ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 31 № 2 2025

УДК 517.977.5; 519.6; 004.02

ОПТИМАЛЬНЫЕ ЗАМЫКАЕМЫЕ ОБРАТНЫЕ СВЯЗИ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ В ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ[1]

Н. М. Дмитрук

Рассматривается терминальная задача оптимального гарантированного управления линейной непрерывной системой с возмущениями, выходные сигналы которой измеряются с ограниченной ошибкой. Формулируется задача построения оптимальной многократно замыкаемой стратегии управления, на основе которой определяется оптимальная замыкаемая обратная связь по измерениям. Предлагаются алгоритмы вычисления оптимальных стратегий и реализации оптимальных замыкаемых обратных связей в реальном времени.

Ключевые слова: линейная система, возмущения, измерения, гарантированное оптимальное управление, стратегия управления, обратная связь, вычислительный алгоритм.

N. M. Dmitruk. Optimal multiple-closed measurement feedback in the linear optimal control problem.

This paper addresses a terminal problem of optimal guaranteed control for a linear continuous system with disturbances whose output is measured with a bounded error. A problem for constructing an optimal multiple-closed control strategy is formulated, based on which the optimal multiple-closed measurement feedback is defined. Algorithms for calculating optimal strategies and implementing optimal closed feedback in real time are proposed.

Keywords: linear system, disturbances, measurements, robust optimal control, control strategy, feedback, computational algorithm.

MSC: 93C05, 34H05, 49N05, 93B52, 49L20

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-2-108-124

Введение

Прикладные задачи управления динамическими объектами естественным образом содержат неопределенности, которые невозможно явно учесть при математическом моделировании и управлении. В качестве таких неопределенностей могут выступать действующие на систему возмущения, неточности математического моделирования, ошибки измерения состояний динамического объекта или недоступность отдельных состояний для измерений. В связи с этим возникают задачи синтеза оптимальных систем в условиях неопределенности, задачи оптимального управления по доступным измерениям, задачи гарантированного оценивания [1–3].

При определении оптимальных обратных связей в условиях неопределенности можно опираться на оптимальные гарантирующие программы или на более сложные конструкции — стратегии управления, в которых учитываются “некоторые элементы” обратных связей [4; 5], такие, как, например, моменты замыкания [6] или коррекции управления [7; 8]. Введение таких моментов времени, когда предполагается и учитывается при вычислении управления поступление дополнительной информации о состояниях динамической системы, позволяет достичь вычислительного компромисса между простым программным управлением и трудоемким динамическим программированием.

[1]Работа выполнена при поддержке государственной программы научных исследований “Конвергенция-2025” (НИР 1.2.04.1).

Настоящая работа развивает результаты статей [9–11], в которых исследованы задачи оптимального гарантированного управления линейными системами с возмущениями в предположении о полных и точных измерениях состояний управляемых систем, на случай когда выходные сигналы системы измеряются с неизвестной ограниченной ошибкой. Некоторые предварительные результаты, касающиеся построения оптимальных обратных связей по измерениям с учетом однократного замыкания, были представлены в работе [12]. В подразд. 3.1 они существенно улучшаются за счет внедрения идей из работы [10], а затем (подразд. 3.2) развиваются на случай многократных замыканий.

1. Постановка задачи

В работе исследуется задача оптимального управления линейной стационарной системой с возмущением и неизвестным ограниченным начальным состоянием

$$\dot{x} = Ax + Bu + Mw, \quad x(0) \in X_0, \quad t \in [0, t_f], \tag{1.1}$$

по неточным дискретным измерениям выходного сигнала линейного измерительного устройства

$$y(s) = Cx(s) + \xi(s), \quad s \in \hat{\Delta}. \tag{1.2}$$

Здесь $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы (1.1); $u = u(t) \in \mathbb{R}^r$ — значение управления; $w = w(t) \in \mathbb{R}^p$ — неизвестное возмущение в момент времени t; X_0 — ограниченное множество возможных начальных состояний системы (1.1); $y(s) \in \mathbb{R}^q$ — сигнал измерительного устройства (1.2) (измерение); $\xi(s) \in \mathbb{R}^q$ — неизвестная ошибка измерительного устройства (1.2) (ошибка измерения) в момент времени s. Для управления системой (1.1) будем использовать дискретные управления [9] с периодом квантования h: $u(t) \equiv u(s)$, $t \in [s, s+h[$, $s \in \Delta = \{0, h, \dots, t_f - h\}$, где $h = t_f/\mathcal{N}$, $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N} > 1$. Измерения (1.2) доступны в дискретные моменты времени $\hat{\Delta} = \{h, 2h, \dots, t_f\}$. Матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $M \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q\times n}$ заданы.

Доступные значения управления $u(t)$, возможные реализации возмущения $w(t)$ и ошибок измерения $\xi(t)$ ограничены:

$$\begin{gathered} u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R}^r \colon u_{\min} \le u \le u_{\max}\}, \quad w(t) \in W = \{w \in \mathbb{R}^p \colon \|w\|_\infty \le w_{\max}\}, \\ t \in [0, t_f], \quad \xi(s) \in \Xi = \{\xi \in \mathbb{R}^q \colon \|\xi\|_\infty \le \xi_{\max}\}, \quad s \in \hat{\Delta}, \end{gathered} \tag{1.3}$$

где $u_{\min}, u_{\max} \in \mathbb{R}^r$, $u_{\min} < u_{\max}$, $w_{\max} > 0$, $\xi_{\max} > 0$, $\|a\|_\infty = \max_i |a_i|$.

Начальное состояние $x(0)$ системы (1.1) неизвестно и может реализоваться как произвольный вектор из заданного множества X_0:

$$X_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x = x_0 + Gz, \ z \in Z\}, \tag{1.4}$$

где $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — заданный вектор; $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ — неизвестный вектор параметров со значениями из множества $Z = \{z \in \mathbb{R}^{n_z} \colon d_{\min} \le z \le d_{\max}\}$, $d_{\min}, d_{\max} \in \mathbb{R}^{n_z}$, $d_{\min} \le d_{\max}$; $G \in \mathbb{R}^{n\times n_z}$.

Таким образом, система (1.1), (1.2) содержит три источника неопределенности: возмущения $w(t)$, $t \in [0, t_f]$, вектор параметров начального состояния z и ошибки измерения $\xi(s)$, $s \in \hat{\Delta}$. Неопределенности являются нестохастическими, множественными, т. е. их реализующиеся в процессе управления значения принадлежат заданным ограниченным множествам.

Целью управления является перевод системы (1.1) с гарантией, т. е. при любых реализациях неопределенностей, удовлетворяющих (1.3), (1.4), на заданное терминальное множество $X_f = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Hx \le g\}$, где $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $g \in \mathbb{R}^m$, и минимизация гарантированного значения линейного терминального критерия качества — $c^\top x(t_f)$.

Пусть в некотором процессе управления, в котором на систему (1.1) было подано управление $u^*(t)$, $t \in [0, t_f]$, и записаны измерения $y^*(s)$, $s \in \hat{\Delta}$, реализовались возмущение $w^*(t)$, $t \in [0, t_f]$, вектор параметров z^* и ошибки измерения $\xi^*(s)$, $s \in \hat{\Delta}$. Поскольку z^*, w^*, ξ^* неизвестны наблюдателю, состояния $x^*(t)$ системы (1.1) в каждый момент времени t также остаются неизвестными. Оценить неизвестное состояние $x^*(t)$ можно следующим образом.

Наряду с системой (1.1) будем рассматривать соответствующие ей номинальную (детерминированную) систему управления

$$\dot{x}_0 = Ax_0 + Bu, \quad x_0(0) = x_0, \quad t \in [0, t_f], \tag{1.5}$$

и содержащую неопределенности систему наблюдения

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Mw, \quad \hat{x}(0) = Gz, \quad z \in Z, \quad w(t) \in W, \quad t \in [0, t_f]. \tag{1.6}$$

Траекторию системы (1.5) при заданном $u(t)$, $t \in [0, t_f]$, будем обозначать $x_0(t|x_0, u)$, $t \in [0, t_f]$, траекторию системы (1.6) при фиксированных z, $w(t)$, $t \in [0, t_f]$, — $\hat{x}(t|z, w)$, $t \in [0, t_f]$. Очевидно, $x^*(t) = x_0^*(t) + \hat{x}(t|z^*, w^*)$, где $x_0^*(t) = x_0(t|x_0, u^*)$ известно.

Далее используются следующие обозначения: $\hat{\mathcal{W}}(\tau)$ — совокупность всех возмущений $w(\cdot) = (w(t), t \in [0, \tau[)$, которые могут реализоваться на промежутке времени $[0, \tau[$; $\mathcal{W}(\tau)$ — совокупность всех возмущений на промежутке $[\tau, t_f]$, $\mathcal{W} = \mathcal{W}(0)$; $\hat{\Delta}(\tau) = \{h, \ldots, \tau\}$, $\tau \in \hat{\Delta}$.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что вектор параметров начального состояния $z \in Z$ и возмущение $w(\cdot) \in \hat{\mathcal{W}}(\tau)$ совместимы с управлением $u^*(t)$, $t \in [0, \tau[$, и измерениями $y^*(s)$, $s \in \hat{\Delta}(\tau)$, если найдутся такие ошибки измерения $\xi(s) \in \Xi$, $s \in \hat{\Delta}(\tau)$, что

$$y^*(s) = Cx_0^*(s) + C\hat{x}(s|z, w) + \xi(s), \quad s \in \hat{\Delta}(\tau). \tag{1.7}$$

Пусть $\Omega^*(\tau)$ — множество всех пар (z, w), совместимых с $u^*(t)$, $t \in [0, \tau[$, $y^*(s)$, $s \in \hat{\Delta}(\tau)$. С учетом (1.7) $\Omega^*(\tau) = \big\{(z, w) \in Z \times \hat{\mathcal{W}}(\tau) \colon y^*(s) - Cx_0^*(s) - C\hat{x}(s|z, w) \in \Xi,\ s \in \hat{\Delta}(\tau)\big\}$. Положим $\hat{y}^*(s) = y^*(s) - Cx_0^*(s)$, $s \in \hat{\Delta}(\tau)$, и будем называть такой сигнал очищенным. Очищенный сигнал $\hat{y}^*(s)$, $s \in \hat{\Delta}$, совпадает с сигналом, который был бы записан в системе наблюдения (1.6), (1.2) при реализовавшихся z^*, w^*, ξ^*. Тогда $\Omega^*(\tau)$ не зависит от управления $u^*(t)$, $t \in [0, \tau[$:

$$\Omega^*(\tau) = \big\{(z, w) \in Z \times \hat{\mathcal{W}}(\tau) \colon \hat{y}^*(s) - C\hat{x}(s|z, w) \in \Xi,\ s \in \hat{\Delta}(\tau)\big\}. \tag{1.8}$$

Состояние номинальной системы $x_0^*(\tau)$ и множество $\Omega^*(\tau)$ позволяют охарактеризовать *информационное множество* $X^*(\tau)$ [2;8] состояний системы (1.1) в момент τ:

$$x^*(\tau) \in X^*(\tau) = \big\{x \in \mathbb{R}^n \colon x = x_0^*(\tau) + \hat{x}(\tau|z, w),\ (z, w) \in \Omega^*(\tau)\big\}.$$

О п р е д е л е н и е 2. Пара $\big(\tau, X^*(\tau)\big)$ называется *текущей позицией* в конкретном процессе управления системой (1.1), (1.2).

З а м е ч а н и е 1. Эквивалентным определением позиции может служить тройка $\big(\tau, x_0^*(\tau), \Omega^*(\tau)\big)$. С целью упрощения обоснований в теоретической части (разд. 2) будем пользоваться позицией $\big(\tau, X^*(\tau)\big)$, а в конструктивной части (разд. 3, 4) прибегать к обоим определениям.

В связи с наличием неопределенностей в системе (1.1), (1.2) управление необходимо осуществлять с помощью обратной связи. Простейшей обратной связью, которую можно предложить для оптимального гарантированного управления системой (1.1), (1.2), является оптимальная размыкаемая обратная связь. При ее определении не учитывается будущая информация о поведении системы, а только информация об управлениях $u^*(t)$, $t \in [0, \tau[$, и измерениях $y^*(s)$, $s \in \hat{\Delta}(\tau)$, которая содержится в позиции $\big(\tau, X^*(\tau)\big)$. Алгоритм построения оптимальных размыкаемых обратных связей по неточным измерениям предложен в работе [13].

Цель настоящей работы — построение *оптимальных замыкаемых обратных связей* и развитие результатов работ [6;9;10] на случай оптимального гарантированного управления системой (1.1) по неточным измерениям (1.2).

2. Оптимальные замыкаемые обратные связи

Оптимальные замыкаемые обратные связи строятся в предположении, что помимо информации о текущей позиции процесса управления $(\tau, X^*(\tau))$ известна дополнительная информация о поведении системы в будущем. Согласно работам [6;10] такую информацию несут в себе моменты замыкания системы (1.1), (1.2). Введем необходимые обозначения и предположения.

Пусть до начала процесса управления зафиксированы $N \geq 1$ моментов замыкания $t_1 < \ldots < t_N$, $t_j \in \Delta \setminus \{0\}$, $j = 1, \ldots, N$. Они разбивают интервал управления $[0, t_f]$ на $N+1$ промежуток $[t_j, t_{j+1}[$, $j = 0, 1, \ldots, N$, где считается, что $t_0 = 0$, $t_{N+1} = t_f$.

Предположение 1. *В каждый момент t_j, $j = 1, \ldots, N$, в зависимости от реализовавшегося в процессе управления информационного множества $X^*(t_j)$ можно выбрать новое управление $u_j(t|X^*(t_j)) \in U$, $t \in [t_j, t_{j+1}[$, и применить его к системе (1.1) до момента t_{j+1}.*

Для $j = 0, 1, \ldots, N$ обозначим: $\Delta_j = \{t_j, \ldots, t_{j+1} - h\}$; $\hat{\Delta}_j = \{t_j + h, \ldots, t_{j+1}\}$; $u_j(\cdot) = (u_j(t), t \in [t_j, t_{j+1}[)$, — управление; $w_j(\cdot) = (w_j(t), t \in [t_j, t_{j+1}[)$, — возмущение на $[t_j, t_{j+1}[$; $\mathcal{U}_j = \{u_j(\cdot)\colon u_j(t) \in U, t \in [t_j, t_{j+1}[\}$ — множество доступных управлений; $\mathcal{W}_j = \{w_j(\cdot)\colon w_j(t) \in W; t \in [t_j, t_{j+1}[\}$, — множество возможных возмущений на $[t_j, t_{j+1}[$. Обозначим через $x_0(t_{j+1}|x_j, u_j)$ состояние номинальной системы (1.5) в момент t_{j+1}, порожденное начальным состоянием $x(t_j) = x_j$ и управлением $u_j(\cdot)$.

Пусть Ω_j — множество пар $(z, w) \in Z \times \hat{\mathcal{W}}(t_j)$, совместимых с некоторым очищенным сигналом $\hat{y}(s)$, $s \in \hat{\Delta}(t_j)$, записанным к моменту t_j. Такое множество определяется аналогично (1.8). Нас будут интересовать сигналы $\hat{y}_j(s)$, $s \in \hat{\Delta}_j$, которые могут быть получены в системе (1.6), (1.2), а также множество Ω_{j+1} к моменту t_{j+1}, его связь с Ω_j и сигналом $\hat{y}_j(s)$, $s \in \hat{\Delta}_j$.

Множество всех возможных сигналов измерения в системе (1.6), (1.2) на $\hat{\Delta}_j$ имеет вид

$$\mathcal{Y}_j = \big\{\hat{y}_j(\cdot)\colon \hat{y}_j(s) = C\hat{x}\big(s|z, (w, w_j)\big) + \xi(s),\ \xi(s) \in \Xi,\ s \in \hat{\Delta}_j,\ (z, w) \in \Omega_j,\ w_j(\cdot) \in \mathcal{W}_j\big\},$$

где $\big(w(\cdot), w_j(\cdot)\big) \in \hat{\mathcal{W}}(t_{j+1})$ — возмущение на промежутке $[0, t_{j+1}]$, разбито на $w(\cdot) \in \hat{\mathcal{W}}(t_j)$ — возмущение на промежутке времени $[0, t_j[$ и $w_j(\cdot) \in \mathcal{W}_j$ — возмущение на $[t_j, t_{j+1}[$.

Нетрудно видеть, что Ω_{j+1} состоит из пар $\big(z, (w, w_j)\big)$, совместимых с $\hat{y}_j(\cdot) \in \mathcal{Y}_j$:

$$\Omega_{j+1} = \Omega(t_{j+1}|\Omega_j, \hat{y}_j) = \big\{\big(z, (w, w_j)\big) \in Z \times \hat{\mathcal{W}}(t_{j+1})\colon \hat{y}_j(s) - C\hat{x}\big(s|z, (w, w_j)\big) \in \Xi,$$
$$s \in \hat{\Delta}_j,\ (z, w) \in \Omega_j,\ w_j(\cdot) \in \mathcal{W}_j\big\}.$$

Пусть теперь $X_j \in \mathrm{conv}\mathbb{R}^n$ — некоторое информационное множество состояний системы (1.1) в момент времени t_j. Как и множество $X^*(\tau)$, оно характеризуется состоянием системы (1.1) в момент времени t_j (обозначим его x_j) и множеством Ω_j (см. замечание 1). Тогда

$$X_j = \{x \in \mathbb{R}^n\colon x = x_j + \hat{x}(t_j|z, w),\ (z, w) \in \Omega_j\}.$$

По X_j определим информационное множество в момент t_{j+1}:

$$X(t_{j+1}|X_j, u_j, \hat{y}_j) = \big\{x \in \mathbb{R}^n\colon x = x_0(t_{j+1}|x_j, u_j) + \hat{x}(t_{j+1}|z, w),\ x_j \in X_j,\ (z, w) \in \Omega(t_{j+1}|\Omega_j, \hat{y}_j)\big\}$$

и совокупность всех таких множеств:

$$\mathcal{X}(t_{j+1}|X_j, u_j) = \big\{X_{j+1} \in \mathrm{conv}\mathbb{R}^n\colon X_{j+1} = X(t_{j+1}|X_j, u_j, \hat{y}_j),\ \hat{y}_j \in \mathcal{Y}_j\big\}.$$

Очевидно, что $\forall\ j = 1, \ldots, N$ имеет место включение $X^*(t_j) \in \mathcal{X}\big(t_j|X^*(t_{j-1}), u^*\big)$, $X^*(0) = X_0$. Поскольку информационные множества $X^*(t_j)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, заранее (до начала процесса управления) не известны, то решение задачи оптимального гарантированного управления системой (1.1) по неточным измерениям (1.2) будем искать в виде *стратегии управления* моментами замыкания $t_1, \ldots, t_N$ как функции произвольных позиций (t_j, X_j), $j = N-1, \ldots, 0$. Стратегии управления обсуждаются в подразд. 2.1, а затем в подразд. 2.2 на их основе определяются оптимальные замыкаемые обратные связи в рассматриваемой задаче.

2.1. Оптимальная многократно замыкаемая стратегия управления

Введем понятие стратегии управления с моментами замыкания t_1, …, t_N для начальной позиции $(0, X_0)$. Эту стратегию обозначим $\pi_N(0, X_0)$ и определим рекуррентно, начиная со случая одного момента замыкания, который имеет место для позиции процесса управления (t_{N-1}, X_{N-1}), и продолжая в обратном времени до начальной позиции $(0, X_0)$.

О п р е д е л е н и е 3. Стратегией управления с моментом замыкания t_N на промежутке $[t_{N-1}, t_f]$ назовем совокупность

$$\pi_1(t_{N-1}, X_{N-1}) = \big\{u_{N-1}(\cdot|X_{N-1});\ u_N(\cdot|X_N), X_N \in \mathcal{X}(t_N|X_{N-1}, u_{N-1})\big\}, \tag{2.1}$$

состоящую из управления $u_{N-1}(\cdot|X_{N-1}) \in \mathcal{U}_{N-1}$ на $[t_{N-1}, t_N[$ и семейства управлений $u_N(\cdot|X_N) \in \mathcal{U}_N$ на $[t_N, t_f]$, определенных для всех X_N, которые могут реализоваться в момент t_N.

Стратегией управления с $N-j$ моментами замыкания t_{j+1}, t_{j+2}, …, t_N на промежутке $[t_j, t_f]$ назовем совокупность, состоящую из управления $u_j(\cdot|X_j) \in \mathcal{U}_j$ на $[t_j, t_{j+1}[$ и семейства стратегий $\pi_{N-j-1}(t_{j+1}, X_{j+1})$ с $N-j-1$ моментами замыкания, определенных для всех возможных позиций (t_{j+1}, X_{j+1}) процесса управления в момент замыкания t_{j+1}:

$$\pi_{N-j}(t_j, X_j) = \big\{u_j(\cdot|X_j);\ \pi_{N-j-1}(t_{j+1}, X_{j+1}), X_{j+1} \in \mathcal{X}(t_{j+1}|X_j, u_j)\big\}, \quad j = N-2, \dots, 0. \tag{2.2}$$

Для каждого $j = 0, \dots, N-1$ управление $u_j(\cdot|X_j)$ в составе стратегий управления (2.1), (2.2) будем называть *начальной программой* (на промежутке $[t_j, t_{j+1}[$).

Траекторию системы (1.1) на промежутке $[t_j, t_f]$, соответствующую начальному состоянию $x(t_j) = \varkappa \in X_j$, стратегии $\pi_{N-j}(t_j, X_j)$ и возмущению $w(\cdot) = (w_j(\cdot), \dots, w_N(\cdot))$, будем обозначать $x(\cdot|t_j, \varkappa, \pi_{N-j}, w) = \big(x(t|t_j, \varkappa, \pi_{N-j}, w), t \in [t_j, t_f]\big)$. Определим ее как последовательное непрерывное решение систем

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_j(t|X_0) + Mw_j(t), \quad x(t_j) = \varkappa, \quad t \in [t_j, t_{j+1}[,$$
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_j\big(t|X(t_k)\big) + Mw_k(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}[, \quad k = j+1, \dots, N.$$

О п р е д е л е н и е 4. Стратегия управления $\pi_{N-j}(t_j, X_j)$ называется допустимой, если выполняется включение $x(t_f|t_j, \varkappa, \pi_{N-j}, w) \in X_f \ \forall \varkappa \in X_j, \forall w(\cdot) \in \mathcal{W}(t_j)$. Допустимая стратегия $\pi_{N-j}(t_j, X_j)$ оптимальна, если она является решением задачи

$$V_j(X_j) = \min_{\pi_{N-j}} \max_{\varkappa \in X_j, w \in \mathcal{W}(t_j)} c^\top x(t_f|t_j, \varkappa, \pi_{N-j}, w).$$

Для получения конструктивных условий допустимости и оптимальности стратегий управления (2.1), (2.2) будем применять рассуждения динамического программирования и рассматривать процесс управления последовательно, начиная с промежутка управления $[t_N, t_f]$ и продолжая до $[0, t_1[$. При этом для каждого $j = N, \dots, 1$ будем строить совокупность множеств X_j, для которых в момент замыкания t_j существует допустимая стратегия $\pi_{N-j}(t_j, X_j)$.

Предположим, что в момент t_N система (1.1) оказалась в позиции (t_N, X_N). Для допустимости процесса на всем промежутке управления достаточно, чтобы управление $u_N(\cdot|X_N) \in \mathcal{U}_N$ было гарантирующей программой (см. определение в [13]) задачи оптимального управления системой (1.1) по измерениям (1.2) для позиции (t_N, X_N). Очевидно, что для оптимальной стратегии $\pi_N^0(0, X_0)$ в качестве управления на $[t_N, t_f]$ необходимо выбирать оптимальную гарантирующую программу $u_N^0(\cdot|X_N)$ — решение задачи оптимального управления [13]

$$\begin{gathered} V_N(X_N) = \min_{u_N} \max_{\varkappa \in X_N, w_N \in \mathcal{W}_N} c^\top x(t_f), \\ \dot{x} = Ax + Bu_N + Mw_N, \quad x(t_N) = \varkappa, \quad u_N(t) \in U, \quad t \in [t_N, t_f], \\ x(t_f) \in X_f \ \ \forall\, \varkappa \in X_N, \ \forall\, w_N(\cdot) \in \mathcal{W}_N. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Положим $V_N(X_N) = +\infty$, если задача (2.3) не имеет решения для X_N. Введем множество $\mathcal{X}_N = \{X_N \in \mathrm{conv}\mathbb{R}^n\colon V_N(X_N) < +\infty\}$, которое назовем *множеством замыкания* в момент t_N.

Для позиции (t_{N-1}, X_{N-1}) управление $u_{N-1}(\cdot|X_{N-1}) \in \mathcal{U}_{N-1}$ должно быть таким, чтобы для любого множества $X(t_N|X_{N-1}, u_{N-1}, \hat{y}_{N-1})$, которое может реализоваться в момент t_N, можно было продолжить процесс управления, выбирая гарантирующую программу $u_N(\cdot|X_N)$. Это условие выполнено для множеств из $\mathcal{X}_N$. Следовательно, на промежутке $[t_{N-1}, t_N[$ условие допустимости стратегии $\pi_1(t_{N-1}, X_{N-1})$ с одним моментом замыкания t_N формулируется как

$$X(t_N|X_{N-1}, u_{N-1}, \hat{y}_{N-1}) \in \mathcal{X}_N \quad \forall \hat{y}_{N-1}(\cdot) \in \mathcal{Y}_{N-1}. \tag{2.4}$$

Оптимизируя процесс по всем $u_{N-1}(\cdot|X_{N-1}) \in \mathcal{U}_{N-1}$, удовлетворяющим условию (2.4), получим оптимальную начальную программу $u^0_{N-1}(\cdot|X_{N-1})$ как решение минимаксной задачи

$$V_{N-1}(X_{N-1}) = \min_{u_{N-1}\in\mathcal{U}_{N-1}} \max_{\hat{y}_{N-1}\in\mathcal{Y}_{N-1}} V_N\big(X(t_N|X_{N-1}, u_{N-1}, \hat{y}_{N-1})\big).$$

Продолжая описанный процесс, получим уравнение Беллмана

$$V_j(X_j) = \min_{u_j\in\mathcal{U}_j} \max_{\hat{y}_j\in\mathcal{Y}_j} V_{j+1}\big(X(t_{j+1}|X_j, u_j, \hat{y}_j)\big), \quad X_j \in \mathrm{conv}\,\mathbb{R}^n, \quad j = N-1, \ldots, 0, \tag{2.5}$$

начальное условие для которого дает $V_N(X_N)$, определенное согласно (2.3), и множества замыкания в моменты t_j, $j = N, \ldots, 1$: $\mathcal{X}_j = \{X_j \in \mathrm{conv}\,\mathbb{R}^n\colon V_j(X_j) < +\infty\}$. Решение уравнения Беллмана (2.5) дает оптимальные начальные программы $u^0_j(\cdot|X_j)$, $X_j \in \mathcal{X}_j$, в составе оптимальных стратегий управления $\pi^0_{N-j}(t_j, X_j)$, $j = N-1, \ldots, 0$.

Предположение 2. *Параметры системы* (1.1)*, измерительного устройства* (1.2)*, ограничений* (1.3) *и терминального множества X_f таковы, что*

1) *множество замыкания $\mathcal{X}_1$ непусто*;

2) *существует управление $u_0(\cdot|X_0) \in \mathcal{U}_0$ такое, что $X(t_1|X_0, u_0, \hat{y}_0) \in \mathcal{X}_1 \ \ \forall \hat{y}_0 \in \mathcal{Y}_0$.*

Предположение 2 дает условия существования допустимых стратегий управления с моментами замыкания $t_1, \ldots, t_N$ в задаче оптимального управления системой (1.1) по измерениям (1.2).

2.2. Оптимальная замыкаемая обратная связь и ее реализация

Для определения оптимальной замыкаемой обратной связи погрузим задачу оптимального управления системой (1.1) по неточным измерениям (1.2) в классе стратегий управления с моментами замыкания $t_1, \ldots, t_N$ в семейство задач, зависящее от позиции (τ, X):

$$V(\tau, X) = \min_{\pi_{N-j}} \max_{\varkappa\in X, w\in\mathcal{W}(\tau)} c^\top x(t_f|\tau, \varkappa, \pi_{N-j}, w), \quad X \in \mathrm{conv}\mathbb{R}^n, \quad \tau \in \Delta_j, \quad j = 0, 1, \ldots, N.$$

Здесь считается, что процесс управления начинается в момент времени τ из начального состояния $x(\tau) = \varkappa \in X$. Решением этой задачи при $\tau \in \Delta_j$ будет оптимальная стратегия с $N-j$ моментами замыкания $t_{j+1}, \ldots, t_N$:

$$\pi^0_{N-j}(\tau, X) = \{u^0_j(\cdot|\tau, X);\ \pi^0_{N-j-1}(t_{j+1}, X_{j+1}), X_{j+1} \in \mathcal{X}(t_{j+1}|\tau, X, u^0_j)\},$$

где оптимальная начальная программа $u^0_j(\cdot|\tau, X)$ определена на промежутке $[\tau, t_{j+1}[$.

Используя рассуждения динамического программирования, как в подразд. 2.1, установим, что $u^0_j(\cdot|\tau, X)$ находится как решение минимаксной задачи

$$V(\tau, X) = \min_{u_j\in\mathcal{U}_j(\tau)} \max_{\hat{y}_j\in\mathcal{Y}_j(\tau)} V_{j+1}\big(X(t_{j+1}|\tau, X, u_j, \hat{y}_j)\big). \tag{2.6}$$

В задаче (2.6) $X(t_{j+1}|\tau, X, u_j, \hat{y}_j)$ — информационное множество в момент t_{j+1} при начальном состоянии $x(\tau) \in X$, управлении $u_j(\cdot) \in \mathcal{U}_j(\tau)$ и очищенном сигнале $\hat{y}_j(\cdot) \in \mathcal{Y}_j(\tau)$; $\mathcal{U}_j(\tau)$, $\mathcal{Y}_j(\tau)$ — сужения $\mathcal{U}_j$, $\mathcal{Y}_j$ на промежуток $[\tau, t_{j+1}[$. Очевидно, $V(t_j, X_j) = V_j(X_j)$.

Обозначим через $\mathcal{X}^\pi_\tau$ совокупность всех множеств $X \in \mathrm{conv}\mathbb{R}^n$, для которых существует оптимальная стратегия $\pi^0_{N-j}(\tau, X)$, $\tau \in \Delta$.

Определение 5. Функцию $u^0_\pi(\tau, X) = u^0_j(\tau|\tau, X)$, $X \in \mathcal{X}^\pi_\tau$, $\tau \in \Delta_j$, $j = 0, 1, \ldots, N$, назовем оптимальной замыкаемой (дискретной) обратной связью по измерениям; функцию $u^*_\pi(t) = u^0_\pi\big(\tau, X^*(\tau)\big)$, $t \in [\tau, \tau + h[$, $\tau \in \Delta_j$, $j = 0, 1, \ldots, N$, — реализацией оптимальной замыкаемой обратной связи по измерениям в конкретном процессе управления.

Из определения 5 следует, что для построения реализации оптимальной замыкаемой обратной связи по измерениям необходимо решать минимаксные задачи (2.6). Начнем с простейшего случая однократно замыкаемой стратегии управления (подразд. 3.1), а затем обобщим эти результаты на случай многократных замыканий (см. подразд. 3.2).

3. Построение оптимальных стратегий управления

Решение будем строить для начальной позиции $(0, X_0)$; обобщение на случай позиций (τ, X), $\tau \in \Delta_j$, $j = 0, \ldots, N-1$, приводится в разд. 4.

3.1. Построение однократно замыкаемых стратегий

Пусть $N = 1$, т. е. будем строить решение задачи оптимального управления системой (1.1) по измерениям (1.2) в классе стратегий управления с одним моментом замыкания $t_1 \in \hat{\Delta}$, $t_1 < t_f$. Согласно (2.1) и (2.5) оптимальная однократно замыкаемая стратегия имеет вид $\pi^0_1(0, X_0) = \big\{u^0_0(\cdot|X_0);\ u^0_1(t_1, X_1), X_1 \in \mathcal{X}(t_1|X_0, u^0_0)\big\}$ и состоит из оптимальной начальной программы

$$u^0_0(\cdot|X_0) = \arg\min_{u_0 \in \mathcal{U}_0} \max_{\hat{y}_0 \in \mathcal{Y}_0} V_1\big(X(t_1|X_0, u_0, \hat{y}_0)\big) \tag{3.1}$$

и оптимальной гарантирующей программы $u^0_1(\cdot|X_1)$, которая является решением задачи (2.3) при $N = 1$. Рассмотрим последнюю задачу подробнее.

Напомним (см. замечание 1), что множество X_1 зависит от состояния x_1 и множества Ω_1 (произвольных в силу произвольности X_1) следующим образом:

$$X_1 = \big\{x \in \mathbb{R}^n \colon x = x_1 + \hat{x}(t_1|z, w),\ (z, w) \in \Omega_1\big\}. \tag{3.2}$$

Согласно [13] задача (2.3) для X_1 вида (3.2) сводится к детерминированной задаче оптимального управления, которая имеет вид

$$\begin{gathered} V_1(X_1) = \min_{u_1} h^\top_{m+1} x_0(t_f) + \mu_{1m+1}(\Omega_1), \\ \dot{x}_0 = Ax_0 + Bu_1, \quad x_0(t_1) = x_1, \quad u_1(t) \in U, \quad t \in [t_1, t_f], \\ h^\top_i x_0(t_f) \le g_i - \mu_{1i}(\Omega_1), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \end{gathered} \tag{3.3}$$

где $h_{m+1} := c$; h_i, $i = 1, \ldots, m$, — i-я строка матрицы H; g_i — i-я компонента вектора g;

$$\mu_{1i}(\Omega_1) = \max_{(z,w) \in \Omega_1, w_1 \in \mathcal{W}_1} h^\top_i \hat{x}\big(t_f|z, (w, w_1)\big), \quad i = 1, 2, \ldots, m+1. \tag{3.4}$$

С целью единообразного представления всех задач оптимального управления, возникающих в данном разделе (ср., например, с (3.15)), задачу (3.3) перепишем в эквивалентном виде

$$\begin{gathered} V_1(X_1) = \min_{\alpha, u_1} \alpha, \\ \dot{x}_0 = Ax_0 + Bu_1, \quad x_0(t_1) = x_1, \quad u_1(t) \in U, \quad t \in [t_1, t_f], \\ \Phi_f x_0(t_f) - \lambda_f \alpha \le g_f - \mu_1(\Omega_1), \end{gathered} \tag{3.5}$$

где $\Phi_f = \begin{pmatrix} H \\ c^\top \end{pmatrix}$; $g_f = \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda_f = (0, \ldots, 0, 1)^\top \in \mathbb{R}^{m+1}$; $\mu_1(\Omega_1) = \big(\mu_{1i}(\Omega_1); i = 1, \ldots, m+1\big)$.

При численном решении в классе дискретных управлений задача оптимального управления (3.5) сводится к задаче линейного программирования:

$$\begin{gathered} V_1(X_1) = \min_{\alpha, u_1} \alpha, \\ \sum\nolimits_{t \in \Delta_1} D_1(t) u_1(t) - \lambda_f \alpha \le g_f - G_1(t_1) x_1 - \mu_1(\Omega_1), \\ u_{\min} \le u_1(t) \le u_{\max}, \quad t \in \Delta_1, \end{gathered} \tag{3.6}$$

где $D_1(t) = \displaystyle\int_t^{t+h} G_1(\vartheta) B\, d\vartheta$, $t \in \Delta_1$, $G_1(t) = \Phi_f e^{A(t_f - t)}$, $t \in [t_1, t_f]$.

В правой части основного ограничения задачи линейного программирования (3.6) присутствуют два слагаемых, имеющих отношение к позиции (t_1, X_1). Обозначим их сумму как

$$\chi_1(X_1) = G_1(t_1) x_1 + \mu_1(\Omega_1). \tag{3.7}$$

Вектор $\chi_1(X_1) \in \mathbb{R}^{m+1}$ будем называть *достаточной оценкой* позиции (t_1, X_1). Конечномерная достаточная оценка $\chi_1(X_1)$ полностью характеризует множество X_1 с точки зрения его последующего использования в задаче оптимального управления (3.3). Это позволяет перейти от множественных позиций (t_1, X_1) к новым конечномерным позициям (t_1, χ_1), $\chi_1 \in \mathbb{R}^{m+1}$.

Рассмотрим семейство задач, зависящее от произвольного $(m+1)$-вектора χ_1:

$$\hat V_1(\chi_1) = \min_{\alpha, u_1} \alpha, \quad \sum\nolimits_{t \in \Delta_1} D_1(t) u_1(t) - \lambda_f \alpha \le g_f - \chi_1, \quad u_{\min} \le u_1(t) \le u_{\max}, \quad t \in \Delta_1. \tag{3.8}$$

Очевидно, $V_1(X_1) = \hat V\big(\chi_1(X_1)\big)$.

Нетрудно видеть, что если управление $u_0(\cdot|X_0)$ таково, что задача (3.8) имеет решение для достаточных оценок $\chi_1\big(X(t_1|X_0, u_0, \hat y_0)\big)$ при любом $\hat y_0 \in \mathcal{Y}_0$, то соответствующая стратегия управления $\pi_1(0, X_0)$ допустима.

Пусть $\hat X(t_1|X_0, u_0)$ — множество всех достаточных оценок χ_1, которые могут быть получены в системе (1.1), (1.2) с управлением $u_0(\cdot|X_0)$ к моменту замыкания t_1:

$$\hat X(t_1|X_0, u_0) = \big\{\chi_1 \in \mathbb{R}^{m+1} \colon \chi_1 = \chi_1\big(X(t_1|X_0, u_0, \hat y_0)\big), \quad \hat y_0 \in \mathcal{Y}_0\big\}. \tag{3.9}$$

Тогда оптимальная однократно замыкаемая стратегия управления $\pi_1^0(0, X_0)$ определяется оптимальной начальной программой $u_0^0(\cdot|X_0)$, которая является решением задачи (ср. с (3.1))

$$V_0(X_0) = \min_{u_0 \in \mathcal{U}_0} \max_{\chi_1 \in \hat X(t_1|X_0, u_0)} \hat V_1(\chi_1). \tag{3.10}$$

Введем множество

$$\hat X_1(\alpha) = \{\chi_1 \in \mathbb{R}^{m+1} \colon \hat V_1(\chi_1) \le \alpha\},$$

которое будем называть *множеством замыкания* в момент t_1 для достаточных оценок.

Тогда задачу (3.10) можно переписать в виде

$$V_0(X_0) = \min_{\alpha, u_0 \in \mathcal{U}_0} \alpha, \quad \hat X(t_1|X_0, u_0) \subset \hat X_1(\alpha), \tag{3.11}$$

и для ее решения остается описать множества $\hat X(t_1|X_0, u_0)$ и $\hat X_1(\alpha)$.

В подразд. 3.2 будет установлено (см. утверждение 1), что множество замыкания $\hat X_1(\alpha)$ определено для всех $\alpha \in \mathbb{R}$ и зависимость от α имеет вид

$$\hat X_1(\alpha) = \big\{\chi_1 \in \mathbb{R}^{m+1} \colon P_1 \chi_1 \le g_1 + \lambda_1 \alpha\big\}, \tag{3.12}$$

где $P_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times (m+1)}$, $g_1, \lambda_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$ — матрица и векторы специального вида (см. (3.22)).

З а м е ч а н и е 2. Множество $\hat{X}_1(\alpha)$ может содержать векторы $\bar{\chi}_1$, для которых не найдется $X_1 \neq \varnothing$, $\bar{\chi}_1 = \chi_1(X_1)$. Однако в реальном процессе такие достаточные оценки в множестве (3.9) не реализуются, и соответствующие им решения задачи (3.8) не используются.

Перейдем к множеству $\hat{X}(t_1|X_0, u_0)$. Из (3.7) и (3.9) следует, что

$$\hat{X}(t_1|X_0, u_0) = \big\{\chi_1 \in \mathbb{R}^{m+1} \colon \chi_1 = G_1(t_1)x_0(t_1|x_0, u_0) + \mu_1,\ \mu_1 \in M_1\big\},$$

где M_1 — множество всех векторов $\mu_1(\Omega_1)$, которые могут реализоваться к моменту t_1. Напомним, что реализующиеся Ω_1 имеют вид $\Omega(t_1|\Omega_0, \hat{y}_0)$ (см. обозначения в разд. 2), поэтому

$$M_1 = \big\{\mu_1 \in \mathbb{R}^{m+1} \colon \mu_1 = \mu_1\big(\Omega(t_1|\Omega_0, \hat{y}_0)\big),\ \hat{y}_0(\cdot) \in \mathcal{Y}_0\big\}.$$

Здесь компоненты вектора $\mu_1\big(\Omega(t_1|\Omega_0, \hat{y}_0)\big)$ находятся из задач (3.4).

Включение $\hat{X}(t_1|X_0, u_0) \subset \hat{X}_1(\alpha)$ в задаче (3.11) с учетом представления (3.12) для множества замыкания $\hat{X}_1(\alpha)$ примет вид $P_1\chi_1 \leq g_1 + \lambda_1\alpha \quad \forall \chi_1 \in \hat{X}(t_1|X_0, u_0)$, или эквивалентно

$$P_1\big(G_1(t_1)x_0(t_1|x_0, u_0) + \mu_1\big) \leq g_1 + \lambda_1\alpha \quad \forall \mu_1 \in M_1. \tag{3.13}$$

Оценим наихудшие реализации вектора $\mu_1 \in M_1$ в направлениях, задаваемых строками p_{1i}, $i = 1, 2, \ldots, m_1$, матрицы P_1:

$$\mu_{0i}(\Omega_0) = \max_{\mu_1 \in M_1}\ p_{1i}^{\top}\mu_1 = \max_{\hat{y}_0 \in \mathcal{Y}_0}\ p_{1i}^{\top}\mu_1\big(\Omega(t_1|\Omega_0, \hat{y}_0)\big), \quad i = 1, 2, \ldots, m_1, \tag{3.14}$$

и составим из них вектор $\mu_0(\Omega_0) = \big(\mu_{0i}(\Omega_0), i = 1, \ldots, m_1\big)$. Здесь $\Omega_0 = Z \times \{0\}$.

Неравенство (3.13) выполняется тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$P_1G_1(t_1)x_0(t_1|x_0, u_0) \leq g_1 + \lambda_1\alpha - \mu_0(\Omega_0).$$

Обозначим $\Phi_1 = P_1G_1(t_1)$. Теперь задачу (3.11) построения оптимальной начальной программы $u_0^0(\cdot|X_0)$ можно свести к детерминированной задаче оптимального управления

$$\begin{gathered} V_0(X_0) = \min_{\alpha, u_0} \alpha, \\ \dot{x}_0 = Ax_0 + Bu_0, \quad x_0(0) = x_0, \quad u_0(t) \in U, \quad t \in [0, t_1], \\ \Phi_1 x_0(t_1) - \lambda_1\alpha \leq g_1 - \mu_0(\Omega_0). \end{gathered} \tag{3.15}$$

Таким образом, для построения оптимальной однократно замыкаемой стратегии $\pi_1^0(0, X_0)$ нужно найти параметры P_1, g_1, λ_1 множества замыкания (3.12), вычислить компоненты вектора $\mu_0(\Omega_0)$, решив задачи (3.14), и найти оптимальную начальную программу из задачи (3.15).

3.2. Построение многократно замыкаемых стратегий

Перейдем к построению оптимальных стратегий управления с $N > 1$ моментами замыкания. По индукции, начиная с $j = N$ и заканчивая $j = 0$, покажем, что оптимальные начальные программы $u_j^0(\cdot|X_j)$, $j = N-1, \ldots, 0$, а также оптимальная гарантирующая программа $u_N^0(\cdot|X_N)$ являются решением задач оптимального управления

$$\begin{gathered} V_j(X_j) = \min_{\alpha, u_j} \alpha, \\ \dot{x}_0 = Ax_0 + Bu_j, \quad x_0(t_j) = x_j, \quad u_j(t) \in U, \quad t \in [t_j, t_{j+1}], \\ \Phi_{j+1} x_0(t_{j+1}) - \lambda_{j+1}\alpha \leq g_{j+1} - \mu_j(\Omega_j), \end{gathered} \tag{3.16}$$

где $\Phi_{j+1} \in \mathbb{R}^{m_{j+1} \times n}$; λ_{j+1}, g_{j+1}, $\mu_j(\Omega_j) \in \mathbb{R}^{m_{j+1}}$. Конкретные формулы для их вычисления будут установлены ниже.

При $j = N$ в задаче (3.16) положим $\Phi_{N+1} = \Phi_f$, $g_{N+1} = g_f$, $\lambda_{N+1} = \lambda_f$, $\mu_N(\Omega_N) = \big(\mu_{Ni}(\Omega_N), i = 1, \ldots, m+1\big)$:

$$\mu_{Ni}(\Omega_N) = \max_{(z,w)\in\Omega_N, w_N\in\mathcal{W}_N} h_i^\top \hat{x}\big(t_f|z,(w,w_N)\big), \quad i = 1,2,\ldots,m+1, \tag{3.17}$$

ср. с формулами (3.4). Очевидно, что тогда задача (3.16) при $j = N$ совпадает с задачей (3.5), в которой индекс 1 заменен на N.

Пусть установлено, что оптимальные начальные программы $u^0_{N-1}(\cdot|X_{N-1})$, …, $u^0_j(\cdot|X_j)$ являются решениями соответствующих задач (3.16). Докажем для $u^0_{j-1}(\cdot|X_{j-1})$.

Задача оптимального управления (3.16) в классе дискретных управлений эквивалентна следующей задаче линейного программирования:

$$\begin{gathered} V_j(X_j) = \min_{\alpha,u_j} \alpha, \\ \sum\nolimits_{t\in\Delta_j} D_j(t)u_j(t) - \lambda_{j+1}\alpha \le g_{j+1} - G_j(t_j)x_j - \mu_j(\Omega_j), \\ u_{\min} \le u_j(t) \le u_{\max}, \quad t\in\Delta_j, \end{gathered} \tag{3.18}$$

где $D_j(t) = \displaystyle\int_t^{t+h} G_j(\vartheta)B\,d\vartheta$, $t\in\Delta_j$, $G_j(t) = \Phi_{j+1}e^{A(t_{j+1}-t)}$, $t\in[t_j,t_{j+1}]$, $j = 0,1,\ldots,N$.

Аналогично (3.7) введем вектор достаточных оценок позиции (t_j, X_j), где X_j зависит от позиции (t_j, x_j, Ω_j):

$$\chi_j(X_j) = G_j(t_j)x_j + \mu_j(\Omega_j),$$

и рассмотрим семейство задач, зависящее от произвольного m_{j+1}-вектора χ_j:

$$\hat{V}_j(\chi_j) = \min_{\alpha,u_j} \alpha, \quad \sum\nolimits_{t\in\Delta_j} D_j(t)u_j(t) - \lambda_{j+1}\alpha \le g_{j+1} - \chi_j, \quad u_{\min} \le u_j(t) \le u_{\max}, \quad t\in\Delta_j. \tag{3.19}$$

По задаче (3.19) определим множество замыкания $\hat{X}_j(\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, в момент t_j:

$$\hat{X}_j(\alpha) = \{\chi_j\in\mathbb{R}^{m_{j+1}}\colon \hat{V}_j(\chi_j)\le\alpha\}.$$

Исследование зависимости множеств замыкания $\hat{X}_j(\alpha)$ от параметра α для задач оптимального гарантированного управления в классе стратегий управления с замыканиями опирается на результаты работы [10]. Следуя [10], нетрудно установить, что при любом $\alpha\in\mathbb{R}$ множество $\hat{X}_j(\alpha)$ является выпуклым многогранником. Пусть построена система $p_{ji}\in\mathbb{R}^{m_{j+1}}$, $\|p_{ji}\| = 1$, $i = 1,2,\ldots,m_j$, нормалей этих многогранников. Тогда

$$\hat{X}_j(\alpha) = \{\chi_j\in\mathbb{R}^{m_{j+1}}\colon p_{ji}^\top\chi_j \le f_{ji}(\alpha),\ i = 1,2,\ldots,m_j\},$$

где $f_{ji}(\alpha)$ — оптимальное значение задачи линейного программирования

$$f_{ji}(\alpha) = \max_{\chi_j,u_j} p_{ji}^\top\chi_j, \quad \chi_j + \sum\nolimits_{t\in\Delta_j} D_j(t)u_j(t) \le g_{j+1} + \lambda_{j+1}\alpha,\ u_{\min}\le u_j(t)\le u_{\max},\ t\in\Delta_j. \tag{3.20}$$

Утверждение 1. *При любых $\alpha\in\mathbb{R}$, $j = 1,\ldots,N$ множество $\hat{X}_j(\alpha)$ является выпуклым многогранником вида*

$$\hat{X}_j(\alpha) = \big\{\chi_j\in\mathbb{R}^{m_{j+1}}\colon P_j\chi_j \le g_j + \lambda_j\alpha\big\}, \tag{3.21}$$

где $P_j\in\mathbb{R}^{m_j\times m_{j+1}}$, $g_j, \lambda_j\in\mathbb{R}^{m_j}$,

$$P_j = \begin{pmatrix} p_{ji}^\top \\ i = 1,\ldots,m_j \end{pmatrix}, \quad g_j = \begin{pmatrix} f_{ji}(0) \\ i = 1,\ldots,m_j \end{pmatrix}, \quad \lambda_j = \begin{pmatrix} p_{ji}^\top\lambda_{j+1} \\ i = 1,\ldots,m_j \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что при любом $i = 1, \dots, m_j$ функция $f_{ji}(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, является линейной. Для этого построим задачу, двойственную (3.20):

$$\begin{gathered} f_{ji}(\alpha) = \min_{\nu, v_*, v^*} \Big\{ (g_{j+1} + \lambda_{j+1}\alpha)^\top \nu + \sum\nolimits_{t \in \Delta_j} \Big(u_{\max}^\top v^*(t) - u_{\min}^\top v_*(t) \Big) \Big\}, \\ \nu = p_{ji}, \quad \nu \geq 0, \\ D_j(t)^\top \nu + v^*(t) - v_*(t) = 0, \quad v^*(t) \geq 0, \quad v_*(t) \geq 0, \quad t \in \Delta_j. \end{gathered} \tag{3.23}$$

В (3.23) $\nu \in \mathbb{R}^{m_{j+1}}$, $v_*(t)$, $v^*(t) \in \mathbb{R}^r$, $t \in \Delta_j$ — двойственные переменные. Оптимальные значения прямой (3.20) и двойственной (3.23) задач совпадают в силу теоремы двойственности.

В силу первого ограничения-равенства задачи (3.23) $\nu = p_{ji} \geq 0$, откуда следует, что задача (3.20) не ограничена сверху для направлений p_{ji}, содержащих отрицательные компоненты. Следовательно, нормалями $\hat{X}_j(\alpha)$ могут быть только векторы $p_{ji} \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m_j$.

Второе ограничение-равенство задачи (3.23) принимает вид $v^*(t) - v_*(t) = -D_j(t)^\top p_{ji}$, $t \in \Delta_j$. Переменными оптимизации остаются только $v^*(t), v_*(t)$, $t \in \Delta_j$, поэтому

$$f_{ji}(\alpha) = (g_{j+1} + \lambda_{j+1}\alpha)^\top p_{ji} + \min_{v_*, v^*} \sum\nolimits_{t \in \Delta_j} \big(u_{\max}^\top v^*(t) - u_{\min}^\top v_*(t) \big),$$

и решение задачи минимизации здесь не зависит от параметра α. Отсюда следует, что $f_{ji}(\alpha) = f_{ji}(0) + p_{ji}^\top \lambda_{j+1}\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, и $\hat{X}_j(\alpha) = \{\chi_j \in \mathbb{R}^{m_{j+1}} \colon p_{ji}^\top \chi_j \leq f_{ji}(0) + p_{ji}^\top \lambda_{j+1}\alpha,\ i = 1, 2, \dots, m_j\}$, что в матричной записи дает требуемое представление (3.21). □

Нетрудно видеть, что если управление $u_{j-1}(\cdot|X_{j-1})$ таково, что задача (3.19) имеет решение для достаточных оценок $\chi_j\big(X(t_j|X_{j-1}, u_{j-1}, \hat{y}_{j-1})\big)$ при любом $\hat{y}_{j-1} \in \mathcal{Y}_{j-1}$, то соответствующая стратегия управления $\pi_{N-j+1}(t_{j-1}, X_{j-1})$ с моментами замыкания $t_j, \dots, t_N$ допустима.

Пусть теперь $\hat{X}(t_j|X_{j-1}, u_{j-1})$ — множество всех достаточных оценок χ_j, которые могут быть получены в системе (1.1), (1.2) с управлением $u_{j-1}(\cdot|X_{j-1})$ к моменту замыкания t_j:

$$\hat{X}(t_j|X_{j-1}, u_{j-1}) = \big\{\chi_j \in \mathbb{R}^{m_{j+1}} \colon \chi_j = G_j(t_j)x_0(t_j|x_{j-1}, u_{j-1}) + \mu_j,\ \mu_j \in M_j\big\}, \tag{3.24}$$

где M_j — множество всех векторов $\mu_j(\Omega_j)$, которые могут реализоваться к моменту t_j:

$$M_j = \big\{\mu_j \in \mathbb{R}^{m_{j+1}} \colon \mu_j = \mu_j\big(\Omega(t_j|\Omega_{j-1}, \hat{y}_{j-1})\big),\ \hat{y}_{j-1}(\cdot) \in \mathcal{Y}_{j-1}\big\}.$$

Рассуждая аналогично (3.10), (3.11), установим, что для нахождения $u_{j-1}^0(\cdot|X_{j-1})$ необходимо решать задачу

$$V_{j-1}(X_{j-1}) = \min_{\alpha, u_{j-1} \in \mathcal{U}_{j-1}} \alpha, \quad \hat{X}(t_j|X_{j-1}, u_{j-1}) \subset \hat{X}_j(\alpha).$$

С учетом представлений (3.21) и (3.24) эта задача принимает вид

$$\begin{gathered} V_{j-1}(X_{j-1}) = \min_{\alpha, u_{j-1} \in \mathcal{U}_{j-1}} \alpha, \\ P_j\big(G_j(t_j)x_0(t_j|x_{j-1}, u_{j-1}) + \mu_j\big) \leq g_j + \lambda_j\alpha \quad \forall \mu_j \in M_j. \end{gathered} \tag{3.25}$$

Обозначим $\Phi_j = P_j G_j(t_j)$, $j = 1, \dots, N$.

Оценим наихудшие реализации вектора $\mu_j \in M_j$ в направлениях, задаваемых векторами p_{ji}, $i = 1, 2, \dots, m_j$:

$$\mu_{j-1i}(\Omega_{j-1}) = \max_{\mu_j \in M_j} p_{ji}^\top \mu_j = \max_{\hat{y}_{j-1} \in \mathcal{Y}_{j-1}} p_{ji}^\top \mu_j\big(\Omega(t_j|\Omega_{j-1}, \hat{y}_{j-1})\big), \quad i = 1, 2, \dots, m_j, \tag{3.26}$$

и составим из них вектор $\mu_{j-1}(\Omega_{j-1}) = \big(\mu_{j-1i}(\Omega_{j-1}), i = 1, \dots, m_j\big)$.

Для задачи (3.25) окончательно получим

$$V_{j-1}(X_{j-1}) = \min_{\alpha, u_{j-1} \in \mathcal{U}_{j-1}} \alpha, \quad \Phi_j x_0(t_j|x_{j-1}, u_{j-1}) - \lambda_j\alpha \leq g_j - \mu_{j-1}(\Omega_{j-1}),$$

что совпадает с предположением индукции (см. задачу (3.16)).

Утверждение 2. *Пусть для задачи оптимального гарантированного управления системой (1.1) по неточным измерениям (1.2) в классе стратегий управления с моментами замыкания $t_1, \ldots, t_N$ выполнено предположение 2. Тогда существует оптимальная стратегия $\pi_N^0(0, X_0)$, для которой оптимальная начальная программа $u_0^0(\cdot|X_0)$ находится как решение задачи линейного программирования (3.18) при $j = 0$.*

Доказательство. В силу эквивалентности задачи (3.16) и задачи линейного программирования (3.18) достаточно показать существование оптимального решения в последней. При выполнении предположения 2 в рассматриваемой задаче существует допустимая многократно замыкаемая стратегия управления $\pi_N(0, X_0)$. Ее начальная программа $u_0(\cdot|X_0)$ вместе со значением $\alpha = \max\limits_{\hat{y}_0 \in \mathcal{Y}_0} V_1\big(X(t_1|X_0, u_0, \hat{y}_0)\big)$ составляют допустимое решение задачи линейного программирования (3.18). Поскольку (3.18) ограничена снизу, существование в ней допустимого решения влечет и существование оптимального $\{u_0^0(\cdot|x_0), \alpha^0\}$. $\square$

Для построения оптимальной многократно замыкаемой стратегии управления $\pi_N^0(0, X_0)$ необходимо найти параметры P_j, g_j, λ_j множеств замыкания (3.21), $j = N, \ldots, 1$, и вектор $\mu_0(\Omega_0)$, решить задачу (3.18) при $j = 0$. При реализации оптимальной стратегии в конкретном процессе управления: в моменты t_j, $j = 1, \ldots, N$, вычислять $\mu_j\big(\Omega^*(t_j)\big)$, решать (3.18) при $x_j = x_0^*(t_j)$. Отсюда следует, что в процессе управления системой не нужно знать полностью информационное множество $X^*(t_j)$, достаточно вычислять оценки $\mu_j(\Omega^*(t_j))$.

3.3. Вычисление оценок информационных множеств

Задачи (3.17), (3.26) вычисления оценок $\mu_j(\Omega_j)$, $j = 0, 1, \ldots, N$, являются достаточно сложными многоуровневыми задачами оптимизации. При наличии в системе (1.1) кусочно-непрерывных возмущений даже первая в последовательности этих задач — задача (3.17) — является задачей оптимального управления с промежуточными фазовыми ограничениями. Поэтому с целью упрощения выкладок далее рассмотрим простой случай, когда в (1.1) возмущения отсутствуют ($M = 0$). Тогда решение системы наблюдения (1.6) имеет вид $\hat{x}(t|z) = e^{At}Gz$, $t \in [0, t_f]$, и исследуемые задачи сводятся к задачам линейного программирования. В [13] показано, как получить задачу линейного программирования для параметрических возмущений.

Информационное множество Ω_j, совместимое с измерениями $\hat{y}(\cdot) = \big(\hat{y}_0(\cdot), \ldots, \hat{y}_{j-1}(\cdot)\big)$, определенными для моментов $s \in \hat{\Delta}(t_j)$, является многогранником вида

$$\begin{aligned}\Omega_j &= \big\{z \in Z \colon \hat{y}_k(s) - \hat{D}(s)z \in \Xi,\ s \in \hat{\Delta}_k,\ k = 0, 1, \ldots, j-1\big\}\\ &= \big\{z \in \mathbb{R}^{n_z} \colon \underline{v}_k(\hat{y}_k) \le -\hat{D}_k z \le \bar{v}_k(\hat{y}_k),\ k = 0, 1, \ldots, j-1,\ d_{\min} \le z \le d_{\max}\big\},\end{aligned}$$

где $\hat{D}(s) = Ce^{As}G$, $s \in \hat{\Delta}$,

$$\hat{D}_j = \begin{pmatrix} \hat{D}(s) \\ s \in \hat{\Delta}_j \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_j(\hat{y}_j) = \begin{pmatrix} \xi_{\max} - \hat{y}_j(s) \\ s \in \hat{\Delta}_j \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_j(\hat{y}_j) = \begin{pmatrix} -\xi_{\max} - \hat{y}_j(s) \\ s \in \hat{\Delta}_j \end{pmatrix}, \quad j = 0, 1, \ldots, N.$$

Начнем с задачи (3.17). Обозначив $q_{Ni}^\top = h_i^\top e^{At_f}G$, $i = 1, 2, \ldots, m+1$, получим задачу линейного программирования вида

$$\mu_{Ni}(\Omega_N) = \max\ q_{Ni}^\top z, \quad \underline{v}_j(\hat{y}_j) \le -\hat{D}_j z \le \bar{v}_j(\hat{y}_j), \quad j = 0, 1, \ldots, N-1, \quad d_{\min} \le z \le d_{\max}. \quad (3.27)$$

Предположим, что задача вычисления оценки $\mu_{ji}(\Omega_j)$, $i = 1, 2, \ldots, m_{j+1}$, может быть представлена в виде следующей задачи линейного программирования:

$$\mu_{ji}(\Omega_j) = \max\ q_{ji}^\top \omega, \quad \underline{d}_{jk}(\hat{y}_k) \le Q_{jk}\omega \le \bar{d}_{jk}(\hat{y}_k), \quad k = 0, 1, \ldots, j-1, \quad \underline{b}_j \le S_j\omega \le \bar{b}_j, \quad (3.28)$$

где $\omega \in \mathbb{R}^{n_j}$, $n_{j-1} = n_j m_{j+1} + n_z + |\hat{\Delta}_{j-1}|$, $j = N, \ldots, 1$, $n_N = n_z$; Q_{jk}, S_j — некоторые матрицы, правила построения которых будут получены ниже; $\underline{d}_{jk}$, $\bar{d}_{jk}$ зависят от $\hat{y}_k$ линейно. Остальные элементы задачи от измерений $\hat{y}$ не зависят.

Очевидно, задача (3.27) может быть записана как (3.28), если $\omega = z$, $Q_{Nk} = -\hat{D}_k$, $\underline{d}_{Nk}(\hat{y}_k) = \underline{v}_k(\hat{y}_k)$, $\bar{d}_{Nk}(\hat{y}_k) = \bar{v}_k(\hat{y}_k)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$; $S_N = E$, $\underline{b}_N = d_{\min}$, $\bar{b}_N = d_{\max}$.

Пусть теперь $j < N$. Задача (3.26) с учетом (3.28) примет вид

$$\mu_{j-1i}(\Omega_{j-1}) = \max_{\hat{y}_{j-1} \in \mathcal{Y}_{j-1}} \sum\nolimits_{l=1}^{m_{j+1}} (p_{j-1i})_l \max_{\omega^{(l)}} q_{jl}^\top \omega^{(l)},$$

где $(p_{j-1i})_l$ — l-я компонента вектора p_{j-1i}; $\omega^{(l)}$ — переменные оптимизации внутренних задач максимизации, каждая из которых удовлетворяет ограничениям (3.28).

Попутно с доказательством утверждения 1 было получено, что $p_{ji} \geq 0 \; \forall\, j, i$. Кроме того, все внутренние задачи максимизации независимы, поэтому, полагая $q_{j-1il}^\top = (p_{j-1i})_l q_{jl}^\top$, получим

$$\mu_{j-1i}(\Omega_{j-1}) = \max_{\hat{y}_{j-1}(\cdot) \in \mathcal{Y}_{j-1}, \omega^{(l)}} \sum\nolimits_{l=1}^{m_{j+1}} q_{j-1il}^\top \omega^{(l)},$$
$$\underline{d}_{jk}(\hat{y}_k) \leq Q_{jk}\omega^{(l)} \leq \bar{d}_{jk}(\hat{y}_k), \quad k = 0, 1, \ldots, j-1, \quad \underline{b}_j \leq S_j \omega^{(l)} \leq \bar{b}_j, \quad l = 0, 1, \ldots, m_{j+1},$$

где максимум требуется отыскать среди всех $\omega^{(l)}$, $l = 1, 2, \ldots, m_{j+1}$, и $\hat{y}_{j-1}(\cdot)$. С учетом вида $\mathcal{Y}_{j-1}$, Ω_{j-1} последнюю задачу оптимизации перепишем как

$$\mu_{j-1i}(\Omega_{j-1}) = \max \sum\nolimits_{l=1}^{m_{j+1}} q_{j-1il}^\top \omega^{(l)},$$
$$\underline{v}_k(\hat{y}_k) \leq -\hat{D}_k z \leq \bar{v}_k(\hat{y}_k), \quad \underline{d}_{jk}(\hat{y}_k) \leq Q_{jk}\omega^{(l)} \leq \bar{d}_{jk}(\hat{y}_k), \quad k = 0, 1, \ldots, j-2,$$
$$\underline{d}_{jj-1}(\hat{y}_{j-1}) \leq Q_{jj-1}\omega^{(l)} \leq \bar{d}_{jj-1}(\hat{y}_{j-1}), \quad \hat{y}_{j-1}(s) = \hat{D}(s)z + \xi(s), \quad \xi(s) \in \Xi, \quad s \in \hat{\Delta}_{j-1},$$
$$d_{\min} \leq z \leq d_{\max}, \quad b_j \leq S_j \omega^{(l)} \leq b_j, \quad l = 1, 2, \ldots, m_{j+1}.$$

Здесь максимизация по $\omega := \big(z; \xi(s), s \in \hat{\Delta}_{j-1}; \omega^{(l)}, l = 1, 2, \ldots, m_{j+1}\big)$. Первая группа ограничений зависит от $\hat{y}_0(\cdot), \ldots, \hat{y}_{j-2}(\cdot)$, по ней строятся блочные матрицы Q_{j-1k} и векторы $\underline{d}_{j-1k}$, $\bar{d}_{j-1k}$, $k = 0, 1, \ldots, j-2$. Вторая и третья группы не зависят от $\hat{y}_0(\cdot), \ldots, \hat{y}_{j-2}(\cdot)$ и в силу линейности $\underline{d}_{jj-1}(\hat{y}_{j-1})$, $\bar{d}_{jj-1}(\hat{y}_{j-1})$ могут быть преобразованы к виду $\underline{b}_{j-1} \leq S_{j-1}\omega \leq \bar{b}_{j-1}$.

4. Реализация оптимальной замыкаемой обратной связи по измерениям в реальном времени

Вернемся к построению оптимальной замыкаемой обратной связи по измерениям. Задача, решение которой определяет значение обратной связи $u_\pi^0(\tau, X)$ для позиции (τ, X), имеет вид (2.6). Рассуждая аналогично тому, как в разд. 3, получим, что в конкретном процессе управления, в котором реализуются $x_0^*(\tau)$, $\Omega^*(\tau)$ и соответствующее им $X^*(\tau)$, $\tau \in \Delta_j$, задача (2.6) эквивалентна

$$\begin{gathered} V(\tau, X^*(\tau)) = \min_{\alpha, u_j} \alpha, \\ \dot{x}_0 = Ax_0 + Bu_j, \quad x_0(\tau) = x_0^*(\tau), \quad u_j(t) \in U, \quad t \in [\tau, t_{j+1}], \\ \Phi_{j+1}x_0(t_{j+1}) - \lambda_{j+1}\alpha \leq g_{j+1} - \mu_j\big(\Omega^*(\tau)\big), \end{gathered} \tag{4.1}$$

где $\mu_j\big(\Omega^*(\tau)\big) = \Big(\mu_{ji}\big(\Omega^*(\tau)\big) = \max\limits_{\hat{y}_j \in \mathcal{Y}_j(\tau)} p_{j+1i}^\top \mu_{j+1}\big(\Omega(t_{j+1}|\Omega^*(\tau), \hat{y}_j)\big),\ i = 1, \ldots, m_j\Big)$.

Предлагается следующий алгоритм управления системой (1.1) по измерениям (1.2).

А л г о р и т м 1: Реализации оптимальной замыкаемой обратной связи в реальном времени.

Инициализация (до начала процесса управления):

1. Найти параметры P_j, g_j, λ_j множеств замыкания $\hat{X}_j(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $j = N, \ldots, 1$.
2. Решить задачу (3.18) при $j = 0$, найти оптимальную начальную программу $u_0^0(\cdot|X_0)$ в оптимальной стратегии $\pi_N^0(0, X_0)$.

3. Подать управление $u^*_\pi(0) = u^0_0(0|X_0)$ на вход системы (1.1) на промежутке $[0, h[$.

Общая процедура (*для всех* $\tau \in \Delta \setminus \{0\}$; j: $\tau \in \Delta_j$):

4. Измерить $y^*(\tau)$, найти оценки $\mu_j\big(\Omega^*(\tau)\big)$.
5. Решить задачу (4.1) и найти оптимальную начальную программу $u^0_j\big(\cdot|\tau, X^*(\tau)\big)$ в оптимальной стратегии $\pi^0_{N-j}\big(\tau, X^*(\tau)\big)$.
6. Подать управление $u^*_\pi(\tau) = u^0_j\big(\tau|\tau, X^*(\tau)\big)$ на вход системы (1.1) на промежутке $[\tau, \tau+h[$.

Возможность реализации данного алгоритма основана на следующем утверждении.

Утверждение 3. *Пусть выполнено предположение 2. Тогда вдоль реализующейся в любом процессе управления последовательности множеств $X^*(\tau)$, $\tau \in \Delta$, выполняется*

i) *задача* (4.1) *имеет решение для всех позиций* $\big(\tau, X^*(\tau)\big)$, $\tau \in \Delta$;

ii) *оптимальное значение задачи* (4.1) *не ухудшается*: $V\big(\tau, X^*(\tau)\big) \le V\big(\tau - h, X^*(\tau - h)\big)$, $\tau \in \Delta \setminus \{0\}$.

Доказательство опирается на тот факт, что оптимальная начальная программа $u^0_j\big(\cdot|\tau - h, X^*(\tau - h)\big)$, построенная в момент времени $\tau - h$, является решением задачи (4.1) в момент τ при $\tau \in \Delta_j \setminus \{t_j\}$. В моменты $\tau = t_j$, $j = 1, \ldots, N$, происходит переход от оптимальной стратегии $\pi^0_{N-j+1}\big(t_j - h, X^*(t_j - h)\big) = \big\{u^0_{j-1}(\cdot|t_j - h, X^*(t_j - h));\ \pi^0_{N-j}(t_j, X_j), X_j \in \mathcal{X}(t_j|t_j - h, X^*(t_j - h), u^0_{j-1})\big\}$ с моментами замыкания $t_j, \ldots, t_N$ к управлению оптимальной стратегией с моментами замыкания $t_{j+1}, \ldots, t_N$. Поскольку $X^*(t_j) \in \mathcal{X}(t_j|t_j - h, X^*(t_j - h), u^0_{j-1})$, такая оптимальная стратегия $\pi^0_{N-j}\big(t_j, X^*(t_j)\big)$ существует, а значит, выполнено условие i) утверждения. Далее, поскольку согласно (2.6)

$$
\begin{aligned}
&V\big(t_j - h, X^*(t_j - h)\big) = \max_{\hat{y}_j \in \mathcal{Y}_j(t_j - h)} V_j\big(X(t_j|t_j - h, X^*(t_j - h), u^0_j, \hat{y}_j)\big) \\
&\ge V_j\big(X(t_j|t_j - h, X^*(t_j - h), u^0_j, \hat{y}^*(t_j))\big) = V_j\big(X^*(t_j)\big) = V\big(t_j, X^*(t_j)\big),
\end{aligned}
$$

имеет место условие ii) утверждения. □

Отметим, что параметры P_j, g_j, λ_j множеств замыкания $\hat{X}_j(\alpha)$, $j = N, \ldots, 1$, вычисляются до начала процесса управления и в процессе не меняются.

5. Пример

Для иллюстрации предложенных в работе методов оптимального управления по неточным измерениям рассмотрим на промежутке времени $[0, t_f]$ линейную систему

$$
\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u, \quad x(0) = z, \quad z \in Z = \{z \in \mathbb{R}^2 \colon \|z\|_\infty \le d_{\max}\}. \tag{5.1}
$$

В моменты времени $s \in \hat{\Delta} = \{h, 2h, \ldots, t_f\}$ с ограниченной ошибкой $\xi(s)$ измеряется только первая компонента состояния: $y(s) = x_1(s) + \xi(s)$, $|\xi(s)| \le \xi_{\max}$.

Целью управления являются перевод системы (5.1) с гарантией на терминальное множество $X_f = \{x \in \mathbb{R}^2 : g_{\min} \le x_1 \le g_{\max}\}$ и минимизация гарантированного значения второй компоненты состояния в терминальный момент времени $x_2(t_f)$.

Параметрам задачи присвоим следующие значения: $t_f = 6$, $d_{\max} = 0.5$, $\xi_{\max} = 0.2$; $g_{\min} = 3$, $g_{\max} = 3.5$; $h = 0.2$. При таком выборе параметров рассматриваемая задача не имеет решения в классе гарантирующих программ в силу большой неопределенности параметра z. Также задача не имеет решения в классе однократно замыкаемых стратегий управления с $t_1 \le 2$.

Пусть конкретный процесс управления порожден параметром $z^* = (0.1, -0.1)$ и ошибкой измерения $\xi^*(s) \equiv -0.2$, $s \in \hat{\Delta}$. Будем сравнивать реализации оптимальной замыкаемой обратной связи по измерениям для двух случаев: 1) $N = 1$, $t_1 = 4$; 2) $N = 2$, $t_1 = 2$, $t_2 = 4$.

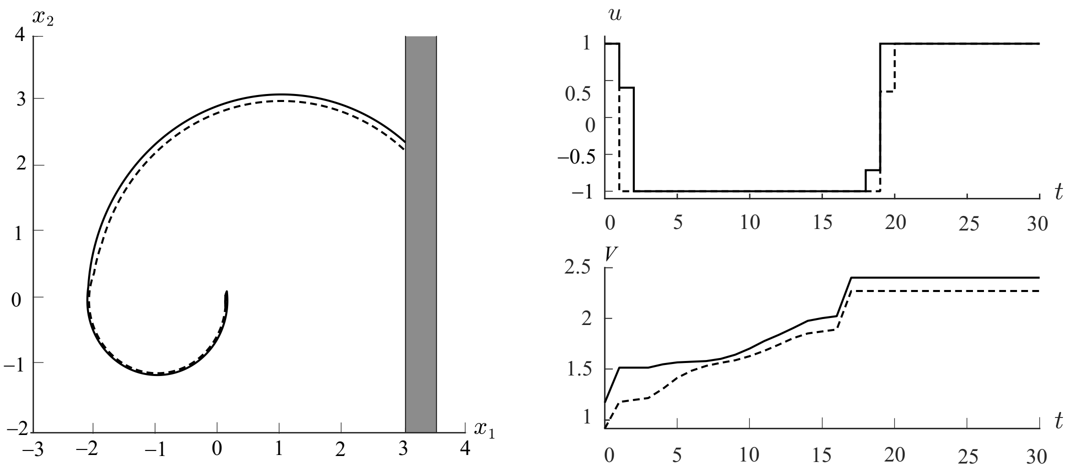

Рис. 1. Результаты решения примеров 1 (штриховая линия) и 2 (сплошная линия).

В примере 1 в начальной позиции получено значение $V^1(0, X_0) = 0.916986$ — это оптимальное значение рассматриваемой задачи в классе стратегий с моментом замыкания $t_1 = 4$. К терминальному моменту времени в рассматриваемом процессе управления система оказалась в состоянии $x^*(t_f) = (3, 2.264109)$. Полученная траектория $x^*(t)$, $t \in [0, t_f]$, изображена штриховой линией на рис. 1 (слева). Серая область на рисунке есть терминальное множество. В правой части рисунка также штриховыми линиями показаны реализация оптимальной однократной замыкаемой обратной связи $u^*_\pi(\tau)$, $\tau \in \Delta$, и изменение во времени оптимального значения задачи (4.1).

В примере 2 оптимальное значение задачи в классе стратегий управления с моментами замыкания $t_1 = 2$, $t_2 = 4$ оказалось равным $V^2(0, X_0) = 1.170824$. К терминальному моменту времени система оказалась в состоянии $x^*(t_f) = (3, 2.394657)$. На рис. 1 сплошными линиями изображены результаты решения примера 2: траектория, реализация оптимальной обратной связи и изменение оптимального значения.

Заключение

В работе исследована задача оптимального гарантированного управления линейной системой по неточным измерениям ее выходных сигналов. Для рассматриваемой задачи определяются оптимальные стратегии управления с замыканиями, где под замыканиями понимают моменты времени, в которые будут известны информационные множества системы и скорректировано управление. Установлено, что для задачи построения оптимальной многократно замыкаемой стратегии имеет место принцип разделимости процессов наблюдения и управления, соответственно, сформулированы задачи оценивания информационных множеств и детерминированные задачи оптимального управления, по которым находится оптимальная стратегия. На основе оптимальных стратегий управления определены оптимальные замыкаемые обратные связи по измерениям и предложен алгоритм реализации этих связей в реальном времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1978. 392 с.
2. **Kurzhanski A.B., Varaiya P.** Dynamics and control of trajectory tubes: theory and computation. Boston: Birkhäuser, 2014. 445 p. (Ser. Systems & Control: Foundations & Applications, Book 85). https://doi.org/10.1007/978-3-319-10277-1
3. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 520 с.

4. **Lee J.H., Yu Z.** Worst-case formulations of model predictive control for systems with bounded parameters // Automatica. 1997. Vol. 33, no. 5. P. 763–781. https://doi.org/10.1016/S0005-1098(96)00255-5
5. **Goulart P.J., Kerrigan E.C., Maciejowski J.M.** Optimization over state feedback policies for robust control with constraints // Automatica. 2006. Vol. 42, no. 4. P. 523–533. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2005.08.023
6. **Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костина Е.А.** Замыкаемые обратные связи по состоянию для оптимизации неопределенных систем управления. II. Многократно замыкаемые обратные связи // Автоматика и телемеханика. 1996. № 8. С. 90–99.
7. **Kostina E., Kostyukova O.** Worst-case control policies for (terminal) linear-quadratic control problems under disturbances // Inter. J. Robust and Nonlinear Control. 2009. Vol. 19, no. 17. P. 1940–1958. https://doi.org/10.1002/rnc.1417
8. **Kurzhanski A.B., Varaiya P.** On reachability under uncertainty // SIAM J. Control Optim. 2002. Vol. 41, no. 1. P. 181–216. https://doi.org/10.1109/CDC.2002.1184818
9. **Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Построение оптимальных обратных связей по математическим моделям с неопределенностью // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 2. С. 265–286.
10. **Дмитрук Н.М.** Многократно замыкаемая стратегия управления в линейной терминальной задаче оптимального гарантированного управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2022. Т.28, № 3. С. 66–82. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-3-66-82
11. **Дмитрук Н.М.** Оптимальные замыкаемые обратные связи в линейных задачах терминального управления // Итоги науки и техники. Соврем. математика и ее приложения. Темат. обзор. 2023. Т. 224. С. 43–53. https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-224-43-53
12. **Dmitruk N., Findeisen R., Allgöwer F.** Optimal measurement feedback control of finite-time continuous linear systems // IFAC Proceedings Volumes. 2008. Vol. 41, no. 2. P. 15339–15344. https://doi.org/10.3182/20080706-5-KR-1001.02594
13. **Габасов Р., Дмитрук Н.М., Кириллова Ф.М.** Оптимальное управление многомерными системами по неточным измерениям их выходных сигналов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2004. Т. 10, № 2. С. 35–57.

Поступила 15.02.2025
После доработки 17.04.2025
Принята к публикации 21.04.2025

Дмитрук Наталия Михайловна
канд. физ.-мат. наук
доцент, зав. кафедрой
Белорусский государственный университет
г. Минск
e-mail: dmitrukn@bsu.by

REFERENCES

1. Kurzhanskii A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [Control and observation under the conditions of uncertainty]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 392 p.
2. Kurzhanski A., Varaiya P. *Dynamics and control of trajectory tubes: theory and computation.* Boston, Birkhäuser, 2014, 445 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-10277-1
3. Krasovskiy N.N. *Upravleniye dinamicheskoy sistemoy. Zadacha o minimume garantirovannogo rezul'tata* [Dynamic system control. Minimum guaranteed result problem], Moscow, Nauka Publ., 1985, 520 p.
4. Lee J.H., Yu Z. Worst-case formulations of model predictive control for systems with bounded parameters. *Automatica*, 1997, vol. 33, iss. 5, pp. 763–781. https://doi.org/10.1016/S0005-1098(96)00255-5
5. Goulart P.J., Kerrigan E.C., Maciejowski J.M. Optimization over state feedback policies for robust control with constraints. *Automatica*, 2006, vol. 42, iss. 4, pp. 523–533. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2005.08.023
6. Gabasov R., Kirillova F.M., Kostina E.A. Closed-loop state feedback for optimization of uncertain control systems. II: Multiply closed feedback. *Autom. Remote Control*, 1996, vol. 57, no. 8, pp. 1137–1145.

7. Kostina E., Kostyukova O. Worst-case control policies for (terminal) linear-quadratic control problems under disturbances. *Inter. J. Robust and Nonlinear Control*, 2009, vol. 19, no. 17, pp. 1940–1958. https://doi.org/10.1002/rnc.1417
8. Kurzhanski A.B., Varaiya P. On reachability under uncertainty. *SIAM J. Control Optim.*, 2002, vol. 41, no. 1, pp. 181–216. https://doi.org/10.1109/CDC.2002.1184818
9. Balashevich N.V., Gabasov R., Kirillova F.M. The construction of optimal feedback from mathematical models with uncertainty. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2004, vol. 44, no. 2, pp. 247–267.
10. Dmitruk N.M. Multiply closed control strategy in a linear terminal problem of optimal guaranteed control. *Proc. Steklov Inst. Math.* (*Suppl.*), 2022, vol. 319, suppl. 1, pp. S112–S128. https://doi.org/10.1134/S0081543822060104
11. Dmitruk N.M. Closed-loop state feedback in linear problems of terminal control. *Itogi Nauki i Tekh. Sovrem. Mat. i ee Pril. Temat. Obz.*, 2023, vol. 224, pp. 43–53 (in Russian). https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-224-43-53
12. Dmitruk N., Findeisen R., Allgöwer F. Optimal measurement feedback control of finite-time continuous linear systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 2008, vol. 41, no. 2, pp. 15339–15344. https://doi.org/10.3182/20080706-5-KR-1001.02594
13. Gabasov R., Dmitruk N.M., Kirillova F.M. Optimal control of multidimensional systems by inaccurate measurements of their output signals. *Proc. Steklov Inst. Math.* (*Suppl.*), 2004, suppl. 2, pp. S52–S75.

Received February 15, 2025
Revised April 17, 2025
Accepted April 21, 2025

Funding Agency: This work was supported by the National Program for Scientific Research of the Republic of Belarus "Convergence 2025" (project no. 1.2.04.1).

Natalia Mikhailovna Dmitruk, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Belarusian State University, Minsk, 220030 Belarus, e-mail: dmitrukn@bsu.by .

Cite this article as: N. M. Dmitruk. Optimal multiple-closed measurement feedback in the linear optimal control problem. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 2, pp. 108–124.