ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 31 № 2 2025

УДК 517.977

О ЗАВИСИМОСТИ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ ЛИНЕЙНОГО УПРАВЛЯЕМОГО ОБЪЕКТА ОТ ВОЗМУЩЕНИЙ

М. С. Никольский

В теории оптимального управления важную роль играет множество достижимости управляемого объекта $D(T)$ в заданный момент T. Это множество, в частности, полезно при изучении динамических возможностей управляемого объекта. В статье изучается характер зависимости множества достижимости линейного нестационарного управляемого объекта от возмущения его динамических характеристик. Получены конструктивные достаточные условия общего вида, гарантирующие малость изменения в метрике Хаусдорфа множества достижимости при малых изменениях (в определенном смысле) динамических характеристик изучаемого линейного нестационарного управляемого объекта.

Ключевые слова: линейный управляемый объект, измеримое управление, множество достижимости, расстояние Хаусдорфа.

M. S. Nikol'skii. On the dependence of the attainable set of linear controlled objects on disturbances.

In the theory of optimal control, the attainable set of controlled objects $D(T)$ at moment T plays an important role. For example, this set is useful in studying the dynamical possibilities of controlled objects. We study the character of dependence of the attainable set of linear controlled objects on disturbances of its dynamical characteristics. This paper establishes several sufficient conditions that guarantee such a property: if the dynamical characteristics of the controlled object change little (in a certain sense), then the attainable set changes little in the Hausdorff metric.

Keywords: linear controlled object, measured control, attainable set, Hausdorff metric.

MSC: 49J15, 93C95

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-2-155-161

1. Введение

Рассматривается линейный управляемый объект вида (см., например, [1–4])

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$; $t \in \Delta = [0, T]$ $(T > 0)$; $u \in \mathbb{R}^r$ $(r \geqslant 1)$; $A(t)$ — $n \times n$-матричная функция, непрерывная на Δ; $B(t)$ — $n \times r$-матричная функция, непрерывная на Δ; на управляющий вектор $u \in \mathbb{R}^r$ наложено геометрическое ограничение $u \in U$, где U — непустой выпуклый компакт.

Обозначения. Символом $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 1)$ мы будем обозначать k-мерное арифметическое евклидово пространство со стандартными скалярным произведением векторов и длиной вектора $|\cdot|$. Для $p \times q$-матрицы L, где $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$, символом $\|L\|$ условимся обозначать операторную норму матрицы L.

Движение управляемого объекта (1) происходит под воздействием измеримых по Лебегу управлений $u(t) \in U$, $t \in \Delta$. Обозначим

$$A(\cdot) = \{A(t), t \in \Delta\}, \quad B(\cdot) = \{B(t), t \in \Delta\},$$

где $A(t)$ — непрерывная на Δ $n \times n$-матричная функция; $B(t)$ — непрерывная на Δ $n \times r$-матричная функция. Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество элементов $A(\cdot)$, а через $\mathfrak{B}$ — множество элементов $B(\cdot)$.

В дальнейшем мы будем рассматривать тройки $C = (A(\cdot), B(\cdot), U)$, где $A(\cdot) \in \mathfrak{A}$, $B(\cdot) \in \mathfrak{B}$, $U \in \mathcal{U}$, здесь $\mathcal{U}$ — множество непустых выпуклых компактов из $\mathbb{R}^r$.

Для произвольных $A_1(\cdot)$, $A_2(\cdot)$ из $\mathfrak{A}$ их сумму $A(\cdot) = A_1(\cdot) + A_2(\cdot)$ определим так:

$$A(\cdot) = \{A_1(t) + A_2(t) \colon t \in \Delta\}.$$

Умножение $\lambda A(\cdot)$, где $\lambda \in \mathbb{R}^1$, $A(\cdot) \in \mathfrak{A}$, определим формулой

$$\lambda A(\cdot) = \{\lambda A(t),\ t \in \Delta\}.$$

Аналогичным образом вводятся операции $B_1(\cdot) + B_2(\cdot)$, $\lambda B(\cdot)$, где $B_1(\cdot)$, $B_2(\cdot)$, $B(\cdot)$ — элементы из $\mathfrak{B}$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$. Пространства $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, таким образом, становятся линейными пространствами.

На элементах $A(\cdot) \in \mathfrak{A}$ введем норму

$$\|A(\cdot)\|_1 = \int_0^T \|A(s)\|\, ds, \tag{2}$$

где под знаком интеграла стоит операторная норма матрицы $A(s)$. Аналогично на элементах $B(\cdot) \in \mathfrak{B}$ вводится норма

$$\|B(\cdot)\|_1 = \int_0^T \|B(s)\|\, ds, \tag{3}$$

где под знаком интеграла стоит операторная норма матрицы $B(s)$. На парах компактов U_1, U_2 из $\mathcal{U}$ мы будем использовать расстояние Хаусдорфа $h(U_1, U_2)$, которое определяется как наименьшее $\varepsilon \geqslant 0$, при котором одновременно выполняются включения

$$U_1 \subset U_2 + S_\varepsilon, \quad U_2 \subset U_1 + S_\varepsilon,$$

где сложение множеств понимается в алгебраическом смысле,

$$S_\varepsilon = \{z \in \mathbb{R}^r \colon |z| \leqslant \varepsilon\}.$$

Далее мы рассмотрим множество $\mathcal{C}$ троек C, где

$$C = (A(\cdot), B(\cdot), U),$$
$$A(\cdot) \in \mathfrak{A}, \quad B(\cdot) \in \mathfrak{B}, \quad U \in \mathcal{U}.$$

На тройках C_1, C_2 из $\mathcal{C}$ введем расстояние $\rho(C_1, C_2)$ формулой

$$\rho(C_1, C_2) = \|A_1(\cdot) - A_2(\cdot)\|_1 + \|B_1(\cdot) - B_2(\cdot)\|_1 + h(U_1, U_2). \tag{4}$$

Для произвольной тройки $C \in \mathcal{C}$ определено множество достижимости (см. [2])

$$D(C) = \bigcup_{u(\cdot)} x(T, u(\cdot)),$$

где объединение берется по всевозможным измеримым по Лебегу управлениям $u(t) \in U$; $t \in \Delta$; $x(t, u(\cdot))$ — решение уравнения (1), соответствующее управлению $u(\cdot)$ и фиксированному начальному условию $x(0) = x_0$. В теории оптимального управления (см., например, [2]) доказывается, что при любом $C \in \mathcal{C}$ множество достижимости $D(C)$ — непустой выпуклый компакт.

Переходим к постановке и исследованию рассматриваемой нами задачи.

Для управляемого объекта вида (1) фиксирована тройка $C_0 = (A_0(\cdot), B_0(\cdot), U_0) \in \mathcal{C}$. Также рассматриваются и другие тройки $C = (A(\cdot), B(\cdot), U) \in \mathcal{C}$. В статье изучается вопрос о непрерывности расстояния Хаусдорфа $h_1(D(C), D(C_0))$ при фиксированной тройке $C_0 \in \mathcal{C}$, когда расстояние (см. (4)) $\rho(C.C_0) \to 0$. Отметим, что выпуклые компакты $D(C)$, $D(C_0)$ принадлежат $\mathbb{R}^n$ и что хаусдорфово расстояние h_1 между компактами в $\mathbb{R}^n$ определяется аналогично тому, как это было сделано выше для компактов из $\mathbb{R}^r$.

2. Основная часть

Фиксированная для рассмотрения тройка $C_0 = (A_0(\cdot), B_0(\cdot), U_0) \in \mathcal{C}$ порождает управляемый процесс вида (см. (1))

$$\dot{x} = A_0(t)x + B_0(t)u_0, \quad x(0) = x_0, \tag{5}$$

где $u_0 \in U_0$. Рассматриваются также другие тройки $C = (A(\cdot), B(\cdot), U) \in \mathcal{C}$. Они порождают управляемые процессы вида (см. (1))

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)u, \quad y(0) = x_0, \tag{6}$$

где $y \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$.

Фиксируем пару измеримых по Лебегу управлений $u_0(t) \in U_0$, $u(t) \in U$, $t \in \Delta$. Обозначим

$$x(t) = x(t, u_0(\cdot)), \quad y(t) = y(t, u(\cdot)), \tag{7}$$

где $t \in \Delta$. С помощью соотношений (5)–(7) при $t \in \Delta$ получаем равенство

$$y(t) - x(t) = I_1(t) + I_2(t), \tag{8}$$

где

$$I_1(t) = \int_0^t (A(s)y(s) - A_0(s)x(s))\, ds, \tag{9}$$

$$I_2(t) = \int_0^t (B(s)u(s) - B_0(s)u_0(s))\, ds. \tag{10}$$

Далее, при $t \in \Delta$ имеем равенства

$$I_1(t) = I_3(t) + I_4(t); \tag{11}$$

здесь

$$I_3(t) = \int_0^t (A(s) - A_0(s))y(s)\, ds, \tag{12}$$

$$I_4(t) = \int_0^t A_0(s)(y(s) - x(s))\, ds, \tag{13}$$

$$I_2(t) = I_5(t) + I_6(t), \tag{14}$$

$$I_5(t) = \int_0^t (B(s) - B_0(s))u(s)\, ds, \tag{15}$$

$$I_6(t) = \int_0^t B_0(s)(u(s) - u_0(s))\, ds. \tag{16}$$

Дальнейшее рассмотрение будем вести при выполнении неравенств, записываемых с помощью норм (2), (3) и расстояния Хаусдорфа $h(\cdot,\cdot)$ в виде

$$\|A(\cdot) - A_0(\cdot)\|_1 \leqslant 1, \tag{17}$$

$$\|B(\cdot) - B_0(\cdot)\|_1 \leqslant 1, \tag{18}$$

$$h(U, U_0) \leqslant 1. \tag{19}$$

При таких $C = (A(\cdot), B(\cdot), U)$ имеют место неравенства

$$\|A(\cdot)\|_1 \leqslant \|A_0(\cdot)\|_1 + 1, \tag{20}$$

$$\|B(\cdot)\|_1 \leqslant \|B_0(\cdot)\|_1 + 1, \tag{21}$$

$$|U| \leqslant |U_0| + 1. \tag{22}$$

В неравенстве (22) используются обозначения

$$|U| = \max_{u \in U} |u|, \quad |U_0| = \max_{u_0 \in U_0} |u_0|. \tag{23}$$

При $t \in \Delta$ нетрудно обосновать (см. (12)) неравенство

$$|I_3(t)| \leqslant \int\limits_0^t \|A(s) - A_0(s)\| \cdot |y(s)|\, ds. \tag{24}$$

Для $t \in \Delta$ с помощью соотношения (6) получаем равенство

$$y(t) = x_0 + \int\limits_0^t A(s) y(s)\, ds + \int\limits_0^t B(s) u(s)\, ds. \tag{25}$$

Из формул (23), (25) при $t \in \Delta$ нетрудно получить неравенство

$$|y(t)| \leqslant |x_0| + \int\limits_0^T \|B(s)\| \cdot |U|\, ds + \int\limits_0^t \|A(s)\| \cdot |y(s)|\, ds.$$

Отсюда с помощью неравенства Гронуолла (см., например, [4]) и формул (2), (3), (20)–(22) имеем при $t \in \Delta$ неравенство

$$|y(t)| \leqslant c_1, \tag{26}$$

где

$$c_1 = \big[|x_0| + (\|B_0(\cdot)\|_1 + 1)(|U_0| + 1)\big] \exp(\|A_0(\cdot)\|_1 + 1); \tag{27}$$

здесь символ $\exp(\alpha)$ при $\alpha \in \mathbb{R}^1$ означает экспоненту e^{α}.

Из неравенств (24), (26) при $t \in \Delta$ получаем оценку

$$|I_3(t)| \leqslant c_1 \|A(\cdot) - A_0(\cdot)\|_1, \tag{28}$$

где c_1 определяется формулой (27). Далее при $t \in \Delta$ для интеграла $I_4(t)$ (см. (13)) нетрудно получить неравенство

$$|I_4(t)| \leqslant c_2 \int\limits_0^t |y(s) - x(s)|\, ds, \tag{29}$$

где

$$c_2 = \max_{s \in \Delta} \|A_0(s)\|. \tag{30}$$

Теперь займемся оцениванием при $t \in \Delta$ интеграла $I_2(t)$ (см. (10)) с учетом формул (14)–(16). Принимая во внимание неравенство (22), нетрудно обосновать при $t \in \Delta$ для интеграла $I_5(t)$ (см. (15)) неравенство

$$|I_5(t)| \leqslant c_3 \|B(\cdot) - B_0(\cdot)\|_1, \tag{31}$$

где
$$c_3 = |U_0| + 1. \tag{32}$$

Для интеграла $I_6(t)$ (см. (16)) при $t \in \Delta$ легко обосновать оценку
$$|I_6(t)| \leqslant c_4 \|u(\cdot) - u_0(\cdot)\|_1; \tag{33}$$

здесь
$$c_4 = \max_{s\in\Delta} \|B_0(s)\|, \quad \|u(\cdot) - u_0(\cdot)\|_1 = \int\limits_0^T |u(s) - u_0(s)|\, ds. \tag{34}$$

Из соотношений (8)–(19), (27)–(34) при $t \in \Delta$ имеем неравенство
$$\begin{aligned} |y(t) - x(t)| \leqslant c_1 \|A(\cdot) - A_0(\cdot)\|_1 + c_3 \|B(\cdot) - B_0(\cdot)\|_1 \\ + c_4 \|u(\cdot) - u_0(\cdot)\|_1 + c_2 \int\limits_0^t |y(s) - x(s)|\, ds, \end{aligned} \tag{35}$$

где константы c_1, c_2, c_3, c_4 определяются формулами (27), (30), (32), (34) соответственно. Отметим, что константы c_1, c_2, c_3, c_4 не зависят от конкретного выбора измеримых управлений $u(t) \in U$, $u_0(t) \in U_0$ при $t \in \Delta$.

С помощью неравенства Гронуолла (см., например, [4]) из (35) получаем
$$|y(T) - x(T)| \leqslant (c_1 \|A(\cdot) - A_0(\cdot)\|_1 + c_3 \|B(\cdot) - B_0(\cdot)\|_1 + c_4 \|u(\cdot) - u_0(\cdot)\|_1) e^{c_2 T}. \tag{36}$$

Мы будем использовать неравенство (36) для оценки сверху расстояния Хаусдорфа $h_1(D(C), D(C_0))$ при фиксированной тройке $C_0 \in \mathcal{C}$ и при выполнении неравенств (17)–(19) для $C \in \mathcal{C}$. Отметим, что на основании определения расстояния Хаусдорфа $h(U, U_0)$, где $U \in \mathcal{U}$, $U_0 \in \mathcal{U}$, имеют место включения
$$U \subset U_0 + h(U, U_0) S_1, \tag{37}$$
$$U_0 \subset U + h(U, U_0) S_1, \tag{38}$$
где $S_1 = \{z \in \mathbb{R}^r : |z| \leqslant 1\}$, а сложение множеств понимается в алгебраическом смысле.

При произвольном множества $U \in \mathcal{U}$ для точек $z \in \mathbb{R}^r$ определим оператор проектирования $\pi_U(z)$ как наиближайшую точку $\xi(z)$ из выпуклого компакта U. Отметим, что точка $\xi(z)$ определена однозначно $\forall z \in \mathbb{R}^r$ и функция $\xi(z)$ непрерывна на $\mathbb{R}^r$ (см., например, [4]).

Теперь фиксируем произвольное множество $U \in \mathcal{U}$ и произвольное измеримое управление $u(t) \in U$, $t \in \Delta$. Сопоставим ему на Δ управление
$$\tilde{u}_0(t) = \pi_{U_0}(u(t)) \in U_0.$$

Отметим, что управление $\tilde{u}_0(t)$ является измеримой по Лебегу на Δ функцией, причем при $t \in \Delta$ выполняется (см. (37)) неравенство
$$|u(t) - \tilde{u}_0(t)| \leqslant h(U, U_0).$$

Из сказанного вытекает неравенство
$$\|u(\cdot) - \tilde{u}_0(\cdot)\|_1 \leqslant T h(U, U_0), \tag{39}$$

где символ в левой части неравенства означает $\int_0^T |u(s) - \tilde{u}_0(s)|\, ds$.

Фиксируем теперь произвольное измеримое управление $\hat{u}_0(t) \in U_0$, $t \in \Delta$. Сопоставим ему при $t \in \Delta$ управление $\hat{u}(t) = \pi_U(\hat{u}_0(t))$, $t \in \Delta$. Отметим, что $\hat{u}(t)$ является измеримой на Δ функцией, причем при $t \in \Delta$ выполняется (см. (38)) неравенство

$$|\hat{u}(t) - \tilde{u}_0(t)| \leqslant h(U, U_0).$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\|\hat{u}(\cdot) - \hat{u}_0(\cdot)\|_1 \leqslant Th(U, U_0). \tag{40}$$

При рассматриваемых C из неравенств (36), (39), (40) получаем включения

$$D(C) \subset D(C_0) + \delta(C, C_0)\sigma, \tag{41}$$

$$D(C_0) \subset D(C) + \delta(C, C_0)\sigma; \tag{42}$$

здесь

$$\delta(C, C_0) = (c_1\|A(\cdot) - A_0(\cdot)\|_1 + c_3\|B(\cdot) - B_0(\cdot)\|_1 + c_4Th(U, U_0))e^{c_2T}, \tag{43}$$

$$\sigma = \{z \in \mathbb{R}^n \colon |z| \leqslant 1\}. \tag{44}$$

Из соотношений (4), (41)–(44) вытекает неравенство

$$h_1(D(C), D(C_0)) \leqslant c_5\rho(C, C_0), \tag{45}$$

где

$$c_5 = \max\{c_1, c_3, c_4\} \cdot e^{c_2T}. \tag{46}$$

Из соотношений (4), (45), (46) имеем

Теорема 1. *Хаусдорфово расстояние $h_1(D(C), D(C_0))$ стремится к нулю при $\rho(C, C_0)$, стремящемся к нулю. Таким образом, функция $h_1(D(C), D(C_0))$ непрерывна по C в фиксированной тройке $C_0 \in \mathcal{C}$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: ГИФМЛ, 1961. 394 с.
2. **Ли Э. Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
3. **Благодатских В. И.** Введение в оптимальное управление. Линейная теория. М.: Высшая школа, 2001. 240 с.
4. **Васильев Ф. П.** Методы оптимизации. М.: Факториал пресс, 2002. 824 с.

Поступила 4.02.2025
После доработки 7.03.2025
Принята к публикации 10.03.2025

Никольский Михаил Сергеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Математический институт имени В. А. Стеклова РАН
г. Москва
e-mail: mni@mi-ras.ru

REFERENCES

1. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V. *Matematicheskaya teoria optimalnych processov* [Mathematical theory of optimal control]. Moscow, State Publ. Phys.-Mathem., 1961, 394 p.
2. Lee E. B., Markus L. *Foundations of optimal control theory.* NY, London, Sydney, John Wiley and Sons, 1967, 576 p. Translated to Russian under the title Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya, Moscow, Nauka Publ., 1972, 576 p. ISBN: 0471522635 .
3. Blagodatskikh V.I. *Vvedenie v optimal'noe upravlenie (lineinaya teoriya)* [Introduction to optimal control (linear theory)]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 2001, 240 p. ISBN: 5-06-00398-8.
4. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moscow, Factorial Press, 2002, 824 p. ISBN: 5-88688-056-9.

Received February 4, 2025
Revised March 7, 2025
Accepted March 10, 2025

Mikhail Sergeevich Nikol'skii, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Science, Moscow, 119991 Russia, e-mail: mni@mi-ras.ru .

Cite this article as: M. S. Nikol'skii, On the dependence of the attainable set of linear controlled objects on disturbances. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 2, pp. 155–161.