{t \in T} \mathcal{F}_t$. Напомним, что $\theta_\nu \in \mathbb{T}_\nu$. Поэтому $\theta_\nu \in T$, и при этом $Q_\nu \in \mathcal{F}_{\theta_\nu}$. В силу (6.42) $\theta_\nu \in \Theta$, а потому (см. (6.49)) $y^* \in \mathbb{Q}_{\theta_\nu}$, где согласно (6.44)

$$\mathbb{Q}_{\theta_\nu} = \bigcap_{l \in \mathcal{L}_{\theta_\nu}} Q_l; \tag{6.50}$$

при этом (см. (6.43)) $\mathcal{L}_{\theta_\nu} = \{l \in \overline{1,r} \mid \theta_l = \theta_\nu\}$. По выбору ν имеем включение $\nu \in \mathcal{L}_{\theta_\nu}$, а тогда из (6.50) вытекает, что $\mathbb{Q}_{\theta_\nu} \subset Q_\nu$. Вместе с тем из (6.49) имеем по свойствам θ_ν, что $y^* \in \mathbb{Q}_{\theta_\nu}$. Как следствие, $y^* \in Q_\nu$. Поскольку $\nu \in \overline{1,r}$ выбиралось произвольно, получаем, что $y^* \in Q_l \;\; \forall\, l \in \overline{1,r}$. Из (6.40) имеем теперь, что $y^* \in Q$. Тем самым установлено, что $\mathbf{Q} \subset Q$ и, значит (см. (6.45), (6.48)), $Q = \mathbf{Q} \in \widetilde{\mathbf{F}}$. Поскольку множество $Q \in \{\cap\}_\sharp\big(\bigcup\limits_{t \in T} \mathcal{F}_t\big)$ выбиралось произвольно, справедливо $\{\cap\}_\sharp\big(\bigcup\limits_{t \in T} \mathcal{F}_t\big) \subset \widetilde{\mathbf{F}}$. С учетом (6.39) получаем требуемое равенство (6.37). □

Возвращаясь к (6.12), заметим, что ввиду (6.15) и предложения 15

$$(\mathbf{as})\Big[E; X; \tau; \mathbf{h}; \bigcup_{t \in T} \mathcal{F}_t\Big] = (\mathrm{AS})\big[E; X; \tau; \mathbf{h}; \widetilde{\mathbf{F}}\big], \tag{6.51}$$

где свойства $\widetilde{\mathbf{F}}$ (см. (6.14)) проясняются в предложениях 13–15; заметим, в частности, что согласно (2.2) и предложению 13 всегда $\widetilde{\mathbf{F}} \in \beta[E]$, а предложение 14 указывает необходимые и достаточные условия для того, чтобы данное семейство было фильтром, что, в свою очередь, гарантирует непустоту МП (6.51).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 620 с.
2. **Гамкрелидзе Р.В.** Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975. 230 с.
3. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. **Даффин Р.Дж.** Бесконечные программы // Линейные неравенства и смежные вопросы. М.: ИЛ, 1959. С. 263–267.

5. **Гольштейн Е.Г.** Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 351 с.
6. **Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.
7. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
8. **Chentsov A.G.** Finitely additive measures and relaxations of extremal problems. NY; London; Moscow: Plenum Pub. Corp., 1996. 244 p.
9. **Chentsov A.G.** Asymptotic attainability. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. 322 p. https://doi.org/10.1007/978-94-017-0805-0
10. **Chentsov A.G., Morina S.I.** Extensions and relaxations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. 408 p. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1527-0
11. **Ченцов А.Г.** Конечно-аддитивные меры и расширения абстрактных задач управления // Современная математика и ее приложения. Оптимальное управление. Тбилиси: Изд-во Ин-та кибернетики АН Грузии, 2004. Т 17.
12. **Ченцов А.Г., Бакланов А.П.** К вопросу о построении множества достижимости при ограничениях асимптотического характера // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 309–323.
13. **Ченцов А.Г., Бакланов А.П.** Об одной задаче асимптотического анализа, связанной с построением области достижимости // Тр. МИАН. 2015. Т. 291. С. 292–311.
14. **Ченцов А.Г., Бакланов А.П., Савенков И.И.** Задача о достижимости с ограничениями асимптотического характера // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. гос. ун-та. 2016. Т. 47, № 1. С. 54–118.
15. **Ченцов А. Г.** Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы множеств. М.: Ленанд, 2024. 416 с.
16. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
17. **Бурбаки Н.** Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 272 с.
18. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
19. **Булинский А. В., Ширяев А. Н.** Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.
20. **Ченцов А.Г.** Замкнутые отображения и построение моделей расширения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2023. Т 29, № 3. С. 274–295. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2023-29-3-274-295

Поступила 20.01.2025
После доработки 11.02.2025
Принята к публикации 11.02.2025
Опубликована онлайн 20.03.2025

Ченцов Александр Георгиевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН, профессор
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
профессор
Уральский федеральный университет
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations.* NY, Acad. Press, 1972, 531 p. https://doi.org/10.1016/C2013-0-11669-8. Translated to Russian under the title *Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami*, Moscow, Nauka Publ., 1977, 620 p.
2. Gamkrelidze R.V. *Principles of optimal control theory.* NY, Springer, 1978, 175 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-7398-8. Original Russian text was published in Gamkrelidze R.V., *Osnovy optimal'nogo upravleniya*, Tbilisi, Tbilisi Univ. Publ., 1975, 230 p.
3. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* NY, Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text was published in Krasovskii N. N., Subbotin A. I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.

4. Duffin R.J. Infinite programs. In: *Linear inequalities and related systems*, eds. H. W. Kuhn, A. W. Tucker, Princeton, Princeton Univ. Press, 1957, Ch. 6. https://doi.org/10.1515/9781400881987-007. Translated to Russian under the title *Beskonechnye programmy.* In: *Lineinye neravenstva i smezhnye voprosy*, Moscow, Inostr. Liter. Publ., 1959.
5. Golstein E.G. *Teoriya dvoistvennosti v matematicheskom programmirovanii i ee prilozheniya* [Duality theory in mathematic programming and its applications]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 351 p.
6. Ioffe A.D., Tikhomirov V.M. *Theory of extremal problems.* Elsevier Sci. Publ., 2009, 459 p. ISBN: 9780080875279. Original Russian text published in Ioffe A. D., Tikhomirov V. M. *Teoriya ekstremal'nykh zadach*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 480 p.
7. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Motion control theory]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 475 p.
8. Chentsov A.G. *Finitely additive measures and relaxations of extremal problems.* NY, Consultants Bureau, Springer, 1996, 244 pp. ISBN: 9780306110382.
9. Chentsov A.G. *Asymptotic attainability.* Dordrecht, Springer, 1997, 322 p. https://doi.org/10.1007/978-94-017-0805-0
10. Chentsov A.G., Morina S.I. *Extensions and relaxations.* Dordrecht, Springer, 2002, 408 p. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1527-0
11. Chentsov A.G. *Konechno-additivnyye mery i rasshireniya abstraktnykh zadach upravleniya* [Finite-additive measures and extensions of abstract control problems]. Tbilisi, Acad. Sci. Georgia, In-te of Cybernetics Publ., 2004. Ser. Modern Math. and Its Appl., vol. 17, Optimal control.
12. Chentsov A.G., Baklanov A.P. On the question of construction of an attraction set under constraints of asymptotic nature. *Proc. Steklov Inst. Math.* (Suppl.), 2015, vol. 291, suppl. 1, pp. S40–S55. https://doi.org/10.1134/S0081543815090035
13. Chentsov A.G., Baklanov A.P. On an asymptotic analysis problem related to the construction of an attainability domain. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 291, pp. 279–298. https://doi.org/10.1134/S0081543815080222
14. Chentsov A.G., Baklanov A.P., Savenkov I.I. An attainability problem with constraints of an asymptotic nature. *Izv. Inst. Mat. Inform.*, 2016, no. 1(47), pp. 54–118 (in Russian).
15. Chentsov A.G. *Ul'trafil'try i maksimal'nyye stseplennyye sistemy mnozhestv* [Ultrafilters and maximal linked systems of sets]. Moscow, Lenand, 2024, 416 p. ISBN: 9785951944160.
16. Engelking R. *General topology.* Warsaw, PWN, 1977. Translated to Russian under the title *Obshchaya topologiya*, Moscow, Mir Publ., 1986, 751 p.
17. Bourbaki N. *Topologie générale: structures topologiques, structures uniformes.* Paris, Hermann, 1968. Translated to Russian under the title *Obshchaya topologiya: osnovnye struktury*, Moscow, Nauka Publ., 1968, 272 p.
18. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory.* Warszawa, PWN Polish Scient. Publ., 1967. Translated to Russian under the title *Teoriya mnozhestv*, Moscow, Mir Publ., 1970, 416 p.
19. Bulinskii A.V., Shiryaev A.N. *Teoriya sluchainykh protsessov* [The theory of stochastic processes]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005, 402 p. ISBN: 978-5-9221-0335-0.
20. Chentsov A.G. Closed mappings and construction of extension models. *Proc. Steklov Inst. Math.* (Suppl.), 2023, vol. 323, suppl. 1, pp. S56–S77. https://doi.org/10.1134/S0081543823060056

Received January 20, 2024
Revised February 11, 2025
Accepted February 11, 2025
Published online March 20, 2025

Alexander Georgievich Chentsov, Dr. Phys.-Math. Sci, RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia,
e-mail: chentsov@imm.uran.ru.

Cite this article as: A. G. Chentsov. Attraction sets in abstract reachability problems. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 2, pp. 294–315.