

УДК 514.752.3

О ПЛОЩАДИ ε -СЛОЯ СЛАБО ВЫПУКЛОЙ ФИГУРЫ¹

В. Н. Ушаков, А. А. Ершов, О. А. Кувшинов

Статья посвящена обобщению на некоторые классы невыпуклых тел известной формулы Штейнера для объема ε -окрестности выпуклого тела в n -мерном евклидовом пространстве. Данное исследование ограничивается случаем двумерного евклидова пространства, находящихся в нем плоских фигур и их окрестностей. Рассмотрены примеры различных невыпуклых фигур на плоскости, для окрестности которых формула Штейнера как выполняется, так и не выполняется. Обоснована формула Штейнера для вычисления площади ε -слоя слабо выпуклых по Ефимову — Стечкину плоских фигур с гладкой границей. Доказательство основывается на методах дифференциальной геометрии и свойствах слабо выпуклых множеств.

Ключевые слова: формула Штейнера, невыпуклая фигура, площадь окрестности, параллельное тело, слабо выпуклое множество.

V. N. Ushakov, A. A. Ershov, O. A. Kuvshinov. On the area of the ε -layer of a weakly convex figure.

The article is devoted to the generalization of the well-known Steiner formula for the volume of the ε -neighborhood of a convex body in n -dimensional Euclidean space to some classes of nonconvex bodies. This study is limited to the case of two-dimensional Euclidean space, with flat figures located in it and their neighborhoods. Examples of various nonconvex figures on the plane are considered, for the neighborhood of which the Steiner formula is either satisfied or not satisfied. The Steiner formula for calculating the area of the ε -layer of weakly convex Efimov–Stechkin plane figures with a smooth boundary is substantiated. The proof is based on methods of differential geometry and properties of weakly convex sets.

Keywords: Steiner formula, nonconvex figure, area of neighborhood, parallel body, weakly convex set.

MSC: 51N20

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-2-280-293

1. Введение

В математической теории управления и теории дифференциальных игр значительное место занимают задачи, тематика которых связана с оптимизацией различного рода функционалов, определенных на движениях или пучках движений управляемых систем. К таким задачам относятся различные задачи сближения-уклонения управляемых систем. В них в качестве подзадач входят задачи, в той или иной мере связанные с оптимизацией расстояния движения управляемой системы до некоторого другого движения или некоторого множества в фазовом пространстве системы или в пространстве позиций системы [1; 2].

В последнее время не менее значимы задачи управления и теории дифференциальных игр, в которых требуется оптимизировать объем множеств достижимости или интегральных воронок управляемых систем, и, в частности, некоторые задачи управления такого рода, в которых динамические системы зависят от параметра. В случае управляемых систем на плоскости некоторые из них формулируются как задачи максимизации площади множеств достижимости управляемой системы в определенные моменты времени или на конечном промежутке времени [3]. Часть этих задач в более реалистичной постановке учитывает наличие фазовых ограничений на управляемую систему [4].

¹Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2025-1549).

В упомянутых задачах управления динамическими системами, зависящими от параметра, изучается зависимость от параметра множеств достижимости и интегральных воронок при определенных условиях на систему (см., например, [5]): оценивается характер зависимости их от параметра.

Представляет существенный интерес степень зависимости объемов множеств достижимости и интегральных воронок систем от параметра системы. Поскольку в рассматриваемых задачах с объемом в подавляющем большинстве задач невозможно точное выделение (аналитическое описание) множеств достижимости и интегральных воронок, то возникает потребность в конструировании множеств, их аппроксимирующих и при этом приемлемых для вычислений. В связи с этим для оценки упомянутой зависимости вводятся в фазовом пространстве управляемой системы конечные системы множеств, отвечающие конечным разбиениям промежутка времени и аппроксимирующие множества достижимости и интегральные воронки на этом промежутке. На первом этапе оценивается степень зависимости аппроксимирующей системы множеств от параметра, и затем эта оценка используется при оценке зависимости объема множеств достижимости и интегральной воронки от параметра. При этом возникает вопрос о том, насколько объемы множеств, аппроксимирующих множества достижимости и интегральные воронки, отличаются от соответствующих объемов идеальных множеств достижимости и интегральных воронок. Так как в ряде алгоритмов приближенного вычисления аппроксимирующие множества мажорируют идеальные множества достижимости и интегральные воронки, то возникает естественный вопрос о том, насколько велик объем пространственного слоя, заключенного между границами аппроксимирующих и идеальных множеств.

Как пример задачи управления, в которой возникают проблемы оценки объема слоев фазового пространства управляемой системы в \mathbb{R}^n , заключенных между границами множеств достижимости и аппроксимирующих их множеств, приведем следующую задачу.

На промежутке времени $[t_0, \vartheta]$, $t_0 < \vartheta < \infty$, задана управляемая система Σ

$$\frac{dx}{dt} = f_\alpha(t, x, u), \quad (1.1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы Σ , u — управляющее воздействие из множества $P \in \text{comp}(\mathbb{R}^p)$, α — параметр из множества $\mathcal{L} \in \text{comp}(\mathbb{R}^l)$; $\text{comp}(\mathbb{R}^k)$ — пространство компактов в евклидовом пространстве \mathbb{R}^k с хаусдорфовой метрикой $d(X^{(1)}, X^{(2)}) = \max(h(X^{(1)}, X^{(2)}), h(X^{(2)}, X^{(1)}))$, $h(X^{(1)}, X^{(2)}) = \max_{x^{(1)} \in X^{(2)}} \rho(x^{(1)}, X^{(1)})$ — хаусдорфово отклонение $X^{(1)}$ от $X^{(2)}$, $\rho(x^{(1)}, X^{(2)}) = \min_{x^{(2)} \in X^{(2)}} \|x^{(1)} - x^{(2)}\|$.

Предполагается, что система Σ удовлетворяет следующим условиям.

У с л о в и е А. Функция $f_\alpha(t, x, u)$ определена, непрерывна на $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P \times \mathcal{L}$, и для любой ограниченной замкнутой области $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ найдутся функция $\omega^*(\delta)$, $\delta \in (0, \infty)$ ($\omega^*(\delta) \downarrow 0$, $\delta \downarrow 0$) и непрерывная функция $L(t) \in (0, \infty)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, удовлетворяющие

$$\|f_\alpha(t, x, u) - f_\beta(\tau, x, u)\| \leq \omega^*(|t - \tau| + \|\alpha - \beta\|),$$

$$(t, x), (\tau, x) \in D, \quad u \in P, \quad \alpha, \beta \in \mathcal{L};$$

$$\|f_\alpha(t, x, u) - f_\alpha(t, y, u)\| \leq L(t)\|x - y\|, \quad (t, x), (t, y) \in D, \quad u \in P, \quad \alpha \in \mathcal{L}.$$

У с л о в и е В. Найдется $\gamma \in (0, \infty)$, удовлетворяющее

$$\|f_\alpha(t, x, u)\| \leq \gamma(1 + \|x\|), \quad (t, x, u) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P, \quad \alpha \in \mathcal{L}.$$

Требуется оценить степень зависимости объема интегральной воронки системы Σ от параметра $\alpha \in \mathcal{L}$, а также сформировать множества, аппроксимирующие интегральную воронку, и описать способ приближенного вычисления объема интегральной воронки.

Введем многозначное отображение $(t, x) \mapsto F_\alpha(t, x) = \text{co}\mathcal{F}_\alpha(t, x)$, где $\mathcal{F}_\alpha(t, x) = \{f_\alpha(t, x, u) : u \in P\} \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$, $(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathcal{L}$.

Отображение $(t, x) \mapsto F_\alpha(t, x)$, $(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathcal{L}$, удовлетворяет условиям, индуцированным условиями А, В.

У с л о в и е А*. Для любой ограниченной замкнутой области $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ выполняются оценки сверху

$$d(F_\alpha(t, x), F_\beta(\tau, x)) \leq \omega^*(|t - \tau| + \|\alpha - \beta\|), \quad (t, x), (\tau, x) \in D, \quad \alpha, \beta \in \mathcal{L};$$

$$d(F_\alpha(t, x), F_\alpha(t, y)) \leq L(t)\|x - y\|, \quad (t, x), (t, y) \in D, \quad \alpha \in \mathcal{L}.$$

У с л о в и е В*. Найдется $\gamma \in (0, \infty)$, удовлетворяющее

$$h(F_\alpha(t, x), \{\mathbf{0}\}) \leq \gamma(1 + \|x\|), \quad (t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathcal{L}.$$

Введем на $[t_0, \vartheta]$ дифференциальное включение (д.в.)

$$\frac{dx}{dt} \in F_\alpha(t, x), \quad \alpha \in \mathcal{L}, \quad (1.2)$$

индуцированное системой Σ .

Пусть t_* и t^* из $[t_0, \vartheta]$, $t_* < t^*$, $x_* \in \mathbb{R}^2$, $X_* \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathcal{L}$.

Введем обозначения:

$X_\alpha(t^*, t_*, x_*)$ — множество достижимости д.в. (1.2) в момент t^* с начальной точкой x_* ;

$X_\alpha(t^*, t_*, X_*) = \bigcup_{x_* \in X_*} X_\alpha(t^*, t_*, x_*)$ — множество достижимости д.в. (1.2) в момент t^* с начальным множеством X_* ;

$\Gamma = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots, t_N = \vartheta\}$ — разбиение промежутка $[t_0, \vartheta]$ с диаметром $\Delta = \Delta(\Gamma) > 0$.

Пусть также задано начальное множество $X^{(0)} \subset \mathbb{R}^n$ для системы (1.1) и д.в. (1.2).

Для нас представляют интерес множества достижимости $X_\alpha(\vartheta, t_0, X^{(0)})$ и интегральные воронки $X_\alpha(t_0, X^{(0)}) = \bigcup_{t \in [t_0, \vartheta]} (t, X_\alpha(t, t_0, X^{(0)}))$, $\alpha \in \mathcal{L}$, д.в. (1.2);

здесь $(t, X_\alpha(t, t_0, X^{(0)})) = \{(t, x) : x \in X_\alpha(t, t_0, X^{(0)})\}$, $t \in [t_0, \vartheta]$.

Во многих прикладных задачах управления важен вопрос об объеме (в случае фазового пространства \mathbb{R}^2 — о площади) множеств достижимости $X_\alpha(t, t_0, X^{(0)})$ и интегральных воронок $X_\alpha(t_0, X^{(0)})$, $\alpha \in \mathcal{L}$. В ряде задач управления интерес представляют те $\alpha \in \mathcal{L}$, при которых объем множества $X_\alpha(\vartheta, t_0, X^{(0)})$ максимален; в некоторых задачах представляют интерес те $\alpha \in \mathcal{L}$, при которых максимален объем интегральных воронок $X_\alpha(t_0, X^{(0)})$.

Не имея возможности точного вычисления (аналитического описания) множеств $X_\alpha(\vartheta, t_0, X^{(0)})$ и $X_\alpha(t_0, X^{(0)})$, $\alpha \in \mathcal{L}$, для многих нелинейных управляемых систем (1.1) (и д.в. (1.2)), мы вынуждены в конкретных задачах управления прибегнуть к конструированию отвечающих разбиению Γ аппроксимаций $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\vartheta, t_0, X^{(0)})$, $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_0, X^{(0)})$, $\alpha \in \mathcal{L}$, множеств $X_\alpha(\vartheta, t_0, X^{(0)})$, $X_\alpha(t_0, X^{(0)})$.

Аппроксимации $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_i, t_0, X^{(0)})$, $t_i \in \Gamma$, задаются рекуррентными соотношениями

$$\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_0) = X^{(0)}, \quad \tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_i) = \tilde{X}_\alpha(t_i, t_{i-1}, \tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_{i-1})), \quad i \in \overline{1, N};$$

здесь обозначено $\tilde{X}_\alpha(t^*, t_*, X_*) = X_* + (t^* - t_*)F_\alpha(t_*, x_*) + \omega(t^* - t_*)\mathbb{B}^1$; $X_* \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$; $t_0 \leq t_* < t^* \leq \vartheta$; $X + Y$ — алгебраическая сумма множеств X и Y ; $\mathbb{B}^1 = \{b \in \mathbb{R}^n : \|b\| \leq 1\}$; $\omega(\delta) = \delta\omega^*((1 + LK)\delta)$, $\delta > 0$; $L = \max_{t \in [t_0, \vartheta]} L(t)$; $K \in (0, \infty)$ — достаточно большое число,

определяемое условием В и ограниченностью множества $X^{(0)}$ в \mathbb{R}^n .

При условиях А*, В* множества достижимости $X_\alpha(\vartheta, t_0, X^{(0)})$, $\alpha \in \mathcal{L}$, удовлетворяют предельному соотношению

$$X_\alpha(\vartheta) = X_\alpha(\vartheta, t_0, X^{(0)}) = \lim_{\Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0} \tilde{X}_\alpha^\Gamma(\vartheta), \quad (1.3)$$

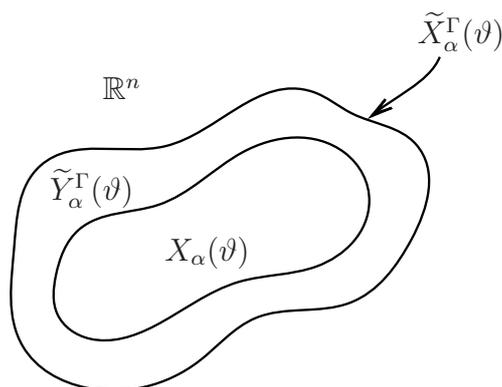


Рис. 1. Схема взаимного расположения множеств $X_\alpha(\vartheta)$ и $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\vartheta)$.

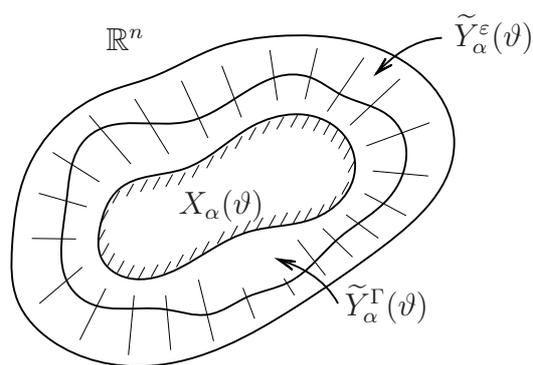


Рис. 2. Множество $\tilde{Y}_\alpha^\varepsilon(\vartheta)$.

где множества $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\vartheta)$ сходятся сверху в хаусдорфовой метрике к $X_\alpha(\vartheta, t_0, X^{(0)})$ при $\Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0$.

Представим схему взаимного расположения множеств $X_\alpha(\vartheta)$ и $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\vartheta)$ на рис. 1.

Обозначим $\tilde{Y}_\alpha^\Gamma(\vartheta) = \text{cl}(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\vartheta) \setminus X_\alpha(\vartheta))$, $V_n(\tilde{Y}_\alpha^\Gamma(\vartheta))$ — n -мерный объем слоя $\tilde{Y}_\alpha^\Gamma(\vartheta)$, $\alpha \in \mathcal{L}$.

Нас интересует задача выбора значения $\alpha \in \mathcal{L}$, на котором достигается $\max_{\alpha \in \mathcal{L}} V_n(X_\alpha(\vartheta))$.

Однако нам это множество неизвестно, и мы имеем в распоряжении лишь вычисленное в ходе рекуррентных пошаговых процедур множество $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\vartheta)$ — верхнюю аппроксимацию множества $X_\alpha(\vartheta)$ в пространстве \mathbb{R}^n . Допустим, что мы в состоянии вычислить объем $V_n(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\vartheta))$ множества $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\vartheta)$ и осуществить максимизацию этого объема по параметру $\alpha \in \mathcal{L}$.

Возникает вопрос о том, насколько точно, вычисляя $V_n(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\vartheta))$, мы вычисляем $V_n(X_\alpha(\vartheta))$. Ответ на этот вопрос сводится к оценке сверху величины $\max_{\alpha \in \mathcal{L}} (V_n(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\vartheta)) - V_n(X_\alpha(\vartheta))) = \max_{\alpha \in \mathcal{L}} V_n(\tilde{Y}_\alpha^\Gamma(\vartheta))$.

Допустим, мы установили, что при некотором $\varepsilon > 0$

$$\max_{\alpha \in \mathcal{L}} h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\vartheta), X_\alpha(\vartheta)) \leq \varepsilon,$$

т. е., что $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\vartheta) \subset X_\alpha(\vartheta) + \varepsilon \mathbb{B}^1$, $\alpha \in \mathcal{L}$.

Спрашивается, какова при этом оценка сверху величины $\max_{\alpha \in \mathcal{L}} V_n(\tilde{Y}_\alpha^\Gamma(\vartheta))$ — т. е. величины объема слоев $\tilde{Y}_\alpha^\Gamma(\vartheta)$, окружающих множества $X_\alpha(\vartheta)$, $\alpha \in \mathcal{L}$?

Для ответа на этот вопрос обозначим $\tilde{Y}_\alpha^\varepsilon(\vartheta) = \text{cl}(X_\alpha(\vartheta)_\varepsilon \setminus X_\alpha(\vartheta))$ (см. рис. 2).

Очевидно, справедливы оценки $V_n(\tilde{Y}_\alpha^\Gamma(\vartheta)) \leq V_n(\tilde{Y}_\alpha^\varepsilon(\vartheta))$, $\alpha \in \mathcal{L}$, $\max_{\alpha \in \mathcal{L}} V_n(\tilde{Y}_\alpha^\Gamma(\vartheta)) \leq \max_{\alpha \in \mathcal{L}} V_n(\tilde{Y}_\alpha^\varepsilon(\vartheta))$, и, значит, предыдущий вопрос сводится к следующему: какова оценка сверху величины $\max_{\alpha \in \mathcal{L}} V_n(\tilde{Y}_\alpha^\varepsilon(\vartheta))$ и какова зависимость этой оценки от $\varepsilon > 0$?

Очевидно также, что вид этой оценки явно зависит от геометрии множеств $X_\alpha(\vartheta)$, $\alpha \in \mathcal{L}$, и ограничения на $(n - 1)$ -мерный объем $V_{n-1}(\partial X_\alpha(\vartheta))$ их границ $\partial X_\alpha(\vartheta)$, $\alpha \in \mathcal{L}$, в пространстве \mathbb{R}^n .

В следующих разделах исследуем проблему вычисления площади ε -слоев невыпуклых тел в \mathbb{R}^2 , абстрагируясь при этом от задач математической теории управления.

Проблема вычисления и оценки объемов ε -слоев тел в конечномерных евклидовых пространствах далеко не нова: она занимает математиков по меньшей мере с XIX века и является одной из наиболее значимых проблем геометрии (см. [6; 7]). Теорема, установленная Я. Штейнером для случая обыкновенного трехмерного пространства и значительно обобщенная в принадлежащей Г. Минковскому теории выпуклых тел, утверждает, что объем внешних

параллельных тел A_ε для выпуклого тела A является целой рациональной функцией расстояния ε [8, гл. VI, §1, п. 6.1.8]. Ряд дальнейших обобщений этой теоремы был получен в XX веке, в том числе на римановых многообразиях [9–11].

В монографиях [8; 12] внешним параллельным телом называется ε -окрестность тела и приводится формула Штейнера n -мерного объема ε -окрестности выпуклого тела [8, формула (48)], [12, формула (333)]. В частных случаях для выпуклого тела A размерности $n = 2$ или $n = 3$ и его ε -окрестности A_ε эта формула имеет вид

$$S(A_\varepsilon) = W_0(A) + 2W_1(A)\varepsilon + W_2\varepsilon^2 = S(A) + P(A)\varepsilon + \pi\varepsilon^2 \quad \text{при } n = 2; \quad (1.4)$$

здесь $S(\cdot) = W_0(\cdot)$ — площадь; $P(\cdot) = 2W_1(\cdot)$ — периметр; $W_2 = \pi$;

$$V(A_\varepsilon) = W_0(A) + 3W_1(A)\varepsilon + 3W_2(A)\varepsilon^2 + W_3\varepsilon^3 \quad \text{при } n = 3;$$

где $V(\cdot) = W_0(\cdot)$ — объем, $3W_1(\cdot)$ — площадь поверхности, $3W_2(\cdot)$ — интеграл средней кривизны, $W_3 = 4\pi/3$. Все коэффициенты $W_k(A)$ являются различными интегралами поперечных мер тела A .

В случае невыпуклых тел формула Штейнера может как выполняться, так и переходить в оценку сверху для n -мерного объема ε -окрестности [13]. В связи с этим интересно исследовать вопрос об условиях, от которых зависит выполнение формулы Штейнера для невыпуклых тел.

Поскольку в задачах динамики управляемых систем, которые мы рассматриваем, управляемые системы нелинейны, то, как правило, множества достижимости, а следовательно, и интегральные воронки этих систем есть невыпуклые компакты в соответствующих конечномерных евклидовых пространствах. В связи с этим один из интересующих нас вопросов связан с установлением условий на задачи управления (на стартовые множества управляемых систем и их динамику), при которых выполняется формула Штейнера. Здесь мы имеем в виду задачи управления в пространстве \mathbb{R}^2 .

2. Примеры

Прежде чем перейти к теоретическим построениям, приведем в этом разделе различные примеры невыпуклых фигур на плоскости; площади ε -слоя одних из них удовлетворяют, а других не удовлетворяют формуле (1.4). Во всех нижеследующих примерах $0 < \varepsilon < 1$.

2.1. Пример 1

Пусть невыпуклая фигура Ω представляет собой кольцо единичной ширины и с внешним радиусом $r = 2$ (рис. 3).

В этом случае площадь ε -окрестности кольца Ω можно представить в виде разности площадей двух кругов: $S(\Omega_\varepsilon) = \pi(2 + \varepsilon)^2 - \pi(1 - \varepsilon)^2 = \pi(3 + 6\varepsilon)$.

В то же время правая часть формулы Штейнера составляет

$$S(\Omega) + P(\Omega)\varepsilon + \pi\varepsilon^2 = 3\pi + 6\pi\varepsilon + \pi\varepsilon^2.$$

Таким образом, в этом случае формула Штейнера не выполняется.

2.2. Пример 2

Из примера 1 ясно, что внутренние дырки добавляют “лишние” слагаемые к площади окрестности и, таким образом, препятствуют выполнению формулы Штейнера. В качестве односвязной невыпуклой фигуры Ω рассмотрим 1-окрестность половины окружности радиуса 2 (рис. 4).

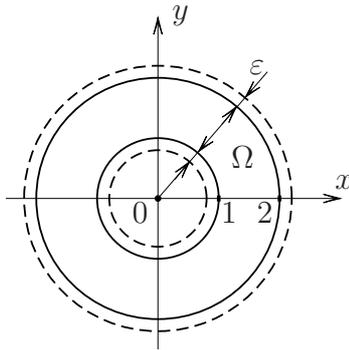


Рис. 3. Кольцо Ω и его ε -окрестность Ω_ε .

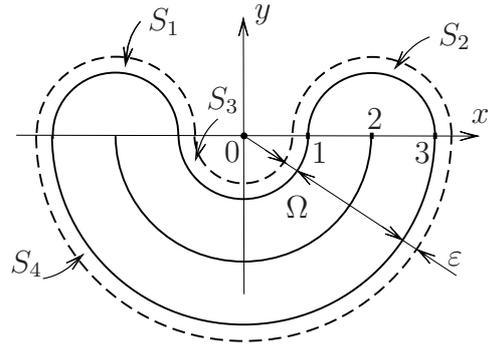


Рис. 4. Гладкая невыпуклая фигура.

В этом случае

$$S(\Omega_\varepsilon) = S(\Omega) + (S_1 + S_2) + S_3 + S_4$$

$$= S(\Omega) + \pi(1 + \varepsilon)^2 - \pi + \frac{1}{2}(\pi - \pi(1 - \varepsilon)^2) + \frac{1}{2}(\pi(3 + \varepsilon)^2 - 9\pi) = S(\Omega) + 6\pi\varepsilon + \pi\varepsilon^2.$$

В то же время правая часть формулы Штейнера составляет

$$S(\Omega) + P(\Omega)\varepsilon + \pi\varepsilon^2 = S(\Omega) + 6\pi\varepsilon + \pi\varepsilon^2.$$

Таким образом, в этом случае формула Штейнера выполняется.

2.3. Пример 3

Рассмотрим пример невыпуклой фигуры Ω с негладкой границей. Пусть Ω представляет собой объединение двух кругов единичного радиуса и пересекающихся в одной точке (рис. 5).

В этом случае

$$S(\Omega_\varepsilon) = 2(\pi(1 + \varepsilon)^2 - \pi) - S(X),$$

где X — фигура, образованная двумя дугами радиуса $1 + \varepsilon$ между точками A и B (см. рис. 5). Вычислим

$$|OA| = \sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - 1} = \sqrt{2\varepsilon + \varepsilon^2}, \quad \angle ODA = \arctg \sqrt{2\varepsilon + \varepsilon^2},$$

$$S(X) = 2\left(\pi(1 + \varepsilon)^2 \frac{\angle BDA}{2\pi} - S(\triangle ABD)\right) = 2\left(\pi(1 + \varepsilon)^2 \frac{1}{\pi} \arctg \sqrt{2\varepsilon + \varepsilon^2} - \sqrt{2\varepsilon + \varepsilon^2}\right)$$

$$= \frac{8\sqrt{2}}{3}\varepsilon^{3/2} + \frac{14\sqrt{2}}{15}\varepsilon^{5/2} + O(\varepsilon^{7/2}), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Очевидно, что в этом случае формула Штейнера не выполняется.

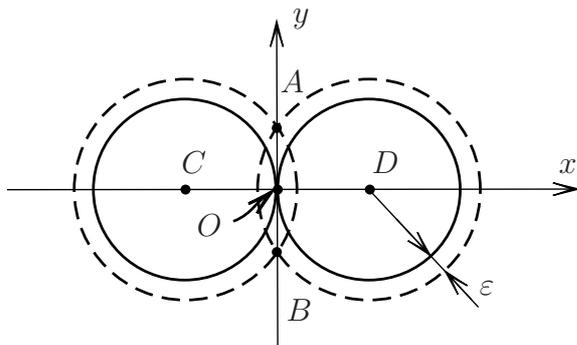


Рис. 5. Объединение двух кругов и их ε -окрестность.

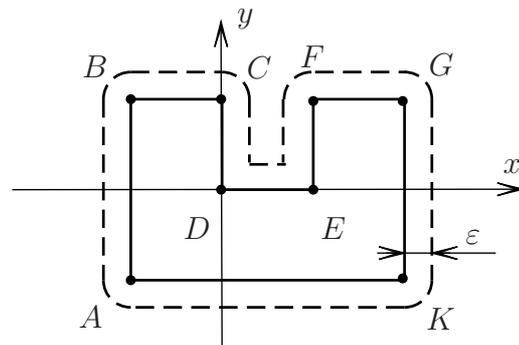


Рис. 6. Невыпуклый многоугольник $ABCDEFGK$.

2.4. Пример 4

Рассмотрим еще один пример невыпуклой фигуры Ω с негладкой границей. В качестве фигуры Ω возьмем многоугольник $ABCDEFGK$ (рис. 6), вершины которого есть точки $A = (-1, -1)$, $B = (-1, 1)$, $C = (0, 1)$, $D = (0, 0)$, $E = (1, 0)$, $G = (1, 1)$, $F = (2, 1)$, $K = (2, -1)$.

В этом случае $S(\Omega_\varepsilon) = S(\Omega) + P(\Omega)\varepsilon + \frac{3}{2}\pi\varepsilon^2 - 2\varepsilon^2$, т. е. формула Штейнера не выполняется.

2.5. Пример 5

Приведем еще один пример невыпуклой фигуры Ω с гладкой границей. В качестве фигуры Ω рассмотрим замыкание “внутренности” овала Кассини Φ (рис. 7), представляющего собой замкнутую кривую

$$\Phi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4\}, \quad (2.1)$$

где a и c — параметры овала Кассини, под “внутренностью” подразумевается меньшая часть плоскости, ограниченная овалом Кассини. Будем рассматривать $c < a < c\sqrt{2}$, так как в этом случае Ω представляет собой невыпуклую фигуру с гладкой границей.

На рис. 7 отмечены следующие ключевые точки овала Кассини, а именно:

$A_1 = \left(\frac{\sqrt{4c^4 - a^4}}{2c}, \frac{a^2}{2c}\right)$ и $A_2 = \left(-\frac{\sqrt{4c^4 - a^4}}{2c}, \frac{a^2}{2c}\right)$ — точки с максимальным значением ординаты;

$B_1 = (0, \sqrt{a^2 - c^2})$ и $B_2 = (0, -\sqrt{a^2 - c^2})$ — точки пересечения овала Кассини с осью Oy ;

$C_1 = (\sqrt{a^2 + c^2}, 0)$ и $C_2 = (-\sqrt{a^2 + c^2}, 0)$ — точки пересечения овала Кассини с осью Ox ;

$F_1 = (c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$ — фокусные точки, обладающие тем свойством, что произведение расстояний от каждой точки овала Кассини до фокусов есть постоянная величина, равная a^2 .

В работе [14] показано, что формула Штейнера выполняется для ε -окрестности овала Кассини при величине ε , не превосходящей толщину чебышевского слоя [15, определение 1.7.1], которая вычислена равной

$$\varepsilon^* = \sqrt{a^2 - c^2} \left(\frac{2c^2}{2c^2 - a^2} - 1 \right).$$

При этом в [14] было показано, что при $\varepsilon > \varepsilon^*$ граница ε -окрестности “внутренности” овала Кассини имеет особые точки в местах пересечения с осью ординат, при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon^*$ является бесконечно дифференцируемой кривой и описывается параметрически следующим образом:

$$\partial\Omega_\varepsilon = \{h^\varepsilon \in \mathbb{R}^2 : h^\varepsilon = (x^\varepsilon(x), y^\varepsilon(x)), x \in [x_{C_2}, x_{C_1}]\},$$

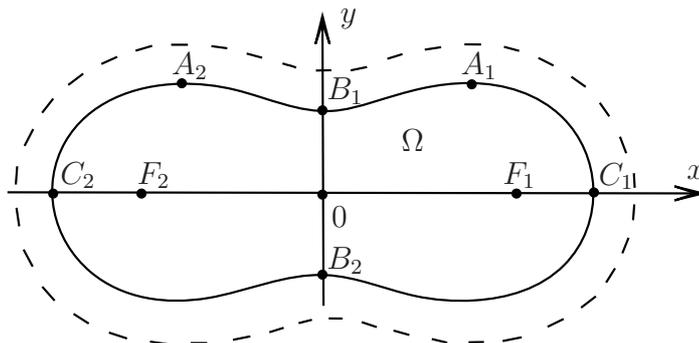


Рис. 7. Овал Кассини с параметрами $a = 5.5$, $c = 5$ и его ключевые точки.

где

$$x^\varepsilon(x) = x \left(1 - \frac{\varepsilon(2c^2 - \sqrt{a^4 + 4c^2x^2})}{a^2(\sqrt{\sqrt{a^4 + 4c^2x^2} - c^2})} \right), \quad x_{C_2} \leq x \leq x_{G_2^\varepsilon} \text{ или } x_{G_1^\varepsilon} \leq x \leq x_{C_1};$$

$$y^\varepsilon(x) = \pm y(x) \left(1 + \frac{\varepsilon\sqrt{a^4 + 4c^2x^2}}{a^2\sqrt{\sqrt{a^4 + 4c^2x^2} - c^2}} \right), \quad x_{C_2} \leq x \leq x_{G_2^\varepsilon} \text{ или } x_{G_1^\varepsilon} \leq x \leq x_{C_1};$$

функция $y(x) = \sqrt{\sqrt{a^4 + 4c^2x^2} - c^2 - x^2}$ выражается из уравнения в (2.1) и описывает верхнюю часть границы овала Кассини.

3. Основной результат

О п р е д е л е н и е 1 [15, определение 1.1.9]. Множество A в нормированном пространстве E называется *слабо выпуклым по Ефимову – Стечкину* с константой $R > 0$, если существует непустое множество $A_1 \subset E$ такое, что $A = \bigcap_{a \in A_1} (\text{int} \mathfrak{B}_R(a))^c$, где $\mathfrak{B}_R(a) = \{x \in E: \|x - a\| \leq R\}$ – замкнутый шар с центром в точке $a \in E$ и радиусом R , $\text{int} \mathfrak{B}_R(a) = \{x \in E: \|x - a\| < R\}$ – внутренность шара $\mathfrak{B}_R(a)$, через X^c обозначено $E \setminus X$ – дополнение к множеству X в пространстве E .

Теорема 1. Пусть односвязный компакт $\Phi \subset \mathbb{R}^2$ является слабо выпуклым по Ефимову – Стечкину с константой R и имеет трижды непрерывно дифференцируемую границу $\gamma \in C^3$, число $\varepsilon \leq R$. Тогда площадь S_ε его ε -слоя $\Phi_\varepsilon \setminus \Phi$ можно вычислить по формуле

$$S_\varepsilon = \varepsilon l + \pi \varepsilon^2,$$

где l – длина границы γ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Граница γ является замкнутой кривой, имеющей некоторое параметрическое представление в виде системы

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

Будем считать, что при увеличении параметра t от 0 до 1 соответствующая точка на кривой γ пробегает ее против часовой стрелки. Посредством $l(t)$ обозначим длину пути от точки $(x(0), y(0))$ до точки $(x(t), y(t))$ по кривой γ . В частности, $l(0) = 0$, $l(1) = l$.

Как известно, $\dot{l}(t) = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}$. В силу этого

$$\int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt = \int_0^1 \dot{l}(t) dt = \int_0^1 dl(t) = l(1) - l(0) = l.$$

Также хорошо известно (см., например, [16]), что координаты вектора внешней нормали к компакт Φ есть $\mathbf{n}(t) = (y(t), -x(t))$. Обозначим через $\varphi(t)$ угол между осью Ox и нормалью $\mathbf{n}(t)$, отсчитываемый против часовой стрелки. Так как $\gamma \in C^3$, то функция $\varphi(t) \in C^3[0, 1]$. В случае невыпуклого компакта Φ функция $\varphi(t)$, вообще говоря, не является монотонной, однако можно ввести систему декартовых координат таким образом, чтобы $\varphi(0) = -\pi$ и $\lim_{t \rightarrow 1-0} \varphi(t) = \pi$. Для сохранения непрерывности будем условно считать, что $\varphi(1) = \pi$. Более того, из-за возможной немонотонности функции $\varphi(t)$ для сохранения непрерывности нам придется допустить выход значений $\varphi(t)$ за пределы интервала $[-\pi, \pi]$.

При рассмотрении соответствующих треугольников (см. рис. 8) в первой, второй, третьей и четвертой четвертях координатной плоскости можно вычислить (с точностью до периода 2π)

$$\varphi(t) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \dot{y}(t) = 0, -\dot{x}(t) < 0, \\ -\operatorname{arctg} \frac{\dot{x}(t)}{\dot{y}(t)}, & \dot{y}(t) > 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \dot{y}(t) = 0, -\dot{x}(t) > 0, \\ \pi - \operatorname{arctg} \frac{\dot{x}(t)}{\dot{y}(t)}, & \dot{y}(t) < 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Соответственно

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}. \quad (3.2)$$

Заметим, что формула (3.2) выполняется всюду на интервале $t \in (0, 1)$. Вследствие этого интеграл

$$\int_0^1 \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt = \int_0^1 \dot{\varphi}(t) dt = \int_0^1 d\varphi(t) = \varphi(1) - \varphi(0) = 2\pi. \quad (3.3)$$

Рассмотрим малый сегмент кривой γ , соответствующий параметру $t \in [t_0, t_0 + \Delta t]$. В силу того что $\gamma \in C^3$, на этом участке выполняются равенства

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \ddot{x}(\tau) d\tau, \quad \dot{y}(t) = \dot{y}(t_0) + \int_{t_0}^t \ddot{y}(\tau) d\tau,$$

из которых следуют оценки

$$|\dot{x}(t) - \dot{x}(t_0)| \leq \left| \int_{t_0}^t \ddot{x}(\tau) d\tau \right| \leq \Delta t \max_{t \in [0,1]} |\ddot{x}(t)|,$$

$$|\dot{y}(t) - \dot{y}(t_0)| \leq \left| \int_{t_0}^t \ddot{y}(\tau) d\tau \right| \leq \Delta t \max_{t \in [0,1]} |\ddot{y}(t)|.$$

Эти оценки можно переписать в виде асимптотических равенств

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(t_0) + O(\Delta t) \quad \text{при} \quad \Delta t \rightarrow 0, \quad \dot{y}(t) = \dot{y}(t_0) + O(\Delta t) \quad \text{при} \quad \Delta t \rightarrow 0,$$

вследствие которых длина этого малого сегмента будет равна

$$\Delta l = \sqrt{\dot{x}^2(t_0) + \dot{y}^2(t_0)} \Delta t + O(\Delta t^2) \quad \text{при} \quad \Delta t \rightarrow 0. \quad (3.4)$$

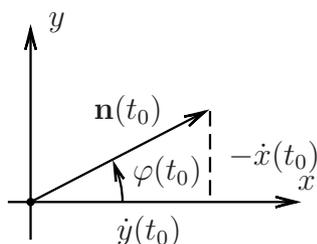


Рис. 8. Внешняя нормаль $\mathbf{n}(t_0) = (\dot{y}_0, -\dot{x}_0)$.

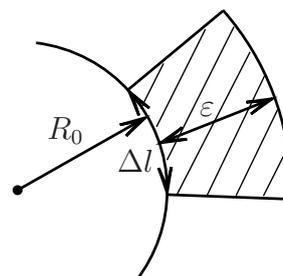


Рис. 9. Малый сегмент границы γ .

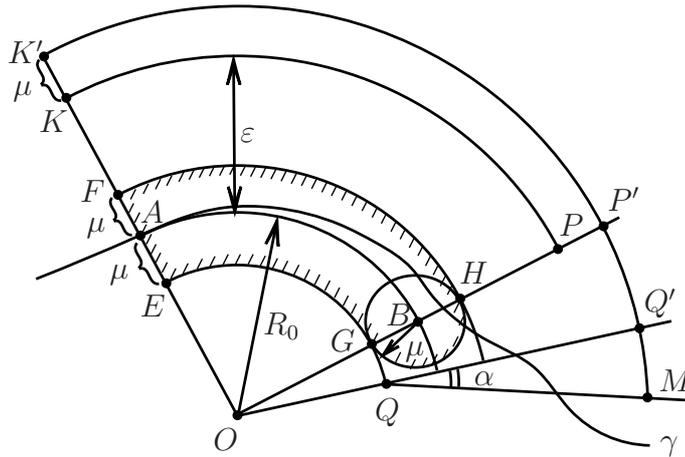


Рис. 10. Малый сегмент границы γ .

Аналогично, изменение угла наклона нормали на том же сегменте будет равно

$$\Delta\varphi = \varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0) = \frac{\dot{x}(t_0)\ddot{y}(t_0) - \ddot{x}(t_0)\dot{y}(t_0)}{x^2(t_0) + y^2(t_0)}\Delta t + O(\Delta t^2) \quad \text{при } \Delta t \rightarrow 0. \quad (3.5)$$

Заметим, что сам этот сегмент (рис. 9) будет мало отличаться от сегмента соприкасающейся окружности [16, гл. III, §24] с радиусом

$$R_0 = \left| \frac{\Delta l}{\Delta\varphi} \right| = \left| \frac{(\dot{x}^2(t_0) + \dot{y}^2(t_0))^{3/2}}{\dot{x}(t_0)\ddot{y}(t_0) - \ddot{x}(t_0)\dot{y}(t_0)} \right|,$$

который представляет собой радиус кривизны кривой γ в точке $(x(t_0), y(t_0))$. При этом R_0 может быть сколь угодно малым в случае $\dot{\varphi}(t_0) > 0$, и $R_0 \geq R$ в случае $\dot{\varphi}(t_0) < 0$ в силу условия на слабую выпуклость компакта Φ .

Учитывая эти соотношения, можно показать, что площадь ε -слоя над рассматриваемым сегментом, ограниченная нормальями $\mathbf{n}(t_0)$ и $\mathbf{n}(t_0 + \Delta t)$, есть

$$\Delta S_\varepsilon = \frac{\Delta l}{2\pi R_0} \pi((R_0 + \varepsilon)^2 - R_0^2) + o(\Delta l) = \Delta l \varepsilon \left(1 + \frac{\varepsilon}{2R_0}\right) + o(\Delta l) \quad (3.6)$$

при $\Delta t \rightarrow 0$ и $\Delta\varphi > 0$,

$$\Delta S_\varepsilon = \frac{\Delta l}{2\pi R_0} \pi(R_0^2 - (R_0 - \varepsilon)^2) + o(\Delta l) = \Delta l \varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon}{2R_0}\right) + o(\Delta l) \quad (3.7)$$

при $\Delta t \rightarrow 0$ и $\Delta\varphi < 0$.

Обоснование можно провести геометрическим методом, построив фигуру F_1 , гарантированно накрывающую участок ε -слоя над рассматриваемым сегментом, и фигуру F_2 , гарантированно помещающуюся в том же участке (рис. 10).

Итак, в силу того что соприкасающаяся окружность образует с кривой $\gamma \in C^3$ касание второго порядка [16, гл. III, §24, с. 118] в точке $A = (x(t_0), y(t_0))$, точка $(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t))$ удалена от точки B (конца дуги $\smile AB$ длины Δl и радиусом R_0 , равным радиусу кривизны кривой γ в точке A) на расстояние не более, чем $\mu = O(\Delta l^3)$ [16, гл. III, §22]. Учитывая это обстоятельство, мы можем определить область $EFBG$, в которой возможно нахождение рассматриваемого сегмента границы γ , соответствующего параметру $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$.

Мы также можем определить фигуру $EK'QQ'$, в которой находится участок ε -слоя над рассматриваемым сегментом без учета возможного отличия направления нормали $\mathbf{n}(t_0 + \Delta)$ от направления вектора OB , где через O обозначен центр окружности, соприкасающейся с кривой γ в точке A .

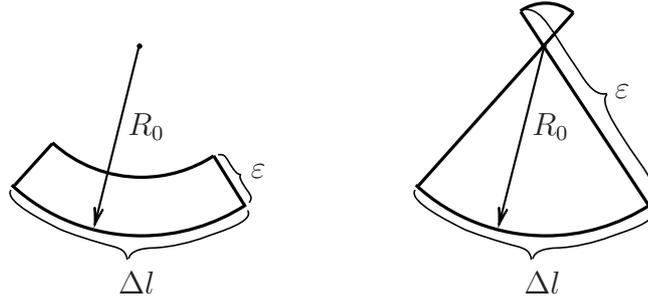


Рис. 11. “Простая” и “сложная” конфигурации ε -слоя.

Принимая во внимание асимптотическое равенство (3.5), получаем, что соответствующий угол изменения направления нормали есть $\angle MQQ' = \alpha = O(\Delta t)$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \Delta S_\varepsilon &\leq S_{EK'MQ} \\ &\leq (\Delta l + 2\mu) \frac{\pi((R_0 + 2\mu + \varepsilon)^2 - (R_0 + 2\mu)^2)}{2\pi(R_0 + 2\mu)} + \frac{\alpha}{2\pi}(R_0 + 2\mu)^2 \\ &= \Delta l \varepsilon \left(1 + \frac{\varepsilon}{2R_0}\right) + o(\Delta l), \quad \Delta t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Аналогично можно доказать это неравенство в другую сторону, рассмотрев случаи $\Delta\varphi < 0$ и $\Delta\varphi = 0$. Однако заметим, что в случае $\Delta\varphi < 0$ для выполнения формулы (3.7) необходимо, чтобы $\varepsilon \leq R_0$. Действительно, в противном случае геометрия ε -слоя над соприкасающейся окружностью станет более сложной (рис. 11).

В то же время, поскольку (как было замечено выше) $R_0 \geq R$ при $\Delta\varphi < 0$ в силу слабой выпуклости Φ , то из условия теоремы $\varepsilon \leq R$ следует, что $\varepsilon \leq R_0$.

Объединяя формулы (3.6), (3.7), тривиальный случай при $R_0 = \infty$ и учитывая выражения (3.4) и (3.5), получаем общую формулу

$$\frac{\Delta S_\varepsilon}{\Delta t} = \sqrt{\dot{x}^2(t_0) + \dot{y}^2(t_0)} \varepsilon \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\dot{x}(t_0)\ddot{y}(t_0) - \ddot{x}(t_0)\dot{y}(t_0)}{(\dot{x}^2(t_0) + \dot{y}^2(t_0))^{3/2}}\right) + o(1) \quad \text{при } \Delta t \rightarrow 0.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем дифференциальное равенство

$$\dot{S}_\varepsilon(t_0) = \sqrt{\dot{x}^2(t_0) + \dot{y}^2(t_0)} \varepsilon \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\dot{x}(t_0)\ddot{y}(t_0) - \ddot{x}(t_0)\dot{y}(t_0)}{(\dot{x}^2(t_0) + \dot{y}^2(t_0))^{3/2}}\right), \quad (3.8)$$

где через $S_\varepsilon(t_0)$ обозначена функция, равная площади ε -слоя над участком кривой γ , соответствующим отрезку $t \in [0, t_0]$.

В силу соотношений (3.1), (3.3) и (3.8) мы можем вычислить площадь всего ε -слоя вокруг компакта Φ как интеграл

$$\begin{aligned} S_\varepsilon &= S_\varepsilon(1) - S_\varepsilon(0) = \int_0^1 \dot{S}_\varepsilon(t) dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} \varepsilon \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^{3/2}}\right) dt \\ &= \varepsilon \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^1 \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt = \varepsilon l + \frac{\varepsilon^2}{2} 2\pi = \varepsilon l + \pi\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть односвязный компакт $\Phi \subset \mathbb{R}^2$ является слабо выпуклым по Ефимову – Стечкину с константой R и имеет кусочно-гладкую границу γ (с гладкостью C^3 за исключением отдельно стоящих точек), число $\varepsilon \leq R$. Тогда площадь S_ε его ε -слоя $\Phi_\varepsilon \setminus \Phi$ можно вычислить по формуле

$$S_\varepsilon = \varepsilon l + \pi \varepsilon^2,$$

где l – длина границы γ .

Доказательство. На каждом “стыке” гладких участков измерим угол между касательными к границе при подходе к точке негладкости слева и справа. Если ненулевой угол будет направлен внутрь компакта Φ , то мы получим противоречие со слабой выпуклостью Φ . Следовательно, любой такой угол либо нулевой, либо направлен во внешность компакта.

Однако такую негладкую границу мы можем приблизить гладкой границей со сколь угодно малой погрешностью в хаусдорфовой метрике без потери слабой выпуклости и вычислить площадь ε -слоя по теореме 1. Очевидно, что погрешность такого вычисления площади ε -слоя будет стремиться к нулю вместе с хаусдорфовым расстоянием между новой и старой границами. Перейдя к пределу, получаем искомую формулу. \square

Заключение

Рассмотрим ранее приведенные примеры с позиций теоремы 1 и следствия 1. В примере 1 нарушается условие односвязности, в примерах 3 и 4 не выполняется условие слабой выпуклости. Вследствие этого формула Штейнера не обязана выполняться и конкретно в этих примерах она переходит в универсальное для всех фигур неравенство [10]. Фигура Φ в примерах 2 и 5 удовлетворяет условию теоремы 1. При этом постоянная слабой выпуклости R в примере 2 будет равна 1 по построению, а в примере 5 она будет равна вычисленной в [14] толщине чебышквского слоя ε^* в силу [15, теоремы 1.7.1]. В этих примерах формула Штейнера выполняется при $\varepsilon \leq R$.

В качестве направления дальнейших исследований можно указать возможное обобщение теоремы 1 и следствия 1 на случай многомерного пространства, а также отыскание более тонких необходимых и достаточных условий, при которых выполняется формула Штейнера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
2. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. 1980. Т. 112(154), № 3(7). С. 307–330.
3. Ушаков В.Н., Ершов А.А. О параметрической зависимости объема интегральных воронок и их аппроксимаций // Вест. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32, № 3. С. 447–462. <https://doi.org/10.35634/vm220307>
4. Ушаков В.Н., Матвийчук А.Р., Малев А.Г. Задачи динамики систем с фазовыми ограничениями // Изв. ИМИ УдГУ. 2012. № 1(39). С. 138–139.
5. Ушаков В.Н., Ершов А.А., Ушаков А.В. Управляемые системы, зависящие от параметра; множества достижимости и интегральные воронки // Прикл. математика и механика. 2022. Т. 86, № 1. С. 186–205. <https://doi.org/10.31857/S0032823522010088>
6. J. Steiner Über parallele Flächen, Monatsber // Preuß. Akad. Wiss. 1840. P. 114–118; Ueber parallele Flächen // Gesammelte Werke. Band 2 / ed. by K. Weterstrass et al. Berlin, NY: De Gruyter, 1882. P. 171–176. <https://doi.org/10.1515/9783111611716.171>
7. Minkowski H. Über die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen // Jber dtsch. Math.-Ver. 1901. Vol. 9. P. 115–121; Gesammelte Abhandlungen. Leipzig-Berlin: Teubner, 1911. Vol. 2. P. 122–127. URL: <https://archive.org/details/gesammelteabhan02weylgoog>; Ausgewählte Arbeiten zur Zahlentheorie und zur Geometrie // Teubner-Archiv zur Mathematik. Vienna: Springer, 1989. Vol. 12. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-9536-9_6
8. Хадвигер Г. Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. М.: Наука, 1966. 416 с.

9. **Allendoerfer C.B.** Steiner's formula on a general S^{n+1} // Bull. Amer. Math. Soc. 1948. Vol. 54. P. 128–135. <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1948-08966-2>
10. **Hadwiger H.** Über die erweiterten Steinerschen Formeln für Parallelmengen // Rev. Mat. Hispano-Americana, 4a ser. 1946. Vol. 6. P. 160–163.
11. **Abbena E., Gray A., Vanhecke L.** Steiner's formula for the volume of a parallel hypersurface in a Riemannian manifold // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze, Ser. 4. 1981. Vol. 8, no. 3. P. 473–493. URL: http://www.numdam.org/item/ASNSP_1981_4_8_3_473_0.pdf.
12. **Лейхтвейс К.** Выпуклые множества. М.: Наука, 1985. 335 с.
13. **Ohmann D.** Eine verallgemeinerung der Steinerschen Formel // Math. Ann. 1955. Vol. 129. P. 204–212. <https://doi.org/10.1007/BF01362366>
14. **Кувшинов О.А.** О геометрии овала Кассини, его мере невыпуклости и ε -слое // Изв. ИМИ УдГУ. 2022. Т. 60. С. 34–57. <https://doi.org/10.35634/2226-3594-2022-60-03>
15. **Иванов Г.Е.** Слабо выпуклые множества и функции: теория и приложения. М.: Физматлит, 2006. 352 с.
16. **Рашевский П.К.** Курс дифференциальной геометрии (4-е изд.). М.: ГИТТЛ, 1956. 420 с.

Поступила 17.03.2025

После доработки 9.04.2025

Принята к публикации 14.04.2025

Ушаков Владимир Николаевич
чл.-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук
профессор
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: ushak@imm.uran.ru

Ершов Александр Анатольевич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
доцент
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: ale10919@yandex.ru

Кувшинов Олег Александрович
математик I кат.
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: okuvshinov@inbox.ru

REFERENCES

1. Isaacs R. *Differential games*. NY, John Wiley and Sons, 1965, 384 p. ISBN: 978-0471428602. Translated to Russian under the title *Differentsial'nye igrы*, Moscow, Mir Publ., 1967.
2. Pontryagin L.S. Linear differential games of pursuit. *Math. USSR-Sb.*, 1981, vol. 40, iss. 3, pp. 285–303. <https://doi.org/10.1070/SM1981v040n03ABEH001815>
3. Ushakov V.N., Ershov A.A. On the parametric dependence of the volume of integral funnels and their approximations. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2022, vol. 32, iss. 3, pp. 447–462 (in Russian). <https://doi.org/10.35634/vm220307>
4. Ushakov V.N., Matviychuk A.R., Malev A.G. Problems of dynamics of systems with phase constraints. *Izv. IMI UdGU*, 2012, vol. 1(39), pp. 138–139 (in Russian).

5. Ushakov V.N., Ershov A.A., Ushakov A.V. Control systems depending on a parameter: reachable sets and integral funnels. *Mech. Solids*, 2022, vol. 57, no. 7, pp. 1672–1688.
<https://doi.org/10.3103/S0025654422070172>
6. Steiner J. Über parallele Flächen, Monatsber. *Preuß. Akad. Wiss.*, 1840, pp. 114–118; Über parallele Flächen. In book: *Gesammelte Werke. Band 2*, ed. K. Weterstrass et al., Berlin, NY, De Gruyter, 1882, pp. 171–176. <https://doi.org/10.1515/9783111611716.171>
7. Minkowski H. Über die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen. *Deutsche Math.-Ver.*, 1901, vol. 9, no. 1, pp. 115–121; In: *Gesammelte Abhandlungen*, Leipzig, Berlin, Teubner, 1911, vol. 2, pp. 122–127. Available at: <https://archive.org/details/gesammelteabhan02weylgoog>; In: *Ausgewählte Arbeiten zur Zahlentheorie und zur Geometrie. Ser.: Teubner-archiv zur Mathematik*, Vienna, Springer, 1989, vol. 12, pp. 140–145. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-9536-9_6
8. Hadwiger H. *Vorlesungen Über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Berlin, Springer-Verlag, 1957, vol. 93, 316 p. Translated to Russian under the title *Lektsii ob ob'yome, ploshchadi poverkhnosti i izoperimetrii*, Moscow, Nauka Publ., 1966, 416 p.
9. Allendoerfer C.B. Steiner's formula on a general S^{n+1} . *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1948, vol. 54, pp. 128–135. <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1948-08966-2>
10. Hadwiger H. Über die erweiterten Steinerschen Formeln für Parallelmengen. *Rev. Mat. Hisp.-Am.*, 4a ser., 1946, vol. 6, pp. 160–163.
11. Abbena E., Gray A., Vanhecke L. Steiner's formula for the volume of a parallel hypersurface in a Riemannian manifold. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa – Classe di Sci.*, ser. 4, 1981, vol. 8, no. 3, pp. 473–493. Available at: www.numdam.org/item/ASNSP_1981_4_8_3_473_0.pdf.
12. Leichtweiss K. *Konvexe Mengen*. 1st ed., Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1980, 330 p. ISBN-10: 3540090711. Translated to Russian under the title *Vypuklyye mnozhestva*, Moscow, Nauka Publ., 1985, 335 p.
13. Ohmann D. Eine verallgemeinerung der steinerschen formel. *Math. Ann.*, 1955, vol. 129, pp. 204–212. <https://doi.org/10.1007/BF01362366>
14. Kuvshinov O.A. About the geometry of the Cassini oval, its non-convexity degree and ε -offset layer. *Izv. IMI UdGU*, 2022, vol. 60, pp. 34–57 (in Russian). <https://doi.org/10.35634/2226-3594-2022-60-03>
15. Ivanov G.E. *Slabo vypuklyye mnozhestva i funktsii: teoriya i prilozheniya* [Weakly convex sets and functions: theory and applications]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006, 352 p. ISBN: 978-5-9221-0738-9.
16. Rashevskii P.K. *Kurs differentsial'noi geometrii* [A course in differential geometry], (4th ed.). Moscow, GITTL Publ., 1956, 420 p.

Received March 17, 2025

Revised April 9, 2025

Accepted April 14, 2025

Funding Agency: The work was performed as part of research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement number 075-02-2025-1549).

Vladimir Nikolaevich Ushakov, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: ushak@imm.uran.ru.

Aleksandr Anatol'evich Ershov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108, Russia, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: ale10919@yandex.ru.

Oleg Aleksandrovich Kuvshinov, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: okuvshinov@inbox.ru.

Cite this article as: V. N. Ushakov, A. A. Ershov, O. A. Kuvshinov. On the area of the ε -layer of a weakly convex figure. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 2, pp. 280–293.