ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 31 № 2 2025

УДК 517.977

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ХАЙЕРСУ — УЛАМУ — РАССИАСУ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ПРОИЗВЕДЕНИЯ РАЗРЫВНЫХ И ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ И ЗАПАЗДЫВАНИЕ

А. Н. Сесекин, А. Д. Кандрина, Н. В. Гредасова

В статье рассматривается свойство устойчивости по Хайерсу — Уламу — Рассиасу для нелинейных систем дифференциальных уравнений с обобщенным воздействием в правой части. В связи с тем, что у рассматриваемых систем правая часть неограничена, стандартное определение рассматриваемого свойства устойчивости не может быть использовано. Приведена формализация понятия устойчивости по Хайерсу — Уламу — Рассиасу для нелинейных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием и разрывными траекториями. Получены достаточные условия, обеспечивающие такую устойчивость для нелинейной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием и обобщенным воздействием в правой части.

Ключевые слова: устойчивость по Хайерсу — Уламу — Рассиасу, обобщенные воздействия, дифференциальные уравнения, разрывные траектории.

A. N. Sesekin, A. D. Kandrina, N. V. Gredasova. On the Hyers–Ulam–Rassias stability of nonlinear differential equations containing products of discontinuous and generalized functions and delays.

The article considers the Hyers–Ulam–Rassias stability property for nonlinear systems of differential equations with a generalized effect on the right-hand side. Since the right-hand side of the systems under consideration is unbounded, the standard definition of the stability property under consideration cannot be used. The formalization of the Hyers–Ulam–Rassias stability concept for nonlinear systems of differential equations with delay and discontinuous trajectories is given. Sufficient conditions are obtained that ensure such stability for a nonlinear system of differential equations with delay and a generalized effect on the right-hand side.

Keywords: Hyers–Ulam–Rassias stability, generalized action, differential equations, discontinuous trajectories.

MSC: 34D20, 34K20

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-2-205-214

1. Введение

В 1940 г., выступая на семинаре в университете Висконсина, С. М. Улам поставил вопрос: когда существует аддитивное отображение вблизи приближенного аддитивного отображения? Позже эти соображения были приведены в [1]. В 1941 г. Д. Х. Хайерс дал положительный ответ на вопрос С. М. Улама для аддитивных функций, определенных на банаховых пространствах (см. [2]). Так появилось понятие устойчивости по Хайерсу — Уламу. В [3] Т. М. Рассиас расширил понятие устойчивости по Хайерсу — Уламу. В результате было сформулировано понятие устойчивости по Хайерсу — Уламу — Рассиасу. С. Алсина и Р. Гер [4] были первыми исследователями, которые применили понятие устойчивости по Хайерсу — Уламу к дифференциальным уравнениям. В статье [5] можно найти определения устойчивости по Хайетсу — Уламу и Хайерсу — Уламу — Рассиасу для дифференциальных уравнений. При исследовании свойства Улам-устойчивости часто используется техника оценок решений интегральных неравенств. Кроме того, используются теоремы о неподвижной точке и о точках совпадений многозначных отображений [6; 7]. Заметим, что сейчас вопросы Улам-устойчивости широко изучаются для различных типов систем дифференциальных уравнений. Для систем с запаздыванием эти вопросы рассматривались, в частности, в [8].

В этой статье мы рассматриваем вопрос об устойчивости по Хайерсу — Уламу — Рассиасу для нелинейных систем дифференциальных уравнений с разрывными траекториями и запаздыванием. Решениями дифференциальных уравнений являются функции ограниченной вариации. Таким образом, статья содержит обобщение результатов работы [9] на нелинейные дифференциальные уравнения с запаздыванием и обобщенным воздействием — обобщенной производной функции ограниченной вариации в правой части. Заметим, что частично эта тематика была отражена в докладе на конференции “Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры (SCDG2024)” [10]. В настоящей статье приводится доказательство этого результата.

Свойство устойчивости по Хайерсу — Уламу — Рассиасу для дифференциальных уравнений с абсолютно непрерывными траекториями и с запаздыванием рассматривалось, например, в [8]. Особенностью данной работы является то, что правая часть дифференциального уравнения содержит обобщенные воздействия — обобщенные производные функций ограниченной вариации. Понятие решения строится с помощью замыкания множества гладких аппроксимаций решений в пространстве функций ограниченной вариации [11]. Устойчивость по Хайерсу — Уламу для импульсных систем в формализации, предложенной А. М. Самойленко и Н. А. Перестюком (см. [12]), рассматривалась, например, в [13].

Устойчивость по Хайерсу — Уламу — Рассиасу определяется следующим образом (см., например, [8]).

О п р е д е л е н и е 1. Дифференциальное уравнение

$$\dot{x}\,(t) = f\,(t, x\,(t)\,, x(t-\tau)) \tag{1.1}$$

называется устойчивым по Хайерсу — Уламу — Рассиасу на $[t_0-\tau, \vartheta]$ относительно неубывающей положительной функции $\varphi(t)$, если существует число $c_f > 0$, такое, что $\forall\ \varepsilon > 0$ и каждого решения неравенства

$$\left| y^{'}(t) - f\,(t, y\,(t)\,, y(t-\tau)) \right| \le \varepsilon\varphi(t), \qquad t \in [t_0, \vartheta] \tag{1.2}$$

существует решение $x(t)$ уравнения (1.1), которое удовлетворяет неравенству

$$|y\,(t) - x(t)| \le c_f \varepsilon\varphi(t) \qquad t \in [t_0-\tau, \vartheta].$$

Здесь $x(t) = \omega(t)$ для $t \in [t_0-\tau, t_0]$.

Определение 1 не применимо к дифференциальным уравнениям, рассматриваемым в настоящей статье. В связи с тем, что решения рассматриваемых в статье уравнений являются функциями ограниченной вариации, в правой части уравнения будет содержаться обобщенная производная функции ограниченной вариации, и неравенство (1.2) не будет иметь смысла. В связи с этим требуется уточнение понятия устойчивости по Хайерсу — Уламу — Рассиасу.

2. Устойчивость по Хайерсу — Уламу — Рассиасу нелинейных систем дифференциальных уравнений при аддитивно входящем обобщенном воздействии

Сначала рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)) + Q\dot{v}(t), \quad x(t) = \omega(t) \quad t \in [t_0-\tau, t_0]. \tag{2.1}$$

Здесь $f(t, x, y)$ — n-мерная вектор-функция, непрерывная по t на $[t_0, \vartheta]$, удовлетворяет условию Липшица

$$|f(t, x^1, y^1) - f(t, x^2, y^2)| \le L(|x^1 - y^1| + |x^2 - y^2|) \tag{2.2}$$

и, кроме того, — неравенству
$$|f(t,x,y)| \le \chi(1+|x|); \tag{2.3}$$
Q — $n\times m$-постоянная матрица; $v(t)$ — абсолютно непрерывная m-мерная вектор-функция (для определенности полагаем $v(t_0)=0$); $\tau>0$ — постоянное запаздывание; $\omega(t)$ — начальная функция, заданная на $[t_0-\tau,\, t_0]$.

При сделанных предположениях существует единственное абсолютно непрерывное решение уравнения (2.1) (см. монографию [14]). Если же $v(t)$ есть функция ограниченной вариации, то производную в (2.1) следует понимать в обобщенном смысле. В этом случае под решением уравнения (2.1), как и в статье [11], будем понимать поточечный предел последовательности абсолютно непрерывных решений уравнения (2.1) $x_k(t)$, порожденной последовательностью абсолютно непрерывных функций $v_k(t)$, сходящихся поточечно к $v(t)$, если предел последовательности $x_k(t)$ не зависит от выбора последовательности $v_k(t)$. Такой подход к определению решения, как отмечалось в книге [15], является естественным с точки зрения теории управления.

Нетрудно доказать, используя схему доказательства из работы [11], что при сделанных предположениях будет существовать единственное решение уравнения (2.1) в определенном выше смысле, которое будет удовлетворять уравнению
$$x(t)=\omega(t_0)+\int_{t_0}^{t} f(\xi,x(\xi),x(\xi-\tau))\,d\xi+Qv(t), \quad x(t)=\omega(t), \quad t\in[t_0-\tau,t_0]. \tag{2.4}$$

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что дифференциальное уравнение (2.1) устойчиво по Хайерсу — Уламу — Рассиасу, если найдутся такое число $c_f>0$ и определенная на $[t_0-\tau,\vartheta]$ неубывающая функция $\varphi(t)>0$, что для любого $\varepsilon>0$ и каждого решения неравенства
$$\Big|y(t)-\omega(t_0)-\int_{t_0}^{t} f(\xi,y(\xi),y(\xi-\tau))\,d\xi-Qv(t)\Big| \le \varepsilon\varphi(t), \quad t\in[t_0,\vartheta] \tag{2.5}$$
существует решение уравнения (2.4) $x(t)$, удовлетворяющее неравенствам
$$|y(t)-\omega(t)|\le\varepsilon\varphi(t), \quad t\in[t_0-\tau,t_0), \quad |y(t)-x(t)|\le c_f\varepsilon\varphi(t), \quad t\in[t_0,\vartheta].$$

Теорема 1. *При выполнении условий (2.2) и (2.3) нелинейное дифференциальное уравнение (2.1) устойчиво по Хайерсу — Уламу — Рассиасу.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — соответственно решения уравнения (2.4) и неравенства (2.5). Рассмотрим модуль разности $y(t)$ и $x(t)$:
$$|y(t)-x(t)|=\Big|y(t)-\omega(t_0)-\int_{t_0}^{t} f(\xi,x(\xi),x(\xi-\tau))\,d\xi-Qv(t)\Big|.$$
После добавления и вычитания под модулем в правой части предыдущего равенства выражение
$$y(t_0)+\int_{t_0}^{t} f(\xi,y(\xi),y(\xi-\tau))\,d\xi+Qv(t),$$
в результате группировки и применения неравенства треугольника получим
$$|y(t)-x(t)|\le\Big|y(t)-y(t_0)-\int_{t_0}^{t} f(\xi,y(\xi),y(\xi-\tau))\,d\xi-Qv(t)\Big|$$
$$+\Big|\int_{t_0}^{t} f(\xi,y(\xi),y(\xi-\tau))-f(\xi,x(\xi),x(\xi-\tau))\,d\xi\Big|+|y(t_0)-\omega(t_0)|\,.$$

Применяя к выражению, стоящему под вторым интегралом в правой части этого неравенства свойство (2.2), и принимая во внимание (2.5), имеем

$$|y(t)-x(t)| \le \varepsilon\varphi(t) + \int\limits_{t_0}^{t} L(|y(\xi)-x(\xi)| + |y(\xi-\tau)-x(\xi-\tau)|)\,d\xi + |y(t_0)-\omega(t_0)|\,. \tag{2.6}$$

Определим функцию $\omega(t)$ на $[t_0-\tau,t_0)$ из условия

$$|y(t)-\omega(t)| \le \varepsilon\varphi(t), \quad t\in[t_0-\tau,t_0). \tag{2.7}$$

Введем функцию

$$\mu(t) = \sup_{\xi\in[t_0,t]} |y(\xi)-x(\xi)|. \tag{2.8}$$

Предположим, что $\sup_{\xi\in[t_0,t]}|y(\xi)-x(\xi)|$ на $[t_0,t]$ достигается в точке t^*. Тогда

$$\mu(t) = \sup_{\xi\in[t_0,t]} |y(\xi)-x(\xi)|$$

$$= \max\left\{\big|y(t^*-0)-x(t^*-0)\big|;\big|y(t^*)-x(t^*)\big|;\big|y(t^*+0)-x(t^*+0)\big|\right\}.$$

Поэтому из (2.6) с учетом (2.8) следует, что

$$\mu(t^*) \le \varepsilon\varphi(t^*) + L\int\limits_{t_0}^{t^*} (|y(\xi)-x(\xi)| + |y(\xi-\tau)-x(\xi-\tau)|)\,d\xi + |y(t_0)-\omega(t_0)|\,.$$

Принимая во внимание, что в последнем неравенстве правая часть неравенства есть непрерывная неубывающая функция, $\mu(t^*)=\mu(t)$, имеем

$$\mu(t) \le \varepsilon\varphi(t) + L\int\limits_{t_0}^{t} (|y(\xi)-x(\xi)| + |y(\xi-\tau)-x(\xi-\tau)|)\,d\xi + |y(t_0)-\omega(t_0)|\,. \tag{2.9}$$

Учитывая (2.7) и предположение, что $\varphi(t)$ есть неубывающая функция, получаем

$$\varepsilon\varphi(t) + |y(t_0)-\omega(t_0)| \le 2\varepsilon\varphi(t). \tag{2.10}$$

Согласно (2.8)

$$|y(\xi)-x(\xi)| \le \mu(\xi) \quad \text{и} \quad |y(\xi-\tau)-x(\xi-\tau)| \le \mu(\xi) \tag{2.11}$$

для $\xi\in[t_0,\vartheta]$. Ввиду (2.8), а также неравенства (2.10), (2.11), правую часть в (2.9) можно увеличить, что приводит к неравенству

$$\mu(t) \le 2\varepsilon\varphi(t) + 2L\int\limits_{t_0}^{t} \mu(s)\,ds.$$

Используя лемму Гронуолла, из последнего неравенства имеем

$$\mu(t) \le 2\varepsilon\varphi(t)e^{2L(t-t_0)},$$

что и завершает доказательство теоремы ($c_f = 2e^{2L(\vartheta-t_0)} > 1$).

Заметим, что используемый ниже прием получения оценки на решение уравнения с запаздыванием использовался ранее в [8; 17] и ряде других работ.

3. Устойчивость по Хайерсу — Уламу — Рассиасу нелинейных систем дифференциальных уравнений при мультипликативно входящем обобщенном воздействии

Далее будем рассматривать дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)) + B(t, x(t))\dot{v}(t), \quad x(t) = \omega(t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0], \tag{3.1}$$

где $x(t)$, $v(t)$ — соответственно n и m-мерные вектор-функции времени, $f(t, x(t), x(t-\tau))$ — n-мерная вектор-функция и $B(t,x)$ — $n \times m$-матрица-функция.

Как и ранее, будем полагать, что функция $v(t)$ является функцией ограниченной вариации и производная понимается в смысле теории обобщенных функций. Основное отличие уравнения (3.1) от (2.1) состоит в том, что в правой части уравнения (3.1) последнее слагаемое содержит произведение разрывной функции на обобщенную. В случае, если $v(t)$ является абсолютно непрерывной функцией, то при известных предположениях на $f(t, x(t), x(t-\tau))$ и $B(t, x(t))$ существует единственное решение уравнения (3.1) на отрезке $[t_0, \vartheta]$, удовлетворяющее начальному условию $x(t) = \omega(t)$, $t \in [t_0 - \tau, t_0]$. Решение уравнения (3.1) в случае, когда $v(t)$ есть функция ограниченной вариации и производная понимается в обобщенном смысле, согласно [11]) определяется следующим образом.

О п р е д е л е н и е 3 [11]. Аппроксимируемым решением задачи Коши (3.1), соответствующим функции ограниченной вариации $v(t)$, будем называть функцию ограниченной вариации $x(t)$, являющуюся поточечным пределом последовательности $x_k(t)$, порожденной последовательностью абсолютно непрерывных функций $v_k(t)$, поточечно сходящейся к $v(t)$, если $x(t)$ не зависит от выбора последовательности $v_k(t)$.

Теорема 2 [11, Theorem 1]. *Предположим, что $f(t, x, y)$, $B(t, x)$ непрерывны по t, липшицевы по x, y с постоянной L, удовлетворяют неравенствам (2.3), $||B(t,x)|| \le \chi(1+|x|)$, существуют непрерывные частные производные $\partial b_{ij}/\partial x_\nu$, которые удовлетворяют равенствам*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial b_{ij}(t,x)}{\partial x_\nu} b_{\nu l}(t,x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial b_{il}(t,x)}{\partial x_\nu} b_{\nu j}(t,x)$$

(*условие Фробениуса*) $i = 1, 2, \ldots, n$; $j, l = 1, 2, \ldots, m$.

Тогда для любой функции ограниченной вариации, определенной на отрезке $[t_0, \vartheta]$, существует аппроксимируемое решение $x(t)$ уравнения (3.1), которое удовлетворяет интегральному уравнению

$$\begin{gathered} x(t) = w(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} f(\xi, x(\xi), x(\xi-\tau))\, d\xi + \int\limits_{t_0}^{t} B(\xi, x(\xi))\, dv^c(\xi) \\ + \sum_{t_i \le t,\, t_i \in \Omega_-} S(t_i, x(t_i - 0), \Delta v(t_i - 0)) + \sum_{t_i < t,\, t_i \in \Omega_+} S(t_i, x(t_i), \Delta v(t_i + 0)). \end{gathered} \tag{3.2}$$

Здесь $v^c(\xi)$ — непрерывная составляющая функции $v(\xi)$; $S(t, x(t), \Delta v) = z(1) - x$; $\dot{z}(\xi) = B(t, z(\xi))\Delta v(t)$, $z(0) = x$. Через Ω_- обозначено множество точек, в которых функция $v(t)$ разрывна слева, т. е. $\Delta v(t-0) = v(t) - v(t-0) \ne 0$, а через Ω_+ — множество точек, в которых функция $v(t)$ разрывна справа, $\Delta v(t+0) = v(t+0) - v(t) \ne 0$.

В связи с тем, что рассматриваемое дифференциальное уравнение (3.1) несколько отличается от дифференциального уравнения (2.1), определение 3 необходимо несколько уточнить.

О п р е д е л е н и е 4. Будем говорить, что дифференциальное уравнение (3.1) устойчиво по Хайерсу — Уламу — Рассиасу на $[t_0 - \tau, \vartheta]$ относительно положительной неубывающей функции $\varphi(t)$, определенной на $[t_0-\tau,\vartheta]$, если найдется число $c_f>0$ такое, что для любой вектор-функции y ограниченной вариации, удовлетворяющей неравенству ($t\in[t_0,\vartheta]$)

$$\begin{aligned}&\Big|y(t)-\omega(t_0)-\int\limits_{t_0}^{t} f(\xi,y(\xi),y(\xi-\tau))\,d\xi-\int\limits_{t_0}^{t} B(\xi,y(\xi))\,dv^c(\xi)\\&-\sum_{t_i\le t,\,t_i\in\Omega_-} S(t_i,y(t_i-0),\Delta v(t_i-0))-\sum_{t_i<t,\,t_i\in\Omega_+} S(t_i,y(t_i),\Delta v(t_i+0))\Big|\le\epsilon\varphi(t),\end{aligned}\tag{3.3}$$

и для любого $\epsilon>0$ существуют положительное вещественное число c_f и решение уравнения (3.1) $x(t)$, удовлетворяющие неравенству

$$|y(t)-\omega(t)|<\epsilon\varphi(t),\quad t\in[t_0-\tau,t_0),\quad |y(t)-x(t)|<c_f\epsilon\varphi(t),\quad t\in[t_0,\vartheta],$$

для любого $t\in[t_0-\tau,\vartheta]$.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы 2. Тогда дифференциальное уравнение (3.1) устойчиво по Хайерсу — Уламу — Рассиасу.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим модуль разности $y(t)-x(t)$. Учитывая (3.2), имеем

$$\begin{aligned}|y(t)-x(t)|&=\Big|y(t)-w(t_0)-\int\limits_{t_0}^{t} f(\xi,x(\xi),x(\xi-\tau))\,d\xi-\int\limits_{t_0}^{t} B(\xi,y(\xi))\,dv^c(\xi)\\&-\sum_{t_i\le t,\,t_i\in\Omega_-} S(t_i,x(t_i-0),\Delta v(t_i-0))-\sum_{t_i<t,\,t_i\in\Omega_+} S(t_i,x(t_i),\Delta v(t_i+0))\Big|.\end{aligned}$$

Добавим и вычтем под модулем в правой части последнего равенства выражение

$$\begin{aligned}&y(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t} f(\xi,y(\xi),y(\xi-\tau))\,d\xi+\int\limits_{t_0}^{t} B(\xi,y(\xi))\,dv^c(\xi)\\&+\sum_{t_i\le t,\,t_i\in\Omega_-} S(t_i,y(t_i-0),\Delta v(t_i-0))+\sum_{t_i<t,\,t_i\in\Omega_+} S(t_i,y(t_i),\Delta v(t_i+0)).\end{aligned}$$

После группировки, применения свойств модулей, свойств липшицевости f и B, свойств интеграла Стилтьеса получим

$$\begin{aligned}|y(t)-x(t)|&\le\Big|y(t)-y(t_0)-\int\limits_{t_0}^{t} f(\xi,y(\xi),y(\xi-\tau))\,d\xi-\int\limits_{t_0}^{t} B(\xi,y(\xi))\,dv^c(\xi)\\&-\sum_{t_i\le t,\,t_i\in W_-} S(t_i,y(t_i-0),\Delta v(t_i-0))-\sum_{t_i<t,\,t_i\in W_+} S(t_i,y(t_i),\Delta v(t_i+0))\Big|+|y(t_0)-\omega(t_0)|\\&+L\int\limits_{t_0}^{t}(|y(\xi)-x(\xi)|+|y(\xi-\tau))-x(\xi-\tau|))\,d\xi+L\int\limits_{t_0}^{t}|y(\xi)-x(\xi)|\,d\mathop{\mathrm{var}}_{[t_0,\,\xi]} v_j^c(\cdot)\\&+\sum_{t_i<t,\,t_i\in\Omega_-}\big|S(t_i,y(t_i-0),\Delta v(t_i-0))-S(t_i,x(t_i-0),\Delta v(t_i-0))\big|\\&+\sum_{t_i\le t,\,t_i\in\Omega_+}\big|S(t_i,y(t_i),\Delta v(t_i+0))-S(t_i,x(t_i),\Delta v(t_i+0))\big|.\end{aligned}$$

Учитывая оценку (3.3), из последнего неравенства получим

$$
\begin{aligned}
&|y(t)-x(t)| \le \varepsilon\varphi(t) + |y(t_0)-\omega(t_0)| \\
&+ L\int_{t_0}^{t}\big(|y(\xi)-x(\xi)|+|y(\xi-\tau)-x(\xi-\tau)|\big)\,d\xi + L\int_{t_0}^{t}|y(\xi)-x(\xi)|\,d\operatorname*{var}_{[t_0,\,\xi]} v_j^c(\cdot) \\
&+ \sum_{t_i<t,\,t_i\in\Omega_-}\big|S(t_i,y(t_i-0),\Delta v(t_i-0)) - S(t_i,x(t_i-0),\Delta v(t_i-0))\big| \\
&+ \sum_{t_i\le t,\,t_i\in\Omega_+}\big|S(t_i,y(t_i),\Delta v(t_i+0)) - S(t_i,x(t_i),\Delta v(t_i+0))\big|.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Согласно [16] (см. формулу (3.6))

$$
\big|S(t_i,y(t_i-0),\Delta v(t_i-0))-S(t_i,x(t_i-0),\Delta v(t_i-0))\big| \le |y(t_i-0)-x(t_i-0)|(e^{eL|\Delta v(t_i-0)|}-1). \tag{3.5}
$$

Очевидно, что аналогичная формула справедлива и для момента t_i+0.

Учитывая (3.5), неравенство (3.4) можно записать в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
|y(t)-x(t)| &\le \varepsilon\varphi(t) + L\int_{t_0}^{t}(|y(\xi)-x(\xi)|+|y(\xi-\tau)-x(\xi-\tau)|)\,d\xi \\
&+L\int_{t_0}^{t}|y(\xi)-x(\xi)|\,d\operatorname*{var}_{[t_0,\,\xi]} v_j^c(\cdot) + |y(t_0)-\omega(t_0)| \\
&+\sum_{t_i<t,\,t_i\in\Omega_-}|y(t_i-0)-x(t_i-0)|(e^{eL|\Delta v(t_i-0)|}-1) \\
&+\sum_{t_i\le t,\,t_i\in\Omega_+}|y(t_i)-x(t_i)|(e^{eL|\Delta v(t_i+0)|}-1).
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Теперь воспользуемся обозначением (2.8). Согласно этому определению функция $\mu(t)$ является неубывающей, поэтому в предыдущем неравенстве $|y(t)-x(t)|$ можно заменить на $\mu(t)$. В выражениях, стоящих справа от знака неравенства, вместо $|y(\xi)-x(\xi)|$ и $|y(\xi-\tau)-x(\xi-\tau)|$ можно поставить $\mu(\xi)$. Правая часть неравенства при этом разве лишь увеличится. В результате из (3.6) получим

$$
\begin{aligned}
\mu(t) &\le \varepsilon\varphi(t) + 2L\int_{t_0}^{t}\mu(\xi)\,d\xi + L\int_{t_0}^{t}\mu(\xi)\,d\operatorname*{var}_{[t_0,\,\xi]} v_j^c(\cdot) + |y(t_0)-\omega(t_0)| \\
&+\sum_{t_i<t^*,\,t_i\in\Omega_-}|y(t_i-0)-x(t_i-0)|(e^{eL|\Delta v(t_i-0)|}-1) + \sum_{t_i\le t^*,\,t_i\in\Omega_+}|y(t_i)-x(t_i)|(e^{eL|\Delta v(t_i+0)|}-1).
\end{aligned}
$$

Введем обозначение

$$
P=\max\{2L, eL\}.
$$

Из последнего неравенства имеем

$$
\begin{aligned}
\mu(t) &\le 2\varepsilon\varphi(t) + P\int_{t_0}^{t}\mu(\xi)\,d(\xi+\operatorname*{var}_{[t_0,\,\xi]} v^c(\cdot)) \\
&+\sum_{t_i<t,\,t_i\in\Omega_-}\mu(t_i-0)(e^{P|\Delta v(t_i-0)|}-1) + \sum_{t_i\le t,\,t_i\in\Omega_+}\mu(t_i)(e^{P|\Delta v(t_i+0)|}-1).
\end{aligned}
$$

Используя оценку решения предыдущего неравенства из [18, Lemma 5.4.3, с. 192], имеем

$$\mu(t) \le \left[2\varepsilon\varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-P(\xi-t_0)-\underset{[t_0,\,\xi]}{\operatorname{var}} v(\cdot)} d(2\varepsilon\varphi(\xi))\right] e^{P(t-t_0)+\underset{[t_0,\,t]}{\operatorname{var}} v(\cdot)}. \tag{3.7}$$

Принимая во внимание неравенство $e^{(-P(t-t_0)-\underset{[t_0,\,\xi]}{\operatorname{var}} v(\cdot))} \le 1$, из (3.7) получим

$$\mu(t) \le 2\varepsilon\varphi(t) e^{P(t-t_0)+\underset{[t_0,\,t]}{\operatorname{var}} v(\cdot)}.$$

В силу ограниченности вариации функции $v(t)$ на $[t_0, \vartheta]$ убеждаемся в справедливости теоремы 3:

$$c_f = 2e^{P(\vartheta-t_0)+\underset{[t_0,\,\vartheta]}{\operatorname{var}} v(\cdot)}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Улам С.** Нерешенные математические задачи. М: Наука, 1964. 168 с.
2. **Hyers D.H.** On the stability of the linear functional equation // Proc. Natl. Acad. Sci. 1941. Vol. 27, no. 4. P. 222–224. https://doi.org/10.1073/pnas.27.4.222
3. **Rassias Th.M.** On the stability of the linear mapping in Banach spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1978. Vol. 72. P. 297–300. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1978-0507327-1
4. **Alsina C., Ger R.** On some inequalities and stability results related to the exponential function // J. Inequal. Appl. 1998. Vol. 2. P. 373–380.
5. **Rus I.A.** Ulam stability of ordinary differential equations // Stud. Univ. Babeş-Bolyai, Math.2009. Vol. 54, no. 4. P. 125–133.
6. **Brzdec J., Cadariu L., Cieplinski K.** Fixed point theory and the Ulam stability // J. Funct. Spaces. 2014. Vol. 2014. Art. no. 829419. P. 1–16. https://doi.org/10.1155/2014/829419
7. **Арутюнов А.В.** Задача о точках совпадения многозначных отображений и устойчивость по Уламу — Хайерсу // Докл. АН. 2014. Vol. 455, no. 4. P. 379–383. https://doi.org/10.7868/S086956521410003X
8. **Otrocol D., Ilea V.** Ulam ctability for a delay differential equation // Cent. Eur. J. Math. 2012. Vol. 11. P. 1296–1303. https://doi.org/10.2478/s11533-013-0233-9
9. **Сесекин А.Н., Кандрина А.Д., Гредасова Н.В.** Устойчивость по Хайерсу — Уламу — Рассиасу линейных систем с обобщенным воздействием и запаздыванием // Изв. ВУЗов. Математика. 2024. № 12. С. 71–84. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2024-12-71-84
10. **Сесекин А.Н., Кандрина А.Д.** Устойчивость по Хайерсу — Уламу — Рассиасу нелинейных дифференциальных уравнений с разрывными траекториями и запаздыванием // Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры (SCDG2024): материалы Междунар. конф., посвященной 100-летию со дня рождения академика Н. Н. Красовского. Екатеринбург, 2024. С. 279–282.
11. **Fetisova Yu.V., Sesekin A.N.** Discontinuous solutions of differential equations with time delay // Wseas Trans. Syst. 2005. Vol. 4, no. 5. P. 487–492.
12. **Самойленко А.М., Перестюк Н.А.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, no. 11. С. 1981–1992.
13. **Zada A., Faisal S., Li Y.** On the Hyers–Ulam stability of first-order impulsive delay differential equations // Hindawi Publ. Corporation J. Func. Spaces. Vol. 2016. Art. no. 8164978. P. 1–6. https://doi.org/10.1155/2016/8164978
14. **Беллман Р., Кук К.** Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
15. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
16. **Sesekin A.N., Kandrina A.D.** Hyers-Ulam-Rassias stability of nonlinear differential equations with a generalized actions on the right-hend side // Ural. Math. J. 2023. Vol. 9. no. 1. P. 147—152. https://doi.org/10.15826/umj.2023.1.013
17. **Лукоянов Н.Ю.** Функциональные уравнения Гамильтона — Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург: Изд-во Урал. федерал. ун-та, 2011. 242 с.

18. **Zavalishchin S.T., Sesekin A.N.** Dynamic impulse systems: theory and applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. 256 p. (Ser.: Math. and Its Appl. (MAIA); vol. 394). https://doi.org/10.1007/978-94-015-8893-5

Поступила 10.02.2025
После доработки 7.04.2025
Принята к публикации 14.04.2025

Сесекин Александр Николаевич
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
профессор, зав. кафедрой
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: a.n.sesekin@urfu.ru

Кандрина Анна Дмитриевна
ассистент
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: anna-kandrina@mail.ru

Гредасова Надежда Викторовна
канд. физ.-мат. наук
доцент
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: gredasovan@mail.ru

REFERENCES

1. Ulam S. *A collection of mathematical problems.* NY, Intersci. Publ., 1960, 150 p. Translated to Russian under the title *Nereshennyye matematicheskiye zadachi*, Moscow, Nauka Publ., 1964, 168 p.
2. Hyers D.H. On the stability of the linear functional equation. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1941, vol. 27, no. 4, pp. 222–224. https://doi.org/10.1073/pnas.27.4.222
3. Rassias Th.M. On the stability of the linear mapping in Banach spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1978, vol. 72, pp. 297–300. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1978-0507327-1
4. Alsina C., Ger R. On some inequalities and stability results related to the exponential function. *J. Inequal. Appl.*, 1998, vol. 2, pp. 373–380.
5. Rus I.A. Ulam stability of ordinary differential equations. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai, Math.*, 2009, vol. 54, no. 4, pp. 125–133.
6. Brzdec J., Cadariu L., Cieplinski K. Fixed point theory and the Ulam stability. *J. Funct. Spaces*, 2014, vol. 2014, art. no. 829419, pp. 1–16. https://doi.org/10.1155/2014/829419
7. Arutyunov A.V. The coincidence point problem for set-valued mappings and Ulam–Hyers stability. *Dokl. Math.*, 2014, vol. 89, no. 2, pp. 188–191. https://doi.org/10.1134/S1064562414020197
8. Otrocol D., Ilea V. Ulam ctability for a delay differential equation. *Cent. Eur. J. Math.*, 2013, vol. 11, pp. 1296–1303. https://doi.org/10.2478/s11533-013-0233-9
9. Sesekin A.N., Kandrina A.D., Gredasova N.V. Hyers–Ulam–Rassias stability of linear systems of differential equations with generalized action and delay. *Russ. Math.*, 2024, vol. 68, no. 1, pp. 70–81. https://doi.org/10.3103/S1066369X24700993
10. Sesekin A.N., Kandrina A.D. Hayers–Ulam–Rassias stability of nonlinear differential equations with discontinuous trajectories and delay. In: *Proc. Inter. Conf. devoted to the 100th anniversary of Academician N. N. Krasovskii “Dynamic systems: stability, control, differential games”*, Yekaterinburg, 2024, pp. 279–282 (in Russian).

11. Fetisova Yu.V., Sesekin A.N. Discontinuous solutions of differential equations with time delay. *Wseas trans. Syst.*, 2005, vol. 4, no. 5, pp. 487–492.
12. Samoylenko A.M., Perestyuk N.A. *Differentsial'nyye uravneniya s impul'snym vozdeystviyem* [Differential equations with impulse action]. Kyiv, Vishcha Shkola Publ., 1987, 288 p.
13. Zada A., Faisal S., Li Y. On the Hyers–Ulam Stability of first-order impulsive delay differential equations. *Hindawi Publ. Corporation J. Func. Spaces*, 2016, vol. 2016, art. no. 8164978, pp. 1–6. https://doi.org/10.1155/2016/8164978
14. Bellman R., Cooke K.L. *Differential-difference equations.* London, NY, Acad. Press, 1963, 462 p. Translated to Russian under the title *Differentsial'no-raznostnyye uravneniya*, Moscow, Mir Publ., 1967, 548 p.
15. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Motion control theory]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 475 p.
16. Sesekin A.N., Kandrina A.D. Hyers–Ulam–Rassias stability of nonlinear differential equations with a generalized actions on the right-hend side. *Ural Math. J.*, 2023, vol. 9, no. 1, pp. 147–152. https://doi.org/10.15826/umj.2023.1.013
17. Lukoyanov N.Yu. *Funktsional'nyye uravneniya Gamil'tona — Yakobi i zadachi upravleniya s nasledstvennoy informatsiyey* [Hamilton–Jacobi functional equations and control problems with hereditary information]. Yekaterinburg, Ural. Federal. Univ. Publ., 2011, 242 p. ISBN: 978-5-321-01877-4 .
18. Zavalishchine S.T., Sesekin A.N. *Dynamic impulse systems: theory and applications.* Ser.: Mathematics and Its Applications (MAIA), vol. 394. Dolrbrecht, Springer, 1997, 260 p. doi: https://doi.org/10.1007/978-94-015-8893-5

Received February 10, 2025
Revised April 7, 2025
Accepted April 14, 2025

Alexander Nikolaevuch Sesekin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: a.n.sesekin@urfu.ru .

Anna Dmitrievna Kandrina, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia,
e-mail: anna-kandrina@mail.ru .

Nadezda Viktorovna Gredasova, Cand. Sci. (Phys-Math), Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: gredasovan@mail.ru .

Cite this article as: A. N. Sesekin, A. D. Kandrina, N. V. Gredasova. On the Hyers–Ulam–Rassias stability of nonlinear differential equations containing products of discontinuous and generalized functions and delays. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol 31, no. 2, pp. 205–214.