

УДК 517.977

ДВУМЕРНОЕ МНОЖЕСТВО ДОСТИЖИМОСТИ МАШИНЫ ДУБИНСА ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ И ИНТЕГРАЛЬНОМ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА УПРАВЛЕНИЕ

В. С. Пацко, Г. И. Трубников, А. А. Федотов

В рамках математической модели “машина Дубинса” исследуется множество достижимости на плоскости. Предполагается, что скалярное управление стеснено комбинированным ограничением. Оно включает геометрическое ограничение на мгновенные значения управления и интегральное квадратичное ограничение на управление в целом. В основе построения множества достижимости лежит принцип максимума Понтрягина, формулируемый для движений, приходящих на его границу. Исследована структура возникающих экстремальных движений. Такие движения состоят из участков, являющихся эластическими Эйлера, и участков с постоянным управлением. Выписаны формулы для нахождения констант сопряженной системы принципа максимума. На их основе вводится способ однопараметрического описания границы множества достижимости. Приведены примеры численного расчета границы множества достижимости. Показано отличие получаемого множества от множества, которое является пересечением двух множеств достижимости, построенных только для случая геометрического ограничения и только для случая интегрального ограничения.

Ключевые слова: машина Дубинса, геометрическое и интегральное ограничения на управление, принцип максимума Понтрягина, двумерное множество достижимости, параметрическое описание границы, эластический Эйлер, численное моделирование.

V. S. Patsko, G. I. Trubnikov, A. A. Fedotov. Two-dimensional reachable set of Dubins car with both geometric and integral constraints on control.

Within the framework of the mathematical model “Dubins car”, the reachable set on the plane is investigated. It is assumed that scalar control is constrained by a combined constraint. It includes a geometric constraint on the instantaneous control values and an integral quadratic constraint on the control as a whole. The construction of the reachable set is based on the Pontryagin maximum principle formulated for motions arriving at its boundary. The structure of emerging extreme motions is investigated. These motions consist of parts that are Euler elasticae and parts with constant control. Formulas for finding the constants of the conjugate system of the maximum principle are written out. On their basis, a method of one-parameter description of the reachable set boundary is introduced. Examples of numerical calculations of the reachable set boundary are given. The difference between the resulting set and the set that is the intersection of two reachable sets constructed only for the case of the geometric constraint and only the integral constraint is shown.

Keywords: Dubins car, geometric and integral constraints on control, Pontryagin maximum principle, two-dimensional reachable set, parametric description of the boundary, Euler elasticae, numerical modelling.

MSC: 93C15, 93B03, 65K15, 33E05

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-2-fon-05

1. Введение

В прикладных задачах математической теории управления часто используется двумерное множество достижимости [1] машины Дубинса в заданный момент времени t_f при оговоренном геометрическом ограничении

$$|u(t)| \leq \nu, \quad t \in [t_0, t_f]. \quad (1.1)$$

Множество достижимости включает в себя все точки на плоскости x, y , в которые можно прийти в момент t_f при помощи допустимого управления $u(\cdot)$ (без учета направления вектора скорости в момент t_f). Величину скорости считают постоянной. Управление $u(t)$ задает мгновенную угловую скорость поворота вектора скорости.

Интегральное квадратичное ограничение

$$\int_{t_0}^{t_f} u^2(t) dt \leq \mu \quad (1.2)$$

для машины Дубинса также рассматривается в ряде задач управления (см., например, [2; 3]). Экстремальные движения представляют собой эластики Эйлера [4–6]. Двумерное множество достижимости машины Дубинса при интегральном квадратичном ограничении исследовано в работах [7; 8].

В данной работе рассматривается случай, когда допустимое управление стеснено как геометрическим ограничением (1.1), так и интегральным ограничением (1.2). Двумерное множество достижимости обозначим через $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$.

В случае линейной управляемой системы общего вида случай совместных (геометрических и интегральных) ограничений исследовался в статье [9]. Кинематическая модель “машина Дубинса” — нелинейная. Для описания допустимых управлений, ведущих на границу множества достижимости $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$, мы используем принцип максимума Понтрягина (ПМП). Теоретическое обоснование такой возможности приведено в работе [10].

Особенность комбинированного случая состоит в том, что при построении границы множества достижимости $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ возникают составные движения, состоящие из эластик Эйлера и дуг окружностей. При выходе управления на край геометрического ограничения движение идет некоторое время по дуге окружности. Движение по эластикам Эйлера реализуется на промежутках времени, на которых нет выхода управления на края геометрического ограничения.

Статья организована следующим образом. После постановки задачи в разд. 2 идет краткий разд. 3 о свойствах симметрии исследуемого множества достижимости. Из первого свойства следует, в частности, что для понимания возможных конфигураций множеств достижимости $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ достаточно рассмотреть случай $t_f = 1$. В разд. 4, посвященном использованию ПМП, выписываются три варианта условия максимума для управлений, ведущих на границу множества достижимости. Первые два характеризуют экстремальные движения, вдоль которых существенным является только геометрическое или только интегральное ограничение. Третий вариант соответствует комбинированному случаю. Для этого случая описана структура экстремальных управлений и показано, что такие управления, как и во втором варианте, являются непрерывными. В разд. 5 доказана теорема о том, что в комбинированном случае движения, ведущие на границу множества достижимости, имеют не более одного момента смены знака управления. Анализируются возможные варианты движений и указываются соотношения для поиска констант сопряженной системы принципа максимума. Способ параметрического построения кривых, составляющих границу множества достижимости, описывается в разд. 6. Приведены примеры расчета двумерных множеств достижимости.

2. Постановка задачи

Пусть движение управляемого объекта на плоскости описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \cos\varphi, \quad \dot{y} = \sin\varphi, \quad \dot{\varphi} = u. \quad (2.1)$$

Здесь x, y — координаты геометрического положения, φ — угол наклона вектора скорости, отсчитываемый против часовой стрелки от положительного направления оси x . Величина скорости равна 1. Начальный момент времени t_0 полагаем равным нулю. Начальные значения $x(t_0), y(t_0), \varphi(t_0)$ также считаем нулевыми. Допустимыми являются измеримые интегрируемые с квадратом на $[t_0, t_f]$ программные управления $u(\cdot)$.

Множество достижимости $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$, где $t_f > t_0$, есть совокупность всех точек $(x, y)^\top$, в каждую из которых возможен перевод системы (2.1) в момент t_f из начального фазового состояния $(x(t_0), y(t_0), \varphi(t_0))^\top = (0, 0, 0)^\top$ при помощи некоторого допустимого управления $u(\cdot)$. Множество $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ ограничено и замкнуто (см., например, [3; 11]).

Цель статьи — описание границы множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$.

Пусть ∂ — символ границы множества. Символом $a^0(t_f)$ обозначим точку $(x(t_f), y(t_f))^\top = (t_f, 0)^\top$, порождаемую управлением $u(t) \equiv 0$. Имеем $a^0(t_f) \in \partial\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$.

3. Свойства симметрии

Отметим два свойства симметрии, обусловленные спецификой кинематики системы (2.1).

1) Пусть значения $t_f^{(1)}, \mu^{(1)}, \nu^{(1)}$ и $t_f^{(2)}, \mu^{(2)}, \nu^{(2)}$ таковы, что

$$t_f^{(1)} \mu^{(1)} = t_f^{(2)} \mu^{(2)}, \quad t_f^{(1)} \nu^{(1)} = t_f^{(2)} \nu^{(2)}.$$

Тогда

$$\mathcal{G}(t_f^{(2)}, \mu^{(2)}, \nu^{(2)}) = \alpha \mathcal{G}(t_f^{(1)}, \mu^{(1)}, \nu^{(1)}), \quad \alpha = t_f^{(2)} / t_f^{(1)} = \mu^{(1)} / \mu^{(2)} = \nu^{(1)} / \nu^{(2)}.$$

Для случая только интегрального ограничения аналогичное свойство симметрии установлено в [12]. Доказательство с незначительными изменениями сохраняется и для случая, когда совместно действуют интегральное и геометрическое ограничения.

2) Множество $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ на плоскости x, y зеркально симметрично относительно оси x . Такое свойство следует из того, что допустимые программные управления $u(t)$ и $-u(t)$, $t \in [0, t_f]$, отличающиеся только знаком, дают в момент t_f на порождаемых движениях две точки на плоскости x, y , симметричные относительно оси x .

4. Принцип максимума Понтрягина

Введем обозначение $\mathcal{G}(t_f, \nu)$ для множества достижимости системы (2.1) при наличии только геометрического ограничения (1.1) на управление. Аналогично пусть $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ — символ множества достижимости системы (2.1) при интегральном ограничении (1.2).

Очевидно, что $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu) \subset \mathcal{G}(t_f, \mu) \cap \mathcal{G}(t_f, \nu)$.

1) Опираясь на работы [3; 10; 13; 14], запишем принцип максимума Понтрягина (ПМП) для управлений, ведущих на границу множества достижимости $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$.

1а) Возможен случай, когда часть границы множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ (или же вся граница) совпадает с частью границы множества $\mathcal{G}(t_f, \nu)$. Любое управление $u^*(\cdot)$, ведущее на $\partial\mathcal{G}(t_f, \nu)$ (соответствующее движение обозначим $(x^*(\cdot), y^*(\cdot), \varphi^*(\cdot))^\top$), удовлетворяет [14] почти всюду по t условию максимума, которое записывается в виде

$$\max_{|v| \leq \nu} \{\psi_3(t)v\} = \psi_3(t)u^*(t). \quad (4.1)$$

Здесь $\psi_3(t)$ — компонента некоторого невырожденного решения сопряженной к (2.1) системы

$$\dot{\psi}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_2 = 0, \quad \dot{\psi}_3 = \psi_1 \sin \varphi^*(t) - \psi_2 \cos \varphi^*(t). \quad (4.2)$$

Поскольку множество достижимости рассматривается в координатах x, y , то выполнено условие трансверсальности $\psi_3(t_f) = 0$.

Экстремальное управление $u^*(\cdot)$ является кусочно-постоянным и имеет не более одного момента переключения [1]. Скачок управления происходит с $+\nu$ на 0 или с $-\nu$ на $+\nu$. Симметричные варианты: с $-\nu$ на 0 или с $+\nu$ на $-\nu$. Движение без переключения — это движение по дуге окружности с управлением $+\nu$ или $-\nu$. Нетрудно показать, что если переключение осуществляется с одного крайнего значения управления на другое, то продолжительность второго

участка постоянства управления по крайней мере в два раза превышает продолжительность первого участка.

1б) Возможен также случай, когда часть границы множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ совпадает с частью границы множества $\mathcal{G}(t_f, \mu)$. Любое управление $u^*(\cdot)$, ведущее на $\partial\mathcal{G}(t_f, \mu) \setminus \{a^0(t_f)\}$, удовлетворяет [3; 13] условию максимума, которое записывается в виде

$$\max_v \{ \psi_3(t)v - v^2 \} = \psi_3(t)u^*(t) - (u^*(t))^2. \quad (4.3)$$

Здесь также $\psi_3(t)$ — компонента некоторого невырожденного решения системы (4.2). Экстремальное управление в силу (4.3) рассчитывается по формуле $u^*(t) = \psi_3(t)/2$, $t \in [t_0, t_f]$, и является непрерывным. Условие трансверсальности $\psi_3(t_f) = 0$ [13] влечет за собой утверждение [7] о том, что управление $u^*(\cdot)$ имеет на (t_0, t_f) не более одного момента смены знака.

Соответствующие движения являются эластичками Эйлера [4; 5]. Поскольку угол в момент t_f не зафиксирован, то такие эластички иногда называют свободными [15]. Если в некоторый момент $t^\diamond \in (t_0, t_f)$ происходит смена знака управления, то $(t_f - t^\diamond) > 2(t^\diamond - t_0)$. Невозможны экстремальные движения, для которых $u(t) = 0$ на некотором интервале $(\bar{t}, \hat{t}) \in (t_0, t_f)$.

1в) К третьему случаю отнесем все остальные точки множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$, не подпадающие под 1а и 1б. Из работы [10] вытекает, что условие максимума принимает форму

$$\max_{|v| \leq \nu} \{ \psi_3(t)v - v^2 \} = \psi_3(t)u^*(t) - (u^*(t))^2. \quad (4.4)$$

При этом сопряженная система также записывается в виде (4.2), однако факт невырожденности ее решения, для которого справедливо условие максимума (4.4), заранее не оговаривается. Установим его. Если $\psi_1 = 0$ и $\psi_2 = 0$, то $\psi_3(t) \equiv \text{const}$. Из условия трансверсальности $\psi_3(t_f) = 0$ получаем $\psi_3(t) \equiv 0$. В силу условия максимума (4.4) имеем $|u^*(t)| \equiv \nu$. Но тогда $\nu^2 t_f \leq \nu$. По свойству экстремальных управлений, ведущих на $\partial\mathcal{G}(t_f, \nu)$, это означает, что для любой точки на $\partial\mathcal{G}(t_f, \nu)$ расход интегрального ресурса управления не больше μ и, значит, $\partial\mathcal{G}(t_f, \nu) = \partial\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$. Последнее противоречит тому, что в случае 1в рассматриваемые точки границы множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ не подпадают под случай 1а. Таким образом, в условии максимума (4.4) так же, как и ранее, нужно считать невырожденным решение сопряженной системы (4.2).

Из условия максимума (4.4) следует, что $u^*(t) = \psi_3(t)/2$, если $|\psi_3(t)/2| < \nu$. Имеем $u^*(t) = \nu$ при $\psi_3(t)/2 \geq \nu$ и $u^*(t) = -\nu$ при $\psi_3(t)/2 \leq -\nu$. Управление $u^*(\cdot)$ является непрерывным.

Отметим, что

$$(\partial\mathcal{G}(t_f, \nu) \cap \partial\mathcal{G}(t_f, \mu)) \cap (\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu) \setminus \{a^0(t_f)\}) = \emptyset.$$

В самом деле, пусть $(\hat{x}, \hat{y})^\top \in \partial\mathcal{G}(t_f, \mu) \cap \partial\mathcal{G}(t_f, \nu)$ и $(\hat{x}, \hat{y})^\top \in \mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$. Тогда в эту точку ведет некоторое управление $\hat{u}(\cdot)$, которое удовлетворяет как геометрическому, так и интегральному ограничениям. Поскольку $(\hat{x}, \hat{y})^\top \in \partial\mathcal{G}(t_f, \mu)$, то управление $\hat{u}(\cdot)$ является непрерывным и для него выполнено условие $\hat{u}(t_f) = \psi_3(t_f)/2 = 0$. С другой стороны, $(\hat{x}, \hat{y})^\top \in \partial\mathcal{G}(t_f, \nu)$, поэтому управление $\hat{u}(\cdot)$ должно быть кусочно-постоянным со значениями $0, \pm\nu$. Следовательно, $\hat{u}(t) \equiv 0$. Но это особое управление, ведущее в точку $a^0(t_f) \in \partial\mathcal{G}(t_f, \nu)$.

Таким образом, любая точка на границе множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$, удовлетворяет одному и только одному из случаев 1а, 1б, 1в.

2) Для любого движения, идущего на $\partial\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$, введем понятие прямой переключения на плоскости x, y .

Учитывая вид сопряженной системы (4.2), заключаем, что если $\psi_1 = 0$ и $\psi_2 = 0$, то $\psi_3(t) \equiv \text{const}$. С учетом условия трансверсальности получаем, что $\psi_3(t) \equiv 0$. Приходим к противоречию с условием невырожденности сопряженной системы (4.2).

Пусть хотя бы одно из чисел ψ_1, ψ_2 не равно нулю. Тогда в силу (2.1) и (4.2) имеем

$$\psi_3(t) = \psi_1 y^*(t) - \psi_2 x^*(t) + C. \quad (4.5)$$

Следовательно, $\psi_3(t) = 0$ тогда и только тогда, когда точка $(x^*(t), y^*(t))^T$ геометрического положения системы (2.1) в момент t при выбранном $u^*(\cdot)$ удовлетворяет уравнению

$$\psi_1 y - \psi_2 x + C = 0 \quad (4.6)$$

прямой переключения (ПП). На любой прямой, параллельной ПП, значение ψ_3 , постоянно.

Направление на ПП выберем так, чтобы оно совпадало с направлением вектора $(\psi_1, \psi_2)^T$. Одну из двух открытых полуплоскостей, определяемых ПП, куда направлен вектор $(-\psi_2, \psi_1)^T$, назовем положительной (расположена слева от ПП). В силу (4.1)–(4.5) в ней получаем $u^*(t) > 0$. Противоположную полуплоскость считаем отрицательной. В ней имеем $u^*(t) < 0$. Для точек $(x(t), y(t))^T$ на ПП управление $u^*(t)$ является нулевым.

Подчеркнем, что любому экстремальному движению соответствует своя ПП.

В случае 1а в момент переключения управления (а также в последний момент t_f) движение находится на ПП. При скачке экстремального управления в некоторый момент $t^\#$ со значения ν на 0 или с $-\nu$ на 0 движение идет по ПП на $[t^\#, t_f]$.

В случае 1б в момент смены знака управления (и в момент t_f) движение находится на ПП. Возможны только следующие варианты управлений на $[t_0, t_f]$: положительное (отрицательное) управление, что означает движение по одну сторону от ПП с попаданием на ПП в момент t_f (крайний случай — начинаем в момент t_0 тоже с ПП); один момент смены знака с попаданием на ПП в момент t_f .

В случае 1в введем полосу S на плоскости геометрических координат, две стороны которой параллельны ПП. Полоса определяется прямыми со значениями $\psi_3 = 2\nu$ и $\psi_3 = -2\nu$. Обозначим их соответственно $S^{(+)}$ и $S^{(-)}$. Внутри полосы управление определяется формулой $u^*(t) = \psi_3(t)/2$. Поэтому соответствующие участки движения, как и в случае 1б, представляют собой эллипсы Эйлера, не имеющие точек касания с ПП. Вне полосы управление задается формулой $u^*(t) = \nu \text{sign}(\psi_3(t)) = \text{const}$ и соответствующие участки движения представляют собой дуги окружностей.

На рис. 1 показано экстремальное движение, удовлетворяющее условию максимума (4.4) для случая 1в. Движение пересекает ПП в три момента времени. Симметрия движения и его периодичность подчеркиваются ортогональными к ПП линиями.

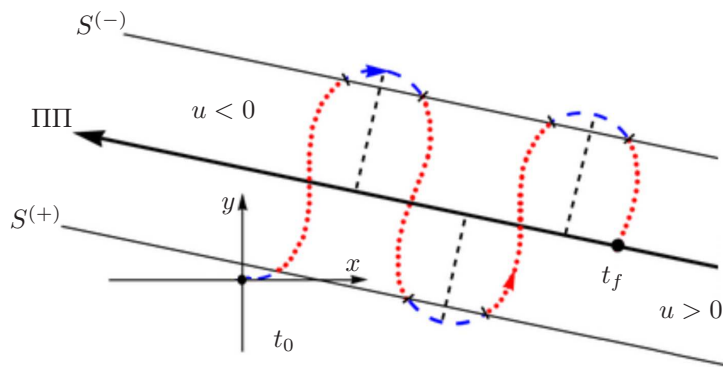


Рис. 1. Экстремальное движение при комбинированном управлении (случай 1в).

Сформулируем утверждение, в котором укажем некоторые дополнительные (непосредственно вытекающие из ПМП) свойства экстремальных движений для случая 1в.

Утверждение 1. Пусть движение системы (2.1) в случае 1в на промежутке $[t_0, t_f]$ порождается непрерывным управлением $u(\cdot)$ и при этом выполнен ПМП. Тогда управление $u(\cdot)$ изменяет знак не более чем конечное число раз. Более того:

а) точки геометрического положения системы (2.1) на плоскости x, y в моменты смены знака управления $u(\cdot)$ лежат на ПП;

б) если движение $(x(\cdot), y(\cdot))^T$ попадает на ПП не менее трех раз, то время между любыми соседними моментами нахождения на ПП одинаково; после любого момента пересечения ПП движение идет по траектории, центрально симметричной (относительно точки пересечения) участку траектории до момента пересечения;

в) если движение $(x(\cdot), y(\cdot))^T$ попадает на ПП хотя бы один раз, то накопленный угол на каждом интервале постоянства знака управления по абсолютной величине меньше 2π .

В следующем разделе данное утверждение будет уточнено. А именно, покажем, что в случае 1в экстремальное управление, ведущее на $\partial\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$, имеет не более одного момента смены знака.

5. Движения, ведущие на границу множества достижимости $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$

На границу множества достижимости $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ ведут экстремальные движения, относящиеся к случаям 1а, 1б, 1в. Их описание для случаев 1а и 1б известно. Это движения, удовлетворяющие необходимым условиям [1; 7] вывода на $\partial\mathcal{G}(t_f, \nu)$ и $\partial\mathcal{G}(t_f, \mu)$. В данном разделе будем рассматривать движения, относящиеся к случаю 1в.

5.1. Свойства движений при комбинированном управлении

Теорема 1. Пусть управление $u(\cdot)$ ведет на границу множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ и относится к случаю 1в. Тогда оно является непрерывным, удовлетворяет ПМП, условию $u(t_f) = 0$ и имеет не более одного момента смены знака на (t_0, t_f) . При смене знака в некоторый момент $t^\diamond \in (t_0, t_f)$ выполнено неравенство $(t_f - t^\diamond) > 2(t^\diamond - t_0)$. Кроме того, движение, порождаемое управлением $u(\cdot)$, не содержит самопересечений на (t_0, t_f) . Если значение $u(t)$ положительно (соответственно отрицательно) на всем интервале (t_0, t_f) или же на втором интервале (t^\diamond, t_f) постоянства знака, то для конечной точки $(x(t_f), y(t_f))^T \in \partial\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ выполнено неравенство $y(t_f) \geq 0$ ($y(t_f) \leq 0$).

Доказательство. Пусть $u(\cdot)$ — некоторое управление, которое порождает движение $(x(\cdot), y(\cdot))^T$, ведущее на $\partial\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ и относящееся к случаю 1в. Такое управление удовлетворяет ПМП и условию трансверсальности $\psi_3(t_f) = 0$. Из условия трансверсальности следует, что в момент t_f точка $(x(t_f), y(t_f))^T$ находится на ПП.

Предположим от противного, что после некоторого момента $\bar{t} \in [t_0, t_f)$ движение пересекает ПП на интервале (\bar{t}, t_f) не менее двух раз. Последние на $(\bar{t}, t_f]$ три момента нахождения движения на ПП в порядке возрастания обозначим через t_1, t_2, t_3 , где $t_3 = t_f$. Пусть P_1, P_2, P_3 — соответствующие точки на траектории.

Считаем для определенности, что на интервале (t_2, t_3) значение $u(t)$ экстремального управления положительно. Случай отрицательного управления является симметричным.

В силу утверждения 1 расстояние между точками P_1 и P_2 такое же, как между точками P_2 и P_3 . Возможны лишь три варианта: точки P_1, P_2, P_3 расположены на ПП в обратном порядке относительно направления ПП; точки P_1, P_2, P_3 расположены на ПП в прямом порядке; точки P_1, P_2, P_3 совпадают.

1) Упорядоченные по возрастанию времени точки P_1, P_2, P_3 расположены в обратном порядке относительно направления ПП (рис. 2).

Проведем касательную из точки $P_3 = (x(t_f), y(t_f))^T$ к участку движения, расположенному между точками P_1 и P_2 . Точку касания обозначим $\hat{P} = (x(\hat{t}), y(\hat{t}))$. Построим следующее вспомогательное движение $t \rightarrow (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))^T$. До момента \hat{t} оно совпадает с исходным, а после момента \hat{t} идет симметрично исходному относительно построенной касательной. На рис. 2 участок вспомогательного движения на промежутке $[\hat{t}, t_f]$ изображен сплошной линией. Вспомогательное движение приходит в момент t_f в точку P_3 , и его управление $\tilde{u}(\cdot)$ расходует такой же

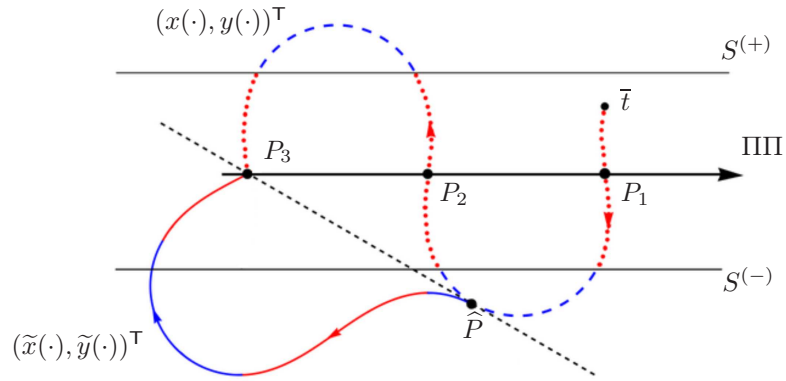


Рис. 2. Пояснение к п. 1 доказательства теоремы 1.

ресурс, что и исходное управление $u(\cdot)$. При этом $\tilde{u}(t) = u(t)$ на интервале $[t_0, \hat{t}]$ и $\tilde{u}(t) = -u(t)$ на промежутке $[\hat{t}, t_f]$. Принцип максимума для вспомогательного движения не выполнен, так как управление $\tilde{u}(\cdot)$ является разрывным в момент \hat{t} .

Таким образом, предположив наличие двух или более моментов смены знака для управления $u(\cdot)$ на (t_0, t_f) , приходим к противоречию с выполнением ПМП.

Рассмотрим теперь кривую на рис. 2 как траекторию, выпущенную в момент t_f в обратном времени из последней точки $P_3 = (x(t_f), y(t_f))^T$ с тем же углом по отношению к ПП. Из способа построения вспомогательного движения следует, что начальная точка $P_0 = (x(t_0), y(t_0))^T$ может лежать лишь между точками \hat{P} и P_3 . Тогда экстремальная кривая между точками P_0 и P_3 не имеет самопересечений. Проведем через начальную точку P_0 прямую по касательной к траектории. Конечная точка P_3 лежит слева от такой прямой, если смотреть по направлению вектора скорости $(\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0))^T$. Такое направление соответствует направлению оси x . Стало быть, $y(t_f) \geq 0$. Предположим, что точка P_0 расположена на дуге $\hat{P}P_2$ и $t^\circ = t_2$ – момент прохождения точки P_2 . С учетом центральной симметрии дуг P_2P_3 и P_1P_2 относительно точки P_2 получаем, что $(t_f - t^\circ) > 2(t^\circ - t_0)$.

2) Точки P_1, P_2, P_3 расположены в прямом порядке относительно направления ПП (рис. 3).

Проведем касательную из точки P_3 к участку движения между точками P_2 и P_3 . Пусть $\hat{P} = (x(\hat{t}), y(\hat{t}))^T$ – точка касания. Рассмотрим вспомогательное движение, совпадающее

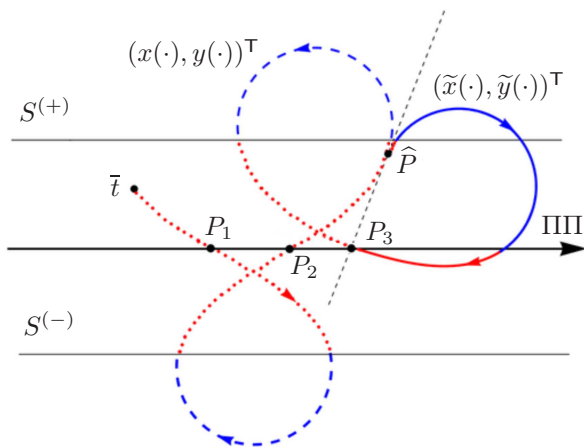


Рис. 3. Пояснение к п. 2 доказательства теоремы 1.

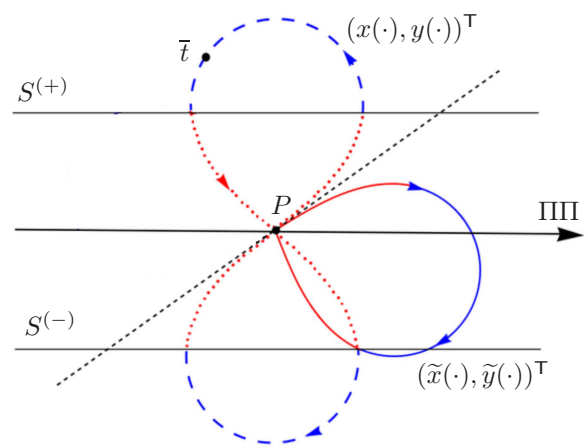


Рис. 4. Пояснение к п. 3 доказательства теоремы 1.

с исходным до момента \hat{t} , а после момента \hat{t} проходящее симметрично исходному движению относительно построенной касательной. Вспомогательное движение приходит в момент t_f в точку P_3 . Управление $\tilde{u}(\cdot)$ на нем тратит интегральный ресурс, равный ресурсу исходного управления $u(\cdot)$, но ПМП нарушается из-за разрывности управления в момент \hat{t} .

Отметим, что начальная точка $P_0 = (x(t_0), y(t_0))^T$ может находиться лишь на участке $[\hat{P}, P_3)$. В таком случае траектория на (t_0, t_f) не имеет самопересечения. На интервале (t_0, t_f) нет момента пересечения ПП. Конечная точка P_3 лежит слева от прямой, проходящей через начальную точку P_0 с направлением по скорости движения.

3) Имеет место равенство $P_1 = P_2 = P_3$ (рис. 4). Для такой точки будем также использовать обозначение P . Экстремальное движение идет по “бантику” и в моменты t_1, t_2 на интервале $(\bar{t}, t_f) = (\bar{t}, t_3)$ проходит через узловую точку P . Движение заканчивается в момент t_3 в точке P . На промежутке $[t_2, t_3]$ движение идет по верхней петле бантика, а на промежутке $[t_1, t_2]$ — по нижней. Если на (t_0, t_1) нет моментов прохождения точки P , то начальная точка в момент t_0 находится на верхней петле. В противном случае расположение начальной точки на бантике может быть произвольным.

Проведем прямую через точку P по направлению движения в момент t_2 . Симметрично относительно данной прямой отразим участок движения, соответствующий промежутку времени $[t_2, t_3]$. Полагаем, что вспомогательное движение $(\tilde{x}(\cdot), \tilde{y}(\cdot))^T$ совпадает с исходным на промежутке $[t_0, t_2)$ и продолжается на $[t_2, t_3]$ петлей, полученной симметричным отражением.

Вспомогательное движение приходит в момент t_f в конечную точку $P = P_3$. Управления $u(\cdot)$ и $\tilde{u}(\cdot)$ расходуют равное значение интегрального ресурса. Имеем $\tilde{u}(t_2) = u(t_2) = 0$. Однако в момент t_2 знак управления $\tilde{u}(\cdot)$ не изменяется. Следовательно, не выполнен ПМП для вспомогательного движения. Поэтому исходное движение не может приходиться на $\partial\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$.

Таким образом, начальная точка P_0 может лежать только на верхней петле бантика. Не исключается совпадение точек P_0 и $P_3 = P$, т.е. траектория может начинаться в точке P и заканчиваться в этой точке. Самопересечения траектории на (t_0, t_f) нет. Конечная точка P находится не ниже оси x , проходящей через начальную точку P_0 с направлением по вектору скорости в начальный момент.

Теорема доказана.

5.2. Грубые необходимые условия и кривые на их основе

Теорема 1 сформулирована для экстремальных движений, относящихся к случаю 1в. В случае 1б также справедливо свойство о не более чем одном моменте смены знака управления для движений, ведущих на границу множества достижимости [7].

Необходимые условия для случая 1а следуют из теорем 3, 4 в [1, с. 211, 212]. В частности установлено, что любая точка на $\partial\mathcal{G}(t_f, \nu)$ при $y \geq 0$ порождается либо кусочно-постоянным управлением со скачком с $u(t-0) = \nu$ на $u(t+0) = 0$, либо кусочно-постоянным управлением со скачком с $u(t-0) = -\nu$ на $u(t+0) = \nu$. Если $y \leq 0$, экстремальные управления отличаются только знаком. В точку $a^0(t_f) \in \partial\mathcal{G}(t_f, \nu)$ ведет управление $u(t) \equiv 0$.

При построении границы множества $\mathcal{G}(t_f, \nu)$ в верхней полуплоскости (т.е. при $y \geq 0$) можем использовать эти необходимые условия (назовем их грубыми) для описания кривой $F^{(+)}$ (скачок управления с $u = \nu$ на $u = 0$ в момент переключения t°) и кривой $F^{(-,+)}$ (скачок управления с $u = -\nu$ на $u = \nu$ в момент переключения t°). Построение кривой $F^{(+)}$ начинается из точки $a^0(t_f)$. Момент переключения t° рассматриваем как параметр, который изменяется от $t_0 = 0$ до t_f . Построив кривую $F^{(+)}$, продолжаем ее кривой $F^{(-,+)}$, вновь изменяя t° от $t_0 = 0$ до t_f . Точку стыковки кривых $F^{(+)}$ и $F^{(-,+)}$ обозначим символом b . На рис. 5 показаны два множества достижимости для $t_f = 1$ и $\nu = 4.5$ (слева), 5.8 (справа). Отмечены кривые $F^{(+)}$ и $F^{(-,+)}$.

Грубые необходимые условия приведения на $\partial\mathcal{G}(t_f, \nu)$, заложенные в описание кривых $F^{(+)}$ и $F^{(-,+)}$, не являются достаточными. Поэтому на $F^{(+)}$ и $F^{(-,+)}$ могут быть точки, не принад-

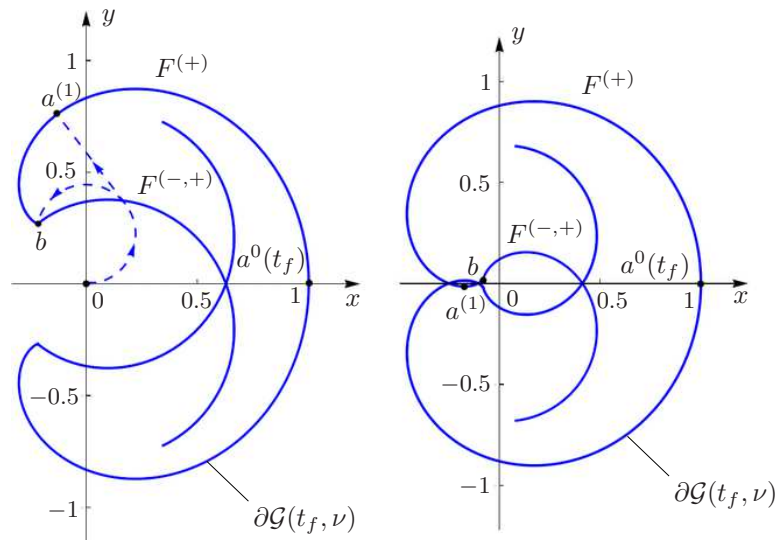


Рис. 5. Два множества $\mathcal{G}(t_f, \nu)$ и кривые $F^{(+)}$, $F^{(-,+)}$.

лежащие $\partial\mathcal{G}(t_f, \nu)$. Такие точки надо выявлять и выкидывать. Помимо точек, для которых в конце движения реализуется $y(t_f) < 0$, следует удалить [1] точки, при попадании в которые продолжительность участка с постоянным управлением $u(t) = \nu$ превышает величину 2π . Кроме того, на кривой $F^{(-,+)}$ выкидываются точки, для которых продолжительность первого участка с постоянным управлением $u(t) = -\nu$ превышает величину $\pi/2$.

1) Нас интересует построение границы множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$. Выясним, как найти точки, подпадающие под случай 1а, т. е. относящиеся к граничным точкам множества $\mathcal{G}(t_f, \nu)$.

Двигаясь по точкам кривой $F^{(+)}$, подсчитаем расход квадрата управления на промежутке $[t_0, t_f]$ вдоль экстремального движения системы (2.1), ведущего во взятую точку. Максимальное значение расхода на кривой $F^{(+)}$ реализуется в последней точке b и равно $\nu^2(t_f - t_0) = \nu^2 t_f$. Для любой точки на кривой $F^{(-,+)}$ расход управления равен $\nu^2 t_f$. Таким образом, если $\nu^2 t_f \leq \mu$, то любое экстремальное движение приходит на соединение кривых $F^{(+)}$ и $F^{(-,+)}$ без нарушения интегрального ресурса. Отсюда следует, что при выполнении указанного неравенства экстремальные движения попадают на верхнюю часть границы множества $\mathcal{G}(t_f, \nu)$ без нарушения интегрального ограничения μ .

В силу симметрии множества достижимости относительно оси x заключаем, что если $\nu^2 t_f \leq \mu$, то $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu) = \mathcal{G}(t_f, \nu)$.

Предположим, что $\nu^2 t_f > \mu$. Обозначим символом $a^{(1)}$ точку кривой $F^{(+)}$, для которой расход управления равен μ . Дуга $(a^0(t_f), a^{(1)})$ лежит во внутренности множества $\mathcal{G}(t_f, \mu)$. На рис. 5 показано расположение точки $a^{(1)}$ для $\mu = 10$ (множество слева) и для $\mu = 27.4$ (множество справа). После точки $a^{(1)}$ на склеенной кривой $F^{(+)} + F^{(-,+)}$ не может быть точек, которые принадлежат $\partial\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$, ибо для таких точек расход интегрального ресурса строго больше μ . Начальный участок кривой $F^{(+)}$, лежащий в полуплоскости $y \geq 0$, принадлежит $\partial\mathcal{G}(t_f, \nu)$ (см. [1]). На его общей части с дугой $[a^0(t_f), a^{(1)})$ интегральный расход управления строго меньше μ . Стало быть, такой общий участок принадлежит $\partial\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$.

2) На $\partial\mathcal{G}(t_f, \mu)$ также могут быть участки, которые одновременно принадлежат $\partial\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$. Граница множества $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ формируется [7] из участков гладкой кривой, построенной на основе следующих грубых необходимых условий: экстремальное управление имеет не более одного момента смены знака; при наличии момента смены знака длина первого участка строго меньше половины длины второго участка. Параметрическое описание такой кривой возможно [8] с использованием эллиптических интегралов и эллиптических функций Якоби. Один из аргументов этих специальных функций, называемый модулем k эллиптического интеграла, выступает в роли параметра. Область значений для k есть отрезок $[0, 1]$. Кривая грубых

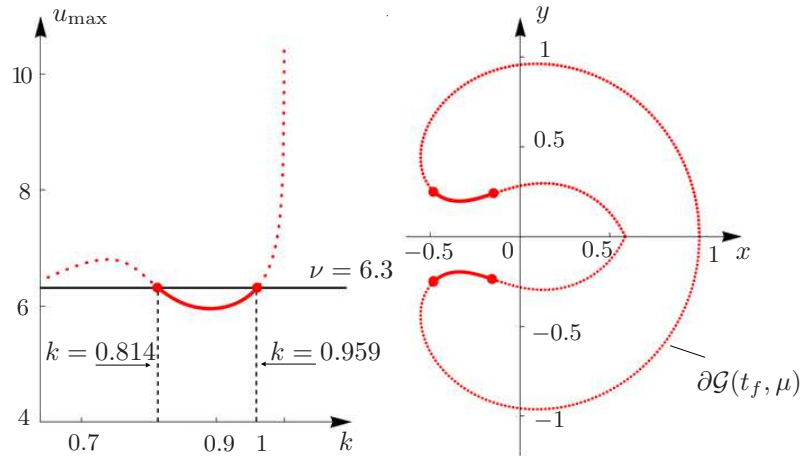


Рис. 6. График функции $k \rightarrow u_{\max}(k)$ и его использование для выделения части границы множества $\mathcal{G}(t_f, \mu)$, принадлежащей границе множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$.

необходимых условий параметризуется через k на некотором интервале $[k_{\min}, 1) \subset [0, 1]$.

Подразумевая наличие только интегрального ограничения, рассмотрим график $k \rightarrow u_{\max}(k)$, где $u_{\max}(k)$ — максимальное значение управления $u(\cdot)$ на $[t_0, t_f]$, ведущего в точку кривой грубых необходимых условий, соответствующую значению k . Типичный вид кривой u_{\max} , построенной численно для $t_f = 1$ и $\mu = 18$, показан на рис. 6. Дополнив график кривой u_{\max} горизонтальной прямой $u = \nu$, можем выделить части графика, лежащие ниже или на этой прямой.

Если таких частей нет (т.е. прямая $u = \nu$ проходит ниже графика), то в любую точку кривой грубых необходимых условий, а значит, и в любую точку верхней (выше оси x) границы множества $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ ведет управление, максимальное значение которого на $[t_0, t_f]$ больше ν . Поэтому такая точка находится вне множества $\mathcal{G}(t_f, \nu)$, а значит, вне множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$.

В случае, когда пересечение прямой $u = \nu$ с графиком функции u_{\max} выделяет части графика, лежащие ниже или на прямой, то для каждого значения параметра k , попадающего в какой-то из таких промежутков, реализуемое экстремальное управление удовлетворяет условию $u(t) \leq \nu$, $t \in [t_0, t_f]$. Если соответствующая точка $(x(t_f), y(t_f))^T$ принадлежит $\partial\mathcal{G}(t_f, \mu)$, то она одновременно принадлежит $\partial\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$.

Стало быть, следует построить границу множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ новым способом лишь для промежутков параметра $k < 1$, на которых $u_{\max}(k) > \nu$.

3) При выполнении неравенства $\nu^2 t_f \leq \mu$ вся кривая $k \rightarrow u_{\max}(k)$ лежит выше (или в некоторых точках на) прямой $u = \nu$. Мы установили, что при этом $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu) = \mathcal{G}(t_f, \nu)$. Это означает, что эластики Эйлера ни при каком k не входят в виде составной части в движения, ведущие на $\partial\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$. Если $\nu^2 t_f > \mu$, то эластики Эйлера уже проявляют себя при образовании $\partial\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$.

Опираясь на пп. 1)–3), можем сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 2. а) Если $\nu^2 t_f \leq \mu$, то $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu) = \mathcal{G}(t_f, \nu)$.

б) Если $\nu^2 t_f > \mu$, то точки границы множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$, лежащие на дуге $[a^0(t_f), a^1]$, а также на дуге, симметричной ей относительно оси x , принадлежат границе множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$. Других точек границы множества $\mathcal{G}(t_f, \nu)$, которые одновременно принадлежат границе множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$, нет.

в) Точки границы множества $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ принадлежат границе множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ тогда и только тогда, когда для управлений, ведущих в эти точки, выполнено условие $|u(t)| \leq \nu$, $t \in [t_0, t_f]$.

г) Все остальные точки границы множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$, не подпадающие под пп. б) и в), порождаются комбинированным управлением.

5.3. Расчет движений при комбинированном управлении

Рассмотрим движения, относящиеся к случаю 1в. Опираясь на утверждения из теоремы 1 о не более чем одном моменте смены знака экстремального управления и о соотношении длин промежутков с разными знаками управления, приходим к выводу, что движения при комбинированном управлении могут пересекать границу полосы S не более трех раз. Возможные варианты показаны на рис. 7.

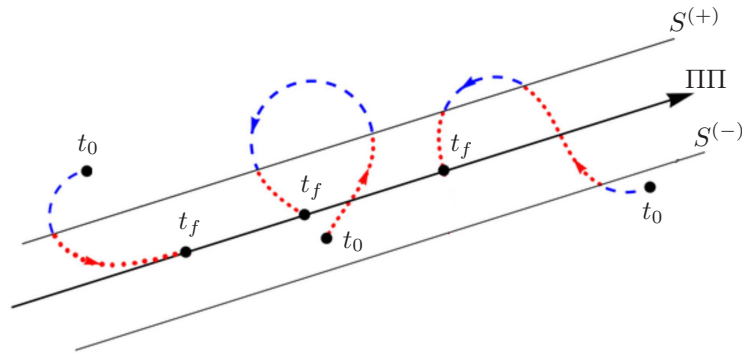


Рис. 7. Варианты экстремальных движений при комбинированном управлении.

В случае одного пересечения (первая кривая на рис. 7 движение начинается вне полосы, до границы полосы осуществляется по дуге окружности и далее идет до прямой переключения по эластике Эйлера. Движение, пересекающее границу полосы два раза (вторая кривая на рис. 7), начинается внутри полосы и доходит до границы полосы по эластике Эйлера. После пересечения границы полосы оно идет по дуге окружности, вновь пересекает границу полосы и заканчивается на ПП. Третья кривая на рис. 7 представляет собой пример движения, пересекающего границу полосы три раза. Движение начинается вне полосы, затем пересекает полосу целиком, вновь возвращается на границу по дуге окружности и далее идет до ПП.

Любое движение в случае 1в может быть задано параметрически на плоскости x, y функциями $x(t), y(t)$, определяемыми в виде

$$x(t) = \int_{t_0}^{t_f} \cos \varphi(t) dt, \quad y(t) = \int_{t_0}^{t_f} \sin \varphi(t) dt$$

с конкретной функцией $\varphi(\cdot)$, порождаемой некоторым экстремальным управлением $u(\cdot)$.

Движение состоит из кривых, которые можно разделить на два типа. Первый тип кривых есть дуга окружности, параметризуемая через тригонометрические функции. Второй — инфлекссионные эластики Эйлера, имеющие параметрическое представление в эллиптических функциях Якоби [16, с. 385, 386].

Формула изменения угла φ для первого типа кривых отличается от формулы для второго типа. Если на некотором отрезке времени движение идет вне полосы S , то на этом отрезке движение является дугой окружности и справедлива формула $\varphi(t) = \pm \nu(t - t_*) + \varphi(t_*)$. Знак плюс или минус определяется в зависимости от положения относительно ПП. Момент t_* есть момент начала движения по окружности. Всегда, когда движение идет внутри полосы S , оно имеет форму эластики Эйлера и угол φ изменяется по формуле

$$\varphi(t) = 2 \arcsin \left(k \operatorname{sn}(\sqrt{\rho}(t + \tau), k) \right) + \beta - \pi. \quad (5.1)$$

В записи формулы (5.1), так же как в разд. 5.2, используется параметр k . Аналогично построению границы множества $\mathcal{G}(t_f, \mu)$, каждому значению k соответствует точка на кривой

грубых необходимых условий при нахождении границы множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$. Дадим объяснение выражению (5.1) и входящим в него неизвестным ρ, β, τ . Данная формула записана с использованием эллиптических функций Якоби [17] и получена при помощи анализа свободных колебаний математического маятника. Каждому колебанию маятника соответствует некоторая эластика Эйлера. Такая связь известна как кинетическая аналогия Кирхгофа [5, разд. 12]. В силу условия трансверсальности имеем $\dot{\varphi}(t_f) = 0$, и число ρ выражается через k, τ следующим образом:

$$\rho = \left(\frac{K(k)}{t_f + \tau} \right)^2, \quad K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}}.$$

Здесь $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода [17]. Запишем выражение для β . Первый участок каждого движения есть либо эластика Эйлера, либо дуга окружности. В первом случае число β находится из начального условия

$$\varphi(t_0) = 2 \arcsin(k \operatorname{sn}(\sqrt{\rho}(t_0 + \tau), k)) + \beta - \pi.$$

Во втором случае существует момент t_1 , который соответствует точке соединения дуги окружности и эластики Эйлера (в этот момент движение пересекает границу полосы S). Значение β можно определить из равенства

$$\pm \nu(t_1 - t_0) + \varphi(t_0) = 2 \arcsin(k \operatorname{sn}(\sqrt{\rho}(t_1 + \tau), k)) + \beta - \pi.$$

Знак плюс или минус также зависит от положения начальной точки относительно ПП.

Значение числа τ может быть найдено численно из условия (1.2), записанного в виде равенства, если рассмотреть его как уравнение относительно τ при известном значении k . Для взятия интеграла в левой части (1.2) разобьем его по аддитивности на две группы интегралов в соответствии с участками движения вне полосы S и внутри нее. Сумма интегралов, отвечающих движению вне полосы S , равна сумме длин всех отрезков интегрирования, умноженной на ν^2 , так как для данной группы интегралов выполнено равенство $u(t) = \pm \nu$. Для второй группы интегралов управление $u(t)$ равняется производной по времени от (5.1). Интеграл от квадрата такого управления можно найти за счет свойств упомянутых эллиптических функций Якоби. Пусть моменты t_l, t_r такие, что $t_0 \leq t_l < t_r \leq t_f$ и на отрезке времени $[t_l, t_r]$ движение находится внутри полосы S . Тогда справедливо равенство

$$\int_{t_l}^{t_r} u^2(t) dt = 4\rho(k^2 - 1)(t_r - t_l) + 4\sqrt{\rho} \left(\varepsilon(\sqrt{\rho}(t_r + \tau), k) - \varepsilon(\sqrt{\rho}(t_l + \tau), k) \right). \quad (5.2)$$

На основе такого способа взятия интеграла в левой части (1.2) запишем уравнение для каждого из трех типов движений, приводящих на границу множества достижимости $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$. Численным решением каждого из уравнений будет $\tau = \tau(k)$. Для всех моментов времени t_1, t_2, t_3 , используемых далее, получены аналитические формулы записи через k, τ .

1) Пусть t_1 — момент пересечения движением границы полосы. Движение по окружности происходит на промежутке $[t_0, t_1]$, движение по эластике — на промежутке $[t_1, t_f]$. Условие (1.2) дает уравнение

$$\mu = (t_1 - t_0)\nu^2 + 4\rho(k^2 - 1)(t_f - t_1) + 4\sqrt{\rho} \left(\varepsilon(\sqrt{\rho}(t_f + \tau), k) - \varepsilon(\sqrt{\rho}(t_1 + \tau), k) \right). \quad (5.3)$$

2) Пусть $t_1 < t_2$ — моменты пересечения движением границы полосы. Участок движения по окружности один (на промежутке $[t_1, t_2]$), а участков с движением по эластике два. Для каждого движения справедливо, что обе эти части в виде эластик можно рассматривать как участки одной и той же эластики Эйлера. Это позволяет при расчете траты ресурса заменить промежуток $[t_0, t_1]$ промежутком $[t_2, t_2 + (t_1 - t_0)]$ равной длины. Такая замена удобна,

потому что отрезкам с различными левыми границами соответствуют различные значения τ . Если же оба промежутка имеют одинаковую левую границу (в данном случае t_2), то отсутствует двойственность при определении τ и выполняется уравнение

$$\begin{aligned} \mu = & (t_2 - t_1)\nu^2 + 4\rho(k^2 - 1)(t_f - t_2 + t_1 - t_0) \\ & + 4\sqrt{\rho}\left(\varepsilon(\sqrt{\rho}(t_f + \tau), k) + \varepsilon(\sqrt{\rho}(t_2 + (t_1 - t_0) + \tau), k) - 2\varepsilon(\sqrt{\rho}(t_2 + \tau), k)\right). \end{aligned} \quad (5.4)$$

3) Пусть $t_1 < t_2 < t_3$ — моменты пересечения движением границы полосы. В этом случае участков с движением по дуге окружности два и для расчета траты энергетического ресурса нужно просчитать сумму длин отрезков $[t_0, t_1]$ и $[t_2, t_3]$. Участков движения по эластике также два, и они также соответствуют частям некоторой эластике Эйлера. Более того, в данном случае сумма интегралов от квадрата управления на промежутках $[t_1, t_2]$ и $[t_3, t_f]$ равна утроенному интегралу только по второму из этих промежутков в силу свойств симметрии участков движения по эластике Эйлера. Уравнение, основанное на (1.2), имеет следующий вид

$$\mu = (t_1 - t_0 + t_3 - t_2)\nu^2 + 12\rho(k^2 - 1)(t_f - t_3) + 12\sqrt{\rho}\left(\varepsilon(\sqrt{\rho}(t_f + \tau), k) - \varepsilon(\sqrt{\rho}(t_3 + \tau), k)\right). \quad (5.5)$$

З а м е ч а н и е. Каждое значение k однозначно задает некоторую эластику Эйлера, участки которой образуют сегменты экстремального движения в случае 1в. Если для управления $u(\cdot)$, определяемого взятым k , выполнено ограничение (1.1), то каждое из уравнений (5.3)–(5.5) вырождается в уравнение для случая только интегрального ограничения. Такое уравнение совпадает с (5.2) для $t_l = t_0$, $t_r = t_f$. При этом движение типа 1в полностью лежит в полосе S . Экстремальное движение, ведущее на $\partial\mathcal{G}(t_f, \mu)$ и построенное для такого k , будет совпадать с движением в случае 1в. Этим содержательно объясняется факт того, что часть границы $\partial\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ может проходить по $\partial\mathcal{G}(t_f, \mu)$. Подробное сопоставление эластик Эйлера для границ множеств $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ и $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ при одном и том же значении k требует более подробного анализа и в данной статье не рассматривается.

6. Результаты моделирования

6.1. Схема построения границы множества достижимости при комбинированном ограничении

При построении границы множества достижимости главную роль играет нахождение кривой \mathcal{B}^* на основе грубых необходимых условий. Кривая \mathcal{B}_* симметрична \mathcal{B}^* относительно оси x . Любая точка $(x, y)^\top$ границы множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ при $y \geq 0$ ($y \leq 0$) принадлежит кривой \mathcal{B}^* (\mathcal{B}_*). Выкидывая из кривых \mathcal{B}^* и \mathcal{B}_* точки, не удовлетворяющие полному перечню необходимых условий, изложенных в теореме 1, получаем границу множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$.

Опишем построение кривой \mathcal{B}^* . Начинаем с нахождения точки $a^{(1)}$ на дуге $(a^0(t_f), b)$. Точка $a^{(1)}$ характеризуется тем, что на экстремальном движении (поворот — прямая), ведущем в эту точку, расход управления равен μ . Если такая точка на дуге $(a^0(t_f), b)$ существует, она единственна. В случае, когда точки $a^{(1)}$ нет, то $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu) = \mathcal{G}(t_f, \nu)$ (см. разд. 5.2).

Пусть точка $a^{(1)}$ найдена. Дугу $[a^0(t_f), a^{(1)}]$ возьмем в качестве начального участка кривой \mathcal{B}^* . Для продолжения этой кривой рассматриваем параметр $k \in (0, 1)$. Уменьшая его от единицы, рассматриваем функцию $k \rightarrow u_{\max}(k)$, введенную в разд. 5.2. Используя значение $u_{\max}(k)$, определяем экстремальное управление, ведущее на кривую \mathcal{B}^* . А именно, если $u_{\max}(k) > \nu$, то берем комбинированное управление, описанное в разд. 5.3 (оно реализуется при помощи одного из трех рассмотренных там вариантов). Если $u_{\max}(k) \leq \nu$, то в качестве экстремального берем управление, соответствующее только интегральному ограничению при данном k . Получаемые при переборе k точки $(x(t_f), y(t_f))^\top$ на соответствующих движениях образуют непрерывное продолжение кривой \mathcal{B}^* после точки $a^{(1)}$. Вычисления показывают, что

продолжение кривой \mathcal{B}^* состоит из небольшого числа участков, на каждом из которых действует либо комбинированное управление, либо чисто интегральное управление. По результатам моделирования при различных значениях μ и ν (значение t_f , не теряя общности, полагаем равным 1) можно сделать вывод, что таких участков не больше пяти. При этом число участков, где решение определяется только интегральным ограничением, не больше двух.

Построив кривую \mathcal{B}^* , оставляем на ней лишь точки $(x(t_f), y(t_f))^T$, удовлетворяющие двум дополнительным необходимым условиям попадания на $\partial\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$: $y(t_f) \geq 0$; экстремальное движение $(x(\cdot), y(\cdot))^T$ не имеет самопересечений на (t_0, t_f) . Оставшиеся после такой обработки точки кривой \mathcal{B}^* удовлетворяют всем изложенным в разд. 5 необходимым условиям попадания на $\partial\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$. Аналогичная обработка кривой \mathcal{B}_* не требуется, поскольку ее можно получить из кривой \mathcal{B}^* отражением относительно оси x .

Окончательный итог правильности построения границы множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ требует теоретического исследования свойств кривой \mathcal{B}^* . В частности, следует изучить зависимость ее геометрии от параметров t_f, μ, ν . Численное моделирование показывает, что при фиксированных t_f и μ через любую точку $(\bar{x}, \bar{y})^T$ с $\bar{y} \geq 0$ множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ при некотором $\bar{\nu} \leq \nu$ проходит кривая \mathcal{B}^* , построенная для параметров $t_f, \mu, \bar{\nu}$. Это означает, что изложенные в разд. 5 необходимые условия являются достаточными.

6.2. Примеры множеств достижимости

С учетом свойства симметрии, сформулированного в п. 1) разд. 3, при изучении структуры множества достижимости $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ можно зафиксировать значение $t_f = 1$, а изменять только параметры ν и μ .

Приведем характерные виды множеств достижимости $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$. Такие множества будем изображать заливкой. Также будут показаны границы множеств $\mathcal{G}(t_f, \nu)$ и $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ (при помощи тонкой сплошной и точечной линий соответственно).

На рис. 8 представлен случай $\nu = 4, \mu = 18$. Здесь выполнено неравенство $\nu^2 < \mu$. Имеем $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu) = \mathcal{G}(t_f, \nu) \subset \mathcal{G}(t_f, \mu)$.

Вид множества достижимости $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ при $\nu = 5, \mu = 18$ показан на рис. 9. Здесь никакой участок границы множества $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ (за исключением точки $a^0(t_f)$) не является частью границы множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$. Однако согласно применяемому нами методу построения множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ предварительно надо построить как множество $\mathcal{G}(t_f, \nu)$, так и множество $\mathcal{G}(t_f, \mu)$. Увеличенный фрагмент границы около точки $a^{(1)}$ показан при помощи выноски.

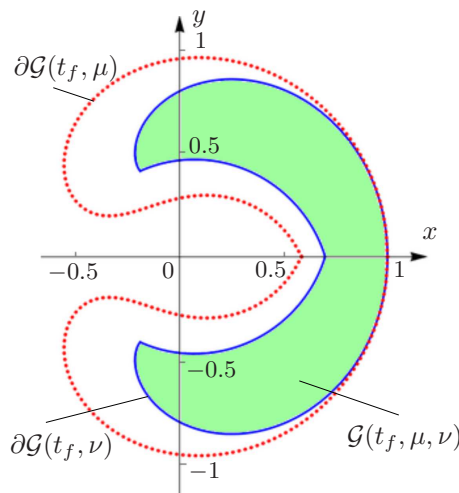


Рис. 8. Множество достижимости $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ совпадает с множеством $\mathcal{G}(t_f, \nu)$; $\mu = 18, \nu = 4$.

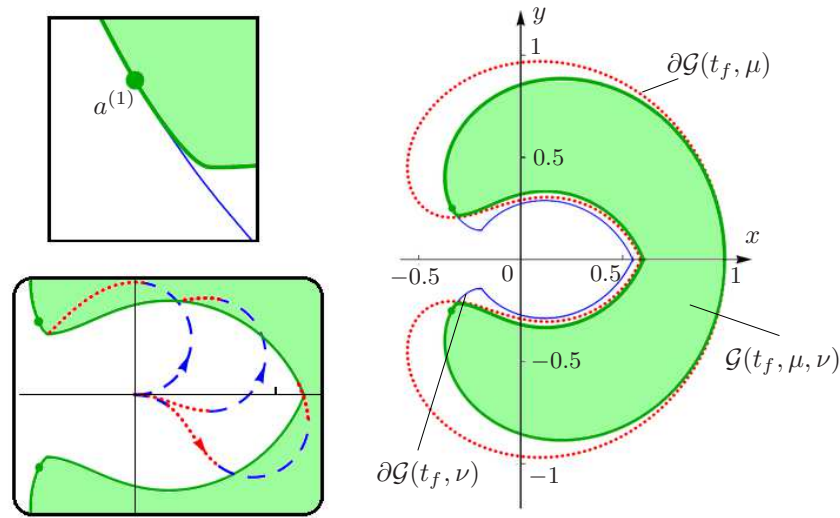


Рис. 9. Случай $\mu = 18$, $\nu = 5$. Часть границы множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ совпадает с участком границы множества $\mathcal{G}(t_f, \nu)$. Оставшаяся часть границы формируется при помощи комбинированных управлений.

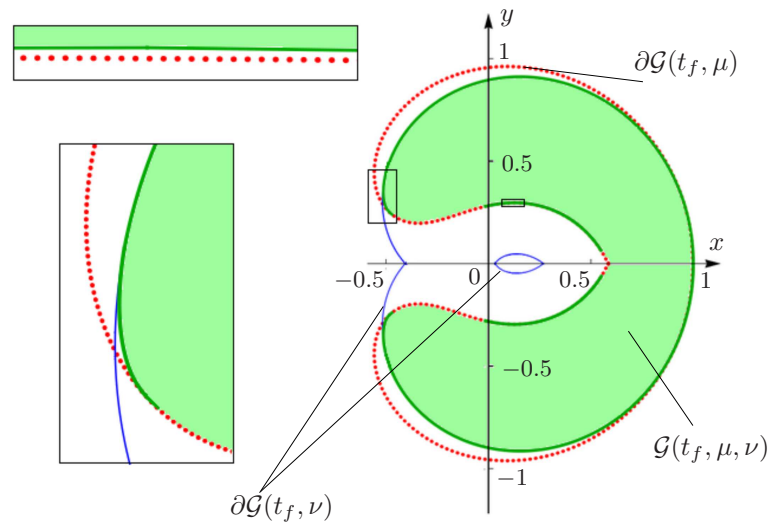


Рис. 10. Случай $\mu = 18$, $\nu = 6.5$. Граница множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ состоит из одного участка границы множества $\mathcal{G}(t_f, \nu)$, трех участков границы множества $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ и четырех участков, формируемых при помощи комбинированных управлений.

Слева внизу изображен еще один фрагмент множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ с тремя комбинированными движениями, ведущими на его границу. Участки движения по окружностям отмечены пунктиром, а движения по эластике Эйлера — точечной линией. Первое движение состоит из двух участков: сначала дуга окружности, затем эластика Эйлера. На втором движении сначала идет эластика, потом — дуга окружности, в конце — снова эластика. Траектория третьего движения состоит из двух дуг окружностей и двух эластик Эйлера.

Рисунок 10 соответствует $\nu = 6.5$, $\mu = 18$ и отличается от рис. 8 и 9 увеличенным значением ν . Здесь множество $\mathcal{G}(t_f, \nu)$ не является односвязным (оно не содержит открытую полость в центре рисунка). Граница множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ при $y \geq 0$ складывается из участка границы

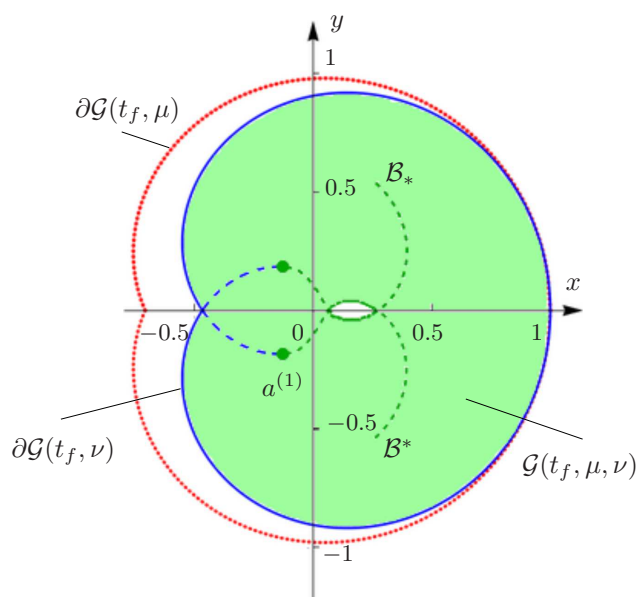


Рис. 11. Множество $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ не является односвязным; $\mu = 33$, $\nu = 7$.

множества $\mathcal{G}(t_f, \nu)$ от точки $a^0(t_f)$ до точки $a^{(1)}$, двух участков границы множества $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ (показаны точечной линией), а также двух участков, порождаемых экстремальными управлениями комбинированного типа. Видно, что множество $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ практически совпадает с пересечением $\mathcal{G}(t_f, \nu) \cap \mathcal{G}(t_f, \mu)$. Имеющиеся отличия поясняются при помощи двух фрагментов.

В предыдущих случаях итоговое множество $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ было односвязным. На рис. 11 дан вариант при $\nu = 7$, $\mu = 33$. Здесь множество $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ не является односвязным. При этом каждое из множеств $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ и $\mathcal{G}(t_f, \nu)$ односвязно. Полость в центре рисунка (без заливки) не принадлежит множеству $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$. Части кривых B^* и B_* , не участвующие в построении $\partial\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$, показаны пунктиром. Внешняя граница множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ совпадает с границей множества $\mathcal{G}(t_f, \nu)$. Имеем $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu) \subset \mathcal{G}(t_f, \nu) \subset \mathcal{G}(t_f, \mu)$.

Заключение

Для нелинейной модели управляемого движения “машина Дубинса” хорошо известно двумерное множество достижимости при геометрическом ограничении на управление. В данной работе к геометрическому ограничению добавляется интегральное квадратичное ограничение. Опираясь на принцип максимума Понтрягина, мы исследовали структуру экстремальных движений, ведущих на границу нового множества достижимости. Итогом является однопараметрическое описание кривых, образующих границу двумерного множества достижимости при совместном (геометрическом и интегральном) ограничении на управление. Результаты численного построения множества достижимости показаны в сравнении с двумерными множествами достижимости, построенными отдельно для случая геометрического ограничения и для случая интегрального ограничения. В дальнейшем планируется исследовать структуру двумерного множества достижимости при интегральном ограничении на допустимые управления из пространства L_p , где $p \in (1, 2]$. Это поможет составить представление о множестве достижимости для случая $p = 1$.

Авторы благодарят Рецензента за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Cockayne E.J., Hall G.W.C.** Plane motion of a particle subject to curvature constraints // SIAM J. Control Optim. 1975. Vol. 13, no. 1. P. 197–220. <https://doi.org/10.1137/0313012>
2. **Ардентов А.А., Сачков Ю.Л.** Решение задачи Эйлера об эластиках // Автоматика и телемеханика. 2009. Вып. 4. С. 78–88.
3. **Гусев М.И., Зыков И.В.** Об экстремальных свойствах граничных точек множеств достижимости управляемых систем при интегральных ограничениях // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 1. С. 103–115. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-1-103-115>
4. **Эйлер Л.** Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. М.: Гостехиздат, 1934. 600 с.
5. **Levien R.** The elastica: a mathematical history / Electrical Engineering and Computer Sciences University of California at Berkeley. Technical Report No. UCB/EECS-2008-103. 2008. URL: <http://www2.eecs.berkeley.edu/Pubs/TechRpts/2008/EECS-2008-103.pdf>
6. **Сачков Ю.Л.** Левоинвариантные задачи оптимального управления на группах Ли, интегрируемые в эллиптических функциях // Успехи мат. наук. 2022. Т. 77, № 1. С. 109–176.
7. **Пацко В.С., Трубников Г.И., Федотов А.А.** Машина Дубинса с интегральным ограничением на управление: двумерное множество достижимости // Материалы междунар. конф. SCDG2024, посвящ. 100-летию Н. Н. Красовского. 2024. С. 242–245.
8. **Трубников Г.И.** Аналитика эллиптических функций при построении двумерного множества достижимости машины Дубинса с интегральным ограничением на управление // Материалы междунар. конф. SCDG2024, посвящ. 100-летию Н. Н. Красовского. 2024. С. 331–335.
9. **Дарьин А.Н., Куржанский А.Б.** Нелинейный синтез управлений при двойных ограничениях // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 11. С. 1476–1484.
10. **Gusev M.I.** Computing the reachable set boundary for an abstract control system: revisited // Ural Math. J. 2023. Vol. 9, no 2. P. 99–108. <https://doi.org/10.15826/umj.2023.2.008>
11. **Huseyin A., Huseyin N.** Precompactness of the set of trajectories of the controllable system described by a nonlinear Volterra integral equation // Math. Model. Anal. 2012. Vol. 17, no. 5. P. 686–695. <https://doi.org/10.3846/13926292.2012.736088>
12. **Patsko V.S., Trubnikov G.I., Fedotov A.A.** Numerical study of a three-dimensional reachable set for a Dubins car under an integral control constraint // Commun. Optim. Theory. 2025. Vol. 2025. Article ID 24. P. 1–33. <https://doi.org/10.23952/cot.2025.24>
13. **Зыков И.В.** О задаче достижимости для нелинейной управляемой системы с интегральными ограничениями // SEUR Workshop Proc. 2017. Vol. 1894. С. 88–97.
14. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 574 с.
15. **Miura T.** Polar tangential angles and free elasticae // Math. in Engineering. 2021. Vol. 3. P. 1–12. <https://doi.org/10.3934/mine.2021034>
16. **Love A.E.H.** A treatise on the mathematical theory of elasticity. 4th ed. NY: Dover Publications, 1944. 643 p.
17. **Сикорский Ю.С.** Элементы теории эллиптических функций: С приложениями к механике. М.: КомКнига, 2006. 368 с.

Поступила 15.02.2025

После доработки 31.03.2025

Принята к публикации 1.04.2025

Опубликована онлайн 7.04.2025

Пацко Валерий Семенович

канд. физ.-мат. наук

ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: patsko@imm.uran.ru

Трубников Георгий Игоревич

математик

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: jora_it@mail.ru

Федотов Андрей Анатольевич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: andreyfedotov@mail.ru

REFERENCES

1. Cockayne E.J., Hall G.W.C. Plane motion of a particle subject to curvature constraints. *SIAM J. Control and Optimiz.*, 1975, vol. 13, no. 1, pp. 197–220. <https://doi.org/10.1137/0313012>
2. Ardentov A.A., Sachkov Y.L. Solution to Euler’s elastic problem. *Autom. Remote Control*, 2009, vol. 70, no. 4, pp. 633–643. <https://doi.org/10.1134/S0005117909040092>
3. Gusev M.I., Zykov I.V. On extremal properties of the boundary points of reachable sets for control systems with integral constraints. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2018, vol. 300, no. 1, pp. S114–S125. <https://doi.org/10.1134/S0081543818020116>
4. Euler L. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*. Geneva, Lausanne, 1744, 354 p. Translated to Russian under the title *Metod nakhozheniya krivyykh liniy, obladayushchikh svoystvami maksimuma, libo minimuma ili resheniye izoperimetricheskoy zadachi, vzyatoy v samom shirokom smysle*, Moscow; Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1934, 600 p.
5. Levien R. *The elastica: a mathematical history*. Univer. California, Berkeley, 2008, 27 p. Available at: <http://www2.eecs.berkeley.edu/Pubs/TechRpts/2008/EECS-2008-103.pdf>.
6. Sachkov Yu.L. Left-invariant optimal control problems on Lie groups that are integrable by elliptic functions. *Russian Math. Surv.*, 2023, vol. 78, no. 1, pp. 65–163. <https://doi.org/10.4213/rm10063e>
7. Patsko V.S., Trubnikov G.I., Fedotov A.A. Dubins car with integral control constraint: two-dimensional reachable set. In: *Proc. Inter. Conf. “Dynamic systems: stability, control, differential games” (SCDG2024) devoted to the 100th anniversary of Academician N. N. Krasovskii*, Yekaterinburg, 2024, pp. 242–245 (in Russian).
8. Trubnikov G.I. Analytics of elliptic functions in the construction of a two-dimensional reachability set of a Dubins car with an integral constraint on control. In: *Proc. Inter. Conf. “Dynamic systems: stability, control, differential games” (SCDG2024) devoted to the 100th anniversary of Academician N. N. Krasovskii*, Yekaterinburg, 2024, pp. 331–335 (in Russian).
9. Dar’in A.N., Kurzhanskii A.B. Nonlinear control synthesis under two types of constraints. *Diff. Equ.*, 2001, vol. 37, no. 11, pp. 1549–1558. <https://doi.org/10.1023/A:1017960614331>
10. Gusev M.I. Computing the reachable set boundary for an abstract control system: revisited. *Ural Math. J.*, 2023, vol. 9, no. 2, pp. 99–108. <https://doi.org/10.15826/umj.2023.2.008>
11. Huseyin A., Huseyin N. Precompactness of the set of trajectories of the controllable system described by a nonlinear Volterra integral equation. *Math. Model. Anal.*, 2012, vol. 17, no. 5, pp. 686–695. <https://doi.org/10.3846/13926292.2012.736088>
12. Patsko V.S., Trubnikov G.I., Fedotov A.A. Numerical study of a three-dimensional reachable set for a Dubins car under an integral control constraint. *Commun. Optimiz. Theory*, 2025. Vol. 2025. Article ID 24. P. 1–33. <https://doi.org/10.23952/cot.2025.24>
13. Zykov I.V. On the reachability problem for a nonlinear control system with integral constraints. In: *Proc. 48th Intern. Youth School-Conf. “Modern problems in mathematics and its applications” (MPMA 2017)*, Yekaterinburg, 2017, vol. 1894, pp. 88–97 (in Russian).
14. Lee E.B., Markus L. *Foundations of optimal control theory*. New York, London, Sydney: John Wiley & Sons, 1967, 576 p. ISBN: 0471522635. Translated to Russian under the title *Osnovy teorii optimal’nogo upravleniya*, Moscow, Nauka Publ., 1972, 576 p.

15. Miura T. Polar tangential angles and free elasticae. *Math. Engineer.*, 2021, vol. 3, no. 4, pp. 1–12.
<https://doi.org/10.3934/mine.2021034>
16. Love A.E.H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. 4th ed. NY, Dover Publ., 1944, 643 p.
17. Sikorskii Y.S. *Elementy teorii ellipticheskikh funktsiy: S prilozheniyami k mekhanike* [Elements of the theory of elliptic functions. With applications to mechanics]. Moscow, KomKniga Publ., 2006, 368 p. ISBN: 5-484-00401-2.

Received February 15, 2025

Revised March 31, 2025

Accepted April 1, 2025

Published online April 7, 2025

Valerii S. Patsko, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: patsko@imm.uran.ru.

Georgii I. Trubnikov, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N.Yeltsin, Yekaterinburg, 620000 Russia,
e-mail: jora_it@mail.ru.

Andrey A. Fedotov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: andreyfedotov@mail.ru.

Cite this article as: V. S. Patsko, G. I. Trubnikov, A. A. Fedotov. Two-dimensional reachable set of Dubins car with both geometric and integral constraints on control. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 2, pp. 162–180.