

УДК 517.977

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ОТСЛЕЖИВАНИЯ ВХОДНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**В. И. Максимов**

Рассматривается задача отслеживания неизвестного входного воздействия $u(\cdot)$ системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Ее суть заключается в построении алгоритма вычисления некоторой функции, приближающей в среднем квадратичном $u(\cdot)$. Предлагаемый алгоритм должен осуществлять процесс слежения в реальном времени, т. е. вычислять приближение входного воздействия, реализовавшегося к моменту времени t , не позже этого момента. Входными данными алгоритма являются результаты неточного измерения фазовых состояний системы в дискретные моменты времени. Следствием данной особенности задачи является невозможность точного отслеживания $u(\cdot)$. Поэтому мы конструируем алгоритм приближенного отслеживания, ядром которого является управляемая модель. Управление в этой модели, полученное по принципу обратной связи с учетом текущих фазовых состояний, формируется на основе соответствующей модификации динамического варианта известного в теории некорректных задач метода невязки.

Ключевые слова: динамический метод невязки, отслеживание входного воздействия.

V. I. Maksimov. On an algorithm of tracking an input action in a system of differential equations.

The problem of tracking an unknown input action $u(\cdot)$ in a system of nonlinear ordinary differential equations is considered. Its essence consists in the construction of an algorithm for calculating some function that approximates $u(\cdot)$ in the mean square. The algorithm in question should implement the tracking process in real time, i.e., it should calculate an approximation of the input action realized up to a time moment t , not later than this time. The input data to the algorithm are the results of inaccurate measurements of the system's phase state at discrete times. As a consequence of this feature of the problem, the exact tracking of $u(\cdot)$ is impossible. Therefore, we construct an algorithm of approximate tracking based on a controlled model. The model control obtained by the feedback principle taking into account current phase states is formed on the basis of an appropriate modification of the dynamic discrepancy method well-known in the theory of ill-posed problems.

Keywords: dynamic discrepancy method, input action tracking.

MSC: 49N45, 93B52

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-2-fon-01

Введение

Исследованию управляемых систем в условиях неопределенности посвящена обширная литература. В настоящее время разработан ряд подходов к анализу таких систем. Среди них можно отметить, например, теорию робастного управления [1], PID-метод [2], метод, основанный на наблюдении за возмущениями (*disturbance-observer-based-control*) [3], метод активного подавления возмущений (*active disturbance rejection control*) [4] и ряд других методов. В частности, широко известен, восходящий к работам Н. Н. Красовского метод гарантирующего управления [5; 6].

В работах А. Б. Куржанского и его сотрудников [7–9] развит достаточно эффективный подход, ориентированный на решение задач оценивания структурных характеристик управляемых систем, функционирующих в условиях неполной и меняющейся в динамике информации. Важным элементом этого подхода является получивший в настоящее время широкую известность метод эллипсоидов. В случае, когда необходимо (и возможно!) не просто оценивать те или иные характеристики управляемых систем, а отслеживать в динамике (восстанавливать

в темпе “реального времени”), например, неконтролируемые, изменяющиеся во времени, воздействия на систему, мы приходим к задачам динамического обращения.

Один из подходов к решению таких задач был развит в [10–12]. Подход базируется на сочетании методов теории гарантирующего управления [5; 6] и активно используемого в теории обратных задач методе сглаживающего функционала [13]. В настоящей работе мы укажем алгоритм решения задачи онлайн отслеживания возмущения, который основан на сочетании элементов теории гарантирующего управления с используемым в теории обратных задач методе невязки [13]. Применение метода невязки для решения задачи динамического восстановления возмущений, действующих на систему обыкновенных дифференциальных уравнений (нелинейную по фазовым переменным), при наличии мгновенных ограничений (в виде выпуклого компакта) на эти возмущения, линейно входящие в систему, было предложено в работе [14]. Идеи этой работы были использованы при решении задач динамического обращения для систем с запаздыванием по фазовым координатам [15] или управлениям [16], систем дифференциальных уравнений с дробными производными [17], систем с распределенными параметрами [18]. В случае отсутствия мгновенных ограничений метод невязки для решения задачи динамического обращения впервые был описан в работе [19] применительно к системам дифференциальных уравнений с памятью, не разрешенных относительно производной, включающих системы с запаздыванием нейтрального типа, и математически строго обоснован для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [20]. Следует отметить, что во всех цитированных в настоящем абзаце работах (см. также [21]) рассматривался случай измерения (с ошибкой) в дискретные моменты времени всех фазовых координат системы. Случай измерения части фазовых координат для систем обыкновенных дифференциальных уравнений специального вида обсуждался в работах [11; 22].

В настоящей работе предлагается алгоритм (на каждом своем временном шаге использующий элементы метода невязки) решения задачи отслеживания возмущения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащей параметрическую функцию. Наличие в системе такой функции позволяет указать единый метод решения для ряда задач как в случае наличия мгновенных ограничений на возмущения, так и при их отсутствии (см. замечание 2 ниже). При этом допустимы измерения как всех фазовых координат, так и их части. Последнее иллюстрируется с помощью приведенных в конце статьи примеров.

1. Постановка задачи

Рассматривается нелинейная система дифференциальных уравнений

$$\dot{z}(t) = B(t, y(t))u(t), \quad t \in T = [0, \vartheta], \quad (1.1)$$

с начальным состоянием

$$z(0) = z_0,$$

где $0 < \vartheta < +\infty$, $z, y \in \mathbb{R}^N$, $u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^r)$ — возмущение, матричная функция $B : T \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N \times r}$ удовлетворяет условию Липшица по совокупности аргументов с постоянной L . Как возмущение $u(\cdot)$, так и функции $z(\cdot)$ и $y(\cdot)$ неизвестны. Вместе с тем априори известно, что эти функции являются элементами $W_2(T; \mathbb{R}^N)$ — пространства дифференцируемых N -мерных функций, производные которых являются элементами пространства $L_2(T; \mathbb{R}^N)$. В дальнейшем функцию $y(\cdot)$ будем называть параметрической функцией, а функцию $z(\cdot)$ — решением системы (1.1). Последнее понимается в смысле Каратеодори. Соответственно $z(t)$ означает фазовое состояние системы (1.1) в момент t , а $y(t)$ — значение параметрической функции в этот же момент.

Содержательно суть обсуждаемой задачи такова. Система (1.1) подвержена влиянию неизвестного возмущения $u(\cdot) \in U(\cdot)$. Здесь $U(\cdot)$ — некоторое множество из пространства $L_2(T; \mathbb{R}^r)$,

возможно, совпадающее с этим пространством. В дискретные моменты

$$\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i \in [0:m]}, \quad \tau_0 = 0, \quad \tau_m = \vartheta, \quad \tau_{i+1} = \tau_i + \delta, \quad \delta = \vartheta/m,$$

измеряются с ошибкой фазовые состояния системы (1.1) $z(\tau_i)$, а также значения $y(\tau_i)$ параметрической функции. Результаты измерений — векторы $\psi_i^h = z(\tau_i) + z_i^h$ и $\xi_i^h = y(\tau_i) + y_i^h$, $i \in [0 : m - 1]$, — удовлетворяют неравенствам

$$|y(\tau_i) - \xi_i^h|_N \leq h, \quad |\psi_i^h - z(\tau_i)|_N \leq \rho(h, \delta), \quad |z_i^h - z_{i-1}^h|_N \leq \chi(h, \delta). \quad (1.2)$$

Здесь $h \in (0, 1)$ — уровень погрешности измерения, символ $|\cdot|_N$ означает евклидову норму в пространстве \mathbb{R}^N . Обсуждаемая задача состоит в построении алгоритма приближенного восстановления неизвестного возмущения $u(\cdot)$ по результатам неточных измерений величин $y(\tau_i)$ и $z(\tau_i)$.

Пусть фиксировано семейство $\{\Delta_h\}_{h \in (0,1)}$ разбиений отрезка T узлами $\tau_{h,i} : \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta(h)$, $i \in [0 : m_h]$, $\tau_{h,0} = 0$, $\tau_{h,m_h} = \vartheta$, $\delta(h) \in (0, 1)$.

Для решения обсуждаемой задачи воспользуемся подходом, развитым в цитированных выше работах [10–22]. Согласно этому подходу задача восстановления заменяется задачей управления по принципу обратной связи некоторой новой системой. Таким образом, необходимо подобрать эту систему и указать алгоритм формирования управления ею. К выбору этой новой системы, а также закона управления ею и сводится процедура решения исходной задачи. В обсуждаемом случае в качестве таковой возьмем следующую систему:

$$\dot{w}^h(t) = B(\tau_i, \xi_i^h)u^h(t), \quad t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad \tau_i = \tau_{h,i}, \quad i \in [0 : m - 1], \quad m = m_h. \quad (1.3)$$

Ее начальное состояние — $w^h(0) = \xi_0^h$ и управление — $u^h(\cdot)$.

В дальнейшем мы рассмотрим два случая. В первом случае будем полагать, что $U(\cdot) = L_2(T; \mathbb{R}^r)$, а во втором —

$$U(\cdot) = P(\cdot) = \{v(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^r) : v(t) \in P(t) \text{ при п.в. } t \in T\},$$

где $t \rightarrow P(t) \subset \mathbb{R}^r$, $t \in T$, — нормальное, т. е. измеримое и замкнутое (см. [23]) многозначное отображение.

Заметим, что одно и то же решение $z(\cdot)$ (при каждой конкретной параметрической функции $y(\cdot)$) может порождаться целым семейством возмущений. Следуя принятому в теории некорректных задач подходу [13], мы будем восстанавливать элемент из этого семейства минимальной L_2 -нормы. А именно, $u_*(\cdot) = \arg \min\{v(\cdot) \in U(z(\cdot), y(\cdot))\}$, где

$$U(z(\cdot), y(\cdot)) = \{v(\cdot) \in U(\cdot) : \dot{z}(t) = B(t, y(t))v(t) \text{ при п.в. } t \in T\}.$$

В дальнейшем полагаем выполненным следующее

У с л о в и е 1. $u_*(\cdot) \in L_\infty(T; \mathbb{R}^r)$. Известны числа K и K_1 такие, что $|u_*(\cdot)|_{L_\infty(T; \mathbb{R}^r)} \leq K$, $\text{vrai} \max_{t \in T} |\dot{y}(t)|_N \leq K_1$.

2. Алгоритм решения

Укажем алгоритм решения рассматриваемой задачи. Пусть фиксировано семейство разбиений $\{\Delta_h\}_{h \in (0,1)}$.

Сначала фиксируем величину h , а также разбиение Δ_h . Работа алгоритма осуществляется однотипно на каждом шаге. При этом управления в системе (1.3) корректируются в узлах разбиения, т. е. в моменты $\tau_i = \tau_{h,i}$. При $t \in [0, \tau_1)$ полагаем $u^h(t) = u_0^h = 0$. Далее, сначала

в момент τ_i (i -й шаг, $1 \leq i \leq m-1$, $m = m_h$) вычисляем вектор u_i^h при $U(\cdot) = L_2(T; \mathbb{R}^r)$ по формуле

$$u_i^h = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq a_i \text{ или } |b_i|_r = 0, \\ a_i \delta^{-1} b_i / |b_i|_r^2 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (2.1)$$

где

$$a_i = A_i + (s_i^h, \psi_i^h - \psi_{i-1}^h), \quad b_i = B'(\tau_i, \xi_i^h) s_i^h, \quad s_i^h = 2(w^h(\tau_i) - \psi_{i-1}^h), \\ A_i = \{c_1(h + \delta)\delta + \chi(h, \delta)\} |s_i^h|_N, \quad c_1 = L(2 + K_1)K,$$

штрих означает транспонирование, а символ (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в соответствующем конечномерном евклидовом пространстве. Затем на вход системы (1.3) в течение промежутка $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$ будем подавать постоянное управление

$$u^h(t) = u_i^h. \quad (2.2)$$

В результате под действием этого управления система (1.3) переходит из состояния $w^h(\tau_i)$ в состояние $w^h(\tau_{i+1})$. На следующем, $(i+1)$ -м шаге аналогичные действия повторяются. В случае, когда $U(\cdot) = P(\cdot)$, в момент τ_i находим минимальную по норме пространства $L_2(\delta; \mathbb{R}^r)$, $\delta = \delta(h)$, функцию $v(\cdot) = u_i^h(t)$, $t \in \delta$, обеспечивающую выполнение неравенства

$$\left| \int_0^\delta (B'(\tau_i, \xi_i^h) s_i^h, v(t)) dt - (s_i^h, \psi_i^h - \psi_{i-1}^h) \right| \leq A_i.$$

После этого на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1})$ на вход системы (1.3) подаем управление

$$u^h(t) = u_i^h(t - \tau_i).$$

Работа алгоритма заканчивается в момент ϑ .

Теорема 1. *Верны неравенства*

$$\varepsilon(\tau_i) \leq \nu(h, \delta) = d_1 \{h + \delta + \rho_1(h, \delta) + \delta^{-1} \chi(h, \delta)\}, \quad i \in [0 : m_h], \quad (2.3)$$

$$|u^h(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^r)}^2 \leq |u_*(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^r)}^2, \quad (2.4)$$

где $d_1 > 0$ — некоторая постоянная, $\delta = \delta(h)$,

$$\varepsilon(t) = \left| w^h(t + \delta) - \int_0^t B(s, y(s)) u_*(s) ds \right|_N^2 = |w^h(t + \delta) - z(t)|_N^2,$$

$$\rho_1(h, \delta) = \rho(h, \delta) \delta^{-1/2}, \quad \text{если } U(\cdot) = L_2(T; \mathbb{R}^r),$$

$$\rho_1(h, \delta) = \rho(h, \delta), \quad \text{если } U(\cdot) = P(\cdot).$$

Доказательство. Рассмотрим случай $U(\cdot) = L_2(T; \mathbb{R}^r)$. Случай $U(\cdot) = P(\cdot)$ рассматривается аналогично. Нетрудно видеть, что имеет место равенство

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) = \varepsilon(\tau_i) + \lambda_i + \lambda_i^{(1)}, \quad \tau_i = \tau_{i,h}, \quad (2.5)$$

где $i \in [0 : m_h - 1]$,

$$\lambda_i^{(1)} = \left| \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{B(\tau_i, \xi_i^h) u^h(t) - B(t - \delta, y(t - \delta)) u_*(t - \delta)\} dt \right|_N^2,$$

$$\lambda_i = 2 \left(w^h(\tau_i) - \int_0^{\tau_{i-1}} B(s, y(s)) u_*(s) ds, \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{B(\tau_i, \xi_i^h) u^h(t) - B(t - \delta, y(t - \delta)) u_*(t - \delta)\} dt \right).$$

В силу (1.2) липшицевости функции $B(t, y)$ и условия 1 при $t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $u(\cdot) \in U(\cdot)$ верна оценка

$$\begin{aligned} & |\{B(t - \delta, y(t - \delta)) - B(\tau_i, \xi_i^h)\} u(t)|_N \\ & \leq L \left(h + \delta + \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |\dot{y}(s)|_N ds \right) |u(t)|_r \leq \tilde{c}_1 (h + \delta) |u(t)|_r, \quad \tilde{c}_1 = L(1 + K_1). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Поэтому при $t \in [\delta, \vartheta]$ справедливо неравенство

$$\left| w^h(t) - \int_0^{t-\delta} B(s, y(s)) u^h(s) ds \right|_N \leq \tilde{c}_1 (h + \delta) \int_0^t |u^h(s)|_r ds. \quad (2.7)$$

Ввиду (1.2) также верны неравенства

$$\begin{aligned} \lambda_i & \leq 2 \left(s_i^h, \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{B(\tau_i, \xi_i^h) u^h(t) - B(t - \delta, y(t - \delta)) u_*(t - \delta)\} dt \right) + I_{2i} \\ & \leq I_{1i} + I_{2i} + |s_i^h|_N \left| \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{B(\tau_i, \xi_i^h) - B(s - \delta, y(s - \delta))\} u_*(s - \delta) ds \right|_N, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$I_{1i} = \left(s_i^h, \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} B(\tau_i, \xi_i^h) \{u^h(s) - u_*(s - \delta)\} ds \right), \quad I_{2i} = c_2 \rho(h, \delta) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{|u^h(s)|_r + |u_*(s - \delta)|_r\} ds.$$

Учитывая (2.6), из (2.8) получаем

$$\lambda_i \leq I_{1i} + I_{2i} + \tilde{c}_1 |s_i^h|_N (h + \delta) \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |u_*(t)|_r dt. \quad (2.9)$$

В свою очередь, в соответствии с (1.2) имеем

$$\left| \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} B(s, y(s)) u_*(s) ds - (\psi_i^h - \psi_{i-1}^h) \right|_N \leq \chi(h, \delta). \quad (2.10)$$

Воспользовавшись (1.2), (2.6) и (2.10), получаем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} B(\tau_i, \xi_i^h) u_*(t - \delta) dt - (\psi_i^h - \psi_{i-1}^h) \right|_N \\ & \leq \left| \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{B(\tau_i, \xi_i^h) - B(t - \delta, y(t - \delta))\} u_*(t - \delta) dt \right|_N \\ & \quad + \left| \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} B(t, y(t)) u_*(t) dt - (\psi_i^h - \psi_{i-1}^h) \right|_N \\ & \leq \tilde{c}_1 (h + \delta) \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |u_*(t)|_r dt + \chi(h, \delta) \leq c_1 (h + \delta) \delta + \chi(h, \delta). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Из (2.11) следует неравенство

$$\left| \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (s_i^h, B(\tau_i, \xi_i^h) u_*(t - \delta)) dt - c^{(i)} \right| \leq \varepsilon^{(i)}, \quad (2.12)$$

где

$$c^{(i)} = (s_i^h, \psi_i^h - \psi_{i-1}^h), \quad \varepsilon^{(i)} = c_1 |s_i^h|_N (h + \delta) \delta + |s_i^h|_N \chi(h, \delta).$$

Заметим, что $u^h(t) = u_i^h$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, — минимальный по $L_2([\tau_i, \tau_{i+1}]; \mathbb{R}^r)$ -норме элемент $v(\cdot)$ этого пространства удовлетворяющий неравенству

$$\left(s_i^h, \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} B(\tau_i, \xi_i^h) v(s) ds \right) \leq c^{(i)} + \varepsilon^{(i)}. \quad (2.13)$$

Далее. Пусть в гильбертовом пространстве H с нормой $|\cdot|_H$ и скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_H$ элемент $v \in P_H$ (P_H — выпуклое и замкнутое множество в пространстве H) удовлетворяет неравенству

$$|(s, v)_H - c| \leq \varepsilon, \quad \text{где } s \in H, \quad c \in \mathbb{R} \text{ и } \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0.$$

Тогда, как нетрудно видеть, если u_m — элемент множества P_H минимальной нормы, удовлетворяющий неравенству $(s, u_m)_H \leq c + \varepsilon$, то верны неравенства

$$|u_m|_H \leq |v|_H, \quad (s, u_m)_H - (s, v)_H \leq 2\varepsilon.$$

В таком случае, учитывая этот факт, а также (2.12), (2.13), заключаем

$$I_{1i} \leq 2\varepsilon^{(i)}, \quad (2.14)$$

$$|u^h(\cdot)|_{L_2([\tau_i, \tau_{i+1}]; \mathbb{R}^r)}^2 \leq |u_*(\cdot)|_{L_2([\tau_{i-1}, \tau_i]; \mathbb{R}^r)}^2. \quad (2.15)$$

При этом мы считали $H = L_2([\tau_i, \tau_{i+1}]; \mathbb{R}^r)$, $s(\tau) = B'(\tau_i, \xi_i^h) s_i^h$ при п. в. $\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $c = c^{(i)}$, $\varepsilon = \varepsilon^{(i)}$. Из неравенств (2.15) следует неравенство (2.4). Проверим справедливость неравенства (2.3). Ввиду (2.9), (2.14) верно неравенство

$$\lambda_i \leq 3c_1 K |s_i^h|_N (h + \delta) \delta + c_2 \rho(h, \delta) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{|u^h(t)|_r + |u_*(t - \delta)|_r\} dt + 2|s_i^h|_N \chi(h, \delta). \quad (2.16)$$

Кроме того,

$$\lambda_i^{(1)} \leq c_3 \delta \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{|u^h(t)|_r^2 + |u_*(t - \delta)|_r^2\} dt. \quad (2.17)$$

В силу (2.15) справедливы неравенства

$$\lambda_i^{(1)} \leq 2c_3 \delta \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |u_*(t)|_r^2 dt, \quad (2.18)$$

$$\sup_{h \in (0, 1), i \in [0, m_h]} |s_i^h|_N \leq c_4. \quad (2.19)$$

Из (2.5), учитывая (2.15), (2.16)–(2.19), выводим

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) \leq \varepsilon(\tau_i) + c_5 \left[(h + \delta + \rho_1(h, \delta)) \delta + \chi(h, \delta) + \delta \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |u_*(t)|_r dt \right]. \quad (2.20)$$

Воспользовавшись неравенством (2.20), будем иметь

$$\varepsilon(\tau_i) \leq \varepsilon(0) + c_6\{h + \delta + \rho_1(h, \delta) + \delta^{-1}\chi(h, \delta)\}. \quad (2.21)$$

Неравенство (2.3) вытекает из (2.21).

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $\delta(h) \rightarrow 0$, $\rho_1(h, \delta(h)) \rightarrow 0$, $\delta^{-1}(h)\chi(h, \delta(h)) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Тогда имеет место сходимость

$$u^h(\cdot) \rightarrow u_*(\cdot) \text{ в } L_2 = L_2(T; \mathbb{R}^r) \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Доказательство. Покажем, что каковы бы ни были последовательность чисел $h_j \rightarrow 0+$ при $j \rightarrow \infty$, а также величины $\xi_i^h \in \mathbb{R}^N$, $\psi_i^h \in \mathbb{R}^N$ со свойствами (1.2) (в (1.2) мы полагаем $h = h_j$), имеет место сходимость

$$u^{h_j}(\cdot) \rightarrow u_*(\cdot) \text{ в } L_2 \text{ при } j \rightarrow \infty.$$

Здесь и ниже управления $u^{h_j}(\cdot)$ определяются согласно (2.2), (2.1), где полагается $h = h_j$. Предполагая противное, заключаем: найдется подпоследовательность последовательности $u^{h_j}(\cdot)$ (для простоты обозначаем ее тем же символом, т.е. $u^{h_j}(\cdot)$) такая, что

$$u^{h_j}(\cdot) \rightarrow u_0(\cdot) \text{ слабо в } L_2 \text{ при } j \rightarrow \infty, \quad (2.22)$$

$$u_0(\cdot) \neq u_*(\cdot). \quad (2.23)$$

Пусть $q^{h_j}(t) = w^{h_j}(t) - z^0(t)$, где $w^{h_j}(\cdot)$ — решение уравнения (1.3) при $h = h_j$, а $z^0(\cdot)$ — решение уравнения (1.1), в котором вместо $u(t)$ стоит $u_0(t)$, т.е.

$$\dot{z}^0(t) = B(t, y(t))u_0(t), \quad t \in T, \quad z^0(0) = z_0. \quad (2.24)$$

Вычтем (2.24) из (1.3) и умножим полученное выражение скалярно на $q^{h_j}(t)$. В результате получим $1/2d|q^{h_j}(t)|_N^2/dt = \tilde{B}(t, \xi^{h_j}(t))u^{h_j}(t) - B(t, y(t))u_0(t)$, $t \in T$, $q^{h_j}(0) = 0$. Здесь

$$\xi^{h_j}(t) = \xi^{h_j}(\tau_{h_j, i}), \quad t \in \delta_{h_j, i} = [\tau_{h_j, i}, \tau_{h_j, i+1}); \quad \tilde{B}(t, \xi^{h_j}(t)) = B(\tau_{h_j, i}, \xi^{h_j}(t)), \quad i \in [0 : m_{h_j} - 1].$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in T} \left| \int_0^t (\tilde{B}(s, \xi^{h_j}(s))u^{h_j}(s) - B(s, y(s))u_0(s), q^{h_j}(s)) ds \right| \\ & \leq \sup_{t \in T} \left| \int_0^t (B(s, y(s))\{u^{h_j}(s) - u_0(s)\}, w^{h_j}(s) - z(s)) ds \right| \\ & \quad + \sup_{t \in T} \left| \int_0^t (B(s, y(s))\{u^{h_j}(s) - u_0(s)\}, z(s) - z^0(s)) ds \right| \\ & \quad + \sup_{t \in T} \left| \int_0^t (\{\tilde{B}(s, \xi^{h_j}(s)) - B(s, y(s))\}u^{h_j}(s), q^{h_j}(s)) ds \right|. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Сходимость к нулю первого слагаемого в правой части неравенства (2.25) при $j \rightarrow \infty$ следует из теоремы 1 (см. неравенство (2.3)). В свою очередь, сходимость к нулю второго слагаемого вытекает из (2.22). Сходимость же к нулю третьего слагаемого следует из (1.2) и (2.4). Таким образом,

$$q^{h_j}(\cdot) \rightarrow 0 \text{ в } C(T; \mathbb{R}^N) \text{ при } j \rightarrow +\infty.$$

Учитывая эту сходимость, а также теорему 1, устанавливаем справедливость равенств

$$z^0(\cdot) = z(\cdot).$$

Поэтому

$$u_0(\cdot) \in U(z(\cdot), y(\cdot)). \quad (2.26)$$

Ввиду известного свойства слабого предела из (2.22) и (2.26) вытекает неравенство

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} |u^{hj}(\cdot)|_{L_2} \geq |u_0(\cdot)|_{L_2} \geq |u_*(\cdot)|_{L_2}. \quad (2.27)$$

Значит, в силу (2.4) и (2.27)

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} |u^{hj}(\cdot)|_{L_2} \leq |u_*(\cdot)|_{L_2} \leq |u_0(\cdot)|_{L_2} \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} |\tilde{u}^{hj}(\cdot)|_{L_2}. \quad (2.28)$$

Следовательно, $u_0(\cdot) = u_*(\cdot)$, что противоречит (2.23). Поэтому

$$u^{hj}(\cdot) \rightarrow u_*(\cdot) \text{ слабо в } L_2 \text{ при } j \rightarrow \infty. \quad (2.29)$$

Затем из (2.28) следует сходимость

$$|u^{hj}(\cdot)|_{L_2} \rightarrow |u_*(\cdot)|_{L_2} \text{ при } j \rightarrow \infty. \quad (2.30)$$

Учитывая (2.29) и (2.30), в силу теоремы Ефимова — Стечкина заключаем

$$u^{hj}(\cdot) \rightarrow u_*(\cdot) \text{ в } L_2 \text{ при } j \rightarrow \infty.$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Пусть $u(t) \in P$ при п.в. $t \in T$, $P \subset \mathbb{R}^r$ — выпуклое, ограниченное и замкнутое множество. Таким образом,

$$P(\cdot) = \{v(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^r) : v(t) \in P \text{ при п.в. } t \in T\}.$$

В этом случае на промежутке $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i \in [0 : m - 1]$ управление $u^h(\cdot)$ в системе (1.1) можно вычислять по формуле

$$u^h(t) = u_i^h, \quad t \in \delta_i,$$

где

$$u_0^h = 0,$$

$$u_i^h = \arg \min \{v \in P : |(B'(\tau_i, \xi_i^h) s_i^h, v) - c^{(i)} \delta^{-1}| \leq \varepsilon^{(i)} \delta^{-1}, \quad i \in [1 : m - 1]\}. \quad (2.31)$$

При таком выборе управления $u^h(\cdot)$ все предыдущие утверждения останутся верными. Действительно, неравенство (2.12) можно переписать в виде

$$\left| (B'(\tau_i, \xi_i^h) s_i^h, \delta^{-1}) \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} u_*(t) dt - c^{(i)} \right| \leq \varepsilon^{(i)}.$$

Значит, выбирая u_i^h в форме (2.31), мы обеспечим выполнение неравенства

$$|(s_i^h, \delta B(\tau_i, \xi_i^h) u_i^h) - c^{(i)}| \leq \varepsilon^{(i)}.$$

Поэтому неравенство (2.12) останется справедливым, вследствие чего останутся справедливыми и неравенства (2.14), (2.15), а значит, и неравенство (2.21).

З а м е ч а н и е 2. Пусть вместо неравенства $|u_*(\cdot)|_{L_\infty(T; \mathbb{R}^r)} \leq K$ (см. условие 1) выполняется неравенство

$$|u_*(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^r)} \leq K. \quad (2.32)$$

Тогда теорема 1 (а также и теорема 2) останется справедливой. При этом, правда, в неравенствах (2.3) и (2.21) вместо δ необходимо писать $\delta^{1/2}$. Это следует из того факта, что при выполнении неравенства (2.32) оценки (2.6), (2.7), (2.9), (2.11), (2.16) и (2.20) будут иметь место, если в них, а также в определении $\varepsilon^{(i)}$ вместо $h + \delta$ писать $h + \delta^{1/2}$.

З а м е ч а н и е 3. При выполнении условия 1 в случае, когда $U(\cdot) = L_2(T; \mathbb{R}^r)$, векторы u_i^h можно находить путем решения экстремальной задачи (2.31), положив $P = \{u \in \mathbb{R}^r : |u|_r \leq K\}$.

З а м е ч а н и е 4. Предыдущие утверждения останутся справедливыми, если система (1.1) является уравнением в гильбертовом пространстве Z со скалярным произведением (\cdot, \cdot) и нормой $|\cdot|_Z$. При этом $y(\cdot) \in W^{1, \infty}(T; Y)$, где Y — банахово пространство с нормой $|\cdot|_Y$, $W^{1, \infty}(T; Y)$ — пространство дифференцируемых функций $y_1(\cdot) : T \rightarrow Y$, производные которых являются элементами $L_\infty(T; Y)$, $u(t) \in U$, $t \in T$, где U — равномерно выпуклое банахово пространство, $B(t, y)$ при каждом $t \in T$, $y \in Y$ является линейным непрерывным оператором, действующим из пространства U в пространство Z . Причем, каковы бы ни были $t_1, t_2 \in T$, $y_1, y_2 \in Y$, $u \in U$, имеет место неравенство

$$|\{B(t_1, y_1) - B(t_2, y_2)\}u|_Z \leq L\{|t_1 - t_2| + |y_1 - y_2|_Y\}|u|_U.$$

Под решением системы (1.1) понимается абсолютно непрерывная функция $z(\cdot) : T \rightarrow Z$, при п.в. $t \in T$ удовлетворяющая (1.1). Система (1.3) будет представлять собой уравнение в пространстве Z , управление в котором будет находиться согласно (2.1), (2.2). При этом в (2.1) и (1.2) вместо нормы $|\cdot|_N$ будет стоять норма $|\cdot|_Z$, а вместо скалярного произведения (\cdot, \cdot) — скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_Z$. В условии 1 следует естественно \mathbb{R}^r заменить на U , а \mathbb{R}^N — на Y .

3. Оценка скорости сходимости алгоритма

При некоторых дополнительных условиях может быть выписана оценка скорости сходимости (см. ниже теорему 3). Установим эту оценку. Для этого нам понадобится следующая

Лемма 1 [11, с. 29]. Пусть $u(\cdot) \in L_\infty(T_*; \mathbb{R}^n)$, $v(\cdot) \in W(T_*; \mathbb{R}^n)$, $T_* = [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$,

$$\left| \int_a^t u(\tau) d\tau \right|_n \leq \varepsilon, \quad |v(t)|_n \leq K \quad \forall t \in T_*.$$

Тогда при всех $t \in T_*$ верно неравенство $\left| \int_a^t (u(\tau), v(\tau)) d\tau \right| \leq \varepsilon(K + \text{var}(T_*; v(\cdot)))$.

Здесь символ $\text{var}(T_*; v(\cdot))$ означает вариацию функции $v(\cdot)$ на отрезке T_* , а символ $W(T_*; \mathbb{R}^n)$ — множество функций $y(\cdot) : T_* \rightarrow \mathbb{R}^n$ с ограниченной вариацией.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2, $N = r$, ранг матрицы $B(t, y(t))$ при всех $t \in T$ равен r . Пусть также $\sup_{t \in T} |B^{-1}(t, y(t))|_{N \times N} > 0$ и $u_*(\cdot) \in W(T; \mathbb{R}^r)$. Тогда справедлива оценка

$$\int_\delta^\vartheta |u_*(t - \delta) - u^h(t)|_r^2 dt \leq d\nu(h, \delta),$$

где постоянная d зависит от K и $\text{var}(T; u_*(\cdot))$ и не зависит от h, δ .

Доказательство. Воспользовавшись неравенствами (2.3) и (2.6), нетрудно видеть, что для любых $t_1, t_2 \in T_*$, $t_1 < t_2 < \vartheta - \delta$ верно неравенство

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \{B(t, y(t))u_*(t) - \tilde{B}(t + \delta, \xi^h(t + \delta))u^h(t + \delta)\} dt \right|_r \leq c_7\nu(h, \delta),$$

где

$$\tilde{B}(t, \xi^h(t)) = B(\tau_i, \xi_i^h), \quad \xi^h(t) = \xi_i^h \quad \text{при } t \in \delta_i, \quad i \in [0 : m - 1].$$

Учитывая это неравенство, а также неравенства (2.4) и (2.6), получаем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t_1}^{t_2} B(t, y(t))\{u_*(t) - u^h(t + \delta)\} dt \right|_r \\ & \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} \{B(t, y(t))u_*(t) - \tilde{B}(t + \delta, \xi^h(t + \delta))u^h(t + \delta)\} dt \right|_r \\ & \quad + \left| \int_{t_1}^{t_2} \{B(t, y(t)) - \tilde{B}(t + \delta, \xi^h(t + \delta))\} u^h(t + \delta) dt \right|_r \\ & \leq c_7\nu(h, \delta) + \int_{t_1}^{t_2} \tilde{c}_1(h + \delta)|u^h(t + \delta)|_r dt \leq c_8\nu(h, \delta). \end{aligned}$$

Далее, воспользовавшись неравенством (2.15), имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\delta}^{\vartheta} |u_*(t - \delta) - u^h(t)|_r^2 dt \leq 2 \int_{\delta}^{\vartheta} |u_*(t - \delta)|_r^2 dt - 2 \int_{\delta}^{\vartheta} (u_*(\tau - \delta), u^h(\tau)) d\tau \\ & = 2 \int_{\delta}^{\vartheta} ((B^{-1}(t, y(t)))' u_*(\tau - \delta), B(t, y(t))\{u_*(\tau - \delta) - u^h(\tau)\}) d\tau. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Утверждение теоремы следует из (3.1) и леммы 1.

Теорема доказана.

4. Примеры

1. Рассмотрим задачу восстановления $u(\cdot)$ по измерению (с ошибкой) в дискретные моменты τ_i фазового состояния $x(\tau_i)$ системы

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x(t)) + B(t, x(t))u(t), \quad t \in T, \quad x(0) = x_0. \quad (4.1)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^N$, $u \in \mathbb{R}^r$, $f_1(t, x)$ — липшицевая по x (с постоянной Липшица L) и непрерывная по t вектор-функция, $B(t, x)$ — липшицевая по совокупности аргументов матричная функция, для простоты выкладок положим с той же константой L . Множество $U(\cdot)$ такое же, как в разд. 2–4. Векторы $\xi_i^h \in \mathbb{R}^N$ таковы:

$$|x(\tau_i) - \xi_i^h|_N \leq h, \quad i \in [0 : m - 1]. \quad (4.2)$$

Символом $\omega(\cdot)$ обозначим модуль непрерывности функции $t \rightarrow f_1(t, \cdot)$ в некоторой окрестности области, в которой остается решение $x(\cdot)$ системы (4.1) в течение промежутка времени T .

Описанный выше алгоритм можно применить для решения сформулированной выше задачи, если положить

$$y(t) = x(t), \quad z(t) = x(t) - x(0) - \int_0^t f_1(s, x(s)) ds, \quad \psi_i^h = \xi_i^h - \xi_0^h - \delta \sum_{j=0}^{i-1} f_1(\tau_j, \xi_j^h).$$

Действительно, в этом случае

$$z_i^h = \psi_i^h - z(\tau_i) = \xi_i^h - \xi_0^h - \delta \sum_{j=0}^{i-1} f_1(\tau_j, \xi_j^h) - x(\tau_i) + x(0) + \int_0^{\tau_i} f_1(s, x(s)) ds.$$

Ввиду вытекающего из (4.2) неравенства $|f_1(s, x(s)) - f_1(\tau_i, \xi_i^h)|_N \leq \omega(\delta) + L(h + \delta K_1)$, $t \in \delta_i$, имеет место также неравенство

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{\tau_i} f_1(s, x(s)) ds - \delta \sum_{j=0}^{i-1} f_1(\tau_j, \xi_j^h) \right|_N \\ & \leq \sum_{j=0}^{i-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} |f_1(s, x(s)) - f_1(\tau_j, \xi_j^h)|_N ds \leq \vartheta(\omega(\delta) + L(h + \delta K_1)). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Поэтому

$$|z_i^h|_N \leq \rho(h, \delta) = 2h + \vartheta(\omega(\delta) + L(h + \delta K_1)).$$

Здесь $\operatorname{vrai} \max_{t \in T} |\dot{x}(t)|_N \leq K_1$. Далее, имеем

$$\begin{aligned} |z_i^h - z_{i-1}^h|_N &= \left| \psi_i^h - \psi_{i-1}^h - \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} B(s, x(s)) u_*(s) ds \right|_N \\ &\leq |\xi_i^h - x(\tau_i)|_N + |\xi_0^h - x(0)|_N + \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |f_1(s, x(s)) - f_1(\tau_{i-1}, \xi_{i-1}^h)|_N ds \\ &\leq \chi(h, \delta) = 2h + \delta(\omega(\delta) + L(h + \delta K_1)). \end{aligned}$$

При $U(\cdot) = P(\cdot)$ условия теоремы 2 выполнены, если $\delta(h) \rightarrow 0$, $h\delta^{-1}(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Если же $U(\cdot) = L_2(T; \mathbb{R}^r)$, то для выполнения условий теоремы 2 необходимо также, чтобы выполнялось еще следующее условие: $\omega(\delta)\delta^{-1/2} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

2. Пусть система (4.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(t, x_1(t), x_2(t)), \quad t \in T, \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(t, x_1(t), x_2(t)) + B_1(t, x_2(t))u(t), \end{aligned} \quad (4.4)$$

где $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $n_1 + n_2 = N$, $u \in \mathbb{R}^r$, векторные функции f_1, f_2 и матричная функция B_1 обладают теми же свойствами, что и функции f_1 и B в предыдущем примере. Пусть в моменты τ_i находятся векторы $\xi_i^h \in \mathbb{R}^{n_2}$ и $\pi_i^h \in \mathbb{R}^{n_1}$ такие, что $|\pi_i^h - x_1(\tau_i)|_{n_1} \leq h$, $|\xi_i^h - x_2(\tau_i)|_{n_2} \leq h$, $i \in [0 : m - 1]$. Задача состоит в восстановлении $u(\cdot)$ по результатам измерений. Эта задача является частным случаем задачи из примера 1. Однако, учитывая структуру системы (4.4), можно поступить следующим образом. Вторая подсистема системы (4.4) переписывается так:

$$\dot{x}_2(t) - f_2(t, x_1(0) + \int_0^t f_1(s, x_1(s), x_2(s)) ds, x_2(t)) = B_1(t, x_2(t))u(t). \quad (4.5)$$

Обозначим левую часть системы (4.5) через $\dot{z}(t)$ и положим $z(0) = x_2(0)$. Тогда, считая $N = n_2$, $y(t) = x_2(t)$, $B(t, y(t)) = B_1(t, y(t))$, перейдем от системы (4.4) к системе вида (1.1). Предположим, что

$$\operatorname{vrai} \max_{t \in T} |\dot{x}_1(t)|_{n_1} \leq K_1, \quad \operatorname{vrai} \max_{t \in T} |\dot{x}_2(t)|_{n_2} \leq K_1.$$

Пусть L_j и $\omega_j(\cdot)$, $j = 1, 2$, — постоянные Липшица и модули непрерывности функций f_j . Обозначим $L = \max\{L_1, L_2\}$, $\omega(\delta) = \max\{\omega_1(\delta), \omega_2(\delta)\}$,

$$\psi_i^h = \xi_i^h - \xi_0^h - \delta \sum_{j=0}^{i-1} f_2(\tau_j, \pi_0^h) + \delta \sum_{k=0}^j f_1(\tau_k, \pi_k^h, \xi_k^h), \xi_j^h.$$

Аналогично (4.3) устанавливаются справедливые при всех $t \in \delta_i$, $i \in [0 : m - 1]$, оценки

$$|x_2(t) - \xi_i^h|_{n_2} \leq h + \delta K_1, \quad |x_1(t) - \pi_i^h|_{n_1} \leq h + \delta K_1, \quad (4.6)$$

$$\int_0^t |f_1(s, x_1(s), x_2(s))| ds - \delta \sum_{j=0}^i f_1(\tau_j, \pi_j^h, \xi_j^h)|_{n_1} \leq \vartheta \omega(\delta) + 2L\vartheta(h + \delta K_1) + \delta K_1. \quad (4.7)$$

Учитывая (4.6) и (4.7), нетрудно проверить, что справедливы неравенства

$$|z_i^h|_{n_2} = |z(\tau_i) - \psi_i^h|_{n_2} \leq \rho(h, \delta) = (2 + 2L\vartheta + L^2\vartheta^2)h + \vartheta(1 + L\vartheta)\omega(\delta) + 2K_1L\vartheta(1 + L\vartheta)\delta,$$

$$|z_i^h - z_{i-1}^h|_{n_2} \leq \chi(h, \delta) = 2(1 + L(1 + L\vartheta))h + (1 + L\vartheta)\delta\omega(\delta) + 2LK_1(1 + L\vartheta)\delta^2.$$

В таком случае при $U(\cdot) = P(\cdot)$ условия теоремы 2 (как и в предыдущем примере) будут выполнены, если $\delta(h) \rightarrow 0$, $h\delta^{-1}(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Если же $U(\cdot) = L_2(T; \mathbb{R}^r)$, то для выполнения условий теоремы 2 необходимо также, чтобы выполнялось еще следующее условие: $\omega(\delta)\delta^{-1/2} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.
2. Boulite S., Idrissi A., Ould Maaloum A. Robust multivariable PI-controllers for linear systems in Banach state spaces // J. Math. Anal. Appl. 2009. Vol. 349, no. 1. P. 90–99. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.08.039>
3. Chen W.H., Yang J., Guo L., Li H. Disturbance-observer-based control and related methods: an overview // IEEE Trans. Ind. Electron. 2015. Vol. 63, no. 2. P. 1083–1095. <https://doi.org/10.1109/TIE.2015.2478397>
4. Guo B., Wu Z., Zhou H. Active disturbance rejection control approach to output-feedback stabilization of a class of uncertain nonlinear systems subject to stochastic disturbance // IEEE Trans. Autom. Control. 2019. Vol. 61, no. 6. P. 1613–1618. <https://doi.org/10.1109/TAC.2015.2471815>
5. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
6. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
7. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
8. Kurzhanski A., Valui I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1996. 284 p.
9. Ананьев Б.И., Гусев М.И., Филиппова Т.Ф. Управление и оценивание состояний динамических систем с неопределенностью. Новосибирск: Изд-во СО РАН. 2018. 193 с.
10. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Basel: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
11. Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И. Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2011. 292 с.

12. Maksimov V.I. The methods of dynamical reconstruction of an input in a system of ordinary differential equations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2021. Vol. 29, no. 1. P. 125–156. <https://doi.org/10.1515/jiip-2020-0040>
13. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
14. Осипов Ю.С., Кряжимский А.В. О методах позиционного моделирования управления в динамических системах. В кн.: Качественные вопросы теории дифференциальных уравнений и управляемых систем. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1988. С. 34–44.
15. Близорукова М.С. О моделировании входа в системе с запаздыванием // Прикладная математика и информатика. 2000. № 5. С. 105–115.
16. Близорукова М.С., Максимов В.И. Динамический метод невязки в задаче реконструкции входа системы с запаздыванием в управлении // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2021. Т. 61, № 3. С. 382–390. <https://doi.org/10.31857/S0044466921030042>
17. Сурков П.Г. Применение метода невязки в задаче восстановления правой части для системы дробного порядка // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2019. Т. 59, № 11. С. 1846–1855. <https://doi.org/10.1134/S0044466919110127>
18. Maksimov V.I. Some dynamical inverse problems for hyperbolic systems // Control and Cybernetics. 1996. Vol. 25, № 3. P. 464–482.
19. Максимов В.И. Позиционное моделирование управлений и начальных функций для систем Вольтерра // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 4. С. 618–629.
20. Максимов В.И. Динамический метод невязки в задаче реконструкции входа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 2. С. 295–306.
21. Васильева Е.В. Динамический метод невязки для дифференциального уравнения с памятью // Проблемы мат. физики: сб. Тр. факультета ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова / М.: Диалог-МГУ, 1998. С. 68–74.
22. Мартьянов А.С. Динамический метод невязки в задаче реконструкции входов при неполной информации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2005. Т. 45, № 2. С. 224–232.
23. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1972. 480 с.

Поступила 23.12.2024

После доработки 27.01.2025

Принята к публикации 27.01.2025

Опубликована онлайн 20.03.2025

Максимов Вячеслав Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: maksimov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Polyak B.T., Shcherbakov P.S. *Robastnaya ustoychivost' i upravleniye* [Robust stability and control]. Moscow, Nauka Publ., 2002, 303 p. ISBN: 5-02-002561-5.
2. Boulite S., Idrissi A., Ould Maaloum A. Robust multivariable PI-controllers for linear systems in Banach state spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 2009, vol. 349, no. 1, pp. 90–99. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.08.039>
3. Chen W.H., Yang J., Guo L., Li H. Disturbance-observer-based control and related methods: an overview. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 2015, vol. 63, no. 2, pp. 1083–1095. <https://doi.org/10.1109/TIE.2015.2478397>
4. Guo B.-Z., Wu Z.-H., Zhou H.-C. Active disturbance rejection control approach to output-feedback stabilization of a class of uncertain nonlinear systems subject to stochastic disturbance. *IEEE Trans. Autom. Control*, 2015, vol. 61, no. 6, pp. 1613–1618. <https://doi.org/10.1109/TAC.2015.2471815>
5. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*. NY, Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8. Original Russian text was published in Krasovskii N. N., Subbotin A. I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.

6. Krasovskiy N.N. *Upravleniye dinamicheskoy sistemoy. Zadacha o minimume garantirovannogo rezul'tata* [Dynamic system control. Minimum guaranteed result problem], Moscow, Nauka Publ., 1985, 520 p.
7. Kurzhanski A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [Control and observation under the conditions of uncertainty], Moscow, Nauka Publ., 1977, 392 p.
8. Kurzhanski A., Valui I. *Ellipsoidal calculus for estimation and control*. Boston, Birkhäuser, 1996, 321 p. ISBN-10: 0817636994.
9. Anan'ev B.I., Gusev M.I., Filippova T.F. *Upravleniye i otsenivaniye sostoyaniy dinamicheskikh sistem s neopredelennost'yu* [Control and estimation of states of dynamic systems with uncertainty]. Novosibirsk, Izd-vo SO RAN, 2018. 193 p. ISBN: 978-5-7692-1624-4.
10. Osipov Yu.S., Kryazhinskiy A.V. *Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions*, Basel, Gordon and Breach, 1995, 625 p. ISBN: 978-2881249440.
11. Osipov Yu.S., Kryazhinskiy A.V., Maksimov V.I. *Metody dinamicheskogo vosstanovleniya vkhodov upravlyayemykh sistem* [Methods for dynamic reconstruction of inputs of control systems], Yekaterinburg, Ural Branch of RAS Publ., 2011, 292 p.
12. Maksimov V.I. The methods of dynamical reconstruction of an input in a system of ordinary differential equations. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2021, vol. 29, no. 1, pp. 125–156. <https://doi.org/10.1515/jiip-2020-0040>
13. Vasil'ev F.P. *Metody resheniya ekstremal'nykh zadach* [Methods for solving extremal problems]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 400 p.
14. Osipov Yu.S., Kryazhinskiy A.V. On methods of positional modeling of control in dynamic systems. In the book: *Kachestvennyye voprosy teorii differentsial'nykh uravneniy i upravlyayemykh sistem* [Qualitative issues of the theory of differential equations and control systems]. Sverdlovsk, UNTS Publ., 1988, pp. 34–44.
15. Blizorukova M.S. Input modeling in time-delayed systems. *Comput. Math. Model.*, 2001, vol. 12, no. 2, pp. 174–185. <https://doi.org/10.1023/A:1012518317520>
16. Blizorukova M.S., Maksimov V.I. Dynamic discrepancy method in the problem of reconstructing the input of a system with time delay control. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2021, vol. 61, no. 3, pp. 359–367. <https://doi.org/10.1134/S0965542521030040>
17. Surkov P.G. Application of the residual method in the right hand side reconstruction problem for a system of fractional order. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2019, vol. 59, no. 11, pp. 1781–1790. <https://doi.org/10.1134/S0965542519110113>
18. Maksimov V.I. Some dynamical inverse problems for hyperbolic systems. *Control and Cybernetics*, 1996, vol. 25, no. 3, pp. 464–482.
19. Maksimov V.I. Positional modeling of controls and initial functions for Volterra systems. *Differentsial'nye Uravneniya*, 1987, vol. 23, no. 4, pp. 618–629 (in Russian).
20. Maksimov V.I. The dynamical decoupled method in the input reconstruction problem. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2004, vol. 44, no. 2, pp. 278–288.
21. Vasil'eva E.V. The dynamic discrepancy method for a differential equation with memory. *Comput. Math. Model.*, 1999, vol. 10, no. 1, pp. 55–60. <https://doi.org/10.1007/BF02358922>
22. Mart'yanov A.S. The dynamic residual method in the problem of reconstructing inputs with incomplete information. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2005, vol. 45, no. 2, pp. 213–221.
23. Ioffe A.D., Tikhomirov V.M. *Theory of extremal problems*. Elsevier Sci. Publ., 2009, 459 p. ISBN: 9780080875279. Original Russian text published in Ioffe A. D., Tikhomirov V. M. *Teoriya ekstremal'nykh zadach*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 480 p.

Received December 23, 2024

Revised January 27, 2025

Accepted January 27, 2025

Published online March 20, 2025

Vyacheslav Ivanovich Maksimov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: maksimov@imm.uran.ru.

Cite this article as: V.I. Maksimov. On an algorithm of tracking an input action in a system of differential equations. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 2, pp. 141–154.