ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 31 № 2 2025

УДК 517.977

КООПЕРАТИВНЫЕ СЕТЕВЫЕ ИГРЫ С ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ СЕТЕВОЙ СТРУКТУРОЙ

Л. А. Петросян, Я. Б. Панкратова

В статье рассматривается кооперативная дифференциальная сетевая игра. Мы предполагаем, что игроки в начальный момент игры одновременно и независимо друг от друга выбирают соседей, с которыми они намерены взаимодействовать во время игры. Каждый игрок может выбирать соседей из фиксированного подмножества игроков. Такие подмножества могут быть разными для разных игроков, и для каждого игрока число возможных соседей ограничено. Далее в фиксированные моменты времени игроки имеют возможность корректировать полученную сеть. Игроки создают сеть с целью максимизации суммарного выигрыша. Однако сеть, которая является оптимальной в начальный момент времени, впоследствии может перестать быть таковой. В качестве решений кооперативной игры рассматриваются C-ядро и вектор Шепли.

Ключевые слова: динамическая сеть, структура кооперативной сети, вектор Шепли.

L. A. Petrosyan, Y. B. Pankratova. Cooperative network games with a changing communication structure.

The paper considers a cooperative differential network game. We assume that at the beginning of the game, players simultaneously and independently choose a neighbor with whom they intend to interact during the game. Each player can choose neighbors from a fixed subset of players. Such subsets can be different for different players, and for each player the number of possible neighbors is fixed. Then, at given time instants, players have the opportunity to change the network. Players create a network to maximize their joint payoff. However, a network that is optimal at the initial time instant may later cease to be optimal. The C-core and the Shapley value are considered as a solution of the cooperative game.

Keywords: cooperative communication structures, dynamic network game, Shapley value.

MSC: 91A06, 91A12, 91A25

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-2-195-204

Введение

В работе рассматривается кооперативная дифференциальная сетевая игра n лиц. В [1–5] представлены различные подходы к определению характеристической функции в дифференциальных сетевых играх. В некоторых из них введен особый тип характеристической функции, который не только упрощает поиск кооперативного решения для дифференциальных сетевых игр, но и обеспечивает решения таким важным свойством как динамическая устойчивость (см. [6; 7]). Данная статья является развитием работы [8].

Мы предполагаем, что, начиная с момента t_0 и далее в фиксированные моменты времени, игроки имеют возможность изменять сеть, одновременно выбирая соседей в моменты времени t_k, $k = 1, \dots, n$ (точно так же, как это происходит в начале игры), а затем действуют сообща в соответствии с траекторией, максимизирующей общий выигрыш в этой сети в подыгре на временном интервале $[t_k, T]$ до следующего момента коррекции.

1. Дифференциальная игра на сети

Пусть $N = \{1, 2, \dots, n\}$ — множество игроков, которое совпадает с множеством узлов сети. Множество всех ребер сети N обозначим через P, $P = \{arc(i, j)\colon i, j \in N, i \neq j\}$. Множество игроков, связанных с игроком i ребром, обозначим через $K\,(i) = \{j : arc\,(i, j) \in P\}$,

$i \in N$; $x^i(\tau) \in \mathbb{R}^m$ — фазовое состояние игрока $i \in N$ в момент времени τ и $u^i(\tau) \in U^i \subset \mathbb{R}^k$; $U^i \in Comp\mathbb{R}^k$ — управление игрока $i \in N$, $i \notin K(i)$.

Предположим, что в начале игры, в момент t_0 игроки одновременно и независимо друг от друга выбирают соседей, с которыми предполагают взаимодействовать в процессе игры. При этом игрок i может выбрать соседа из фиксированного подмножества игроков $N_i \subset N \backslash \{i\}$. Множество N_i может быть различным для различных игроков, и для каждого игрока i число его возможных соседей ограничено числом n_i. Связь осуществляется (т. е. в сети создается ребро) между игроками i и j, если $i \in N_j$, $j \in N_i$. Получившаяся в результате сеть G называется *допустимой сетью*.

Динамика игры определяется следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}^i(\tau) = f^i(x^i(\tau), u^i(\tau)), \ x^i(t_0) = x_0^i, \quad \text{для} \ \ \tau \in [t_0, T] \quad \text{и} \ \ i \in N. \tag{1.1}$$

Функции $f^i(x^i, u^i)$ определены при любых значениях переменных x^i и $u^i \in U^i$, они предполагаются непрерывными по совокупности переменных x^i, u^i и непрерывно дифференцируемыми по x^i. Класс управлений представляет собой класс кусочно-непрерывных функций $u^i(t)$ с конечным числом точек разрыва.

Мы рассмотрим частный случай, когда выигрыш игрока i зависит от его переменной состояния и переменных состояния игроков из множества $K(i)$. Таким образом, если связи остаются значимыми, выигрыш игрока i определяется как

$$H_i\left(x_1^0, \ldots, x_n^0, u^1, \ldots, u^n\right) = \sum_{j \in K(i)} \int_{t_0}^{T} h_i^j\left(x^i(\tau), x^j(\tau)\right) d\tau, \quad h_i^j \geq 0, \quad i \in N, \tag{1.2}$$

при условии, что игроки не прерывают связь. В случае, если игрок i прерывает связь с игроком j в определенный момент времени t, значение функций $h_i^j(x^i(\tau), x^j(\tau))$ и $h_j^i(x^j(\tau), x^i(\tau))$ полагаем равным 0 для всех $\tau \geq t$, $t \in [t_0, T]$. Функция $h_i^j\left(x^i(\tau), x^j(\tau)\right)$ — это мгновенный выигрыш, который игрок i может получить через сетевое взаимодействие с игроком $j \in K(i)$. Заметим, что $(i, i) \notin P$ и мгновенный выигрыш $h_i^j \geq 0$ при $j \in K(i)$.

2. Кооперативная дифференциальная игра

Далее мы рассмотрим кооперативную версию игры. В [1;3;8] предполагается, что в любой момент времени игроки могут разорвать связь между собой и другими игроками. Принимая во внимание неотрицательность выигрышей игроков, это предположение значительно упрощает построение характеристической функции игры и, как следствие, основанное на ней построение принципов оптимальности из теории кооперативных игр.

Определим значение характеристической функции для коалиции N в сети G:

$$\begin{aligned} V_G(x_0, T - t_0; N) &= \max_{u_i, i \in N} \sum_{i \in N} \sum_{j \in K(i)} \int_{t_0}^{T} h_i^j\left(x^i(\tau), x^j(\tau)\right) d\tau \\ &= \sum_{i \in N} \sum_{j \in K(i)} \int_{t_0}^{T} h_i^j\left(\bar{x}^i(\tau), \bar{x}^j(\tau)\right) d\tau, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где максимум берется по наборам всех допустимых управлений. Мы предполагаем, что максимизирующее управление $\bar{u}_1(t), \ldots, \bar{u}_m(t)$ существует.

Обозначим через

$$V(x_0, T - t_0; N) = \max_{G} V_G(x_0, T - t_0; N) = V_{\bar{G}}(x_0, T - t_0; N). \tag{2.2}$$

Определим значения характеристической функции для коалиций $S \subset N$ как

$$V(x_0, T - t_0; S) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in S \cap K(i)} \int\limits_{t_0}^{T} h_i^j \left(\bar{x}^i(\tau), \bar{x}^j(\tau)\right) d\tau, \quad S \subset N.$$

Заметим, что значение $V_G(x_0, T - t_0; N)$ зависит от сети, которая была сформирована в начальный момент времени t_0 в результате одновременного выбора соседей игроками. Мы предполагаем, что игроки выбирают такую сеть $\bar{G}$, которая дает максимальный суммарный выигрыш игроков из набора N, т. е. $V_{\bar{G}}(x_0, T - t_0; N)$. Мы будем называть такую сеть $\bar{G}$ *кооперативной сетью или сетью кооперативного взаимодействия*.

При развитии игры по кооперативной траектории $(\bar{x}^i(\tau))$ возникает следующее нетривиальное свойство, которое, как нам кажется, никем ранее не было замечено, а именно в некоторый промежуточный момент времени на кооперативной траектории кооперативная сеть может перестать быть таковой, поскольку максимальный суммарный выигрыш игроков в подыгре из начальных состояний на кооперативной траектории может быть достигнут на другой сети. Мы покажем это на примере.

Для удобства введем следующие обозначения

$$\gamma_{ij}(t) = \gamma_{ij}(\bar{x}(t), T - t) = \int\limits_{t}^{T} h_i^j(\bar{x}^i(\tau), \bar{x}^j(\tau)) d\tau, \tag{2.3}$$

П р и м е р 1. Рассмотрим сеть из пяти игроков с узлами A, B, C, D, E. Предположим, что каждый игрок может создать не более трех связей (т. е. $n_i = 3$, $N = (A,\ B,\ C,\ D,\ E)$), но множество возможных соседей для каждого игрока не ограничено (может быть любым).

Предположим, что

$$\gamma(x_0, T - t_0) = \{\gamma_{ij}\}_{i,j=1,\dots 5} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 6 & 4 \\ 6 & 0 & 4 & 11 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 6 & 8 \\ 5 & 9 & 8 & 0 & 3 \\ 8 & 6 & 7 & 5 & 0 \end{pmatrix};$$

здесь γ — это матрица выигрышей (с элементами (2.3)), которые игроки могут получить за время $T - t_0$ при использовании кооперативных стратегий в построенной сети (т. е. стратегий $\bar{u}^i(\tau), \bar{u}^j(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$, при которых реализуются кооперативные траектории $\bar{x}^i(\tau), \bar{x}^j(\tau))$ соответствующие (2.1)).

Определим максимизирующую сеть (рис. 1) в момент времени t_0, или, другими словами, определим сеть, которая максимизирует сумму выигрышей игроков в начальный момент времени t_0, при условии, что игроки не могут создать более трех связей. Максимальный суммарный выигрыш на такой сети равен 92.

На ребрах сети (рис. 1) указаны выигрыши (слева направо), которые игроки могут получить за время $T - t_0$ при использовании кооперативных стратегий в построенной сети.

Предположим, что при этом матрица $\gamma(x_0, T - t_0)$ может быть представлена в виде

$$\gamma(x_0, T - t_0) = \gamma(x_0, t' - t_0) + \gamma(\bar{x}(t'), T - t')$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 6 & 4 \\ 6 & 0 & 4 & 11 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 6 & 8 \\ 5 & 9 & 8 & 0 & 3 \\ 8 & 6 & 7 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

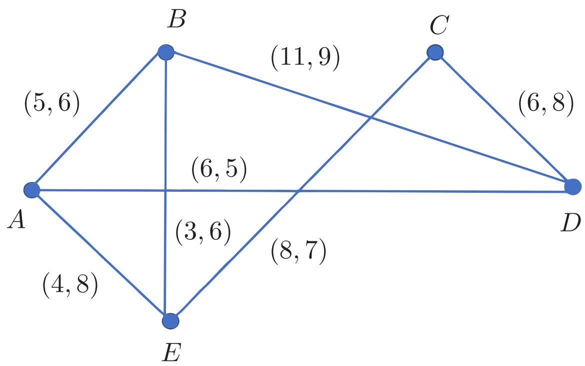

Рис. 1. Максимальная сеть на момент времени t_0 при условии, что игроки не могут создать более трех связей.

Строим новую сеть в момент времени t', или, другими словами, определим сеть, которая максимизирует суммарный выигрыш игроков на отрезке времени $[t', T]$ при условии, что игроки не могут создать более трех связей ($n_i = 3$, $N = (A,\ B,\ C,\ D,\ E)$). Мы видим, что в момент времени t' на временном интервале $[t', T]$ исходная сеть перестает быть оптимальной, т. е. существует другая сеть, которая максимизирует суммарный выигрыш игроков на оставшемся временном интервале $[t', T]$.

Максимизирующая сеть в подыгре, начинающаяся с t', имеет следующую структуру (рис. 2). Максимальный суммарный выигрыш игроков в подыгре, определенный на интервале времени $[t', T]$, равен 41.

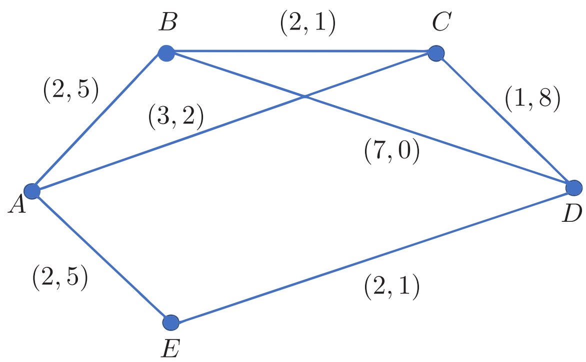

Рис. 2. Максимальная сеть в момент времени t' при условии, что игроки не могут создавать более трех связей.

Однако здесь надо иметь в виду, что при построении новой кооперативной сети предполагается, что игроки в дифференциальной сетевой игре на отрезке времени $[t', T]$ используют кооперативные стратегии в кооперативной сети (т. е. стратегии $\bar{u}^i(\tau), \bar{u}^j(\tau)$, $\tau \in [t', T]$, при которых реализуются кооперативные траектории $\bar{x}^i(\tau), \bar{x}^j(\tau)$). Если допустить повторную максимизацию суммарного выигрыша игроков в подыгре на отрезке времени $[t', T]$, то суммарный выигрыш может еще более возрасти.

Как мы уже видели, даже в простых случаях постоянная сеть (которая не меняется на протяжении всей игры) не обеспечивает максимальный суммарный выигрыш игрокам, т. е. ее нельзя считать кооперативной на всем временном интервале $[t_0, T]$ игры.

В этой статье мы предполагаем, что в определенные моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_r$ игроки настраивают (имеют возможность изменять) сеть, одновременно выбирая соседей (точно так же, как это происходило в начале игры), а затем на последующем временном интервале действуют сообща в соответствии с траекторией, максимизирующей суммарный выигрыш в соответствующей дифференциальной игре на сети $\bar{G}$ (см. (2.2)) на интервале времени $[t_0, T]$

до момента следующей коррекции t_{k+1}. Предположим для простоты, что коррекция сети происходит в каждый момент времени t_k.

Обозначим траекторию, скорректированную в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_r$, через $\bar{\bar{x}}(t)$. Мы предлагаем в качестве решения так называемую локально-кооперативную траекторию. А именно, временной интервал $[t_0, T]$ делится на подынтервалы $[t_0, t_1)$, $[t_1, t_2)$, …, $(t_{r-1}, T]$, и предлагается следующее локально кооперативное поведение.

- В момент времени t_0 выбирается сеть, которая максимизирует суммарный выигрыш на интервале $[t_0, T]$, и игра развивается на интервале времени $[t_0, t_1)$ по соответствующей максимизирующей (кооперативной) траектории без изменения сети.

- В момент времени t_1 игроки повторно (как это было в момент t_0) выбирают одновременно партнеров в сети с целью максимизации суммарного выигрыша игроков на отрезке $[t_1, T]$. При этом может оказаться, что построенная в момент t_1 сеть совпадает с предыдущей (построенной в момент t_0), тогда игра продолжается на отрезке времени $[t_1, t_2]$ на первоначальной сети. Однако, как мы видели в примере 1, новая сеть может отличаться от предыдущей, тогда на отрезке времени $[t_1, t_2]$ игра происходит на новой сети G_2; в соответствии с примером 1 мы предполагаем, что игроки в дифференциальной сетевой игре на отрезке времени $[t_1, t_2]$ используют кооперативные стратегии в кооперативной игре (те стратегии $\bar{u}^i(\tau), \bar{u}^j(\tau)$, $\tau \in [t_1, t_2]$, при которых реализуется кооперативная траектория $\bar{x}^i(\tau), \bar{x}^j(\tau))$ на сети $\bar{G}$ (см 2.1)).

- Затем в момент времени t_k строится сеть, максимизирующая суммарный выигрыш игроков на отрезке времени $[t_k, T]$ (эта сеть может совпадать с предыдущей), при этом мы все время предполагаем, что игроки в дифференциальной сетевой игре на отрезке времени $[t_k, t_{k+1}]$ используют кооперативные стратегии $\bar{u}^i(\tau), \bar{u}^j(\tau)$, $\tau \in [t_k, t_{k+1}]$, соответствующие кооперативной траектории $\bar{x}^i(\tau), \bar{x}^j(\tau)$. Таким образом поступаем до момента t_r (момента последней коррекции сети).

В результате мы получаем последовательность сетей

$$\bar{G} = G^{t_0}, G^{t_2}, \ldots, G^{t_{r-1}}$$

и траекторию

$$\bar{\bar{x}}(t) = \bar{x}(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \in 0, 1, \ldots, r-1,$$

состоящую из отрезков кооперативной траектории, реализуемой в соответствующих подыграх на временных интервалах $[t_k, T]$ с использованием кооперативных управлений $\bar{u}^i(\tau), \bar{u}^j(\tau)$, $\tau \in [t_k, t_{k+1}]$ в сети $\bar{G}$ (см (2.2)). Мы будем называть эту траекторию *условно-кооперативной траекторией.*

Введем аналог характеристической функции на временном интервале $[t_0, T]$, соответствующей условно-кооперативной траектории $\bar{\bar{x}}(t)$:

$$\bar{V}_\Delta\left(x_0, T - t_0; S\right) = \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{i \in S} \Bigg(\sum_{j \in S \cap K_{G^{t_k}}(i)} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} h_i^j\left(\bar{\bar{x}}^i\left(\tau\right), \bar{\bar{x}}^j\left(\tau\right)\right) d\tau \Bigg), \tag{2.4}$$

для всех $S \subset N$, где $K_{G^{t_k}}(i)$ — множество игроков, связанных ребром с игроком i в сети G^{t_k}.

Заметим, что $\bar{V}_\Delta\left(x_0, T - t_0; \{i\}\right) = 0$, поскольку при $S = \{i\}$ множество $\{i\} \cap K_{G^{t_k}}(i) = \varnothing$ (игрок i не принадлежит множеству $K_{G^{t_k}}(i)$).

Утверждение 1. *Характеристическая функция $\bar{V}_\Delta\left(x_0, T - t_0; S\right)$ выпукла.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\bar{V}_\Delta\left(x_0, T-t_0; S_1\cup S_2\right)=\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{i\in S_1\cup S_2}\left(\sum_{j\in(S_1\cup S_2)\cap K_{G^{t_k}}(i)}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} h_i^j\left(\bar{\bar{x}}^i\left(\tau\right), \bar{\bar{x}}^j\left(\tau\right)\right)d\tau\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{i\in S_1}\left(\sum_{j\in S_1\cap K_{G^{t_k}}(i)}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} h_i^j\left(\bar{\bar{x}}^i\left(\tau\right), \bar{\bar{x}}^j\left(\tau\right)\right)d\tau\right)+\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{i\in S_2}\left(\sum_{j\in S_2\cap K_{G^{t_k}}(i)}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} h_i^j\left(\bar{\bar{x}}^i\left(\tau\right), \bar{\bar{x}}^j\left(\tau\right)\right)d\tau\right)$$

$$-\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{i\in S_1\cap S_2}\left(\sum_{j\in(S_1\cap S_2)\cap K_{G^{t_k}}(i)}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} h_i^j\left(\bar{\bar{x}}^i\left(\tau\right), \bar{\bar{x}}^j\left(\tau\right)\right)d\tau\right)$$

$$+\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{i\in S_1}\left(\sum_{j\in S_2\cap K_{G^{t_k}}(i)}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} h_i^j\left(\bar{\bar{x}}^i\left(\tau\right), \bar{\bar{x}}^j\left(\tau\right)\right)d\tau\right)+\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{i\in S_2}\left(\sum_{j\in S_1\cap K_{G^{t_k}}(i)}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} h_i^j\left(\bar{\bar{x}}^i\left(\tau\right), \bar{\bar{x}}^j\left(\tau\right)\right)d\tau\right)$$

$$\geq\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{i\in S_1}\left(\sum_{j\in S_1\cap K_{G^{t_k}}(i)}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} h_i^j\left(\bar{\bar{x}}^i\left(\tau\right), \bar{\bar{x}}^j\left(\tau\right)\right)d\tau\right)+\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{i\in S_2}\left(\sum_{j\in S_2\cap K_{G^{t_k}}(i)}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} h_i^j\left(\bar{\bar{x}}^i\left(\tau\right), \bar{\bar{x}}^j\left(\tau\right)\right)d\tau\right)$$

$$-\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{i\in S_1\cap S_2}\left(\sum_{j\in(S_1\cap S_2)\cap K_{G^{t_k}}(i)}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} h_i^j\left(\bar{\bar{x}}^i\left(\tau\right), \bar{\bar{x}}^j\left(\tau\right)\right)d\tau\right)$$

$$=\bar{V}_\Delta\left(x_0, T-t_0; S_1\right)+\bar{V}_\Delta\left(x_0, T-t_0; S_2\right)-\bar{V}_\Delta\left(x_0, T-t_0; S_1\cap S_2\right),$$

т. е.

$$\bar{V}_\Delta\left(x_0, T-t_0; S_1\cup S_2\right)\geq\bar{V}_\Delta\left(x_0, T-t_0; S_1\right)+\bar{V}_\Delta\left(x_0, T-t_0; S_2\right)-\bar{V}_\Delta\left(x_0, T-t_0; S_1\cap S_2\right),$$

и утверждение доказано.

3. C-ядро

О п р е д е л е н и е 1. Вектор $a=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ называется дележом, если

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\bar{V}_\Delta\left(x_0, T-t_0; N\right),\quad \alpha_i\geq 0,\quad \bar{V}_\Delta\left(x_0, T-t_0; \{i\}\right)=0,\quad i=1,\ldots,n.$$

Обозначим множество всех дележей через A. Подмножество $C\subset A$ дележей называется C-ядром, если для $a\in C$ имеет место

$$\sum_{i\in S}\alpha_i\geq\bar{V}_\Delta(x_0, T-t_0; S),\quad S\subset N.$$

Утверждение 2. *C-ядро в построенной игре непусто.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим дележ $a=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, где

$$\alpha_i=\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j\in K_{G^{t_k}}(i)}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} h_i^j\left(\bar{\bar{x}}^i\left(\tau\right), \bar{\bar{x}}^j\left(\tau\right)\right)d\tau,$$

$$\sum_{i\in S}\alpha_i=\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{i\in S}\left(\sum_{j\in K_{G^{t_k}}(i)}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}h_i^j\left(\bar{\bar{x}}^i\left(\tau\right),\bar{\bar{x}}^j\left(\tau\right)\right)d\tau\right)$$

$$\geq\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{i\in S}\left(\sum_{j\in S\cap K_{G^{t_k}}(i)}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}h_i^j\left(\bar{\bar{x}}^i\left(\tau\right),\bar{\bar{x}}^j\left(\tau\right)\right)d\tau\right)=\bar{V}_\Delta\left(x_0,T-t_0;S\right),\quad S\subset N,$$

т. е. дележ a принадлежит C-ядру, и утверждение доказано.

4. Вектор Шепли

Вычислим вектор Шепли для определенного выше аналога характеристической функции [6; 9]:

$$\bar{Sh}_i(x_0,t_0)=\sum_{\substack{S\subset N,\\ S\ni i}}\frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}\times[\bar{V}(x_0,T-t_0,S)-\bar{V}(x_0,T-t_0,S\backslash\{i\})],\quad i\in N,\quad(4.5)$$

и мы будем называть вектор $\bar{Sh}$ *модифицированным вектором Шепли.*

Можно показать, что модифицированный вектор Шепли динамически устойчив [6; 7].

П р и м е р 2. Рассмотрим пример сетевой игры $|N|=5$ с игроками A, B, C, D, E. На рис. 1 изображена сеть $\bar{G}^{t_0}$, которая максимизирует суммарный выигрыш игроков на временном интервале $[t_0,T]$.

Найдем вектор Шепли для начальной сети в случае, если сеть не меняется. Обозначим через $\gamma_{ij}(x_0,T-t_0)=\gamma_{ij}$, $i,j=A,B,C,D,E$.

$$Sh_A(x_0,t_0)=\frac{\gamma_{AB}+\gamma_{BA}+\gamma_{AE}+\gamma_{EA}+\gamma_{AD}+\gamma_{DA}}{2}=17,$$
$$Sh_B(x_0,t_0)=\frac{\gamma_{AB}+\gamma_{BA}+\gamma_{EB}+\gamma_{BE}+\gamma_{BD}+\gamma_{DB}}{2}=20,$$
$$Sh_C(x_0,t_0)=\frac{\gamma_{CD}+\gamma_{DC}+\gamma_{CE}+\gamma_{EC}}{2}=14.5,$$

$$Sh_D(x_0,t_0)=\frac{\gamma_{DA}+\gamma_{AD}+\gamma_{BD}+\gamma_{DB}+\gamma_{DC}+\gamma_{CD}}{2}=22.5,$$
$$Sh_E(x_0,t_0)=\frac{\gamma_{CE}+\gamma_{EC}+\gamma_{EA}+\gamma_{AE}+\gamma_{EB}+\gamma_{BE}}{2}=18.$$

Вычислим вектор выплат Hs игрокам на интервале $[t_0,t')$, если эти выплаты производятся в соответствии с вектором Шепли, рассчитанным для исходной сети без ее корректировки в момент t'. Положим $\gamma_{ij}(x_0,t'-t_0)=\gamma_{ij}^0$, $i,j=A,B,C,D,E$, тогда имеет место

$$Hs_A(x_0,t_0)=\frac{\gamma_{AB}^0+\gamma_{BA}^0+\gamma_{AE}^0+\gamma_{EA}^0+\gamma_{AD}^0+\gamma_{DA}^0}{2}=9.5,$$
$$Hs_B(x_0,t_0)=\frac{\gamma_{AB}^0+\gamma_{BA}^0+\gamma_{EB}^0+\gamma_{BE}^0+\gamma_{BD}^0+\gamma_{DB}^0}{2}=12,$$
$$Hs_C(x_0,t_0)=\frac{\gamma_{CD}^0+\gamma_{DC}^0+\gamma_{CE}^0+\gamma_{EC}^0}{2}=8.5,$$
$$Hs_D(x_0,t_0)=\frac{\gamma_{DA}^0+\gamma_{AD}^0+\gamma_{BD}^0+\gamma_{DB}^0+\gamma_{DC}^0+\gamma_{CD}^0}{2}=14,$$
$$Hs_E(x_0,t_0)=\frac{\gamma_{CE}^0+\gamma_{EC}^0+\gamma_{EA}^0+\gamma_{AE}^0+\gamma_{EB}^0+\gamma_{BE}^0}{2}=12.$$

Найдем вектор Шепли для сети, полученной после корректировки в момент t' (сеть $\bar{G}^1$). Обозначим $\gamma_{ij}(\bar{\bar{x}}(t'), T-t') = \gamma'_{ij}$, $i, j = A, B, C, D, E$. В этих обозначениях компоненты вектора Шепли вычисляются по формулам

$$Sh_A(\bar{\bar{x}}(t'), t') = \frac{\gamma'_{AB} + \gamma'_{BA} + \gamma'_{AE} + \gamma'_{EA} + \gamma_A + \gamma'_A}{2} = 9.5,$$
$$Sh_B(\bar{\bar{x}}(t'), t') = \frac{\gamma'_{AB} + \gamma'_{BA} + \gamma'_{CB} + \gamma'_{BC} + \gamma'_{BD} + \gamma'_{DB}}{2} = 8.5,$$
$$Sh_C(\bar{\bar{x}}(t'), t') = \frac{\gamma'_{CB} + \gamma'_{BC} + \gamma'_{CA} + \gamma'_{AC} + \gamma'_{CD} + \gamma'_{DC}}{2} = 8.5,$$
$$Sh_D(\bar{\bar{x}}(t'), t') = \frac{\gamma'_{DC} + \gamma'_{CD} + \gamma'_{BD} + \gamma'_{DB} + \gamma'_{DE} + \gamma'_{ED}}{2} = 9.5,$$
$$Sh_E(\bar{\bar{x}}(t'), t') = \frac{\gamma'_{DE} + \gamma'_{ED} + \gamma'_{EA} + \gamma'_{AE}}{2} = 5.$$

В табл. 1 представлены выигрыши игроков, соответствующие компонентам вектора Шепли для двух вариантов игры: сеть без коррекции и сеть с коррекцией.

Таблица 1

Сравнение решений

Игроки	$Sh_i(x_0, t_0)$	$\bar{Sh}_i(x_0, t_0)$
A	17	$9.5 + 8.5 = 19$
B	20	$8.5 + 12 = 20.5$
C	14.5	$8.5 + 8.5 = 17$
D	22.5	$9.5 + 14 = 23.5$
E	18	$5 + 12 = 17$
Суммарный выигрыш	92	97

Мы видим, что после коррекции сети в момент времени t' суммарный выигрыш игроков увеличивается. Это оправдывает внесенную нами корректировку сети. В результате компоненты вектора Шепли для четырех игроков из 5 увеличиваются, т. е.

$$\bar{Sh}_i(x_0, t_0) = HS_i(x_0, t_0) + Sh_i(\bar{\bar{x}}(t'), t') > Sh_i(t_0, x_0), \quad i = A, B, C, D,$$

$$\bar{Sh}_E(x_0, t_0) = HS_E(x_0, t_0) + Sh_E(\bar{\bar{x}}(t'), t') < Sh_E(t_0, x_0).$$

В примере 2 показана только нижняя оценка возможности увеличения совместного выигрыша, поскольку увеличение происходит только за счет коррекции структуры сети без изменения оптимального кооперативного управления, с использованием управлений, рассчитанных для временного интервала $[t_0, T]$. Дополнительная оптимизация элементов управления может дать еще большее увеличение суммарного выигрыша.

Заключение

Мы рассмотрели кооперативную дифференциальную сетевую игру, в которой игроки одновременно и независимо выбирают соседей, с которыми они намерены взаимодействовать во время игры. Игроки создают сеть, чтобы максимизировать совместный выигрыш. Мы доказали, что сеть, которая является оптимальной в начальный момент времени, может перестать быть таковой в какой-то промежуточный момент времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тур А.В.** C-ядро в дифференциальных играх на сетях с коммуникационными ограничениями // Вест. Санкт-Петербур. ун-та. Сер. Прикл. математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19, № 4. С. 497–508.
2. **Cao H., Ertin E., Arora A.** MiniMax equilibrium of networked differential games // ACM Trans. Autonom. Adapt. Syst. 1963. Vol. 3, no. 4. Art. no. 14. P. 1–21. https://doi.org/10.1145/1452001.1452004
3. **Gao H., Pankratova Y.** Cooperation in dynamic network games // Contrib. Game Theory Manage. 2017. Vol. 10. P. 42–67.
4. **García-Meza M.A., López-Barrientos J.D.** A differential game of a duopoly with network externalities // Recent Advances in Game Theory and Applications. Static & Dynamic Game Theory: Foundations & Applications / eds. L. Petrosyan, V. Mazalov. Cham: Birkhäuser, Springer, 2016. P. 49–66. https://doi.org/10.1007/978-3-319-43838-2_3
5. **Sun P., Parilina E.** Dynamic network formation with ordered partitioning and incomplete information // Dyn. Games Appl. 2024. Vol. 14, no. 4. P. 921–958. https://doi.org/10.1007/s13235-024-00552-z
6. **Petrosyan L., Zaccour G.** Time-consistent shapley value allocation of pollution cost reduction // J. Econ. Dyn. Control. 2003. Vol. 27, no. 3. P. 381–398. https://doi.org/10.1016/S0165-1889(01)00053-7
7. **Yeung D.W.K.** Time consistent shapley value imputation for cost-saving joint ventures // Mat. Teor. Igr Pril. 2010. Vol. 2, no. 3. P. 137–149.
8. **Petrosyan L., Yeung D., Pankratova Y.** Characteristic functions in cooperative differential games on networks // J. Dynamics and Games. 2024. Vol. 11, no. 2. P. 115–130. https://doi.org/10.3934/jdg.2023017
9. **Shapley L.S.** A value for n-person games // Contributions to the Theory of Games / eds. H. Kuhn, A. Tucker. Vol. II. Princeton: Princeton Univ. Press, 1953. P. 307–317. https://doi.org/10.1515/9781400881970-018

Поступила 10.02.2025
После доработки 7.04.2025
Принята к публикации 14.04.2025

Петросян Леон Аганесович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Санкт-Петербургский государственный университет
г. Санкт-Петербург
e-mail: l.petrosyan@spbu.ru

Панкратова Ярослава Борисовна
канд. физ.-мат. наук
доцент
Санкт-Петербургский государственный университет
г. Санкт-Петербург
e-mail: y.pankratova@spbu.ru

REFERENCES

1. Tur A.V. The core in differential games on networks with communication restrictions. *Vestn. S.-Peterburg. Un-ta. Ser. 10. Prikl. Mat. Inform. Prots. Upr.*, 2023, vol. 19, no. 4, pp. 497–508 (in Russian).
2. Cao H., Ertin E., Arora A. MiniMax equilibrium of networked differential games. *ACM Trans. Autonom. Adapt. Syst.* (*TAAS*), 1963, vol. 3, no. 4, art. no. 14, pp. 1–21. https://doi.org/10.1145/1452001.1452004
3. Gao H., Pankratova Y. Cooperation in dynamic network games. *Contrib. Game Theory Manage.*, 2017, vol. 10, pp. 42–67.
4. García-Meza M.A., López-Barrientos J.D. A differential game of a duopoly with network externalities. In: L. Petrosyan, V. Mazalov. (eds.) *Recent Advances in Game Theory and Applications*, Ser. Static & Dynamic Game Theory: Foundations & Applications, Cham, Birkhäuser, Springer, 2016, pp. 49–66. https://doi.org/10.1007/978-3-319-43838-2_3
5. Sun P., Parilina E. Dynamic network formation with ordered partitioning and incomplete information. *Dyn. Games Appl.*, 2024, vol. 14, no. 4, pp. 921–958. https://doi.org/10.1007/s13235-024-00552-z

6. Petrosyan L., Zaccour G. Time-consistent shapley value allocation of pollution cost reduction. *J. Econ. Dyn. Control*, 2003, vol. 27, no. 3, pp. 381–398. https://doi.org/10.1016/S0165-1889(01)00053-7
7. Yeung D.W.K. Time consistent shapley value imputation for cost-saving joint ventures. *Mat. Teor. Igr Pril.*, 2010, vol. 2, no. 3, pp. 137–149.
8. Petrosyan L., Yeung D., Pankratova Ya. Characteristic functions in cooperative differential games on networks. *J. Dynamics and Games*, 2024, vol. 11, no. 2, pp. 115–130. https://doi.org/10.3934/jdg.2023017
9. Shapley L.S. A value for n-person games. In: H. Kuhn, A. Tucker (eds.) *Contributions to the theory of games*, vol. II, Princeton, Princeton Univ. Press, 1953, pp. 307–317. https://doi.org/10.1515/9781400881970-018

Received February 10, 2025
Revised April 7, 2025
Accepted April 14, 2025

Leon Agantsovich Petrosyan, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., St. Petersburg State University, Saint Petersburg, 199034 Russia, e-mail: l.petrosyan@spbu.ru .

Yaroslavna Borisovna Pankratova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), St. Petersburg State University, Saint Petersburg, 199034 Russia, e-mail: y.pankratova@spbu.ru .

Cite this article as: L. A. Petrosyan, Y. B. Pankratova. Cooperative network games with a changing communication structure. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 2, pp. 195–204.