ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 31 № 2 2025

УДК 519.711.3

$\mathcal{L}_2$-УСТОЙЧИВОСТЬ УДАЛЕННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ QSR-ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННЫМИ ЗАДЕРЖКАМИ ПО ВРЕМЕНИ

А. А. Усова

В статье изучаются вопросы $\mathcal{L}_2$-устойчивости сложных систем, разделенных на локальную и удаленную подсистему, взаимодействие между которыми осуществляется посредством коммуникационного канала связи с переменными задержками по времени. Каждая из подсистем предполагается QSR-диссипативной и удовлетворяющей условию выживаемости по Виллемсу. В указанных ограничениях на подсистемы строится процесс управления. Основным элементом процесса управления являются преобразования рассеивания, применяемые к входно-выходным параметрам каждой подсистемы. В результате преобразования вычисляются волновые переменные на локальной и удаленной стороне системы, передача которых осуществляется посредством канала связи. Для устранения дестабилизирующего воздействия переменных задержек по времени в процессе передачи данных волновые параметры масштабируются путем умножения на зависящий от времени коэффициент, который оценивает сверху скорость роста временных задержек. Сочетание этих двух элементов обеспечивает $\mathcal{L}_2$-устойчивость системы с QSR-диссипативными подсистемами и изменяющимися во времени задержками в канале связи. Предлагаемый подход обобщает методы стабилизации, разработанные для пассивных удаленно-взаимодействующих систем.

Ключевые слова: QSR-диссипативные системы, преобразование рассеивания, волновые переменные, $\mathcal{L}_2$-устойчивость, переменные задержки по времени при передачи данных.

A. A. Usova. $\mathcal{L}_2$-stability of a remote interaction of QSR-dissipative systems with time-varying delays.

The paper addresses the problems of $\mathcal{L}_2$-stability of a complex system containing local and remote subsystems, which interact by means of a communication channel that produces time-varying delays. Each subsystem is assumed to be QSR-dissipative and to satisfy the "liveness" condition according to J. C. Willems. The control procedure is then constructed under these assumptions on the subsystems. The basic elements of this procedure are the scattering transformations applied to the input-output parameters of the subsystems. As a result, the original input-output parameters of the subsystems transform into wave variables which are transmitted through the communication channel. To eliminate the destabilizing impact of time-varying delays during data transmission, wave variables are scaled by multiplying them by time-dependent factors that estimate the growth rates of time-varying delays. The combination of these two elements (scattering transformation and scaling) ensures $\mathcal{L}_2$-stability of the overall system with QSR-dissipative subsystems and time-varying communication channel delays. The proposed approach generalizes stabilization methods developed for remote interactions of passive systems.

Keywords: QSR-dissipative systems, scattering transformations, wave variables, $\mathcal{L}_2$-stability, communication time-varying.

MSC: 93D25, 70K20, 37J25

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-2-262-279

Введение

Системы, образованные путем удаленного взаимодействия подсистем, широко применяются в тех областях, где имеется риск для жизни человека (добыча полезных ископаемых, работы в шахтах или на высоте, отвесах скал и пр.) или непосредственное пребывание человека на месте выполнения работ невозможно (изучение космоса и глубин океана), а также в ситуациях, когда присутствие человека необязательно, и его можно заменить роботизированными устройствами, запрограммированными на внешнее управление (например в медицине при вспомогательном терапевтическом лечении). Такие системы часто называют телеоператорными (teleoperation systems), где приставка "*tele-*" означает "на расстоянии", а "*operation*" — действие, работа, то есть *работа на расстоянии.* В силу прикладной значимости телеоператорных систем, их проектированию и анализу посвящено немало работ. Один из подходов к моделированию таких систем реализуется в терминах входно-выходных сигналов. Локальная подсистема генерирует некоторый сигнал (команду), которая передается удаленной подсистеме посредством коммуникационного канала связи, передающего сигнал с некоторой, возможно переменной, задержкой по времени. В свою очередь, удаленная подсистема определенным образом реагирует на полученный сигнал и может "отвечать" первой подсистеме через тот же коммуникационный канал. В этих терминах сформулированы основные свойства систем, значимые для их работоспособности [1–4], одним из которых является понятие устойчивости (input-output stability [4–6]). В вопросах стабилизации пассивные системы представляют собой наиболее исследованный класс систем. Для реализации их устойчивого взаимодействия разработаны различные методы [1–3], в том числе и для случая с постоянными и/или переменными задержками по времени [7].

Один из часто используемых методов стабилизации удаленного взаимодействия подсистем с постоянными задержками по времени опирается на технику применения преобразования рассеивания [1], предложенную в 1989 году. Основная идея этого подхода состоит в том, что канал связи моделируется как линия электропередач без потерь. Здесь стоит отметить, что в ряде работ Александра Борисовича Куржанского и его учеников исследуется дуальность моделей систем различной природы, в частности, моделей механических систем и электрических цепей [8]. Имеются интересные результаты и постановки задач, связанные с приближением волновых уравнений последовательностью соединенных пружин [9] (в одномерном и двумерном случаях). Таким образом, получается дискретизация струны (мембраны), и появляется возможность использовать свойства механических систем для решения задач волновой природы (или наоборот). Что касается линии электропередач без потерь, которой описывается поведение коммуникационного канала связи как системы, то для нее справедливы телеграфные уравнения. Решение этих уравнений строится через линейную комбинацию прямой и обратной волны, откуда и получили название пересылаемые через канал связи сигналы — *волновые переменные.* Именно волновые переменные, а не исходные сигналы, передаются через канал связи, поскольку они не искажают передаваемую информацию. Поэтому и правило объединения подсистем записывается в волновых переменных, а именно (см. [7])

$$u_2(t) = v_1(t-T) \quad \text{и} \quad u_1(t) = v_2(t-T).$$

Линейное невырожденное преобразование рассеивания позволяет получить из исходных сигналов волновые переменные. Детали этого подхода подробно описаны в литературе [1; 7].

Метод стабилизации взаимодействия подсистем с постоянными временными задержками на базе оператора рассеивания можно применять не только к пассивным системам, но и к гораздо более широкому классу систем, так называемым *QSR- диссипативным системам* (см. [10–12]). Путь к этому обобщению метода рассеивания пролегал через понятие плоских конических систем [13] и их последующему расширению до неплоских конических систем [10], которые, как оказалось, совпадают с классом QSR-диссипативных систем.

Ограничение, которое до сих пор осталось неснятыми, касается взаимодействия QSR-диссипативных систем с переменными задержками по времени. В работах [7] описан метод стабилизации пассивных систем при непостоянных временных задержках. Здесь предлагается обобщение этого подхода до класса QSR-диссипативных систем. Работа построена следующим образом. В первом разделе вводятся основные определения и утверждения, касающиеся систем "вход-выход". После этого описывается класс QSR-диссипативных систем и структура преобразования рассеивания. В следующем разделе приводится алгоритм стабилизации удаленного взаимодействия подсистем с использованием преобразования рассеивания. В последней части статьи доказывается основной результат. Завершает работу заключение, где обсуждаются, в частности, направления дальнейших исследований.

1. Основные понятия

В данном разделе приводятся известные на сегодняшний день результаты об устойчивости удаленного взаимодействия подсистем, приводятся необходимые определения и конструкции.

1.1. Динамические системы

В работе рассматриваются системы, модели которых описываются в терминах *входа* и *выхода* согласно принципам и определениям, подробно изложенным в [5; 6]. Пусть $\mathcal{T}$ обозначает временную ось (полуось) $\mathcal{T} := [T_0, +\infty)$, где $T_0 \in \mathbb{R}$, а вектор-функция σ, действующая из $\mathcal{T}$, принимает значения в конечномерном евклидовом пространстве $\mathcal{D} = \mathbb{R}^k$, где величина k зависит от контекста

$$\mathcal{L}_2(\mathcal{T}, \mathcal{D}) := \left\{ \sigma \colon \mathcal{T} \mapsto \mathcal{D} \;\middle|\; \|\sigma\|^2 := \int\limits_{T_0}^{+\infty} |\sigma(t)|^2 dt < +\infty \right\}, \quad \sigma_1^\top \sigma_2 := \int\limits_{T_0}^{+\infty} \sigma_1^\top(t)\sigma_2(t) dt.$$

Дополнительно вводится расширенное пространство сигналов $\mathcal{L}_{2e}$, определяемое следующим образом:

$$\mathcal{L}_{2e}(\mathcal{T}, \mathcal{D}) := \left\{ \sigma \colon \mathcal{T} \mapsto \mathcal{D} \;\middle|\; \sigma_T \in \mathcal{L}_2(\mathcal{T}, \mathcal{D}) \ \forall\, T \in \mathcal{T} \right\}, \quad \sigma_T = \mathcal{P}_T \sigma := \begin{cases} \sigma(t), & t \leqslant [T_0, T] \cap \mathcal{T}, \\ 0, & t \in (T, +\infty) \cap \mathcal{T}. \end{cases}$$

Оператор усечения $\mathcal{P}_T \sigma$ заменяет нулем все значения функции после момента времени T. Потребуется также оператор $\mathcal{Q}_T \sigma$, который обнуляет всю историю до момента времени T, сохраняя значения после этого момента, т. е. $\mathcal{Q}_T \sigma := \sigma - \mathcal{P}_T \sigma$.

Определение 1. Подпространство $\mathcal{S}(\mathcal{D})$ пространства $\mathcal{L}_{2e}(\mathcal{T}, \mathcal{D})$, определяемое как

$$\mathcal{S}(\mathcal{D}) := \left\{ \sigma \in \mathcal{L}_{2e}(\mathcal{T}, \mathcal{D}) \;\middle|\; \exists\, T \in \mathcal{T} \colon \mathcal{Q}_T \sigma = 0 \right\},$$

называется *пространством сигналов*.

В дальнейшем символ $\mathcal{S}_\eta := \mathcal{S}(\mathcal{D}_\eta)$ будет обозначать пространство отображений из $\mathcal{T}$ в $\mathcal{D}_\eta = \mathbb{R}^m$, являющихся входными сигналами η, а $\mathcal{S}_y := \mathcal{S}(\mathcal{D}_y)$ — пространство отображений из $\mathcal{T}$ в $\mathcal{D}_y = \mathbb{R}^p$ — выходных сигналов y.

Оператор $\Sigma \colon \mathcal{S}_\eta \mapsto \mathcal{S}_y$ называется *неупреждающим*, если для любого $T \in \mathcal{T}$ и для любых $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{S}_\eta$ таких, что $\mathcal{P}_T \eta_1 = \mathcal{P}_T \eta_2$, следует равенство $\mathcal{P}_T(\Sigma\eta_1) = \mathcal{P}_T(\Sigma\eta_2)$.

Определение 2 [5]. *Динамической системой* Σ называется неупреждающий оператор $\Sigma = \Sigma(\eta, y)$ из пространства $\mathcal{S}_\eta$ в пространство $\mathcal{S}_y$, т. е. $\Sigma \colon \mathcal{S}_\eta \mapsto \mathcal{S}_y$.

Система Σ, отвечающая определению 2, может быть определена и в терминах состояния системы [5].

Определение 3. *Динамическая система в пространстве состояний* Σ_X определяется множеством $\mathcal{D}_x$, задающим *пространство состояний*, и двумя отображениям ϕ и y, которые удовлетворяют следующим аксиомам:

- (a_1) Отображение $\phi : \mathcal{T}_2^+ \times \mathcal{D}_x \times \mathcal{S}_\eta \mapsto \mathcal{D}_x$ определяет переход состояния системы, где символ $\mathcal{T}_2^+$ обозначает множество с зафиксированным начальным моментом времени t_0, т. е. $\mathcal{T}_2^+ := \{(t, t_0) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T} \colon t, t_0 \in \mathcal{T},\ t \geqslant t_0\}$.
- (a_2) *Неупреждаемость*: $\phi(t, t_0, x_0, \eta) = \phi(t, t_0, x_0, \mathcal{P}_t \mathcal{Q}_{t_0} \eta)$ для всех $(t, t_0) \in \mathcal{T}_2^+$, $x_0 \in \mathcal{D}_x$ и $\eta \in \mathcal{S}_\eta$.
- (a_3) *Непротиворечивость* (состоятельность): $\phi(t_0, t_0, x_0, \eta) = x_0 \quad \forall t_0 \in \mathcal{T},\ x_0 \in \mathcal{D}_x,\ \eta \in \mathcal{S}_\eta$.
- (a_4) Для любых пар моментов $(t_1, t_0),\ (t_2, t_1) \in \mathcal{T}_2^+$ справедливо равенство $\phi(t_2, t_0, x_0, \eta) = \phi(t_2, t_1, \phi(t_1, t_0, x_0, \eta), \eta)$, где $x_0 \in \mathcal{D}_x$ и $\eta \in \mathcal{S}_\eta$ — произвольно выбранные начальное состояние и входной сигнал соответственно.

(a_5) Отображение y переводит тройку $(t, x, \eta) \in \mathcal{T} \times \mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_\eta$ в элемент $y(t)$ пространства $\mathcal{D}_y$, который является выходным сигналом системы и определяется значением $y(t, x(t), \eta(t))$.
(a_6) Линейное пространство состояний $\mathcal{D}_x = \mathbb{R}^n$.
(a_7) *Несмещенность*: $\phi(t, t_0, 0, 0) = 0$ для всех $(t, t_0) \in \mathcal{T}_2^+$ и $y(t, 0, 0) = 0$ для всех $t \in \mathcal{T}$.
(a_8) Пусть $\mathcal{S}_x = \mathcal{S}(\mathcal{D}_x)$ — пространство сигналов $x\colon \mathcal{T} \mapsto \mathcal{D}_x$, тогда предполагается, что функции

$$x(t) = \mathcal{Q}_{t_0}\phi(t, t_0, x, \eta) = \begin{cases} \phi(t, t_0, x, \eta), & t \geqslant t_0, \\ 0, & t < t_0, \end{cases}$$

$$y(t) = \mathcal{Q}_{t_0}y(t, x, \eta) = \begin{cases} y(t, x(t), \eta(t)), & t \geqslant t_0, \\ 0, & t < t_0 \end{cases}$$

принадлежат пространству состояний $\mathcal{S}_x$ и пространству выходных сигналов $\mathcal{S}_y$ соответственно при любых значениях $t_0 \in \mathcal{T}$, $x_0 \in \mathcal{D}_x$ и $\eta \in \mathcal{S}_\eta$.

Дополнительно предполагается, что (a_9) — динамическая система Σ_X в пространстве состояний является *гладкой*, т.е. для произвольной пары $(t_1, t_0) \in \mathcal{T}_2^+$ найдутся постоянные величины $K_1, K_2, K_3, K_4 \in [0, +\infty)$, зависящие от t_0, и такие, что

$$\begin{aligned} \big\|\mathcal{P}_{t_1}\mathcal{Q}_{t_0}\big(\phi(t, t_0, x_1, \eta_1) - \phi(t, t_0, x_2, \eta_2)\big)\big\| \leqslant{}& K_1\|x_1 - x_2\| + K_2\|\mathcal{P}_{t_1}\mathcal{Q}_{t_0}(\eta_1 - \eta_2)\| \\ & \forall\ x_1, x_2 \in \mathcal{D}_x,\ \forall\ \eta_1, \eta_2 \in \mathcal{S}_\eta, \\ \big\|\mathcal{P}_{t_1}\mathcal{Q}_{t_0}\big(y(t, x_1(t), \eta_1(t)) - y(t, x_2(t), \eta_2(t))\big)\big\| \leqslant{}& K_3\|x_1 - x_2\| + K_4\|\mathcal{P}_{t_1}\mathcal{Q}_{t_0}(\eta_1 - \eta_2)\| \\ & \forall\ x_1, x_2 \in \mathcal{S}_x,\ \forall\ \eta_1, \eta_2 \in \mathcal{S}_\eta. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Динамическая система Σ_X в пространстве состояний является системой "вход-выход", но с той лишь особенностью, что выход порождается теперь композицией двух отображений ϕ и y, а именно $y(t) = y(t, \phi(t, t_0, 0, \eta), \eta(t))$ для всех $t \in \mathcal{T}$.

Зачастую в приложениях динамические системы Σ_X задаются в пространстве состояний посредством системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), \eta(t)), & (t, t_0) \in \mathcal{T}_2^+, \quad x_0 = x(t_0) \in \mathcal{D}_x, \\ y(t) = g(t, x(t), \eta(t)), & \eta \in \mathcal{S}_\eta, \quad y \in \mathcal{S}_y. \end{cases} \tag{1.2}$$

Правые части динамики $f(t, x, \eta)$ и выхода $g(t, x, \eta)$ непрерывны по t и локально липшицевы по x и η. *Допустимым входным сигналом* здесь называется сигнал $\eta \in \mathcal{S}_\eta$, при котором дифференциальное уравнение $\dot{x}(t) = f(t, x(t), \eta(t))$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ имеет единственное решение, продолжаемое на полуось $t \geqslant t_0$. Для этого достаточно удовлетворять условиям теоремы Каратеодори, предположив, что вход $\eta(\cdot)$ — измеримая по Лебегу функция времени [14, разд. 4.4.1]. Таким образом, для выбранного начального состояния $x_0 \in \mathcal{D}_x$ и допустимого входного сигнала $\eta \in \mathcal{S}_\eta$ первое уравнение системы имеет единственное решение $x(t) = x(t, t_0, x_0, \eta(t))$, которое единственным образом определяет выход $y(t) = g(t, x(t, t_0, x_0, \eta(t)), \eta(t))$ для всех $t \geqslant t_0$. Полученное равенство однозначно задает систему "вход-выход" $y := \mathcal{G}\eta$, где $\mathcal{G} : \mathcal{S}_\eta \mapsto \mathcal{S}_y$ (см. [6, разд. 4.3.4]).

Важной характеристикой поведения системы является понятие устойчивости. Для этого потребуется ввести несколько дополнительных определений.

Определение 4. 1) Подмножество сигналов $\mathcal{B} \subset \mathcal{S}$ называется *ограниченным*, если $\exists\ M \geqslant 0\colon\ \forall\ \sigma \in \mathcal{B} \quad \|\sigma\|_{\mathcal{L}_{2e}(\mathcal{T}, \mathcal{D})} \leqslant M$.

2) Оператор Σ *ограничен*, если его образ любого ограниченного множества является ограниченным множеством.

3) Оператор $\Sigma\colon \mathcal{S}_\eta \mapsto \mathcal{S}_y$ называется *непрерывным* на $\mathcal{S}_\eta$, если $\forall\ \sigma \in \mathcal{S}_\eta,\quad \forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\sigma, \epsilon) > 0\colon \forall \eta \in \mathcal{S}_\eta \quad \|\eta - \sigma\|_{\mathcal{L}_{2e}(\mathcal{T}, \mathcal{D}_\eta)} < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\Sigma\eta - \Sigma\sigma\|_{\mathcal{L}_{2e}(\mathcal{T}, \mathcal{D}_y)} < \epsilon$.

4) Корректно-определенная система $\Sigma\colon \mathcal{S}_\eta \mapsto \mathcal{S}_y$ называется *вход-выход устойчивой*, если она ограничена и непрерывна на $\mathcal{S}_\eta$.

5) Если при этом существует такая положительная величина γ и неотрицательная константа β, что для всех допустимых входных сигналов $\eta \in \mathcal{S}_\eta$ норма выхода $y = \Sigma\eta$ оценивается сверху величиной $\|y\|^2_{\mathcal{L}_{2e}(\mathcal{D}_y)} \leqslant \gamma\|\eta\|^2_{\mathcal{L}_{2e}(\mathcal{D}_\eta)} + \beta$, то такая система называется *$\mathcal{L}_2(\gamma)$-устойчивой* (*finite $\mathcal{L}_2$-gain stable*).

1.2. Диссипативные системы

Одним из значимых в прикладном смысле классов систем Σ_X, заданных в пространстве состояний (1.1), являются системы, поведение которых подчиняется некоторым дополнительным условиям, касающимся взаимосвязи между входно-выходными сигналами и состоянием системы. Эти условия описываются в терминах функции расхода (*supply rate*) и функции запаса (*storage function*), которые определены на подпространствах $\mathcal{S}_\eta \times \mathcal{S}_y$ и $\mathcal{D}_x$ соответственно.

Определение 5. Неотрицательная функция $V(x)$ называется *функцией запаса* системы (1.1), если для любого входного сигнала $\eta \in \mathcal{S}_\eta$, переводящего состояние системы из начального положения $x(t_0) \in \mathcal{D}_x$ в состояние $x = x(t) \in \mathcal{D}_x$ $((t, t_0) \in \mathcal{T}_2^+)$, определенных согласно (a_8) (см. определение 3), справедливо неравенство (*диссипации*)

$$V(x(t)) - V(x(t_0)) \leqslant \int_{t_0}^{t} \omega(\eta(s), y(s))ds, \tag{1.3}$$

где $y(t) = \mathcal{Q}_{t_0} y(t, x(t), \eta(t))$ (1.1). При этом подынтегральная функция $\omega : \mathcal{S}_\eta \times \mathcal{S}_y \mapsto \mathbb{R}$, называемая *функцией расхода*, является непрерывной по своим переменным $(\eta,\, y)$ и локально интегрируема по Лебегу как функция времени $\omega(t) := \omega(\eta(t), y(t))$:

$$\int_{t_0}^{t} |\omega(\eta(s), y(s))|ds < +\infty, \quad (t, t_0) \in \mathcal{T}_2^+,$$

где выход $y(\cdot)$ определяется по входному сигналу $\eta(\cdot) \in \mathcal{S}_\eta$ и начальным данным $x(t_0) \in \mathcal{D}_x$.

Определение 6. Система Σ_X, заданная в пространстве состояний (1.1), называется *диссипативной*, если для нее существует функция запаса, для которой выполнено неравенство диссипации. Если функция расхода системы является квадратичной формой от $\eta(s) \in \mathcal{D}_\eta$ и $y(s) \in \mathcal{D}_y$ $(s \in \mathcal{T})$, то систему называют *QSR-диссипативной*:

$$\omega(\eta, y) = \begin{bmatrix} \eta \\ y \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} R & S^\top \\ S & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ y \end{bmatrix} = \eta^\top R\eta + 2\eta^\top S^\top y + y^\top Qy. \tag{1.4}$$

Матрицу квадратичной формы функции расхода QSR-диссипативной системы называют *QSR-матрицей*. Для QSR-диссипативных систем существенным в вопросе устойчивости является свойство *“выживаемости”* (“*liveness*”), введенное Я. Виллемсом [15, разд. IV.B], которое предполагает совпадение размерности входного сигнала $\dim \eta$ с количеством неотрицательных собственных значений QSR-матрицы.

Наряду с понятием $\mathcal{L}_2(\gamma)$ устойчивости удобно рассматривать понятие $\mathcal{L}_2(A, B)$-устойчивости.

Определение 7. QSR-диссипативная система является *$\mathcal{L}_2(A, B)$-устойчивой*, если QSR-матрица ее функции расхода имеет вид

$$QSR = \begin{bmatrix} A & \mathcal{O}_{m\times p} \\ \mathcal{O}_{p\times m} & B \end{bmatrix}, \qquad \begin{matrix} A = \operatorname{diag}\{a_1, \ldots, a_m\}, & a_i \geqslant 0, & i = \overline{1, m}, \\ B = \operatorname{diag}\{b_1, \ldots, b_p\}, & b_j < 0, & j = \overline{1, p}, \end{matrix} \tag{1.5}$$

где A и B — диагональные знакоопределенные подматрицы указанных размерностей.

Утверждение 1. *Если заданная в пространстве состояний система Σ_X является $\mathcal{L}_2(A,B)$-устойчивой, то она является $\mathcal{L}_2(\gamma)$-устойчивой, и наоборот.*

Доказательство. Прежде всего важно сказать, что если система Σ_X, заданная в пространстве состояний, является $\mathcal{L}_2(\gamma)$-устойчивой, то она QSR-диссипативная. Действительно, по определению $\mathcal{L}_2(\gamma)$-устойчивой системы существует $\gamma > 0$ и $\beta \geqslant 0$ такие, что $\gamma\|\eta\|^2_{\mathcal{L}_{2e}} - \|y\|^2_{\mathcal{L}_{2e}} + \beta \geqslant 0$. Тогда неотрицательную функцию запаса можно выбрать в виде

$$V(X(t)) := \gamma\|\eta\|^2_{\mathcal{L}_{2e}} - \|y\|^2_{\mathcal{L}_{2e}} + \beta = \int\limits_{t_0}^{t} \Big(\gamma\eta^\top(s)\eta(s) - y^\top(s)y(s)\Big)\,ds + \beta.$$

При этом $V(X(t_0)) = \beta$, а подынтегральная функция $\gamma\eta^\top\eta - y^\top y$ задает функцию расхода $\omega(\eta, y)$. Данная функция расхода является квадратичной формой с матрицей

$$QSR = \begin{bmatrix} \gamma\mathbb{I}_m & \mathcal{O}_{m\times p} \\ \mathcal{O}_{p\times m} & -\mathbb{I}_p \end{bmatrix},$$

где $\mathbb{I}_i$ — единичная матрица размерности $i \times i$ ($i \in \{m, p\}$). Поскольку QSR-матрица диагональна, то $\mathcal{L}_2(\gamma)$-устойчивая система является и $\mathcal{L}_2(\gamma\mathbb{I}_m, \mathbb{I}_p)$-устойчивой.

Обратное утверждение тоже верно. Функция расхода $\mathcal{L}_2(A,B)$-устойчивой системы определяется как квадратичная форма в каноническом виде с неотрицательно-определенной матрицей $A = \operatorname{diag}\{a_1, \ldots, a_m\}$ и строго положительной матрицей $B = \operatorname{diag}\{b_1, \ldots, b_p\}$. Значит, можно выбрать $a = \max\{a_i,\ i = \overline{1,m}\}$ и $b = \min\{b_j,\ j = \overline{1,p}\}$, откуда для любых сигналов $\eta \in \mathcal{S}_\eta$ и $y \in \mathcal{S}_y$ справедлива оценка сверху $\omega(\eta, y) = \eta^\top A\eta - y^\top By \leqslant a\eta^\top\eta - by^\top y$, интегрируя которую, можно оценить функцию запаса сверху

$$V(X(t)) - V(X(t_0)) \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} \Big(\eta^\top(s)A\eta(s) - y^\top(s)By(s)\Big)\,ds$$

$$\leqslant \int\limits_{t_0}^{t} \Big(a\eta^\top(s)\eta(s) - by^\top(s)y(s)\Big)\,ds = a\|\eta\|^2_{\mathcal{L}_{2e}} - b\|y\|^2_{\mathcal{L}_{2e}}.$$

Так как по определению $V(X(t)) \geqslant 0$, верны оценки

$$0 \leqslant V(X(t)) \leqslant a\|\eta\|^2_{\mathcal{L}_{2e}} - b\|y\|^2_{\mathcal{L}_{2e}} + V(X(t_0)).$$

Остается разделить последнее неравенство на b ($b > 0$) и обозначить $\gamma = a/b$ и $\beta = V(X(t_0))/b$, что приводит к требуемому определению $\mathcal{L}_2(\gamma)$-устойчивой системы $0 \leqslant \gamma\|\eta\|^2_{\mathcal{L}_{2e}} - \|y\|^2_{\mathcal{L}_{2e}} + \beta$. $\square$

1.3. Преобразование рассеивания

Преобразование рассеивания играет ключевую роль в процедуре стабилизации систем. Оно является линейным невырожденным преобразованием входно-выходных сигналов QSR-диссипативной системы, которое диагонализирует QSR-матрицу функции расхода системы:

$$\begin{bmatrix} \eta \\ y \end{bmatrix} = \mathbb{S}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad \operatorname{rank}(\mathbb{S}) = \dim\eta + \dim y = m + p. \tag{1.6}$$

Новый входной $u \in \mathcal{S}_u$ и выходной $v \in \mathcal{S}_v$ сигналы называются *волновыми переменными* и имеют размерности m и p соответственно.

Утверждение 2. *Любую QSR-диссипативную систему $\Sigma_X(\eta, y)$ со входом η $(\dim \eta = m)$ и выходом y $(\dim y = p)$, удовлетворяющую условию “выживаемости”, можно при привести к $\mathcal{L}_2(A,B)$-устойчивой системе $\Sigma_X(u,v)$ для любых априори выбранных диагональных матриц $A = \mathrm{diag}\{a_1, \ldots, a_m\}$ $(a_i \geqslant 0$, при этом количество нулевых диагональных элементов матрицы A не должно превышать количества нулевых собственных значений соответствующей QSR-матрицы) и $B = \mathrm{diag}\{b_1, \ldots, b_p\} < 0$. Новые входно-выходные сигналы u и v являются волновыми переменными и получаются из исходных η, y путем применения преобразования рассеивания (1.6).*

Д о к а з а т е л ь с т в о утверждения практически совпадает с доказательством следствия из леммы 2 в работе [11, разд. III]. □

Фактически преобразование рассеивания позволяет так перераспределить сигналы, чтобы в волновых переменных система оказалась устойчивой в $\mathcal{L}_2(\gamma)$ смысле. Геометрически на преобразование рассеивания можно смотреть как на комбинацию двух элементарных линейных преобразований — поворот и масштабирование [13]. Диагонализация симметрической матрицы достигается не единственным образом, однако наиболее понятный способ — это применение композиции двух линейных преобразований — ортогональное G, столбцами которого являются собственные вектора QSR-матрицы, упорядоченные в порядке убывания соответствующих им собственных значений, и диагональное Γ (масштабирование), т. е. $\mathbb{S} = G \cdot \Gamma$ (см. [10; 11]). Именно за счет выбора коэффициентов масштабирования можно добиться $\mathcal{L}_2(A,B)$-устойчивости системы для матриц A и B произвольных настолько, насколько позволяют условия утверждения 2.

Особую роль играет преобразование рассеивания в процессе стабилизации взаимодействия систем [1; 7; 16]. Прежде, чем перейти к распределенным системам, остановимся на моделях взаимодействия систем.

1.4. Взаимодействие подсистем

Математические модели взаимодействия систем “вход-выход” по принципу обратной связи подробно изучены, например, в книге [6, разд. 4]. Пусть заданы две системы $\Sigma_i \colon \mathcal{S}_{\eta_i} \mapsto \mathcal{S}_{y_i}$, т. е. $y_i = \Sigma_i \eta_i$ $(i = 1, 2)$, относительно которых предполагается:

(i_1) пространства входно-выходных сигналов систем связаны соотношениями $\mathcal{S}_{\eta_1} = \mathcal{S}_{y_2}$ и $\mathcal{S}_{\eta_2} = \mathcal{S}_{y_1}$. Для удобства в дальнейшем эти подпространства будут обозначаться $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ соответственно, т. е. $\Sigma_i \colon \mathcal{S}_i \mapsto \mathcal{S}_{3-i}$ $(i = 1, 2)$;

(i_2) операторы Σ_i являются неупреждающими и локально липшицевыми на $\mathcal{S}_i$, т. е.

$$\sup_{\substack{\eta_{i1}, \eta_{i2} \in \mathcal{S}_1 \\ \mathcal{P}_T \eta_{i1} \neq \mathcal{P}_T \eta_{i2}}} \frac{\|\mathcal{P}_T(\Sigma_i \eta_{i1} - \Sigma_i \eta_{i2})\|}{\|\mathcal{P}_T(\eta_{i1} - \eta_{i2})\|} < +\infty \quad \forall\, T \in \mathcal{T}, \quad i = 1, 2.$$

(i_3) операторы Σ_i отвечают условию несмещенности в нуле, т. е. $\Sigma_i 0 = 0$ $(i = 1, 2)$.

Взаимодействие систем по принципу обратной связи описывается равенством

$$\begin{cases} \eta_1 = e_1 - y_2 & = e_1 - \Sigma_2 \eta_2, \quad e_1 \in \mathcal{S}_1 \\ \eta_2 = e_2 + y_1 & = e_2 + \Sigma_1 \eta_1, \quad e_2 \in \mathcal{S}_2. \end{cases} \tag{1.7}$$

Оно образует новую систему $\Sigma(e, y)$, где $e = (e_1, e_2)$ и $y = (y_1, y_2)$, при этом $\Sigma \colon \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \mapsto \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$.

Решением системы Σ [6, разд. 4.2.], образованной взаимодействием подсистем Σ_1 и Σ_2 по принципу обратной связи, называется четверка элементов $\{\eta_1, \eta_2, y_1, y_2\}$, если

(s_1) вход η_1 и выход y_2 принадлежат $\mathcal{S}_1$, а вход η_2 и выход y_1 — пространству $\mathcal{S}_2$;

(s_2) элементы четверки удовлетворяют равенствам (1.7).

Для того чтобы система образованная по принципу обратной связи была корректно определена, необходимо:

(r_1) чтобы оператор $\Sigma : \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \mapsto \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$, заданный правилом $\Sigma y = (\Sigma_1\eta_1, -\Sigma_2\eta_2)$ для всех $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$, гарантировал обратимость оператора $(\mathcal{I}+\Sigma)$ в пространстве $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$, поскольку входной сигнал η восстанавливается по новому входу $e = (e_1, e_2)$, исходя из равенств $e_1 = \eta_1 + \Sigma_2\eta_2$, $e_2 = \eta_2 - \Sigma_1\eta_1$, т. е. $e = \eta + \Sigma\eta$, и, следовательно, $\eta = (\mathcal{I}+\Sigma)^{-1}e$;

(r_2) входные сигналы η_1, η_2 и выходы y_1, y_2 зависят от нового входа e_1, e_2 неупреждающим образом и на любом конечном интервале липшицевы, это обеспечивает неупрежденность и липшицевость оператору $(\mathcal{I}+\Sigma)^{-1}$.

Если Σ_i — локально липшицев (i_2) неупреждающий оператор, то для заданного момента $T \in \mathcal{T}$ можно вычислить коэффициент усиления

$$\gamma_T(\Sigma_i) := \lim_{\Delta T \downarrow 0} \sup_{\substack{\eta_{i1}, \eta_{i2} \in \mathcal{S}_i, \\ \mathcal{P}_T(\eta_{i1} - \eta_{i2}) = 0, \\ \mathcal{P}_{T+\Delta T}(\eta_{i1} - \eta_{i2}) \neq 0}} \frac{\|\mathcal{P}_{T+\Delta T}(\Sigma_i\eta_{i1} - \Sigma_i\eta_{i2})\|}{\|\mathcal{P}_{T+\Delta T}(\eta_{i1} - \eta_{i2})\|}, \quad i = 1, 2.$$

Согласно [6, теорема 4.1] условия (r_1) и (r_2) выполнены, если системы Σ_1 и Σ_2 — локально липшицевы (i_2) неупреждающие операторы и для всех $T \in \mathcal{T}$ произведение равномерных коэффициентов усиления операторов не превосходит единицы: $\gamma(\Sigma_1)\,\gamma(\Sigma_2) \leqslant \alpha < 1$.

Важным результатом, касающемся устойчивости систем, образованных по принципу обратной связи (1.7), является следующая теорема *о малом коэффициенте усиления.*

Теорема 1 [6, разд. 4.4.2]. *Система Σ, образованная по принципу обратной связи* (1.7), *является $\mathcal{L}_2(\gamma)$-устойчивой, если*

(1) *она корректно определена* [6, теорема 4.1];
(2) *оператор Σ_1 ограничен на $\mathcal{S}_1$;*
(3) *оператор Σ_2 липшицев на $\mathcal{S}_2$;*
(4) *норма оператора $\|\Sigma_2\Sigma_1\| < 1$.*

Системы, описываемые дифференциальными уравнениями, в том числе и уравнениями с запаздыванием, удовлетворяют конструкциям систем "вход-выход" в пространстве состояний, представленным выше [6, разд. 4.3.4].

2. Стабилизация удаленного взаимодействия систем

Системы, образованные взаимодействием двух (или более) удаленных подсистем, представляют в прикладном аспекте большой интерес, поскольку позволяют на расстоянии управлять устройствами, осуществляющими необходимую работу. Математическое описание таких систем учитывает задержки по времени, которые возникают при удаленном взаимодействии. Они могут быть как постоянными, так и переменными.

Рассмотрим две корректно определенные системы $\Sigma_i\ :\ \mathcal{S}_i \mapsto \mathcal{S}_{3-i}$ $(i = 1, 2)$, связанные так, как описано в разд. 1.4. При этом сигналы $e_1, \eta_1, y_2 \in \mathcal{S}_1$ в каждый момент времени является элементами m_1-мерного пространства $\mathcal{D}_1$, а сигналы $e_2, \eta_2, y_1 \in \mathcal{S}_2$ — m_2-мерного пространства $\mathcal{D}_2$. Правило взаимодействия с учетом задержки покоординатно переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \eta_{1j_1}(t) &= e_{1j_1}(t) - y_{2j_1}(t - T_{2j_1}(t)), \quad j_1 = \overline{1, m_1}, \\ \eta_{2j_2}(t) &= e_{2j_2}(t) - y_{1j_2}(t - T_{1j_2}(t)), \quad j_2 = \overline{1, m_2}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Относительно задержек по времени $T_{ij_i}(t)$ $(j_i = \overline{1, m_i},\ i = 1, 2)$ предполагается:

(d_1) *Ограниченность*: $\exists\ \mathbf{T}_i > 0\ :\forall\ t \in \mathcal{T}$ справедливо $0 < \max\limits_{j_i=\overline{1,m_i}} T_{ij_i}(t) \leqslant \mathbf{T}_i$.

(d_2) *Гладкость*: Задержки как функции времени дифференцируемы.

(d_3) *Ограничение роста*: задержки растут не быстрее времени, т. е. для всех $t \in \mathcal{T}$ темпы роста задержек сверху ограничены единицей, т. е. $|\dot{T}_{ij_i}(t)| < 1$.

Далее ось времени определяется как $\mathcal{T} := [t_0 - \mathbf{T}, +\infty)$, где $\mathbf{T} := \max\{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2\}$ из (d_1). Более того, все сигналы, участвующие в описании систем предполагаются равными нулю до момента t_0, если иного не оговорено, т. е. $\mathcal{P}_{t_0}\sigma = 0$.

З а м е ч а н и е 1. 1) Приведенные ограничения на задержки не являются слишком обременительными, поскольку они будут не ограничены, только в случае, когда, например, происходит невосстанавливаемый за конечное время обрыв связи. В этой ситуации говорить о каком-либо взаимодействии уже не приходится. Требование к отсутствию нулевых задержек связано с тем, что реализация удаленного взаимодействия осуществляется через каналы связи, где для передачи информации необходимо время для доставки ее от источника к приемнику (даже при очень большой скорости передачи время на доставку данных будет больше нуля).

2) Оценка роста задержек может быть осуществлена и без точного знания $T_{ij_i}(t)$ $(j_i = \overline{1, m_i},\ i = 1, 2)$ [7]. Действительно, совместно с основным сигналом через канал связи может посылаться производная $\Delta_s(t) = \dot{\delta}_s(t)$ некоторой априори выбранной функции $\delta_s(t)$. Пусть $\Delta_r(t)$ — получаемое на противоположной стороне значение этой производной, тогда

$$\dot{\delta}_s(t) = \Delta_s(t) \xrightarrow{T_i(t)} \Delta_r(t) = \frac{d\delta_r(t - T_i(t))}{dt} = \Delta_s(t)(1 - \dot{T}_i(t)), \quad i = \overline{1, 2}.$$

Значит, скорость изменения задержек равна $\dot{T}_i(t) = 1 - \dfrac{\Delta_r(t)}{\Delta_s(t)}$, где величина $\Delta_s(t)$ равна отправленному на противоположный конец канала связи значению производной в момент t.

2.1. Взаимодействие систем с постоянными задержками по времени

При постоянных задержках условия (d_1)–(d_3) автоматически выполняются. Однако для систем, образованных по принципу обратной связи (2.1) с постоянными задержками, нельзя гарантировать устойчивость, например, из-за явления резонанса [1]. Поэтому для стабилизации таких систем применяют два инструмента. Первый опирается на теорему 1 и ее следствия [1], утверждающих, что соединение $\mathcal{L}_2(\gamma)$-устойчивых систем приводит к $\mathcal{L}_2(\gamma)$-устойчивой системе, если произведение коэффициентов усиления систем меньше единицы. Второй инструмент — преобразование рассеивания [1], которое было предложено в конце 1980 годов Р. Дж. Андерсоном и М. В. Спонжем именно для решения проблемы устойчивого взаимодействия. Первично, оно позволяло стабилизировать удаленное взаимодействие пассивных систем, а после распространено на любые QSR-диссипативные системы [10–13].

Пусть соединение подсистем с постоянными задержкам описывается согласно (2.1), которое в векторной форме имеет вид $\eta_1(t) = e_1(t) - y_2(t - T_2)$, $\eta_2(t) = e_2(t) + y_1(t - T_1)$. Оператор Δ_T сдвига по времени для сигнала $\sigma(t)$ задается правилом $\Delta_T\sigma(t) = \sigma(t - T)$ $(T > 0)$. Тогда объединенная система будет корректно определена [6] (см. следствия из теоремы 4.1), если оператор $(\mathcal{I} + \Sigma^d)$ неупреждающий и обратимый, где $(\Sigma^d\eta)(t) = (\Delta_{T_2}(\Sigma_2\eta_2)(t), -\Delta_{T_1}(\Sigma_1\eta_1)(t))$. Вопросы же, связанные с устойчивостью, как отмечено выше, требуют дополнительного исследования.

Поскольку речь идет о QSR-диссипативных системах, то необходимо рассматривать реализацию Σ_{X_i} каждой системы Σ_i $(i = 1, 2)$ в пространстве состояний (определение 3). При этом обязательным является выполнение системами условия “выживаемости”.

Для стабилизации такого взаимодействия, следует осуществить декомпозицию входно-выходных сигналов (η_i, y_i). Для этой цели строятся преобразования рассеивания (1.6) $\mathbb{S}_i$ для обеих подсистем Σ_{X_1} и Σ_{X_2}, которые диагонализируют QSR-матрицы их функций расхода. В результате получаются системы с новыми (волновыми) входно-выходными сигналами

(u_i, v_i), в которых подсистемы становятся $\mathcal{L}_2(A_i, B_i)$-устойчивыми (определение 7). А соединение таких систем обеспечивает слабую $\mathcal{L}_2(A, B)$-устойчивость объединенной системе [11;12], если матрицы A_i и B_i подобраны так, что найдется положительное число $\mu > 0$, для которого выполнено условие

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} \mu A_2 - B_1 & \mathcal{O}_{m_2\times m_1} \\ \mathcal{O}_{m_1\times m_2} & A_1 - \mu B_2 \end{bmatrix} < 0. \tag{2.2}$$

Существование таких матриц A_i, B_i $(i = 1, 2)$ гарантируется условием “выживаемости” и произвольностью матрицы масштаба Γ_i в преобразованиях рассеивания $\mathbb{S}_i = G_i \cdot \Gamma_i$ $(i = 1, 2)$.

О п р е д е л е н и е 8 [11, разд. IV]. QSR-диссипативная система (1.2), удовлетворяющая условию “выживаемости”, называется *слабо* $\mathcal{L}_2(A, B)$*-устойчивой*, если ее *функция запаса* $\mathcal{V}\colon \mathcal{D}_x \mapsto \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ удовлетворяет следующему неравенству (диссипации):

$$\mathcal{V}(x(t)) - \mathcal{V}(x(t_0)) \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} \Big(\eta^\top(s)A\eta(s) - y^\top(s)By(s)\Big)\, ds + \beta(t_0, \mathbf{T}),$$

где матрицы A и $(-B)$ определены также, как в (1.5). Смещение $\beta(t_0, \mathbf{T}) \geqslant 0$ здесь может зависеть от состояния системы на интервале $[t_0 - \mathbf{T}, t_0]$.

Объединенная система, образованная при помощи волновых переменных (u_i, v_i), в пространстве состояний имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), \eta_1(t)), & x_1^0 = x_1(t_0) \in \mathcal{D}_{x_1}, \quad (t, t_0) \in \mathcal{T}_2^+ \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_2(t), \eta_2(t)), & x_2^0 = x_2(t_0) \in \mathcal{D}_{x_2} \\ y_1(t) = g_1(x_1(t), \eta_1(t)), & \eta_1 \in \mathcal{S}_1, \quad y_1 \in \mathcal{S}_2, \\ y_2(t) = g_2(x_2(t), \eta_2(t)), & \eta_2 \in \mathcal{S}_2, \quad y_2 \in \mathcal{S}_1; \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\begin{cases} u_1(t) = e_1(t) - v_2(t - T_2), & \begin{bmatrix} \eta_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \mathbb{S}_1 \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \eta_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \mathbb{S}_2 \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ u_2(t) = e_2(t) + v_1(t - T_1), & u_1, e_1, v_2 \in \mathcal{S}_1, \ u_2, e_2, v_1 \in \mathcal{S}_2. \end{cases} \tag{2.4}$$

Следует отметить, что полученная система “вход-выход” корректно определена в силу невырожденности преобразований рассеивания $\mathbb{S}_1$ и $\mathbb{S}_2$. Действительно, по входу u_i всегда можно определить v_i $(v_i = \widetilde{\Sigma}_i u_i)$ через η_i и $y_i = \Sigma_i \eta_i$.

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{\mathbb{S}}_{11}^i \eta_i + \bar{\mathbb{S}}_{12}^i y_i = \bar{\mathbb{S}}_{11}^i \eta_i + \bar{\mathbb{S}}_{12}^i \Sigma_i \eta_i \ \Rightarrow\ \eta_i = \left(\bar{\mathbb{S}}_{11}^i + \bar{\mathbb{S}}_{12}^i \Sigma_i\right)^{-1} u_i, \quad i = 1, 2, \\ v_i &= \bar{\mathbb{S}}_{21}^i \eta_i + \bar{\mathbb{S}}_{22}^i y_i = \bar{\mathbb{S}}_{21}^i \eta_i + \bar{\mathbb{S}}_{22}^i \Sigma_i \eta_i \ \Rightarrow\ v_i = \left(\bar{\mathbb{S}}_{21}^i + \bar{\mathbb{S}}_{22}^i \Sigma_i\right)\left(\bar{\mathbb{S}}_{11}^i + \bar{\mathbb{S}}_{12}^i \Sigma_i\right)^{-1} u_i =: \widetilde{\Sigma}_i u_i. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь $\bar{\mathbb{S}}_{jk}^i$ — блоки обратных матриц $\bar{\mathbb{S}}_i = \mathbb{S}_i^{-1}$ преобразования рассеивания $\mathbb{S}_i$ $(i, j, k = 1, 2)$. Полученная система $\widetilde{\Sigma}_i$ принимает на вход сигнал u_i и на выходе возвращает сигнал v_i. При этом она имеет реализацию в пространстве состояний. Из соотношений в (2.4) для любого допустимого входа $e = (e_1, e_2) \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ определяется волновой входной сигнал $u = (u_1, u_2)$ по формуле $u(t) = \Big((\mathcal{I} + \widetilde{\Sigma}^d)^{-1} e\Big)(t)$, где

$$\left(\widetilde{\Sigma}^d u\right)(t) = \left(\Delta_{T_2}\left(\widetilde{\Sigma}_2 u_2\right)(t), -\Delta_{T_1}\left(\widetilde{\Sigma}_1 u_1\right)(t)\right),$$

если неупреждающий оператор $(\mathcal{I} + \widetilde{\Sigma}^d)$ обратим [6, разд. 4.3.4]. Далее находятся изначальные сигналы η_i по первому равенству из (2.5) и решается система уравнений с задержками при начальных условиях $(\mathcal{P}_{t_0} x_i)(t) = 0$ $(i = 1, 2)$.

При постоянных временных задержках задача $\mathcal{L}_2$-стабилизации взаимодействия систем (2.3), (2.4) также решена. Действительно, образующие подсистемы $\widetilde{\Sigma}_i$ являются QSR-диссипативными и, более того, в силу построения — $\mathcal{L}_2(A_i, B_i)$-устойчивыми $(i = 1, 2)$. Кроме того, так как выбор матриц A_i, B_i осуществлялся с учетом выполнения условия (2.2), то по теореме 2 из [12] (или теореме 1 из [11]), объединенная система будет слабо $\mathcal{L}_2(A, B)$-устойчивой.

2.2. Взаимодействие систем с переменными задержками по времени

Как показано в работах [3;7] взаимодействие пассивных систем, реализованное посредством канала связи с переменными задержками по времени, нельзя стабилизировать применением только лишь преобразования рассеивания, поскольку в функции запаса объединенной системы возникают отрицательные слагаемые, которые в случае с растущими задержками в канале связи, могут нарушить требование строгой положительной определенности самой функции запаса (подробнее см. [3, разд. 3]). Для обеспечения устойчивого поведения системы в смысле определения 8 требуется введение дополнительных корректирующих коэффициентов, зависящих от времени, которые применяются к волновым переменным на обеих сторонах канала связи и “гасят” лишнюю активность системы, вызванную переменными задержками по времени. Представленная ниже процедура стабилизации удаленного взаимодействия подсистем состоит из нескольких шагов, гарантирующих *слабую* $\mathcal{L}_2(A, B)$*-устойчивость* объединенной системе.

Итак, даны две QSR-диссипативные системы $\Sigma_{X_1}(\eta_1, y_1)$ и $\Sigma_{X_2}(\eta_2, y_2)$, размерности входно-выходных сигналов которых согласованы $\dim \eta_2 = \dim y_1 = m_2$ и $\dim \eta_1 = \dim y_2 = m_1$. Функции расхода $\omega_1(\eta_1, y_1)$ и $\omega_2(\eta_2, y_2)$ являются квадратичными формами с QSR-матрицами QSR_1 и QSR_2 соответственно. Обе системы удовлетворяют условию “выживаемости”, т. е. $\mathrm{card}\{\lambda_{\geqslant 0}(QSR_i)\} = \dim \eta_i = m_i$, $(i = \overline{1, 2})$.

П р о ц е д у р а стабилизации.

1. Прежде всего выбираются диагональные матрицы

$$A_1 = \mathrm{diag}\{a_{1j}\}_{j=1}^{m} \in \mathbb{R}^{m\times m}_{\geqslant 0}, \quad B_1 = \mathrm{diag}\{b_{1j}\}_{j=1}^{p} \in \mathbb{R}^{p\times p}_{>0},$$

$$A_2 = \mathrm{diag}\{a_{2j}\}_{j=1}^{p} \in \mathbb{R}^{p\times p}_{\geqslant 0}, \quad B_2 = \mathrm{diag}\{b_{2j}\}_{j=1}^{m} \in \mathbb{R}^{m\times m}_{>0}$$

таким образом, чтобы нашлось такое строго положительное число μ, для которого выполнено условие (2.2).

2. Далее конструируются преобразования рассеивания (1.6) $\mathbb{S}_1$ и $\mathbb{S}_2$ для каждой из подсистем. Эти преобразования приводят квадратичные формы в функциях расхода к каноническому виду, т. е.

$$\omega_i(\eta_i, y_i) = \begin{bmatrix} \eta_i \\ y_i \end{bmatrix}^{\top} \mathrm{QSR}_i \begin{bmatrix} \eta_i \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}^{\top} \begin{bmatrix} A_i & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & B_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \eta_i \\ y_i \end{bmatrix} = \mathbb{S}_i \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

с диагональными матрицами A_i, B_i, выбранными на первом шаге. Такие преобразования всегда найдутся за счет соответствующего подбора матриц Γ_i [11; 12] $(i = 1, 2)$.

3. Следующим шагом строятся управления, которые определяют правила соединения систем. Конструкцию управляющих воздействий удобно описать в волновых переменных, полученных после применения преобразования рассеивания к исходным входно-выходным параметрам

$$\begin{aligned} u_1(t) &= e_1(t) - \mathcal{R}_1(t) v_2(t - T_2(t)), \\ u_2(t) &= e_2(t) + \mathcal{R}_2(t) v_1(t - T_1(t)), \end{aligned} \tag{2.7}$$

где зависящие от времени диагональные матрицы коэффициентов $\mathcal{R}_i(t) \in \mathbb{R}^{m_i\times m_i}$ и $(i = 1, 2)$ строго положительно определены, а их диагональные элементы $\rho_{ij}(t)$ удовлетворяют ограничениям

$$\rho^2_{ij_i}(t) \leqslant 1 - \dot{T}_{(3-i)j_i}(t), \quad j_i = \overline{1, m_i}, \quad i = 1, 2. \tag{2.8}$$

Сигналы $e_i \in \mathbb{R}_i^m$ $(i = 1, 2)$ являются новыми измеримыми входами в объединенную систему. При этом, если какой-то из каналов связи kj_k генерирует постоянную задержку $T_{kj_k}(t) = \mathrm{const}$, то соответствующий элемент $\rho_{(3-k)j_k}(t)$ берется равным 1 $(k = 1, 2)$.

З а м е ч а н и е 2. Для подбора диагональных матриц-коэффициентов $\mathcal{R}_1(t)$ и $\mathcal{R}_2(t)$, требуется знание $\dot{T}_2(t)$ и $\dot{T}_1(t)$ соответственно. Однако, как было отмечено выше в замечании, для их определения не обязательно знать конкретную величину задержки [7].

Объединенная система (2.3), (2.7) будет корректно определена, если неупреждающий (d_1) оператор $(\mathcal{I} + \widetilde{\Sigma}^d_{\mathcal{R}})$ обратим, где

$$(\widetilde{\Sigma}^d_{\mathcal{R}} u)(t) = \Big(\mathcal{R}_1(t)\Delta_{T_2(t)}\widetilde{\Sigma}_2 u_2(t), -\mathcal{R}_2(t)\Delta_{T_1(t)}\widetilde{\Sigma}_1 u_1(t)\Big)$$

(см. [6, разд. 4.3.4]).

Далее аналогично случаю с постоянными задержками по $u(t)$ находятся сигнал $\eta(t) = (\eta_1(t, \eta_2(t)))$, зависящий от истории, и решается система уравнений с задержками в условиях $\mathcal{P}_{t_0}x(t) = 0$. В силу того, что функции $f_i(x_i, \eta_i)$ $(i = 1, 2)$ липшицевы по своим аргументам (1.1) и условию (d_1), система (2.3) имеет единственное решение [17, §I.4]. Относительно устойчивости объединенной системы, справедлива теорема.

Теорема 2. *Пусть объединенная система, образованная удаленным взаимодействием QSR-диссипативных систем через коммуникационный канал, порождающий непостоянные задержки во времени, корректно определена. Тогда управления* (2.7), *предлагаемые процедурой в рамках условий* (2.2) *и* (2.8), *обеспечивают слабо $\mathcal{L}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-устойчивое взаимодействие QSR-диссипативных подсистем, удовлетворяющих условию “выживаемости”. При этом вид матриц $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ будет получен в ходе доказательства теоремы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно п. 1 в рамках процедуры стабилизации, выбираются матрицы A_i и B_i, $i = \overline{1, 2}$, удовлетворяющие условию (2.2) для некоторого положительного параметра μ. Далее строятся преобразования рассеивания $\mathbb{S}_1$ и $\mathbb{S}_2$ для перехода в соответствующих функциях расхода (2.6) к волновым переменным.

В качестве кандидата для функции запаса объединенной системы рассматривается следующая линейная комбинация функций запаса исходных подсистем

$$V(X(t)) = V_1(X_1(t)) + \mu V_2(X_2(t)), \tag{2.9}$$

где вектор $X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix}^\top$ определяет состояние системы Σ, при этом $X_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ $(i = \overline{1, 2})$ вектора состояний каждой из подсистем. Положительный параметр μ выбран из условия (2.2).

По определению функции запаса $V_i(X_i(t))$ удовлетворяют неравенству диссипации (1.3), (1.4), которое можно переписать с использованием волновых переменных, вычисляемых посредством применения преобразования рассеивания $\mathbb{S}_i$ (1.6) $(i = \overline{1, 2})$:

$$V_i(X_i(t)) - V_i(X_i(t_0)) \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} \begin{bmatrix} \eta_i(s) \\ y_i(s) \end{bmatrix}^\top \mathrm{QSR}_i \begin{bmatrix} \eta_i(s) \\ y_i(s) \end{bmatrix} ds + \beta_i(t_0)$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t} \begin{bmatrix} u_i(s) \\ v_i(s) \end{bmatrix}^\top \mathbb{S}_i^\top \mathrm{QSR}_i \mathbb{S}_i \begin{bmatrix} u_i(s) \\ v_i(s) \end{bmatrix} ds + \beta_i(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} \begin{bmatrix} u_i(s) \\ v_i(s) \end{bmatrix}^\top \Gamma_i G_i^\top \mathrm{QSR}_i G_i \Gamma_i \begin{bmatrix} u_i(s) \\ v_i(s) \end{bmatrix} ds + \beta_i(t_0)$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t} \begin{bmatrix} u_i(s) \\ v_i(s) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} A_i & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & B_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(s) \\ v_i(s) \end{bmatrix} ds + \beta_i(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} \Big(u_i^\top(s) A_i u_i(s) - v_i^\top(s) B_i v_i(s)\Big)\, ds + \beta_i(t_0).$$

Подстановка полученных оценок в неравенство диссипации (1.3) для искомой функции запаса (2.9) приводит к неравенству

$$\begin{aligned} & V(X(t)) - V(X(t_0)) \\ \leqslant & \int\limits_{t_0}^{t} \left(u_1^\top(s)A_1u_1(s) - v_1^\top(s)B_1v_1(s) + \mu\left(u_2^\top(s)A_2u_2(s) - v_2^\top(s)B_2v_2(s)\right)\right)ds \\ & + \beta_1(t_0) + \mu\beta_2(t_0) \\ = & \int\limits_{t_0}^{t}\left(\|A_1^{1/2}u_1(s)\|^2 + \mu\|A_2^{1/2}u_2(s)\|^2 - \|B_1^{1/2}v_1(s)\|^2 - \mu\|B_2^{1/2}v_2(s)\|^2\right)ds \\ & + \beta_1(t_0) + \mu\beta_2(t_0). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Далее следует подставить управления (2.7), выбранные в п. 2 процедуры стабилизации, вместо первых двух слагаемых в подынтегральной функции, учитывая при этом тот факт, что диагональные матрицы A_1 и A_2 неотрицательно определены. Для последующих оценок потребуется неравенство Юнга, которое можно записать в виде

$$\|p+q\|^2 \leqslant (1+\varepsilon)\|p\|^2 + \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\|q\|^2 \quad \forall\, p, q \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, \varepsilon > 0. \tag{2.11}$$

Оценка для первого слагаемого подынтегральной функции в выражении (2.10) строится следующим образом:

$$\|A_1^{1/2}u_1(s)\|^2 = \sum_{j=1}^{m} a_{1j}u_{1j}^2(s) = \sum_{j=1}^{m} a_{1j}\left(\rho_{1j}(s)v_{2j}(s-T_{2j}(s)) + e_{1j}(s)\right)^2$$

$$\overset{(2.11)}{\leqslant} \sum_{j=1}^{m} a_{1j}\Big((1+\varepsilon)\rho_{1j}^2(s)v_{2j}^2(s-T_{2j}(s)) + \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)e_{1j}^2(s)\Big).$$

Интеграл от первого слагаемого в полученной сумме оценивается с использованием замены переменной интегрирования s на $z = s - T_{2j}(s)$, условия (d_3) и ограничения (согласно п. 3 процедуры стабилизации) на диагональные члены $\rho_{1j}(t)$ матрицы $\mathcal{R}_1(t)$) (2.8), $j = \overline{1,m}$:

$$\int\limits_{t_0}^{t} \rho_{1j}^2(s)v_{2j}^2(s-T_{2j}(s))ds = \int\limits_{t_0-T_{2j}(t_0)}^{t-T_{2j}(t)} v_{2j}^2(z)\frac{\rho_{1j}^2(s(z))}{1-\dot{T}_{2j}(s(z))}dz \overset{A2,(2.8)}{\leqslant} \int\limits_{t_0-T_{2j}(t_0)}^{t-T_{2j}(t)} v_{2j}^2(z)dz$$

$$= \int\limits_{t_0-T_{2j}(t_0)}^{t_0} v_{2j}^2(z)dz + \int\limits_{t_0}^{t-T_{2j}(t)} v_{2j}^2(z)dz \leqslant \int\limits_{t_0-\mathbf{T}_2}^{t_0} v_{2j}^2(z)dz + \int\limits_{t_0}^{t} v_{2j}^2(z)dz,$$

где по условию (d_1) $0 < T_{2j}(t) \leqslant \mathbf{T}_{2j}$ $\forall\, t \geqslant t_0$ и $\mathbf{T}_2 = \max\limits_{j=\overline{1,m}}\{\mathbf{T}_{2j}\}$.

Аналогично для второго слагаемого в подынтегральной функции в (2.10) в рамках условия (d_1) $0 < T_{1j}(t) \leqslant \mathbf{T}_{1j}$, $\forall\, t \geqslant t_0$ и $\mathbf{T}_1 = \max\limits_{j=\overline{1,p}}\{\mathbf{T}_{1j}\}$, строится оценка

$$\int\limits_{t_0}^{t} \rho_{2j}^2(s)v_{1j}^2(s-T_{1j}(s))ds \leqslant \int\limits_{t_0-\mathbf{T}_1}^{t_0} v_{1j}^2(z)dz + \int\limits_{t_0}^{t} v_{1j}^2(z)dz.$$

Таким образом, для первого интеграла в (2.10) справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{t_0}^{t} \|A_1^{1/2}u_1(s)\|^2 ds \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{m} a_{1j}\Bigg((1+\varepsilon)\Big(\int\limits_{t_0-\mathbf{T}_2}^{t_0} v_{2j}^2(s)ds + \int\limits_{t_0}^{t} v_{2j}^2(s)ds\Big) + \Big(1+\frac{1}{\varepsilon}\Big)\int\limits_{t_0}^{t} e_{1j}^2(s)ds\Bigg) \\
&= (1+\varepsilon)\int\limits_{t_0-\mathbf{T}_2}^{t_0} \|A_1^{1/2}v_2(s)\|^2 ds \\
&+ (1+\varepsilon)\int\limits_{t_0}^{t} \|A_1^{1/2}v_2(s)\|^2 ds + \Big(1+\frac{1}{\varepsilon}\Big)\int\limits_{t_0}^{t} \|A_1^{1/2}e_1(s)\|^2 ds.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Оценка второго подынтегрального слагаемого в (2.10) строится аналогично и имеет вид

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{t_0}^{t} \|A_2^{1/2}u_2(s)\|^2 ds \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{p} a_{2j}\Bigg((1+\varepsilon)\Big(\int\limits_{t_0-\mathbf{T}_1}^{t_0} v_{1j}^2(s)ds + \int\limits_{t_0}^{t} v_{1j}^2(s)ds\Big) + \Big(1+\frac{1}{\varepsilon}\Big)\int\limits_{t_0}^{t} e_{2j}^2(s)ds\Bigg) \\
&= (1+\varepsilon)\int\limits_{t_0-\mathbf{T}_1}^{t_0} \|A_2^{1/2}v_1(s)\|^2 ds + (1+\varepsilon)\int\limits_{t_0}^{t} \|A_2^{1/2}v_1(s)\|^2 ds + \Big(1+\frac{1}{\varepsilon}\Big)\int\limits_{t_0}^{t} \|A_2^{1/2}e_2(s)\|^2 ds.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Подстановка полученных оценок в неравенство диссипации (2.10) для искомой функции запаса $V(X(t))$ системы Σ и перегруппировка слагаемых в подынтегральном выражении приводят к следующему результату:

$$\begin{aligned}
V(X(t)) - V(X(t_0)) &\leqslant \Big(1+\frac{1}{\varepsilon}\Big)\int\limits_{t_0}^{t} \big(e_1^\top(s)A_1e_1(s) + \mu e_2^\top(s)A_2e_2(s)ds\big) \\
&+ \int\limits_{t_0}^{t} v_1^\top(s)\big(\mu(1+\varepsilon)A_2 - B_1\big)v_1(s)ds + \int\limits_{t_0}^{t} v_2^\top(s)\big((1+\varepsilon)A_1 - \mu B_2\big)v_2(s)ds \\
&+ (1+\varepsilon)\Bigg(\int\limits_{t_0-\mathbf{T}_1}^{t_0} \mu\|A_2^{1/2}v_1(s)\|^2 ds + \int\limits_{t_0-\mathbf{T}_2}^{t_0} \|A_1^{1/2}v_2(s)\|^2 ds\Bigg) + \beta_1(t_0) + \beta_2(t_0) \\
&= \int\limits_{t_0}^{t} e^\top(s)\mathbb{A}_\varepsilon e(s)ds + \int\limits_{t_0}^{t} v^\top(s)\mathbb{B}_\varepsilon v(s)ds + \beta_\varepsilon(t_0; \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2).
\end{aligned}$$

Здесь $e(s) := \begin{bmatrix} e_1(s) \\ e_2(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+p}$; $\quad v(s) := \begin{bmatrix} v_1(s) \\ v_2(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+p}$;

$$\mathbb{A}_\varepsilon := \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\begin{bmatrix} A_1 & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mu A_2 \end{bmatrix} \geqslant 0; \quad \mathbb{B}_\varepsilon := \begin{bmatrix} \mu(1+\varepsilon)A_2 - B_1 & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & (1+\varepsilon)A_1 - \mu B_2 \end{bmatrix}.$$

Смещение $\beta_\varepsilon(\cdot)$ зависит от наблюдений (выходных данных) на промежутках $[t_0 - \mathbf{T}_1]$ и $[t_0 - \mathbf{T}_2]$ и может быть оценено значением $\beta_\varepsilon(t_0, \mathbf{T})$, определяемым равенством

$$\beta_\varepsilon(t_0; \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2) := (1+\varepsilon)\left(\int\limits_{t_0 - \mathbf{T}_1}^{t_0} \mu \|A_1^{1/2} v_2(s)\|^2 ds + \int\limits_{t_0 - \mathbf{T}_2}^{t_0} \|A_1^{1/2} v_2(s)\|^2 ds \right) + \beta_1(t_0) + \beta_2(t_0)$$

$$\leqslant (1+\varepsilon) \int\limits_{t_0 - \mathbf{T}}^{t_0} v^\top(s) \begin{bmatrix} \mu A_2 & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & A_1 \end{bmatrix} v(s) ds + \beta_1(t_0) + \beta_2(t_0) =: \beta_\varepsilon(t_0, \mathbf{T}), \quad \mathbf{T} = \max\{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2\}.$$

Для завершения доказательства требуется показать, что матрица $\mathbb{B}_\varepsilon$ отрицательно определена. В неравенстве Юнга (2.11) параметр ε является произвольным положительным числом. Кроме того, согласно условию (2.2), диагональная матрица $\mathbb{B}$ строго отрицательно определена. Это позволяет утверждать о существовании такого положительного числа ε, которое гарантирует отрицательную определенность матрицы $\mathbb{B}_\varepsilon$. Действительно,

$$\mathbb{B}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \mu A_2 - B_1 & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & A_1 - \mu B_2 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} \mu A_2 & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & A_1 \end{bmatrix} = \mathbb{B} + \varepsilon \begin{bmatrix} \mu A_2 & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & A_1 \end{bmatrix}. \tag{2.14}$$

Выберем параметр ε, равным следующему значению:

$$\varepsilon = \begin{cases} \dfrac{b_*}{a^*}, & a^* \neq 0, \\ \\ 1, & a^* = 0. \end{cases} \quad \text{где} \quad \begin{aligned} a^* &= \max_{j,k}\{a_{1j}, \mu a_{2k}\}, \quad j = \overline{1,m}, \\ b_* &= \min_{j,k}\{b_{1k} - \mu a_{2k}, \mu b_{2j} - a_{1j}\}, \quad k = \overline{1,p}, \end{aligned}$$

Если оказалось, что величина a^* равна 0, т.е. второе слагаемое в выражении для матрицы $\mathbb{B}_\varepsilon$ (2.14) отсутствует, то в этом случае, $\mathbb{B}_\varepsilon \equiv \mathbb{B} < 0$ и не зависит от параметра ε, таким образом, в качестве ε можно выбрать произвольное положительное число. Иначе параметр ε выбирается как минимальный диагональный элемент матрицы $(-\mathbb{B})$, разделенный на максимальный диагональный элемент матрицы $\begin{bmatrix} \mu A_2 & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & A_1 \end{bmatrix}$.

Следовательно, взаимодействие подсистем $\Sigma_{X_1}(\eta_1, y_1)$ и $\Sigma_{X_2}(\eta_2, y_2)$, определяемое правилом (2.7), образует слабо $\mathcal{L}_2(\mathbb{A}_\varepsilon, -\mathbb{B}_\varepsilon)$-устойчивую систему $\Sigma_X(e, v)$ с функцией запаса вида

$$V(X(t)) - V(X(t_0)) \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} \Big(e^\top(s) \mathbb{A}_\varepsilon e(s) - v^\top(s)(-\mathbb{B}_\varepsilon) v(s) \Big) ds + \beta_\varepsilon(t_0; \mathbf{T}).$$

При этом искомые матрицы коэффициентов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ равны $\mathbb{A}_\varepsilon$ и $-\mathbb{B}_\varepsilon$ соответственно.

Таким образом, теорема доказана.

Заключение

В работе излагается метод стабилизации взаимодействия QSR-диссипативных систем, соединенных посредством канала связи, порождающего непостоянные временные задержки. Основным инструментом в процедуре становятся преобразования рассеивания, применяемые для локальной и удаленной подсистем, которые в условиях постоянных задержек обеспечивают слабую $\mathcal{L}_2(A, B)$-устойчивость общей системы. Если задержки по времени меняются с течением времени, а именно растут, то система теряет свойство входно-выходной устойчивости, о чем свидетельствуют примеры, продемонстрированные на пассивных системах [7]. Поэтому процесс стабилизации требует дополнительного шага — масштабирования входных сигналов на величину, зависящую от скорости изменения самих задержек по времени. Естественно, это искажает передаваемый сигнал, но позволяет сохранить $\mathcal{L}_2$-устойчивость системы.

В действительности, применение самого преобразования рассеивания тоже искажает сигнал. Здесь следует сказать, что в каком-то смысле свойство сохранения сигнала и свойство устойчивости распределенной системы друг с другом конфликтуют. Однако в некоторых случаях есть возможность не искажать передаваемый сигнал [16, разд. 3]. Эта возможность реализуется, например, за счет не единственности преобразования рассеивания, которое приводит квадратичную форму к каноническому виду. Следовательно, предлагаемая техника стабилизации систем может быть качественно улучшена за счет учета дополнительных требований к процессу управления. Данное обстоятельство открывает новые задачи для исследования и решения. В ближайшей перспективе планируется завершение работы над модельным примером и численная реализация представленной процедуры стабилизации взаимодействия систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Anderson R.J., Spong M.W.** Bilateral control of teleoperators with time delay // IEEE Trans. Autom. Control. 1989. Vol. 34, no. 5. P. 494–501. https://doi.org/10.1109/9.24201
2. **Niemeyer G., Slotine J.J.** Stable adaptive teleoperation // IEEE J. Ocean. Eng. 1991. Vol. 16, no. 1. P. 152–162. https://doi.org/10.1109/48.64895
3. **Lozano R., Chopra N., Spong M.W.** Passivation of force reflecting bilateral teleoperators with time varying delay // Mechatronics'02: Proc. Conf. Enstschede, Netherlands, 2002. 10 p.
4. **Zames G.** On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems. Part I: Conditions derived using concepts of loop gain, conicity, positivity // IEEE Trans. Autom. Control. 1966. Vol. 11, no. 2. P. 228–238. https://doi.org/10.1109/TAC.1966.1098316
5. **Willems Jan C.** The generation of Lyapunov functions for input-output stable systems // SIAM J. Control. 1971. Vol. 9, no. 1. P. 105–134. https://doi.org/10.1137/0309009
6. **Willems Jan C.** The analysis of feedback systems. Cambridge: The MIT Press, 1971. 188 p.
7. **Nunõ E., Basañez L., Ortega R.** Passivity–based control for bilateral teleoperation: A tutorial // Automatica. 2011. Vol. 47, no. 3. P. 485–495. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2011.01.004
8. **Куржанский А.Б., Усова А.А.** О дуальности математических моделей проблем механики и теории электрических цепей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Vol. 27, no. 3. P. 115–124. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-3-115-127
9. **Абрамова В.В.** О задачах наблюдения и управления для осциллирующей цепи: дипломная работа / фак. вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова; науч. рук. А. Б. Куржанский, 2020. 34 с.
10. **Usova A.A., Polushin I.G., Patel R.V.** Scattering-based stabilization of non-planar conic systems // Automatica. 2018. Vol. 93. P. 1–11. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2018.03.028
11. **Usova A.A., Polushin I.G., Patel R.V.** Scattering-based stabilization of complex interconnections of (Q,S,R)-dissipative systems with time delays // IEEE Control Systems Letters. 2019. Vol. 3, no. 2. P. 368–373. https://doi.org/10.1109/LCSYS.2018.2881150
12. **Polushin I.G.** A generalized scattering framework for teleoperation with communication delays // IFAC-PapersOnLine. 2020. Vol. 53, no. 2. P. 10064–10069. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.2728
13. **Polushin I.G.** A generalization of the scattering transformation for conic systems // IEEE Trans. Autom. Control, 2014. Vol. 59, no. 7. P. 1989–1995. https://doi.org/10.1109/TAC.2014.2304396
14. **Brogliato B., Lozano R., Maschke B., Egeland O.** Dissipative systems analysis and control: theory and applications (Communications and control engineering). NY: Springer, 2007. 590 p.
15. **Willems, J.C., Trentelman, H.L.** Synthesis of dissipative systems using quadratic differential forms: Part I // IEEE Trans. Autom. Control. 2002. Vol. 47, no. 1. P. 53–69. https://doi.org/10.1109/9.981722

16. **Usova A.A., Pachkouski K.A., Polushin I.G., Patel R.V.** Stabilization of robot-environment interaction through generalized scattering techniques. *IEEE Trans. Robot.* 2022. Vol. 38, no. 2. P. 1319–1333. https://doi.org/10.1109/TRO.2021.3107231
17. **Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.** Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Наука, 1971. 296 с.

Поступила 29.04.2025
После доработки 12.05.2025
Принята к публикации 19.05.2025

Усова Анастасия Александровна
канд. физ.-мат. наук, PhD
старший научный сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: ausova@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Anderson R.J., Spong M.W. Bilateral control of teleoperators with time delay. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1989, vol. 34, no. 5, pp. 494–501. https://doi.org/10.1109/9.24201
2. Niemeyer G., Slotine J.J. Stable adaptive teleoperation. *IEEE J. Ocean. Eng.*, 1991, vol. 16, no. 1, pp. 152–162. https://doi.org/10.1109/48.64895
3. Lozano R., Chopra N., Spong M.W. Passivation of force reflecting bilateral teleoperators with time varying delay. In: *Proc. Mechatronics Conference*, Enstschede, Netherlands, 2002, 10 p.
4. Zames G. On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems. Part I: Conditions derived using concepts of loop gain, conicity, positivity. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1966, vol. 11, no. 2, pp. 228–238. https://doi.org/10.1109/TAC.1966.1098316
5. Willems Jan C. The generation of Lyapunov functions for input-output stable systems. *SIAM J. Control*, 1971. vol. 9, no. 1. pp. 105–134. https://doi.org/doi:10.1137/0309009
6. Willems Jan C. *The analysis of feedback systems.* Cambridge, MIT Press, 1971, 188 p.
7. Nunõ E., Basañez L., Ortega R. Passivity–based control for bilateral teleoperation: A tutorial. *Automatica*, 2011, vol. 47, no. 3, pp. 485–495. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2011.01.004
8. A. B. Kurzhanski, A. A. Usova On the duality of mathematical models for problems in mechanics and in the theory of electrical circuits. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2022, Vol. 317, Suppl. 1, pp. S109–S120. https://doi.org/10.1134/S0081543822030099
9. Abramova V.V. *O zadachakh nablyudeniya i upravleniya dlya ostsilliruyushchei tsepi* [Control and observation problems for an oscillating chain], Graduate Work, Department of Systems Analysis of the faculty of Computational Mathematics and Cybernetics of Lomonosov Moscow State University (CMC MSU). Moscow, Lomonosov Moscow State University Publ., 2020, 34 p.
10. Usova A.A., Polushin I.G., Patel R.V. Scattering-based stabilization of non-planar conic systems. *Automatica*, 2018, vol. 93, pp. 1–11, https://doi.org/10.1016/j.automatica.2018.03.028
11. Usova A.A., Polushin I.G., Patel R.V. Scattering-based stabilization of complex interconnections of (Q,S,R)-dissipative systems with time delays. *IEEE Control Systems Letters*, 2019, vol. 3, no. 2, pp. 368–373, https://doi.org/10.1109/LCSYS.2018.2881150
12. Polushin I.G. A generalized scattering framework for teleoperation with communication delays. In: *IFAC-PapersOnLine*. 2020, vol. 53, no. 2, pp. 10064–10069. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.2728
13. Polushin I.G. A generalization of the scattering transformation for conic systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 2014, vol. 59, no. 7, pp. 1989–1995. https://doi.org/10.1109/TAC.2014.2304396
14. Brogliato B., Lozano R., Maschke B., Egeland O. *Dissipative systems analysis and control: theory and applications* (Communications and control engineering), 2nd ed. NY, Springer, 2007, 590 p.
15. Willems J.C., Trentelman H.L. Synthesis of dissipative systems using quadratic differential forms: Part I. *IEEE Trans. Autom. Control*, 2002, vol. 47, no. 1, pp. 53–69. https://doi.org/10.1109/9.981722

16. Usova A.A., Pachkouski K.A., Polushin I.G., Patel R.V. Stabilization of robot-environment interaction through generalized scattering techniques. *IEEE Trans. Robotics*, 2022, vol. 38, no. 2, pp. 1319–1333. https://doi.org/10.1109/TRO.2021.3107231
17. El'sgol'ts L.E., Norkin S.B. *Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments.* NY, London, Acad. Press, 1973. 384 p. Original Russian text published in El'sgol'ts L.E., Norkin S.B. *Vvedenie v teoriyu differentsial'nykh uravnenii s otklonyayushchimsya argumentom*, izd. 2-e, pererab. i dop. Moscow, Nauka, 1971. 296 p.

Received April 29, 2025
Revised May 12, 2025
Accepted May 19, 2025

Anastasiia Aleksandrovna Usova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), PhD, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: ausova@imm.uran.ru .

Cite this article as: A. A. Usova. $\mathcal{L}_2$-stability of a remote interaction of QSR-dissipative systems with time-varying delays. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 2, pp. 262–279.