ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 31 № 2 2025

УДК 519.83

ВЫБОР СТРАТЕГИИ ПО МАКСИМИННОМУ КВАНТИЛЬНОМУ КРИТЕРИЮ В ИГРЕ КОМПАНИИ С НЕСКОЛЬКИМИ ГРУППАМИ КЛИЕНТОВ

Г. А. Тимофеева

Задача выбора оптимальных стратегий для случая, когда второй игрок представлен множеством лиц, принимающих решения, рассматривается в рамках иерархической игры со случайным вторым игроком. Предполагается, что выбор второго игрока описывается взвешенной суммой независимых одинаково распределенных случайных величин. В качестве критерия выбора решения первым игроком используется параметрический квантильный критерий (Value at Risk). Модель может использоваться для обоснования выбора стратегии крупной компании (первого игрока) на основе анализа отклика клиентов, представленных несколькими неоднородными по объему группами ЛПР (вторым игроком). Постановка задачи близка к игре с природой, однако здесь отклик второго игрока представлен не одной случайной величиной, а взвешенной суммой независимых случайных величин. При использовании первым игроком квантильного критерия в отличие от критерия среднего значения на его решение влияют не только параметры распределения отклика, но и веса, которые отражают количество и неоднородность по объему потребителей, представляющих второго игрока. Предполагается, что эти весовые коэффициенты точно не заданы, а неоднородость по объему описывается следующими параметрами: максимальной и минимальной долями отдельного ЛПР в общем объеме, а также общим числом лиц, принимающих решение. Получена оценка наибольшей возможной дисперсии взвешенной суммы случайных величин в зависимости от этих параметров. Задачи с квантильным критерием обычно решаются при фиксированном значении вероятности, однако выбор вероятности, как правило, не обосновывается. Предлагается находить решение задачи параметрической максимизации наихудшей квантили, которая в рассматриваемых условиях сводится к выбору максимума из линейных функций. Построен алгоритм решения задачи оптимизации с параметрическим квантильным критерием, рассмотрены модельные примеры.

Ключевые слова: выбор стратегии, игра со случайным вторым игроком, игра с природой, квантильный критерий, оценка риска, неполная информация, наименьшая квантиль, оценка дисперсии.

G. A. Timofeeva. Choosing a strategy based on the maximin quantile criterion in a game of a company with several groups of clients.

The problem of choosing optimal strategies for the case in which the second player is represented by a set of decision makers is considered within the framework of a hierarchical game with a random second player. It is assumed that the second player's choice is described by a weighted sum of independent identically distributed random variables. The parametric quantile criterion (Value at Risk) is used as a criterion for the choice of the solution by the first player. The model can be used to justify the choice of strategy of a large company (the first player) based on the analysis of customer response, represented by several heterogeneous groups of decision makers (the second player). The problem statement is closely related to a game with nature; however, the response of the second player is not represented by a single random variable in this case, but rather by a weighted sum of independent random variables. When the quantile criterion is used by the first player, in contrast to the mean value criterion, the player's decision is influenced not only by the parameters of the response distribution but also by the weights that reflect the number and heterogeneity in volume of consumers representing the second player. It is assumed that these weighting coefficients are not precisely specified, and the heterogeneity in volume is described by the following parameters: the maximum and minimum shares of an individual decision maker in the total volume, as well as the total number of decision makers. An estimate of the greatest possible variance of a weighted sum of random variables, depending on these parameters, is obtained. Problems with a quantile criterion are usually solved with a fixed probability value, but the choice of probability is not typically justified. It is proposed to find a solution to the problem of parametric maximization of the worst quantile, which under the considered conditions reduces to choosing the maximum from linear functions. An algorithm for solving an optimization problem with a parametric quantile criterion is constructed, and model examples are considered.

Keywords: choice of strategy, game with a random second player, game with nature, quantile criterion, Value at Risk, incomplete information, least quantile, variance estimation.

MSC: 91A60, 91B30, 90C15

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-2-229-243

Введение

Выбор стратегии для крупных компаний основан на анализе отклика на возможные решения значительного числа клиентов (ЛПР). Реакция клиентов, как правило, точно не задана и может быть описана с использованием нечеткой логики или вероятностных моделей. Для описания выбора решений из конечного множества альтернатив используются модели теории игр с различным описанием неопределенности в матрице выигрышей. В зависимости от типа неопределенности авторы исследуют модели с нечеткой матрицей выигрышей [1], игры, содержащие случайные возмущения в матрице выигрышей [2], в том числе игру с природой с различными критериями выбора стратегий [3], игру со случайным вторым игроком [4] и другие формализации.

При выборе из альтернатив в условиях, когда выигрыш описывается функцией, содержащей случайные параметры, используются различные варианты упорядочения случайных величин. Проблема сравнения двух случайных величин, отражающих выгоду одного ЛПР (в том числе 1-го игрока в играх с природой), традиционно рассматривалась с точки зрения доминирования 2-го порядка [5]. В современных исследованиях [6] рассматривается развитие этого подхода и вводится понятие доминирования произвольного порядка, обсуждаются возможные приложения.

Отметим, что доминирование 1-го порядка, т. е. выполнение неравенства

$$\mathcal{P}\{\xi_1(x) < x\} \leq \mathcal{P}\{\xi_2(x) < x\} \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}$$

используется редко в прикладных задачах и лишь для дискретных распределений, так как, например, для двух нормально распределенных случайных величин $\xi_i \sim N(m_i, s_i)$ доминирование $\xi_1 \succeq_1 \xi_2$ эквивалентно выполнению условий $m_1 \geq m_2$, $s_1 = s_2$.

Наибольшее развитие критерии выбора решений при вероятностном описании целевых функционалов получили при исследовании выбора стратегий на финансовом рынке. Авторы используют сравнение средних ожидаемых значений, доминирование 2-го и более высоких порядков, анализ риска, описываемого дисперсией, и переход к двухкритериальной задаче [7]. Для анализа риска были введены термины “величина риска” (*Value at Risk*, VaR), “условная величина риска” (*Conditional Value at Risk*, $CVaR$) [8], а также их обобщения: mean-$CVaR$, max-$CVar$ и другие [6; 9]. При выборе оптимальных стратегий в задачах стохастической оптимизации в технических системах и игровых задачах со случайными составляющими широко используются квантильный и вероятностный критерии [2; 10; 11]. При сравнении результатов следует иметь в виду, что несмотря на некоторые различия в сложившейся терминологии: (*Value at Risk*, VaR — левосторонняя квантиль целевой функции; Var — дисперсия случайно величины и т. п.), в работах российских и зарубежных ученых обсуждаются близкие подходы к выбору решений в условиях, когда целевая функция (полезность, прибыль) описывается случайной величиной.

При исследовании игр, в которых 2-й игрок представлен значительной группой лиц, ранее предложено использовать математическую модель в форме игры со случайным вторым игроком. Как правило, в этом случае целевая функция (критерий выбора стратегии 1-м игроком) представлен взвешенной суммой независимых случайных величин, каждая из которых отражает результат взаимодействия с отдельным ЛПР, а вес определяется вкладом в общую сумму (т. е. объемом взаимодействия ЛПР с компанией). При рассмотрении конкретных приложений группа лиц, представляющая 2-го игрока, зачастую разбивается на несколько подгрупп, которые реагируют на решения 1-го игрока по-разному.

Если выбор стратегии основан на квантильном или вероятностном критерии, то следует учитывать не только средние значения, но и разброс (дисперсию) взвешенной суммы случайных величин. Для групп со значительным числом не равных по весу слагаемых среднее значение пропорционально суммарному объему, а дисперсия зависит от того, как распределены объемы в группах. В случае большого количества клиентов для оценки дисперсии взвешенной суммы предлагается использовать наибольшую возможную дисперсию при ограничениях на наибольший и наименьший объемы.

1. Постановка задачи и основные определения

В работе [4] для описания взаимодействия компании с множеством клиентов в задаче о выборе оптимального тарифа на перевозку предложена модель в форме иерархической игры со случайным вторым игроком $G(\mathcal{P}) = \langle X, Y, f_1(x,y), f_2(x,y,\xi), \mathcal{P}_\xi \rangle$. Модель основана на следующих предположениях:

(1) функция цены для 2-го игрока записывается как $f_2(x,y,\xi)$, различия между предпочтениями ЛПР, представляющими 2-го игрока, описываются случайной величиной ξ с заданным распределением;

(2) критерием выбора решения 1-м игроком является математическое ожидание целевой функции $Ef_1(x, y(x,\xi))$, поэтому количество ЛПР, представляющих 2-го игрока, не влияет на выбор 1-го игрока.

В данной статье изучается математическая модель задачи, которая возникла при исследовании задачи выбора стратегии развития услуг крупной компании [12], и используются несколько другие предположения в рамках иерархической модели со случайным вторым игроком.

Опишем взаимодействие крупной компании (1-й игрок) с множеством клиентов (ЛПР), разбитых на группы (2-й игрок). Будем предполагать, что клиенты каждой группы реагируют на выбор стратегии 1-м игроком однотипно — выбирают решение (об изменении объема взаимодействия с 1-м игроком), распределение которого зависит от номера группы и стратегии 1-го игрока. Будем учитывать, что вклад в целевую функцию 1-го игрока разных клиентов неодинаков, так как у них разные объемы взаимодействия с 1-м игроком. Далее 1-го игрока будем называть “компания”, ЛПР, представляющих 2-го игрока, — “клиенты”.

Предположение 1. *Пусть выполняются следующие условия*:

(1) 1-*й игрок выбирает решения* (*стратегии*) u_i *из конечного множества допустимых альтернатив* U;

(2) ЛПР, *представляющие* 2-*го игрока, разбиты на* J *групп, однотипно реагирующих на выбор* 1-*го игрока, вклад отдельного* ЛПР *в целевую функцию характеризуется объемом* $v_{jk} > 0$, *где* $j = 1, \ldots, J$ — *номер группы,* $k = 1, \ldots, K_j$ — *номер элемента в группе*;

(3) *решение отдельного клиента описывается случайной величиной* $\eta_{jk}(u)$, *распределение которой зависит от выбранной стратегии* 1-*го игрока и номера группы* j;

(4) *случайные величины* $\eta_{jk}(u)$ *независимы*;

(5) *случайная целевая функция* 1-*го игрока представляет взвешенную сумму решений* 2-*го игрока*

$$\hat{\xi}(u) = \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K_j} v_{jk} \eta_{jk}(u); \tag{1.1}$$

(6) *критерием выбора стратегии* 1-*го игрока является квантильный критерий*

$$Q_\alpha(u) \to \max_{u \in U}, \quad \mathcal{P}\{\hat{\xi}(u) \geq Q_\alpha(u)\} \geq \alpha. \tag{1.2}$$

Полученная постановка задачи близка к игре с природой, так как случайная целевая функция 1-го игрока (1.1) зависит лишь от распределения случайных величин и выбранной им альтернативы $u \in U$.

Для выбора решений в задачах игры с природой используются критерии Вальда, Сэвиджа (минимального сожаления) и их сочетание [3]. Если заданы распределения случайных возмущений, то применяется критерий среднего значения, а при анализе финансовых рисков используется двухкритериальный подход. Выбор оптимального решения в случае нормального распределения случайной целевой функции тесно связан с решением двухкритериальной задачи: максимизации среднего значения и минимизации дисперсии.

Отметим, что задача выбора оптимальной стратегии компании с критерием (1.2) сводится к решению задачи стохастической оптимизации с квантильным критерием. Особенностью данного исследования является учет неполноты информации о дисперсии суммы, связанной с неполной информацией о весовых коэффициентах.

Выбор оптимального решения в задаче (1.2) не изменится, если перейдем к относительным величинам, т. е. разделим всю сумму на общий объем $\hat{V}$ и будем рассматривать задачу

$$q_\alpha(u) \to \max_{u\in U}, \quad \mathcal{P}\{\xi(u) \geq q_\alpha(u)\} \geq \alpha, \tag{1.3}$$

где

$$\xi(u) = \hat{V}^{-1}\hat{\xi}(u).$$

Случайную величину $\xi(u)$ можно записать в виде

$$\xi(u) = \sum_{j=1}^{J}\Big(C_j \sum_{k=1}^{K_j} w_{jk}\eta_{jk}(u)\Big), \tag{1.4}$$

где C_j — доля объема j-й группы в общем объеме $\hat{V}$, а w_{jk} — доля отдельного ЛПР в группе, V_j — объем j-й группы,

$$C_j = \frac{V_j}{\hat{V}}, \quad w_{jk} = \frac{v_{jk}}{V_j}, \quad V_j = \sum_{k=1}^{K_j} v_{jk}, \quad \hat{V} = \sum_{j=1}^{J} V_j.$$

Будем далее предполагать, что распределение ЛПР по группам (коэффициенты C_j) и общее количество клиентов в каждой группе K_j известны.

Можно рассматривать различные предположения об объемах отдельных клиентов в группе (коэффициентах w_{jk}):

- предполагаем, что все клиенты имеют одинаковый вклад в общую сумму, т. е. $w_{jk} = K_j^{-1}$ для всех k;
- 1-й игрок знает распределение объемов по клиентам во всех группах, т. е. векторы $w_j = \{w_{j1}, \dots, w_{jK_j}\}$;
- 1-й игрок не знает точнго распределения объемов внутри групп, но предполагает неравномерность распределения объемов.

Для значительного числа экономических объектов имеет место неравномерность объемов, которая описывается законом Ципра, правилом Парето (80% : 20%), правилом $A-B-C$ и другими [13–15]. Эти закономерности отражают случай, когда небольшое количество клиентов составляет значительную часть общего объема. В том числе при анализе перевозчиков грузов выявилась существенная неравномерность клиентов по объемам, самые крупные клиенты составляли до 12% общего объема перевозки по отдельным видам грузов [12].

Далее будем использовать третье предположение, так как рассматривается случай, когда количество групп невелико (не более 10), а количество клиентов в группах значительно (от 50 до 10^5). От задачи (1.3), (1.4) перейдем к следующей задаче оценки наихудшей квантили.

З а д а ч а 1. Найти оптимальное значение наихудшей квантили $\tilde{q}_\alpha$, такой что

$$\max_{u\in U} \tilde{q}_\alpha(u), \quad \tilde{q}_\alpha(u) : \min_{w_j\in W_j} \mathcal{P}\{\xi(u,w) \geq \tilde{q}_\alpha(u)\} \geq \alpha, \tag{1.5}$$

где

$$\xi(u,w)=\sum_{j=1}^{J}C_j\zeta_j(u,w_j),\quad \zeta_j(u,w_j)=\sum_{k=1}^{K_j}w_{jk}\eta_{jk}(u), \tag{1.6}$$

$\eta_{jk}(u)$ — независимые одинаково распределенные для всех $k=1,\ldots,K_j$ случайные величины с заданными параметрами распределения

$$m_j(u)=E(\eta_{jk}(u)),\quad s_j^2(u)=D(\eta_{jk}(u)), \tag{1.7}$$

$w=\{w_1,\ldots,w_J\}\in\mathbb{R}^N$, $N=K_1+\ldots+K_J$, $w_j\in W_j$, множества W_j задаются неравенствами

$$W_j=W(b_j,B_j,K_j)\triangleq\Big\{w\in\mathbb{R}^{K_j}:\ \sum_{k=1}^{K_j}w_k=1,\ b_j\le w_k\le B_j\Big\}, \tag{1.8}$$

Предполагается, что заданы постоянные

$$C_j>0,\quad C_1+\ldots+C_J=1, \tag{1.9}$$

количество элементов $K_j\in\mathbb{N}$ и ограничения $b_j>0$, $B_j>0$ также известны и удовлетворяют условию

$$0<b_j\le K_j^{-1}\le B_j<1. \tag{1.10}$$

2. Решение задачи оптимизации с квантильным критерием

Далее будем предполагать, что дополнительно к ограничению (1.10) выполняются следующие ограничения на количество элементов в группах:

(1) количество элементов в каждой группе не менее 20: $K_j\ge 20$, $j=1,\ldots,J$;

(2) максимальная доля отдельного клиента в каждой группе не превышает 20%: $B_j\le 0.2$, $j=1,\ldots,J$.

При выполнении этих условий и неравенств (1.8), (1.10) взвешенные суммы $\zeta_j(u,w_j)$, определенные равенствами (1.6), при $w_j\in W_j$ имеют приближенно нормальное распределение. Оценки выборочных значений квантили можно найти в [11, разд. 3.3].

С учетом того, что суммы $\zeta_j(u,w_j)$ имеют приближенно нормальное распределение, перейдем от задачи 1 к задаче оптимизации наихудшей квантили взвешенной суммы независимых нормально распределенных случайных величин $\eta_{jk}(u)$.

З а д а ч а 2 совпадает с задачей 1 с добавлением условия, что случайные величины $\eta_{jk}(u)$ имеют нормальное распределение.

Из свойств нормального распределения и правила вычисления дисперсии суммы независимых величин следует, что квантиль случайной величины $\xi(u)$, заданной равенствами (1.6)–(1.9), для $\alpha>0.5$ можно записать в виде

$$q_\alpha(u)=M(u)-\tau_\alpha S(u,w_j), \tag{2.1}$$

где τ_α — квантиль уровня α для стандартного нормального распределения, $M(u)$ зависит только от распределения клиентов по группам и параметров распределения реакции клиентов в каждой группе

$$M(u)=E(\xi(u))=\sum_{j=1}^{J}C_jm_j(u), \tag{2.2}$$

а дисперсия зависит еще и от распределения весов клиентов внутри групп

$$S^2(u,w_j)=D(\xi(u))=\sum_{j=1}^{J}C_j^2s_j^2(u)\sum_{k=1}^{K_j}w_{jk}^2. \tag{2.3}$$

Утверждение 1. *Наименьшее значение квантили* (1.5) *в задаче* 2 *равно*

$$\tilde{q}_\alpha(u) = \min_{w_j \in W_j} (M(u) - \tau_\alpha S(u, w_j)) = M(u) - \tau_\alpha \tilde{S}(u), \tag{2.4}$$

где $M(u)$ *определяется из равенства* (2.2),

$$\tilde{S}^2(u) = \sum_{j=1}^{J} C_j^2 s_j^2(u) d(b_j, B_j, K_j), \tag{2.5}$$

$$d(b_j, B_j, K_j) = \max_{w \in W(b_j, B_j, K_j)} \Big(\sum_{k=1}^{K_j} w_k^2 \Big). \tag{2.6}$$

Утверждение 1 следует из того, что наибольшая возможная дисперсия взвешенной суммы случайных величин $\zeta_j(u, w_j)$ для $w_j \in W_j$ и при выполнении условий (1.7)–(1.10) равна $d(b_j, B_j, K_j) s_j^2(u)$.

3. Оценка дисперсии для неравномерной по объему группы ЛПР

В настоящее время за счет использования баз данных о клиентах в некоторых случаях удается непосредственно вычислять значения $D(\xi(u_i))$ по формуле (2.3). Однако чаще есть лишь возможность оценить максимальный и минимальный объемы вклада одного клиента (ЛПР) в общую сумму, поэтому изучим свойства максимальной дисперсии для неравномерной по объему группы ЛПР.

Неравномерная группа будет характеризоваться общим количеством клиентов K и наименьшей и наибольшей долями общего объема b и B, приходящимися на одного клиента. Задача выбора оптимального по квантильному критерию решения для одной группы клиентов, состоящей из значительного числа представителей, сводится к оценке наибольшей возможной диспесии (с учетом неравномерности).

З а д а ч а 3. Вычислить максимум дисперсии случайной величины

$$\zeta(w) = \sum_{k=1}^{K} w_k \eta_k. \tag{3.1}$$

Здесь η_k — независимые нормально распределенные случайные величины с заданными моментами распределения $E(\eta_k) = m, \;\; D(\eta_k) = s^2$; вектор $w = \{w_1, \ldots, w_K\} \in \mathbb{R}^K$; множество $W(b, B, K)$ задается неравенствами

$$W(b, B, K) \triangleq \Big\{ w \in \mathbb{R}^K : \sum_{k=1}^{K} w_k = 1, \; b \le w_k \le B \Big\}; \tag{3.2}$$

числа b и B удовлеворяют условию

$$0 < b \le K^{-1} \le B < 1. \tag{3.3}$$

Так как

$$\max_{w \in W(b,B,K)} D(\zeta(w)) = s^2 \max_{w \in W(b,B,K)} \sum_{k=1}^{K} w_k^2,$$

то будем изучать свойства функции

$$d(b, B, K) = \max_{w \in W(b,B,K)} \Big(\sum_{k=1}^{K} w_k^2 \Big). \tag{3.4}$$

Лемма 1. *Если неравенства* (3.3) *не выполняются, т. е. если*

$$(b > K^{-1}) \vee (B < K^{-1}),$$

то множество $W(b, B, K)$ *пустое.*

Доказательство. Если $b > K^{-1}$, то из того, что $w_k \geq b$ для всех $k = 1, \ldots, K$, получаем

$$\sum_{k=1}^{K} w_k > Kb > 1.$$

Таким образом, уравнение и неравенства (3.2), определяющие множество $W(b, B, K)$, несовместны. Аналогично, если $B < K^{-1}$, то

$$\sum_{k=1}^{K} w_k < KB < 1.$$

Из леммы 1 следует необходимость введения условий (3.3), которым должны удовлетворять наибольшее B и наименьшее b возможные значения весов в задаче 2.

Лемма 2. *Функция* $d(b, B, K)$, *определенная соотношениями* (3.4), (3.2), *обладает следующими свойствами:*

1. $K^{-1} \leq d(b, B, K) < 1$ *для любых параметров* b, B, K, *удовлетворяющих неравенствам* (3.3).
2. *Функция* $d(b, B, K)$ *не возрастающая по* b *при* $b \in [0; K^{-1}]$ *и не убывающая по* $B \in [K^{-1}; 1]$.

Доказательство. Монотонность функции $d(b, B, K)$ по параметрам b и B следует из свойств максимума и формы ограничений.

Так как при выполнении неравенств (3.3) минимум суммы квадратов достигается при $w_k = K^{-1}$, $k = 1, \ldots, K$, то

$$d(b, B, K) = \max_{w \in W(b,B,K)} \sum_{k=1}^{K} w_k^2 \geq \min_{w \in W(b,B,K)} \sum_{k=1}^{K} w_k^2 = K^{-1}.$$

С другой стороны, $0 < w_k < 1$ и $w_1 + \ldots + w_K = 1$, следовательно, $w_1^2 + \ldots + w_K^2 < 1$.

Таким образом, лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть неравенства* (3.3) *выполняются, тогда функция* $d(b, B, K)$, *определенная соотношениями* (3.4), (3.2), *равна*

$$d(b, B, K) = \tilde{k}_1 B^2 + \tilde{k}_2 b^2 + (1 - \tilde{k}_1 B - \tilde{k}_2 b)^2, \tag{3.5}$$

где

$$\tilde{k}_1 = \operatorname{trunc}\Big(\frac{1 - bK}{B - b}\Big), \quad \tilde{k}_2 = K - \tilde{k}_1 - 1, \tag{3.6}$$

а $\operatorname{trunc}(z)$ *— наибольшее целое число, не превышающее* z.

Доказательство. Функция $F_1(w) = w_1^2 + \ldots + w_K^2$ строго выпукла, в том числе вдоль любой прямой, поэтому максимум этой функции на многограннике $W(b, B, K)$ достигается в одной из вершин. Вершины многогранника W можно разделить на два типа: лежащие на гиперплоскости $\Gamma:\ w_1 + \ldots + w_K = 1$ и не лежащие на ней.

1. Рассмотрим вершины, не лежащие на гиперплоскости Г. Их можно описать k_1 равенствами вида $w_i = B$, k_2 равенствами вида $w_i = b$, где k_1, k_2 целые, неотрицательные и удовлетворяют условиям

$$k_1 + k_2 = K, \quad Bk_1 + bk_2 \leq 1. \tag{3.7}$$

Из условий (3.7) получаем

$$k_2 = K - k_1, \quad k_1 \leq z_1 = \frac{1 - Kb}{B - b}.$$

Функция $F_1(w)$ на этих вершинах равна $F_1(w) = B^2 k_1 + b^2(K - k_1)$. Параметр k_1 находим как решение задачи целочисленной оптимизации

$$\max_{k_1 \in \mathbb{N}, k_1 \leq z_1} F_1(w) = B^2 k_1 + b^2(K - k_1).$$

Отметим, что из условий (3.3) следует, что $z_1 \geq 0$. Таким образом, максимум функции $F_1(w)$ на вершинах первого типа достигается при $k_1 = \tilde{k}_1 = \mathrm{trunc}(z_1)$ и равен $F_1(\tilde{w}) = B^2\tilde{k}_1 + b^2(K - \tilde{k}_1)$.

2. Рассмотрим вершины второго типа, которые лежат на гиперплоскости $w_1 + \ldots + w_K = 1$. Они удовлетволяют k_1 равенствам вида $w_i = B$ и $k_2 = K - k_1 - 1$ равенствам вида $w_i = b$. Это соответствует случаю, когда k_1 клиентов имеют максимальный вес, k_2 клиентов — минимальный вес, и один клиент имеет ненулевой вес z_2, такой что $b < z_2 < B$ и $Bk_1 + bk_2 + z_2 = 1$.

Получаем

$$z_2 = 1 - Bk_1 - bk_2 = 1 - Bk_1 - b(K - k_1 - 1). \tag{3.8}$$

Определим ограничения на целое неотрицательное число k_1 в этом случае. Так как вершины принадлежат множеству $W(b, B, K)$, выполняются неравенства $b \leq z_2 \leq B$. Получаем неравенства $b \leq 1 - bK + b - (B - b)k_1 \leq B$, которые можно переписать в виде

$$z_1 - 1 \leq k_1 \leq z_1, \quad z_1 = \frac{1 - bK}{B - b}.$$

Функция $F_1(w)$ на вершинах второго типа равна $F_1(\hat{w}) = B^2k_1 + b^2(K - k_1 - 1) + z_2^2$ и возрастает по k_1. Таким образом, максимум среди всех вершин второго рода достигается при $k_1 = \tilde{k}_1 = \mathrm{trunc}(z_1)$, а значение функции $F_1(w)$ на этих вершинах — $F_1(\hat{w}) = B^2\tilde{k}_1 + b^2(K - \tilde{k}_1 - 1) + z_2^2$, где z_2 определяется равенством (3.8). Так как $z_2 \geq b$, то значение $F_1(\hat{w}) \geq F_1(\tilde{w})$. Таким образом, максимальное значение функции $F_1(w)$ достигается на вершинах второго рода и равно $F_1(\hat{w})$. Значит, максимум функции $F_1(w)$ определяется равенствами (3.5), (3.6).

Теорема доказана.

Из теоремы 1 получаем

Следствие 1. *Функция наихудшей квантили случайной величины $\zeta(w)$, $w \in W$, определяемой равенством* (3.1) *при ограничениях* (3.2), *равна*

$$\tilde{q}_\alpha = m - \tau_\alpha s \big(\tilde{k}_1 B^2 + \tilde{k}_2 b^2 + (1 - \tilde{k}_1 B - \tilde{k}_2 b)^2\big)^{0,5}, \tag{3.9}$$

где $\tilde{k}_1$ и $\tilde{k}_2$ определяются из соотношений (3.6).

З а м е ч а н и е 1. Свойства функции $d(b, B, K)$, сформулированные в лемме 2, можно использовать для получения оценок наихудшей квантили $\tilde{q}_\alpha$.

Рассмотрим модельный пример выбора оптимальной стратегии компании для одной группы клиентов.

П р и м е р 1. Компания рассматривает три возможные стратегии $\{u_1, u_2, u_3\}$ по развитию бизнеса, доход компании описывется формулой (1.1), где $\eta_k(u)$ — реакция k-го клиента на стратегию u — описывает изменение объема использования сервисов компании в a раз

($a > 1$ — увеличение объема, $a < 1$ — уменьшение). Все клиенты рассматриваются как однотипно реагирующие на стратегии, т. е. принадлежат одной группе, взаимодействие клиентов при выборе решений не учитывается. Оценки средних ожидаемых значений $m_i = E(\xi(u_i))$ и средних квадратичных отклонений $s_i = D^{0.5}(\xi(u_i))$ реакции клиентов на каждую стратегию равны $m_1 = 1.07$, $s_1 = 0.01$, $m_2 = 1.1$, $s_2 = 0.04$, $m_3 = 1.13$, $s_3 = 0.1$. Общее количество клиентов составляет 100, учитываются клиенты с долей не менее 0.2%, самый крупный клиент занимает не более 15% общего объема.

Требуется выбрать стратегию u_i, оптимальную по квантильному критерию (1.2) с вероятностью $\alpha = 0.95$, и оценить гарантированное с этой вероятностью увеличение объемов.

Для данного примера $J = 1$, $K = 100$, $b = 0.002$, $B = 0.15$, условие (3.3) выполняется. Находим оценку наибольшего возможного среднего квадратичного отклонения

$$\tilde{k}_1 = \frac{1 - 0.1}{0.1 - 0.002} = 5, \quad z_2 = 0.062, \quad d(b, B, K) = d(0.002, 0.15, 100) = 0.117.$$

Значения гарантированного с вероятностью $\alpha = 0.95$ результата (наихудшей квантили) описываются формулой (3.9) и равны

$$\tilde{q}_\alpha(u_i) = m(u_i) - \tau_{0.95} s(u_i)[d(b, B, K)]^{0.5} = m(u_i) - 0.563 \cdot s(u_i).$$

Задача квантильной оптимизации в условиях неполной информации свелась к выбору максимума линейных функций

$$\max_i \tilde{q}_\alpha(u_i) = \max\{m_i - \beta_\alpha s_i\}.$$

При $\beta_\alpha = 0.563$ максимум достигается на 2-й стратегии. Выбор u_2 гарантирует, что с вероятностью $\alpha = 0.95$ в результате внедрения этой стратегии целевая функция компании (увеличение объема использования услуг) составит не менее $\tilde{q}_{0.95}(u_2) = 1.077$. При выборе другой вероятности получим другой результат, например, для $\alpha = 0.9$ оптимальной стратегией является u_3, что гарантирует результат $\tilde{q}_{0.9}(u_3) = 1.086$.

4. Решение параметрической задачи квантильной оптимизации

Для выбора оптимальной по квантильному критерию альтернативы (1.3) требуется заранее зафиксировать уровень вероятности α. Выбор вероятности, как правило, не очевиден для ЛПР (1-го игрока), поэтому для принятия решения о выборе стратегии найдем оптимальное решение u_α задачи как функцию от параметра $\alpha \in [\alpha_0; 1)$ и вычислим значение оптимальной квантили. В рассматриваемом случае нормального распределения целевой функции $\xi(u)$ параметрическая задача квантильной оптимизации (2.1) и задача оптимизации наихудшей квантили (2.4) сводятся к решению параметрической задачи линейной оптимизации

$$f(x, t) = m^T x - t s^T x \to \max_{x \in X}, \tag{4.1}$$

где $t \in [0; +\infty)$ — параметр, $m = \{m_1, \dots, m_n\}$, $s = \{s_1, \dots, s_n\}$, $s_i > 0$, $i = 1, \dots, n$,

$$X = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon x_i \in \{0; 1\},\ \sum_{i=1}^n x_i = 1\Big\}. \tag{4.2}$$

Обозначим через $X(t)$ множество оптимальных решений задачи (4.1), (4.2) при фиксированном значении параметра t:

$$X(t) = Arg \max_{x \in X} f(x, t).$$

Множество допустимых решений X совпадает с множеством базисных векторов $\{e_1, \dots, e_n\}$ пространства $\mathbb{R}^n$. Оптимальность j-й альтернативы для фиксированного значения параметра t можно записать как $e_j \in X(t)$.

Из условия оптимальности по Парето следует, что множество оптимальных решений в параметрической задаче (4.1), (4.2) является подмножеством множества **E** недоминируемых решений бикритериальной задачи

$$\begin{aligned} M(x) &= m_1x_1 + \ldots + m_nx_n \to \max_{x\in X}, \\ S(x) &= s_1x_1 + \ldots + s_nx_n \to \min_{x\in X}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Задача (4.1), (4.2) заменой $c = -m$ сводится к задаче параметрической минимизации функции $g(x,t) = c^Tx + ts^Tx$ при тех же ограничениях, свойства решений которой исследовались в работе [16].

Теорема 2 [16, свойство 2 и следствие 1]. *Вектор e_k является решением параметрической задачи (4.1), (4.2) при $t = \tau$ тогда и только тогда, когда $e_k \in \mathbf{E}$ и*

$$L(k) \le \tau \le R(k), \tag{4.4}$$

где

$$L(k) = \max_{s_i>s_k, i=\overline{1,n}} \left\{0, \frac{m_i - m_k}{s_i - s_k}\right\}, \quad R(k) = \min_{s_i<s_k, i=\overline{1,n}} \left\{\frac{m_i - m_k}{s_i - s_k}, +\infty\right\}, \tag{4.5}$$

причем, если $L(k) < \tau < R(k)$, то это решение единственное.

На первом этапе решения задачи отбросим все доминируемые альтернативы и упорядочим множество альтернатив X по возрастанию первой компоненты. Далее без ограничения общности будем считать, что множество альтернатив не содержит доминируемых решений в смысле критериев (4.3), т. е. $\mathbf{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$, и упорядочено по возрастанию первой компоненты.

Предположение 2. *Выполняются следующие неравенства:*

$$m_1 < m_2 < \ldots < m_n, \quad s_1 < s_2 < \ldots < s_n. \tag{4.6}$$

Так как выполняются неравенства (4.6), то значения $L(k)$ и $R(k)$ можно записать в виде

$$L(k) = \max_{i>k}\{0, a_{ki}\}, \quad R(k) = \min_{i<k}\{a_{ki}, +\infty\}, \quad a_{ki} = \frac{m_k - m_i}{s_k - s_i}, \quad i \ne k. \tag{4.7}$$

Отметим, что $a_{ki} = a_{ik}$. Обозначим множество индексов, на которых достигаются максимум и минимум в (4.7) через $J(k)$ и $I(k)$ соответственно

$$J(k) = Arg \max_{i>k}\{a_{ki}\}, \quad I(k) = Arg \min_{i<k}\{a_{ki}\}. \tag{4.8}$$

Из теоремы 2 получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть выполняются неравенства (4.6), тогда множество $X(t)$ оптимальных решений параметрической задачи (4.1), (4.2) удовлетворяет следующим условиям;*

(1) *если для некоторого $k \in \{1, \ldots, n\}$ выполняется неравенство $L(k) < R(k)$, то для всех $t \in (L(k); R(k))$, где $L(k)$ и $R(k)$ определены равенствами (4.7), множество оптимальных решений $X(t)$ параметрической задачи (4.1) состоит из одной альтернативы e_k;*
(2) *при $t = L(k) > 0$ множество $X(t)$ состоит из альтернативы e_k и тех альтернатив $e_j \in X$, на которых достигается максимум в (4.7), т. е. $j \in I(k)$;*
(3) *при $t = R(k) < +\infty$ множество $X(t)$ состоит из альтернативы e_k и тех альтернатив $e_i \in X$, на которых достигается минимум в (4.7), т. е. $i \in I(k)$;*
(4) *если $L(k) > R(k)$, то альтернатива e_k не является оптимальной в параметрической задаче (4.1) ни при каком значении $t \ge 0$.*

На основе теоремы 3 построим простой алгоритм нахождения решений $X(t)$, $t \in [0, +\infty)$, задачи параметрической оптимизации (4.1), (4.2). Будем считать, что предположение 2 выполнено.

А л г о р и т м 1.

1-й ш а г. При $t = 0$ целевая функция $f(x,t) = m^T x$, и решением очевидно является альтернатива, соответствующая наибольшему значению m_i, т. е. $X(0) = e_n$, и первым оптимальным номером решения будет $J_1 = n$.

Определим интервал оптимальности альтернативы e_n по формуле (4.7), т. е. найдем

$$t_1 = R(n) = \min_{i<n} \{a_{ni}, +\infty\}. \tag{4.9}$$

Далее вычислим номер $J_2 = I(n)$ по формуле (4.8).

k-й ш а г. Пусть на предыдущем шаге был определен номер оптимальной альтернативы J_k и начало интервала ее оптимальности $t_{k-1} = L(J_k)$. Найдем

$$t_k = R(J_k) = \min_{i<J_k} \{a_{J_k,i}, +\infty\}.$$

Если $R(J_k) = +\infty$, то процесс закончен, и при всех $t \geq J_k$ оптимальна альтернатива e_{J_k}.
Если $R(J_k) < +\infty$, то находим номер $J_{k+1} = I(J_k)$ по формуле (4.8).

П р и м е р 2. Пусть имеется $n = 5$ альтернатив с параметрами

$$m = \{1; 2; 2.5; 3; 7\}, \quad s = \{0.2; 0.25; 0.3; 0.5; 1\}.$$

Альтернативы уже упорядочены по возрастанию и доминируемых среди них нет (выполняется условие (4.6)). Построим решение параметрической задачи (4.1), (4.2).

Найдем значения a_{ij} по формуле (4.7) и получим матрицу

$$\{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 & 6.667 & 7.5 \\ 20 & 0 & 10 & 4 & 6.667 \\ 15 & 10 & 0 & 2.5 & 6.429 \\ 6.667 & 4 & 2.5 & 0 & 8 \\ 7.5 & 6.667 & 6.429 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Берем $t = 0$, получаем $X(0) = e_5$. По формуле (4.9) вычисляем границу интервала, на котором 5-я альтернатива оптимальна: $t_1 = R(5) = \min_{i<5}\{a_{5i}, +\infty\} = \min\{7.5; 6.667; 6.429; 8\} = 6.249$. Минимальное значение достигается при $J_1 = 3$, значит, при $t > t_1$ оптимальным решением будет e_3.

(2) Аналогично найдем правую границу интервала оптимальности e_3: $t_2 = R(3) = \min_{i<3}\{a_{3i}\} = \min\{15; 10\} = 10$. Минимальное значение достигается при $J_2 = 2$, значит, при $t > t_2$ оптимальным решением будет e_2.

(3) Правая граница интервала оптимальности e_2 равна $t_3 = R(2) = \min_{i<2}\{a_{2i}\} = 20$.

Получили ответ

$$X(t) = \begin{cases} e_5 & \text{при } 0 \leq t < 6.249, \\ e_5 \cup e_3 & \text{при } t = 6.249, \\ e_3 & \text{при } 6.249 < t < 10, \\ e_3 \cup e_2 & \text{при } t = 10, \\ e_2 & \text{при } 10 < t < 20, \\ e_2 \cup e_1 & \text{при } t = 20, \\ e_1 & \text{при } t > 20. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е 2. Множества индексов $I(k)$ и $J(k)$ в большинстве задач состоят из одного значения, однако возможно, что при некотором значении t максимум в (4.1), (4.2) достигается более чем на двух альтернативах.

П р и м е р 3. Изменим немного данные примера 2 и рассмотрим 5 альтернатив с параметрами $m = \{1; 2; 2,5; 3; 7\}$, $s = \{0.15; 0.25; 0.3; 0.5; 1\}$, т. е. вектор m не изменился, а в векторе s изменилась только 1-я координата. В этом случае в матрице $\{a_{ij}\}$ изменятся 1-я строка и 1-й столбец

$$\{t_{ij}\} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 10 & 5.714 & 7.059 \\ 10 & 0 & 10 & 4 & 6.667 \\ 10 & 10 & 0 & 2.5 & 6.429 \\ 5.714 & 4 & 2.5 & 0 & 8 \\ 7.059 & 6.667 & 6.429 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

На втором шаге при $t = 10$ оптимальное значение в параметрической задаче (4.1), (4.2), достигается сразу на двух альтернативах e_1 и e_2, причем альтернатива e_2 оптимальна только при одном значении параметра, так как $L(2) = R(2) = 10$. Получаем оптимальное решение параметрической задачи

$$X(t) = \begin{cases} e_5 & \text{при } 0 \le t < 6.249, \\ e_5 \cup e_3 & \text{при } t = 6.249, \\ e_3 & \text{при } 6.249 < t < 10, \\ e_3 \cup e_2 \cup e_1 & \text{при } t = 10, \\ e_1 & \text{при } t > 10. \end{cases}$$

П р и м е р 4. Рассмотрим задачу выбора оптимальной стратегии для компании. Предполагаем, что услугами компании пользуются клиенты трех различных типов, которые составляют 25%, 35% и 40% общего объема соответственно. Клиенты разных групп реагируют на возможные стратегии развития бизнеса по-разному. Их реакции описываются случайными величинами $\eta_j(u_i)$, параметры которых $(m_j(u_i), s_j(u_i))$, где j — номер группы, i — номер стратегии компании, приведены в табл. 1. Количество клиентов каждой группе, минимальный возможный и максимальный возможный объемы (в долях от объема группы) представлены в табл. 2.

Т а б л и ц а 1

стратегия	$m_1(u_i), s_1(u_i)$	$m_2(u_i), s_2(u_i)$	$m_3(u_i), s_3(u_i)$	$M(u_i), \tilde{S}(u_i)$
u_1	$(1.05, 0.1)$	$(1.15, 0.04)$	$(1.12, 0.12)$	$(1.113, 0.075)$
u_2	$(1.2, 0.1)$	$(1.07, 0.08)$	$(1.1, 0.14)$	$(1.115, 0.068)$
u_3	$(0.95, 0.15)$	$(1.15, 0.09)$	$(1.2, 0.11)$	$(1.120, 0.087)$

Т а б л и ц а 2

параметры	1-я группа	2-я группа	3-я группа
K_j	100	250	500
b_j	0.001	0.001	0.0001
B_j	0.1	0.05	0.05
$d(K_j, b_j, b_j)$	0.090	0.038	0.048

Используя утверждение 1, найдем функцию наихудшей квантили при $\alpha \in [0.5; 1)$ по формулам (2.4)–(2.6). Отметим, что условия (1.10) выполняются для всех групп. Получаем

$$\tilde{q}_\alpha(u_i) = \sum_{j=1}^{3} C_j m_j(u_i) - \tau_\alpha \sum_{j=1}^{3} C_j \sqrt{d_j} s_j(u_i),$$

где $C = \{0.25; 0.35; 0.4\}$, значения функции $d_j = d(K_j, b_j, b_j)$ рассчитываются по формулам (3.5), (3.6) и приведены в последней строке табл. 2 (все вычисления проводились с использованием MathCad). Получаем задачу параметрической оптимизации

$$\min_i \tilde{q}_\alpha(u_i) = \min_i(M_i - tS_i), \tag{4.10}$$

где $t = t(\alpha) = \tau_\alpha$, $M_i = M(u_i)$ — ожидаемая прибыль компании, $S_i = \tilde{S}(u_i)$ — наибольшее возможное среднее квадратичное отклонение прибыли для стратегии u_i (рассчитанные значения приведены в правом столбце табл. 1). Среди представленных альтернатив нет доминируемых по двум критериям (максимум среднего ожидаемого значения и минимум оценки дисперсии). Построим решение задачи квантильной оптимизации для значений вероятности $\alpha \in [0.5; 1)$ с помощью полученного в разд. 4 алгоритма 1 решения параметрической задачи. Решение задачи (4.10) имеет вид

$$u^*(\alpha) = \arg\min_u \tilde{q}_\alpha(u_i) = \begin{cases} u_3 & \text{при } 0.5 \le \alpha < 0.867, \\ u_1 \cup u_3 & \text{при } \alpha = 0.867, \\ u_1 & \text{при } \alpha > 0.867. \end{cases}$$

Таким образом, в рассматриваемых условиях стратегия u_2 не является оптимальной по квантильному критерию ни при каких значениях вероятности, выбор между стратегиями u_1 и u_3 зависит от склонности 1-го игрока к риску. Для крупной компании предпочтительны решения, гарантированные с вероятностью более 0.9, поэтому предпочтительнее стратегия u_1. Для поддержки принятия решения можно также проанализировать графики оценки риска (VaR_α), т. е. гарантированных значений квантили $\tilde{q}_\alpha(u_1)$ и $\tilde{q}_\alpha(u_3)$.

Заключение

В статье рассмотрена математическия модель выбора решений для крупной компаниии в условиях взаимодействия со значительным числом клиентов, разбитых на неоднородные по объему группы. Реакция клиентов на стратегии компании описывается независимыми случайными величинами, распределение которых зависит от выбранной стратегии и номера группы. В качестве критерия используется наихудшая квантиль распределения целевой функции, для нахождения которой получены оценки дисперсии отклика группы клиентов при естественных предположениях о неравномерности объемов и построен алгоритм нахождения решения параметрической задачи. Предложенная математическая модель может использоваться для анализа широкого круга задач выбора стратегий развития бизнеса, связанного с обслуживанием значительного числа потребителей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Чернов В.Г.** Выбор решения в конфликтной ситуации с нечеткими типами участников// Искусственный интеллект и принятие решений. 2022. № 4, С. 24–35. https://doi.org/10.3103/S0147688223060047
2. **Иванов С.В., Мерзликина С.Д.** Поиск равновесий по Нэшу в биматричных играх с вероятностными и квантильными функциями выигрышей // Автоматика и телемеханика. 2021. № 12. С. 105–124. https://doi.org/10.31857/S0005231021120072
3. **Лабскер Л.Г.** Свойство синтезирования критерия Вальда — Сэвиджа и его экономическое приложение // Экономика и математические методы. 2019. Т. 55, № 4. С. 89–103. https://doi.org/10.31857/S042473880006775-1
4. **Тимофеева Г.А., Завалищин Д.С.** Игра со случайным вторым игроком и ее приложение к задаче о выборе цены проезда // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. гос. ун-та. 2021. Т. 57. С. 170–180. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2021-57-08
5. **Ватник П.А.** Теория риска. СПб.: СПбГИЭУ, 2009. 156 с. ISBN: 978-5-88996-914-3 .

6. **Dentcheva D., Ruszczyński A.** Risk-averse optimization and control. Cham: Springer, 2024. 502 p. (Springer Series in Operations Research and Financial Engineering.) https://doi.org/10.1007/978-3-031-57988-2
7. **Горелик В.А., Золотова Т.В.** Методы нахождения оптимальных смешанных стратегий в матричных играх с коррелированными случайными выигрышами // Чебышев. сб. 2023. Т. 24, №. 4. С. 33–47. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2023-24-4-33-47
8. **Rockafellar R.T., Uryasev S.** Conditional value-at-risk for general loss distributions // J. Bank. Finance. 2002. Vol. 26, no. 7. P. 1443–1471. https://doi.org/10.2139/ssrn.267256
9. **Pathy S.R., Rahimian H.** Value of risk aversion in perishable products supply chain management // Comput. Optim. Appl. 2024. Vol. 89. P. 517–552. https://doi.org/10.1007/s10589-024-00593-5
10. **Иванов С.В., Кибзун А.И., Акмаева В.Н.** Параметрический алгоритм поиска гарантирующего решения задачи квантильной оптимизации // Автоматика и телемеханикаю 2023. № 8. С. 73–87. https://doi.org/10.31857/S0005231023080056
11. **Кан Ю.С., Кибзун А.И.** Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. Москва: Физматлит, 2009. 372 с. ISBN 978-5-9221-1148-5 .
12. **Тимофеева Г.А., Хазимуллин А.Д.** Вероятностное моделирование поведения грузоотправителей при оценке программ лояльности на железнодорожном транспорте // Транспорт Урала. 2023. Т. 79. № 4. С. 34–40. https://doi.org/10.20291/1815-9400-2023-4-34-40
13. **Бродецкий Г.Л.** Моделирование логистических систем: оптимальные решения в условиях риска СПб.: Вершина, 2006. 376 с. ISBN 5-9626-0086-X .
14. **Растворцева С.Н., Манаева И.В.** Закон Ципфа в городах России: анализ новых показателей // Экономика региона. 2020. Т. 16. № 3. С. 935–947. https://doi.org/10.17059/ekon.reg.2020-3-20
15. **Ultsch Alfred, Jörn Lötsch** Computed ABC analysis for rational selection of most informative variables in multivariate data// PLOS One. 2015. Vol. 10(6): e0129767. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0129767
16. **Timofeeva G.** Investigation of mathematical model of passenger preferences// AIP Conf. Proc. 2019. Vol. 2172. Art. no. 080001. 8 p. https://doi.org/10.1063/1.5133559

Поступила 20.02.2025
После доработки 2.04.2025
Принята к публикации 7.04.2025

Тимофеева Галина Адольфовна
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Уральский государственный университет путей сообщения;
профессор
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: gtimofeeva@usurt.ru

REFERENCES

1. Chernov V.G. Decision–making in a conflict situation with fuzzy types of participants. *Sci. Tech. Inf. Proc.*, 2023, vol. 50, no. 6, pp. 534–542. https://doi.org/10.3103/S0147688223060047
2. Ivanov S.V., Merzlikina S.D. Search for Nash equilibria in bimatrix games with probability and quantile payoff functions. *Autom. Remote Control*, 2021, vol. 82, no. 12, pp. 2125–2142. https://doi.org/10.1134/S0005117921120055
3. Labsker L.G. The property of synthesizing the Wald–Savage criterion and its economic application. *Econom. Math. Methods*, 2019, vol. 55, no. 4, pp. 89–103 (in Russian). https://doi.org/10.31857/S042473880006775-1
4. Timofeeva G.A., Zavalishchin D.S., Game with a random second player and its application to the problem of optimal fare choice. *Izv. IMI UdGU*, 2021, vol. 57, pp. 170–180 (in Russian). https://doi.org/10.35634/2226-3594-2021-57-08
5. Vatnik P.A. *Teoriya riska* [Risk theory]. Sankt Peterburg, SPbGIEU Publ., 2009, 156 p. ISBN: 978-5-88996-914-3 .
6. Dentcheva D., Ruszczyński A. *Risk-averse optimization and control.* Cham, Springer, 2024, 451 p. https://doi.org/10.1007/978-3-031-57988-2

7. Gorelik V.A., Zolotova T.V. Methods for determining optimal mixed strategies in matrix games with correlated random payoffs. *Chebyshevskii Sb.*, 2023, vol. 24, no. 4, pp. 33–47 (in Russian).
8. Rockafellar R.T., Uryasev S. Conditional value-at-risk for general loss distributions. *J. Bank. Finance*, 2002, vol. 26. no. 7, pp. 1443–1471. https://doi.org/10.2139/ssrn.267256
9. Pathy S.R., Rahimian H. Value of risk aversion in perishable products supply chain management. *Comput. Optim. Appl.*, 2024, vol. 89, pp. 517–552. https://doi.org/10.1007/s10589-024-00593-5
10. Ivanov S.V., Kibzun A.I., Akmaeva V.N. Parametric algorithm for finding a guaranteed solution to a quantile optimization problem. *Autom. Remote Control*, 2023, vol. 84, no. 8, pp. 947–957.
11. Kan Yu.S., Kibzun A.I. *Stochastic programming problems with probability and quantile functions*, 1st edt. NY, Wiley, 1996, 316 p. ISBN: 100471958158 . Translated to Russian under the title *Zadachi stokhasticheskogo programmirovaniya s veroyatnostnymi kriteriyami*, Moskva, Fizmatlit Publ., 2009, 371 p. ISBN: 978-5-9221-1148-5 .
12. Timofeeva G.A., Khazimullin A.D. Probabilistic modeling of shipper behavior when assessing loyalty programs on railway transport. *Transport Urala*, 2023, vol. 79, no. 4, pp. 34–40 (in Russian). https://doi.org/10.20291/1815-9400-2023-4-34-40
13. Brodetsky G.L. *Modelirovaniye logisticheskikh sistem: optimal'nyye resheniya v usloviyakh riska* [Modeling of logistics systems: optimal solutions under risk conditions]. Sankt Petersburg, Vershina Publ., 2006, 374 p. ISBN: 5-9626-0086-X .
14. Rastvortseva S.N., Manaeva I.V. Zipf's law in Russian cities: analysis of new indicators. *Ekonomika regiona*, 2020, vol. 16, no. 3, pp. 935–947 (in Russian).
15. Ultsch A., Lötsch J. Computed ABC analysis for rational selection of most informative variables in multivariate data. *PLOS One*, 2015, vol. 10(6): e0129767, 15 p. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0129767
16. Timofeeva G. Investigation of mathematical model of passenger preferences. In: *Proc. 45th Inter. Conf. on Application of Mathematics in Engineering and Economics* (*AMEE'19*), Sozopol, Bulgaria, 2019, vol. 2172, no. 1, art. no. 080001. https://doi.org/10.1063/1.5133559

Received February 20, 2025
Revised April 2, 2025
Accepted April 7, 2025

Galina Adol'fovna Timofeeva, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Ural State University of Railway Transport, Yekaterinburg, 620034 Russia; Prof., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: gtimofeeva@usurt.ru .

Cite this article as: G. A. Timofeeva. Choosing a strategy based on the maximin quantile criterion in a game of a company with several groups of clients. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 2, p. 229–243.