ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Online First 2025

УДК 514.172

ВНУТРЕННЯЯ СТРУКТУРА ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ И ИХ ГРАНЕЙ[1]

В. В. Гороховик

Чаще всего геометрическая строение выпуклых множеств связывается с их граневой структурой. В первом разделе настоящей статьи представлен несколько иной подход к характеристике геометрической структуры выпуклых множеств, основанный на понятии открытой компоненты выпуклого множества. Исследование проводится в бесконечномерных вещественных пространствах без топологии. Для того чтобы определить понятие открытой компоненты, на выпуклом множестве Q вводится отношение предпорядка $\trianglelefteq_Q$ (свое для каждого множества Q), названное отношением доминирования. Открытыми компонентами выпуклого множества Q называются классы эквивалентности фактор-множества $Q/\!<\!\!>_Q$ множества Q по отношению эквивалентности $<\!\!>_Q$, которое является симметричной частью отношения доминирования $\trianglelefteq_Q$. Каждая открытая компонента выпуклого множества Q является относительно алгебраически открытым подмножеством данного множества Q, при этом множество Q является дизъюнктным объединением всех принадлежащих ему открытых компонент множества Q. Отношение доминирования $\trianglelefteq_Q$ индуцирует на семействе $\mathcal{O}(Q) := Q/\!<\!\!>_Q$ всех открытых компонент множества Q отношение частичного порядка $\trianglelefteq^*_Q$, относительно которого частично упорядоченное семейство $(\mathcal{O}(Q), \trianglelefteq^*_Q)$ является верхней полурешеткой. Для полупространств (выпуклых множеств H, дополнения которых также выпуклы) соответствующая им верхняя полурешетка $(\mathcal{O}(H), \trianglelefteq^*_H)$ является линейно упорядоченным множеством. Внутренняя структура выпуклого множества Q отождествляется в работе со структурой верхней полурешетки $(\mathcal{O}(Q), \trianglelefteq^*_Q)$. Во втором разделе статьи исследуется связь между внутренней структурой выпуклого множества и внутренней структурой его граней. Устанавливается, что каждая открытая компонента выпуклого множества Q является относительной алгебраической внутренностью минимальной (по включению) грани множества Q, содержащей данную открытую компоненту. Обратно, если грань F выпуклого множества Q имеет непустую относительную алгебраическую внутренность, то она (относительная алгебраическая внутренность грани) совпадает с некоторой открытой компонентой множества Q, а сама грань F является минимальной гранью, содержащей эту открытую компоненту (такие грани названы в работе минимальными). В конечномерных векторных пространствах любая грань F выпуклого множества Q является минимальной гранью, в то же время в любом бесконечномерном векторном пространстве существуют выпуклые множества, не все грани которых минимальны. Вместе с тем, каждая открытая компонента любой грани F выпуклого множества Q является открытой компонентой самого множества Q, т. е. $\mathcal{O}(F) \subset \mathcal{O}(Q)$, и, кроме того, отношение частичного порядка $\trianglelefteq^*_F$, определенное на $\mathcal{O}(F)$, совпадает с сужением на $\mathcal{O}(F)$ отношения частичного порядка $\trianglelefteq^*_Q$, заданного на $\mathcal{O}(Q)$. Таким образом, внутренняя структура $(\mathcal{O}(F), \trianglelefteq^*_F)$ любой грани F выпуклого множества Q является подструктурой внутренней структуры $(\mathcal{O}(Q), \trianglelefteq^*_Q)$ самого множества Q.

Ключевые слова: выпуклые множества, полупространства, грань, открытая компонента, полурешетка, предпорядок, линейный порядок.

V. V. Gorokhovik. Internal structure of convex sets and their faces.

Most often the geometric structure of convex sets is associated with their facial structure. In the first section of this paper we present a somewhat different approach to characterizing the geometric structure of convex sets, based on the concept of an open component of a convex set. In the paper we consider convex sets in infinite-dimensional real vector spaces, which are endowed with no topology. In order to define the notion of an open component of a convex set Q the preorder relation $\trianglelefteq_Q$ is introduced on Q (its own for each set Q) called a dominance relation. Open components of a convex set Q are defined as equivalence classes of the quotient set $Q/\!<\!\!>_Q$ of the set Q by the equivalence relation $<\!\!>_Q$, which is the symmetric part of the dominance relation $\trianglelefteq_Q$. Each open component of a convex set Q is a relatively algebraic open subset of the set Q under consideration, and the set Q is a disjoint union of all open components belonging to Q. The dominance relation $\trianglelefteq_Q$ induces on the family $\mathcal{O}(Q) := Q/\!<\!\!>_Q$ of all open components of the set Q a partial order relation $\trianglelefteq^*_Q$ with respect to which the partially ordered family $(\mathcal{O}(Q), \trianglelefteq^*_Q)$ is an upper semilattice. For halfspaces (convex sets H whose complements are also convex), the corresponding upper semilattice $(\mathcal{O}(H), \trianglelefteq^*_H)$ is a linearly ordered set. The internal structure of a convex set Q is identified in the paper with the structure of the upper semilattice $(\mathcal{O}(Q), \trianglelefteq^*_Q)$. In the second section of the paper, the connection between the internal structure of a convex set and the internal structure of its faces is investigated. It is established that each open component of a convex set Q is a relative algebraic interior of the minimal (with respect to inclusion) face of Q containing the given open component. Conversely, if a face F of a convex set Q has a non-empty relative algebraic interior, then it (the relative algebraic interior

[1]Работа выполнена при поддержке Государственной программы научных исследований Республики Беларусь.

of the face) coincides with some open component of the set Q, and the face F itself is a minimal face containing this open component (such faces are called minimal in the paper). In finite-dimensional vector spaces, any face F of a convex set Q is a minimal one, while in any infinite-dimensional vector space there are convex sets not all of whose faces are minimal. At the same time, each open component of any face F of a convex set Q is an open component of Q itself, i.e. $\mathcal{O}(F) \subset \mathcal{O}(Q)$, and, moreover, the partial order relation $\trianglelefteq_F^*$ defined on $\mathcal{O}(F)$ coincides with the restriction to $\mathcal{O}(F)$ of the partial order relation $\trianglelefteq_Q^*$ defined on $\mathcal{O}(Q)$. Thus, the internal structure $(\mathcal{O}(F), \trianglelefteq_F^*)$ of any face F of a convex set Q is a substructure of the internal structure $(\mathcal{O}(Q), \trianglelefteq_Q^*)$ of Q itself.

Keywords: convex sets, halfspaces, faces, open component, semilattice, preorder, linear order.

MSC: 52A05, 52A99

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-2-fon-04

Введение

Всюду ниже X — нетривиальное ($X \neq \{0\}$) действительное векторное пространство, причем, если не оговорено иное, X предполагается бесконечномерным. Кроме того, не предполагается, что на X заданы какие-либо иные (топологические, порядковые и др.) структуры.

Множество $Q \subseteq X$ называется *выпуклым*, если для любых $x, y \in Q$ отрезок $[x, y] := \{\alpha x + (1-\alpha)y \mid \alpha \in [0,1]\}$ целиком содержится в Q. Пустое множество $\varnothing$ считается выпуклым по определению.

Подмножество $K \subseteq X$ называется *конусом*, если $\lambda x \in K$ для всех $x \in K$ и всех $\lambda > 0$.

Геометрически подмножество $K \subseteq X$ является конусом, если наряду с любой точкой $x \in K$ подмножество K содержит целиком весь луч, исходящий из нулевой точки и проходящий через точку x, при этом нулевая точка может не принадлежать конусу K.

Конус $K \subseteq X$ является выпуклым тогда и только тогда, когда $x + y \in K$ при любых $x, y \in K$ или, что эквивалентно, тогда и только тогда, когда $K + K = K$.

Выпуклое подмножество $H \subset X$ векторного пространства X называется [1] *выпуклым полупространством в* X или [2–4] просто *полупространством в* X, если его дополнение $X \setminus H$ также является выпуклым множеством. Разумеется, что если H полупространство в X, то и $X \setminus H$ также является полупространством в X.

Полупространство, которое является конусом, называется *коническим полупространством*.

Непустое выпуклое подмножество F выпуклого множества $Q \subset X$ (см, например, [5]) называется *гранью* множества Q, если оно удовлетворяет следующему свойству: если для некоторых $u, v \in Q$ существует $\alpha \in (0,1)$ такое, что $\alpha u + (1-\alpha)v \in F$, то $u, v \in F$. Другими словами, непустое подмножество $F \subset Q$ является гранью множества Q, если каждый отрезок из Q, содержащий в своей относительной внутренности элемент из F, целиком принадлежит F. Само множество Q является своей гранью, пустое множество также считается гранью любого выпуклого множества Q. Непустая грань F множества Q называется *собственной*, если она не совпадает с Q. Если F — грань Q, а G — грань F, то G является также гранью Q. Легко видеть, что каждая грань выпуклого конуса также является выпуклым конусом.

Пересечение любого семейства граней выпуклого множества Q также является гранью Q, в то же время объединение семейства граней выпуклого множества Q не всегда является гранью Q. Однако, если семейство граней линейно упорядочено отношением включения, то объединение такого семейства также является гранью Q. Эти утверждения достаточно очевидны и приводятся в большинстве работ, посвященных исследованиям граней (см., например, [5–7]).

Геометрическое строение выпуклых множеств чаще всего связывают с их граневой структурой, т. е. с семейством всех непустых граней выпуклого множества, частично упорядоченным отношением теоретико-множественного включения. В настоящей работе представлена несколько другая точка зрения на геометрическое строение (геометрическую структуру) выпуклых множеств и их граней. Поскольку каждая грань выпуклого множества является выпуклым множеством и, кроме того, любое выпуклое множество является своей же гранью, то мы начинаем с изучения геометрического строения произвольных выпуклых множеств. Этому посвящен первый раздел статьи. Известно [7;8], что выпуклое множество не имеет собственных граней в том и только том случае, когда оно является относительно алгебраически открытым (определение относительно алгебраически открытого множества приводится в первом разделе настоящей статьи). Таким образом, относительно алгебраически открытые выпуклые множества имеют только одну непустую грань — само это множество. Будем считать геометрическое строение таких выпуклых множеств элементарным. В работе показывается, что произвольное выпуклое множество $Q \subset X$ является объединением частично упорядоченного семейства $\mathcal{O}(Q)$ непересекающихся относительно алгебраически открытых подмножеств (открытых компонент) этого множества, каждое из которых, как мы выше условились, имеет элементарное геометрическое строение. Для того чтобы определить такое семейство $\mathcal{O}(Q)$, на выпуклом множестве Q вводится отношение предпорядка[2] $\trianglelefteq_Q$ (свое для каждого выпуклого множества Q), названное *отношением доминирования*. Хорошо известно, что симметричная часть любого отношения предпорядка является отношением эквивалентности. Следовательно, симметричная часть отношения доминирования $\trianglelefteq_Q$, обозначаемая символом $<\!\!>_Q$, есть отношение эквивалентности на Q. Семейство $\mathcal{O}(Q)$ определяется как фактор-множество $Q/{<\!\!>_Q}$ множества Q по отношению эквивалентности $<\!\!>_Q$, при этом на $\mathcal{O}(Q)$ задается отношение частичного порядка $\trianglelefteq^*_Q$, индуцированное отношением доминирования $\trianglelefteq_Q$. Доказывается (предложение 3 и теорема 1), что элементы семейства $\mathcal{O}(Q)$ являются относительно алгебраически открытыми подмножествами множества Q, причем отношение частичного порядка $\trianglelefteq^*_Q$ определяет на $\mathcal{O}(Q)$ структуру верхней полурешетки. Таким образом, верхняя полурешетка $(\mathcal{O}(Q), \trianglelefteq^*)$, ее элементы и их упорядочение отношением $\trianglelefteq^*_Q$ полностью характеризуют геометрическое строение выпуклого множества Q.

Вследствие того, что выпуклое множество Q является дизъюнктным объединением классов эквивалентности из $\mathcal{O}(Q) := Q/{<\!\!>_Q}$, мы можем, говоря неформально, рассматривать открытые компоненты семейства $\mathcal{O}(Q)$ как “строительные блоки”, из которых “собрано” множество Q, причем в Q эти блоки “уложены” относительно друг друга не произвольным образом, а в соответствии с тем, как они соотносятся между собой в верхней полурешетке $(\mathcal{O}(Q), \trianglelefteq^*)$. Ранее в алгебре (см. например, [9;10]) решетки называли структурами. Эта терминология оправдывает в какой-то мере то, что верхняя полурешетка $(\mathcal{O}(Q), \trianglelefteq^*)$ названа в данной статье *внутренней (геометрической) структурой выпуклого множества* Q. Кроме того, данное название, как представляется, отражает и содержательный смысл верхней полурешетки $(\mathcal{O}(Q), \trianglelefteq^*)$.

В предложениях 2 и 5 показано, что внутренняя геометрическая структура полупространств имеет специфические особенности: отношение доминирования $\trianglelefteq_H$, определенное на полупространствах $H \subset X$, является полным[3] и, как следствие, отношение частичного порядка $\trianglelefteq^*_H$, определенное на семействе $\mathcal{O}(H)$ открытых компонент полупространства H, является линейным порядком[4].

Во втором разделе исследуется связь между внутренней геометрической структурой выпуклого множества и внутренней геометрической структурой его граней. Прежде всего, устанавливается (теорема 2), что каждая открытая компонента выпуклого множества Q является относительной алгебраической внутренностью минимальной (по включению) грани множе-

[2]Бинарное отношение $\preccurlyeq$, определенное на некотором множестве Y, называется *отношением предпорядка*, если оно рефлексивно ($y \preccurlyeq y$ для любого $y \in Y$) и транзитивно (для любых $y_1, y_2, y_3 \in Y$ из $y_1 \preccurlyeq y_2$ и $y_2 \preccurlyeq y_3$ следует $y_1 \preccurlyeq y_3$). Предпорядки $\preccurlyeq$, которые являются антисимметричными, т. е. такими, что для любых $y_1, y_2 \in Y$ из $y_1 \preccurlyeq y_2$ и $y_2 \preccurlyeq y_1$ следует $y_1 = y_2$, называются *отношениями частичного порядка*.

[3]Бинарное отношение $\preccurlyeq$, определенное на множестве Y, называется *полным*, если для любых $y_1, y_2 \in Y$ выполняется хотя бы одно из двух соотношений $y_1 \preccurlyeq y_2$ и $y_2 \preccurlyeq y_1$.

[4]Линейным (или совершенным) порядком на множестве Y называется полное отношение частичного порядка, определенное на Y.

ства Q, содержащей данную открытую компоненту. Обратно, если грань F выпуклого множества Q имеет непустую относительную алгебраическую внутренность, то она (относительная алгебраическая внутренность грани) совпадает с некоторой открытой компонентой множества Q, а сама грань F совпадает с минимальной гранью, содержащей эту открытую компоненту. Для краткости терминологии грани с непустой относительной алгебраической внутренностью назовем минимальными. В конечномерных векторных пространствах любая грань F выпуклого множества Q имеет непустую относительную внутренность $\mathrm{icr}F$ и, следовательно, является минимальной гранью. В то же время в любом бесконечномерном векторном пространстве (это показано в теоремах 3 и 4 и примере 4) существуют выпуклые множества, не все грани которых являются минимальными. Это доказывается построением (см. пример 4) в произвольном бесконечномерном векторном пространстве такого конкретного выпуклого множества, которое содержит грань с пустой относительной алгебраической внутренностью.

Вместе с тем (см. теорему 5) каждая открытая компонента любой грани F выпуклого множества Q является открытой компонентой самого множества Q, т. е. $\mathcal{O}(F) \subset \mathcal{O}(Q)$, и, кроме того, отношение частичного порядка $\trianglelefteq^*_F$, определенное на $\mathcal{O}(F)$, совпадает с сужением на $\mathcal{O}(F)$ отношения частичного порядка $\trianglelefteq^*_Q$, заданного на $\mathcal{O}(Q)$. Таким образом, внутренняя структура $(\mathcal{O}(F), \trianglelefteq^*_F)$ любой грани F выпуклого множества Q является подструктурой внутренней структуры $(\mathcal{O}(Q), \trianglelefteq^*_Q)$ самого множества Q.

1. Геометрическое строение выпуклых множеств

1.1. Алгебраическая и относительно алгебраическая внутренности выпуклых множеств

Прежде всего, напомним понятие (относительной) алгебраической внутренности подмножеств действительных векторных пространств [11–15].

Алгебраической внутренностью (или *ядром* (*core*)) множества $Q \subset X$ называется подмножество, состоящее из всех таких точек $x \in Q$, которые принадлежат внутренности пересечения Q с любой прямой из X, проходящей через точку x; обозначается алгебраическая внутренность множества Q символом $\mathrm{cr}Q$.

Относительной алгебраической внутренностью (или *внутренним ядром* (*intrinsic core*)) множества $Q \subset X$, называется подмножество, состоящее из таких точек $x \in Q$, которые принадлежат внутренности пересечения множества Q с каждой прямой, лежащей в $\mathrm{aff}Q$ и проходящей через точку x (здесь $\mathrm{aff}Q$ — аффинная оболочка множества Q); обозначается алгебраическая внутренность множества Q символом $\mathrm{icr}Q$.

Более формально, $x \in \mathrm{cr}Q$ тогда и только тогда, когда для любого $y \in X \setminus \{x\}$ можно указать такое число $\delta > 0$, что $x + t(y - x) \in Q$ для всех $t \in (-\delta, \delta)$, тогда как $x \in \mathrm{icr}Q$ тогда и только тогда, когда для любого $y \in \mathrm{aff}Q \setminus \{x\}$ существует действительное число $\delta > 0$ такое, что $x + t(y - x) \in Q$ для всех $t \in (-\delta, \delta)$.

Если множество $Q \subset X$ является выпуклым, то $x \in \mathrm{icr}Q$ тогда и только тогда, когда для любого $y \in Q \setminus \{x\}$ существует положительное число $\delta > 0$ такое, что $x + t(y - x) \in Q$ для всех $t \in (-\delta, \delta)$.

Множество $Q \subset X$ называется (*относительно*) *алгебраически открытым*, если оно совпадает со своей (относительной) алгебраической внутренностью, т. е. если $Q = \mathrm{cr}Q$ ($Q = \mathrm{icr}Q$).

Предложение 1. *Пусть Q — выпуклое множество в X. Тогда*

$$x \in \mathrm{icr}Q \Longleftrightarrow x \in Q \text{ и } (\forall y \in Q)(\exists \delta > 0) \text{ такое, что } x - \delta(y - x) \in Q. \qquad (1.1)$$

Если $K \subset X$ выпуклый конус, то

$$x \in \mathrm{icr}K \Longleftrightarrow x \in K \text{ и } (\forall y \in K)(\exists \lambda > 0) \text{ такое, что } x - \lambda y \in K, \qquad (1.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость импликации ($\Longrightarrow$) в характеристике (1.1) следует непосредственно из определения относительно алгебраически внутренних точек. Для доказательства справедливости импликации ($\Longleftarrow$) в (1.1) достаточно заметить, что из правой части (1.1) и выпуклости множества Q следует, что $x - t(y - x) \in Q$ для всех $t \in (-\delta_0, 0)$ где $\delta_0 = \min\{\delta, 1\}$.

Перейдем к доказательству (1.2). Пусть K — выпуклый конус такой, что $\mathrm{icr}K \neq \varnothing$. Так как K является выпуклым множеством, то в силу (1.1) $x \in \mathrm{icr}K$ тогда и только тогда, когда для любого $y \in K$ существует число $\delta > 0$ такое, что $x - \delta(y - x) = (1 + \delta)\Big(x - \dfrac{\delta}{1+\delta}y\Big) \in K$. Учитывая, что K конус, получаем $x - \lambda y \in K$, где $\lambda = \dfrac{\delta}{1+\delta}$. Таким образом импликация ($\Longrightarrow$) в (1.2) доказана.

Для доказательства обратной импликации ($\Longleftarrow$) в (1.2) предположим, что вектор $x \in K$ таков, что для любого $y \in K$ существует $\lambda > 0$, для которого $x - \lambda y \in K$. Так как $(\lambda - t)y \in K$ для всех $t \in (0, \lambda)$, из выпуклости конуса K получаем $(x - \lambda y) + (\lambda - t)y = x - ty \in K$ для всех $t \in (0, \lambda)$. Кроме того, $tx \in K$ для всех $t > 0$. Снова используя выпуклость K, получаем $x - t(y - x) \in K$ для всех $t \in (0, \lambda)$. Наконец, так как обе точки x и y принадлежат выпуклому конусу K, то $x + t(y - x) \in K$ для всех $t \in [0, 1]$. Значит, $x + t(y - x) \in K$ для всех $t \in (-\delta, \delta)$, где $\delta = \min\{\lambda, 1\}$. Это доказывает, что $x \in \mathrm{icr}K$. □

Известно, что в конечномерных пространствах X относительная алгебраическая внутренность любого непустого выпуклого подмножества $Q \subset X$ непуста. В то же время в каждом бесконечномерном действительном векторном пространстве существуют выпуклые множества (более того, выпуклые конусы) с пустой относительной алгебраической внутренностью.

П р и м е р 1 [12, гл. 2, § 7]. Пусть X — действительное векторное пространство и пусть $\{e_i, i \in I\}$ — базис Гамеля в X. Расмотрим выпуклый конус K в X, состоящий из таких ненулевых векторов $x \in X$, компоненты $\{x_i, i \in I\}$ которых в заданном базисе $\{e_i, i \in I\}$ неотрицательны. Вследствие бесконечности базиса $\{e_i, i \in I\}$ каждый вектор $x \in K$ имеет нулевые компоненты. Предположим, что $x_j = 0$. Так как $e_j \in K$ и для любого действительного числа $\lambda > 0$ вектор $x - \lambda e_j$ не принадлежит K, то $x \notin \mathrm{icr}K$. В силу произвольного выбора вектора $x \in K$ из эквивалентности (1.1) следует, что $\mathrm{icr}K = \varnothing$.

1.2. Отношение доминирования на выпуклом множестве

Пусть Q — выпуклое множество в векторном пространстве X.

О п р е д е л е н и е 1 (ср. с [16; 17]). Будем говорить, что точка $x \in Q$ *доминирует* точку $y \in Q$ в множестве Q, и обозначать это символом $y \trianglelefteq_Q x$, если существует положительное вещественное число $\delta > 0$ такое, что $x - \delta(y - x) \in Q$.

Бинарное отношение $\trianglelefteq_Q$ будем называть *отношением доминирования* на множестве Q.

Нетрудно убедиться, что отношение доминирования $\trianglelefteq_Q$ является отношением предпорядка (т. е. рефлексивным и транзитивным бинарным отношением) на Q. Символом $\lessgtr_Q$ будем обозначать симметричную часть $\trianglelefteq_Q$, которая определяется следующим образом:

$$x_1 \lessgtr_Q x_2 \Leftrightarrow x_1 \trianglelefteq_Q x_2, x_2 \trianglelefteq_Q x_1.$$

Из определений следует, что $x_1 \lessgtr_Q x_2$ тогда и только тогда, когда существуют положительные действительные числа $\mu > 0$ и $\nu > 0$ такие, что

$$x_1 - \mu(x_2 - x_1) \in Q \quad \text{и} \quad x_2 - \nu(x_1 - x_2) \in Q.$$

Асимметричная часть $\trianglelefteq_Q$, обозначаемая символом $\triangleleft_Q$, определяется следующим образом: $x_1 \triangleleft_Q x_2 \Leftrightarrow x_1 \trianglelefteq_Q x_2, x_2 \not\trianglelefteq_Q x_1$. Бинарные отношения $\triangleleft_Q$ и $\lessgtr_Q$ являются соответственно строгим частичным порядком и отношением эквивалентности на Q.

Из данного выше определения и предложения 1 следует, что для любого выпуклого множества $Q \subset X$ справедлива следующая эквивалентность:

$$x \in \mathrm{icr}Q \Longleftrightarrow x \in Q \text{ и } y \trianglelefteq_Q x \text{ для всех } y \in Q, \tag{1.3}$$

причем $y \triangleleft_Q x$ для всех $y \in Q \setminus \mathrm{icr}Q$ и всех $x \in \mathrm{icr}Q$.

На выпуклом конусе $K \subset X$ отношение доминирования $\trianglelefteq_K$ может быть определено следующим образом:

$$y \trianglelefteq_K x \text{ для } x, y \in K \Longleftrightarrow \text{ существует } \lambda > 0 \text{ такое, что } x - \lambda y \in K.$$

Отношения доминирования, определенные на полупространствах, обладают дополнительным свойством полноты.

Предложение 2. *Отношение доминирования $\trianglelefteq_H$, определенное на полупространстве $H \subset X$, является полным отношением предпорядка.*

Доказательство. Нам нужно доказать только полноту отношения $\trianglelefteq_H$. Для доказательства этого нам понадобится следующая характеристика полупространств [2–4]: выпуклое подмножество $H \subset X$ векторного пространства X является полупространством в X тогда и только тогда, когда его рецессивный конус $0^+H := \{y \in X \mid x + ty \in H \ \forall x \in H \text{ и } \forall t > 0\}$ является коническим полупространством.

Так как $0^+H \cup (-0^+H) = X$, то для любых $x, y \in H$ выполняется либо $x - y \in 0^+H$, либо $y - x \in 0^+H$ или и то, и другое. Если $x - y \in 0^+H$, то $x - t(y - x) \in H \ \forall\, t > 0$ и, следовательно, $y \trianglelefteq_H x$. Аналогично, если $y - x \in 0^+H$, то $x \trianglelefteq_H y$. Таким образом, для любых $x, y \in H$ выполняется хотя бы одно из двух соотношений $y \trianglelefteq_H x$ и $x \trianglelefteq_H y$ и, значит, отношение $\trianglelefteq_H$ является полным на H. □

Пусть $Q \subset X$ — выпуклое множество в X. Для любого $x \in Q$ определим множества

$$F_Q(x) := \{y \in Q \mid y \trianglelefteq_Q x\} \quad \text{и} \quad \widehat{F}_Q(x) := \{y \in Q \mid y \triangleleft_Q x\}.$$

Так как $x \in F_Q(x)$, то множество $F_Q(x) \neq \varnothing$ для любого $x \in Q$. Более того, нетрудно убедиться в том, что для каждого $x \in Q$ множество $F_Q(x)$ является выпуклым подмножеством множества Q. Что же касается множества $\widehat{F}_Q(x)$, то для некоторых $x \in Q$ оно может быть пустым, в том же случае, когда $\widehat{F}_Q(x)$ не пусто, оно, вообще говоря, может не быть выпуклым.

Пример 2. Рассмотрим выпуклый конус $K = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\} \setminus \{(0,0)\}$. Для него $\widehat{F}(x) = \varnothing$ для любых $x = (x_1, x_2) \in K$ таких, что $x_1 > 0, x_2 = 0$ или $x_1 = 0, x_2 > 0$. Для $x = (x_1, x_2) \in K$ с $x_1 > 0, x_2 > 0$ множество $\widehat{F}(x) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0, x_2 = 0\} \cup \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0, x_2 > 0\}$ — конус, который не является выпуклым.

Из транзитивности отношения $\trianglelefteq_Q$ следует, что $F_Q(y) \subseteq F_Q(x)$, если $y \trianglelefteq_Q x$. Очевидно, что обратная импликация также справедлива. Таким образом, для любых $x, y \in Q$ выполняются следующие эквивалентности:

$$y \trianglelefteq_Q x \Leftrightarrow F_Q(y) \subseteq F_Q(x); \quad y \triangleleft_Q x \Leftrightarrow F_Q(y) \subsetneq F_Q(x); \quad y <>_Q x \Leftrightarrow F_Q(y) = F_Q(x).$$

Множество $G_Q(x) := \{y \in Q \mid x \trianglelefteq_Q y\}$ также является непустым выпуклым множеством для каждого $x \in Q$, при этом для любых $x, y \in Q$ имеют место эквивалентности:

$$y \trianglelefteq_Q x \Leftrightarrow G_Q(y) \supseteq G_Q(x); \quad y \triangleleft_Q x \Leftrightarrow G_Q(y) \supsetneq G_Q(x); \quad y <>_Q x \Leftrightarrow G_Q(y) = G_Q(x),$$

характеризующие отношение доминирования $\trianglelefteq_Q$ и производные от него отношения $\triangleleft_Q$ и $<>_Q$.

Из (1.3) и определения множества $F_Q(x)$ следует, что для относительно алгебраически внутренних точек любого выпуклого множества $Q \subset X$ справедлива следующая характеристика:

$$x \in \mathrm{icr}Q \Longleftrightarrow x \in Q \text{ и } F_Q(x) = Q.$$

1.3. Открытые компоненты выпуклых множеств

Для выпуклого множества $Q \subset X$ символом $\mathcal{O}(Q) := Q/{<>_Q}$ обозначим множество классов эквивалентности Q по отношению эквивалентности ${<>_Q}$.

Множество Q является дизъюнктным объединением всех классов эквивалентности из $\mathcal{O}(Q)$, т. е. $Q = \bigcup\{E \mid E \in \mathcal{O}(Q)\}$, при этом $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ для любых $E_1, E_2 \in \mathcal{O}(Q), E_1 \neq E_2$. Отношение предпорядка $\trianglelefteq_Q$, определенное на Q, индуцирует на $\mathcal{O}(Q)$ отношение частичного порядка $\trianglelefteq^*_Q$, которое определяется следующим образом: $E_1 \trianglelefteq^*_Q E_2$ для $E_1, E_2 \in \mathcal{O}(Q)$ тогда и только тогда, когда $x_1 \trianglelefteq_Q x_2$ для всех (достаточно, чтобы для некоторого) $x_1 \in E_1$ и всех (некоторого) $x_2 \in E_2$.

Класс эквивалентности, содержащий точку $x \in Q$, будем обозначать как E_x, т. е. $E_x := \{y \in Q \mid y <>_Q x\}$.

Предложение 3. *Каждый класс эквивалентности E из $\mathcal{O}(Q)$ является относительно алгебраически открытым выпуклым подмножеством множества Q. Более того,* $E = \mathrm{icr} F_Q(E)$, *где* $F_Q(E) := \bigcup\{\tilde{E} \in \mathcal{O}(Q) \mid \tilde{E} \trianglelefteq^*_Q E\}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный класс эквивалентности $E \in \mathcal{O}(Q)$ и произвольную точку $x \in E$. Тогда $E = E_x := \{y \in Q \mid y <>_Q x\}$. Заметим, что $E_x = F_Q(x) \cap G_Q(x)$, где $F_Q(x) := \{y \in Q \mid y \trianglelefteq_Q x\}$ и $G_Q(x) := \{y \in Q \mid x \trianglelefteq_Q y\}$. Как было отмечено выше, множества $F_Q(x)$ и $G_Q(x)$ являются выпуклыми и, следовательно, E_x как пересечение двух выпуклых множеств также является выпуклым множеством. Так как $y <>_Q x$ для всех $y \in E_x$, то из выпуклости E_x и эквивалентности (1.3) следует, что $x \in \mathrm{icr} E_x$. Вследствие произвольного выбора $E \in \mathcal{O}(Q)$ и точки $x \in E$ заключаем, учитывая равенство $E = E_x$, что каждый класс эквивалентности E является относительно алгебраически открытым множеством.

Перейдем к доказательству равенства $E = \mathrm{icr} F_Q(E)$. Выберем некоторую точку $x \in E$ и произвольную точку $y \in \mathrm{icr} F_Q(x)$. Заметим, что для каждого $x \in E$ выполняется равенство $F_Q(E) = F_Q(x)$. Так как множество $F_Q(x)$ выпукло, то из (1.3) и определения отношения $\trianglelefteq_Q$ следует, что для каждого $z \in F_Q(x)$ существует $\lambda_z > 0$ такое, что $y - \lambda_z(z - y) \in F_Q(x)$. Значит, для $x \in F_Q(x)$ существует $\lambda_x > 0$ такое, что $y - \lambda_x(x - y) \in F_Q(x) \subset Q$. Это влечет, что $x \trianglelefteq_Q y$. Кроме того, так как $y \in F_Q(x)$, то $y \trianglelefteq_Q x$. Таким образом, $y <>_Q x$, т. е. $y \in E_x$. Поскольку y — произвольная точка из $\mathrm{icr} F_Q(x)$, то $\mathrm{icr} F_Q(x) \subset E_x = E$.

Докажем обратное включение. Так как $y \trianglelefteq_Q x$ для всех $y \in F_Q(x)$, то из (1.3) следует, что $x \in \mathrm{icr} F_K(x)$. Рассмотрим произвольную точку $z \in E_x$. Поскольку $x <>_Q z$ и, кроме того, $y \trianglelefteq_Q x$ для всех $y \in F_Q(x)$, то из транзитивности $\trianglelefteq_Q$ получаем, что $y \trianglelefteq_Q z$ для всех $y \in F_Q(x)$. Снова применяя (1.3), заключаем, что $z \in \mathrm{icr} F_Q(x)$ и, следовательно, $E_x \subseteq \mathrm{icr} F_Q(x)$. $\square$

Ниже классы эквивалентности из $\mathcal{O}(Q)$ будем называть, исходя из их свойств, *относительно алгебраически открытыми компонентами* (или, коротко, *открытыми компонентами*) выпуклого множества Q.

Предложение 4. *Выпуклое множество $Q \subset X$ имеет непустую относительную алгебраическую внутренность* $\mathrm{icr} Q$ *в том и только том случае, когда семейство его открытых компонент $\mathcal{O}(Q)$, частично упорядоченное отношением $\trianglelefteq^*_Q$, имеет наибольший элемент, т. е. такой элемент $E_{\sup} \in \mathcal{O}(Q)$, что $E \trianglelefteq^* E_{\sup}$ для всех $E \in \mathcal{O}(Q)$. Более того, в этом случае,* $\mathrm{icr} Q = E_{\sup}$.

Справедливость утверждения данного предложения следует из эквивалентности (1.3) и того, что $E_{\sup}$ является относительно алгебраически открытым множеством.

Пример 3. Вернемся к примеру 1. Пусть X — бесконечномерное вещественное векторное пространство и пусть $\{e_i, i \in I\}$ базис Гамеля в X. Рассмотрим выпуклое множество (выпуклый конус, на самом деле) $Q \subset X$, состоящее из ненулевых векторов $x \in X$, координаты которых $\{x_i, i \in I\}$ в выбранном базисе $\{e_i, i \in I\}$ неотрицательны. Для $x \in Q$ символом $I(x)$

обозначим подмножество тех индексов из I, для которых $x_i > 0$, т. е. $I(x) := \{i \in I \mid x_i > 0\}$. Подмножество $I(x)$ непусто и конечно для каждого вектора $x \in Q$. Нетрудно видеть, что $y \trianglelefteq_Q x \Leftrightarrow I(y) \subseteq I(x)$ и $y <>_K x \Leftrightarrow I(y) = I(x)$. Следовательно, E является открытой компонентой множества Q, т. е. $E \in \mathcal{O}(Q)$, тогда и только тогда, когда $E = \{x \in Q \mid I(x) = J\}$, где J — некоторое конечное подмножество множества индексов I. Более того, поскольку каждое конечное подмножество множества I является собственным подмножеством другого конечного подмножества из I, то семейство $\mathcal{O}(Q)$ открытых компонент множества Q не имеет наибольшего (относительно $\trianglelefteq^*$) элемента и, значит, в силу предложения 4 $\mathrm{icr}Q = \varnothing$. Данное свойство рассматриваемого выпуклого множества Q было установлено ранее в примере 1.

Следствие 1. *Выпуклое множество $Q \subset X$ является относительно алгебраически открытым тогда и только тогда, когда семейство $\mathcal{O}(Q)$ его открытых компонент содержит единственный элемент, равный самому множеству Q, т. е. тогда и только тогда, когда $\mathcal{O}(Q) = \{Q\} = \{\mathrm{icr}Q\}$.*

Следующая теорема показывает, что частично упорядоченное множество $(\mathcal{O}(K), \trianglelefteq_K^*)$ является верхней полурешеткой.

Напомним [18], что частично упорядоченное множество $(Z, \preceq)$ называется *верхней полурешеткой*, если каждая пара элементов $\{z_1, z_2\}$ из Z имеет наименьшую верхнюю грань в Z, которая обычно обозначается символом $z_1 \vee z_2$.

Теорема 1. *Семейство $\mathcal{O}(Q)$ открытых компонент выпуклого множества Q, упорядоченное отношением частичного порядка $\trianglelefteq_Q^*$, является верхней полурешеткой, причем для любых $x, y \in Q$ и любого $\alpha \in (0,1)$ выполняется равенство $E_x \vee E_y = E_{\alpha x + (1-\alpha)y}$, в частности, $E_x \vee E_y = E_{\frac{x+y}{2}}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольные открытые компоненты E_x и E_y. При любом $\alpha \in (0,1)$ точка $x_\alpha := \alpha x + (1-\alpha)y$ принадлежит внутренности отрезка $[x, y]$. Нетрудно видеть, что при достаточно малых $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ точки $x_\alpha - \delta_1(x - x_\alpha)$ и $x_\alpha - \delta_1(y - x_\alpha)$ принадлежат отрезку $[x, y]$, а поскольку множество Q выпукло, то и множеству Q. Вследствие определения 1 имеем, что $x \trianglelefteq_Q x_\alpha$ и $y \trianglelefteq_Q x_\alpha$, а это равносильно тому, что $E_x \trianglelefteq_Q^* E_{x_\alpha}$ и $E_y \trianglelefteq_Q^* E_{x_\alpha}$. Таким образом, в верхней полурешетке $(\mathcal{O}(Q), \trianglelefteq_Q^*)$ открытая компонента E_{x_α} является верхней гранью для пары открытых компонент $\{E_x, E_y\}$.

Покажем, что на самом деле E_{x_α} является наименьшей верхней гранью для открытых компонент $\{E_x, E_y\}$. Предположим, что $E_x \trianglelefteq_Q^* E$ and $E_y \trianglelefteq_Q^* E$ для некоторой открытой компоненты $E \in \mathcal{O}(Q)$. Тогда $x \trianglelefteq_Q u$ и $y \trianglelefteq_Q u$ для некоторой (любой) точки $u \in E$ и, следовательно, $x, y \in F_Q(u)$. Так как множество $F_Q(u)$ выпукло, то $\alpha x + (1-\alpha)y \in F_Q(u)$ при любых $\alpha \in (0,1)$ и, значит, $E_{\alpha x + (1-\alpha)y} \trianglelefteq^* E$ при любых $\alpha \in (0,1)$. $\square$

Для полупространств верхняя решетка их открытых компонент имеет более тонкую порядковую структуру.

Предложение 5. *Семейство открытых компонент $\mathcal{O}(H)$ любого полупространства H линейно упорядочено отношением $\trianglelefteq_H^*$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость данного утверждения непосредственно следует из полноты отношения доминирования $\trianglelefteq_H$, определенного на полупространстве $H \subset X$ (см. предложение 2). $\square$

Ниже будем отождествлять структуру верхней полурешетки $(\mathcal{O}(Q), \trianglelefteq^*)$ с *внутренней (геометрической) структурой выпуклого множества Q*. Различия и родственная связь между внутренней и граневой структурами одного и того же выпуклого множества будут обсуждены в следующем раделе (см. замечание 2).

2. Открытые компоненты и грани выпуклых множеств

Пусть Q — выпуклое множество в X и $S \subset X$ — подмножество Q. Так как само множество Q является своей собственной гранью, то семейство тех граней множества Q, которые содержат подмножество S, непусто. Поскольку пересечение любого семейства граней множества Q является гранью Q, то пересечение семейства тех граней множества Q, которые содержат подмножество S, также является гранью Q, причем *минимальной* (*по включению*) *гранью множества* Q*, содержащей подмножество* S.

Теорема 2. *Для любой открытой компоненты $E \in \mathcal{O}(Q)$ выпуклого множества Q множество $F_Q(E) := \bigcup\{\tilde{E} \in \mathcal{O}(Q) \mid \tilde{E} \trianglelefteq_Q^* E\}$ является минимальной (по включению) гранью множества Q, содержащей E, при этом $\mathrm{icr} F_Q(E) = E$.*

Обратно, для каждой грани F выпуклого множества Q такой, что $\mathrm{icr} F \neq \varnothing$, существует единственная открытая компонента $E \in \mathcal{O}(Q)$ такая, что $F = F_Q(E)$ и, значит, $\mathrm{icr} F = E$.

Доказательство. Пусть $E \in \mathcal{O}(Q)$. Так как $F_Q(E) = F_Q(x)$ для всех $x \in E$, то $F_Q(E)$ является выпуклым множеством (выпуклость множеств $F_Q(x)$ при любом $x \in Q$ была установлена ранее). Для доказательства того, что $F_Q(E)$ является гранью Q, рассмотрим произвольную точку $x \in F_Q(E)$ и предположим, что $x = \alpha u + (1-\alpha)v$ для некоторых $\alpha \in (0,1)$ и $u, v \in Q$. Из теоремы 1 заключаем, что $E_x = E_u \vee E_v$, а так как $E_x = E$, то $E_u \trianglelefteq_Q^* E$ и $E_v \trianglelefteq_Q^* E$. Следовательно, $u \in E_u \subset F_Q(E)$ и $v \in E_v \subset F_Q(E)$. Это доказывает, что $F_Q(E)$ — грань множества Q.

Для того чтобы доказать, что $F_Q(E)$ является минимальной гранью множества Q, содержащей открытую компоненту E, необходимо показать, что $F_Q(E) \subseteq F$ для любой грани F множества Q такой, что $E \subset F$.

Пусть F — произвольная грань множества Q, содержащая E, и пусть $x \in E \subset F$, а $y \in F_Q(E) = F_Q(x)$. Так как $y \trianglelefteq_Q x$, то в силу определения отношения $\trianglelefteq_Q$ существует $\lambda > 0$ такое, что $z := x - \lambda(y - x) \in Q$. Непосредственно проверяется, что $x = \dfrac{\lambda}{1+\lambda} y + \dfrac{1}{1+\lambda} z$. Следовательно, $x \in (y, z)$, причем $y, z \in Q$. Поскольку x принадлежит грани F выпуклого множества Q, то из определения грани следует, что точки y, z также принадлежат F. Так как y — произвольный элемент из $F_Q(E) = F_Q(x)$, то тем самым доказано, что $F_Q(E) \subseteq F$.

Условие $\mathrm{icr} F_K(E) \neq \varnothing$ и равенство $\mathrm{icr} F_K(E) = E$ были доказаны ранее в предложении 3.

Докажем второе утверждение теоремы.

Пусть F — такая грань выпуклого множества Q, что $\mathrm{icr} F \neq \varnothing$, и пусть $x \in \mathrm{icr} F$. Так как грань F является выпуклым множеством, то в силу (1.3) $y \trianglelefteq_Q x$ для всех $y \in F$ и, значит, $F \subseteq F_Q(x) = F_Q(E_x)$. Покажем,что верно и обратное включение. Для этого сначала убедимся в том, что $E_x \subseteq \mathrm{icr} F$ для любого $x \in \mathrm{icr} F$. Действительно, если $z \in E_x$, то $x \mathrel{<\!>}_Q z$, а поскольку $y \trianglelefteq_Q x$ для всех $y \in F$, то из транзитивности $\trianglelefteq_Q$ получаем, что $y \trianglelefteq_Q z$ для всех $y \in F$. Снова применяя (1.3), заключаем, что $z \in \mathrm{icr} F$. Таким образом, имеем $E_x \subseteq \mathrm{icr} F \subset F$, откуда следует $F_Q(E_x) \subset F$. Итак, $F = F_Q(E_x)$ и, значит, $\mathrm{icr} F = E_x$ (последнее равенство следует из первого утверждения данной теоремы).

Единственность открытой компоненты $E \in \mathcal{O}(Q)$, удовлетворяющей для грани F равенствам $F = F_K(E)$ и $\mathrm{icr} F = E$, следует из того, что различные открытые компоненты множества Q не пересекаются. □

Замечание 1. Из теоремы 2 следует, что семейство открытых компонент выпуклого множества Q совпадает с семейством непустых относительно алгебраических внутренностей граней множества Q, т. е. $\mathcal{O}(Q) = \{\mathrm{icr} F \mid F \text{ — грань } Q \text{ такая, что } \mathrm{icr} F \neq \varnothing\}$. Таким образом, утверждение, что выпуклое множество является дизъюнктным объединением семейства его открытых компонент может быть переформулировано следующим образом: каждое выпуклое множество представимо в виде дизъюнктного объединения непустых относительно алгебраических внутренностей его граней. В такой форме этот факт был отмечен ранее в статьях [7;8].

Следствие 2. *Пусть Q — выпуклое множество. Для любой точки $x \in Q$ множество $F_Q(x) := \{y \in K \mid y \trianglelefteq_Q x\}$ является минимальной (по включению) гранью множества Q, содержащей точку x, при этом* $\mathrm{icr} F_K(x) = E_x \neq \varnothing$.

Для формулировки следующей теоремы нам необходимо следующее понятие.

Пусть $(Y, \preceq)$ — линейно упорядоченное множество. Говорят [19], что упорядоченная пара (U, V) непустых подмножеств из Y является *сечением* $(Y, \preceq)$, если $U \cap V = \varnothing, U \cup V = Y$, при этом $u \prec v$ для всех $u \in U$ и всех $v \in V$. (Как обычно, $u \prec v$ означает, что $u \preceq v$, но $v \npreceq u$). Множества U и V называются соответственно *нижним классом* и *верхним классом* сечения (U, V).

Теорема 3. *Предположим, что семейство $\mathcal{O}(Q)$ открытых компонент выпуклого множества Q линейно упорядочено отношением доминирования $\trianglelefteq^*_Q$. Для любого сечения $\Sigma := (\underline{\mathcal{O}}(Q), \overline{\mathcal{O}}(Q))$ семейства $(\mathcal{O}(Q), \trianglelefteq^*_Q)$ множество $F_Q(\Sigma) := \bigcup\{E \mid E \in \underline{\mathcal{O}}(Q)\}$ является гранью Q, причем*

(i) *если нижний класс $\underline{\mathcal{O}}(K)$ имеет наибольший элемент $E_{\max}$, то $F_Q(\Sigma) = F_Q(E_{\max})$ и, значит,* $\mathrm{icr} F_Q(\Sigma) = \mathrm{icr} F_Q(E_{\max}) = E_{\max} \neq \varnothing$;

(ii) *в случае, когда $\underline{\mathcal{O}}(K)$ не имеет наибольшего элемента,* $\mathrm{icr} F_Q(\Sigma) = \varnothing$.

Доказательство. В силу теоремы 2 каждому $\tilde{E} \in \underline{\mathcal{O}}(Q)$ соответствует грань $F_Q(\tilde{E}) = \bigcup\{\hat{E} \in \mathcal{O}(Q) \mid \hat{E} \trianglelefteq^*_Q \tilde{E}\}$. Легко видеть, что $F_Q(\Sigma) = \bigcup\{F_Q(\tilde{E}) \mid \tilde{E} \in \underline{\mathcal{O}}(Q)\}$, т. е. $F_Q(\Sigma)$ является объединением линейно упорядоченного (по включению) семейства граней Q, и, следовательно, множество $F_Q(\Sigma)$ является гранью Q.

Утверждение (i) сразу же следует из равенства $F_Q(\Sigma) = \bigcup\{F_Q(\tilde{E}) \mid \tilde{E} \in \underline{\mathcal{O}}(Q)\}$ и теоремы 2. Для того чтобы доказать (ii), предположим в противоположность данному утверждению, что $\underline{\mathcal{O}}(Q)$ не имеет наибольшего элемента и $\mathrm{icr} F_Q(\Sigma) \neq \varnothing$. Тогда из второй части теоремы 2 следует, что существует открытая компонента $\tilde{E} \in \mathcal{O}(Q)$, для которой $F_Q(\Sigma) = F_Q(\tilde{E})$. Из последнего равенства заключаем, что $\tilde{E} \in \underline{\mathcal{O}}(Q)$ и, кроме того, $E \trianglelefteq^*_Q \tilde{E}$ для всех $E \in \underline{\mathcal{O}}(Q)$. Это противоречит предположению, что $\underline{\mathcal{O}}(Q)$ не имеет наибольшего элемента. □

Частным случаем теоремы 3 является следующее утверждение.

Теорема 4. *Предположим, что семейство открытых компонент $\mathcal{O}(Q)$ выпуклого множества Q линейно упорядочено отношением доминирования $\trianglelefteq^*_K$. Тогда для любой открытой компоненты $E \in \mathcal{O}(Q)$, которая не является наименьшим элементом $\mathcal{O}(Q)$, множество $\widehat{F}_Q(E) := \bigcup\{\tilde{E} \in \mathcal{O}(Q) \mid \tilde{E} \lhd^*_Q E\}$ является гранью Q, при этом*

(i) *если $\{\tilde{E} \in \mathcal{O}(Q) \mid \tilde{E} \lhd^* E\}$ имеет наибольший элемент $E_{\max}$, то $\widehat{F}_Q(E) = F_Q(E_{\max})$ и, следовательно,* $\mathrm{icr} \widehat{F}_Q(E) = \mathrm{icr} F_Q(E_{\max}) = E_{\max} \neq \varnothing$;

(ii) *в случае, когда $\{\tilde{E} \in \mathcal{O}(Q) \mid \tilde{E} \lhd^* E\}$ не имеет наибольшего элемента,* $\mathrm{icr} \widehat{F}_Q(E) = \varnothing$.

Доказательство. Для доказательства этой теоремы достаточно заметить, что если открытая компонента $E \in \mathcal{O}(Q)$ не является наименьшим элементом линейно упорядоченного семейства $(\mathcal{O}(Q), \trianglelefteq^*_Q)$, то упорядоченная пара $(\{\tilde{E} \in \mathcal{O}(Q) \mid \tilde{E} \lhd^* E\}, \{\tilde{E} \in \mathcal{O}(Q) \mid E \trianglelefteq^* \tilde{E}\})$ есть сечение линейно упорядоченного семейства $(\mathcal{O}(Q), \trianglelefteq^*_Q)$, а затем применить теорему 3. □

Пример 4. Пусть X — бесконечномерное вещественное векторное пространство, и пусть $B = \{e_i\}_{i \in I}$ — базис Гамеля в X. Выберем в B произвольное счетное подмножество $B_0 \subset B$, а затем в B_0 — произвольный элемент, который обозначим через $e_{+\infty}$. Оставшиеся элементы, т. е. элементы из $B_0 \setminus \{e_{+\infty}\}$, перенумеруем произвольным образом целыми числами и упорядочим в соответствии с их нумерацией. Выбранный ранее элемент $e_{+\infty}$ будем считать наибольшим в множестве $B_0 = \{e_i, i \in \mathbb{Z}, e_{+\infty}\}$ (здесь $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел). Таким образом, мы линейно упорядочили множество B_0. Для каждого $x \in X$ через $\{x_i, i \in \mathbb{Z}, x_{+\infty}\}$ обозначим те его координаты в базисе B, которые соответствуют базисным векторам из B_0. Так как каждый вектор $x \in X$ имеет только конечное число ненулевых координат в базисе B, то суммы $x_{+\infty} + \sum_{i\in\mathbb{Z}} x_i$ и $\sum_{i\in\mathbb{Z}(m)} x_i$, где $\mathbb{Z}(m) = \{i \in \mathbb{Z} \mid i \le m\}$, корректно определены для любого $x \in X$ и любого целого числа m. Определим следующие множества:

$$E_{+\infty} := \{x \in X \mid l_{+\infty}(x) > 0\}$$

и

$$E_m := \big\{x \in X \mid l_{+\infty}(x) = 0; l_s(x) = 0, s \in \mathbb{Z}, m < s; l_m(x) > 0\big\} \text{ для } m \in \mathbb{Z},$$

где $l_{+\infty}(x) := x_{+\infty} + \sum_{i\in\mathbb{Z}} x_i$ и $l_s(x) := \sum_{i\in\mathbb{Z}(s)} x_i$ для $s \in \mathbb{Z}$.

Так как функции $l_{+\infty} : X \to \mathbb{R}$ и $l_s : X \to \mathbb{R}, s \in \mathbb{Z}$, линейны на X, то множества $E_{+\infty}$ и $E_m, m \in \mathbb{Z}$, выпуклы, более того, это выпуклые конусы. Заметим также, что если $n > m$ для $n \in \mathbb{Z}\cup\{+\infty\}$ и $m \in \mathbb{Z}$, то для каждого $x \in E_n$ и $y \in E_m$ выполняется $x+y \in E_n$. Действительно, если $y \in E_m$, то $l_{+\infty}(y) = 0; l_s(y) = 0, s \in \mathbb{Z}, m < s$, и если $x \in E_n$, то $l_{+\infty}(x) = 0; l_s(x) = 0, s \in \mathbb{Z}, n < s$ и $l_n(x) > 0$. Поэтому для $x + y$ имеем $l_{+\infty}(x + y) = 0; l_s(x + y) = 0, s \in \mathbb{Z}, n < s$ и $l_n(x + y) > 0$. Значит, $x + y \in E_n$.

Из этих свойств следует, что множество $K := (\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} E_m) \cup E_{+\infty}$ является выпуклым конусом (более того, коническим полупространством) в X.

Отношение доминирования $\trianglelefteq_K$ на K определяется следующим образом: $y \triangleleft_K x$ тогда и только тогда, когда ($x \in E_{+\infty}$ и $y \in \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} E_m$) или ($x \in E_n$ и $y \in E_m$ при таких $n, m \in \mathbb{Z}$, что $n > m$); $x <\!\!>_K y$ тогда и только тогда, когда $x, y \in E_m$ для некоторого $m \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$. Следовательно, $\mathcal{O}(K) = \{E_m, m \in \mathbb{Z}, E_{+\infty}\}$, а $\trianglelefteq^*_K$ — линейный порядок на $\mathcal{O}(K)$, изоморфный естественному упорядочению $\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$.

Открытая компонента $E_{+\infty}$ является наибольшим элементом в $(\mathcal{O}(K), \trianglelefteq^*_K)$, в то же время подсемейство $\{E \in \mathcal{O}(K) \mid E \triangleleft^*_K E_{+\infty}\} = \{E_m, m \in \mathbb{Z}\}$ не имеет наибольшего элемента. Таким образом, в силу утверждения (ii) из теоремы 4 множество $\widehat{F}_K(E_{+\infty}) = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} E_m$ является гранью K, для которой не существует открытой компоненты $E \in \mathcal{O}(K)$ такой, что $\widehat{F}_K(E_{+\infty}) = F_K(E)$ и, значит, $\mathrm{icr}\widehat{F}_K(E_{+\infty}) = \varnothing$.

З а м е ч а н и е 2. Теорема 2 показывает, что отображение $E \mapsto F_K(E)$ инъективно отображает верхнюю полурешетку $(\mathcal{O}(Q), \trianglelefteq^*_Q)$ открытых компонент выпуклого множества Q в частично упорядоченное отношением включения семейство всех граней того же выпуклого множества Q, при этом данное отображение является изотонным, т. е. сохраняет порядковые отношения. Однако, в бесконечномерном случае это отображение не является, вообще говоря, сюръективным, так как его полный образ включает только грани, относительная алгебраическая внутренность которых непуста. В то же время, как это следует из теоремы 3 и примера 4, в каждом бесконечномерном векторном пространстве существуют выпуклые множества, которые имеют грани (и даже множество граней) с пустой относительной алгебраической внутренностью. Значит, внутренняя структура выпуклого множества не является, вообще говоря, порядково изоморфной его граневой структуре.

В следующей теореме раскрывается связь между внутренним геометрическим строением выпуклого множества и внутренним геометрическим строением его граней.

Теорема 5. *Пусть F — грань выпуклого множества $Q \subset X$. Тогда*

(i) *любая открытая компонента $E \in \mathcal{O}(Q)$ множества Q такая, что $E \cap F \neq \varnothing$ принадлежит F;*

(ii) *отношение доминирования $\trianglelefteq_F$, определенное на F как на выпуклом множестве, совпадает с сужением на F отношения доминирования $\trianglelefteq_Q$, определенного на Q;*

(iii) *любая открытая компонента $D \in \mathcal{O}(F)$ грани F является открытой компонентой множества Q, т. е. $\mathcal{O}(F) \subset \mathcal{O}(Q)$;*

(iv) *отношение частичного порядка $\trianglelefteq^*_F$, определенное на $\mathcal{O}(F)$, совпадает с сужением на $\mathcal{O}(F)$ отношения частичного порядка $\trianglelefteq^*_Q$, заданного на $\mathcal{O}(Q)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (i) Пусть $E \in \mathcal{O}(Q)$ — открытая компонента множества Q, удовлетворяющая условию $E \cap F \neq \varnothing$, и пусть $x \in E \cap F$ (напомним, что в случае, когда $x \in E$ для E используется обозначение E_x). Так как в силу следствия 2 $F_Q(x) := \{y \in K \mid y \trianglelefteq_Q x\}$

является минимальной гранью множества Q, содержащей точку x и $x \in F$, то $F_Q(x) \subset F$. Из равенств $F_Q(x) = F_Q(E_x)$ и $E = E_x$ получаем $E \subset F$.

(ii) Нетрудно видеть, что для любых $x, y \in F$ верна импликация $y \trianglelefteq_F x \Longrightarrow y \trianglelefteq_Q x$. Докажем обратную импликацию. Пусть $x, y \in F$ такие, что $y \trianglelefteq_Q x$. По определению отношения $\trianglelefteq_Q$ имеем тогда $x - \delta(y - x) \in Q$ при некотором $\delta > 0$. Поскольку $x \in (x - \delta(y - x), y)$, из того что F — грань множества Q, заключаем, что $x - \delta(y - x) \in F$ и, следовательно, $y \trianglelefteq_F x$. Таким образом, $y \trianglelefteq_F x \Longleftrightarrow y \trianglelefteq_Q x$ для любых $x, y \in F$.

(iii) Пусть $D \subset \mathcal{O}(F)$. Так как $D \subset F \subset Q$, а семейство $\mathcal{O}(Q)$ является разбиением Q, то существует $E \in \mathcal{O}(Q)$ такое, что $E \cap D \neq \varnothing$ и, следовательно, $E \cap F \neq \varnothing$. Из утверждения (i) заключаем, что $E \subset F$. Поскольку в силу утверждения (ii) отношения доминирования $\trianglelefteq_F$ и $\trianglelefteq_Q$ совпадают на F, то из $E \cap D \neq \varnothing$ следует равенство $E = D$.

(iv) Данное утверждение является следствием (ii). □

Из утверждений теоремы 5 следует, что каждая грань F выпуклого множества Q является дизъюнктным объединением принадлежащих ей открытых компонент множества Q, т. е. $F = \bigsqcup\{E \in \mathcal{O}(Q) \mid E \subset F\}$. Кроме того, для любой грани F выпуклого множества Q подсемейство $\{E \in \mathcal{O}(Q) \mid E \subset F\}$, частично упорядоченное отношением $\trianglelefteq_Q^*$ (равносильно отношением $\trianglelefteq_F^*$), также является верхней полурешеткой (точнее, подполурешеткой верхней полурешетки $(\mathcal{O}(Q), \trianglelefteq_Q^*)$) и совпадает с $(\mathcal{O}(F), \trianglelefteq_F^*)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Lassak M.** Convex half-spaces // Fund. Math. 1984. Vol. 120, no. 1. P. 7–13. https://doi.org/10.4064/fm-120-1-7-13
2. **Гороховик В.В., Семенкова Е.А.** Классификация полупространств по типам в бесконечномерных векторных пространствах // Мат. заметки. 1998. Т. 64, № 2. С. 191–198. https://doi.org/10.4213/mzm1385
3. **Gorokhovik V.V., Shinkevich E.A.** Geometric structure and classification of infinite-dimensional halfspaces // Banach Center Publ. Vol. 53. (Algebraic Analysis and Related Topics: Proc. Conf. / ed. Przeworska–Rolewich D.) Warsaw: PWN-Polish Sci. Publ., 2000. P. 121–138. `https://www.researchgate.net/publication/388932409`
4. **Гороховик В.В.** Ступенчато-аффинные функции, полупространства и отделимость выпуклых множеств с приложениями к выпуклым задачам оптимизации // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 1. С. 51–70. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-1-51-70
5. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.
6. **Bronsted A.** An introduction to convex polytopes. NY: Springer-Verlag, 1983. 160 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1148-8
7. **Diaz Millan R., Roshchina V.** The intrinsic core and minimal faces of convex sets in general vector spaces // Set-Valued and Variational Analysis. 2023. Art. no. 14. 27 p. https://doi.org/10.1007/s11228-023-00671-6
8. **Garcia-Pacheco F.J.** A solution to the faceless problem // J. Geom. Anal. 2020. Vol. 30, no. 4. P. 3859–3871. https://doi.org/10.1007/s12220-019-00220-4
9. **Биркгоф Г.** Теория структур. М.: ИЛ, 1952. 407 с.
10. **Скорняков Л.А.** Элементы теории структур. М.: Наука, 1979. 148 с.
11. **Klee V.** Convex sets in linear spaces // Duke Math. J. 1951. Vol. 18, no. 2. P. 443–466. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-51-01835-2
12. **Райков Д.А.** Векторные пространства. М.: Физматгиз, 1962. 212 с.
13. **Aliprantis C.D., Border K.C.** Infinite-dimensional analysis. A hitchhiker's guide. 3ed. Berlin: Springer-Verlag, 2006. 725 p. https://doi.org/10.1007/3-540-29587-9
14. **Holmes R.** Geometric functional analysis and its applications. NY; Heidelberg; Berlin: Springer–Verlag, 1975. 253 p. ISBN 0-387-90136-1 .
15. **Khazayel B., Farajzadeh A.P., Günther C., Tammer Ch.** On the intrinsic core of convex cones in real vector spaces // SIAM J. Optim. 2021. Vol. 31, no. 2. P. 1276–1298. https://doi.org/10.1137/19M1283148
16. **Klee V.** The structure of semispaces // Math. Scand. 1956. Vol. 4. P. 54–64. https://doi.org/10.7146/math.scand.a-10455

17. **Рубинштейн Г.Ш.** Двойственность в математическом программировании // Успехи мат. наук. 1970. Т. 25, № 5. С. 171–201.
18. **Биркгоф Г.** Теория решеток. М.: Наука, 1984. 568 с.
19. **Rosenstein J.G.** Linear orderings. NY: Acad. Press, 1982. 484 p. ISBN 0080874142 .

Поступила 14.02.2025
После доработки 18.03.2025
Принята к публикации 24.03.2025
Опубликована онлайн 31.03.2025

Гороховик Валентин Викентьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. НАН Беларуси
главный науч. сотрудник
Институт математики НАН Беларуси
г. Минск
e-mail: gorokh@im.bas-net.by

REFERENCES

1. Lassak M. Convex half-spaces. *Fund. Math.*, 1984, vol. 120, no. 1, pp. 7–13. https://doi.org/10.4064/fm-120-1-7-13
2. Gorokhovik V.V., Semenkova E.A. Classification of semispaces according to their types in infinite-dimensional vector spaces. *Math. Notes*, 1998, vol. 64, no. 2, pp. 164–169. https://doi.org/10.1007/BF02310300
3. Gorokhovik V.V., Shinkevich E.A. Geometric structure and classification of infinite-dimensional halfspaces. *Banach Center Publ.* Vol. 53, Algebraic Analysis and Related Topics: Proc. Conf. / ed. Przeworska–Rolewich D., Warsaw: PWN-Polish Sci. Publ., 2000, pp. 121–138. https://www.researchgate.net/publication/388932409
4. Gorokhovik V.V. Step-affine functions, halfspaces, and separation of convex sets with applications to convex jptimization problems. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2021, vol. 313, suppl. 1, pp. S83–S99. https://doi.org/10.1134/S008154382103010X
5. Rockafellar R.T. *Convex analysis*, Princeton, Princeton Univ. Press, 1970, 472 p. https://doi.org/10.1515/9781400873173. Translated to Russian under the title *Vypuklyi analiz*, Moscow, Mir Publ., 1973, 472 p.
6. Bronsted A. *An introduction to convex polytopes.* NY, Springer Verlag, 1983, 160 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1148-8
7. Millan R.D., Roshchina V. The intrinsic core and minimal faces of convex sets in general vector spaces. *Set-valued and Variat. Anal.*, 2023, vol. 31, no. 2, 14 p. https://doi.org/10.1007/s11228-023-00671-6
8. Garcia-Pacheco F.J. A solution to the faceless problem. *J. Geom. Anal.*, 2020, vol. 30, no. 4, pp. 3859–3871. https://doi.org/10.1007/s12220-019-00220-4
9. Birkhoff G. *Lattice theory.* NY, Amer. Math. Soc., 1948. Translated to Russian under the title *Teoriya struktur*, Moscow, Inostr. Liter. Publ., 1952, 407 p.
10. Skornyakov L.A. *Elementy teorii struktur* [Elements of the theory of structures]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 148 p.
11. Klee V. Convex sets in linear spaces. *Duke Math. J.*, 1951, vol. 18, no. 2, pp. 443–466. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-51-01835-2
12. Raikov D.A. *Vector spaces.* Groningen, Netherlands, P. Noordhoff, 1965, 190 p. Original Russian text published in Raikov D. A. *Vektornyye prostranstva*, Moscow, Fizmatgiz Publ., 1962, 212 p.
13. Aliprantis C.D., Border K.C. *Infinite-dimensional analysis. A hitchhiker's guide*, 3ed. Berlin, Heidelberg, Springer Verlag, 2006, 704 p. https://doi.org/10.1007/3-540-29587-9
14. Holmes R. *Geometric functional analysis and its applications.* NY, Springer–Verlag, 1975, 246 p. ISBN: 0-387-90136-1
15. Khazayel B., Farajzadeh A.P., Günther C., Tammer Ch. On the intrinsic core of convex cones in real vector spaces. *SIAM J. Optimiz.*, 2021, vol. 31, no. 2, pp. 1276–1298. https://doi.org/10.1137/19M1283148

16. Klee V. The structure of semispaces. *Math. Scand.*, 1956, vol. 4, pp. 54-–64. https://doi.org/10.7146/math.scand.a-10455
17. Rubinshtein G.S. Duality in mathematical programming and some problems of convex analysis. *Rus. Math. Surv.*, 1970, vol. 25, no. 5, pp. 171–200. https://doi.org/10.1070/RM1970v025n05ABEH003800
18. Birkhoff G. *Lattice theory.* Providence, R.I., Amer. Math. Soc., 1967, vol. 25, 418 p. Translated to Russian under the title *Teoriya reshetok*, Moscow, Nauka Publ., 1984, 568 p.
19. Rosenstein J.G. *Linear orderings.* NY, Acad. Press, 1982, 484 p. ISBN: 0080874142 .

Received February 14, 2025
Revised March 18, 2025
Accepted March 24, 2025
Published online March 31, 2025

Funding Agency: This work was supported by the National Program for Scientific Research of the Republic of Belarus.

Valentin Vikentievich Gorokhovik, Dr. Phys.-Math. Sci., Corresponding Member of NAS of Belarus, Prof., Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, 220072 Belarus, e-mail: gorokh@im.bas-net.by .

Cite this artile as: V. V. Gorokhovik. Internal structure of convex sets and their faces. Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, 2025. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2025-31-2-fon-04