

УДК 517.977

О ПОЛИЭДРАЛЬНОМ МЕТОДЕ СИНТЕЗА УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧИ УСИЛЕННОГО УКЛОНЕНИЯ В МНОГОШАГОВЫХ СИСТЕМАХ С БИЛИНЕЙНОСТЬЮ И ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Е. К. Костюсова

Рассматривается задача уклонения в условиях неопределенности для многошаговых систем с исходно линейной структурой и фазовыми ограничениями, где действуют управления u , U и v , причем u и v входят аддитивно, а U — в матрицу системы. В рассматриваемой задаче синтеза управлений, которую называем задачей усиленного уклонения, цель v — либо избежать попадания траектории на заданное терминальное множество в заданный конечный момент времени и на последовательность множеств, заданных в предыдущие моменты, либо нарушить хотя бы одно из фазовых ограничений, каковы бы ни были допустимые реализации u и U . Наличие U привносит в системы нелинейность и приводит к системам билинейного типа. Предполагается, что терминальное и промежуточные множества являются параллелепипедами, управления u и v стеснены параллелотопозначными ограничениями, U — интервальными, а фазовые ограничения заданы в виде полос. Разработан полиэдральный метод синтеза управлений v с использованием полиэдральных (параллелепипедозначных) трубок, которые могут быть найдены из рекуррентных соотношений по явным формулам. Для получения решения рассматриваемой задачи найдено решение вспомогательной одношаговой полиэдральной задачи уклонения с билинейностью. Отмечены ее связи с проблематикой из интервального анализа, касающейся так называемых множеств кванторных решений интервальных уравнений. Приведены примеры, иллюстрирующие работоспособность метода.

Ключевые слова: системы с неопределенностью, задача уклонения, синтез управлений, билинейные системы, фазовые ограничения, полиэдральные методы, параллелепипеды, интервальный анализ.

E. K. Kostousova. On the polyhedral method of control synthesis for an enhanced evasion problem for discrete-time systems with bilinearity and state constraints.

The evasion problem under uncertainty is considered for discrete-time systems with an initially linear structure and state constraints, where controls u , U , and v act; u and v enter additively, and U enters into the system matrix. In the considered control synthesis problem, which we call the enhanced evasion problem, the aim of v is either to avoid the trajectory to hit a given terminal set at a given final moment, as well as a sequence of sets specified at previous moments, or to violate at least one of the state constraints, whatever the admissible realizations of u and U . The presence of U introduces nonlinearity into the systems and leads to bilinear type systems. It is assumed that the terminal and intermediate sets are parallelepipeds, the controls u and v are constrained by parallelotope-valued constraints, U by interval constraints, and the state constraints are specified in the form of zones. A polyhedral method for synthesizing controls v is developed using polyhedral (parallelepiped-valued) tubes, which can be found from recurrence relations using explicit formulas. To obtain a solution to the problem under consideration, a solution to an auxiliary one-step polyhedral evasion problem with bilinearity is found. Its connections with the problems of interval analysis concerning the so-called sets of quantifier solutions to interval equations are noted. Examples illustrating the efficiency of the method are given.

Keywords: uncertain systems, evasion problem, control synthesis, bilinear systems, state constraints, polyhedral methods, parallelepipeds, interval analysis.

MSC: 93C41, 93C55, 93C10, 93B52, 52B12

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-2-125-140

1. Введение

Рассматриваются многошаговые системы с исходно линейной структурой, с заданными терминальным и промежуточными множествами, а также с заданными фазовыми ограничениями, где действуют управления u , U и v , причем u и v входят аддитивно, а U — в матрицу системы. Управления могут иметь разные цели, и подобно [1] можно поставить две задачи гарантированного управления в условиях неопределенности: сближения и уклонения. Известны подходы к решению задач такого рода, основанные на построении многозначных трубок,

именуемых для дифференциальных систем стабильными мостами [1], трубками разрешимости [2–4], обратными трубками достижимости [3; 4], информационными трубками [3; 4], трубками выживаемости [3], стабильными трактами [5] и др., но их практическое нахождение, как правило, затруднительно, особенно для систем большой размерности и систем с фазовыми ограничениями [2–4; 6; 7]. Разработано много численных методов (мы приводим только несколько ссылок из большого числа работ; см. также библиографию в них) для приближенного построения трубок траекторий с использованием различных способов представления множеств (см., например, [8]), в частности, с помощью политопов с большим числом вершин и граней [9]. Полезны и не слишком трудоемкие методы, основанные на оценивании множеств простыми областями типа эллипсоидов [2–4; 7; 10; 11], в том числе для систем с билинейностью [7; 12; 13], и параллелепипедов / параллелотопов [14–16]; привлекаются и интервальнозначные трубки [17]. А.Б. Куржанский предложил использовать целые семейства таких оценок [2–4]. Конструкции такого рода применялись для решения задач терминального сближения [2–4; 11; 18] и уклонения [16; 19] в заданный конечный момент.

Работа посвящена развитию метода синтеза управлений v с использованием полиэдральных (параллелепипедо-значных) трубок, разработанного автором ранее для задач уклонения в линейных системах [19; 20]. Теперь цель v — либо избежать попадания траектории на заданное терминальное множество в заданный конечный момент времени и попадания на последовательность множеств, заданных в предыдущие моменты (поэтому называем рассматриваемую задачу задачей усиленного уклонения), либо нарушить хотя бы одно из фазовых ограничений, каковы бы ни были допустимые реализации u и U . Наличие управлений U привносит в системы нелинейность и приводит к системам билинейного типа, что значительно усложняет задачу. Для нахождения решения найдено решение вспомогательной одношаговой полиэдральной задачи уклонения с билинейностью. В предположении, что терминальное и промежуточные множества являются параллелепипедами, управления u и v стеснены параллелотопозначными ограничениями, U — интервальными, а фазовые ограничения заданы в виде полос [18], представлены рекуррентные соотношения с явными формулами для построения пары полиэдральных трубок, нахождение которых значительно менее трудоемко, чем построение точных трубок разрешимости для задачи уклонения. Стратегии управления v могут быть найдены по явным формулам на основе этих трубок. Представлены иллюстрирующие примеры.

Отметим, что предлагаемый полиэдральный метод решения задач уклонения может быть применен, аналогично [16], для построения опасных возмущений, которые можно использовать, например, для оценки робастности управляемых систем и качества управлений. Упомянем также, что полиэдральные методы использовались в задачах управления самолетом для построения управлений при наличии помех в режиме реального времени [16; 21].

В работе приняты следующие обозначения: \mathbb{R}^n и $\mathbb{R}^{n \times m}$ — линейные пространства вещественных n -векторов и $n \times m$ -матриц соответственно; \top — знак транспонирования; $(x, y) = x^\top y$ — скалярное произведение для $x, y \in \mathbb{R}^n$; $\|x\|_2 = (x^\top x)^{1/2}$ и $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ — нормы вектора $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$; $e^i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^\top \in \mathbb{R}^n$ — единичный орт вдоль оси $0x_i$ (единица стоит на i -м месте); $e = (1, 1, \dots, 1)^\top$; $A = \{a_i^j\} = \{a^j\}$ — матрица с элементами a_i^j и со столбцами a^j (верхним индексом нумеруем столбцы, нижним — компоненты векторов); 0 — нулевая матрица (вектор) произвольной размерности; I — единичная матрица; неравенства $\leq, <, \geq, >$ для векторов и матриц понимаются покомпонентно; $\text{Abs } A = \{|a_i^j|\}$ — матрица абсолютных величин элементов для $A = \{a_i^j\} \in \mathbb{R}^{n \times m}$; $\text{diag } \pi$ — диагональная матрица с компонентами π_i вектора π на диагонали; $\det A$ — определитель матрицы A ; $\mathcal{A} = \{A \mid \underline{A} \leq A \leq \bar{A}\} = \{A \mid \text{Abs}(A - \bar{A}) \leq \hat{A}\}$ — интервальная матрица, где $\bar{A} = (\underline{A} + \bar{A})/2$, $\hat{A} = (\bar{A} - \underline{A})/2 \geq 0$; операции с множествами в \mathbb{R}^n : $\mathcal{X}^1 + \mathcal{X}^2 = \{y \mid y = x^1 + x^2, x^k \in \mathcal{X}^k\}$ — сумма Минковского, $\mathcal{X}^1 \dot{-} \mathcal{X}^2 = \{y \mid y + \mathcal{X}^2 \subseteq \mathcal{X}^1\}$ — разность Минковского, $\mathcal{A} \circ \mathcal{X} = \{y \mid y = Ax, A \in \mathcal{A}, x \in \mathcal{X}\}$ — умножение множества \mathcal{X} на интервальную матрицу \mathcal{A} ; $\rho(l|\mathcal{X}) = \sup\{l^\top x \mid x \in \mathcal{X}\}$ — опорная функция множества \mathcal{X} ; $\text{sign } z$ — функция знака числа (равна $-1, 0, 1$ соответственно при $z < 0, z = 0, z > 0$). Для краткости используем обозначения типа $k = 1, \dots, n$ вместо $k = 1, 2, \dots, n$.

2. Постановка задачи

Пусть состояние $x \in \mathbb{R}^n$ объекта описывается системой

$$x[k] = (A[k] + U[k])x[k-1] + B[k]u[k] + C[k]v[k], \quad k = 1, \dots, N, \quad (2.1)$$

где $A[k] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B[k] \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, $C[k] \in \mathbb{R}^{n \times n_v}$ — известные матричные функции; $u[k] \in \mathbb{R}^{n_u}$, $U[k] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $v[k] \in \mathbb{R}^{n_v}$ — управления, стесненные ограничениями

$$u[k] \in \mathcal{R}[k] \subset \mathbb{R}^{n_u}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (2.2)$$

$$U[k] \in \mathcal{U}[k] = \{U \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \text{Abs}(U - \tilde{U}[k]) \leq \hat{U}[k]\}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (2.3)$$

$$v[k] \in \mathcal{Q}[k] \subset \mathbb{R}^{n_v}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (2.4)$$

где $\mathcal{R}[k]$ и $\mathcal{Q}[k]$ — заданные множества, $\tilde{U}[k]$ и $\hat{U}[k] \geq 0$ — известные матрицы, задающие ограничения интервального типа. Функции $u[\cdot]$, $U[\cdot]$ и $v[\cdot]$, удовлетворяющие (2.2)–(2.4), называем *допустимыми*. Задано терминальное множество $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$. Также может быть задана последовательность множеств $\mathcal{M}[k] \subseteq \mathbb{R}^n$, $k = 1, \dots, N-1$ (для дальнейшего удобно положить $\mathcal{M}[N] = \mathcal{M}$), а также множества $\mathcal{Y}[k] \subseteq \mathbb{R}^n$, $k = 1, \dots, N-1$, задающие фазовые ограничения.

Система рассматривается в условиях конфликта, когда управления u , U и v могут иметь разные цели. Так, цель u и U может состоять в том, чтобы обеспечить включение $x[N] \in \mathcal{M}$ или хотя бы одно из включений $x[k] \in \mathcal{M}[k]$, $k \in \{1, \dots, N\}$, при соблюдении фазовых ограничений $x[k] \in \mathcal{Y}[k]$ во все моменты $k = 1, \dots, N-1$, каковы бы ни были допустимые реализации $v[\cdot]$. Цель v может состоять, наоборот, в том, чтобы либо избежать попадания траектории на все множества $\mathcal{M}[k]$, $k=1, \dots, N$, либо нарушить хотя бы одно из фазовых ограничений $x[k] \in \mathcal{Y}[k]$, $k \in \{1, \dots, N-1\}$, т. е. удовлетворить хотя бы одному из условий (2.5) или (2.6)

$$x[k] \notin \mathcal{M}[k], \quad k = 1, \dots, N \quad (\mathcal{M}[N] = \mathcal{M}), \quad (2.5)$$

$$x[k] \notin \mathcal{Y}[k] \quad \text{для некоторого } k \in \{1, \dots, N-1\}, \quad (2.6)$$

каковы бы ни были допустимые реализации $u[\cdot]$ и $U[\cdot]$. При этом соответственно возникают задачи, называемые задачами сближения и уклонения.

Работа посвящена полиэдральному методу решения задачи уклонения в предположении, что множества $\mathcal{R}[k]$, $\mathcal{Q}[k]$, $\mathcal{M}[k]$ и $\mathcal{Y}[k]$ имеют определенную полиэдральную структуру. Напомним ряд определений.

Параллелепипедом $\mathcal{P}(p, P, \pi) \subset \mathbb{R}^n$ называем множество $\mathcal{P} = \mathcal{P}(p, P, \pi) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = p + P(\text{diag } \pi)\zeta, \|\zeta\|_\infty \leq 1\}$, где $p \in \mathbb{R}^n$; $P = \{p^i\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — неособая матрица ($\det P \neq 0$) со столбцами p^i единичной длины ($\|p^i\|_2 = 1$); $\pi \in \mathbb{R}^n$, $\pi \geq 0$. С целью упрощения формул условие нормировки $\|p^i\|_2 = 1$ может быть опущено. Называем p центром параллелепипеда, а P — матрицей ориентации. В случае $\pi > 0$ называем параллелепипед *невырожденным*.

Параллелотопом $\mathcal{P}[p, \bar{P}] \subset \mathbb{R}^n$ называем множество $\mathcal{P} = \mathcal{P}[p, \bar{P}] = \{x \mid x = p + \bar{P}\zeta, \|\zeta\|_\infty \leq 1\}$, где $p \in \mathbb{R}^n$, $\bar{P} = \{p^i\} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $m \leq n$. Называем параллелотоп \mathcal{P} *невырожденным*, если $m = n$ и $\det \bar{P} \neq 0$.

Полосой (или *m-полосой*) $\mathcal{S}(c, S, \sigma, m) \subset \mathbb{R}^n$ называем пересечение $m \leq n$ *гиперполос* Σ^i : $\mathcal{S} = \mathcal{S}(c, S, \sigma, m) = \bigcap_{i=1}^m \Sigma^i$, $\Sigma^i = \Sigma(c_j, s^j, \sigma_j) = \{x \mid |(x, s^i) - c_i| \leq \sigma_i\}$ с линейно независимыми векторами s^i , $\|s^i\|_2 = 1$ (условие нормировки может быть опущено для упрощения формул). Здесь $c \in \mathbb{R}^m$; $S = \{s^i\} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ — матрица со столбцами s^i ; $\sigma \in \mathbb{R}^m$, $\sigma \geq 0$.

Каждый параллелепипед $\mathcal{P}(p, P, \pi)$ — это параллелотоп $\mathcal{P}[p, \bar{P}]$ с $\bar{P} = P \text{diag } \pi$; каждый невырожденный параллелотоп — это параллелепипед с $P = \bar{P}$, $\pi = e$, где $e = (1, 1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$. Каждый параллелепипед — это n -полоса; при $m = n$ полоса — это параллелепипед [19].

Везде ниже полагаем, что выполнено следующее предположение.

Предположение 1. Все матрицы $D[k] = A[k] + \tilde{U}[k]$ — неособые ($\det D[k] \neq 0$). Множества $\mathcal{R}[k]$ и $\mathcal{Q}[k]$ — это параллелепипеды, \mathcal{M} — невырожденный параллелепипед:

$$\mathcal{R}[k] = \mathcal{P}[r[k], \bar{R}[k]], \quad \bar{R}[k] \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}, \quad \mathcal{Q}[k] = \mathcal{P}[q[k], \bar{Q}[k]], \quad \bar{Q}[k] \in \mathbb{R}^{n_v \times n_v},$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}[N] = \mathcal{P}[p_f, P_f, \pi_f] = \mathcal{P}[p_f, \bar{P}_f], \quad \bar{P}_f \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \det \bar{P}_f \neq 0,$$

в качестве множеств $\mathcal{M}[k]$ допускаются в разные моменты времени $k \in \{1, \dots, N-1\}$ либо параллелепипеды $\mathcal{M}[k] = \mathcal{P}[f[k], F[k], \phi[k]]$, либо пустые множества $\mathcal{M}[k] = \emptyset$, а в качестве $\mathcal{Y}[k]$ — либо полосы $\mathcal{Y}[k] = \mathcal{S}[c[k], S[k], \sigma[k], m] = \bigcap_{i=1}^m \Sigma^i[k]$, $\Sigma^i[k] = \Sigma[c_j[k], s^j[k], \sigma_j[k]] = \{x \mid |(x, s^i[k]) - c_i[k]| \leq \sigma_i[k]\}$, либо $\mathcal{Y}[k] = \mathbb{R}^n$.

Изучим полиэдральную задачу уклонения, сформулировав ее следующим образом.

Задача 1. Для системы (2.1)–(2.4) в условиях предположения 1 найти такую полиэдральную (параллелепипедозначную) трубку $\mathcal{P}[\cdot] = \mathcal{P}[p[\cdot], P[\cdot], \pi[\cdot]]$, удовлетворяющую $\mathcal{P}[k] \supseteq \mathcal{M}[k]$, $k = 1, \dots, N$, и соответствующую стратегию управления $v = v[k, x]$, удовлетворяющую $v[k, x] \in \mathcal{Q}[k]$, $k = 1, \dots, N$, чтобы каждое решение $x[\cdot]$ уравнения

$$x[k] = (A[k] + U[k])x[k-1] + B[k]u[k] + C[k]v[k, x[k-1]], \quad k = 1, \dots, N,$$

с начальным условием $x[0] = x^0 \notin \mathcal{P}[0]$ либо проходило вне трубки $\mathcal{P}[\cdot]$, либо нарушало хотя бы одно из фазовых ограничений $x[k] \in \mathcal{Y}[k]$, т. е. удовлетворяло хотя бы одному из двух условий:

$$x[k] \notin \mathcal{P}[k], \quad k = 0, \dots, N, \quad (2.7)$$

или (2.6) при любых допустимых реализациях $u[\cdot]$ и $U[\cdot]$. Ввести семейство таких трубок $\mathcal{P}[\cdot]$.

Называем эту задачу *полиэдральной задачей усиленного уклонения*, чтобы подчеркнуть отличие от задачи *терминального уклонения*, в постановке которой фигурирует только одно условие $\mathcal{P}[N] \supseteq \mathcal{M}[N]$ в конечный момент, а все другие $\mathcal{M}[k] = \emptyset$, $k = 0, \dots, N-1$.

3. Элементарные полиэдральные оценки. Одношаговая полиэдральная задача уклонения с билинейностью

Решение задачи 1 найдем с использованием внешних элементарных параллелепипедозначных оценок для результатов операций с множествами. При этом подобно [19; 20] в соотношениях участвуют (явно или неявно) операции суммы Минковского, разности Минковского, объединения и пересечения множеств. Ввиду наличия в (2.1) матричного управления U приходится иметь дело также с операцией $\mathcal{A} \circ \mathcal{X}$ умножения множества \mathcal{X} на интервальную матрицу \mathcal{A} .

Напомним, что параллелепипед $\mathcal{P}^+ = \mathcal{P}(p^+, P^+, \pi^+)$ называют *внешней оценкой* множества $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, если $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}^+$. Так называемая *внешняя касающаяся оценка* $\mathcal{P}^+ = \mathbf{P}_V^+(\mathcal{X})$ для непустого множества \mathcal{X} с заданной матрицей ориентации $P^+ = V$ определяется соотношениями $\rho(\pm(V^{-1})^\top e^i | \mathbf{P}_V^+(\mathcal{X})) = \rho(\pm(V^{-1})^\top e^i | \mathcal{X})$, $i = 1, \dots, n$, и может быть найдена на основе значений опорной функции множества \mathcal{X} [19]. Матрицы V здесь выступают как параметр, определяющий целое семейство оценок. Для пустого множества $\mathcal{X} = \emptyset$ будем полагать $\mathbf{P}_V^+(\emptyset) = \emptyset$.

Касающиеся оценки $\mathcal{P}(p^+, V, \pi^+) = \mathbf{P}_V^+(\mathcal{P}^1 \cup \mathcal{P}^2)$ для объединения параллелепипедов $\mathcal{P}^k = \mathcal{P}(p^k, P^k, \pi^k)$ легко найти по явным формулам $p^+ = V(\gamma^{+(-)} + \gamma^{+(+)})/2$, $\pi^+ = (\gamma^{+(+)} - \gamma^{+(-)})/2$, $\gamma^{+(\pm)} = \pm \max_{1 \leq k \leq 2} \{\pm V^{-1} p^k + (\text{Abs}(V^{-1} P^k)) \pi^k\}$.

Ситуация с построением оценок для пересечения параллелепипеда и полосы сложнее.

Известны явные формулы для построения касающихся оценок $\mathbf{P}_V^+(\mathcal{P} \cap \Sigma)$ для пересечения параллелепипеда и гиперполосы при $n+1$ специальным образом выбранных матрицах ориентации $V \in \{P, P^1, \dots, P^n\}$ (где P — матрица ориентации параллелепипеда \mathcal{P}) [14; 22]. Такие оценки получаются в результате нахождения так называемых тугих гиперполос, определяющих $\mathcal{P} \cap \Sigma$, и отбрасывания одной из них.

В общем случае в качестве внешних оценок для пересечения параллелепипеда \mathcal{P} и полосы \mathcal{S} будем использовать не обязательно касающиеся оценки, обозначая через $\tilde{\mathcal{P}}_V^+(\mathcal{P} \cap \mathcal{S})$ некоторую (любую) внешнюю для $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}$ оценку с матрицей ориентации V , обладающую свойствами

$$\tilde{\mathcal{P}}_V^+(\mathcal{P} \cap \mathcal{S}) \supseteq \mathcal{P} \cap \mathcal{S}, \quad \tilde{\mathcal{P}}_V^+(\mathcal{P} \cap \mathcal{S}) = \mathcal{P} \text{ в случае } \mathcal{P} \subseteq \mathcal{S}.$$

Такие оценки могут быть построены различными способами, в частности, упомянутыми в [19; 22]. Условимся называть матрицу ориентации V *допускаемой*, если $\tilde{\mathcal{P}}_V^+(\mathcal{P} \cap \mathcal{S})$ может быть построена по некоторым известным формулам.

Для определения положения точки x относительно параллелепипеда $\mathcal{P}(p, P, \pi)$ будем использовать относительные координаты $\xi = P^{-1}(x - p)$ и следующий критерий [19, лемма 2.2]: $x \notin \mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда найдется такой индекс $i_* \in \{1, \dots, n\}$, что $|\xi_{i_*}| > \pi_{i_*}$.

Рассмотрим следующую вспомогательную элементарную задачу, решением которой воспользуемся затем для решения задачи 1.

Задача 2 (*Одношаговая полиэдральная задача уклонения с билинейностью*). Даны множества $\mathcal{P} = \mathcal{P}(p, P, \pi) \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{R} = \mathcal{P}[r, \bar{R}]$ с $\bar{R} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$, $\mathcal{Q} = \mathcal{P}[q, \bar{Q}]$ с $\bar{Q} \in \mathbb{R}^{n_v \times n_v}$, интервальная матрица $\mathcal{A} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \text{Abs}(A - \hat{A}) \leq \hat{A}\}$ и матрицы $B \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times n_v}$. Найти такой параллелепипед $\hat{\mathcal{P}} = \mathcal{P}(\hat{p}, \hat{P}, \hat{\pi})$ и такую стратегию управления $v^* = v(x)$, что $v^* \in \mathcal{Q}$ и для любого $x \notin \hat{\mathcal{P}}$ выполняется $Ax + Bu + Cv^* \notin \mathcal{P}$ при любых $A \in \mathcal{A}$ и $u \in \mathcal{R}$.

З а м е ч а н и е 1. Множество $\mathbb{R}^n \setminus \hat{\mathcal{P}}$, где $\hat{\mathcal{P}}$ входит в решение задачи 2, дает внутреннюю оценку ($\mathbb{R}^n \setminus \hat{\mathcal{P}} \subseteq \check{\mathcal{W}}$) для множества $\check{\mathcal{W}}$, являющегося решением следующей задачи с неопределенностями. А именно, по некоторой аналогии с постановками задач из интервального анализа с помощью логических кванторов существования “ \exists ” и всеобщности “ \forall ” для интервально заданных систем [23, разд. 4.2] можно поставить задачу нахождения такого множества $\check{\mathcal{W}}$, что

$$\check{\mathcal{W}} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists v^* \in \mathcal{Q}) (\forall A \in \mathcal{A}) (\forall u \in \mathcal{R}) (Ax + Bu + Cv^* \notin \mathcal{P})\} \quad (3.1)$$

или иначе

$$\check{\mathcal{W}} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists v^* \in \mathcal{Q}) (\forall A \in \mathcal{A}) (\forall u \in \mathcal{R}) (\exists y \notin \mathcal{P}) (Ax = y - Bu - Cv^*)\}. \quad (3.2)$$

Отметим, что при этом в отличие от так называемых множеств кванторных решений интервальных уравнений из [23, разд. 4.2] в постановках (3.1), (3.2) вместо интервальных ограничений допускаются более общие параллелепипедозначные, одно из условий задано в виде принадлежности к дополнению параллелепипеда, а также последовательность кванторов не укладывается в рассмотренные в [23] предикаты АЕ-формы, когда в выделяющем предикате все вхождения квантора “ \forall ” предшествуют вхождениям квантора “ \exists ”.

Очевидно, что решение задачи 2 не единственно. Дадим одно из возможных решений. Положим

$$\begin{aligned} \hat{p} &= \tilde{A}^{-1}(p - Br - Cq), \quad \hat{P} = \tilde{A}^{-1}P, \quad \hat{\pi} = \pi + \beta + \alpha - \gamma, \\ \alpha &= (\text{Abs } \Xi) e, \quad \Xi = P^{-1}B\bar{R}, \quad \gamma = (\text{Abs } \Theta) e, \quad \Theta = P^{-1}C\bar{Q}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где вектор β определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \beta &= \beta^* e, \quad \beta^* = C_3 / (1 - C_2), \\ C_1 &= \|(\text{Abs}(P^{-1}))\hat{A}\|_\infty, \quad C_2 = \|(\text{Abs}(P^{-1}))\hat{A} \text{Abs } \hat{P}\|_\infty, \quad C_3 = C_1 \|\hat{p}\|_\infty + C_2 \|\pi + \alpha - \gamma\|_\infty, \end{aligned} \quad (3.4)$$

и определим вектор $v^* = v^*(x)$ следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} v^* &= v^*(x) = q + \bar{Q}\chi^*(x), \\ \chi_j^*(x) &= \text{sign } \Theta_{i_*}^j \text{sign } \zeta_{i_*}, \quad j = 1, \dots, n_v, \quad \zeta = (\text{diag } \hat{\pi})^{-1} \hat{P}^{-1}(x - \hat{p}), \\ i_* &\in \text{Argmax}_{1 \leq i \leq n} |\zeta_i| = \text{Argmax}_{1 \leq i \leq n} |(\hat{\pi}_i)^{-1} (\hat{P}^{-1}(x - \hat{p}))_i|. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Заметим, что здесь $i_* \in \{1, \dots, n\}$ — произвольный индекс, удовлетворяющий (3.5), т. е. обеспечивающий указанный максимум, и при этом имеем

$$|\zeta_{i_*}| = \|\zeta\|_\infty. \quad (3.6)$$

Теорема 1. *В условиях задачи 2 пусть выполнены следующие предположения:*

$$\det \tilde{A} \neq 0, \quad (3.7)$$

$$\pi + \alpha - \gamma > 0, \quad (3.8)$$

$$C_2 < 1. \quad (3.9)$$

Тогда частным решением задачи 2 являются невырожденный параллелепипед $\hat{P} = \mathcal{P}(\hat{p}, \hat{P}, \hat{\pi})$, где \hat{p} , \hat{P} и $\hat{\pi}$ определяются формулами (3.3), (3.4), и вектор $v^* = v^*(x)$ вида (3.5).

Доказательство. Сначала поясним, как получились формулы (3.3), (3.4), и затем докажем утверждение. Предположим, что существуют $\hat{P} = \mathcal{P}(\hat{p}, \hat{P}, \hat{\pi})$ и v^* , дающие решение задачи 2, и постараемся найти \hat{p} , \hat{P} , $\hat{\pi}$ и v^* из следующих соображений.

Пусть $y = Ax + Bu + Cv^*$. Представим y с использованием относительных координат относительно \mathcal{P} : $y = p + P\xi$, а x запишем в виде $x = \hat{p} + \hat{P}(\text{diag } \hat{\pi})\zeta$.

Из [23, разд. 2.1, формула (2.4)] и [23, разд. 2.2, с. 103] известно, что $\mathcal{A} \circ x = \mathcal{P}(\hat{A}x, I, \hat{A} \text{ Abs } x)$. Поэтому при $A \in \mathcal{A}$, $u \in \mathcal{R}$ и $v^* \in \mathcal{Q}$ соотношение $y = Ax + Bu + Cv^*$ можно записать в виде

$$p + P\xi = \tilde{A}x + I(\text{diag } (\hat{A} \text{ Abs } x))\eta + Br + B\bar{R}\delta + Cq + C\bar{Q}\chi^*, \quad (3.10)$$

где $\|\eta\|_\infty \leq 1$, $\|\delta\|_\infty \leq 1$, $\|\chi^*\|_\infty \leq 1$. Таким образом, с учетом вышеупомянутого критерия [19, лемма 2.2] хотим найти \hat{p} , \hat{P} , $\hat{\pi}$ с $\hat{\pi} > 0$ и $\chi^* = \chi^*(x)$ с $\|\chi^*\|_\infty \leq 1$ так, чтобы для любого x с $\|\zeta\|_\infty > 1$ при любых η и δ с $\|\eta\|_\infty \leq 1$ и $\|\delta\|_\infty \leq 1$ получалось $|\xi_{i_*}| > \pi_{i_*}$ для некоторого $i_* \in \{1, \dots, n\}$. Будем искать $\hat{P} = \mathcal{P}(\hat{p}, \hat{P}, \hat{\pi})$ в виде (3.3) (матрица $\hat{P} = \tilde{A}^{-1}P$ получается неособой ввиду (3.7)), пытаясь выполнить желаемое за счет подбора вектора β с положительными компонентами:

$$\beta > 0. \quad (3.11)$$

Заметим, что при выполнении (3.8) и (3.11) получим $\hat{\pi} > 0$ (и невырожденность \hat{P}), поскольку

$$\hat{\pi} = \pi + \beta + \alpha - \gamma > 0. \quad (3.12)$$

Выражая ξ из (3.10) с учетом (3.3), получаем следующую связь между ζ и ξ :

$$\begin{aligned} \xi &= -P^{-1}p + P^{-1}(\tilde{A}(\hat{p} + \hat{P}(\text{diag } \hat{\pi})\zeta) + (\text{diag } (\hat{A} \text{ Abs } x))\eta + Br + B\bar{R}\delta + Cq + C\bar{Q}\chi^*) \\ &= (\text{diag } \hat{\pi})\zeta + P^{-1}(\text{diag } (\hat{A} \text{ Abs } x))\eta + \Xi\delta + \Theta\chi^*. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Оценим сверху по модулю второе слагаемое во второй строке (3.13), учитывая неравенства типа $\text{Abs}(G(\text{diag } d)\eta) \leq (\text{Abs } G) \text{ Abs}(\text{Vect } \{d_i\eta_i\})$, где $\text{Vect } \{d_i\eta_i\}$ — это вектор с компонентами $d_i\eta_i$, принимая во внимание неравенства $|\eta_i| \leq 1$ (вытекающие из $\|\eta\|_\infty \leq 1$) и вид x , и предполагая выполненным $\hat{\pi} > 0$:

$$\begin{aligned} \text{Abs}(P^{-1}(\text{diag } (\hat{A} \text{ Abs } x))\eta) &\leq \text{Abs}(P^{-1}) \text{ Abs } \hat{A} \text{ Abs } x \\ &\leq \text{Abs}(P^{-1}) \hat{A} (\text{Abs } \hat{p} + \text{Abs } \hat{P} \text{ diag } \hat{\pi} \text{ Abs } \zeta). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Для третьего слагаемого во второй строке (3.13) при $\|\delta\|_\infty \leq 1$ имеем

$$\text{Abs}(\Xi\delta) \leq \text{Abs } \Xi \text{ Abs } \delta \leq (\text{Abs } \Xi) e = \alpha. \quad (3.15)$$

Далее будем рассматривать компоненту ξ_{i_*} вектора ξ с номером i_* , выбранным из условия, указанного в третьей строке (3.5), и строя $\chi^* = \chi^*(x)$ по правилу из (3.5). При этом в силу выражений для $\chi^* = \chi^*(x)$ из (3.5) и γ из (3.3) имеем:

$$(\Theta \chi^*)_{i_*} = \sum_j \Theta_{i_*}^j \text{sign } \Theta_{i_*}^j \text{sign } \zeta_{i_*} = \sum_j |\Theta_{i_*}^j| \text{sign } \zeta_{i_*} = \gamma_{i_*} \text{sign } \zeta_{i_*}. \quad (3.16)$$

Рассматривая произвольную точку $x \notin \hat{\mathcal{P}}$ (т.е. имея $\|\zeta\|_\infty > 1$), оценим ξ_{i_*} , пользуясь равенством (3.13). Без ограничения общности рассмотрим случай, когда $\zeta_{i_*} > 1$, и значит, $(\Theta \chi^*)_{i_*} = \gamma_{i_*}$ ввиду (3.16), и получим для ξ_{i_*} оценку снизу. Учитывая (3.15), (3.14), (3.12), (3.6) и введенные обозначения C_1 и C_2 из (3.4), имеем при выполнении условий (3.8), (3.11) и $\|\zeta\|_\infty > 1$:

$$\begin{aligned} \xi_{i_*} &\geq \hat{\pi}_{i_*} \zeta_{i_*} - |e^{i_* \top} P^{-1}(\text{diag}(\hat{A} \text{Abs } x)) \eta| - \alpha_{i_*} + \gamma_{i_*} \\ &\geq \hat{\pi}_{i_*} \zeta_{i_*} - e^{i_* \top} \text{Abs}(P^{-1}) \hat{A} \text{Abs } \hat{p} \\ &\quad - e^{i_* \top} \text{Abs}(P^{-1}) \hat{A} (\text{Abs } \hat{P}) \text{diag}(\pi + \beta + \alpha - \gamma) \text{Abs } \zeta - \alpha_{i_*} + \gamma_{i_*} \\ &\geq (\pi_{i_*} + \beta_{i_*} + \alpha_{i_*} - \gamma_{i_*}) \|\zeta\|_\infty - C_1 \|\hat{p}\|_\infty - C_2 (\|\pi + \alpha - \gamma\|_\infty + \|\beta\|_\infty) \|\zeta\|_\infty - \alpha_{i_*} + \gamma_{i_*} \\ &> (\pi_{i_*} + \alpha_{i_*} - \gamma_{i_*}) - C_1 \|\hat{p}\|_\infty + \left(\min_{1 \leq i \leq n} \beta_i - C_2 (\|\pi + \alpha - \gamma\|_\infty + \|\beta\|_\infty) \right) \|\zeta\|_\infty - \alpha_{i_*} + \gamma_{i_*} \\ &= \pi_{i_*} - C_1 \|\hat{p}\|_\infty + \left(\min_{1 \leq i \leq n} \beta_i - C_2 \|\beta\|_\infty - C_2 \|\pi + \alpha - \gamma\|_\infty \right) \|\zeta\|_\infty. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Если искать β в виде $\beta = \beta^* e$, то полученное в (3.17) неравенство превратится в

$$\xi_{i_*} > \pi_{i_*} + (-C_1 \|\hat{p}\|_\infty + ((1 - C_2) \beta^* - C_2 \|\pi + \alpha - \gamma\|_\infty) \|\zeta\|_\infty). \quad (3.18)$$

Рассмотрим такие значения β^* , что

$$(1 - C_2) \beta^* - C_2 \|\pi + \alpha - \gamma\|_\infty \geq 0. \quad (3.19)$$

Тогда с учетом $\|\zeta\|_\infty > 1$ неравенство (3.18) можно продолжить и получить

$$\xi_{i_*} > \pi_{i_*} - C_1 \|\hat{p}\|_\infty + (1 - C_2) \beta^* - C_2 \|\pi + \alpha - \gamma\|_\infty = \pi_{i_*} + (1 - C_2) \beta^* - C_3.$$

Выбор β^* в виде (3.4) ведет к неравенству $\xi_{i_*} > \pi_{i_*}$. При этом в силу [19, лемма 2.2] получается, что $y = Ax + Bu + Cv^* \notin \mathcal{P}$ при любых $A \in \mathcal{A}$ и $u \in \mathcal{R}$. И при этом вектор $v^* = v^*(x)$, построенный в соответствии с (3.5), удовлетворяет ограничению $v^* \in \mathcal{Q}$, поскольку $\|\chi^*(x)\|_\infty \leq 1$.

Итак, найдены параллелепипед $\hat{\mathcal{P}}$ вида (3.3), (3.4) и вектор $v^* = v^*(x)$ вида (3.5), которые при выполнении условий (3.11) и (3.19) на β дают частное решение задачи 2. Таким образом, осталось убедиться, что эти два условия выполняются при выборе β^* в виде (3.4).

Неравенство $\beta^* > 0$ (и, значит, (3.11)) очевидно ввиду формул (3.4) и наложенного в теореме условия (3.9). Проверим выполнение (3.19). Действительно, имеем

$$(1 - C_2) \beta^* - C_2 \|\pi + \alpha - \gamma\|_\infty = C_3 - C_2 \|\pi + \alpha - \gamma\|_\infty = C_1 \|\hat{p}\|_\infty \geq 0. \quad \square$$

З а м е ч а н и е 2. Напомним, что решения одношаговой полиэдральной задачи уклонения при отсутствии билинейности (т.е. при $\hat{A} = 0$) были найдены ранее [20]. Было описано целое семейство параллелепипедов $\hat{\mathcal{P}}$ с разными матрицами ориентации и несколько способов построения v^* ; при этом, вообще говоря, не накладывалось условие (3.8) и, таким образом, допускаются вырожденные параллелепипеды $\hat{\mathcal{P}}$, а также рассматривается случай пустого множества $\hat{\mathcal{P}} = \emptyset$. Если конкретизировать решение задачи 2 из теоремы 1 для случая $\hat{A} = 0$, то в силу (3.4) получим $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ и $\beta = 0$, и параллелепипед $\hat{\mathcal{P}}$ из (3.3) совпадет с одним из представителей вышеупомянутого семейства (а именно, с имеющим матрицу ориентации $\hat{P} = \tilde{A}^{-1} P$), а v^* при условиях (3.8) совпадет с одним из описанных в [20].

4. Решение задачи 1

Введем семейство полиэдральных трубок $\mathcal{P}[\cdot]$, при построении которых участвуют также трубки $\mathcal{P}^1[\cdot]$ и $\mathcal{P}^2[\cdot]$. При этом сечениями трубок служат параллелепипеды

$$\mathcal{P}[k] = \mathcal{P}(p[k], P[k], \pi[k]), \quad \mathcal{P}^1[k] = \mathcal{P}(p^1[k], P^1[k], \pi^1[k]), \quad \mathcal{P}^2[k] = \mathcal{P}(p^2[k], P^2[k], \pi^2[k]),$$

но допускается также вырождение ряда сечений $\mathcal{P}[k]$, $\mathcal{P}^1[k]$ и $\mathcal{P}^2[k]$ в пустые множества. Для $k = N$ положим

$$\mathcal{P}[N] = \mathcal{P}(p[N], P[N], \pi[N]), \quad p[N] = p_f, \quad \pi[N] = (\text{Abs}(P[N]^{-1}P_f)) \pi_f, \quad (4.1)$$

где $P[N]$ — произвольная неособая матрица, а для остальных k воспользуемся следующими соотношениями. Если $\mathcal{P}[k] \neq \emptyset$ (т. е. $\mathcal{P}[k] = \mathcal{P}(p[k], P[k], \pi[k])$), то будем находить $\mathcal{P}^1[k-1] = \mathcal{P}(p^1[k-1], P^1[k-1], \pi^1[k-1])$ по формулам

$$\begin{aligned} p^1[k-1] &= D[k]^{-1}(p[k] - B[k]r[k] - C[k]q[k]), & D[k] &= A[k] + \tilde{U}[k], \\ P^1[k-1] &= D[k]^{-1}P[k], & & \\ \pi^1[k-1] &= \pi[k] + \alpha[k] - \gamma[k] + \beta^*[k]e, & & \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \alpha[k] &= (\text{Abs } \Xi[k])e, & \Xi[k] &= P[k]^{-1}B[k]\bar{R}[k], \\ \gamma[k] &= (\text{Abs } \Theta[k])e, & \Theta[k] &= P[k]^{-1}C[k]\bar{Q}[k], \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \beta^*[k] &= C_3[k]/(1 - C_2[k]), \\ C_1[k] &= \|(\text{Abs}(P[k]^{-1}))\hat{U}[k]\|_\infty, \\ C_2[k] &= \|(\text{Abs}(P[k]^{-1}))\hat{U}[k] \text{Abs}(P^1[k-1])\|_\infty, \\ C_3[k] &= C_1[k]\|p^1[k-1]\|_\infty + C_2[k]\|\pi[k] + \alpha[k] - \gamma[k]\|_\infty \end{aligned} \quad (4.4)$$

и рассмотрим следующие рекуррентные соотношения для вычисления $\mathcal{P}[\cdot]$, $\mathcal{P}^1[\cdot]$ и $\mathcal{P}^2[\cdot]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^1[k-1] &= \begin{cases} \mathcal{P}(p^1[k-1], P^1[k-1], \pi^1[k-1]) \text{ из (4.2)–(4.4)}, & \text{если } \mathcal{P}[k] \neq \emptyset, \\ \emptyset, & \text{если } \mathcal{P}[k] = \emptyset, \end{cases} & k=N, \dots, 1, \\ \mathcal{P}^2[k-1] &= \tilde{P}_{P^2[k-1]}^+(\mathcal{P}^1[k-1] \cap \mathcal{Y}[k-1]), & k=N, \dots, 2, \\ \mathcal{P}[k-1] &= P_{P[k-1]}^+(\mathcal{P}^2[k-1] \cup \mathcal{M}[k-1]), & k=N, \dots, 2, \quad \mathcal{P}[0] = \mathcal{P}^1[0]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь символами типа $P_V^+(\mathcal{P} \cup \mathcal{M})$ и $\tilde{P}_V^+(\mathcal{P} \cap \mathcal{Y})$ обозначены операции построения внешних оценок, описанные в разд. 3, а $P[k]$, $k = N, \dots, 1$, и $P^2[k]$, $k = N-1, \dots, 1$ — некоторые неособые матрицы. Фактически формулы (4.1)–(4.5) описывают параметризованные семейства трубок $\mathcal{P}[\cdot]$, $\mathcal{P}^1[\cdot]$ и $\mathcal{P}^2[\cdot]$, где параметрами выступают матрицы ориентации: $P[N]$ — при построении параллелепипеда $\mathcal{P}[N]$, а $P[k]$, $k = N-1, \dots, 1$, и $P^2[k]$, $k = N-1, \dots, 1$ — при построении внешних оценок для объединения и пересечения множеств.

В (4.5), вообще говоря, допускается возможность появления пустых множеств в результате операции пересечения. В этой связи напомним формулы для операций с пустыми множествами: $\mathcal{X} \cup \emptyset = \mathcal{X}$, $\mathcal{X} \cap \emptyset = \emptyset$. Заметим, что ввиду накладываемых ниже условий (4.8), (4.9) мы не рассматриваем возможность появления $\mathcal{P}^1[k-1] = \emptyset$ при $\mathcal{P}[k] \neq \emptyset$ (в отличие от линейного случая [19], когда множество $\mathcal{P}^1[k-1]$ может получиться пустым в результате выполнения операции разности Минковского).

Если решим эту систему (4.1)–(4.5) в обратном времени от $k = N$ до $k = 0$ при фиксированных значениях параметров и найдем трубки $\mathcal{P}[\cdot]$ и $\mathcal{P}^1[\cdot]$, то можем рассмотреть следующие формулы для построения стратегии управления $v = v[k, x]$, аналогичные (3.5) (учитывая, что в (3.5) $\text{sign } \zeta_{i_*} = \text{sign } (\hat{P}^{-1}(x - \hat{p}))_{i_*}$ при $\hat{\pi} > 0$):

$$\begin{aligned} v[k, x] &= q[k] + \bar{Q}[k]\chi[k, x], \\ \chi_j[k, x] &= \text{sign } \Theta_{i_*[k]}^j[k] \text{sign } (P^1[k-1]^{-1}(x - p^1[k-1]))_{i_*[k]}, \quad j = 1, \dots, n_v, \\ i_*[k] &\in \text{Argmax}_{1 \leq i \leq n} |(\pi_i^1[k-1])^{-1}(P^1[k-1]^{-1}(x - p^1[k-1]))_i|, \end{aligned} \quad (4.6)$$

и далее доопределить ее следующим образом:

$$v^*[k, x] = \begin{cases} v[k, x] \text{ из (4.6),} & \text{если } \mathcal{P}[k] \neq \emptyset, \\ q[k], & \text{если } \mathcal{P}[k] = \emptyset, \end{cases} \quad k=N, \dots, 1. \quad (4.7)$$

Теорема 2. Пусть для системы (2.1)–(2.4) выполнено предположение 1. Пусть $P[k]$, $k = N, \dots, 1$, — произвольные неособые матрицы и $P^2[k]$, $k = N-1, \dots, 1$, — произвольные допускаемые¹ неособые матрицы, и в процессе вычислений в соответствии с соотношениями (4.1)–(4.5) оказываются выполненными условия:

$$\pi[k] + \alpha[k] - \gamma[k] > 0, \quad \text{если } \mathcal{P}[k] \neq \emptyset, \quad (4.8)$$

$$C_2[k] < 1, \quad \text{если } \mathcal{P}[k] \neq \emptyset \quad (4.9)$$

для всех $k \in \{N, \dots, 1\}$ таких, что $\mathcal{P}[k] \neq \emptyset$. Тогда трубка $\mathcal{P}[\cdot]$ вместе с любой стратегией управления $v^*[\cdot, \cdot]$, определяемой формулами (4.6), (4.7), дает решение задачи 1.

Доказательство. Пусть оказались выполнены все указанные условия и найдены трубки $\mathcal{P}[\cdot]$, $\mathcal{P}^1[\cdot]$, $\mathcal{P}^2[\cdot]$. Из последней строки в (4.5) вытекают требуемые в задаче 1 включения $\mathcal{P}[k] \supseteq \mathcal{M}[k]$, $k=1, \dots, N-1$, а (4.1) дает $\mathcal{P}[N] \supseteq \mathcal{M}[N] = \mathcal{M}$. Заметим также, что условия (4.8), (4.9) обеспечивают невырожденность параллелепипедов $\mathcal{P}^1[k-1]$ на всех таких шагах, где $\mathcal{P}[k] \neq \emptyset$, и, следовательно, стратегия управления (4.7) определена для любых k и x .

Требуется доказать, что для любой точки $x[0] \notin \mathcal{P}[0]$ при использовании управлений (4.7) получим либо (2.7), либо (2.6). Рассуждаем по индукции. Пусть уже построили траекторию $x[\cdot]$ до момента $j = k-1$, находимся в положении $x[k-1]$, и для $j = k-1$ выполнено одно из следующих условий (4.10) или (4.11):

$$x[i] \notin \mathcal{P}[i], \quad i = 0, \dots, j, \quad (4.10)$$

$$x[i] \notin \mathcal{Y}[i] \quad \text{для некоторого } i < j, \quad (4.11)$$

и докажем выполнение (4.10) или (4.11) для $j = k$. Выполнение (4.11) для $j = k-1$, очевидно, означает и выполнение (4.11) для $j = k$. Поэтому осталось рассмотреть случай (4.10).

Итак, предположим, что $x[k-1] \notin \mathcal{P}[k-1]$. При этом, если $\mathcal{P}[k] = \emptyset$, то при использовании любого $v^*[k, x[k-1]] \in \mathcal{Q}[k]$, в том числе $v^*[k, x[k-1]] = q[k]$ из (4.7), соотношение $x[k] \notin \mathcal{P}[k]$, очевидно, выполняется.

Пусть теперь $\mathcal{P}[k] \neq \emptyset$ и, как отмечено выше, $\mathcal{P}^1[k-1]$ — невырожденный параллелепипед. Если имеем $x[k-1] \notin \mathcal{P}^1[k-1]$, то использование $v^*[k, x[k-1]]$ из (4.7) приведет к $x[k] \notin \mathcal{P}[k]$ при любых допустимых значениях $u[k]$ и $U[k]$ в силу решения одношаговой задачи 1 и теоремы 1, т. е. пришли к (4.10) для $j = k$. Если же $x[k-1] \in \mathcal{P}^1[k-1]$, то в силу нашего предположения $x[k-1] \notin \mathcal{P}[k-1]$ это означает, что $x[k-1] \notin \mathcal{Y}[k-1]$, поскольку в противном случае из (4.5) получилось бы $x[k-1] \in \mathcal{P}^1[k-1] \cap \mathcal{Y}[k-1] \subseteq \mathcal{P}^2[k-1] \subseteq \mathcal{P}[k-1]$, т. е. противоречие с тем, что $x[k-1] \notin \mathcal{P}[k-1]$. Таким образом, получили (4.11) для $j = k$. \square

¹Допускаемые в смысле, указанном в разд. 3 при введении $\tilde{P}_V^+(\mathcal{P} \cap \mathcal{Y})$.

З а м е ч а н и е 3. Формулы (4.1)–(4.5) определяют обширные семейства трубок за счет варьирования допускаемых последовательностей матриц ориентации $P^2[\cdot]$ и $P[\cdot]$. Конкретизируя способы вычисления оценок типа $\tilde{P}_V^+(\mathcal{P} \cap \mathcal{Y})$ и используя эвристические способы выбора матриц ориентации при построении элементарных оценок, можем выделить 4 следующих подсемейства трубок $\mathfrak{P}^{(l)}$, $l = 1, \dots, 4$, для решения задачи 1, где параметром служит матрица ориентации $P[N]$ в конечный момент. Способы вычисления $\tilde{P}_V^+(\mathcal{P} \cap \mathcal{Y})$ и выбора матриц ориентации для $\mathfrak{P}^{(l)}$ подобны описанным в [19, Remark 4.4] для $\hat{\mathfrak{P}}^{+,(l)}$, а способы выбора матриц ориентации при вычислении оценок типа $P_V^+(\mathcal{P} \cup \mathcal{M})$ в семействах $\mathfrak{P}^{(1)}$, $\mathfrak{P}^{(3)}$ и $\mathfrak{P}^{(2)}$, $\mathfrak{P}^{(4)}$ аналогичны описанным в [20, замечание 6(a)] (т. е. в (4.5) полагаем $P[k-1] = P^2[k-1]$) и [20, замечание 6(b)] соответственно. При этом в подсемействах $\mathfrak{P}^{(1)}$ и $\mathfrak{P}^{(2)}$ последовательно используются формулы для пересечения параллелепипеда и гиперполосы, а в двух других — формулы для пересечения параллелепипедов; матрицы ориентации в $\mathfrak{P}^{(1)}$ и $\mathfrak{P}^{(3)}$ берутся, можно сказать, в силу системы, а в $\mathfrak{P}^{(2)}$ и $\mathfrak{P}^{(4)}$ — с привлечением соображений локальной оптимизации оценок по объему (про оптимизацию по объему оценки $P_V^+(\mathcal{P} \cap \Sigma)$ для пересечения параллелепипеда и гиперполосы можно найти в [14; 22]).

З а м е ч а н и е 4. Итак, имеем следующую ситуацию. Пусть по формулам (4.1)–(4.5) нашли несколько трубок $\mathcal{P}^\beta[\cdot]$, $\mathcal{P}^{1,\beta}[\cdot]$. Если начальная точка x^0 лежит вне хотя бы одного из параллелепипедов $\mathcal{P}^\beta[0]$ ($x^0 \in \bigcup_\beta (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}^\beta[0])$), то теорема 2 гарантирует, что с помощью стратегии управления $v^*[\cdot, \cdot]$ из (4.6), (4.7) сможем обеспечить либо уклонение от всех множеств $\mathcal{M}[k]$: $x[k] \notin \mathcal{M}[k]$, $k=1, \dots, N$, либо нарушение фазовых ограничений, т. е. (2.6). В противном случае никакой гарантии, что цель управления v будет достигнута, нет.

5. Примеры

Проиллюстрируем решение задачи 1 и сказанное в замечании 4 на примере модельной двумерной (для наглядности) системы, полученной дискретизацией по Эйлера дифференциальной системы на интервале времени $t \in [0, \theta]$, которую можно интерпретировать как вариант так называемой модели Ричардсона [24]: $n = 2$,

$$A[k] \equiv I + \tau \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 2 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad \tilde{U}[k] \equiv \tau \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{U}[k] \equiv \tau \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \hat{U}[k] \equiv \tau \begin{bmatrix} 0 & 0.3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B[k] \equiv \tau(1, 0)^\top, \quad \mathcal{R}[k] \equiv \mathcal{P}(1, I, 1), \quad C[k] \equiv \tau(0, 1)^\top, \quad \mathcal{Q}[k] \equiv \mathcal{P}(0.2, I, 0.2),$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{P}((1, 0.9)^\top, I, (0.1, 0.1)^\top), \quad \tau = \theta/N, \quad \theta = 0.25, \quad N = 200.$$

Были рассмотрены пять вариантов задачи 1 со следующими данными:

- (I) $\hat{U}[k] = \{\hat{u}_i^j[k]\} \equiv 0$ (т. е. система линейна); $\mathcal{M}[k] = \emptyset$, $\mathcal{Y}[k] = \mathbb{R}^n$, $k = 1, \dots, N-1$;
- (II) $\hat{u}_1^2[k] \equiv 0.3$ (система с билинейностью); $\mathcal{M}[k]$ и $\mathcal{Y}[k]$ — такие же, как в случае (I);
- (III) $\hat{u}_1^2[k] \equiv 0.3$; $\mathcal{M}[k] = \emptyset$, $k=1, \dots, N-1$; $\mathcal{Y}[k]$, $k=1, \dots, N-1$, определяются формулами

$$x_1[k] \geq x_2[k] \quad \text{при} \quad k > (2/3)N \quad (5.1)$$

(фазовые ограничения нестационарны; при моделировании неравенство $x_1 \geq x_2$ в (5.1) подменялось фиктивной достаточно широкой гиперполосой $\mathcal{S}(1000, (-1, 1)^\top, 1000, 1)$);

- (IV) $\hat{u}_1^2[k] \equiv 0.3$; $\mathcal{M}[k] = \mathcal{M}$, $k = 1, \dots, N-1$; $\mathcal{Y}[k] = \mathbb{R}^n$, $k = 1, \dots, N-1$;

- (V) $\hat{u}_1^2[k] \equiv 0.3$; $\mathcal{M}[k] = \mathcal{M}$, $k = 1, \dots, N-1$; $\mathcal{Y}[k]$, $k = 1, \dots, N-1$, определяются (5.1).

Были взяты 5 начальных точек: $x^{0,1} = (0.2, 0.75)^\top$, $x^{0,2} = (0.86, 0.5)^\top$, $x^{0,3} = (0.75, 0.75)^\top$, $x^{0,4} = (1.15, 1.05)^\top$, $x^{0,5} = (0.45, 0.39)^\top$.

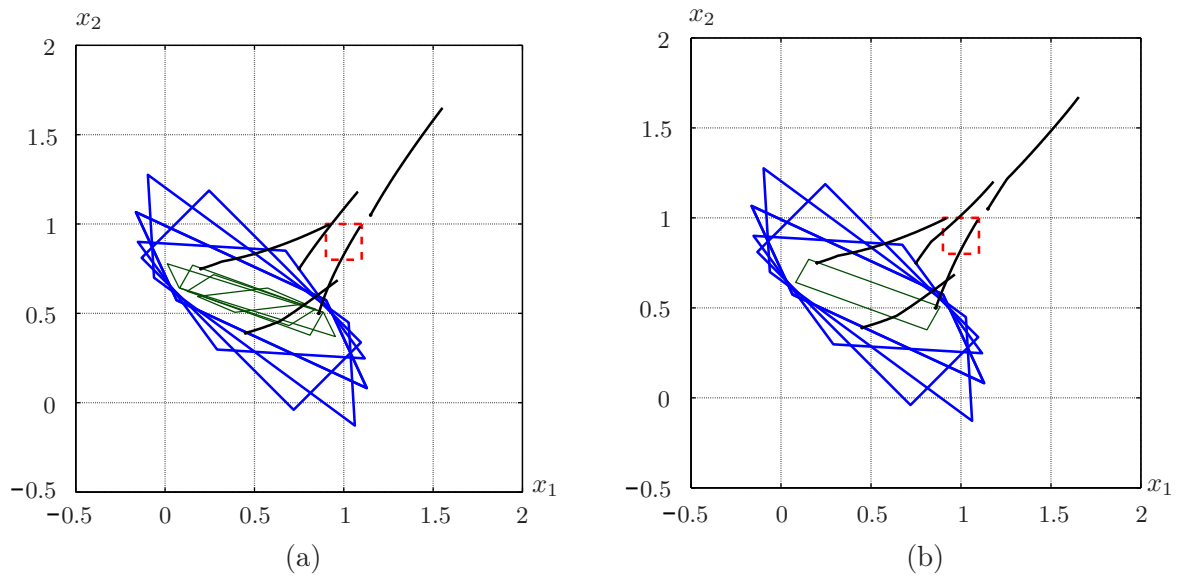


Рис. 1. Результаты полиэдрального синтеза управлений v и u , U в примере 1 (случай II): (а) — сечения $\mathcal{P}^\beta[0]$ (толстые линии), $\mathcal{P}^{-,\alpha}[0]$ (тонкие линии), \mathcal{M} (штриховая линия) и соответствующие траектории $x^i[\cdot]$, $i = 1, \dots, 5$; (б) — сечения $\mathcal{P}^\beta[0]$, $\mathcal{P}^{-,\alpha_0}[0]$ и соответствующие $x^i[\cdot]$, $i = 1, \dots, 5$.

При моделировании в качестве u и U можно задавать любые допустимые реализации. Но мы, подобно [20, разд. 6], находим по несколько трубок $\mathcal{P}^\beta[\cdot]$ (по формулам (4.1)–(4.5)) и $\mathcal{P}^{-,\alpha}[\cdot]$ для решения задач уклонения и сближения соответственно (в примерах ниже $\beta = 1, \dots, 4$, а $\alpha = 1, \dots, 4$ или $\alpha = 1$), для каждой точки x^0 выбираем “наиболее подходящие” для решения каждой из этих задач трубки $\mathcal{P}^{\beta*}[\cdot]$ и $\mathcal{P}^{-,\alpha*}[\cdot]$, строим соответствующие значения управлений v по формулам (4.6), (4.7) и u по формулам типа [19, (3.3),(3.6)], U — согласно [18, формулы (17)] и находим соответствующие траектории $x^i[\cdot]$, $i = 1, \dots, 5$.

При построении трубок $\mathcal{P}^\beta[\cdot]$ следуем замечанию 3, а $P[N]$ варьируем аналогично [19, § 5].

Для нахождения трубок $\mathcal{P}^{-,\alpha}[\cdot]$, $\alpha = 1, \dots, 4$, используем формулы [18, (8)–(13)] для решения полиэдральной задачи терминального уклонения, где параметры $\Omega[\cdot]$ и $L[\cdot]$ берутся в соответствии с [18, Remark 3(iv)], $\Gamma[\cdot]$ — как в [20, разд. 6] и/или вычисляется из соображений локальной оптимизации по объему аналогично [18, разд. 4] (обозначим трубку с таким построением $\Gamma[\cdot]$ через $\mathcal{P}^{-,\alpha_0}[\cdot]$), а $P^{-}[\cdot]$ и $p^{-}[\cdot]$ — как и в [18, разд. 4].

Согласно [18, Theorem 3.1] (эта теорема, как несложно заметить, справедлива также для использованных нами управлений u типа [19, (3.3),(3.6)]), начальная точка x^0 , лежащая в каком-то из параллелотопов $\mathcal{P}^{-,\alpha}[0]$, с помощью упомянутых соответствующих u и U гарантированно может быть переведена на \mathcal{M} в момент N с соблюдением фазовых ограничений. Случай с $x^0 \notin \bigcap_\beta \mathcal{P}^\beta[0]$ описан в замечании 4. Если x^0 лежит внутри всех $\mathcal{P}^\beta[0]$, но вне всех $\mathcal{P}^{-,\alpha}[0]$, то теория (теорема 2 и [18, Theorem 3.1]) не гарантирует, что цели управлений v или u , U при указанных способах их построения могут быть достигнуты. Заметим, что возникающий при этом “зазор” может получиться не только из-за использования полиэдральных трубок, но и вследствие того, что даже для линейных многошаговых систем, вообще говоря, не справедлива известная теорема об альтернативе из теории дифференциальных игр [1, Ch. 2], [25].

Отметим, что в задаче 1 усиленного уклонения (в случаях (IV) и (V)) управления u и U , построенные на основе описанных выше трубок $\mathcal{P}^{-,\alpha}[\cdot]$ (предназначенных для решения задачи терминального сближения), вообще говоря, — необязательно “наихудшие” с точки зрения v ; построение таких “наихудших” u и U выходит за рамки данной работы.

На рис. 1 и 2 сечения трубок $\mathcal{P}^\beta[\cdot]$ и $\mathcal{P}^{-,\alpha}[\cdot]$ показаны толстыми и тонкими линиями соответственно, а терминальное множество \mathcal{M} и множества $\mathcal{Y}[k]$ выделены штриховыми линиями.

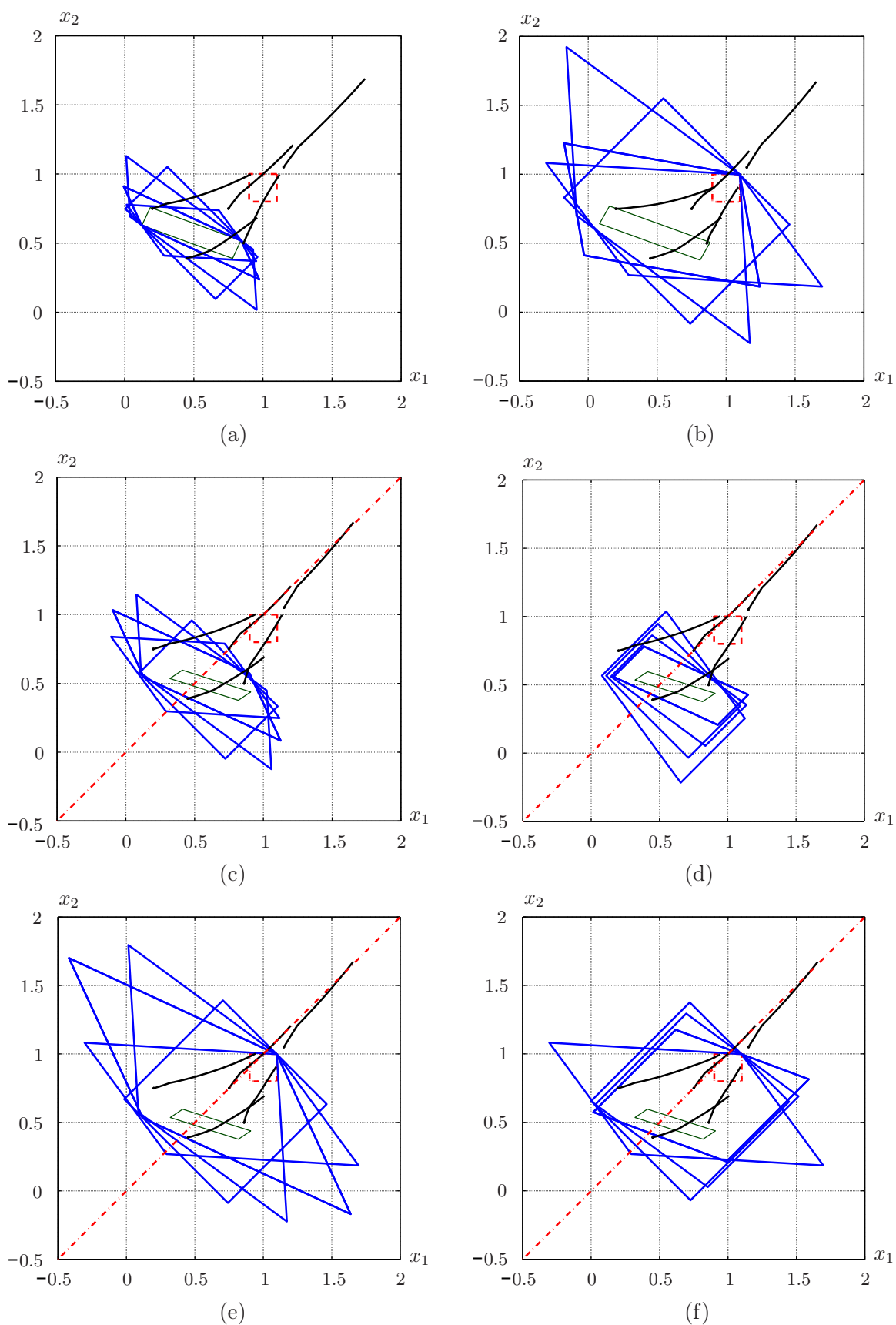


Рис. 2. Результаты моделирования в примере 2: (a) — случай I; (b) — случай IV с $\mathcal{P}^\beta[\cdot] \in \mathfrak{P}^{(2)}$; (c) — случай III с $\mathcal{P}^\beta[\cdot] \in \mathfrak{P}^{(1)}$; (d) — случай III с $\mathcal{P}^\beta[\cdot] \in \mathfrak{P}^{(2)}$; (e) — случай V с $\mathcal{P}^\beta[\cdot] \in \mathfrak{P}^{(1)}$; (f) — случай V с $\mathcal{P}^\beta[\cdot] \in \mathfrak{P}^{(2)}$.

Пример 1. Рассмотрим сначала случай (II) (билинейная система без множеств $\mathcal{M}[k]$ и $\mathcal{Y}[k]$). На рис. 1а показаны сечения $\mathcal{P}^\beta[0]$ и $\mathcal{P}^{-,\alpha}[0]$, множество \mathcal{M} и 5 получившихся траекторий $x^i[\cdot]$. Для $x^i[\cdot]$, $i = 3, 4, 5$, достигнуто терминальное уклонение ($x^i[N] \notin \mathcal{M}$), а $x^i[N] \in \mathcal{M}$, $i = 1, 2$, как и гарантировалось теорией. Заключение о принадлежности точек множеств здесь и ниже даются на основании точных результатов вычислений при моделировании, а не на основе рисунков, где иногда это трудно различимо.

Заметим, что $x^3[\cdot]$ прошла через \mathcal{M} в промежуточные моменты, но это и не запрещалось в случае (II). Рис. 1b, приведенный для удобства сравнения с результатами из примера 2, аналогичен рис. 1а, но для вычисления u и U для всех x^0 использовалась одна трубка $\mathcal{P}^{-,\alpha}[\cdot]$; заметим, что траектории $x^i[\cdot]$ при этом, вообще говоря, изменяются.

Пример 2. В случаях (I), (III)–(V) для построения u и U использовали трубку $\mathcal{P}^{-,\alpha}[\cdot]$.

Рис. 2а отвечает линейному случаю (I). Сечения $\mathcal{P}^\beta[0]$ ожидаемо (в силу формул (4.2)–(4.4)) получились меньше, чем в билинейном случае (II) (ср. с рис. 1b). В результате получилось, что $x^i[N] \notin \mathcal{M}$, $i=2, \dots, 5$, но $x^1[N] \in \mathcal{M}$, как и гарантировано теорией для этих $x^i[N]$.

На рис. 2b, отвечающем случаю (IV) задачи усиленного уклонения, показаны начальные сечения трубок $\mathcal{P}^\beta[\cdot] \in \mathfrak{P}^{(2)}$. Они ожидаемо (в силу формул (4.5)) получились больше, чем в случае (II) (ср. с рис. 1b). Имеем $x^4[k] \notin \mathcal{M}$, $k = 1, \dots, N$, а $x^1[N] \in \mathcal{M}$ и $x^2[N] \in \mathcal{M}$, как и ожидалось согласно теории. Для $x^3[\cdot]$ и $x^5[\cdot]$ никаких гарантий не было и получилось, что $x^5[k] \notin \mathcal{M}$, $k = 1, \dots, N$, а $x^3[\cdot]$ попала на \mathcal{M} в некоторые моменты.

Результаты моделирования терминального уклонения для билинейного случая (III) при наличии множеств $\mathcal{Y}[k]$ вида (5.1) представлены на рис. 2с и рис. 2d, где используются $\mathcal{P}^\beta[\cdot] \in \mathfrak{P}^{(1)}$ и $\mathcal{P}^\beta[\cdot] \in \mathfrak{P}^{(2)}$ соответственно. В обоих случаях в согласии с теорией для траекторий $x^i[\cdot]$ при $i = 1, 3, 4, 5$ получили $x^i[N] \notin \mathcal{M}$, при $i = 1, 3, 4$ реализовалось (2.6). Для $x^2[\cdot]$ имеем $x^2[N] \notin \mathcal{M}$, хотя гарантии не было.

Рис. 2е и рис. 2f иллюстрируют результаты моделирования для случая (V) задачи усиленного уклонения с фазовыми ограничениями (используются $\mathcal{P}^\beta[\cdot] \in \mathfrak{P}^{(1)}$ и $\mathcal{P}^\beta[\cdot] \in \mathfrak{P}^{(2)}$ соответственно). Сечения $\mathcal{P}^\beta[0]$, опять ожидаемо (в силу формул (4.5)), получились больше, чем в случае (III) (ср. с рис. 2с и рис. 2d).

При использовании $\mathcal{P}^\beta[\cdot] \in \mathfrak{P}^{(2)}$ получили, в согласии с теорией, $x[k] \notin \mathcal{M}$, $k = 1, \dots, N$, для $x^5[\cdot]$ и $x^4[\cdot]$, а для $x^4[\cdot]$ — еще и (2.6). Для остальных траекторий гарантий не было и получилось, что $x^i[\cdot]$, $i=1, 2, 3$, попали на \mathcal{M} , но для $x^3[\cdot]$ имеем (2.6). Подобную картину видим и на рис. 2е, но здесь теория применима только к $x^4[\cdot]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Game-theoretical control problems. NY: Springer, 1988. 517 p.
2. Kurzhanski A., Vályi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1996. 321 p.
3. Kurzhanski A.B., Varaiya P. Dynamics and control of trajectory tubes: theory and computation. Basel: Birkhäuser, 2014. 445 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-10277-1>
4. Kurzhanski A.B., Daryin A.N. Dynamic programming for impulse feedback and fast controls: The linear systems case. London: Springer, 2020. 275p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-7437-0>
5. Ушаков В.Н., Тарасьев А.М., Ушаков А.В. Минимаксная дифференциальная игра с фиксированным моментом окончания // Мат. теория игр и ее приложения. 2024. Т. 16, № 3. С. 77–112.
6. Kurzhanski A.B., Mitchell I.M., Varaiya P. Control synthesis for state constrained systems and obstacle problems // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). 2004. Vol. 37, no. 13. P. 657–662. [https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)31299-5](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)31299-5)
7. Ананьев Б.И., Гусев М.И., Филиппова Т.Ф. Управление и оценивание состояний динамических систем с неопределенностью. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2018. 193 с.
8. Althoff M., Frehse G., Girard A. Set propagation techniques for reachability analysis // Annu. Rev. Control. Robotics Auton. Syst. 2021. Vol. 4. P. 369–395. <https://doi.org/10.1146/annurev-control-071420-081941>

9. **Patsko V., Kumkov S.I., Turova V.** Pursist-evasion games // Basar T., Zaccour G. (eds.) Handbook of Dynamic Game Theory. Cham: Springer, 2018. P. 951–1038.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-44374-4_30
10. **Черноузько Ф.Л.** Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 319 с.
11. **Kurzanskiy A.A., Varaiya P.** Reach set computation and control synthesis for discrete-time dynamical systems with disturbances // Automatica. 2011. Vol. 47, no. 7. P. 1414–1426.
<https://doi.org/10.1016/j.automatica.2011.02.009>
12. **Chernousko F.L., Rokityanskii D.Ya.** Ellipsoidal bounds on reachable sets of dynamical systems with matrices subjected to uncertain perturbations // J. Optimiz. Theory Appl. 2000. Vol. 104, no. 1. P. 1–19. <https://doi.org/10.1023/A:1004687620019>
13. **Filippova T.F.** HJB-inequalities in estimating reachable sets of a control system under uncertainty // Ural Math. J. 2022. Vol. 8, no. 1. P. 34–42. <https://doi.org/10.15826/umj.2022.1.004>
14. **Vicino A., Zappa G.** Sequential approximation of feasible parameter sets for identification with set membership uncertainty // IEEE Trans. Autom. Control. 1996. Vol. 41, no. 6, pp. 774–785.
<https://doi.org/10.1109/9.506230>
15. **Koustousova E.K.** On the polyhedral method of solving problems of control strategy synthesis // Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.) 2016. Vol. 292, Suppl. 1. P. S140–S155.
<https://doi.org/10.1134/S0081543816020127>
16. **Martynov K., Botkin N.D., Turova V.L., Diepolder J.** Quick construction of dangerous disturbances in conflict control problems // Annals of the International Society of Dynamic Games. 2020. Vol. 17. P. 3–24. https://doi.org/10.1007/978-3-030-56534-3_1
17. **Sinyakov V., Girard A.** Abstraction of continuous-time systems based on feedback controllers and mixed monotonicity // IEEE Trans. Autom. Control. 2023. Vol. 68, no. 8. P. 4508–4522.
<https://doi.org/10.1109/TAC.2022.3205423>
18. **Koustousova E.K.** On polyhedral control synthesis for dynamical discrete-time systems under uncertainties and state constraints // Discr. Cont. Dynam. Syst. 2018. Vol. 38, no. 12. P. 6149–6162.
<https://doi.org/10.3934/dcds.2018153>
19. **Koustousova E.K.** On solving terminal approach and evasion problems for linear discrete-time systems under state constraints // Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki. 2024. vol. 34, no. 2. P. 204–221. <https://doi.org/10.35634/vm240203>
20. **Костоусова Е.К.** О синтезе управлений в задаче усиленного уклонения для линейных многошаговых систем // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 29, № 1. С. 111–126.
<https://doi.org/10.21538/0134-4889-2023-29-1-111-126>
21. **Martynov K., Botkin N., Turova V., Diepolder J.** Real-time control of aircraft take-off in windshear. Part I: Aircraft model and control schemes // IEEE Xplore Digital Library. 2017 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2017), July 3–6, 2017, Valletta, Malta: Proc. P. 277–284. <https://doi.org/10.1109/MED.2017.7984131>
22. **Костоусова Е.К.** Параллельные вычисления при оценивании областей достижимости и информационных множеств линейных систем // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений: сб. науч. тр. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1999. Вып. 3. С. 107–126.
23. **Шарый С.П.** Конечномерный интервальный анализ. ФИЦ ИВТ: Новсибирск, 2024. 671 с.
URL: <http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf>.
24. **Nikol'skii M.S.** Some optimal control problems associated with Richardson's arms race model // Comput. Math. Model. 2015. Vol. 26, no. 1. P. 52–60. <https://doi.org/10.1007/s10598-014-9256-8>
25. **Пацко В.С., Ушаков В.Н.** Антагонистические дифференциальные игры. БРЭ.
URL: <https://bigenc.ru/c/antagonisticheskie-differentsial-nye-igry-4c1915/?v=8422734>.

Поступила 4.02.2025

После доработки 14.03.2025

Принята к публикации 17.03.2025

Костоусова Елена Кирилловна

д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: kek@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*. NY, Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8.
2. Kurzhanski A., Vályi I. *Ellipsoidal calculus for estimation and control*. Boston, Birkhäuser, 1996, 321 p. ISBN: 978-0-8176-3699-9.
3. Kurzhanski A.B., Varaiya P. *Dynamics and control of trajectory tubes: theory and computation*. Boston, Birkhäuser, 2014, 445 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-10277-1>
4. Kurzhanski A.B., Daryin A.N. *Dynamic programming for impulse feedback and fast controls: The linear systems case*. London, Springer, 2020, 275 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-7437-0>
5. Ushakov V.N., Tarasyev A.M., Ushakov A.V. Minimax differential game with a fixed end moment. *Mat. Teor. Igr Pril.*, 2024, vol. 16, no. 3, pp. 77–112 (in Russian).
6. Kurzhanski A.B., Mitchell I.M., Varaiya P. Control synthesis for state constrained systems and obstacle problems. *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*. 2004, vol. 37, no. 13, pp. 657–662. [https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)31299-5](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)31299-5)
7. Ananyev B.I., Gusev M.I., Filippova T.F. *Upravleniye i otsenivaniye sostoyaniy dinamicheskikh sistem s neopredelennost'yu* [Control and estimation of states of dynamic systems with uncertainty]. Novosibirsk, Izd-vo SO RAN, 2018, 193 p. ISBN: 978-5-7692-1624-4.
8. Althoff M., Frehse G., Girard A. Set propagation techniques for reachability analysis. *Annu. Rev. Control. Robotics Auton. Syst.*, 2021, vol. 4, pp. 369–395. <https://doi.org/10.1146/annurev-control-071420-081941>
9. Patsko V., Kumkov S.I., Turova V. Pursist-evasion games. In: Basar T., Zaccour G. (eds.) *Handbook of dynamic game theory*. Cham, Springer, 2018, pp. 951–1038. https://doi.org/10.1007/978-3-319-44374-4_30
10. Chernous'ko F.L. *Otsenivanie fazovogo sostoyaniya dinamicheskikh sistem. Metod ellipsoidov* [Estimation of phase state of dynamic systems: the ellipsoid method]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 319 p.
11. Kurzhanskiy A.A., Varaiya P. Reach set computation and control synthesis for discrete-time dynamical systems with disturbances. *Automatica*, 2011, vol. 47, no. 7, pp. 1414–1426. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2011.02.009>
12. Chernousko F.L., Rokityanskii D.Ya. Ellipsoidal bounds on reachable sets of dynamical systems with matrices subjected to uncertain perturbations. *J. Optimiz. Theory Appl.*, 2000, vol. 104, no. 1, pp. 1–19. <https://doi.org/10.1023/A:1004687620019>
13. Filippova T.F. HJB-inequalities in estimating reachable sets of a control system under uncertainty. *Ural Math. J.*, 2022, vol. 8, no. 1, pp. 34–42. <https://doi.org/10.15826/umj.2022.1.004>
14. Vicino A., Zappa G. Sequential approximation of feasible parameter sets for identification with set membership uncertainty. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1996, vol. 41, no. 6, pp. 774–785. <https://doi.org/10.1109/9.506230>
15. Kostousova E.K. On the polyhedral method of solving problems of control strategy synthesis. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl. 1)*, 2016, vol. 292, suppl. 1, pp. S140–S155. <https://doi.org/10.1134/S0081543816020127>
16. Martynov K., Botkin N.D., Turova V.L., Diepolder J. Quick construction of dangerous disturbances in conflict control problems. *Annals of the International Society of Dynamic Games*, vol. 17, pp. 3–24, Cham, Birkhäuser, 2020. https://doi.org/10.1007/978-3-030-56534-3_1
17. Sinyakov V., Girard A. Abstraction of continuous-time systems based on feedback controllers and mixed monotonicity. *IEEE Trans. Autom. Control*, 2023, vol. 68, no. 8, pp. 4508–4522. <https://doi.org/10.1109/TAC.2022.3205423>
18. Kostousova E.K. On polyhedral control synthesis for dynamical discrete-time systems under uncertainties and state constraints. *Discr. Cont. Dynam. Syst.*, 2018, vol. 38, no. 12, pp. 6149–6162. <https://doi.org/10.3934/dcds.2018153>
19. Kostousova E.K. On solving terminal approach and evasion problems for linear discrete-time systems under state constraints. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2024, vol. 34, no. 2, pp. 204–221. <https://doi.org/10.35634/vm240203>
20. Kostousova E.K. On a control synthesis in an enhanced evasion problem for linear discrete-time systems. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 1, pp. 111–126 (in Russian). <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2023-29-1-111-126>

21. Martynov K., Botkin N., Turova V., Diepolder J. Real-time control of aircraft take-off in windshear. Part I: Aircraft model and control schemes. In: *Proc. 25th Mediterranean Confer. on Control and Automation (MED 2017)*. Valletta, Malta, IEEE Xplore Digital Library, 2017, pp. 277–284. <https://doi.org/10.1109/MED.2017.7984131>
22. Kostousova E.K. Parallel computations for estimating attainability domains and informational sets of linear systems. In: *Sb. Nauch. Trudov Algoritmy i programmnye sredstva parallelnykh vychisleniy*, Ekaterinburg, Izd-vo UrO RAN, 1999, no. 3, pp. 107–126 (in Russian).
23. Shary S.P. *Konechnomernyi interval'nyi analiz* [Finite-dimensional interval analysis]. Novosibirsk, 2024, 671 p. Available at: <http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf>.
24. Nikol'skii M.S. Some optimal control problems associated with Richardson's arms race model. *Comput. Math. Model.*, 2015, vol. 26, no. 1, pp. 52–60. <https://doi.org/10.1007/s10598-014-9256-8>
25. Patsko V.S., Ushakov V.N. Antagonistic differential games. *Bol'shaya rossiyskaya entsiklopediya: nauchno-obrazovatel'nyy portal*, 2023 (in Russian). Available at: <https://bigenc.ru/c/antagonisticheskie-differentsial-nye-igry-4c1915>.

Received February 4, 2025

Revised March 14, 2025

Accepted March 17, 2025

Elena Kirillovna Kostousova, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: kek@imm.uran.ru.

Cite this article as: E. K. Kostousova. On the polyhedral method of control synthesis for an enhanced evasion problem for discrete-time systems with bilinearity and state constraints. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 2, pp. 125–140.