

УДК 517.968.4

О ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА — ВОЛЬТЕРРА НА НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ПОЛУПРЯМОЙ¹

А. С. Петросян, Х. А. Хачатрян

Исследуется класс нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна — Вольтерра на неотрицательной полупрямой. Указанный класс уравнений при различных частных представлениях соответствующего ядра и нелинейности находит применение в гидроаэродинамике, в теории переноса тепла излучением и в моделях популяционной генетики. Сочетание метода последовательных приближений с некоторыми геометрическими оценками для вогнутых и монотонных функций позволяет доказать конструктивные теоремы существования и единственности неотрицательного ограниченного и непрерывного решения указанного уравнения. Более того, устанавливается равномерная сходимость специальных последовательных приближений (со скоростью убывающей геометрической прогрессии) к решению. Рассматривается также соответствующее нелинейное “однородное” уравнение, и доказывается, что в классе неотрицательных медленно растущих функций данное уравнение имеет только тривиальное (нулевое) решение. В конце приводятся частные прикладные примеры уравнений, удовлетворяющих всем ограничениям доказанных утверждений.

Ключевые слова: монотонность, равномерная сходимость, ядро, нелинейность, ограниченное решение, непрерывность.

H. S. Petrosyan, Kh. A. Khachatryan. On the global solvability of one class of nonlinear integral equations of Hammerstein–Volterra type on the nonnegative half-line.

The class of nonlinear integral equations of the Hammerstein–Volterra type on the nonnegative half-line is studied. This class of equations, with various partial representations of the corresponding kernel and nonlinearity, has important applications in hydroaerodynamics, in the theory of radiative transfer, and in models of population genetics. The combination of the method of successive approximations with some geometric estimates for concave and monotone functions makes it possible to prove constructive theorems for the existence and uniqueness of a nonnegative bounded and continuous solution to the specified equation. Moreover, a uniform convergence of special successive approximations (at a rate of decreasing geometric progression) to the solution is established. The corresponding nonlinear “homogeneous” equation is also considered, and it is proven that in the class of nonnegative slowly growing functions, this equation has only a trivial (zero) solution. Lastly, particular applied examples of such equations that satisfy all the restrictions of the proven statements are given.

Keywords: monotonicity, uniform convergence, kernel, nonlinearity, bounded solution, continuity.

MSC: 45M20

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-2-181-194

1. Введение

Рассмотрим следующий класс нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна — Вольтерра на неотрицательной полупрямой:

$$f(x) = g(x) + \int_0^x V(x, t)G(f(t)) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ := [0, +\infty), \quad (1)$$

относительно искомой неотрицательной непрерывной и ограниченной на \mathbb{R}^+ функции $f(x)$.

¹Исследование второго автора выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке Республики Армения в рамках научного проекта № 23RL-1A027.

В уравнении (1) ядро $V(x, t)$ определено на множестве $\Pi := \{(x, t) : 0 \leq t \leq x\}$ и удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $V(x, t) > 0$, $(x, t) \in \Pi$, $V \in C(\Pi)$,
- 2) если $(x_1, t), (x_2, t) \in \Pi$ и $x_1 \geq x_2$, то $V(x_1, t) \leq V(x_2, t)$,
- 3) существует $\sup_{x \in \mathbb{R}^+} \left(\int_0^x V(x, t) dt \right) := \lambda < +\infty$ и функция $\int_0^x V(x, t) dt$ возрастает на множестве \mathbb{R}^+ .

Функция $g(x)$ обладает свойствами

- a) $g(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^+$, $g(0) > 0$, $g \in C(\mathbb{R}^+)$,
- b) существует $\sup_{x \in \mathbb{R}^+} (g(x)) := \beta < +\infty$.

Нелинейная функция $G(u)$, которая фигурирует в уравнении (1), определена на множестве \mathbb{R}^+ и удовлетворяет следующим ограничениям:

- A) $G \in C(\mathbb{R}^+)$, $G(0) = 0$, $G(u)$ монотонно возрастает, строго вогнута на множестве \mathbb{R}^+ и $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{G(u)}{u} = 0$.

- B) Существует непрерывное строго монотонно возрастающее и строго вогнутое отображение $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ со свойствами $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ такое, что $G(u)$ удовлетворяет неравенству

$$G(\sigma u) \geq \varphi(\sigma)G(u), \quad u \in [0, \xi], \quad \sigma \in (0, 1).$$

где ξ — положительное решение характеристического уравнения $\lambda G(u) = u - \beta$.

Уравнение (1) имеет важное прикладное значение в различных областях физики и биологии. В частности, уравнения такого характера возникают в гидроаэродинамике, в теории переноса тепла излучением и в моделях популяционной генетики (см. [1–4]). Следует отметить, что особый интерес с прикладной точки зрения представляют положительные (при $x > 0$) решения из конуса $K := \{f : f \in C(\mathbb{R}^+), f(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}^+\}$.

В случае, когда ядро V зависит от разности (или от суммы) своих аргументов и удовлетворяет определенным условиям, а $G(u) = u^{1/\alpha_0}$, $\alpha_0 > 1$, уравнение (1) при различных ограничениях на g достаточно подробно изучено в работах [5–12] методом весовых метрик. В работе [13] уравнение (1) исследовалось в случае, когда $G(u) = u^{1/\alpha_0}$, $\alpha_0 > 1$, $V(x, t) \geq 0$, $(x, t) \in \Pi$, $V(0, 0) > 0$, $V \in C^1(\Pi)$, $V'_x(x, t) \geq 0$, $g(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^+$, $g \in C(\mathbb{R}^+)$, g не убывает на \mathbb{R}^+ и $g(x)$ представляется в виде $g(x) = \int_0^x g'(t) dt + g(0)$. В той же работе при выполнении дополнительного условия

$$q := \sup_{0 < x \leq b} \left(\frac{\alpha_0 - 1}{\alpha_0} \int_0^x V(x, t) dt + g^{\frac{\alpha_0 - 1}{\alpha_0}}(x) \right) \left((\alpha_0 - 1) \int_0^x V(x, t) dt + \alpha_0 g^{\frac{\alpha_0 - 1}{\alpha_0}}(0) \right)^{-1} < 1$$

доказана единственность решения уравнения (1) в классе функций

$$\mathcal{P}_b := \{f : f \in C[0, b], L(x) \leq f(x) \leq R(x), x \in [0, b]\}$$

при любом $b > 0$, где

$$L(x) := \left(\frac{\alpha_0 - 1}{\alpha_0} \int_0^x V(x, t) dt + g^{\frac{\alpha_0 - 1}{\alpha_0}}(0) \right)^{\frac{1}{\alpha_0 - 1}}, \quad R(x) := \left(\frac{\alpha_0 - 1}{\alpha_0} \int_0^x V(x, t) dt + g^{\frac{\alpha_0 - 1}{\alpha_0}}(x) \right)^{\frac{1}{\alpha_0 - 1}}.$$

В настоящей работе при условиях 1)–3), A), B), a) и b) методом специально выбранных последовательных приближений сначала мы докажем конструктивную теорему существования ограниченного неотрицательного и непрерывного на \mathbb{R}^+ решения уравнения (1). При этом в ходе доказательства теоремы существования будет получена равномерная оценка для разности соседних итераций, из которой следует, что эти приближения равномерно со скоростью убывающей геометрической прогрессии сходятся к решению уравнения (1). Во второй части настоящей работы мы рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$\Phi(x) = \int_0^x V(x, t) G(\Phi(t)) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad (2)$$

относительно искомой неотрицательной функции $\Phi(x)$.

При условиях 1), A) докажем, что если

- 4) V — ограниченная функция на множестве Π ,
- C) существует $G'(0) < +\infty$,

то уравнение (2) не может иметь нетривиальных неотрицательных решений в классе медленно растущих функций $\mathfrak{M} := \{f(x) : f(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}^+, \forall \varepsilon > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\varepsilon x} f(x) = 0\}$. Третья часть статьи посвящена изучению вопроса единственности решения уравнения (1) в классе неотрицательных и ограниченных на \mathbb{R}^+ функций. В конце работы приведем примеры функций g, V и G , удовлетворяющих всем условиям доказанных теорем.

Отметим, что полученные в настоящей работе результаты дополняют результаты работы [13].

2. Разрешимость уравнения (1). Отсутствие нетривиального неотрицательного решения уравнения (2)

2.1. Существование решения уравнения (1)

Во-первых, заметим, что из условия a) в силу теоремы Коши следует, что существует число $r_0 > 0$ такое, что

$$\alpha := \inf_{x \in [0, r_0)} g(x) > 0. \quad (3)$$

Для упрощения записи обозначим через

$$u(x) := f(x) - g(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (4)$$

Тогда относительно неизвестной функции $u(x)$ приходим к эквивалентному (1) нелинейному интегральному уравнению

$$u(x) = \int_0^x V(x, t) G(u(t) + g(t)) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (5)$$

Рассмотрим следующие итерации для уравнения (5):

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= \int_0^x V(x, t) G(u_n(t) + g(t)) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \\ u_0(x) &= \xi - \beta, \quad n = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (6)$$

где число ξ однозначно определяется в условии B).

Используя условия $1)$, $a)$ и $A)$ индукцией по n , нетрудно убедиться в достоверности следующих фактов для последовательности функций $\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$:

$$u_n(x) \geq 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (7)$$

$$u_n \in C(\mathbb{R}^+), \quad n = 0, 1, \dots \quad (8)$$

Теперь же убедимся, что

$$u_{n+1}(x) \leq u_n(x), \quad n = 0, 1, \dots, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (9)$$

Сначала проверим неравенство (9) для номера $n = 0$. Принимая во внимание условия $1)$, $3)$, $a)$, $b)$, $A)$ и тот факт, что

$$\lambda G(\xi) = \xi - \beta, \quad (10)$$

из (6) будем иметь

$$0 \leq u_1(x) \leq G(\xi) \int_0^x V(x, t) dt \leq \lambda G(\xi) = \xi - \beta = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Предполагая, что $u_n(x) \leq u_{n-1}(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$ при некотором натуральном n , и, при этом учитывая $1)$, $a)$ и $A)$, из (6) приходим к (9). Теперь используем (10), а также условия $1)$ – $3)$, $a)$, $b)$ и $A)$, оценки сверху и снизу функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$. Для функции $u_1(x)$ имеем

$$0 \leq u_1(x) \leq \frac{\xi - \beta}{\lambda} \int_0^x V(x, t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (11)$$

если $x \in [0, r_0)$, то

$$u_1(x) \geq G(\xi - \beta + \alpha) \int_0^x V(x, t) dt, \quad (12)$$

если же $x \geq r_0$, то

$$u_1(x) \geq G(\xi - \beta) \int_0^x V(x, t) dt. \quad (13)$$

Следовательно, учитывая (12), (13) и (6), получаем, что при $x \in [0, r_0)$

$$\begin{aligned} u_2(x) &\geq \int_0^x V(x, t) G(u_1(t) + \alpha) dt \\ &\geq \int_0^x V(x, t) G\left(G(\xi - \beta + \alpha) \int_0^t V(t, \tau) d\tau + \alpha\right) dt \geq G(\alpha) \int_0^x V(x, t) dt, \end{aligned} \quad (14)$$

а при $x \geq r_0$

$$u_2(x) \geq \int_0^x V(x, t) G(u_1(t)) dt \geq \int_0^x V(x, t) G\left(G(\xi - \beta) \int_0^t V(t, \tau) d\tau\right) dt. \quad (15)$$

Рассмотрим далее функцию

$$\chi(x) := \int_0^x V(x, t) dt - \lambda, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (16)$$

Из условий 1) и 3) немедленно следует, что

$$\chi \in C(\mathbb{R}^+), \quad \chi(0) = -\lambda < 0, \quad \chi \text{ возрастает на } \mathbb{R}^+, \quad \chi(+\infty) = 0. \quad (17)$$

Значит, согласно теореме Больцано — Коши существуют числа $r_1, r_2, 0 < r_1 < r_2$ такие, что

$$\chi(r_1) = -\frac{\lambda}{2}, \quad \chi(r_2) = -\frac{\lambda}{3}. \quad (18)$$

Таким образом, принимая во внимание условия 1)–3), А) и соотношения (15), (16) и (18) для $x > \max(r_0, r_2) + 1 := r_3$, будем иметь

$$\begin{aligned} u_2(x) &\geq \int_0^x V(x, t) G\left(G(\xi - \beta) \int_0^t V(t, \tau) d\tau\right) dt \geq \int_{r_1}^x V(x, t) G\left(G(\xi - \beta) \int_0^t V(t, \tau) d\tau\right) dt \\ &\geq G\left(G(\xi - \beta) \frac{\lambda}{2}\right) \int_{r_1}^x V(x, t) dt = G\left(G(\xi - \beta) \frac{\lambda}{2}\right) \left(\int_0^x V(x, t) dt - \int_0^{r_1} V(x, t) dt\right) \\ &\geq G\left(G(\xi - \beta) \frac{\lambda}{2}\right) \left(\int_0^x V(x, t) dt - \int_0^{r_1} V(r_1, t) dt\right) \\ &= G\left(G(\xi - \beta) \frac{\lambda}{2}\right) \left(\int_0^x V(x, t) dt - \frac{\lambda}{2}\right) \geq G\left(G(\xi - \beta) \frac{\lambda}{2}\right) \left(\int_0^{r_2} V(r_2, t) dt - \frac{\lambda}{2}\right) \\ &= G\left(G(\xi - \beta) \frac{\lambda}{2}\right) \left(\frac{2\lambda}{3} - \frac{\lambda}{2}\right) = \frac{\lambda}{6} G\left(G(\xi - \beta) \frac{\lambda}{2}\right). \end{aligned}$$

Итак, для $x > r_3$ мы получили оценку

$$u_2(x) \geq \frac{\lambda}{6} G\left(G(\xi - \beta) \frac{\lambda}{2}\right) := d_1. \quad (19)$$

Когда $x \in [r_0, r_3]$, то в силу условия 1) неравенства (15) и теоремы Вейерштрасса имеем

$$\begin{aligned} u_2(x) &\geq \int_0^{r_0} V(x, t) G\left(G(\xi - \beta) \int_0^t V(t, \tau) d\tau\right) dt \geq \int_{r_0/2}^{r_0} V(x, t) G\left(G(\xi - \beta) \int_0^{r_0/2} V(r_0, \tau) d\tau\right) dt \\ &\geq G\left(G(\xi - \beta) \int_0^{r_0/2} V(r_0, \tau) d\tau\right) \min_{x \in [r_0, r_3]} \left(\int_{r_0/2}^{r_0} V(x, t) dt\right) := d_2. \end{aligned}$$

Следовательно, для $x \in [0, r_0)$ справедливо неравенство

$$u_2(x) \geq \frac{\lambda G(\alpha)}{\xi - \beta} u_1(x), \quad (20)$$

а для $x \in [r_0, +\infty)$

$$u_2(x) \geq \frac{\min(d_1, d_2)}{\xi - \beta} u_1(x). \quad (21)$$

Заметим, что

$$0 < \lambda G(\alpha) \leq \lambda G(\beta) < \lambda G(\xi) = \xi - \beta, \quad (22)$$

$$0 < d_1 = \frac{\lambda}{6} G\left(G(\xi - \beta) \frac{\lambda}{2}\right) < \lambda G(G(\xi)\lambda) = \lambda G(\xi - \beta) < \lambda G(\xi) = \xi - \beta, \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
 0 < d_2 &= G\left(G(\xi - \beta) \int_0^{r_0/2} V(r_0, \tau) d\tau\right) \min_{x \in [r_0, r_3]} \left(\int_{r_0/2}^{r_0} V(x, t) dt\right) \\
 &< G(G(\xi)\lambda)\lambda = \lambda G(\xi - \beta) < \lambda G(\xi) = \xi - \beta.
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

В достоверности неравенств (22)–(24) можем убедиться из условий 1), 3), A) и соотношения (10).

Таким образом, принимая во внимание (20)–(24) и полагая

$$\sigma_0 := \min \left\{ \frac{\lambda G(\alpha)}{\xi - \beta}, \frac{\min(d_1, d_2)}{\xi - \beta} \right\},$$

с учетом (9) приходим к следующему двустороннему неравенству:

$$\sigma_0 u_1(x) \leq u_2(x) \leq u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^+;
 \tag{25}$$

при этом

$$\sigma_0 \in (0, 1).
 \tag{26}$$

Из неравенства (25), в частности, следует, что

$$\sigma_0(u_1(t) + g(t)) \leq u_2(t) + g(t) \leq u_1(t) + g(t), \quad t \in \mathbb{R}^+.
 \tag{27}$$

Согласно условиям A), B), 1) а также рекуррентному соотношению (6) из формулы (27) приходим к неравенствам $\varphi(\sigma_0)u_2(x) \leq u_3(x) \leq u_2(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, откуда, в частности, следует, что

$$\varphi(\sigma_0)(u_2(t) + g(t)) \leq u_3(t) + g(t) \leq u_2(t) + g(t), \quad t \in \mathbb{R}^+,
 \tag{28}$$

ибо в силу (26) $\varphi(\sigma_0) \in (0, 1)$, а $g(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Снова, используя A), B), 1) и (6), из (28) имеем $\varphi(\varphi(\sigma_0))u_3(x) \leq u_4(x) \leq u_3(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$. Продолжая этот процесс, на $n + 1$ -м шаге получаем двустороннее неравенство

$$\underbrace{\varphi(\varphi \dots \varphi(\sigma_0))}_n u_{n+1}(x) \leq u_{n+2}(x) \leq u_{n+1}(x), \quad x \in \mathbb{R}^+.
 \tag{29}$$

Виду неравенства (3.16) из работы [14] можем утверждать, что для всякого $\varepsilon \in (0, 1)$ имеет место оценка

$$0 \leq 1 - \underbrace{\varphi(\varphi \dots \varphi(\sigma_0))}_n \leq (1 - \sigma_0)k^n, \quad n = 1, 2, \dots,
 \tag{30}$$

где $k = k_\varepsilon := \frac{1 - \varphi(\varepsilon\sigma_0)}{1 - \varepsilon\sigma_0}$.

Значит, из (29), (30), (9) и (6) приходим к оценкам

$$0 \leq u_{n+1}(x) - u_{n+2}(x) \leq (\xi - \beta)(1 - \sigma_0)k^n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}^+.
 \tag{31}$$

Неравенства (31) запишем для индексов $n + 1, n + 2, \dots, n + m$:

$$0 \leq u_{n+2}(x) - u_{n+3}(x) \leq (\xi - \beta)(1 - \sigma_0)k^{n+1}, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

$$0 \leq u_{n+3}(x) - u_{n+4}(x) \leq (\xi - \beta)(1 - \sigma_0)k^{n+2}, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

.....

$$0 \leq u_{n+m+1}(x) - u_{n+m+2}(x) \leq (\xi - \beta)(1 - \sigma_0)k^{n+m}, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Складывая неравенство (31) с полученными выше неравенствами, будем иметь

$$0 \leq u_{n+1}(x) - u_{n+m+2}(x) \leq (\xi - \beta)(1 - \sigma_0)(1 + k + \dots + k^m)k^n$$

$$\leq \frac{(\xi - \beta)(1 - \sigma_0)}{1 - k} k^n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (32)$$

Из (31) с учетом того, что $k \in (0, 1)$ (см. условие *B*) немедленно следует равномерная сходимость последовательности непрерывных функций $\{u_n(x)\}_{n=0}^\infty$ к непрерывной функции $u(x)$ когда $n \rightarrow \infty$, причем в силу условий 1), *a*) и *A*) $u(x)$ удовлетворяет уравнению (5) и

$$0 \leq u(x) \leq \xi - \beta, \quad u(0) = 0, \quad u(x) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (33)$$

В цепочке неравенств (32), фиксируя номер n и устремляя $m \rightarrow \infty$, получим

$$0 \leq u_{n+1}(x) - u(x) \leq \frac{(\xi - \beta)(1 - \sigma_0)}{1 - k} k^n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (34)$$

Из (4)–(6) и (1) следует, что

$$f_n(x) := u_n(x) + g(x) \underset{n \rightarrow \infty}{\rightrightarrows} g(x) + u(x) = f(x).$$

Функция $f(x)$ удовлетворяет уравнению (1), $f \in C(\mathbb{R}^+)$, и имеют место неравенства

$$0 \leq f_{n+1}(x) - f(x) \leq \frac{(\xi - \beta)(1 - \sigma_0)}{1 - k} k^n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (35)$$

$$g(x) \leq f(x) \leq \xi - \beta + g(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (36)$$

Итак, на основе вышеизложенного, приходим к следующему утверждению:

Теорема 1. *При условиях 1)–3), a), b), A) и B) уравнение (1) имеет неотрицательное непрерывное и ограниченное на \mathbb{R}^+ решение $f(x)$. Более того, имеют место оценки (35) и (36), где $f_n(x) = u_n(x) + g(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $x \in \mathbb{R}^+$, а последовательность $\{u_n(x)\}_{n=0}^\infty$ определяется из рекуррентных соотношений (6).*

2.2. Отсутствие нетривиального решения уравнения (2)

Рассмотрим теперь “однородное” нелинейное интегральное уравнение (2) и докажем следующую теорему.

Теорема 2. *При условиях 1), 4) A) и C) уравнение (2) в классе неотрицательных медленно растущих на \mathbb{R}^+ функций имеет только тривиальное решение $\Phi(x) \equiv 0$.*

Доказательство. Пусть $\Phi \in \mathfrak{M}$ — решение нелинейного интегрального уравнения (2). Положим

$$F_p(x) := e^{-px} \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (37)$$

где $p \in (MG'(0), +\infty)$, а $M := \sup_{(x,t) \in \Pi} (V(x,t))$.

Из (2), (37), A), C) и 4) следует, что

$$\begin{aligned} F_p(x) &\leq M \int_0^x e^{-p(x-t)} e^{-pt} G(\Phi(t)) dt \\ &\leq G'(0) M \int_0^x e^{-p(x-t)} F_p(t) dt \leq \frac{MG'(0)C_p(1 - e^{-px})}{p} \leq \frac{MG'(0)C_p}{p}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$C_p := \sup_{x \in \mathbb{R}^+} (F_p(x)). \quad (39)$$

Из (38) и (39) имеем, что $C_p \left(1 - \frac{MG'(0)}{p}\right) \leq 0$, откуда, учитывая неравенство $p > MG'(0)$, получаем $C_p = 0$. Следовательно, $\Phi(x) \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}^+$.

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что в случае, когда $G'(0) = +\infty$, доказать или опровергнуть существование нетривиального неотрицательного и медленно растущего решения уравнения (2) пока нам не удается.

3. Единственность решения уравнения (1). Примеры

3.1. Единственность решения

Займемся теперь изучением вопроса единственности решения уравнения (1) в классе неотрицательных и ограниченных функций на \mathbb{R}^+ . Дополнительно предположим, что

с) существует число $r^* > 0$ такое, что

$$\gamma := \inf_{x \geq r^*} (g(x)) > 0.$$

Имеет место

Теорема 3. Пусть выполняются условия 1)–3), а)–с), А) и В). Тогда уравнение (1) в классе неотрицательных и ограниченных на \mathbb{R}^+ функций не может иметь более одного решения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из эквивалентности уравнений (1) и (5) следует, что единственность решения достаточно доказать для уравнения (5). Пусть уравнение (5), кроме решения $u(x)$ (построенное при помощи последовательных приближений (6)), имеет также неотрицательное и ограниченное на \mathbb{R}^+ решение $u^*(x)$. Из условий а), 1) и А) следует, что

$$u^* \in C(\mathbb{R}^+). \quad (40)$$

Обозначим через $c^* := \sup_{x \in \mathbb{R}^+} (u^*(x))$, $c^* > 0$. Тогда из (5) с учетом условий 1), 3) а), б) и А) получим

$$u^*(x) \leq \int_0^x V(x,t)G(c^* + g(t)) dt \leq G(c^* + \beta) \int_0^x V(x,t) dt \leq \lambda G(c^* + \beta), \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

откуда следует, что

$$c^* \leq \lambda G(c^* + \beta). \quad (41)$$

Докажем, что из (41) вытекает достоверность неравенства

$$c^* \leq \xi - \beta. \quad (42)$$

Предположим обратное: $c^* > \xi - \beta$. Тогда, учитывая условие А) из последнего неравенства, в силу того, что функция $\frac{G(u)}{u}$ монотонно убывает на $(0, +\infty)$, получим

$$\frac{G(c^* + \beta)}{c^* + \beta} < \frac{G(\xi)}{\xi} = \frac{\xi - \beta}{\lambda \xi},$$

откуда следует, что

$$\lambda G(c^* + \beta) < (c^* + \beta) \left(1 - \frac{\beta}{\xi}\right) = c^* - \frac{\beta c^*}{\xi} + \beta - \frac{\beta^2}{\xi} = c^* - \beta \frac{c^* + \beta}{\xi} + \beta < c^* - \beta + \beta = c^*.$$

Последнее неравенство противоречит оценке (41). Значит, неравенство (42) доказано. Индукцией по n нетрудно проверить, что

$$u^*(x) \leq u_n(x), \quad n = 0, 1, \dots, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (43)$$

Действительно, неравенство (43) имеет место для номера $n = 0$ в силу (42). Предполагая, что соотношение (43) верно для некоторого номера $n \in \mathbb{N}$ и при этом учитывая условия 1), а) и А), из соотношения (6) получаем, что $u^*(x) \leq u_{n+1}(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$. В (43), устремляя $n \rightarrow \infty$, приходим к неравенству:

$$u^*(x) \leq u(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (44)$$

Оценим теперь функцию $u^*(x)$ снизу. С этой целью обозначим через

$$m := \int_0^{r^*} V(r^*, t) dt.$$

Из условий 1) и 3) сразу следует, что

$$0 < m < \lambda. \quad (45)$$

Принимая во внимание (17), можем утверждать, что существует число $\tilde{r} > 0$ такое, что

$$\chi(\tilde{r}) = -\frac{\lambda - m}{2}.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\tilde{r}} V(\tilde{r}, t) dt = \frac{\lambda + m}{2}. \quad (46)$$

Так как $\frac{\lambda + m}{2} > m$ (см. (45)), то ввиду монотонности функции $\int_0^x V(x, t) dt$ на \mathbb{R}^+ имеем

$$r^* < \tilde{r}. \quad (47)$$

Пусть $x \in (\tilde{r}, +\infty)$, тогда из (5), (47) в силу условий 1)–3), а), с) и А) будем иметь

$$\begin{aligned} u^*(x) &\geq \int_0^x V(x, t)G(g(t)) dt \geq \int_{r^*}^x V(x, t)G(g(t)) dt \geq G(\gamma) \int_{r^*}^x V(x, t) dt \\ &= G(\gamma) \left(\int_0^x V(x, t) dt - \int_0^{r^*} V(x, t) dt \right) \geq G(\gamma) \left(\int_0^x V(x, t) dt - \int_0^{r^*} V(r^*, t) dt \right) \\ &= G(\gamma) \left(\int_0^x V(x, t) dt - m \right) \geq G(\gamma) \left(\int_0^{\tilde{r}} V(\tilde{r}, t) dt - m \right) = G(\gamma) \frac{\lambda - m}{2}. \end{aligned}$$

Итак для $x > \tilde{r}$ имеем

$$u^*(x) \geq l_1 := G(\gamma) \frac{\lambda - m}{2}. \quad (48)$$

Если $x \in [0, r_0)$, то, учитывая (3) и условия 1), А), получим

$$u^*(x) \geq G(\alpha) \int_0^x V(x, t) dt. \quad (49)$$

Пусть теперь $x \in [r_0, \max(r_0, \tilde{r}) + 1]$. Тогда согласно (3), условиям 1), А) и теореме Вейерштрасса будем иметь

$$u^*(x) \geq \int_0^{r_0} V(x, t)G(g(t)) dt \geq G(\alpha) \min_{x \in [r_0, \max(r_0, \tilde{r}) + 1]} \left(\int_0^{r_0} V(x, t) dt \right) := l_2. \quad (50)$$

Так как $u(x) \leq \xi - \beta$, $x \in \mathbb{R}^+$, то из (5) и (10) сразу следует, что

$$u(x) \leq \frac{\xi - \beta}{\lambda} \int_0^x V(x, t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (51)$$

Итак, для $x \in [0, r_0)$

$$u^*(x) \geq \frac{\lambda G(\alpha)}{\xi - \beta} u(x), \quad (52)$$

для $x \in [r_0, \max(r_0, \tilde{r}) + 1]$

$$u^*(x) \geq \frac{l_2}{\xi - \beta} u(x), \quad (53)$$

а для $x > \tilde{r}$

$$u^*(x) \geq \frac{l_1}{\xi - \beta} u(x). \quad (54)$$

Из (52)–(54) вытекает, что

$$u^*(x) \geq \min \left\{ \frac{\lambda G(\alpha)}{\xi - \beta}, \frac{l_1}{\xi - \beta}, \frac{l_2}{\xi - \beta} \right\} u(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (55)$$

Из (22) сразу получаем, что

$$\frac{\lambda G(\alpha)}{\xi - \beta} \in (0, 1). \quad (56)$$

Докажем, что $\frac{l_i}{\xi - \beta} \in (0, 1)$, $i = 1, 2$. Действительно, принимая во внимание условие А), а также условие с) и соотношения (10), (3), будем иметь

$$0 < \frac{l_1}{\xi - \beta} \leq \frac{\lambda G(\gamma)}{2(\xi - \beta)} < \frac{\lambda G(\xi)}{2(\xi - \beta)} = \frac{1}{2}, \quad (57)$$

$$0 < \frac{l_2}{\xi - \beta} \leq \frac{\lambda G(\alpha)}{\xi - \beta} < \frac{\lambda G(\xi)}{\xi - \beta} = 1. \quad (58)$$

Таким образом, если обозначим через $\sigma^* := \min \left\{ \frac{\lambda G(\alpha)}{\xi - \beta}, \frac{l_1}{\xi - \beta}, \frac{l_2}{\xi - \beta} \right\}$, то в силу (55)–(58) и соотношения (44) получаем

$$\sigma^* = \min \left\{ \frac{l_1}{\xi - \beta}, \frac{l_2}{\xi - \beta} \right\} \in (0, 1) \quad (59)$$

и

$$u(x) \geq u^*(x) \geq \sigma^* u(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (60)$$

Из (60) в частности следует, что

$$\sigma^*(u(t) + g(t)) \leq u^*(t) + g(t) \leq u(t) + g(t), \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (61)$$

Принимая во внимание условия А), В), 1) в силу (5) из (61) получаем, что

$$\varphi(\sigma^*)u(x) \leq u^*(x) \leq u(x), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Далее, рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 1, приходим к неравенствам

$$0 \leq u(x) - u^*(x) \leq \tilde{C}\tilde{k}^n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (62)$$

где $\tilde{k} := \frac{1 - \varphi(\varepsilon\sigma^*)}{1 - \varepsilon\sigma^*}$, $\varepsilon \in (0, 1)$ — произвольное число, а

$$\tilde{C} := (\xi - \beta)(1 - \sigma^*).$$

В неравенстве (62), устремляя номер n к бесконечности, имеем, что $u(x) \equiv u^*(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$.

Таким образом, теорема полностью доказана.

3.2. Примеры

В конце работы приведем несколько примеров прикладного характера для функций V, G и g , удовлетворяющих всем условиям доказанных теорем 1–3. Сначала приведем примеры ядра V :

1°. $V(x, t) = \mathring{V}(x - t)$, $(x, t) \in \Pi$, где функция \mathring{V} обладает следующими свойствами:

$$\mathring{V}(\tau) > 0, \quad \tau \in \mathbb{R}^+, \quad \mathring{V} \in C(\mathbb{R}^+). \quad (63)$$

$$\mathring{V}(\tau) \text{ монотонно убывает на } \mathbb{R}^+ \text{ и } \int_0^\infty \mathring{V}(\tau) d\tau = \lambda < +\infty. \quad (64)$$

2°. $V(x, t) = \mathring{V}(x - t) + \varepsilon\mathring{V}(x + t)$, $(x, t) \in \Pi$, где $\varepsilon \in [0, 1]$ — числовой параметр, а функция \mathring{V} удовлетворяет условиям (63), (64).

3°. $V(x, t) = \mathring{V}(x - t)\mu(t)$, $(x, t) \in \Pi$, где \mathring{V} обладает свойствами (63), (64), а $\mu \in C(\mathbb{R}^+)$, μ монотонно возрастает на \mathbb{R}^+ и $0 < \mu(t) \leq 1$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Прямой проверкой можем убедиться, что приведенные примеры 1°–3° удовлетворяют условиям 1)–4). Действительно, проверим, например, выполнение условий 1)–4) для примера 2°. Так как \mathring{V} обладает свойством (63), то условие 1) выполняется. Поскольку $\mathring{V}(\tau) \downarrow$ на \mathbb{R}^+ , то из представления ядра V сразу следует условие 2). Докажем теперь, что функция $\int_0^x V(x, t) dt$ монотонно возрастает на \mathbb{R}^+ . Из представления 2° сразу следует, что

$$\psi(x) := \int_0^x V(x, t) dt = \int_0^x \mathring{V}(\tau) d\tau + \varepsilon \int_x^{2x} \mathring{V}(\tau) d\tau, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (65)$$

Принимая во внимание (63) и (64), из (65) будем иметь

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \mathring{V}(x) + 2\varepsilon\mathring{V}(2x) - \varepsilon\mathring{V}(x) = (1 - \varepsilon)\mathring{V}(x) + 2\varepsilon\mathring{V}(2x) \\ &\geq \min\{1 - \varepsilon, 2\varepsilon\}(\mathring{V}(x) + \mathring{V}(2x)) > 0, \quad x \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

С другой стороны, $\psi(x) \leq \int_0^{2x} \mathring{V}(\tau) d\tau < \int_0^\infty \mathring{V}(\tau) d\tau = \lambda$ и $\psi(+\infty) = \lambda$. Поэтому условие 3) также выполняется. Наконец, проверим выполнение условия 4). Учитывая (63) и (64), получим

$$0 < V(x, t) \leq \mathring{V}(0) + \varepsilon\mathring{V}(0) = (1 + \varepsilon)\mathring{V}(0) < +\infty, \quad (x, t) \in \Pi.$$

Таким образом, $V(x, t)$ является ограниченной функцией на множестве Π . Приведем теперь примеры нелинейных функция, удовлетворяющих условиям теорем 1 и 3:

$G_1)$ $G(u) = u^{1/\alpha_0}$, $u \in \mathbb{R}^+$, $\alpha_0 > 1$ — числовой параметр;

$G_2)$ $G(u) = \gamma(1 - e^{-u^{1/\alpha_0}})$, $\gamma > 1$, $\alpha_0 > 1$ — числовые параметры.

Подробно остановимся на примере G_2 . Во-первых очевидно, что $G(0) = 0$,

$$G'(u) = \frac{1}{\alpha_0} \gamma u^{\frac{1}{\alpha_0}-1} e^{-u^{1/\alpha_0}} > 0,$$

$$G''(u) = -\frac{\gamma}{\alpha_0^2} e^{-u^{1/\alpha_0}} \left(u^{\frac{1}{\alpha_0}-1}\right)^2 - \gamma \left(1 - \frac{1}{\alpha_0}\right) \frac{1}{\alpha_0} e^{-u^{1/\alpha_0}} u^{\frac{1}{\alpha_0}-2} < 0, \quad u > 0.$$

Следовательно, условие $A)$ выполняется. Проверим теперь условие $B)$. С этой целью сперва рассмотрим следующую вспомогательную функцию:

$$\tilde{G}(u) = \gamma(1 - e^{-u}), \quad u \geq 0. \quad (66)$$

Поскольку $\tilde{G}(0) = 0$, $\tilde{G}'(u) = \gamma e^{-u} > 0$, $\tilde{G}''(u) = -\gamma e^{-u} < 0$, $u \geq 0$, то функция $\frac{\tilde{G}(u)}{u}$ монотонно убывает на $(0, +\infty)$. Значит, при всяком $\delta \in (0, 1]$ имеет место неравенство

$$\frac{\tilde{G}(\delta u)}{\delta u} \geq \frac{\tilde{G}(u)}{u}, \quad u > 0,$$

откуда следует, что

$$\tilde{G}(\delta u) \geq \delta \tilde{G}(u), \quad u > 0.$$

Так как $\tilde{G}(0) = 0$, то последнее неравенство остается в силе также для $\delta = 0$ и $u = 0$. Таким образом,

$$\tilde{G}(\delta u) \geq \delta \tilde{G}(u), \quad \delta \in [0, 1], \quad u \in \mathbb{R}^+. \quad (67)$$

Следовательно, учитывая (66) и (67), для примера G_2 будем иметь

$$G(\sigma u) = \tilde{G}((\sigma u)^{1/\alpha_0}) = \tilde{G}(\sigma^{1/\alpha_0} u^{1/\alpha_0}) \geq \sigma^{1/\alpha_0} \tilde{G}(u^{1/\alpha_0}) = \sigma^{1/\alpha_0} G(u), \quad (68)$$

$$\sigma \in [0, 1], \quad u \in \mathbb{R}^+.$$

Итак, если в качестве функции φ выбрать $\varphi(\sigma) = \sigma^{1/\alpha_0}$, то получаем условие G_2 для примера G_2).

Для полноты изложения приведем также пример функции G , удовлетворяющей условиям теоремы 2:

$$G_3) \quad G(u) = \frac{1}{2}(\gamma(1 - e^{-u}) + u), \quad \gamma > 1, \quad u \in \mathbb{R}^+.$$

Проверка условий $A)$ и $C)$ для примера G_3 осуществляется аналогично.

Наконец, приведем примеры функции g , удовлетворяющие условиям $a)$ – $c)$:

$$g_1) \quad g(x) = 1 - \varepsilon e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad \varepsilon \in (0, 1) \text{ — параметр,}$$

$$g_2) \quad g(x) = \begin{cases} |\cos x|, & x \in \left[0, \frac{7\pi}{2}\right] \\ 1 - e^{-(x - \frac{7\pi}{2})}, & x \in \left(\frac{7\pi}{2}, +\infty\right). \end{cases}$$

Для примеров $g_1)$ и $g_2)$ условия $a)$ – $c)$ выполняются очевидным образом. Отметим лишь, что в случае примера $g_2)$ в качестве числа $r^* > 0$ можем выбрать любое число большее, чем $\frac{7\pi}{2}$.

В конце работы следует отметить, что приведенные примеры G_1 , G_2 , $g_1)$, 1° – 3° имеют прикладное значение в приведенных во введении отраслях физики и биологии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Keller J.J.** Propagation of simple non-linear waves in gas filled tubes with friction // *Z. Angew. Math. Phys.* 1981. Vol. 32, no. 2. P. 170–181. <https://doi.org/10.1007/BF00946746>
2. **Schneider W.R.** The general solution of a non-linear integral equation of convolution type // *Z. Angew. Math. Phys.* 1982. Vol. 33, no. 1. P. 140–142. <https://doi.org/10.1007/BF00948318>
3. **Okrasinski W.** Nonlinear Volterra integral equations with convolution kernel // *Extracta Math.* 1989. Vol. 4, no. 2. P. 51–80.
4. **Askhabov S.N.** On an integral equation with sum kernel and an inhomogeneity in the linear part // *Differ. Equat.* 2021. Vol. 57, no. 2. P. 1185–1194.
5. **Okrasinski W.** On the existence and uniqueness of non-negative solutions of a certain non-linear convolution equation // *Ann. Polon. Math.* 1979. Vol. 36, no. 1. P. 61–72.
6. **Okrasinski W.** On a non-linear convolution equation occurring in the theory of water percolation // *Ann. Pol. Math.* 1980. Vol. 37, № 2. P. 223–229.
7. **Askhabov S.N., Karapetyants N.K., Yakubov A.Ya.** Integral equations of convolution type with power nonlinearity and systems of such equations // *Dokl. Math.* 1990. Vol. 41, no. 2. P. 323–327.
8. **Askhabov S.N., Betilgiriev M.A.** Nonlinear integral equations of convolution type with almost increasing kernels in cones // *Differ. Equ.* 1991. Vol. 27, no. 2. P. 234–242.
9. **Bushell P.J., Okrasinski W.** Nonlinear Volterra integral equations with convolution kernel // *J. London Math. Soc.* 1990. Vol. s2–41, no. 2. P. 503–510. <https://doi.org/10.1112/jlms/s2-41.3.503>
10. **Brunner H.** *Volterra integral equations: an introduction to theory and applications.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 405 p. ISBN: 1107098726.
11. **Bushell P.J., Okrasinski W.** Nonlinear Volterra integral equations and the Apéry identities // *Bull. London Math. Soc.* 1992. Vol. 24, № 5. P. 478–484.
12. **Kilbas A.A., Saigo M.** On solution of nonlinear Abel–Volterra integral equation // *J. Math. Anal. Appl.* 1999. Vol. 229, no. 1. P. 41–60. <https://doi.org/10.1006/JMAA.1998.6139>
13. **Асхабов С.Н.** Интегральное уравнение Вольтерра со степенной нелинейностью // *Чеб. сб.* 2022. Т. 23, № 5. С. 6–19. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-5-6-19>
14. **Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А., Петросян А.С.** Вопросы существования, отсутствия и единственности решения одного класса нелинейных интегральных уравнений на всей прямой с оператором типа Гаммерштейна — Стилтеса // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2024. Т. 30, № 1. С. 249–269. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2024-30-1-249-269>

Поступила 12.01.2025

После доработки 1.03.2025

Принята к публикации 10.03.2025

Петросян Айкануш Самвеловна

канд. физ.-мат. наук

доцент кафедры высшей математики, физики и прикладной механики

Национальный аграрный университет Армении

г. Ереван

e-mail: Naikuhi25@mail.ru

Хачатрян Хачатур Агавардович

д-р физ.-мат. наук, профессор

зав. кафедрой теории функций и дифференциальных уравнений

Ереванский государственный университет;

Институт математики НАН Армении

г. Ереван

e-mail: khachatur.khachatryan@ysu.am

REFERENCES

1. Keller J.J. Propagation of simple non-linear waves in gas filled tubes with friction. *Z. Angew. Math. Phys.*, 1981, vol. 32, no. 2, pp. 170–181. <https://doi.org/10.1007/BF00946746>

2. Schneider W.R. The general solution of a non-linear integral equation of convolution type. *Z. Angew. Math. Phys.*, 1982, vol. 33, no. 1, pp. 140–142. <https://doi.org/10.1007/BF00948318>
3. Okrasinski W. Nonlinear Volterra integral equations with convolution kernel. *Extracta Math.*, 1989, vol. 4, no. 2, pp. 51–80.
4. Askhabov S.N. On an integral equation with sum kernel and an inhomogeneity in the linear part. *Differ. Equ.*, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 1185–1194. <https://doi.org/10.1134/S001226612109007X>
5. Okrasinski W. On the existence and uniqueness of non-negative solutions of a certain non-linear convolution equation. *Ann. Polon. Math.*, 1979, vol. 36, no. 1, pp. 61–72.
6. Okrasinski W. On a non-linear convolution equation occurring in the theory of water percolation. *Ann. Polon. Math.*, 1980, vol. 37, no. 2, pp. 223–229.
7. Askhabov S.N., Karapetyants N.K., Yakubov A.Ya. Integral equations of convolution type with power nonlinearity and systems of such equations. *Dokl. Math.*, 1990, vol. 41, no. 2, pp. 323–327.
8. Askhabov S.N., Betilgiriev M.A. Nonlinear integral equations of convolution type with almost increasing kernels in cones. *Differ. Equ.*, 1991, vol. 27, no. 2, pp. 234–242.
9. Bushell P.J., Okrasinski W. Nonlinear Volterra integral equations with convolution kernel. *J. London Math. Soc.*, II Ser., 1990, vol. s2–41, no. 3, pp. 503–510. <https://doi.org/10.1112/jlms/s2-41.3.503>
10. Brunner H. *Volterra integral equations: an introduction to theory and applications*. Cambridge, Cambridge Univer. Press, 2017, 405 p. ISBN: 1107098726.
11. Bushell P.J., Okrasinski W. Nonlinear Volterra integral equations and the Apéry identities. *Bull. London Math. Soc.*, 1992, vol. 24, no. 5, pp. 478–484.
12. Kilbas A.A., Saigo M. On solution of nonlinear Abel–Volterra integral equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 1999, vol. 229, no. 1, pp. 41–60. <https://doi.org/10.1006/JMAA.1998.6139>
13. Askhabov S.N. Volterra integral equation with power nonlinearity. *Cheb. Sb.*, 2022, vol. 23, no. 5, pp. 6–19 (in Russian). <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-5-6-19>
14. Khachatryan A.Kh., Khachatryan Kh.A., Petrosyan H.S. Questions of existence, absence, and uniqueness of a solution to one class of nonlinear integral equations on the whole line with an operator of Hammerstein–Stieltjes type. *Tr. In-ta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 1, pp. 249–269 (in Russian). <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2024-30-1-249-269>

Received January 12, 2025

Revised March 1, 2025

Accepted March 10, 2025

Funding Agency: The research of the second author was carried out with the financial support of the Science Committee of the RA within the framework of a scientific project No. 23RL-1A027.

Haykanush Samvelovna Petrosyan, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Armenian National Agrarian University, 0009, Yerevan, Republic of Armenia, e-mail: Haykuhi25@mail.ru.

Khachatur Aghavardovich Khachatryan, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Yerevan State University, 0025, Yerevan; Institute of Mathematics NAS, 0019, Yerevan, Republic of Armenia, e-mail: khachatur.khachatryan@ysu.am.

Cite this article as: H. S. Petrosyan, Kh. A. Khachatryan. On the global solvability of one class of nonlinear integral equations of Hammerstein–Volterra type on the nonnegative half-line. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 2, pp. 181–194.