

УДК 517.977

**ОБ ОЦЕНИВАНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ
ПРИ НЕТОЧНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ПОМЕХИ****Б. И. Ананьев**

Рассмотрены задачи гарантированного оценивания фазовых координат многошаговых динамических систем при наличии неточных ограничений на помехи, которые, в частности, могут быть случайными. Применяется подход, связанный с неточными вероятностями, где вместо средних значений используются функции последовательного нижнего предсказания, обладающие свойствами положительной однородности и супераддитивности. Основное внимание уделяется дискретным по времени системам. Для таких систем обобщается метод динамического программирования при определении информационных множеств. Для работоспособности метода предполагаются дополнительные ограничения на возмущения, обеспечивающие компактность рассматриваемых функционалов в пространстве ограниченных измеримых функций. Приводятся необходимые сведения о частичных порядках и критериях оптимальности для компактных множеств ограниченных функций. Указано условие справедливости метода динамического программирования для систем, обратимых по времени. Исследованы примеры.

Ключевые слова: гарантированное оценивание, информационные множества, динамическое программирование, функции последовательного нижнего предсказания.

B. I. Ananyev. On estimation of dynamical systems under inexact constraints on parameters.

Problems of the guaranteed estimation of phase coordinates for multistep dynamic systems in the presence of inexact restrictions for disturbances, which, in particular, can be random, are considered. An approach involving inexact probabilities is applied, in which functions of coherent lower previsions with properties of positive uniformity and superadditivity are used instead of average values. Main attention is given to discrete-time systems. For these systems, the dynamic programming method when determining information sets is generalized. To ensure justice in the process, further constraints are imposed on the perturbations to maintain the compactness of the functions in the space of limited measurable functions. Information on partial orders and optimality criteria for compact sets of limited functions is included for reference. The condition for a dynamic programming method's justice in time-reversible systems is specified. We investigate examples.

Keywords: guaranteed estimation, information sets, dynamical programming, functions of coherent low prevision.

MSC: 93B99

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-2-15-29

Введение

В задачах гарантированного оценивания [1] обычно предполагается, что неопределенные возмущения подчиняются заданным априорным ограничениям. При этих условиях определяются множества достижимости, информационные множества или интересующие наблюдателя параметры динамической системы. Ограничения могут иметь разнообразный характер: геометрический, интегральный или смешанный. Однако точное задание ограничений не всегда оправдано. В них могут присутствовать другие неизвестные параметры, которые иногда имеют случайный характер. К настоящему времени хорошо известно, что задачи гарантированного оценивания весьма часто сводятся к минимизации функционала, представляющего левую часть неравенства, задающего ограничения на возмущения, а динамическая система при этом рассматривается в обратном времени. При наличии неизвестных параметров в ограничениях такая минимизация затруднительна. Тем не менее в литературе известны подходы к оптимизации неточно заданных функционалов, в том числе и в задачах управления динамическими системами (см., например, [2]). В указанной работе максимизируется среднее целевого функционала, зависящего от управления, для дискретной динамической системы. Однако не

имеется полная информация о вероятностной мере, по которой берется среднее. Тогда используется подход, связанный с неточной вероятностной моделью, а именно, предполагается наличие множества вероятностных мер и вычисляется максимум целевого функционала, где минимум берется по множеству вероятностных мер в расчете на худший случай реализации меры. Основные факты по неточным вероятностям изложены в [3]. Подробный обзор по данной теме имеется в [4]. Теоретические работы в данном направлении находят и практическое применение, например, при оптимальном управлении загрязнением окружающей среды при неточном описании рисков [5]. К сожалению, непосредственно использовать результаты упомянутых работ в задачах оценивания не получается, так как здесь требуется одновременная минимизация по управлениям и мерам. Поэтому в настоящей работе дается подробная адаптация подхода с неточными вероятностями к проблемам оценивания, в основном для систем с дискретным временем. Данный подход к рассматриваемым задачам ранее не применялся. Какие-либо статьи зарубежных авторов по применению подхода к задачам оценивания автору неизвестны.

1. Постановка задачи

1.1. Непрерывные системы

Рассмотрим дифференциальное уравнение с наблюдением

$$\dot{x} = f(t, x, v), \quad t \in [0, T], \quad y = g(t, x) + w,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор, не доступный для измерения; $y \in \mathbb{R}^m$ — вектор измерения; $v \in \mathbb{R}^q$ и $w \in \mathbb{R}^m$ — возмущения, стесненные вместе с начальным состоянием x_0 ограничением

$$h_0(x_0, \omega) + \int_0^T h(t, v, w, \omega) dt \leq 1; \quad (1.1)$$

здесь $\omega \in \Omega$ — параметр. Если параметр известен, то решаем задачу минимизации по $v(\cdot)$ и вводим функцию Беллмана

$$V(t, x, \omega) = \min_{v(\cdot)} J(t, x, v, \omega), \quad \text{где} \quad (1.2)$$

$$J(t, x, v, \omega) = h_0(x_0, \omega) + \int_0^t h(s, v, y(s) - g(s, x), \omega) ds, \quad x(t) = x.$$

Уравнение Беллмана для $V(t, x, \omega)$ имеет вид

$$V_t = \min_v \{ -f'(t, x, v)V_x + h(t, v, y(t) - g(t, x), \omega) \}, \quad (1.3)$$

$$V(0, x, \omega) = h_0(x, \omega).$$

Если решение уравнения (1.3) найдено, то информационное множество (кратко ИМ), содержащее неизвестное состояние $x(t)$, запишется в виде неравенства $\mathcal{X}(t, y, \omega) = \{x : V(t, x, \omega) \leq 1\}$.

Если ω неизвестно, $\omega \in \Omega$, где Ω — хаусдорфов компакт, а функции в (1.1) непрерывны по ω , то вводим функцию

$$W(t, x) = \min_{v(\cdot)} \min_{\omega} J(t, x, v, \omega) = \min_{\omega} V(t, x, \omega), \quad x(t) = x.$$

Тогда ИМ определится в виде неравенства

$$\mathcal{X}(t, y) = \{x : W(t, x) \leq 1\}.$$

Дифференциальные уравнения для W записать затруднительно, но если перейти к функциям

$$\bar{h}_0(x) = \min_{\omega} h_0(x, \omega), \quad \bar{h}(t, v, w) = \min_{\omega} h(t, v, w, \omega)$$

и подставить их в уравнение типа (1.3), то приходим к функции, которая минорирует W снизу, а соответствующее ИМ накрывает $\mathcal{X}(t, y)$ сверху. Заметим, что

$$W(t, x) = \min_{v(\cdot), \mu \in \mathcal{P}(\Omega)} \int_{\Omega} J(t, x, v, \omega) \mu(d\omega),$$

где $\mathcal{P}(\Omega) \subset \text{ba}(\Omega, \mathcal{F})$ — выпуклое множество всех вероятностных мер; \mathcal{F} — борелевская σ -алгебра; $\text{ba}(\Omega, \mathcal{F})$ — банахово пространство конечно-аддитивных мер с нормой-вариацией $|\mu| = v(\mu, \Omega)$. Далее пара (Ω, \mathcal{F}) фиксируется и не указывается. Известно [6], что $\text{ba} = \mathbf{B}^*$, где \mathbf{B} — банахово пространство ограниченных борелевских функций с *sup*-нормой. В силу теоремы Алаоглу $\mathcal{P}(\Omega)$ — слабый* компакт в ba .

Обобщая, предполагаем, что задано выпуклое и замкнутое множество $\underline{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ вероятностных мер и в качестве возмущений *допускаются измеримые ограниченные процессы* с компонентами из \mathbf{B} . Введем функцию \underline{P} на \mathbf{B}

$$\underline{P}(f) = \min_{\mu \in \underline{\mathcal{P}}} \int_{\Omega} f(\omega) \mu(d\omega), \tag{1.4}$$

обладающую свойствами:

- (P1) $\underline{P}(f) \geq \inf f$;
- (P2) $\underline{P}(\lambda f) = \lambda \underline{P}(f)$, $\lambda > 0$ [положительная однородность];
- (P3) $\underline{P}(f + g) \geq \underline{P}(f) + \underline{P}(g)$ [супераддитивность].

Такие функции *последовательного нижнего предсказания*, *coherent low prevision* (англ.) (кратко пнп-функции) известны в литературе [4]. Отображение $\overline{P}(f) = -\underline{P}(-f)$ называется функцией *последовательного верхнего предсказания* (кратко пвп-функцией).

Если условие P3 заменяется на равенство, то $\underline{P} = \overline{P} = P$ и величина P оказывается непрерывным линейным функционалом на \mathbf{B} , т. е. $P \in \text{ba}$, причем P — вероятностная мера. Введем выпуклое и замкнутое множество $\underline{\mathcal{P}} = \{P \geq \underline{P} : P \text{ — линейная пнп-функция}\}$, тогда справедливо (1.4). Таким образом, задание множества $\underline{\mathcal{P}}$ эквивалентно заданию пнп-функции \underline{P} со свойствами (P1)–(P3).

Приходим к следующей задаче: определить множество n -векторных функций $\{x(\cdot) \in \mathbf{B}^n\}$, для которых

$$\min_{v(\cdot, \cdot)} \underline{P}(J(t, x, v, \cdot)) \leq 1, \quad x(t, \cdot) = x(\cdot), \tag{1.5}$$

где J — функционал из (1.2). Данная задача бесконечномерна, но можем рассматривать конечномерный аналог: найти множество $\{x \in \mathbb{R}^n\}$, для которых

$$\min_{v(\cdot, \cdot)} \underline{P}(J(t, x, v, \cdot) | x(t) = x). \tag{1.5}'$$

Пример 1. Рассматривается линейная система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bv, \quad y = Gx + w, \quad t \in [0, T], \\ \underline{P} \left(\int_0^T h'(\cdot) [v'v; w'Rw] dt \right) &\leq 1, \end{aligned}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$; $y \in \mathbb{R}^m$; $v \in \mathbb{R}^q$; матрица R такова, что $R' = R > 0$. Вектор-функция h задана на $\Omega = \{0, 1\}$, $h(0) = [1; 2]$, $h(1) = [2; 1]$, но значение ω неизвестно; x_0 не ограничено и возмущения зависят от ω . Здесь $[a; b] \in \mathbb{R}^2$ — вектор-столбец. Функция \underline{P} определяется следующим образом:

$$\underline{P}(f) = \min\{(1 - \alpha)f(0) + \alpha f(1) : \alpha \in [0.9, 1]\}.$$

Эта функция удовлетворяет аксиомам (P1)–(P3). Требуется определить ИМ $\mathcal{X}(t, y)$ при заданных ограничениях.

Далее задачи типа (1.5), (1.5') обсуждаются для дискретных по времени систем. Непрерывный случай остается для дальнейшего исследования.

1.2. Дискретные системы

Пусть задана многошаговая система

$$x_t = f_t(x_{t-1}, v_t), \quad y_t = g_t(x_{t-1}) + w_t, \quad t \in 1 : T, \quad (1.6)$$

где $x_t \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор; $y_t \in \mathbb{R}^m$ — наблюдаемый вектор; $v_t \in \mathbb{R}^q$ и w_t — помехи. Система (1.6) обратима, если

$$x_{t-1} = F_t(x_t, v_t), \quad t \in 1 : T.$$

Здесь и в (1.6) функции f_t , g_t и F_t непрерывны по аргументам. Обращение всегда возможно для дифференциальных уравнений с условиями существования и продолжимости, если рассматривать кусочно-постоянные возмущения на промежутках дискретизации времени. Плотечные ограничения на возмущения имеют вид

$$\mathcal{J}_T(x_0, v, w, \omega) = h_0(x_0, \omega) + \sum_{t \in 1:T} h_t(v_t, w_t, \omega) \leq 1. \quad (1.7)$$

Неизвестный параметр ω принадлежит хаусдорфовому компакту Ω . Функции $h_t \geq 0$ полунепрерывны (п.н.) снизу при фиксированном ω (замкнуты) и таковы, что их множества уровня $\{h_t \leq 1\}$ компактны при каждом ω и $\{h_t \leq 0\} \neq \emptyset$. Функции h_t , в частности, могут соответствовать случаю геометрических ограничений. Относительно ω функции h_t считаются непрерывными.

Используем обозначения

$$v_{k:m} = \{v_k, \dots, v_m\}, \quad k \leq m.$$

Наборы $(x_0, v_{1:T}, w_{1:T})$, удовлетворяющие ограничениям (1.7) при некотором ω , называются допустимыми. Информационным множеством $\mathcal{X}_t(y, \omega)$ называется совокупность состояний $\{x_t\}$, для которых существуют такие наборы $(x_0, v_{1:T}, w_{1:T})$ (возможно, зависящие от ω), что в системе (1.6) реализуется сигнал $y_{1:t}$ при сохранении неравенств (1.7).

Положим $H_t(x, v, y, \omega) = h_t(v, y - g_t(x), \omega)$, $t \geq 1$. Условие $x \in \mathcal{X}_t(y, \omega)$ в случае обратимости эквивалентно неравенству

$$\begin{aligned} W_t(x, y, \omega) &= \min_{v_{1:t}} J_t(x, v, y, \omega) \leq 1, \quad x_t = x, \quad \text{где} \\ J_t(x, v, y, \omega) &= \sum_{k \in 1:t} H_k(F_k(x_k, v_k), v_k, y_k, \omega) + h_0(F_1(x_1, v_1), \omega). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Функции $W_t(x, y, \omega)$ п.н. снизу по $(x, y_{1:t})$ и удовлетворяют рекуррентным соотношениям (уравнения Беллмана)

$$\begin{aligned} W_t(x, y, \omega) &= \min_{v_t} \{W_{t-1}(F_t(x, v_t), y, \omega) + H_t(F_t(x, v_t), v_t, y_t, \omega)\}, \\ W_0(x, y, \omega) &= h_0(x, \omega). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Перейдем к задаче с пнп-функцией \underline{P} . Ограничения (1.7) заменяются на неравенство

$$\begin{aligned} \underline{P}(\mathcal{J}_T(x_0, v, w, \cdot)) &\leq 1, \\ \mathcal{J}_T(x_0, v, w, \omega) &= h_0(x_0, \omega) + \sum_{t \in 1:T} h_t(v_t, w_t, \omega). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Возникает вопрос об использовании процедуры динамического программирования в задаче с ограничениями (1.10). При этом можно делать различные предположения о зависимости возмущений от неизвестного параметра ω .

Предположение 1. Возмущения v_t в (1.6), (1.7) и начальное состояние x_0 не зависят от параметра ω .

При предположении 1 задача становится по существу детерминированной, но функционал в (1.10), вообще говоря, не имеет вида суммы отдельных слагаемых. Поэтому использование метода динамического программирования здесь затруднительно без дополнительных предположений о пнп-функции \underline{P} .

Предположение 2. Возмущения v_t в (1.6), (1.7) и начальное состояние x_0 могут зависеть от параметра ω и компоненты этих вектор-функций принадлежат пространству $\mathbf{B}(\Omega)$.

В случае предположения 2 сигнал y_t также будет зависеть от ω и его компоненты будут функциями из \mathbf{B} в силу свойств функций h_t , указанных после ограничений (1.7).

В случае линейной пнп-функции $\underline{P} = E$ и предположений 2 уравнения Беллмана выписываются достаточно просто при обратимости системы. Действительно, вводим функции

$$V_t(x, y) = E\left(\min_{v_t}\{V_{t-1}(F_t(x, v_t), y) + H_t(F_t(x, v_t), v_t, y_t, \omega)\}\right), \quad 2 \leq t \leq N,$$

$$V_1(x, y) = E\left(\min_{v_1}\{h_0(F_1(x, v_1), \omega) + H_1(F_1(x, v_1), v_1, y_1, \omega)\}\right).$$

Минимум здесь достигается на некоторой функции $v_t^0 = v_t^0(x, y_t, \omega)$ с обратной связью. Оказывается, что

$$V_t(x, y) = \min_{v_{1:t}} E(J_t(x, v, y, \cdot)).$$

Доказательство стандартно. Рассмотрим случай с нелинейной пнп-функцией.

Вводим *дополнительные* ограничения на допустимые возмущения $x_0(\cdot)$, $v_t(\cdot)$, $w_t(\cdot)$ с компонентами из \mathbf{B} , а именно, предполагаем, что совокупность всевозможных функций $\{h_t(\cdot)\}$, $\forall t \in 1 : T$, является равномерно непрерывной относительно некоторой заданной функции $\bar{J} \in \mathbf{B}$, что означает следующее:

$$\begin{aligned} |h_t(v_t(\omega), w_t(\omega), \omega) - h_t(v_t(s), w_t(s), s)| &\leq |\bar{J}(\omega) - \bar{J}(s)|, \\ \forall \omega, s \in \Omega, \quad |h_0(x_0(\omega), \omega) - h_0(x_0(s), s)| &\leq |\bar{J}(\omega) - \bar{J}(s)|. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Из (1.11) следует равномерная ограниченность функционала $\mathcal{J}_T(x_0, v, w, \cdot)$ сверху для всех допустимых возмущений. Считается, что сигнал $y_{1:T}(\cdot)$ реализовался при некоторых возмущениях $x_0^*(\cdot)$, $v_{1:T}^*(\cdot)$, $w_{1:T}^*(\cdot)$ с компонентами из \mathbf{B} , подчиненных неравенству (1.10) и удовлетворяющих дополнительным ограничениям (1.11). Еще раз отметим, что в силу свойств функций h_t , указанных после неравенства (1.7), подстановка допустимых возмущений в функционал \mathcal{J}_T из (1.10) приводит к функции $\mathcal{J}_T(\cdot) \in \mathbf{B}$. Условия (1.11) можно ослабить, сразу требуя, чтобы совокупность $\{\mathcal{J}_T(\cdot)\}$ для всевозможных допустимых возмущений была компактным множеством в \mathbf{B} (см. ниже теорему 1). В частности, в случае конечного множества Ω достаточно требовать ограниченности множества $\{\mathcal{J}_T(\cdot)\}$ по *sup*-норме. Можно также сразу считать, что совокупности возмущений $\{v_t(\cdot)\}$, $\{w_t(\cdot)\}$ являются равномерно непрерывными относительно некоторой функции из \mathbf{B} . Тогда для равномерно липшицевых по v_t , w_t функций h_t будут выполняться неравенства вида (1.11).

Путем назад в случае обратимости назовем пару $(v_{1:t}, x)$, состоящую из последовательности возмущений $v_{1:t} = \{v_1, \dots, v_t\}$ и вектора x . Путь $(v_{1:t}, x)$ однозначно определяет траекторию $\{x_0, \dots, x_t\}$ с конечной точкой $x_t = x$. Путь $(v_{m:t}, x)$ будет определять траекторию $\{x_{m-1}, \dots, x_t\}$, которая является частью предыдущей. Пути назад объединяются по правилу

$$(v_{k:m}, x_m) \oplus (v_{m+1:t}, x) = (v_{k:t}, x), \quad k \in m : t, \quad v_{t+1:t} = \emptyset.$$

В качестве v_t и x_0 рассматриваются функции с компонентами из \mathbf{B} . Путь $(v_{m+1:t}, x)$ считается допустимым, если существуют такие пути $(v_{1:m}, x_m)$ и $(v_{t+1:T}, x_T)$, что их объединение $(v_{1:m}, x_m) \oplus (v_{m+1:t}, x) \oplus (v_{t+1:T}, x_T) = (v_{1:T}, x_T)$ дает допустимый путь, $x = x_t$. Множество допустимых путей непусто в силу имеющейся реализации сигнала $y_{1:T}(\cdot)$. Также будут рассматриваться *пути вперед* в виде пары $(x, v_{t:k})$ с начальной точкой $x_{t-1} = x$, однозначно определяющей траекторию $\{x_{t-1}, \dots, x_k\}$. Объединение путей вперед происходит по правилу

$$(x, v_{t:k}) \oplus (x_k, v_{k+1:m}) = (x, v_{t:m}), \quad k \in t : m, \quad v_{m+1:m} = \emptyset.$$

К рассмотрению принимаются допустимые пути вперед, определяемые подобно путям назад. Далее обозначение $t : t$ сокращается до t .

2. Частичные порядки и критерии оптимальности

Введем бинарные отношения на \mathbf{B}

$$f <_{\underline{P}} g \Leftrightarrow \underline{P}(g - f) > 0, \quad f \leq_{\underline{P}} g \Leftrightarrow \underline{P}(g - f) \geq 0. \quad (2.1)$$

Первое из них — это антирефлексивное и транзитивное отношение строгого порядка, а второе — это отношение предпорядка, поскольку оно, вообще говоря, не антисимметрично. Пусть $K \subset \mathbf{B}$, тогда $f \in K$ — $(<_{\underline{P}})$ -минимальный элемент, если $g \not<_{\underline{P}} f \quad \forall g \in K$, т.е. $\underline{P}(f - g) \leq 0 \quad \forall g \in K$. Более кратко будем говорить, что такой элемент \underline{P} -минимален в K . Элемент $f \in K$ называется $(\leq_{\underline{P}})$ -минимальным элементом в K , если для $\forall g \in K$ имеем $g \leq_{\underline{P}} f \Rightarrow f \leq_{\underline{P}} g$. Мы покажем, что $(\leq_{\underline{P}})$ -минимальность влечет \underline{P} -минимальность. Нас будут интересовать свойства введенных порядков относительно компактов $K \subset \mathbf{B}$. Укажем известный критерий компактности в банаховом пространстве \mathbf{B} .

Теорема 1 [6, теорема IV.5.6]. *Замкнутое и ограниченное множество $K \subset \mathbf{B}$ тогда и только тогда компактно, когда для $\forall \epsilon > 0$ существуют конечное разбиение множества Ω непересекающимися подмножествами $\{E_1, \dots, E_n\}$ из \mathcal{F} и точки $s_i \in E_i$ такие, что*

$$\sup_{s \in E_i} |f(s_i) - f(s)| < \epsilon \quad \forall f \in K, \quad i \in 1 : n.$$

Простым достаточным условием для справедливости условия теоремы 1 помимо ограниченности является выполнение неравенства

$$|f(x) - f(s)| \leq |\bar{f}(x) - \bar{f}(s)| \quad \forall f \in K, \quad \forall x, s \in \Omega,$$

для некоторой функции $\bar{f} \in \mathbf{B}$, что означает равностепенную непрерывность множества K относительно функции \bar{f} , которая может быть разрывной, но всегда такой, что $\bar{f}(\Omega) = [A, B]$, $A < B$. Тогда для $\forall \epsilon > 0$ можно взять разбиение

$$\Omega = \bigcup_{i \in 1:n-1} \bar{f}^{-1}([a_{i-1}, a_i]) \cup \bar{f}^{-1}([a_{n-1}, a_n]),$$

где $a_i - a_{i-1} < \epsilon \quad \forall i \in 1 : n$, $[A, B] = \bigcup_{i \in 1:n-1} [a_{i-1}, a_i] \cup [a_{n-1}, a_n]$, подходящее для теоремы 1.

Сформулируем лемму, которая доказывается по тому же плану, что и в [2]. Однако различие в том, что в указанной работе вогнутая функция $\underline{P}(f)$ максимизируется, а здесь минимизируется. Поэтому доказательство другое, и мы его приводим полностью.

Лемма 1. *Для компакта $K \subset \mathbf{B}$ выполняются следующие утверждения.*

1. Если элемент f $(\leq_{\underline{P}})$ -минимален в K , то $\bar{P}(g - f) \geq 0 \quad \forall g \in K$.
2. Для $\forall f \in K$ множество $\downarrow_{\bar{P}} f = \{g \in K : g \leq_{\underline{P}} f\} = \{g \in K : \underline{P}(f - g) \geq 0\}$ непусто и компактно.

3. Существует (\leq_P) -минимальный элемент в K .
4. Для любого $g \in K$ существует (\leq_P) -минимальный элемент f в K такой, что $f \leq_P g$.
5. Для любого $g \in K$ существует минимальный элемент f в K относительно поточечного порядка \leq такой, что $f \leq g$.
6. Из (\leq_P) -минимальности элемента f в K следует его \underline{P} -минимальность в K .

Доказательство. Пусть элемент f (\leq_P) -минимален в K и $g \in K$. Тогда либо $\underline{P}(f - g) < 0$, либо $\underline{P}(g - f) \geq 0$. И в том, и другом случае имеем $\overline{P}(g - f) \geq 0$. Так как $f \leq_P f$, то $\downarrow_P f \neq \emptyset$. Пусть $f_n \rightarrow f_0$ и $f_n \in \downarrow_P f$. Ввиду компактности K имеем $f_0 \in K$. Поскольку $\underline{P}(f - f_n) \geq 0$, то

$$\underline{P}(f - f_0) = \underline{P}(f - f_n + f_n - f_0) \geq \underline{P}(f - f_n) + \underline{P}(f_n - f_0) \geq \underline{P}(f_n - f_0) \quad \forall n.$$

Так как $f_0 - f_n \geq -|f_0 - f_n|$ и поточечное неравенство $f \leq g$ влечет $\underline{P}(f) \leq \underline{P}(g)$, то

$$\underline{P}(f_n - f_0) \geq \underline{P}(-|f_0 - f_n|) \geq \inf -|f_0 - f_n| = -\sup |f_0 - f_n|.$$

В силу полученных неравенств и сходимости $f_n \rightarrow f_0$ получаем, что $\underline{P}(f - f_0) \geq 0$ и $f_0 \in \downarrow_P f$. Значит, множество $\downarrow_P f$ замкнуто и, следовательно, компактно. Для доказательства утверждения 3 рассмотрим любое линейно упорядоченное подмножество (цепь) $K' \subset K$ и конечное подмножество $f_1 \leq_P f_2 \leq_P \dots \leq_P f_n$ в K' . Имеем непустое пересечение $\bigcap_{k \in 1:n} \downarrow_P f_k = \downarrow_P f_1$. Таким образом, семейство $\{\downarrow_P f : f \in K'\}$ замкнутых подмножеств компакта K имеет свойство непустого конечного пересечения (центрировано). Значит, $\bigcap_{f \in K'} \downarrow_P f \neq \emptyset$ и любая цепь имеет нижнюю грань. Применяя лемму Цорна, получаем утверждение 3. Поскольку $\downarrow_P g$ — компакт, то из п. 3 следует существование в этом компакте (\leq_P) -минимального элемента f , но этот элемент (\leq_P) -минимален и относительно K . Утверждение 4 доказано. Утверждение 5 следует из предыдущих, поскольку поточечное неравенство неравенство функций моделируется ппф-функцией $\underline{P}(f) = \inf f$. Из утверждений 1 и 3 следует, что существует такой элемент f_0 , что $\overline{P}(g - f_0) \geq 0 \quad \forall g \in K$. Значит, $\underline{P}(f_0 - g) \leq 0 \quad \forall g \in K$, что означает \underline{P} -минимальность f_0 . Обратное утверждение неверно, т.е. могут существовать такие элементы $f_0, g_0 \in K$, что $\underline{P}(f_0 - g) \leq 0 \quad \forall g \in K$, но $\underline{P}(f_0 - g_0) \geq 0 > \underline{P}(g_0 - f_0)$. Из утверждения 5 следует, что найдется (\leq) -минимальный элемент $f \in K$ такой, что $f \leq f_0$ и поэтому $\underline{P}(f - g) \leq \underline{P}(f_0 - g) \leq 0 \quad \forall g \in K$. Это означает, что f — также \underline{P} -минимальный элемент. \square

Докажем теорему.

Теорема 2. Для каждого не \underline{P} -минимального в компакте $K \subset \mathbf{B}$ элемента g существует \underline{P} -минимальный в компакте K элемент f такой, что $f <_P g$.

Доказательство. Пусть g — не \underline{P} -минимальный элемент в K . Если g к тому же не (\leq) -минимален в K , то по утверждению 5 леммы 1 существует (\leq) -минимальный элемент $z \in K$ такой, что $z \leq g$ и $z \neq g$. Тогда $\overline{P}(z - g) < 0$ ввиду свойств \overline{P} , т.е. $\underline{P}(g - z) > 0$. Если g (\leq) -минимален в K , то такого элемента нет, но и в том, и другом случае найдется элемент $z \in K$ такой, что $z <_P g$ ввиду не \underline{P} -минимальности g . Рассмотрим компакт $\downarrow_P z$. Существует \underline{P} -минимальный элемент f в $\downarrow_P z$ ввиду утверждения 6 леммы 1. Более того, $\underline{P}(g - f) = \underline{P}(g - z + z - f) \geq \underline{P}(g - z) + \underline{P}(z - f) > 0$, т.е. $f <_{\overline{P}} g$. Покажем, что элемент f \underline{P} -минимален в K . Если не так, то найдется $v \in K$, $v <_P f$. Выполнение условий $v \leq f$ и $v \neq f$ невозможно, поскольку тогда $\underline{P}(z - v) \geq \overline{P}(z - f) \geq 0$, откуда $v \in \downarrow_P z$. Но это противоречит тому, что f \underline{P} -минимален в $\downarrow_P z$. Условие $\underline{P}(f - v) > 0$ также невозможно, поскольку $\underline{P}(z - v) = \underline{P}(z - f + f - v) \geq \underline{P}(f - v) + \overline{P}(z - f) > 0$. И тогда опять $v \in \downarrow_P z$, что невозможно. \square

Наряду с \underline{P} -минимальностью существуют и другие понятия минимальности, введенные, например, в [2]. Рассмотрим отношения

$$f \sqsubset_P g \Leftrightarrow \underline{P}(f) < \underline{P}(g), \quad f \sqsubseteq_P g \Leftrightarrow \underline{P}(f) \leq \underline{P}(g). \quad (2.2)$$

(\sqsubset_P) -минимальный элемент в K называется $\underline{P}2$ -минимальным в K .

Утверждение 1. *Всякий $\underline{P}2$ -минимальный элемент в K является \underline{P} -минимальным. Для линейной пнп-функции P понятия $\underline{P}2$ -минимальности и \underline{P} -минимальности совпадают.*

Доказательство. Предположим от противного, что f ($\underline{P}2$)-минимален в K , но не \underline{P} -минимален. Тогда

$$\exists g \in K \underline{P}(f - g) > 0 \text{ и } \underline{P}(f) = \underline{P}(f - g + g) \geq \underline{P}(f - g) + \underline{P}(g) > \underline{P}(g).$$

Получаем противоречие с $\underline{P}2$ -минимальностью f . Если P — линейная пнп-функция, то предположим, что f \underline{P} -минимален. Тогда $P(f - g) \leq 0 \forall g \in K$. Отсюда в силу линейности получаем $P(f - g) = P(f) - P(g) \leq 0 \forall g \in K$, что означает $\underline{P}2$ -минимальность. \square

Непосредственно проверяется, что для отношений (2.2) справедливы аналоги леммы 1 и теоремы 2.

3. Динамическое программирование с пнп-функцией

Пусть $*$ — какой-нибудь строгий порядок на \mathbf{B} , например, \underline{P} -минимальность, как в (2.1), или $\underline{P}2$ -минимальность, и $\min_*(S) \subset S$ — множество $*$ -минимальных элементов в $S \subset \mathbf{B}$. Оно может быть пустым. Если для любого множества T , $\min_*(S) \subset T \subset S$, имеем $\min_*(S) = \min_*(T)$, то оператор \min_* , заданный на подмножествах из \mathbf{B} , называется *нечувствительным* к не $*$ -минимальным элементам из S (кратко, $*$ S-нечувствительным) [2].

Теорема 3. *Пусть $\langle_i, i \in I$, — некоторое семейство строгих порядков на \mathbf{B} и $\min_{\langle_i}(T) = \{a \in T : \forall b \in T b \not\prec_i a\}$ — множество \langle_i -минимальных элементов в $T \subset \mathbf{B}$. Определим $\min_I(T) = \bigcup_{i \in I} \min_{\langle_i}(T)$. Если для некоторого $i \in I$ и $S \subset \mathbf{B}$ имеем*

$$\forall a \in S \setminus \min_{\langle_i}(S) \exists b \in \min_{\langle_i}(S) \text{ такой, что } b \prec_i a, \quad (3.1)$$

то \min_{\langle_i} нечувствителен к не \langle_i -минимальным элементам в S (\langle_i S-нечувствителен). Если (3.1) выполняется для всех $i \in I$, то оператор \min_I также нечувствителен к не I -минимальным элементам в S .

Доказательство. Пусть $i \in I$ и выполнено условие (3.1). Предположим, что выполняются включения $\min_{\langle_i}(S) \subset T \subset S$. Если $a \in \min_{\langle_i}(S)$, то $\forall b \in S b \not\prec_i a$, и тем более, если $b \in T$, откуда $a \in \min_{\langle_i}(T)$. Следовательно, $\min_{\langle_i}(S) \subset \min_{\langle_i}(T)$. Обратно, пусть $a \in \min_{\langle_i}(T)$, но $a \notin \min_{\langle_i}(S)$. Согласно (3.1) найдется $b \in \min_{\langle_i}(S)$ такой, что $b \prec_i a$. Получаем противоречие. Пусть теперь (3.1) выполняется для всех $i \in I$ и $\min_I(S) \subset T \subset S$. Для $\forall i \in I$ имеем $\min_{\langle_i}(S) \subset \min_I(S) \subset T \subset S$, откуда $\min_{\langle_i}(S) = \min_{\langle_i}(T)$. Взяв объединение, получаем $\min_I(S) = \min_I(T)$. \square

Вернемся к нашей задаче. Частичную сумму функционала в (1.8) обозначим через

$$J_{k:t}(x, v, y, \omega) = \sum_{i \in k:t} H_i(F_i(x_i, v_i), v_i, y_i, \omega), \quad 1 \leq k \leq t,$$

$$J_0(x, v, y, \omega) = h_0(x, \omega).$$

Множества всех допустимых путей назад $\{(v_{1:t}, x)\}$ и $\{(v_{k:t}, x)\}$, начинающихся в x , обозначим как $\mathcal{V}_{1:t}(x)$ и $\mathcal{V}_{k:t}(x)$ соответственно; $\mathcal{V}_{t+1,t}(x) = \{x\}$. Если \prec_* — некоторый строгий порядок на \mathbf{B} , то определяем порядок между путями по правилу

$$(v_{k:t}, x) \prec_* (u_{k:t}, x) \Leftrightarrow J_{k:t}(x, v, y, \cdot) \prec_* J_{k:t}(x, u, y, \cdot), \quad 2 \leq k \leq t;$$

$$(v_{1:t}, x) \prec_* (u_{1:t}, x) \Leftrightarrow J_t(x, v, y, \cdot) \prec_* J_t(x, u, y, \cdot).$$

Будем говорить, что для $<_*$ выполняется *принцип минимальности*, если

$$\min_* (\mathcal{V}_{1:t}(x)) \subset \bigcup_{(v_{k+1,t},x) \in \mathcal{V}_{k+1,t}(x)} \min_* (\mathcal{V}_{1:k}(x_k)) \oplus (v_{k+1,t}, x)$$

для всех $0 \leq k \leq t \leq T$. Это означает, что если $(v_{1:t}, x)$ — $*$ -минимальный элемент в $\mathcal{V}_{1:t}(x)$, то $(v_{1:k}, x_k)$ является $*$ -минимальным в $\mathcal{V}_{1:k}(x_k)$.

Теорема 4. Пусть $t \in 0 : N$, и предположим, что для $<_*$ выполняется принцип минимальности. Если оператор \min_* на $\mathcal{V}_{1:t}(x)$ нечувствителен к не $*$ -минимальным элементам в $\mathcal{V}_{1:t}(x)$, то

$$\min_* (\mathcal{V}_{1:t}(x)) = \min_* \left(\bigcup_{(v_{k+1,t},x) \in \mathcal{V}_{k+1,t}(x)} \min_* (\mathcal{V}_{1:k}(x_k)) \oplus (v_{k+1,t}, x) \right)$$

для всех номеров $0 \leq k \leq t \leq N$.

Доказательство. Фиксируем номера $0 \leq k \leq t \leq N$ и определяем множества

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= \bigcup_{(v_{k+1,t},x) \in \mathcal{V}_{k+1,t}(x)} \min_* (\mathcal{V}_{1:k}(x_k)) \oplus (v_{k+1,t}, x) \text{ и} \\ \mathcal{S}_2 &= \bigcup_{(v_{k+1,t},x) \in \mathcal{V}_{k+1,t}(x)} \left(\mathcal{V}_{1:k}(x_k) \setminus \min_* (\mathcal{V}_{1:k}(x_k)) \right) \oplus (v_{k+1,t}, x). \end{aligned}$$

Имеем $\mathcal{V}_{1:t}(x) = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ и $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \emptyset$. Из принципа минимальности получаем, что в \mathcal{S}_2 нет $*$ -минимальных элементов в $\mathcal{V}_{1:t}(x)$, так что $\mathcal{S}_2 \cap \min_* (\mathcal{V}_{1:t}(x)) = \emptyset$. Отсюда получаем $\min_* (\mathcal{V}_{1:t}(x)) \subset \mathcal{S}_1 \subset \mathcal{V}_{1:t}(x)$ и в силу $*$ $\mathcal{V}_{1:t}(x)$ -нечувствительности заключаем окончательно, что $\min_* (\mathcal{V}_{1:t}(x)) = \min_* (\mathcal{S}_1)$. \square

Пусть теперь $*$ -минимальность — это \underline{P} -минимальность. Тогда объединение путей назад обладает важным свойством:

$$(v_{1:k}, x_k) <_{\underline{P}} (u_{1:k}, x_k) \Leftrightarrow (v_{1:k}, x_k) \oplus (w_{k+1,t}, x) <_{\underline{P}} (u_{1:k}, x_k) \oplus (w_{k+1,t}, x). \quad (3.2)$$

Действительно, если $f, g, h \in \mathbf{B}$, то $\underline{P}(f-g) > 0 \Leftrightarrow \underline{P}((f+h)-(g+h)) > 0$. Вследствие аддитивности функционала J_t из (1.8) получаем свойство (3.2). Для \underline{P} -минимальности справедлива

Теорема 5 (принцип оптимальности). Если путь назад $(v_{1:t}, x)$ является \underline{P} -минимальным в $\mathcal{V}_{1:t}(x)$, то путь $(v_{1:k}, x_k)$ \underline{P} -минимален в $\mathcal{V}_{1:k}(x_k)$ при $k \leq t$.

Доказательство. Если $(v_{1:k}, x_k)$ не \underline{P} -минимален в $\mathcal{V}_{1:k}(x_k)$, то найдется меньший путь $(w_{1:k}, x_k) <_{\underline{P}} (v_{1:k}, x_k)$. По свойству (3.2) имеем $(w_{1:k}, x_k) \oplus (v_{k+1,t}, x) <_{\underline{P}} (v_{1:k}, x_k) \oplus (v_{k+1,t}, x) = (v_{1:t}, x)$. Но это противоречит \underline{P} -минимальности пути $(v_{1:t}, x)$ в $\mathcal{V}_{1:t}(x)$. \square

Следствие 1. Поскольку предполагается, что семейство всех возможных функционалов $J_t(x, v, u, \cdot)$ компактно в \mathbf{B} , то из теорем 2 и 3 следует, что оператор $<_{\underline{P}}$ на $\mathcal{V}_{1:t}(x)$ нечувствителен к не \underline{P} -минимальным элементам. Таким образом, для всех $k < t$

$$\min_{\underline{P}} (\mathcal{V}_{1:t}(x)) = \min_{\underline{P}} \left(\bigcup_{(v_{k+1,t},x) \in \mathcal{V}_{k+1,t}(x)} \min_{\underline{P}} (\mathcal{V}_{1:k}(x_k)) \oplus (v_{k+1,t}, x) \right),$$

т. е. путь $(v_{1:t}, x)$ \underline{P} -минимален в том и только том случае, если он является \underline{P} -минимальным объединением \underline{P} -минимального пути из $\mathcal{V}_{1:k}(x_k)$ и некоторого пути из $\mathcal{V}_{k+1,t}(x)$.

По следствию 1 рекуррентно вычисляются \underline{P} -минимальные пути назад и минимизируется функционал (1.10). Действительно, при $k = t - 1$ формула следствия 1 принимает вид

$$\min_{\underline{P}}(\mathcal{V}_{1:t}(x)) = \min_{\underline{P}} \left(\bigcup_{(v_t, x) \in \mathcal{V}_t(x)} \min_{\underline{P}}(\mathcal{V}_{1:t-1}(F_t(x, v_t)) \oplus (v_t, x)) \right),$$

что означает существование допустимой функции $\underline{v}_t(\omega)$ такой, что

$$V_t(x, y) = \underline{P}(V_{t-1}(F_t(x, \underline{v}_t(\cdot)), y) + H_t(F_t(x, \underline{v}_t(\cdot)), \underline{v}_t(\cdot), y_t, \cdot)), \quad (3.3)$$

где

$$V_t(x, y) = \min_{(v_{1:t}, x) \in \mathcal{V}_{1:t}(x)} \underline{P}(J_t(x, v, y, \cdot)) \leq 1, \quad x_t = x,$$

причем минимум берется по всем возможным путям. Функции $V_t(x, y_{1:t})$ при всех $t \in 1 : N$ п.н. снизу по $(x, y_{1:t})$. Равенство (3.3) можно рассматривать как уравнение для определения функции $\underline{v}_t(\omega)$.

Отметим, что для порядка (2.2) свойство (3.2), вообще говоря, не выполняется и принцип оптимальности неверен. Имеется соответствующий контрпример.

Процедура (1.8), (1.9) модифицируется следующим образом. Пусть множество $\mathcal{X}_t(y) = \{x \in \mathbb{R}^n | V_t(x, y) \leq 1\}$, $t \in 1 : N$. Понятно, что функции $V_t(x, y)$ подчиняются неравенствам

$$\begin{aligned} V_t(x, y) &\geq \underline{P}(\min_{v_t} \{V_{t-1}(F_t(x, v_t), y) + H_t(F_t(x, v_t), v_t, y_t, \cdot)\}), \quad t \in 2 : N, \\ V_1(x, y) &= \underline{P}(\min_{v_1} \{h_0(F_1(x, v_1), \cdot) + H_1(F_1(x, v_1), v_1, y_1, \cdot)\}). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Минимум здесь достигается на некоторой функции $v_t^0 = v_t^0(x, y_t, \omega)$ с обратной связью. Следствие 1 позволяет утверждать, что при выполнении условий компактности функционалов равенство в (3.4) будет в том и только том случае, когда ($t \in 2 : N$)

$$\exists v_{1:t-1}, (v_{1:t-1}, F_t(x, v_{1:t-1}^0)) \oplus (v_t^0, x) \in \min_{\underline{P}}(\mathcal{V}_{1:t}(x)), \quad (v_{1:t-1}, F_t(x, v_{1:t-1}^0)) \in \min_{\underline{P}}(\mathcal{V}_{1:t-1}(x)). \quad (3.5)$$

В любом случае, даже если (3.5) не выполняется, можем определить последовательность функций $V_t(x, y)$ согласно (3.4), где неравенство следует заменить на равенство, и получить оценку снизу

$$V_t(x, y) \leq \min_{(v_{1:t}, x) \in \mathcal{V}_{1:t}(x)} \underline{P}(J_t(x, v, y, \cdot)). \quad (3.6)$$

Возникает вопрос о достаточных условиях для выполнения соотношения (3.5). Вопрос весьма сложен. Ответим на него лишь в следующем частном случае. Пусть $\Omega = \Omega_0 \times \Omega_1 \times \dots \times \Omega_N$, где Ω_t — хаусдорфовы компакты. Функция \underline{P} называется (см. [2]) *внешне аддитивной* по отношению к указанному декартову произведению, если

$$\underline{P}\left(\sum_{t \in 0:N} f_t\right) = \sum_{t \in 0:N} \underline{P}(f_t)$$

для любых функций $f_t \in \mathbf{B}(\Omega_t)$.

Теорема 6. *Предположим, что $\Omega = \Omega_0 \times \Omega_1 \times \dots \times \Omega_N$, выполняется предположение 1 и функции $h_t(v_t, w_t, \omega_t)$ зависят только от $\omega_t \in \Omega_t$, а $h_0(x, \omega_0)$ зависит от $\omega_0 \in \Omega_0$. Пусть пнп-функция \underline{P} на $\mathbf{B}(\Omega)$ внешне аддитивна по отношению к декартову произведению. Тогда соотношение (3.5) выполняется, и в (3.4) всегда соблюдается равенство.*

Доказательство. В предположениях теоремы имеем ограничение

$$\begin{aligned} \underline{P}(J_t(x, v, y, \omega)) &= \sum_{k \in 1:t} \underline{P}(H_k(F_k(x_k, v_k), v_k, y_k, \omega_k)) + \underline{P}(h_0(F_1(x_1, v_1), \omega_0)) \\ &= \sum_{k \in 1:t} \underline{H}_k(F_k(x_k, v_k), v_k, y_k) + \underline{h}_0(F_1(x_1, v_1)) \leq 1, \end{aligned}$$

которое приводит к стандартной процедуре динамического программирования вида (1.8), (1.9), где функции не зависят от ω . \square

При выполнении условий компактности функционалов процедура (3.3) действительно определяет построение ИМ $\mathcal{X}_t(y)$, содержащего истинное состояние x_t , или оценку этого множества сверху. В случае, когда необходимо определить множество функций $\{x(\cdot) \in \mathbf{B}^n\}$, совместимых с ограничениями (1.10), (1.11) и измеренным сигналом, в формулах (3.3) следует предполагать функции $x(\cdot) \in \mathbf{B}^n$ вместо вектора x . Такая задача уже будет бесконечномерной.

4. Системы без свойства обратимости

Если фазовое уравнение в (1.6) нельзя обратить в дискретном времени, фиксируем $\omega \in \Omega$. Для рекуррентного вычисления функций W_t при $\forall t \in 1 : T$ определяем множества

$$\begin{aligned} G_t(y, \omega) &= \{[x_{t-1}; v_t] : H_t(x_{t-1}, v_t, y_t, \omega) + W_{t-1}(x_{t-1}, y, \omega) \leq \beta\}, \\ \mathcal{D}_t(y, \omega) &= \{x_t : x_t = f_t(x_{t-1}, v_t), [x_{t-1}; v_t] \in G_t(y, \omega)\}, \\ W_0(x_0, y, \omega) &= h_0(x_0, \omega), \quad \text{параметр } \beta > 1, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $G_t(y, \omega) \subset \mathbb{R}^{n+q}$, а $\mathcal{D}_t(y, \omega) \subset \mathbb{R}^n$ — область достижимости (кратко ОД) на шаге t . Далее, определяем искомую функцию

$$W_t(x_t, y, \omega) = \min_{[x_{t-1}; v_t] \in G_t(y, \omega), x_t = f_t(x_{t-1}, v_t)} \{H_t(x_{t-1}, v_t, y_t, \omega) + W_{t-1}(x_{t-1}, y, \omega)\}, \quad (4.2)$$

где $x_t \in \mathcal{D}_t(y, \omega)$ и минимум берется по $[x_{t-1}; v_t]$.

Если вектор $x_t \notin \mathcal{D}_t(y, \omega)$, полагаем $W_t(x_t, y, \omega) = \beta + 1$. Оказывается (см. [7, теорема 1]), что $W_t(x, y, \omega) = \min \mathcal{J}_t(x_0, v, w, \omega)$ по всем путям вперед $(x, v_{1:t})$, порождающим измеренный сигнал $y_{1:t}$ и траекторию с условием $x_t = x$ при поточечном ограничении

$$\mathcal{J}_t(x_0, v, w, \omega) \leq \beta, \quad \beta > 1. \quad (4.3)$$

Здесь, как в (1.7), полагаем, что множества $\{h_t \leq \beta\}$ компактны при каждом ω . Следовательно, если предположить, что допустимые возмущения в задаче с ограничениями (1.10) определяются еще и дополнительным поточечным неравенством (4.3), $\forall t \in 1 : T$, то ИМ $\mathcal{X}_t(y) = \{x : V_t(x, y) \leq 1\}$, где $V_t(x, y) = \underline{P}(W_t(x, y, \cdot))$.

5. Примеры

Пример 1. Продолжение. Прежде всего, приведем непосредственное решение для указанной непрерывной системы, определяя ИМ как

$$\mathcal{X}(t, y) = \{x : \underline{P}(V(t, x, \cdot)) \leq 1\}.$$

Зафиксируем $\omega \in \Omega = \{0, 1\}$ и значение функции $h(\omega) = [h_1(\omega); h_2(\omega)]$. Решение уравнения Беллмана (1.3) записывается в виде $V(t, x, \omega) = x'P(t)x - 2x'd(t) + g(t)$, где параметры удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} \dot{P} &= G'RGh_2(\omega) - PBB'P/h_1(\omega) - A'P - PA, \quad P(0) = 0; \\ \dot{d} &= G'(t)Ry(t)h_2(\omega) - (PBB'/h_1(\omega) + A')d, \quad d(0) = 0; \\ \dot{g} &= y'Ryh_2(\omega) - d'BB'd/h_1(\omega), \quad g(0) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\mathcal{X}(t, y) = \left\{ [x(t, 0); x(t, 1)] : \min_{\alpha \in [0.9, 1]} ((1 - \alpha)V(t, x(t, 0), 0) + \alpha V(t, x(t, 1), 1)) \leq 1 \right\}.$$

В отличие от стандартного случая данное множество уже не будет эллипсоидом в \mathbb{R}^{2n} и даже его выпуклость и связность не гарантируются.

Пример 2. Для иллюстрации результатов в дискретном случае рассмотрим скалярную систему $x_t = x_{t-1} - v_t$, $y_t = x_{t-1} + w_t$, $t \in 1 : 2$, с ограничением вида (1.10):

$$\underline{P}(\mathcal{J}_2(x_0, v, w, \cdot)) \leq 1,$$

$$\mathcal{J}_2(x_0, v, w, \omega) = \omega_0|x_0| + \omega_1(|v_1| + |v_2|) + \omega_2(|w_1| + |w_2|),$$

где $\omega_0 = 0.1 + \varepsilon$, $\omega_1 = 0.2 + \varepsilon$, $\varepsilon \in [-0.1, 0.2]$, $\omega_2 \in [0.5, 0.6]$. Функция \underline{P} здесь — это минимизация по параметрам $\omega = (\varepsilon, \omega_2)$. Система обратима, и функционал (1.8) имеет вид

$$J_2(x, v, y, \omega) = \omega_0|x + v_1 + v_2| + \omega_1(|v_1| + |v_2|) + \omega_2(|y_1 - x - v_1 - v_2| + |y_2 - x - v_2|).$$

Для определения ИМ требуется минимизировать функцию $J_2(x, v, y, \omega)$ по переменным $(v_{1:2}, \omega)$. Поскольку неравенства (1.11) выполняются для некоторой функции $\bar{J} = \beta\omega$, воспользуемся следствием 1 и соотношениями (3.3). На первом шаге имеем неравенства

$$J_1 = \omega_0|x_1 + v_1| + \omega_1|v_1| + \omega_2|y_1 - x_1 - v_1| \geq 0.1|v_1| + 0.5|y_1 - x_1 - v_1| \geq 0.1|y_1 - x_1|$$

для всех возможных параметров. Следовательно, минимум в (3.4) достигается на возмущении $v_1^0 = y_1 - x_1$ и $V_1(x, y_1) = 0.1|y_1 - x|$. На втором шаге получаем следующие неравенства:

$$\begin{aligned} & 0.1|y_1 - x_2 - v_2| + (0.2 + \varepsilon)|v_2| + \omega_2|y_2 - x_2 - v_2| \\ & \geq 0.1(|y_1 - x_2 - v_2| + |v_2|) + 0.5|y_2 - x_2 - v_2| \geq 0.1(|y_1 - y_2| + |y_2 - x_2|). \end{aligned}$$

Последнее неравенство следует из того факта, что функция $0.1(|a - v| + |v|) + 0.5|b - v|$ всегда достигает своего минимума $0.1|a - b| + |b|$ в точке $v^0 = b$ при любых значениях a . Следовательно, $v_2^0 = y_2 - x_2$ и $V_2(x, y_{1:2}) = 0.1(|y_1 - y_2| + |y_2 - x|)$. Здесь свойство (3.5) выполняется, а функция \underline{P} не является внешне аддитивной, поскольку множество Ω не имеет вид декартова произведения. Таким образом, минимизация достаточно сложной многомерной функции задачи оценивания в примере сведена к последовательной одномерной минимизации.

Пример 3. Рассмотрим двумерную систему

$$x_t^1 = \log(x_{t-1}^2 + 1), \quad x_t^2 = 1/(x_{t-1}^1 + 1), \quad x_t = [x_t^1; x_t^2],$$

где неизвестные начальные состояния ограничены: $0 \leq x_0^1 \leq \omega$, $0 \leq x_0^2 \leq \omega$, $\omega \in [1, 2]$. Уравнения измерения имеют вид $y_t^1 = x_{t-1}^1 + w_t$, $y_t^2 = x_{t-1}^2 + w_t$ или $y_t = x_{t-1} + cw_t$ в векторном виде, $c = [1; 1]$, где ограничение на параметры следующее: $\underline{P}(h_0(x_0, \omega) + \omega \sum_{t \in 1:N} |w_t|) \leq 1$. Можно считать, что функция h_0 здесь и в (1.7) равна нулю при выполнении заданных геометрических ограничений на начальные состояния и равна двум при их нарушении. Тогда функция h_0 будет разрывной по ω , но ограниченной, что оставляет все рассуждения в силе. Система обратима: $x_{t-1} = F(x_t)$, где $F(x) = [1/x^2 - 1; e^{x^1} - 1]$. Вычисляя псевдообращение матрицы c , находим $c^+ = c'/2$. Следовательно, $w_t = c'(y_t - x_{t-1})/2$, и функция $H_t(F(x), y_t, \omega) = \omega|c'(y_t - F(x))|/2$ не зависит от возмущений. Оптимизация в задаче отсутствует, и ограничение на состояние $x = x_t$ имеет вид

$$\underline{P}(J_t(x, y, \cdot)) = \underline{P}\left(h_0(F^{(t)}(x), \omega) + \omega \sum_{k \in 1:t} |c'(y_k - F^{(t-k+1)}(x))|/2\right) \leq 1.$$

Здесь $F^{(t)}(x) = F(\dots(F(x)\dots))$ — t -композиция функции F . Пусть пнп-функция задана с помощью двух вероятностных борелевских мер λ_1, λ_2 на отрезке $[0.8, 2]$ по формуле $\underline{P}(f) = E_{\lambda_1}f \wedge E_{\lambda_2}f$, где $a \wedge b = \min\{a, b\}$. Свойства (P1), (P2) для такой пнп-функции очевидны, а свойство (P3) вытекает из элементарного числового неравенства $(a+b) \wedge (c+d) \geq a \wedge c + b \wedge d$. Таким образом, ИМ $\mathcal{X}_t(y) = \{x \in \mathbf{B}^2[1, 2] : \underline{P}(J_t(x, y, \cdot)) \leq 1\}$, если рассматриваем бесконечномерную задачу, и $\mathcal{X}_t(y) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \underline{P}(J_t(x, y, \cdot)) \leq 1\}$ в конечномерном случае. Запишем рекуррентные соотношения вида (3.3):

$$\begin{aligned} V_t(x, y) &= \underline{P}(V_{t-1}(F(x), y_{1:t-1}) + \omega|c'(y_t - F(x))|/2), \quad t \in 2 : N, \\ V_1(x, y) &= \underline{P}(h_0(x, \omega) + \omega|c'(y_1 - F(x))|/2). \end{aligned}$$

В силу супераддитивности функции \underline{P} и свойства $\underline{P}(a + f) = a + \underline{P}(f)$, $a - \text{const}$ (см. [4]), получаем оценку снизу $V_t(x, y) \leq \underline{P}(J_t(x, y, \cdot))$. Выберем параметры для построения сигнала: $x_0^1 = \omega/2$, $x_0^2 = \omega/3$, $w_t = 1/(2^t\omega)$. В качестве мер берем дельта-функции $\lambda_1 = \delta_{0.8}(\omega)$, $\lambda_2 = \delta_2(\omega)$. Тогда $x^* = x_2(1.7) = [0.4321; 0.6902] \notin \mathcal{X}_t(y)$, поскольку $\underline{P}(J_t(x^*, y, \cdot)) = 1.0213 > 1$, но $V_2(x^*, y) = 0.9845 < 1$.

Пример 4. Рассмотрим систему $x_t = Ax_{t-1} + v_t$, $y_t = Gx_{t-1} + w_t$ с ограничениями

$$\underline{P}(\mathcal{J}_N(x_0, v, w, \cdot)) \leq 1, \quad \mathcal{J}_N(x_0, v, w, \omega) = |x_0|^2/\omega + \omega \sum_{t \in 1:N} (|v_t|^2 + |w_t|^2), \quad \omega \in [1, 2],$$

и дополнительными условиями (1.11), где $\bar{J}(x) = 5\beta x$. Выбор данной функции основан на том, что для функции $f(x) = \beta(1/x + x)$ на отрезке $[1, 2]$ выполняется неравенство $|f(u) - f(v)| \leq 5\beta|u - v|$. Минимум функционала $\mathcal{J}_t(x_0, v, w, \omega)$ с конечным условием x_t равен $W_t(x_t, y, \omega)$, где (см. [7])

$$\begin{aligned} W_t(x_t, y, \omega) &= |x_t - \hat{x}_t|_{P_t}^2 + \omega \sum_{k \in 1:t} |y_k - G\hat{x}_{k-1}|_{T_k}^2, \\ \hat{x}_t &= A(\hat{x}_{t-1} + u_{t-1}), \quad P_t = AU_{t-1}^{-1}A' + I_n/\omega, \\ U_t &= P_t^{-1} + G'G\omega, \quad P_0 = \omega I_n, \quad \hat{x}_0 = 0, \\ u_t &= U_t^{-1}G'\omega(y_{t+1} - G\hat{x}_t), \quad T_t = (I_m + GP_{t-1}G'\omega)^{-1}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Символом $|x|_P^2 = x'Px$ здесь обозначена квадратичная форма с симметричной и неотрицательно определенной матрицей P . Таким образом, если решается задача оценивания с дополнительным неравенством вида (4.3) для исходной системы нашего примера, то

$$\mathcal{X}_t(y) = \{x_t : \underline{P}(W_t(x_t, y, \cdot)) \leq 1\}$$

независимо от того, вырождена матрица A или нет. Неравенство с функцией \bar{J} в (1.11) для получения равенства не используется, важна только равномерная ограниченность функционала. Функция \underline{P} может быть любой. Если же выполняется дополнительное ограничение (1.11), то можем воспользоваться рекуррентными оценками (3.3), (3.5).

Изменим теперь функционал задачи на следующий:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_N(x_0, v, w, \omega) &= (h(x_0^1, -\omega, \omega) + h(x_0^2, -\omega, \omega)) / \omega \\ &+ \omega \sum_{t \in 1:N} (h(v_t, -\omega, \omega) + h(w_t, -\omega, \omega)), \quad \omega \in \{1, 2\}, \end{aligned}$$

где h — характеристическая функция замкнутых интервалов, которые могут быть неограниченными, а именно, $h(x, a, b) = \begin{cases} h(x, a, b) = 0, & x \in [a, b] \\ h(x, a, b) = 3, & x \notin [a, b] \end{cases}$. Для численного моделирования выберем систему

$$x_t^1 = x_{t-1}^2, \quad x_t^2 = v_t, \quad y_t = x_{t-1}^2 + w_t.$$

Система необратима, поскольку матрица вырождена. Рассмотрим процедуру (4.1), (4.2) с поточечным ограничением (4.3), $\beta = 1.49$. Имеем

$$h_0(x_0, \omega) = (h(x_0^1, -\omega, \omega) + h(x_0^2, -\omega, \omega)) / \omega, \\ H_t(x_{t-1}, v_t, y_t, \omega) = \omega (h(v_t, -\omega, \omega) + h(y_t - x_{t-1}^2, -\infty, \omega)).$$

Следовательно, на первом шаге получаем

$$W_1(x_1, y, \omega) = h(x_1^1, (-\omega) \vee (y_1 - \omega), \omega) / \omega + \omega h(x_1^2, -\omega, \omega).$$

При $t \geq 2$ имеем $W_t(x_t, y, \omega) = \omega(h(x_t^1, (-\omega) \vee (y_t - \omega), \omega) + h(x_t^2, -\omega, \omega))$. Функция $x_{t-1}^1(\omega)$ может быть любой, но такой, что в паре с некоторой $x_{t-1}^2(\omega)$ элемент $x_{t-1} = [x_{t-1}^1; x_{t-1}^2] \in \mathcal{X}_{t-1}(y)$. Формируем сигнал, полагая $x_0^1 = x_0^2 = \omega$, $v_t = \omega/t$, $w_t = \omega(t-1)/t$. Получаем $y_1 = \omega$, $x_1^1 = \omega$, $x_1^2 = \omega$. Далее $x_t^1 = \omega/(t-1)$, $x_t^2 = \omega/t$, $y_t - \omega = \omega/(t-1)/t$ при $t \geq 2$. Из построения следует, что множества $\mathcal{X}_t(y, \omega)$ являются прямоугольниками и зависят только от y_t . Минимизация по v_t отсутствует. При $\underline{P}(f) = \min_{\omega} f(\omega)$ берем минимум по ω , что приводит к ИМ в виде объединения двух прямоугольников.

Пример 5. Рассмотрим численное моделирование задачи для системы уравнений из примера 4 при следующих параметрах сигнала: $A = G = 1$, $\omega \in \{1, 2\}$, $x_0 = \sqrt{\omega/2}/2$, $v_t = 0$, $w_t = \sqrt{\omega/2}/3^{t-1}$. Воспользуемся формулами (5.1). Имеем

$$W_t(x_t, y, \omega) = (x_t - \hat{x}_t)^2 / P_t + \omega \sum_{k \in 1:t} (y_k - \hat{x}_{k-1})^2 T_k, \\ \hat{x}_t = \hat{x}_{t-1} + \omega(y_t - \hat{x}_{t-1}) / U_{t-1}, \quad P_t = (\omega + U_{t-1}) / U_{t-1} / \omega, \quad U_t = 1 / P_t + \omega, \\ P_0 = \omega, \quad \hat{x}_0 = 0, \quad T_t = 1 / (1 + P_{t-1} \omega).$$

Значит,

$$\mathcal{X}_t(x, y) = \{x : \underline{P}(W_t(x, y, \cdot)) \leq 1\},$$

если для примера $\underline{P}(f) = f(1) \wedge f(2)$. На первом шаге получаем $\mathcal{X}_1(x, y) = [-0.2798, 1.4646]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kurzanski A., Varaiya P.** Dynamics and control of trajectory tubes: Theory and computation. Basel: Birkhäuser, 2014. 445 p. (Ser. Systems & Control: Foundations & Applications, Book 85). <https://doi.org/10.1007/978-3-319-10277-1>
2. **Cooman G., Troffaes M.** Dynamic programming for deterministic discrete-time systems with uncertain gain // Internat. J. Approx. Reas. 2005. Vol. 39. P. 257–278. <https://doi.org/10.1016/j.ijar.2004.10.004>
3. **Walley P.** Statistical reasoning with imprecise probabilities. London: Chapman and Hall, 1991. 706 p.
4. **Miranda E.** A survey of the theory of coherent lower previsions // Internat. J. Approx. Reas. 2008. Vol. 48, no. 2. P. 628–658. <https://doi.org/10.1016/j.ijar.2007.12.001>
5. **Cheve M., Congar R.** Optimal pollution control under imprecise environmental risk and irreversibility // Risk Decision and Policy. 2000. Vol. 5. P. 151–164.
6. **Данфорд Н., Шварц Дж.Т.** Линейные операторы. Общая теория. М.: УРСС, 2004. 895 с.
7. **Ананьев Б.И., Юровских П.А.** Общая задача гарантированного оценивания для многошаговых систем // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2023. Т. 45. С. 37–53. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.45.37>

Поступила 4.02.2025

После доработки 7.03.2025

Принята к публикации 10.03.2025

Ананьев Борис Иванович

д-р физ.-мат. наук, ведущий научн. сотрудник

Института математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: abi@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Kurzhanski A., Varaiya P. *Dynamics and control of trajectory tubes: theory and computation*. In: Systems & Control: Foundations & Applications, Book 85, Basel: Birkhauser, 2014, 445 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-10277-1>
2. Cooman G., Troffaes M. Dynamic programming for deterministic discrete-time systems with uncertain gain. *Internat. J. Approx. Reas.*, 2005, vol. 39, pp. 257–278. <https://doi.org/10.1016/j.ijar.2004.10.004>
3. Walley P. *Statistical reasoning with imprecise probabilities*. London: Chapman and Hall, 1991. 706 p.
4. Miranda E. A survey of the theory of coherent lower previsions. *Internat. J. Approx. Reas.*, 2008, vol. 48, no. 2, pp. 628–658. <https://doi.org/10.1016/j.ijar.2007.12.001>
5. Cheve M., Congar R. Optimal pollution control under imprecise environmental risk and irreversibility. *Risk, Decision and Policy*, 2000, vol. 5, pp. 151–164.
6. Dunford N., Schwartz J. *Linear operators: General theory*. NY, London, Intersci. Publ., 1958. ISBN: 9780470226056. Translated to Russian under the title Lineinye operatory: Obshchaya teoriya, Moscow, Inostr. Liter. Publ., 1962, 895 p.
7. Ananyev B.I., Yurovskikh P.A. Guaranteed estimation problem for multi-step systems. *The Bulletin of Irkutsk State University, Ser. Mathematics*, 2023, vol. 45, pp. 37–53 (in Russian). <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.45.37>

Received February 4, 2025

Revised March 7, 2025

Accepted March 10, 2025

Boris Ivanovich Ananyev, Dr. Phys.-Math. Sci., leading researcher, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: abi@imm.uran.ru.

Cite this article as: B.I. Ananyev. On estimation of dynamical systems under inexact constraints on parameters. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 2, pp. 15–29.